République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieuret de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes-Sidi BelAbbés

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Système Dynamique et Application

Présentée par

BENAISSA CHERIF Amine

Contributions topologiques sur les échelles de temps et leurs applications dans les équations différentielles.

Soutenue le 23/04/2015 devant le jury composé de :

Mr. LAKMECHE Abdlkakader	Professeur, UDL de SBA	Président
Mr. BENCHOHRA Mouffak	Professeur, UDL de SBA	Examinateur
Mr. BELMEKI Mohamed	Professeur, Université de Saida	Examinateur
Mr. HAMMOUDI Ahmed	MCA, CU d'Ain Témouchent	Encadreur

Année Universitaire : 2014 – 2015

Remerciements

En premier lieu, je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur le Professeur A. Hammoudi, qui m'a communique sa passion, sa curiosité et son ouverture mathématique, et m'a toujours prodiguée des pistes de recherche fructueuses. Tout en me laissant une considérable liberté. Je lui suis infiniment reconnaissante pour toute la patience (heureusement) inépuisable, la disponibilité et le dévouement dont il a fait preuve.

J'adresse des remerciements particuliers au Professeur A. Lakmeche. Aujourd'hui, c'est un plaisir et honneur pour moi de le remercier chaleureusement d'avoir accepté la présidence du jury.

Je tiens également à remercier le Professeur M. Benchohra et le Professeur M. Belmeki d'avoir accepté de faire partir du jury.

Je tiens, par ailleurs, à exprimer ma gratitude à tout les personnes qui ont su m'accompagner par leur présence, me soutenir et m'encourager durant ces longues années, lors des moments pénibles de doutes ou de travail intense, je cite en particulier docteur S. Zerkouk et Madame D. Remaoun.

Sans oublier mes tendres parents dont la générosité admirable m'a permis de mener à bien ce travail. Très tôt, dès mon jeune âge, ils m'ont chaleureusement entourée et m'ont enseignée les premiers mots de la vie. A leur sujet, je n'en écrirai pas davantage, faute de trouver les mots qui puissent exprimer ce que je leur dois.

Ma femme dont la présence calme et patiente est pour moi un soutien inestimable, sans les sacrifices qu'elle accepte, en particulier ces derniers mois, la tache aurait été autrement difficile, qu'elle en soit donc ici infiniment remerciée.

J'adresse aussi des remerciements à mes amis (ies) universitaires et extra-universitaires.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
q	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$supp(f)$	Support de la fonction f
$\setminus$	Différence d'ensemble
$p.p$	Presque partout
$(.,.)$	Produit scalaire
$\lambda=\mu_L$	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$
$C\left([a,b]\right)$	Espace des fonctions continues sur $[a,b]$
$C^k\left([a,b]\right)$	Espace des fonctions de classe k dans $[a,b]$
$L^p\left([a,b]\right)$	$\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f \text{ mesurable, } \int_a^b \lvert f(t)\rvert^p\,dt<\infty\right\},\ 1\leq p<\infty$
$L^\infty\left([a,b]\right)$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f \text{ mesurable, } \exists C \text{ tel que } \lvert f(t)\rvert<C,\ \lambda\ p.p \text{ en } [a,b]\}$
$\lVert.\rVert_X$	Norme dans l'espace X
$\mathcal{B}\left([a,b]\right)$	Tribu borélienne sur $[a,b]$.
$\lvert x\rvert$	Module de x
f^+	Partie positive de la fonction f, $f^+=\max\{f,0\}$
f^-	Partie negative de la fonction f, $f^-=\max\{-f,0\}$
$\Delta u_p = div\left(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\nabla u\right)$	$p-$ Laplacien de u

Introduction

La théorie d'échelle de temps a été développé en 1988 par Stefan Hilger [4] dans sa thèse de doctorat et dirigé par Bernd Auldbach afin définir l'analyse continue et discrète. Depuis quelques années, ce type de domaine a intéressé plusieurs chercheurs. Tout d'abord, Lakshmikantham [5] a étudié la mesure de chaine et l'existence de la solution des équations différentielles. De plus, Bohner et Peterson [2], [3] ont étudié des équations dynamiques sur les échelles de temps.

Nous présentons dans cette thèse quelques des espaces fonctionnels sur les échelles de temps, par exemples les espace de Lebesgue et les espace de Sobolev qui sont des outils utilisés dans la méthode variationnelle et les problèmes aux limites.

Les techniques de l'étude des problèmes aux limites sur l'échelle de temps utilisent très fréquemment la notion de réflexivité dans les espaces de Sobolev, ou plus généralement la notion de l'injection et la relation entre les espaces.

Cette thèse est composée de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous introduisons des calcules sur les échelles de temps. Nous présentons également des définitions concernant les fonctions différentiables sur les échelles de temps arbitraires.

Dans le chapitre suivant nous rappelons quelques notions fondamentales de la théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue. Nous introduisons tout d'abord la notion μ_Δ mesure sur les échelles de temps bornée qui est définie dans le chapitre 5 dans [2]. Nous donnons une relation entres la mesure μ_Δ sur l'échelle de temps et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$ et qui permet de passer de l'intégrale sur l'échelle de temps à l'intégrale au sens de Lebesgue étudiées par A. Cabada, D. Vivero dans [1].

Au chapitre trois, nous présentons les principaux résultats concernant les espaces de Lebesgue sur les échelles de temps que nous appellerons $\mathbb{T}$. Nous nous restreindrons dans un premier temps aux espaces notés $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$; avant tout cela, on donne des résultats nécessaires, comme la topologie de cet espace. On montre qu'une fonction dans $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ peut être approchée par une suite de fonctions continu sur $\mathbb{T}$. Nous verrons quelques propriétés essentielles, par exemple, leur complétude, et leur réflexivité. Finalement une partie importante de ce chapitre est réservée aux théorèmes d'injection de Sobolev.

Dans les problèmes variationnels ou les problèmes aux limites, on donne souvent des conditions au bord sur les fonctions u recherchées. Pour cela, on utilise en général les espaces $W_{\Delta,0}^{1,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ qui contiennent toutes les fonctions dans l'espace de Sobolev sur $\mathbb{T}$ et s'annulant sur sa frontière. Nous donnerons les principales propriétés de ces espaces el la généralisation de l'inégalité de Poincaré. Nous terminerons le chapitre en définissant les espaces de Sobolev d'ordre quelconque sur $\mathbb{T}$.

Le dernier chapitre est dédié aux inégalités de Hardy, Hardy-Sobolev et Hardy–Sobolev-Maz'ya sur les échelles de temps qui sont applicable dans la résolution des problèmes aux limites.

Nous commençons par démontrer l'inégalité de Hardy Pavel Rehak dans [29], cette inégalité prouve que l'operateur de Hardy H est continue tel que $H : L_{\Delta}^{p}([a,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^{+}) \rightarrow L_{\Delta}^{p}([a,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^{+})$ donné par

$$(Hf)(t) := \frac{1}{(\sigma(t) - a)} \int_{a}^{\sigma(t)} f(s)\,\Delta s, \qquad \text{pour tout } t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{1}$$

Deuxièmement, on étudie un autre type de l'inégalité de Hardy dans les espaces Sobolev $W_{\Delta,0}^{1,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

$$\int_{a}^{b} \left|u^{\Delta}(t)\right|^{p} \Delta t \geq C_{p} \int_{a}^{b} \frac{|u^{\sigma}(t)|^{p}}{|\sigma(t) - a|^{p}} \Delta t, \quad \text{pour tout } u \in W_{\Delta,0}^{1,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \tag{2}$$

Où C_p est une constante positive et $p \in (1, +\infty)$.

FInalement, nous généralisons l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ye sur les échelles de temps qui s'énonce comme suite :

$$\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t \geq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + C_p\left(\int_a^b |f(t)|^p \Delta t\right)^{\frac{2}{p}},$$

pour tout $f \in W^{1,p}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, avec C_p une constante positive et $p \in (2,+\infty)$.

Dans le dernier chapitre en étudie l'existence et l'unicité de la solution de problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \left(ru^{\Delta}\right)^{\Delta}(t) + h(t)\,u^{\sigma}(t) = -f(t), \quad t \in [a,\rho^2(b)], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Où f, r et h sont des fonctions définit sur $(a,b)\cap\mathbb{T}$. L'application de l'inégalité de Hardy–Sobolev-Maz'ye assure que le problème (2) admet une solution unique dans l'espace de Hilbert $H^1_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R}) = W^{1,2}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Mots clés :

Échelles de temps, Δ- mesure, Lebesgue Δ-ingérable, Les espace de Lebesgue, Les espace de Sobolev, Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ye, Problème aux limites linéaires.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les échelles de temps et nous présentons également des résultats principaux sur la différentiabilité sur les échelles de temps. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les livers de Bohner et Peterson [2], [3].

1.1 Calculs sur les échelles de temps

Définition 1.1.1. *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.2. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit l'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

et l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention, on supposera que :
$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ *(i.e $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un maximum t),*
$\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ *(i.e $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un minimum t).*

Définition 1.1.3. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$. On dira que t est dispersé à droite (resp. dispersé à gauche) si $\sigma(t) > t$ (resp. $t < \rho(t)$). On dira que t est isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche. De plus, si $t < \sup \mathbb{T}$, on dira que t est dense à droite. Si $\sigma(t) = t$. Si $t > \inf \mathbb{T}$ et $\rho(t) = t$, on dira que t est dense à gauche. Ainsi, un point t est dense, s'il est simultanément dense à droite et dense à gauche.*

Définition 1.1.4. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.*

(i) *Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

(ii) *Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite, alors on pose $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, si non $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.1.5. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit la fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Définition 1.1.6. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction on définit la fonctions $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par*

$$f^\sigma(t) := (f o \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

1.2 Différentiabilité sur les échelles de temps

Définition 1.2.1. *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$. On dira que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t où*

$$\left| f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|, \qquad \text{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^\Delta(t)$ la Δ-dérivée de f en t.
Si f est Δ-différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.2.1. *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*

(i) Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.1}$$

(iii) Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ existe et finie. Dans ce cas,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(t) - f(s)}{t-s}. \tag{1.2}$$

(iv) Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t). \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.2. *Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

(i) $f + g$ est Δ-différentiable en t et

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est Δ-différentiable en t et

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg est Δ-différentiable en t et

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t).\end{aligned}$$

(iv) Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)}. \tag{1.4}$$

Définition 1.2.2. *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ Δ-différentiables et ses dérivées rd-continues sur $\mathbb{T}^k$ par :

$$\mathcal{C}_{rd}^1 = \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.2.3. *Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, on a alors :*

(i) Si f est continue, alors f est rd-continue.

(ii) L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.

(iii) Si f est rd-continue et g continue, alors gof est rd-continue.

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$, on note par :

$$\sigma^n(t) = \sigma\left(\sigma^{n-1}(t)\right), \quad \rho^n(t) = \rho\left(\rho^{n-1}(t)\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^{k^n} = \left(\mathbb{T}^{k^{n-1}}\right)^k, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par convention, on supposera que :

$$\sigma^0(t) = \rho^0(t) = t \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}.$$

Définition 1.2.3. *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite deux fois dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, si sa dérivée f^Δ est différentiable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, et on note la dérivée seconde de f par :*

$$f^{\Delta^{(2)}} = \left(f^\Delta\right)^\Delta : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée d'ordre n de f sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$f^{\Delta^n} = \left(f^{\Delta^{n-1}}\right)^\Delta.$$

On notera l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont n fois différentiables et f^{Δ^n} rd-continues sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd}^n = \mathcal{C}_{rd}^n(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}^n(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.2.4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\Delta-$*différentiable.*
Alors $f \circ g$ *est* $\Delta-$*différentiable et on :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Chapitre 2

L'intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous définissons une théorie de la mesure et de l'intégration pour les échelles de temps $\mathbb{T}$ bornées où $a := \max \mathbb{T}$ et $b := \min \mathbb{T}$.

2.1 La mesure de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans cette section on rappelle quelques notions fondamentales de la mesure et l'intégration pour définir la Δ-mesure et la Δ-intégrabilité sur l'échelle de temps bornée.

2.1.1 Notion de mesure sur les échelles de temps

Définition 2.1.1. *Soit $\mathcal{F}_1$ une famille d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite de $\mathbb{T}$ de la forme*

$$[c, d) = \{t \in \mathbb{T} : c \leq t < d\}.$$

où $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$.

Définition 2.1.2. *On définit une mesure additive* $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ *par*

$$m_1\left([c,d)\right) = d - c.$$

Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}\left(\mathbb{T}\right) \to \mathbb{R}$ *est définie par :*
pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$

$$m_1^*\left(E\right) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_{k=1}^{k=n} m\left(A_k\right) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k=m} A_k \ \text{avec}\ A_k \in \mathcal{F}_1\right\} & si \quad b \notin E, \\ +\infty & si \quad b \in E. \end{cases}$$

Définition 2.1.3. *Un ensemble* $A \subset T$ *est* Δ*-mesurable si la relation*

$$m_1^*\left(E\right) = m_1^*\left(E \cap A\right) + m_1^*\left(E \cap \left(\mathbb{T}\backslash A\right)\right),$$

est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.

Maintenant, on considère la famille

$$\mathcal{M}\left(m_1^*\right) = \left\{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \Delta - \text{mesurable}\right\},$$

et la mesure μ_Δ comme étant la restriction de m_1^* sur l'ensemble $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$.

Nous présentons plusieurs concepts de la mesure générale et de l'intégration, appliqués à l'espace mesurable complet avec le triplet $\left(\mathbb{T}, \mathcal{M}\left(m_1^*\right), \mu_\Delta\right)$. Cet espace mesuré est utilisé pour définir la Δ-mesurabilité et la Δ-intégrabilité des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

2.1.2 Les ensembles measurables sur les échelles de temps

Dans cette section, nous présentons un critère pour Δ-mesurabilité des ensembles et nous montrons la relation entre Δ-mesure de Lebesgue et μ_L-mesure de Lebesgue.

Lemme 2.1.1. *L'ensemble de tous les points dispersés à droit de* $\mathbb{T}$ *est dénombrable, c'est-à-dire, il existe* $I \subset \mathbb{N}$ *et* $\left\{t_i\right\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ *tels que*

$$\mathcal{R} := \left\{t \in \mathbb{T} : \sigma\left(t\right) > t\right\} = \left\{t_i\right\}_{i \in I}. \tag{2.1}$$

Démonstration.

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définit par :

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ \sigma(s) & \text{si } t \in (s, \sigma(s)), s \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

Il est évident que la fonction g est montone sur $[a,b]$ est continue sur l'ensemble

$$[a,b] \setminus \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\}.$$

Comme l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction monotone est dénombrable, alors l'ensemble $\mathcal{R}$ est dénombrable. $\square$

Théorème 2.1.1. *Pour tout $t \in \mathbb{T}$ tel que $t < \max \mathbb{T}$. Alors l'ensemble $\{t\}$ est Δ-mesurable et donné par :*

$$\mu_\Delta(\{t\}) = \sigma(t) - t.$$

Démonstration.

Soit t est dispersé à droite.

Comme $\{t\} = [t, \sigma(t)) \in \mathcal{F}_1$, alors l'ensemble $\{t\}$ est Δ-mesurable et on a

$$\mu_\Delta(\{t\}) = m([t, \sigma(t))) = \sigma(t) - t.$$

Autrement, si t est dense à droite, alors il existe une suite décroissante du point $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{T}$ tel que $t_k > t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t_k \longrightarrow t$, donc

$$\{t\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [t, t_k).$$

Comme l'intersection des ensembles Δ-mesurables est mesurable, alors l'ensemble $\{t\}$ est Δ-mesurable.

Grace à la propriété de l'additivité de la mesure μ_Δ on a

$$\mu_\Delta(\{t\}) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \mu_\Delta([t, t_k)) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} t_k - t = 0.$$

$\square$

Pour $E \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap \mathcal{R}\},$$

avec $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$.

Corollaire 2.1.1. *L'ensemble $\mathcal{R}$ est Δ-mesurable et pour tout $E \subset \mathbb{T}$ on a*

$$\mu_\Delta (E \cap \mathcal{R}) = \sum_{i \in I_E} \sigma(t_i) - t_i.$$

Lemme 2.1.2. *Par définition les mesure μ^* et m_1^* on a les propriétés suivantes, soit $E \subset \mathbb{T}$, alors*

(i) $\mu^* (E) \leq m_1^* (E)$.

(ii) Si $b \notin E$ et E n'est pas des points dispersé à droite, alors

$$\mu^* (E) = m_1^* (E).$$

Lemme 2.1.3. *Soit $E \subset \mathbb{T}$ telle que $b \notin E$, alors*

$$m_1^* (E) = \sum_{i \in I_E} \sigma(t_i) - t_i + \mu^* (E).$$

Démonstration.

Supposons que $b \notin E$, par la propriété de mesure extérieure μ^*, on déduit

$$\begin{aligned}
\mu^* (E) &= \mu^* (E \cap (\mathcal{R} \cup (\mathbb{T} \backslash \mathcal{R}))) \\
&= \mu^* (E \cap \mathcal{R}) + \mu^* (E \cap (\mathbb{T} \backslash \mathcal{R})) \\
&= \mu^* (E \cap \mathbb{T} \backslash \mathcal{R}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $b \notin E \cap (\mathbb{T} \backslash \mathcal{R})$ et $E \cap (\mathbb{T} \backslash \mathcal{R})$ n'est pas un point dispersé à droite, par le lemme 2.1.2 nous arrivons à

$$\mu^* (E) = \mu^* (E \cap \mathbb{T} \backslash \mathcal{R}) = m_1^* (E \cap \mathbb{T} \backslash \mathcal{R}).$$

Par le corollaire 2.1.1 nous savons que $\mathcal{R}$ est $\Delta-$ mesurable, alors

$$\begin{aligned}
m_1^* (E) &= m_1^* (E \cap \mathcal{R}) + m_1^* (E \cap \mathbb{T} \backslash \mathcal{R}) \\
&= \sum_{i \in I_E} \sigma(t_i) - t_i + \mu^* (E).
\end{aligned}$$

$\square$

Voici une correspondance intéressante qui existe entre la mesure μ_Δ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.2. *Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors A est Δ-mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante*

$$\mu_\Delta(A) = \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu(A). \tag{2.2}$$

Démonstration.

Soit A est ensemble Δ-mesurable, montrons que A est $\mu-$mesurable.

Supposons que $b \notin A$, soit $E \subset [a,b]$.

(i) Si $b \notin E$, on a l'égalité suivante

$$[a,b] \setminus A = (\mathbb{T} \setminus A) \cup ([a,b] \setminus \mathbb{T}).$$

Pa le lemme 2.1.3, nous avons que A est Δ- mesurable et $\mathbb{T}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap ([a,b] \setminus A)) \\
&\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (\mathbb{T} \setminus A)) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}) \\
&= m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap \mathbb{T} \setminus A) - \sum_{i \in I_{E \cap \mathbb{T}}} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}) \\
&= m_1^*(E \cap A) - \sum_{i \in I_{E \cap \mathbb{T}}} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}) \\
&= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}) = \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}).$$

(ii) Si $b \in E$, comme $\mu^*(\{b\}) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}) \\
&\leq \mu^*((E \cap [a,b)) \cap A) + \mu^*((E \cap [a,b)) \cap [a,b] \setminus \mathbb{T}). \\
&\leq \mu^*(E \cap [a,b)) = \mu^*(E).
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap ([a,b] \setminus A)).$$

Ce qui implique A est Lebesgue mesurable.

Supposons maintenant que $b \in A$.

$A\backslash\{b\}$ est Δ-mesurable, comme la différence de deux ensembles Δ-mesurable, alors $A\backslash\{b\}$ est Lebesgue mesurable.

Puisque $\{b\}$ est Lebesgue mesurable on déduit que A est Lebesgue mesurable.

De la même manière on montre si A est Lebesgue mesurable, alors A est Δ- mesurable.

Par le lemme 2.1.3, on déduit l'égalité (2.2). □

Corollaire 2.1.2. *Soit E est Δ-mesurable. Alors $\mu_\Delta(E) = \mu(E)$ si et seulement si $b \notin E$ et E n'a pas des points dispersé à droite.*

2.2 Mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions sur les échelles de temps

Dans cette section, nous montrons une relation entre les fonctions $\Delta-$mesurables et les fonctiond μ_L-mesurables de Lebesgue.

Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire qui prolonge $\widetilde{f}$ à l'intervalle $[a,b]$, $\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i) & \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i)), \text{ pour } i \in I. \end{cases} \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.1. *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ son extention sur $[a,b]$. Alors, f est $\Delta-$mesurable si et seulement si, $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Démonstration.

Supposons que f est $\Delta-$mesurable.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, par définition $A_\alpha = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \subset \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{-1}([-\infty, \alpha]) &= \left\{t \in [a,b] : \widetilde{f}(t) < \alpha\right\} \\
&= \{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\} \cup \left\{t \in \bigcup_{i \in I} (t_i, \sigma(t_i)) : \widetilde{f}(t) < \alpha\right\} \\
&= \{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\} \bigcup_{i \in I_{A_\alpha}} (t_i, \sigma(t_i)) \\
&= A_\alpha \cup \left(\bigcup_{i \in I_{A_\alpha}} (t_i, \sigma(t_i))\right).
\end{aligned}$$

Puisque f est $\Delta-$mesurable, alors l'ensemble A_α est $\Delta-$mesurable et Lebesgue mesurable. Comme l'union des ensembles mesurables est un ensemble mesurable, alors $\widetilde{f}^{-1}([-\infty, \alpha])$ est Lebesgue mesurable, par suite $\widetilde{f}$ est Lebesgue mesurable.
Supposons maintenant que $\widetilde{f}$ est Lebesgue mesurable.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}^{-1}([-\infty, \alpha])$ est Lebesgue mesurable. Alors

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \widetilde{f}^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap \mathbb{T},$$

et par le Théorème 2.1.2, on déduit que $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ est $\Delta-$mesurable.

Donc, f est $\Delta-$mesurable. □

Lemme 2.2.1. *Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et soit $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i \in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Soient $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction simple et $\Delta-$mesurable avec $g = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \chi_{A_j}$ et soit $\widetilde{g}$ son extention à $[a,b]$.*
Alors, g est $\Delta-$intégrable sur E si et seulement si, $\widetilde{g}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\widetilde{E}$. Dans ce cas on a :

$$\int_E g(s)\Delta s = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{g}(s)ds.$$

Démonstration.
Par définition de g, nous déduisons que $\widetilde{g}$ une fonction simple et

$$\widetilde{g}(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \chi_{\widetilde{A}_j},$$

avec $\widetilde{A_j} = A_j \bigcup\limits_{i\in I_{A_j}} (t_i, \sigma(t_i))$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Puisque g est $\Delta-$mesurable, alors A_j est $\Delta-$mesurable et le Théorème 2.1.2 implique que $\widetilde{A}_j$ est Lebesgue mesurable.

Donc g est Lebesgue $\Delta-$mesurable. Comme μ_L est additive, on a, pour tout $j \in \overline{1,n}$,

$$\begin{aligned}\mu_L\left(\widetilde{A}_j \cap \widetilde{E}\right) &= \mu_L\left(A_j \cap E\right) + \mu_L\left(\bigcup\nolimits_{i\in I_{A_j\cap E}} (t_i, \sigma(t_i))\right)\\ &= \mu_L\left(A_j \cap E\right) + \sum_{i\in I_{A_j\cap E}} (t_i, \sigma(t_i)),\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 2.1.2, on a

$$\mu_L\left(A_j \cap E\right) + \sum_{i\in I_{A_j\cap E}} (t_i, \sigma(t_i)) = \mu_\Delta\left(A_j \cap E\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{g}(s)ds &= \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \mu_L\left(\widetilde{A}_j \cap \widetilde{E}\right) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \mu_\Delta\left(A_j \cap E\right)\\ &= \int\limits_E g(s)\Delta s.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.2. *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i\in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Soient $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ une fonction $\Delta-$mesurable et $\widetilde{f}$ son extention à $[a, b]$. Alors*

$$\int\limits_E f(s)\Delta s = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds.$$

Démonstration.

Puisque f est $\Delta-$mesurable, de la proposition 2.2.1, on déduit que $\widetilde{f}$ est Lebesgue μ_L-mesurable. Alors il existe une suite des fonctions simples $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mesurables au sens de Lebesgue, telles que, pour tout $t \in [a, b]$ on a :

(i) $\quad 0 \leq g_m(t) \leq g_{m+1}(t) \leq \widetilde{f}(t)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$(ii)\quad \lim\limits_{m\to+\infty} g_m(t) = \widetilde{f}(t)$.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, nous définions les fonctions $h_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$h_m(t) := \begin{cases} g_m(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ g_m(t_i) & \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i)), \text{ pour } i \in I. \end{cases}$$

Le Théorème de la convergence monotone implique que

$$\int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds = \lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\widetilde{E}} g_m(s)ds.$$

Maintenant, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, nous definions $f_m = h_{m|\mathbb{T}}$.

Il est claire que les fonctions f_m tsont simple et $\widetilde{f_m} = h_m$.

D'aprés la proposition 2.2.1 et le lemme 2.2.1 nous déduisons que f_m est $\Delta-$mesurable et

$$\int\limits_{E} f_m(s)\Delta s = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f_m}(s)ds = \int\limits_{\widetilde{E}} h_m(s)ds. \tag{2.4}$$

Par construction, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du Théorème de la convergence monotone et on a

$$\int\limits_{E} f(s)\Delta s = \lim_{m\to+\infty} \int\limits_{E} f_m(s)\Delta s. \tag{2.5}$$

D'aprés (2.4) et (4.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int\limits_{E} f(s)\Delta s &= \lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\widetilde{E}} h_m(s)ds \\ &= \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.1. *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i\in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$mesurable et $\widetilde{f}$ son extention à $[a,b]$.*

Alors, f est $\Delta-$intégrable sur E si et seulement si, $\widetilde{f}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\widetilde{E}$. Dans ce cas on a

$$\int\limits_{E} f(s)\Delta s = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds. \tag{2.6}$$

Démonstration.

Il est facile de prouver cela

$$\widetilde{f^+} = \left(\widetilde{f}\right)^+ \qquad \text{et} \qquad \widetilde{f^-} = \left(\widetilde{f}\right)^-.$$

Comme f^+ et f^- sont des fonctions postives, du lemme 2.2.2, on déduit

$$\int\limits_E f^\pm(s)\Delta s = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f^\pm}(s)ds = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}^\pm(s)ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int\limits_E f(s)\Delta s &= \int\limits_E f^+(s)\Delta s - \int\limits_E f^-(s)\Delta s \\ &= \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}^+(s)ds - \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}^-(s)ds \\ &= \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds. \end{aligned}$$

□

À partir du Théorème 2.2.1, nous obtenons le résultat principal de cette section, qui nous donne une formule pour calculer Lebesgue $\Delta-$intégrale.

Théorème 2.2.2. *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup \left(\cup_{i\in I_E}(t_i, \sigma(t_i))\right)$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$intégrable, alors*

$$\int\limits_E f(s)\Delta s = \int\limits_E f(s)ds + \sum_{i\in I_E} \mu\left(t_i\right) f\left(t_i\right). \tag{2.7}$$

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$intégrable sur E, d'aprés Théorème 2.2.1 $\widetilde{f}$ une fonction intégrable sur $\widetilde{E}$ et on a

$$\int\limits_E f(s)\Delta s = \int\limits_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds.$$

Par définition de $\widetilde{E}$ et les propriétés classiques de l'intégrale de Lebesgue, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds &= \int_{\widetilde{E}\cap\mathbb{T}} \widetilde{f}(s)ds + \int_{\widetilde{E}\cap([a,b)\setminus\mathbb{T})} \widetilde{f}(s)ds \\
&= \int_{E} f(s)ds + \sum_{i\in I_E} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} \widetilde{f}(s)ds \\
&= \int_{E} f(s)ds + \sum_{i\in I_E} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t_i)ds \\
&= \int_{E} f(s)ds + \sum_{i\in I_E} \mu(t_i) f(t_i).
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$. Alors pour tout $r, t \in \mathbb{T}$, avec $r \leq t$, on a l'expression suivante :*

$$\int_{[r,t)\cap\mathbb{T}} f(s)\,\Delta s = \int_{[r,t)} f(s)\,ds + \sum_{i\in I_{r,s}} \int_{(t_i,\sigma(t_i))} (f(t_i) - f(s))\,ds, \tag{2.8}$$

où $I_{r,s} = I_{[r,s)\cap\mathbb{T}}$.

Démonstration.

Comme $[r,s) = ([r,s)\cap\mathbb{T}) \cup \left(\bigcup_{i\in I_{r,s}} (t_i, \sigma(t_i))\right)$, nous obtenons

$$\int_{[r,t)} f(s)\,ds = \int_{[r,t)\cap\mathbb{T}} f(s)\,ds + \sum_{i\in I_{r,s}} \int_{(t_i,\sigma(t_i))} f(s)\,ds.$$

D'autre par on a

$$\int_{(t_i,\sigma(t_i))} f(t_i)\,ds = \mu(t_i)\,f(t_i)\,.$$

Ce qui acheve la démonstration. □

Définissons un deuxième type de prolongement pour une fonction $f : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ sur $[a,b]$. Soit la fonction

$$\overline{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i) + \dfrac{f^\sigma(t_i) - f(t_i)}{\mu(t_i)}(t - t_i) & \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i))\,,\ \text{pour } i \in I. \end{cases} \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.3. *Soit $t \in [a,b) \cap \mathbb{T}$. Alors $\overline{f}$ est différentiable en t si et seulement si f est $\Delta-$différentiable en t. Dans ce cas on a*

$$f^{\Delta}(t) = \overline{f}^{'}(t).$$

Démonstration.

Soit $t \in [a,b) \cap \mathbb{T}$. Supposons que $\overline{f}$ est differentiable en t.

(i) Si t est un point dispersé à droit, c'est-à dire $t = t_i$, pour tout $i \in I$, avec $I \subset \mathbb{N}$ et $R = \{t_i\}_{i \in I}$ donnée dans (2.1).

Puisque $\overline{f}$ est continue en t, alors, f est Δ-différentiable en t et par la définition de $\overline{f}$ on a

$$f^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t_i) = \frac{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}{\mu(t_i)} = \overline{f}^{'}(t_i) = \overline{f}^{'}(t).$$

(ii) Si t est un point dense à droite, alors, par la définition de $\overline{f}$, nous savons

$$\begin{aligned} \lim_{s \to t, s \in \mathbb{T}} \frac{f(t) - f(s)}{t-s} &= \lim_{s \to t, s \in \mathbb{T}} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(s)}{t-s} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(s)}{t-s} = \overline{f}^{'}(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est $\Delta-$différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = \overline{f}^{'}(t).$$

Supposons que f est Δ-différentiable en t, avec $t \in ([a,b) \cap \mathbb{T}) \setminus (\mathcal{R} \cup \sigma(\mathcal{R}))$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $\delta > 0$, tel que

$$\left| \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(s)}{t-s} - f^{\Delta}(t) \right| = \left| \frac{f(t) - f(s)}{t-s} - f^{\Delta}(t) \right| \leq \varepsilon, \tag{2.10}$$

pour tout $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$, avec $t \neq s$.

Soit $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap (t_i, \sigma(t_i))$, pour tout $i \in I$, tels que $t_i, \sigma(t_i) \in (t-\delta, t+\delta)$. En définissant

$$m := \min \left\{ \frac{f(t) - f(t_i)}{t - t_i}, \frac{f(t) - f(\sigma(t_i))}{t - \sigma(t_i)} \right\}$$

et

$$M := \min \left\{ \frac{f(t) - f(t_i)}{t - t_i}, \frac{f(t) - f(\sigma(t_i))}{t - \sigma(t_i)} \right\},$$

Par suite on a

$$m \leq \frac{\overline{f}\,(t) - \overline{f}\,(s)}{t-s} \leq M$$

Par (2.10), en déduit que

$$\left| \frac{\overline{f}\,(t) - \overline{f}\,(s)}{t-s} - f^{\Delta}(t) \right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, $\overline{f}$ est différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = \overline{f}^{'}(t).$$

□

Théorème 2.2.4. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$différentiable μ_{Δ}-presque partout sur $\mathbb{T}^k$, alors on a*

$$\int\limits_{[a,t)\cap\mathbb{T}} f^{\Delta}\,(s)\,\Delta s = f(t) - f(a), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.

Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$différentiable.

D'aprés le Théorème 2.2.3 on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[a,t)\cap\mathbb{T}} f^{\Delta}\,(s)\,\Delta s &= \int\limits_{[a,t)} f^{\Delta}\,(s)\,ds + \sum_{i\in I_{a,t}} \int\limits_{(t_i,\sigma(t_i))} \left(f^{\Delta}\,(t_i) - f^{\Delta}\,(s)\right) ds \\
&= \int\limits_{[a,t)} \overline{f}^{'}\,(s)\,ds + \sum_{i\in I_{a,t}} \int\limits_{(t_i,\sigma(t_i))} \left(f^{\Delta}\,(t_i) - \overline{f}^{'}\,(s)\right) ds \\
&= f(t) - f(a) + \sum_{i\in I_{a,t}} \left(f^{\Delta}\,(t_i)\,\mu\,(t_i) - \left(f^{\sigma}\,(t_i) - f\,(t_i)\right)\right) \\
&= f(t) - f(a).
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.5. *Soient $a, b \in \mathbb{T}$, et $f, g \in C^1_{rd}\,(\mathbb{T};\mathbb{R})$, alors*

$$\int\limits_a^b f^{\sigma}(t) g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)\,(b) - (fg)\,(a) - \int\limits_a^b f^{\Delta}(t) g(t)\Delta t. \tag{2.11}$$

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{rd}^1(\mathbb{T}; \mathbb{R})$. D'après le Théorème 1.2.2 en déduit que

$$f^\sigma(t)\, g^\Delta(t) = (fg)^\Delta(t) - f^\Delta(t)\, g(t)\,.$$

Par passage à l'intégrale de a vers b et par le Théorème 2.2.4, on trouve la formule (2.11). $\square$

Chapitre 3

Propriétés topologiques de quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques des espaces fonctionnels sur les échelles de temps.

3.1 Espace des fonctions continues sur les échelles de temps

Soit une échelle de temps $\mathbb{T}$ et soit a, $b \in \mathbb{T}$ tel que $a < b$. On définie l'intervalle $[a, b]_{\mathbb{T}}$ dans $\mathbb{T}$ par :

$$[a, b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

et par conséquent

$$[a, b]_{\mathbb{T}}^{k} := [a, \rho(b)]_{\mathbb{T}}.$$

L'ensemble des fonctions $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues (resp : continues) sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ est noté par $C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}})$ (resp : $C([a, b]_{\mathbb{T}})$).

Remarque 3.1.1. *Les espaces* $C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$ *et* $C\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$ *sont des espaces de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{\infty}=\sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}}|f(t)|.$$

Par la suite, on notera $C_{rd}^{k}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$, *l'ensemble des fonctions n fois* Δ*-différentiables sur* $[a,b]_{\mathbb{T}}^{k^n}$ *telles que* f^{Δ^n} *est rd-continue sur* $[a,b]_{\mathbb{T}}^{k^n}$. *Cet espace est muni de la norme*

$$\|f\|_{[a,b]_{\mathbb{T}}^{k^n}}=\max\left\{\|f\|_{\infty},\left\|f^{\Delta}\right\|_{\infty},...,\left\|f^{\Delta^n}\right\|_{\infty}\right\}.$$

Proposition 3.1.1. *L'espace* $C_{rd}^{k}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$ *est un espace de Banach.*

On désigne par $C_c\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ à support compact, c'est-à-dire

$$C_c(\mathbb{T},\mathbb{R}):=\left\{f\in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right):f(t)=0,\text{ pour tout }t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\backslash K\text{ où }K\text{ est un compact}\right\}.$$

Remarque 3.1.2. *L'espace* $C_c\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)$ *est un espace de Banach pour la norme* $\|.\|_{\infty}$.

3.2 Les espaces de Lebesgue $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Dans cette section, nous allons définir des espaces de Lebesgue $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sur les échelles de temps et étudier quelques propriétés classiques, la généralisation du Théorème de Fischer-Riesz et le Théorème de densité.

3.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Cette section est le développement de l'article [6].

Définition 3.2.1. *Soit* $p\in\mathbb{R}$ *avec* $1\leq p<\infty$ *et soit* $E\subseteq\mathbb{T}$ *un ensemble* Δ*-mesurable ; on pose*

$$L_{\Delta}^{p}(E,\mathbb{R}):=\left\{f:E\longrightarrow\mathbb{R};\ f\ \textit{est}\ \Delta-\textit{mesurable et}\ \int_{E}|f|^{p}\Delta t<\infty\right\}.$$

On note la norme sur $L_{\Delta}^{p}(E,\mathbb{R})$

$$\|f\|_{L_{\Delta}^{p}(E,\mathbb{R})}:=\left(\int_{E}|f(t)|^{p}\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 3.2.2. *Soit $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble Δ-mesurable et soit une fonction f : $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Delta-$mesurable.*

On dit que $f \in L_{\Delta}^{\infty}(E, \mathbb{R})$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(t)|^p \leq C. \qquad \Delta.p.p. \text{ sur } \mathbb{T}.$$

Proposition 3.2.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soient $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ et son extension $\widetilde{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Alors $f \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ si et seulement si $\widetilde{f} \in L_{\lambda}^{p}([a, b], \mathbb{R})$.

De plus on a

$$\|f\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \left\|\widetilde{f}\right\|_{L_{\lambda}^{p}([a,b],\mathbb{R})}. \tag{3.1}$$

Démonstration.

Comme $\widetilde{\mathbb{T}} = [a, b]$, alors par le Théorème 2.2.1, on obtient (3.1). □

Théorème 3.2.1 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $1 \leq p \leq \infty$, soient $f \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $g \in L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tel que q est le conjugué de p. Alors $f.g \in L_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et on a*

$$\|f.g\|_{L_{\Delta}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} \|g\|_{L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.2}$$

Démonstration.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, soient $f \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $g \in L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tel que q est le conjugué de p. Il est clair que

$$\widetilde{f.g} = \widetilde{f}.\widetilde{g}.$$

Par le Théorème 2.2.1 et l'inégalité de Hölder pour les fonctions définie sur $\mathbb{R}$, on obtient (3.2). □

Théorème 3.2.2 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et f, g des fonctions dans l'espace $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors on a*

$$\|f + g\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|g\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

Démonstration.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, soit $f, g \in L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Il est clair que

$$\widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}. \tag{3.3}$$

Par le Théorème 2.2.1 et l'inégalité de de Minkowski pour les fonctions définie sur $\mathbb{R}$, on obtient (3.3) . □

3.2.2 Le théorème de Riesz-Fischer

Théorème 3.2.3. *Soit* $p \in [1, +\infty)$, $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est un espace de Banach pour la norme* $\|.\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}$.

Démonstration.

Il est clair que $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est un espace normé. Pour cela il suiffit de montrer que $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est un espace complet. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $n, m \geq n_0(\varepsilon)$, on a

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon.$$

Par (4.16), nous obtenons que $(\widetilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_\lambda([a, b], \mathbb{R})$. Comme L^p_λ est un espace de Banach, alors il existe $\psi \in L^p_\lambda([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$\widetilde{\varphi_n} \to \psi, \qquad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Comme

$$\int_{t_j}^{\sigma(t_j)} |\widetilde{\varphi_n}(s) - \widetilde{\varphi_m}(s)|^p \, ds \leq \int_a^b |\varphi_n(s) - \varphi_m(s)|^p \, ds, \qquad \text{pour tout } j \in J.$$

Et

$$\int_{t_j}^{\sigma(t_j)} |\widetilde{\varphi_n}(s) - \widetilde{\varphi_m}(s)|^p \, ds = \mu(t_j) |\varphi_n(t_j) - \varphi_m(t_j)|^p , \qquad \text{pour tout } j \in J.$$

Ce qui signifie que pour chaque $j \in J$, $(\varphi_n(t_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $x_j \in \mathbb{R}$, tel que

$$\varphi_n(t_j) \to x_j, \qquad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Montrons que $\psi = x_j$ sur $(t_j, \sigma(t_j))$, pour tout $j \in J$. On a

$$\int_{t_j}^{\sigma(t_j)} |\widetilde{\varphi_n}(s) - \psi(s)|^p \, ds \leq \int_a^b |\varphi_n(s) - \varphi_m(s)|^p \, ds, \qquad \text{pour tout } j \in J.$$

Et

$$\int_{t_j}^{\sigma(t_j)} |\widetilde{\varphi_n}(s) - x_j|^p \, ds = \mu(t_j) |\varphi_n(t_j) - x_j|^p, \qquad \text{pour tout } j \in J,$$

alors

$$\widetilde{\varphi_n} \to \psi, \text{ lorsque } n \to +\infty \text{ and } x_j \in L^p_\lambda((t_j, \sigma(t_j)), \mathbb{R}),$$

ce qui implique que

$$\psi(t) = x_j, \qquad \text{pour tout } t \in (t_j, \sigma(t_j)).$$

Soit

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in \mathbb{T} \diagdown \mathcal{R}, \\ x_j & \text{si } t = t_j, \text{ pour tout } j \in J. \end{cases}$$

Donc

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in \mathbb{T} \diagdown \mathcal{R}, \\ x_j & \text{si } t \in [t_j, \sigma(t_j)), \text{ pour tout } j \in J. \end{cases} \tag{3.4}$$

Par (3.4)

$$\widetilde{\varphi} = \psi \qquad \lambda\text{.p.p sur } [a, b].$$

Donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ver φ dans $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. □

Corollaire 3.2.1. $L^2_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est un espace de Hilbert muni de produit scalaire*

$$(\varphi, \psi) = \int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \varphi(t)\psi(t)\,\Delta t.$$

Théorème 3.2.4. $L^\infty_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{L^\infty_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \inf\{C : |f(t)|^p \leq C.\ \Delta\text{.p.p. sur } \mathbb{T}\}.$$

3.2.3 Quelques résultats de densité

Dans cette section, nous allons généraliser les densités dans les espace L^p classiques (cas continu) aux espaces $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ où $\mathbb{T}$ est une échelle de temps.

On aura recours à l'inégalité algébrique suivante :

Lemme 3.2.1. *Si $1 \leq p < \infty$ et $a, b \geq 0$, alors*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{3.5}$$

Démonstration.
Si $p = 1$, alors (3.5) est vraie. Pour $p > 1$, la fonction $\varphi(x) := x^p$ est convexe sur $(0, +\infty)$. Car $\varphi'(x) = (p-1)x^{p-1} > 0$ pour tout $x \in (0, +\infty)$.

Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$\varphi(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda\varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(b). \tag{3.6}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient l'inégalité (3.5). □

Soit $\mathbb{T}$ une èchelle de temps bornée, on note pour tout $i \in I$,

$$\alpha_i := \inf\{\lambda_i : [\lambda_i, t_i] \subseteq \mathbb{T}\}.$$

Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \mathbb{T} \backslash \bigcup_{i \in I} [\alpha_i, t_i], \\ I_1 &:= \{i \in I : \alpha_i \neq t_i\}, \\ I_2 &:= \{i \in I : \alpha_i = t_i\}. \end{aligned}$$

Nous utilisons souvent la notation d'équi-intégrabilité et le mode de convergence en mesure.

Définition 3.2.3. *Soit $p \in [1, +\infty)$. Une partie $\mathcal{H} \subset L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dite équi-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\Delta(A) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_A |f(t)|\,\Delta t \leq \varepsilon.$$

Lemme 3.2.2. *Une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *si et seulement si l'ensembe* $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ *est équi-intégrable et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure.*

Lemme 3.2.3. *Soit* t *un point dense à droite, alors*

$$\lim_{s\to t}\sigma(s)-t=0. \tag{3.7}$$

Théorème 3.2.5. *Soit* $p\in[1,+\infty[$, *alors l'ensemble* $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $\varphi\in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $\widetilde{\varphi}\in L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$. Comme $C^1([a,b],\mathbb{R})$, est dense dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C^1([a,b],\mathbb{R})$, convergeant vers $\widetilde{\varphi}$ dans $C^1([a,b],\mathbb{R})$. i.e

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{[a,b[}|\psi_n(t)-\widetilde{\varphi}(t)|^p\,dt=0. \tag{3.8}$$

Nous définissons la suite $(u^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u^i_n=t_i-\frac{\mu(t_i)}{(b-a)\,2^n}(t_i-\alpha_i)\,,\ \text{pour tout } i\in I_1,$$

alors pour tout $i\in I_1$, nous avons

$$u^i_n\in(\alpha_i,t_i)\,,\qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Soit

$$A_n=\bigcup_{i\in I_1}\left[u^i_n,t_i\right],\qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

alors

$$\lambda(A_n)=\lambda\left\{\bigcup_{i\in I_1}\left[u^i_n,t_i\right]\right\}=\sum_{i\in I_1}t_i-u^i_n\le\frac{b-a}{2^n}. \tag{3.9}$$

Montrons que $(\chi_{A_n}\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que $(\chi_{A_n}\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vonverge en mesure vers 0 et $\{\chi_{A_n}\psi_n : n\in\mathbb{N}\}$ est équi-intégrable dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{aligned}\lambda\left(\{t\in[a,b]:|(\chi_{A_n}\psi_n)(t)|>\varepsilon\}\right) &= \lambda\left(\{t\in A_n:|\psi_n(t)|>\varepsilon\}\right)\\ &\leq \lambda(A_n)\leq\frac{b-a}{2^n}.\end{aligned}$$

D'autre part on a $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$, ce qui implique que $\{\psi_n:n\in\mathbb{N}\}$ est équi-intégrable dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$.

Alors il existe $\delta>0$, tel que pour tout A dans $\sigma-$algébre Boralienne $\mathcal{B}([a,b])$, tel que $\lambda(A)<\delta$, on obtient

$$\int_A|\psi_n(t)|^p\,dt\leq\varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \int_A|(\chi_{A_n}\psi_n)(t)|^p\,dt\leq\varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n}|\psi_n(t)|^p\,dt=0.$$

Comme les intervalles $\{[u^i_n,t_i]\}_{i\in I}$ sont disjoints, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_1}\int_{u^i_n}^{t_i}|\psi_n(t)|^p\,dt=0.$$

Par Théorème de Rolle's, il existe $\theta^i_n\in(u^i_n,t_i)$, pour tout $i\in I_1, n\in\mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned}\int_{u^i_n}^{t_i}|\psi_n(t)|^p\,dt &= \left(t_i-u^i_n\right)\left|\psi_n\left(\theta^i_n\right)\right|\\ &\geq \left(t_i-\theta^i_n\right)\left|\psi_n\left(\theta^i_n\right)\right|.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_1}\left(t_i-\theta^i_n\right)\left|\psi_n\left(\theta^i_n\right)\right|=0.$$

D'autre part, les intervalles $\{(t_j,\sigma(t_j))\}_{j\in J}$ sont disjoints, alors

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\int_{t_j}^{\sigma(t_j)}|\psi_n(t)-\varphi(t_j)|^p\,dt &= \int_{\bigcup_{j\in J}(t_j,\sigma(t_j))}|\psi_n(t)-\widetilde{\varphi}(t)|^p\,dt\\ &\leq \int_{[a,b[}|\psi_n(t)-\widetilde{\varphi}(t)|^p\,dt.\end{aligned}$$

D'aprés Théorème de Rolle's, il existe $t_j^n \in (t_j, \sigma(t_j))$, pour tout $j \in J, n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{t_j}^{\sigma(t_j)} |\psi_n(t) - \varphi(t_j)|^p \, dt = \mu(t_j) \left|\psi_n\left(t_j^n\right) - \varphi(t_j)\right|^p.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in J} \mu(t_j) \left|\psi_n\left(t_j^n\right) - \varphi(t_j)\right|^p = 0. \tag{3.10}$$

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \psi_n\left(t_j^n\right) & \text{si } t = t_j, \text{ pour tout } j \in J, \\ \dfrac{\psi_n(t_i^n) - \psi_n(\theta_i^n)}{t_i - \theta_n^i}(t - t_i) + \psi_n(t_i^n) & \text{si } \theta_n^i \le t < t_i, \text{ pour tout } i \in I_i, \\ \psi_n(t) & \text{si } t \in \mathcal{F} \bigcup\limits_{i\in I_i} [\alpha_i, t_i[\,. \end{cases}$$

Montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rd-continue.

Il est claire que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue en tous les point dans $\bigcup\limits_{i\in I_i}]\alpha_i, t_i[$.

Soit

$$k_n = \sup_{t\in[a,b]} |\psi_n(t)|, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si $t \in \mathcal{F} \cup \{\alpha_i : i \in I\}$; par (3.7), nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$|\sigma(s) - t| \le \frac{\varepsilon}{3k_n}, \qquad \text{pour tout } s \in \mathcal{U}_\alpha(t).$$

Possons

$$\delta_n = \frac{1}{3} \inf\left(\alpha, \frac{\varepsilon}{k_n}\right).$$

Pour $s \in \mathcal{U}_{\delta_n}(t)$, nous avons trois possibilités

Pour $s \in \mathcal{F} \bigcup\limits_{i\in I_i} [\alpha_i, \theta_n^i[$, alors

$$\begin{aligned} |\psi_n(t) - \varphi_n(s)| &= |\psi_n(t) - \psi_n(s)| \\ &\le k_n |t - s| \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour $s \in [\theta_n^i, t_i]$, avec $i \in$, alors

$$|t - t_i^n| \le \frac{\varepsilon}{3k_n}, \qquad |t_i - t_i^n| \le \frac{\varepsilon}{3k_n}, \qquad \text{et } |s - t_i| \le \frac{\varepsilon}{3k_n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\psi_n(t)-\varphi_n(s)\right| &\leq \left|\psi_n(t)-\psi_n(t_i^n)\right| + \left|\frac{\psi_n(t_i^n)-\psi_n(\theta_i^n)}{t_i-\theta_n^i}\right| |s-t_i| \\
&\leq k_n\left|t-t_i^n\right| + \left|\frac{t_i^n-\theta_i^n}{t_i-\theta_n^i}\right| |s-t_i| \\
&\leq k_n\left|t-t_i^n\right| + k_n \ \ |s-t_i| + k_n\left|t_i-t_i^n\right| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour $s=t_j$, avec $j\in J$, alors $\left|t-t_j^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{3k_n}$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\psi_n(t)-\varphi_n(s)\right| &= \left|\psi_n(t)-\psi_n\left(t_j^n\right)\right| \\
&\leq k_n|t-s| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qu'implique que pour tout $t\in\mathcal{F}\cup\{\alpha_i : i\in I\}$.

$$\lim_{s\to t}\varphi_n(s)=\psi_n(t).$$

Montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$; il suffit de montre que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^p_\lambda(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Par l'inégalité (3.6), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^p\,dt &= \int_{\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i,t_i]} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^p\,dt + \int_{\mathcal{F}\bigcup\limits_{i\in I_i}[\alpha_i,t_i[} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^p\,dt \\
&\leq \int_{\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i,t_i]} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^p\,dt + \int_{[a,b[} |\varphi_n(t)-\widetilde{\varphi}(t)|^p\,dt \\
&\leq 2^{p-1}\int_{\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i,t_i]} |\varphi_n(t)|^p\,dt + 2^{p-1}\int_{\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i,t_i]} |\varphi(t)|^p\,dt \\
&\quad + \int_{[a,b[} |\varphi_n(t)-\widetilde{\varphi}(t)|^p\,dt.
\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $B_n=\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i,t_i]$.

Montrons que $(\chi_{B_n}\widetilde{\varphi})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $L^p_\lambda([a,b],\mathbb{R})$.

Comme $B_n\subset A_n$, par (3.9) on obtient

$$\lambda(B_n)\leq\frac{b-a}{2^n}.$$

D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lambda\left\{t \in [a,b] : \left|\left(\chi_{B_n}\widetilde{\varphi}\right)(t)\right| > \varepsilon\right\} \leq \lambda\left(B_n\right) \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Et

$$\left|\left(\chi_{B_n}\widetilde{\varphi}\right)(t)\right| \leq \left|\widetilde{\varphi}(t)\right|, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\{\chi_{B_n}\widetilde{\varphi} : n \in \mathbb{N}\}$ est equi-integrable dans $L^p_\lambda([a,b], \mathbb{R})$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} \left|\widetilde{\varphi}(t)\right|^p dt = 0, \tag{3.11}$$

comme

$$\int_{B_n} \left|\varphi_n(t)\right|^p dt = \sum_{i\in I_1} \int_{\theta_n^i}^{t_i} \left|\varphi_n(t)\right|^p dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\theta_n^i}^{t_i} \left|\widetilde{\varphi}(t)\right|^p dt &\leq 2^{p-1} \int\limits_{\theta_n^i}^{t_i} \frac{\left|\psi_n(t_i^n) - \psi_n(\theta_i^n)\right|^p}{\left(t_i - \theta_n^i\right)^p}(t - t_i)^p + \left|\psi_n(t_i^n)\right|^p dt \\
&\leq 2^{p-1}\left|\psi_n(t_i^n) - \psi_n(\theta_i^n)\right|^p \left(t_i - \theta_n^i\right) + 2^{p-1}\left|\psi_n(t_i^n)\right|^p \left(t_i - \theta_n^i\right) \\
&\leq 2^{2p}\left|\psi_n(\theta_i^n)\right|^p \left(t_i - \theta_n^i\right) + 2^{2p}\left|\psi_n(t_i^n)\right|^p \left(t_i - \theta_n^i\right).
\end{aligned}$$

Montrons que le deuxième terme converge vers 0

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_1} \left|\psi_n(t_i^n)\right|^p \left(t_i - \theta_n^i\right) &\leq \sum_{i\in I_1} \left|\psi_n(t_i^n)\right|^p \left(t_i - u_n^i\right) \\
&\leq \frac{b-a}{2^n} \sum_{i\in I_1} \mu(t_i)\left|\psi_n(t_i^n)\right|^p,
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{i\in I_1}[\theta_n^i, t_i]} \left|\varphi_n(t)\right|^p dt = 0. \tag{3.12}$$

Alors par (4.18), (4.14) et (3.12) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \left|\varphi_n(t) - \varphi(t)\right|^p dt = 0. \tag{3.13}$$

Donc par (4.16), (3.10) et (3.13) on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{T}\cap[a,b[}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|^p\,\Delta t=0.$$

□

Corollaire 3.2.2. *Soit* $p\in\,]1,+\infty[$, *alors* $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $\varphi\in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, d'aprés l'inégalité de Hölder on a

$$\|\varphi\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}\le(b-a)^{\frac{1}{q}}\|\varphi\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

avec q l'exposant conjugué de p. Alors

$$L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})\hookrightarrow L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R}),$$

donc

$$C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})\subset L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})\subset L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

d'où $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$. □

Proposition 3.2.2. $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *est dense dans* $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *par rapport la topologie induit de* $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, *pour tout* $p\in[1,+\infty[$.

Démonstration.

Soit $\varphi\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Pour tout $i\in I$, nous définissons r_i par :

$$r_i=\{t_j:t_j<t_i\}.$$

Soit $(v^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$v^i_n=\frac{t_i-r_i}{(b-a)2^n}\mu(t_i),\qquad\text{pour tout } i\in I,$$

alors pour tout $i\in I$, nous avons

$$v^i_n\in(r_i,t_i),\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Soit $(t_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans l'échelle de temps $\mathbb{T}$ définit par :

$$t_n^i = \inf\left\{\left[t_i - v_n^i, t_i\right[\cap \mathbb{T}\right\}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ i \in I.$$

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t_i) + \dfrac{\varphi(t_i) - \varphi(t_n^i)}{t_i - t_n^i}(t - t_i) & \text{si } t \in [t_n^i, t_i] \cap \mathbb{T}, \text{ pour tout } i \in I, \\ \lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t) & \text{si } t = b, \\ \varphi(t) & \text{si nom.} \end{cases}$$

Soit $t \in [t_n^i, t_i] \cap \mathbb{T}$, pour tout $i \in I$, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| &\le |\varphi(t_i)| + |\varphi(t)| + \left|\varphi(t_i) - \varphi\left(t_n^i\right)\right| \left|\frac{t - t_i}{t_i - t_n^i}\right| \\ &\le 2\|\varphi\|_\infty + \left|\varphi(t_i) - \varphi\left(t_n^i\right)\right| \\ &\le 4\|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Enfin nous obtenons que

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le 4\|\varphi\|_\infty, \qquad \text{pour tout } t \in [a, b[\cap \mathbb{T}.$$

Il est clair que φ_n une suite continue et montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{[a,b[\cap\mathbb{T}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^p \Delta t &= \int\limits_{\bigcup_{i\in I}[t_n^i, t_i[} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^p \Delta t \\ &\le 4^p \|\varphi\|_\infty^p \int\limits_{\bigcup_{i\in I}[t_n^i, t_i[\cap\mathbb{T}} \Delta t \\ &= 4^p \|\varphi\|_\infty \Delta\left\{\bigcup_{i\in I}\left[t_n^i, t_i\right[\cap \mathbb{T}\right\}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta\left\{\bigcup_{i\in I}\left[t_n^i,t_i\right[\cap\mathbb{T}\right\} &= \lambda\left\{\bigcup_{i\in I}\left[t_n^i,t_i\right[\cap\mathbb{T}\right\}+\sum_{i\in I}\sum_{t\in[t_n^i,t_i[\cap\mathcal{R}}\mu(t)\\
&\leq \sum_{i\in I}\lambda\left(\left[t_n^i,t_i\right[\right)+\sum_{i\in I}\left(t_i-t_n^i\right)\\
&\leq 2\sum_{i\in I}\left(t_i-t_n^i\right)\\
&\leq \sum_{i\in I}v_n^i=\sum_{i\in I}\frac{t_i-r_i}{(b-a)\,2^n}\mu(t_i)\leq\frac{b-a}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent on trouve

$$\|\varphi_n-\varphi\|^p_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}\leq\frac{b-a}{2^{n-1}}\longrightarrow 0,\ \text{lorsque } n\longrightarrow+\infty.$$

□

Lemme 3.2.4. *Soit E,F,G trois espaces tels que $E\subset F\subset G$ et (G,τ) est un espace topologiques si F est dense dans (G,τ) et E est dense dans (F,τ), alors E est dense dans (G,τ).*

Corollaire 3.2.3. *Soit $p\in[1,+\infty[$, alors $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Démonstration.
Soit $p\in[1,+\infty[$, on a

$$C(\mathbb{T},\mathbb{R})\subset C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})\subset L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

Par le Théorème 3.2.5 et la proposition 3.2.2 on déduit que $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et que $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ par rapport la topologie de $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Alors par le lemme 3.2.4 on déduit que $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

□

Corollaire 3.2.4. *Soit $p\in[1,+\infty)$, l'espace $C_c(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Proposition 3.2.3. *$C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Démonstration.

Soit $\varphi \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $\varphi \in C([a,b],\mathbb{R})$. Par la densité de $C^1([a,b],\mathbb{R})$ dans $C([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ qui converge vers φ dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $\varphi_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, t \to \psi_n(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc φ est $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^k$, et φ_n^Δ est donnée par

$$\varphi_n^\Delta(t) = \begin{cases} \psi_n'(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}^k \backslash \mathcal{R}, \\ \dfrac{\psi_n(\sigma(t_j)) - \psi_n(t_j)}{\mu(t_j)} & \text{si } t = t_j \in \mathbb{T}^k, \text{ pour tout } j \in J. \end{cases}$$

Maintenant, montrons que φ_n^Δ est rd-continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $t \in \mathbb{T}^k$ un point dense à droite ou dense à gauche et montrons que

$$\lim_{s\to t}\varphi_n^\Delta(s) = \psi_n'(t), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\psi_n \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$, tel que

$$\left|\psi_n'(t) - \psi_n'(s)\right| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } s \in (t-\delta_1, t+\delta_1), \tag{3.14}$$

On définit Ψ_n sur $(t-\delta_1, t+\delta_1)$ par

$$\Psi_n(s) = \psi_n(s) - \psi_n'(t)(s-t).$$

Par (3.14) on a

$$\left|\Psi_n'(s)\right| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } s \in (t-\delta_1, t+\delta_1)$$

Alors Ψ_n est une fonction $\varepsilon-$Lipschitz sur $(t-\delta_1, t+\delta_1)$, c'est-à-dire

$$|\Psi_n(s) - \Psi_n(\tau)| \le \varepsilon |s-\tau|, \qquad \text{pour tout } s,\tau \in (t-\delta_1, t+\delta_1).$$

On obtient

$$\left|\psi_n'(t) - \frac{\psi_n(\tau) - \psi_n(s)}{\tau - s}\right| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } s,\tau \in (t-\delta_1, t+\delta_1), \text{ et } s \neq \tau.$$

Par (3.7), alors il existe $\delta_2 > 0$, tel que

$$|\sigma(s) - t| < \delta_1, \text{ pour } s \in \mathcal{U}_{\delta_2}(t).$$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$, pour tout $s \in \mathcal{U}_\delta(t)$.

On considère deux cas.

Si s est un point dense à droite, alors

$$\left|\psi_n^{'}(t) - \varphi_n^{\Delta}(s)\right| = \left|\psi_n^{'}(t) - \psi_n^{'}(s)\right| < \varepsilon.$$

Si s est un point dense à gauche, on a $\sigma(s), s \in \mathcal{U}_{\delta_1}(t)$, alors

$$\left|\psi_n^{'}(t) - \varphi_n^{\Delta}(s)\right| = \left|\psi_n^{'}(t) - \frac{\psi_n(\tau) - \psi_n(s)}{\tau - s}\right| < \varepsilon.$$

Enfin nous obtenons que φ_n^{Δ} est une fonction continue aux points denses à droite et la limite existe (fini) aux points denses à gauche dans $\mathbb{T}$.

Il reste à montrer que φ_n converge ves φ dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - \varphi\|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \sup_{t\in\mathbb{T}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |\psi_n(t) - \psi(t)| \\
&\leq \|\psi_n - \psi\|_{C([a,b],\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. □

Corollaire 3.2.5. *Soit* $p \in [1, +\infty[$, *alors* $C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L_\Delta^p(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $p \in [1, +\infty[$, on a $C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pour $\|.\|_\infty$, donc $C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pour $\|.\|_{L_\Delta^p(\mathbb{T},\mathbb{R})}$ et on a $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $L_\Delta^p(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. ALors par le lemme 3.2.4 on obtient que $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $L_\Delta^p(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. □

3.3 Espaces de Sobolev

Dans cette section, nous allons définir et donner des propriétés des espaces de Sobolev sur les échelle de temps.

3.3.1 Définition et propriétés de l'espace $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps compacte. On note $\mathbb{T}_0 := \mathbb{T}\setminus\{\max \mathbb{T}\}$.

Définition 3.3.1. *On dira qu'une fonction $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'ensemble $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ si et seulement si $u \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et qu'il existe une fonction $g : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{T}_0} u(s)\,\phi^{\Delta}(s)\,\Delta s = -\int_{\mathbb{T}_0} g(s)\,\phi^{\sigma}(s)\,\Delta s, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}) \tag{3.15}$$

où

$$C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} : f \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}), \quad f(a) = f(b) = 0 \right\} \tag{3.16}$$

Théorème 3.3.1. *[8]Si $u \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et donc que (3.15) est satisfaite pour une fonction $g \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ absolument continue a $\Delta-$presque partout sur $\mathbb{T}_0$ et on a $x = u$ et $x^{\Delta} = g$. De plus, si g est rd-continue sur $\mathbb{T}_0$, alors il existe une unique fonction $x \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ telle que $x = u$ $\Delta-$presque partout sur $\mathbb{T}_0$ et que $x^{\Delta} = g$ sur $\mathbb{T}_0$.*

Théorème 3.3.2. *L'ensemble $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \|u\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \left\|u^{\Delta}\right\|_{L_{\Delta}^{p}\left(\mathbb{T}^k,\mathbb{R}\right)}. \tag{3.17}$$

D'ailleurs, l'ensemble $H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}) := W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donné pour tout $(\varphi,\psi) \in H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}) \times H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T})$ par

$$(\varphi,\psi)_{H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T})} := (\varphi,\psi)_{L_{\Delta}^{2}(\mathbb{T})} + \left(\varphi^{\Delta},\psi^{\Delta}\right)_{L_{\Delta}^{2}\left(\mathbb{T}^k\right)}. \tag{3.18}$$

Démonstration.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Chauchy dans $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$; donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\varphi_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Chauchy dans $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T})$ et $L_{\Delta}^{p}\left(\mathbb{T}^k\right)$, respectivement. Par conséquent, il existe deux fonctions $\varphi \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T})$ et $\psi \in L_{\Delta}^{p}\left(\mathbb{T}^k\right)$ tels que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T})$ et $\varphi_n^{\Delta} \longrightarrow \psi$ dans $L_{\Delta}^{p}\left(\mathbb{T}^k\right)$. On a

$$\int_{\mathbb{T}_0} \varphi_n(t)\,.f^{\Delta}(t)\,\Delta t = -\int_{\mathbb{T}_0} \varphi_n^{\Delta}(t)\,.f^{\sigma}(t)\,\Delta t, \qquad f \in C_{0,rd}^{1}\left(\mathbb{T}^k\right)$$

Lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\int_{\mathbb{T}_0} \varphi(t) . f^{\Delta}(t) \Delta t = - \int_{\mathbb{T}_0} \psi(t) . f^{\sigma}(t) \Delta t, \qquad f \in C^1_{0,rd}\left(\mathbb{T}^k\right)$$

Donc $\varphi \in W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$, $\varphi^{\Delta} = \psi$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$. $\square$

3.3.2 Réflexivité et séparabilité de l'espace $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Remarque 3.3.1. *Soit ξ_p une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\xi_p(x) = \frac{1 - |x|^{p+1}}{1 - x}.$$

Alors il existe une constante $K_p > 0$ telle que

$$|\xi_p(x)| \geq K_p |x|^p, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'ailleurs de la proposition suivante, on déduit la relation entre les espaces de Sobolev sur $\mathbb{T}$, $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$, et les espaces du Sobolev sur (a,b), $W^{1,p}((a,b))$.

Proposition 3.3.1. *Soit $p \in [1,\infty)$ et $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\overline{\varphi}$ est le prolongement de φ à $[a,b]$ définit dans (2.9).*
Alors $\varphi \in W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$ si et seulement si $\overline{\varphi} \in W^{1,p}((a,b))$.
De plus, il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ dépendant seulement de $b-a$ telles que

$$K_1 \|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}((a,b))} \leq \|\varphi\|_{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})} \leq K_2 \|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}((a,b))}.$$

pour tout $\varphi \in W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$.

Démonstration.
Soient $\overline{\varphi}$, $\widetilde{\varphi^{\Delta}}$ les prolongements de φ et φ^{Δ} sur $[a,b]$ définis dans (2.9) et (2.3), respectivement.
Du lemme 2.2.3 on a

$$\widetilde{\varphi^{\Delta}} = \overline{\varphi}' \qquad p.p \text{ sur } [a,b].$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\varphi}\|^p_{L^p((a,b))} &\leq \int_{\mathbb{T}_0} |\varphi^p(t)|\,dt + 2^{p-1}\sum_{i\in I}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} |\varphi(t_i)|^p + \left|\varphi^\Delta(t_i)\right|^p (t-t_i)^p\,dt \\
&\leq \int_{\mathbb{T}_0} |\varphi^p(t)|\,dt + 2^{p-1}\sum_{i\in I}|\varphi(t_i)|^p \mu(t_i) + \frac{2^{p-1}}{p+1}\sum_{i\in I}\left|\varphi^\Delta(t_i)\right|^p \mu^{p+1}(t_i) \\
&= 2^p\int_{\mathbb{T}_0}|\varphi^p(t)|^p \Delta t + 2^p(b-a)\sum_{i\in I}\left|\varphi^\Delta(t_i)\right|^p \mu^p(t_i) \\
&\leq 2^p\|\varphi\|^p_{L^p_\Delta(\mathbb{T})} + 2^p(b-a)\left\|\varphi^\Delta\right\|^p_{L^p_\Delta(\mathbb{T}^k)} \\
&\leq 2^p\max\{1,b-a\}\|\varphi\|^p_{W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}_\Delta((a,b))} \leq C_p\|\varphi\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T})} + \left\|\overline{\varphi}'\right\|_{L^p((a,b))} \leq \frac{1}{K_1}\|\varphi\|_{W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})}.
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\varphi}\|^p_{L^p((a,b))} &= \int_{\mathbb{T}_0}|\varphi(t)|^p\,dt + \sum_{i\in I}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}\left|\varphi(t_i)+\varphi^\Delta(t_i)(t-t_i)\right|^p dt \\
&\geq \int_{\mathbb{T}_0}|\varphi(t)|^p\,dt + \sum_{\substack{i\in I,\\ \varphi^\Delta(t_i)\neq 0}}\left|\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}\left(\varphi(t_i)+\varphi^\Delta(t_i)(t-t_i)\right)^p dt\right| + \sum_{\substack{i\in I,\\ \varphi^\Delta(t_i)=0}}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}|\varphi(t_i)|^p\,dt.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $i \in I$ tel que $\varphi^\Delta(t_i) \neq 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}\left(\varphi(t_i)+\varphi^\Delta(t_i)(t-t_i)\right)^p dt\right| &\geq \frac{1}{p+1}\sum_{i\in I,\varphi^\Delta(t_i)\neq 0}\frac{1}{|\varphi^\Delta(t_i)|}\left||\varphi(t_i)|^{p+1}-|\varphi(\sigma(t_i))|^{p+1}\right| \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{i\in I}\mu(t_i)\,|\varphi^p(\sigma(t_i))|\left|\xi_p\left(\frac{\varphi(t_i)}{\varphi(\sigma(t_i))}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Par conséquence

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\varphi}\|^p_{L^p((a,b))} &\geq \int_{\mathbb{T}_0}|\varphi(t)|^p\,dt + \frac{K_p}{p+1}\sum_{i\in I,\varphi^\Delta(t_i)\neq 0}\mu(t_i)\,|\varphi(t_i)|^p + \sum_{i\in I,\varphi^\Delta(t_i)=0}\mu(t_i)\,|\varphi(t_i)|^p \\
&\geq \int_{\mathbb{T}_0}|\varphi(t)|^p\,dt + \alpha_p\sum_{i\in I}\mu(t_i)\,|\varphi(t_i)|^p \\
&\geq \alpha_p\|\varphi\|^p_{L^p_\Delta(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

avec $\alpha_p = \inf\left\{1, \frac{K_p}{p+1}\right\}$.Ce qu'implique

$$\begin{aligned}\|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}((a,b))} &\geq \alpha_p \|\varphi\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T})} + \left\|\overline{\varphi}'\right\|_{L^p((a,b))} \\ &\geq \frac{1}{K_2}\|\varphi\|_{W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Ce qui achevé la démonstration. □

Par application du résultat précédant, nous montrons que les propriétés connues de l'espace $W^{1,p}((a,b))$ restent valable pour l'espace $W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})$.

Proposition 3.3.2. *Si $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $W^{1,p}((a,b))$ pour $p \in [1,+\infty)$, alors $\varphi_{|\mathbb{T}}$ appartient à $W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})$ telle que et il existe une constante $T > 0$ dépendant seulement de $b-a$ telle que*

$$\left\|\varphi_{|\mathbb{T}}\right\|_{W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})} \leq T\|\varphi\|_{W^{1,p}((a,b))}, \qquad \textit{pour tout } \varphi \in W^{1,p}((a,b)). \tag{3.19}$$

Démonstration.
Soient $p \in [1,+\infty)$ et $\varphi \in W^{1,p}((a,b))$.
Alors

$$\left(\varphi_{|\mathbb{T}}\right)^\Delta(t_i) = \frac{1}{\mu(t_i)}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} \varphi'(s)\,ds, \qquad \text{pour } i \in I,$$

avec $\mathcal{R} = \{t_i\}_{i\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$. Par suite

$$\left(\varphi_{|\mathbb{T}}\right)^\Delta = \varphi' \qquad p.p \text{ sur } \mathbb{T}\backslash R.$$

Si $p = +\infty$, il est clair que $\varphi_{|\mathbb{T}} \in W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})$ et (3.19) est vérifiée.
Si $p \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\left(\varphi_{|\mathbb{T}}\right)^\Delta\right\|^p_{L^p_\Delta(\mathbb{T}^k)} &\leq \int_{\mathbb{T}\backslash R}\left|\varphi'(s)\right|^p ds + \sum_{i\in I}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}\left|\varphi'(s)\right|^p ds \\ &\leq \|\varphi\|_{W^{1,p}((a,b))}.\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\left\|\varphi_{|\mathbb{T}}\right\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T}^k)} \leq (b-a)^{\frac{1}{q}}\|\varphi\|_{C((a,b))} \leq C(b-a)^{\frac{1}{q}}\|\varphi\|_{W^{1,p}((a,b))}.$$

avec $C > 0$, donc $\varphi_{|\mathbb{T}} \in W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T})$ et (3.19) est vérifiée. □

Proposition 3.3.3. *L'espace de Banch* $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *est réflexif pour tout* $p \in (1, +\infty)$ *et est séparable pour tout* $p \in [1, +\infty)$.

Démonstration.

Soientt l'opérateur et

$$\begin{array}{lll} A_p: & W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}) & \longrightarrow W^{1,p}((a,b)) \\ & \varphi & \longrightarrow A_p\varphi := \overline{\varphi} \end{array}$$

L'opérateur A_p est linéaire et continu. Des proposition 3.3.1 et la proposition 3.3.2 on déduit que $A_p\left(W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})\right)$ est un sous-espace fermé dans $W^{1,p}((a,b))$.
D'autre part, $W^{1,p}((a,b))$ est un espace réflexif pour $p \in (1, +\infty)$ et est séparable pour $p \in [1, +\infty)$. Alors $A_p\left(W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})\right)$ satisfait les mêmes propriétés. □

3.3.3 Les Théorèmes de densité et d'injection

Proposition 3.3.4. *Soit* $p \in [1, \infty)$, *alors il existe une constante* $K > 0$ *dépendant seulement de* $b - a$, *tel que*

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \leq K \|\varphi\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})}, \qquad \textit{pour tout } \varphi \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}), \tag{3.20}$$

et par conséquent, l'injection $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ *est continue.*

Démonstration.

Soit $\varphi \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$, par la proposition 3.3.1 on a $\overline{\varphi} \in W^{1,p}((a,b))$, comme $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C((a,b))$, alors il existe une constante $C_1 > 0$ tel que

$$\|\varphi\|_{C((a,b))} \leq C_1 \|\varphi\|_{W^{1,p}((a,b))}, \qquad \text{pour tout } \varphi \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}(a,b)).$$

Par la proposition 3.3.1, il existe une constante $K_1 > 0$ tel que

$$K_1 \|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}((a,b))} \leq \|\varphi\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})}$$

Par suite on a

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|\overline{\varphi}\|_{C((a,b))} \leq K \|\varphi\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})}.$$

avec $K = \frac{C_1}{K_1}$. Le théorème est démontré. □

Proposition 3.3.5. *Soit $p \in (1, \infty)$. Alors, l'injection $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ est compacte.*

Démonstration.

Soit H_p une boule fermée de rayon 1 dans $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$, nous savons par la proposition 3.3.4 que H_p est un ensemble fermé dans $C(\mathbb{T})$. Donc

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \int_{[t,s)\cap\mathbb{T}} \varphi^{\Delta}(\tau)\,\Delta\tau, \quad \text{pour tout } \varphi \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}) \text{ et pour tout } t, s \in \mathbb{T}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \left\|\varphi^{\Delta}\right\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} |t-s|^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{pour tout } \varphi \in H_p,\ t, s \in \mathbb{T}.$$

Alors H_p est un ensemble équi-continu et borné. Du Théorème d'Ascoli on déduit que H_p est relativement compact. □

Proposition 3.3.6. *Soit $p \in [1, \infty)$. Alors, pour chaque $q \in [1, \infty)$, l'injection $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T})$ est compacte.*

Démonstration.

Soient $q \in [1, \infty)$ et H_p une boule fermée de rayon 1 dans $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$, comme l'injection $C(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T})$ est continue, il reste seulement à montrer que H_p est un compacte dans $L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T})$.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H_p. Alors $(\overline{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $W^{1,p}((a,b))$. Par conséquent, il existe une sous suite $\left(\overline{\varphi}_{n_k}\right)_{n_k\in\mathbb{N}}$ et $\psi \in L^q((a,b))$ tel que $\left(\overline{\varphi}_{n_k}\right)_{n_k\in\mathbb{N}}$ converge vers ψ dans $L^q((a,b))$.

On définit $\varphi = \psi_{|\mathbb{T}}$, donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi_{|\mathbb{T}}$ dans $L_{\Delta}^{q}(\mathbb{T})$. □

Corollaire 3.3.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a les propriétés suivantes :*

(i) L'espace $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

(ii) L'espace $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

(ii) L'espace $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Démonstration.
Il est clair que $C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}) \subset W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et par conséquent $C(\mathbb{T},\mathbb{R}) = \overline{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})}$.
De la même marinière de démonstration (i) on obtient (ii) et (iii).

□

Proposition 3.3.7. *L'espace $C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, pour tout $1 \leq p < \infty$*

Démonstration. Soit $\varphi \in W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, nous savons par la proposition 3.3.1 que $\overline{\varphi} \in W^{1,p}((a,b))$, comme $C^1((a,b))$, est dense dans $W^{1,p}((a,b))$. Alors il existe une suite de fonction $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge qui vers $\overline{\varphi}$ dans $W^{1,p}((a,b))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n = \psi_{n|\mathbb{T}}$, par la proposition 3.3.2, on déduit que $(\varphi_n)_n \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et il existe une constant $T > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left\| (\psi_n - \overline{\varphi})_{|\mathbb{T}} \right\|_{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \|\varphi_n - \varphi\|_{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})} \\ &\leq T \|\psi_n - \overline{\varphi}\|_{W^{1,p}((a,b))}. \end{aligned}$$

Ce qui montre $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$. □

3.4 L'espace $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

3.4.1 Définition et proprités de l'espace $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

L'espace $C^1_{rd}(\mathbb{T})$ est dense dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$ pour $p \in [1,\infty)$, cependant, pour une échelle de temps bornée, il n'est pas vrai que l'ensemble de fonctions $C^1_{0,rd}(\mathbb{T})$ défini dans (3.16) est dense dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$.

Cette section est consacrée à prouver quelques propriétés de la fermeture de $C^1_{0,rd}(\mathbb{T})$ dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$.

Définition 3.4.1. *Soit $p \in [1,\infty)$, on définit l'ensemble $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})$ comme la fermeture de l'ensemble $C^1_{0,rd}(\mathbb{T})$ dans $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$.*
On note $H^1_{0,\Delta}(\mathbb{T}) := W^{1,2}_{0,\Delta}(\mathbb{T})$.

Remarque 3.4.1. *Les espaces* $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *et* $H_{0,\Delta}^{1}(\mathbb{T})$ *ont des norme induite par* $\|.\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})}$, *définir dans* (3.17) *et le produit scalaire induit par* $(.,.)_{H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T})}$, *définir dans* (3.18), *respectivement.*

Remarque 3.4.2. *L'espace* $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *est fermé dans* $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$. *Le théorème* 3.3.2 *et la propositions la* 3.3.3 *assurent que* $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *est un espace de Banach, séparable et réflexif pour* $p > 1$ *et que* $H_{0,\Delta}^{1}(\mathbb{T})$ *est un espace de Hilbert.*

3.4.2 l'inégalité de Poincaré.

L'espace $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ est caractérisé par le résultat suivant :

Proposition 3.4.1. *Soit* $\varphi \in W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$. *Alors,* $\varphi \in W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *si et seulement si* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Démonstration.
Premièrement, supposons que $\varphi \in W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$. Pour une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T})$ telle que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$. Par l'inégalité (3.20) en déduire que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Nous avons la propositions (3.3.1) que $\overline{\varphi} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définir dans (2.9), appartient à $W_{0}^{1,p}((a,b))$ et ainsi, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{0}^{1}((a,b))$ ce qui converge dans $W^{1,p}((a,b))$ vers $\overline{\varphi}$. En définissant $\varphi_n := \psi_{n|\mathbb{T}}$, $n \in \mathbb{N}$. On déduit que $\left(\psi_{n|\mathbb{T}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ vers φ. $\square$

Comme conséquence du résultat précédant, de la propositions 3.3.1 et de la caractérisation de $W_{0}^{1,p}((a,b))$, nous obtenons la caractérisation suivante de $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$.

Corollaire 3.4.1. *Soient* $p \in [1,\infty)$ *et* $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* $\overline{\varphi} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la prolongation de* φ *à* $[a,b]$ *définit dans* (2.9). *Alors* $\varphi \in W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ *si et seulement si* $\overline{\varphi} \in W_{0}^{1,p}((a,b))$.

En utilisons la proposition 3.4.1, pour montré l'inégalité de Poincaré.

Proposition 3.4.2. *Soit $p \in [1, \infty)$, alors il existe une constente $L > 0$ dépendant de $b - a$, tel que*

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})} \leq L \left\|\varphi^{\Delta}\right\|_{L^p_{\Delta}\left(\mathbb{T}^k\right)}, \qquad \textit{pour } \varphi \in W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T}), \tag{3.21}$$

c'est-à-dire, dans $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})$ la norme définie pour chaque $\varphi \in W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})$ par $\left\|\varphi^{\Delta}\right\|_{L^p_{\Delta}\left(\mathbb{T}^k\right)}$ est équivalent au norme $\|.\|_{W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})}$.

Démonstration.

Soit $\varphi \in W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T})$, par le Théorème fondamental du calcul et la proposition 3.4.1, on a l'inégalité suivante

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(a)| + \int_{[a,t)\cap\mathbb{T}} \left|\varphi^{\Delta}(s)\right| \Delta s = \left\|\varphi^{\Delta}\right\|_{L^1_{\Delta}\left(\mathbb{T}^k\right)},$$

pour chaque $t \in \mathbb{T}$. D'aprés l'inégalité de Hölder on obtient (3.21). $\square$

Remarque 3.4.3. *On peut examiner que les fonctions définies pour chaque $\varphi, \psi \in H^1_{0,\Delta}(\mathbb{T})$ on a $\left(\varphi^{\Delta}, \psi^{\Delta}\right)_{L^2_{\Delta}\left(\mathbb{T}^k\right)}$ est un produit scalaire dans $H^1_{0,\Delta}(\mathbb{T})$ et la norme associé équivalent a la norme associés par le produit scalaire $(.,.)_{H^1_{\Delta}(\mathbb{T})}$.*

Corollaire 3.4.2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a les propriétés suivantes :*

(i) L'espace $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

(ii) L'espace $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $C_{0,rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

(iii) L'espace $C^1_{0,rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}_{0,\Delta}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

3.5 Les espaces Sobolev d'ordre $n \geq 2$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps bornée, on note dans cette section

$$a = \min \mathbb{T}, \qquad b = \max \mathbb{T} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{T}^{k^j}_0 = \left[a, \rho^j(b)\right)_{\mathbb{T}}, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Définition 3.5.1. *Soit $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tel que $u \in L^p_{\Delta}(\mathbb{T})$, alors $u \in W^{n,p}_{\Delta}(\mathbb{T})$ si et seulement s'il existe des fonctions $g_j : \mathbb{T}^{k^j} \to \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n$, tels que $g_j \in L^p_{\Delta}\left(\mathbb{T}^{k^j}_0\right)$,*

$$\int\limits_{\mathbb{T}_0} u(s)\, \phi^{\Delta}(s)\, \Delta s = -\int\limits_{\mathbb{T}_0} g_0(s)\, \phi^{\sigma}(s)\, \Delta s, \qquad \textit{pour tout } \phi \in C^1_{0,rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

et pour tout $1 \leq j \leq n$, *on a*

$$\int_{\mathbb{T}_0^{k^j}} g_{j-1}(s)\, \phi^{\Delta}(s)\, \Delta s = -\int_{\mathbb{T}_0^{k^j}} g_j(s)\, \phi^{\sigma}(s)\, \Delta s, \qquad \text{pour tout } \phi \in C^1_{0,rd}\left(\mathbb{T}^{k^j}, \mathbb{R}\right)$$

avec

$$C^1_{0,rd}\left(\mathbb{T}^{k^j}, \mathbb{R}\right) := \left\{ f : \mathbb{T}^{k^j} \longrightarrow \mathbb{R} : f \in C^1_{rd}\left(\mathbb{T}^{k^j}, \mathbb{R}\right), \quad f(a) = f\left(\rho^{j-1}(b)\right) = 0 \right\}.$$

Théorème 3.5.1. *Si* $u \in W_{\Delta}^{n,p}(\mathbb{T})$. *Alors il existe une unique fonction* $x \in W_{\Delta}^{n-1,p}(\mathbb{T})$ *tels que*

$$x = u \ \Delta - p.p \text{ sur } \mathbb{T}_0, \ x^{\Delta^{(j)}} = g_j \ \Delta - p.p \text{ sur } \mathbb{T}_0^{k^j}, \ 1 \leq j \leq n.$$

avec $g_j : \mathbb{T}^{k^j} \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, *sont donnés dans la définition 3.5.1.*

Théorème 3.5.2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \geq 1$. *Alors l'espace* $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{W_{\Delta}^{n,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{j=n} \left\| u^{\Delta^{(j)}} \right\|_{L^p_{\Delta}\left(\mathbb{T}^{k^j},\mathbb{R}\right)}.$$

D'ailleurs, l'ensemble $H_{\Delta}^n(\mathbb{T}) := W_{\Delta}^{n,2}(\mathbb{T})$ *est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donné pour tout* $(\varphi, \psi) \in H_{\Delta}^n(\mathbb{T}) \times H_{\Delta}^n(\mathbb{T})$ *par*

$$(\varphi, \psi)_{H^1_{\Delta}(\mathbb{T})} := \sum_{j=0}^{j=n} \left(\varphi^{\Delta}, \psi^{\Delta}\right)_{L^2_{\Delta}\left(\mathbb{T}^{h^j}\right)}.$$

Proposition 3.5.1. *Soient* $p \in (1, \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *Alors, l'injection* $W_{\Delta}^{n,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^{n-1}(\mathbb{T})$ *est compacte.*

Chapitre 4

Inégalités de Hardy sur les échelles de temps et leur application

Plusieurs inégalités importantes (par exemple : inégalité de Hölder, inégalité de Poincaré...) ont été d'une grande utilité pour l'étude de problèmes de type (elliptiques, paraboliques. . .) dans le cadre d'espaces fonctionnels où la variables dans un ensemble continu. Dans ce chapitre, nous prouvons les inégalités de Hardy sur les échelles de temps.

4.1 Historique

Le cadre classique de l'inégalité de Hardy énoncé pour $f > 0$, intégrable sur l'ouvert $(0, x)$ telle que f^p intégrable sur $(0, \infty)$ avec $p > 1$ est

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p\, dx. \tag{4.1}$$

La constante $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ est le meilleur possible. Cette inégalité a été prouvée par Hardy en 1925 c'est la version continue.

La version discrète de l'inégalité (4.1) est donné par :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} a_k \right\}^p \leq \frac{1}{p-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n^p. \tag{4.2}$$

Dans [21], G. Hardy, J. E. Littlewood, et G. Polya ont développé une autre version de l'inégalité de Hardy dans l'espace Sobolev

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq C_p \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.3}$$

avec $p > 1$ et Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Plusieurs travaux furent réalisés par la suite et bien des généralisations furent ainsi obtenues. L'une des plus achevées avec soin par Filippas, Maz'ya et Tertikas dans [23] constitue à notre avis, l'une des études les plus exhaustives qui soit dans ce domaine, soit Ω borné et convexe dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

$$\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 - \frac{|u(x)|^2}{4d(x,\Omega^c)} \right) dx \leq M(\Omega) \int_\Omega \left(|u(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.4}$$

où $C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions de C^∞ sur Ω et qui sont à support compacte de Ω et $M(\Omega)$ une constante > 0.

Dans [18], Rupert Frank et Michael loss ont prouvé une autre inégalité appelée inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya

$$\left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 - \frac{|u(x)|^2}{4d(x,\Omega^c)} \right) dx \right)^\theta \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 dx \right)^\theta \right) \geq K_{N,\theta} \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{\frac{2}{q}}, \; u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.5}$$

avec $q \geq 2$, $K_{N,\theta}$ une constante > 0, $\theta = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{2}{q}\right)$, Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ tel que $N = 1$ ou $N = 2$.

4.2 Inégalité de Hardy

Dans cette section, nous allons généraliser l'inégalité de Hardy (4.1) sur les échelles de temps non bornées.

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps tel que $a \in \mathbb{T}$ et $\sup \mathbb{T} = \infty$.

Définition 4.2.1. *Soit $f \in L_\Delta^p([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$, tel que $1 < p < \infty$. L'opérateur de Hardy H est défnit par :*

$$(Hf)(t) := \frac{1}{(\sigma(t) - a)} \int_a^{\sigma(t)} f(s) \, \Delta s, \qquad \text{pour tout } t \in [a,\infty)_\mathbb{T}.$$

Le Théorème suivant prouve que l'opérateur de Hardy $H : L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+\right) \to L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+\right)$ est continu.

Théorème 4.2.1. *Soit* $1 < p < \infty$. *Si* $f \in L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+\right)$, *alors* $Hf \in L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+\right)$. *De plus, nous avons l'inégalité suivante*

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{\sigma(t)-a}\int_a^{\sigma(t)} f(\tau)\,d\tau\right)^p dt \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f(\tau)^p\,d\tau,$$

où

$$\|Hf\|_{L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R}\right)} \le C_p \|f\|_{L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R}\right)}, \tag{4.6}$$

avec $C_p \le \dfrac{p}{p-1}$.

Démonstration.

Soit $1 < p < \infty$.

Montrons que l'inégalité (4.6) est vérifiée pour toute fonction $f \in C^1_{rd}\left([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}^+\right)$.

On note

$$F(t) = (Hf)(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\infty)_\mathbb{T}.$$

Ainsi,

$$\mu(t)\,F^\Delta(t) = F^\sigma(t) - F(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\infty)_\mathbb{T}.$$

D'après le Théorème 1.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}(F^p)^\Delta(t) &= pF^\Delta(t)\int_0^1 \left(h\left(F(t)-F^\sigma(t)\right)+F^\sigma(t)\right)^{p-1} dh \\ &\le pF^\Delta(t)\left(F^\sigma(t)\right)^{p-1}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

En utilisant (4.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}(F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1} f &= (F^\sigma)^p - \frac{\alpha}{\alpha-1}(F^\sigma)^{p-1}\left((t-a)F\right)^\Delta \\ &= (F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}F^\sigma - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(t-a)F^\Delta \\ &= -\frac{1}{p-1}(F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{\alpha-1}(t-a)F^\Delta \\ &\le -\frac{1}{p-1}(F^\sigma)^p - \frac{1}{p-1}(F^p)^\Delta(t-a) \\ &= -\frac{1}{p-1}\left(F^p(t-a)\right)^\Delta.\end{aligned}$$

En intègrent de a à t,

$$\int_a^t (F^\sigma)^p (s) \Delta s - \int_a^t \frac{p}{p-1} (F^\sigma)^{p-1} (s) f(s) \Delta s \leq \frac{1}{p-1} F^p(t)(t-a) \leq 0.$$

D'aprés l'inégalité de Hölder (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^t (F^\sigma)^p (s) \Delta s &\leq \frac{p}{p-1} \int_a^t (F^\sigma)^{p-1} (s) f(s) \Delta s \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left(\int_a^t f^p(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^t (F^\sigma)^p (s) \Delta s \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\int_a^b (F^\sigma)^p (s) \Delta s \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b f^p(s) \Delta s. \tag{4.8}$$

Soit $f \in L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, comme $C^1_c([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1_c([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

On note $F_n = Hf_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, pour tous $n, m \geq 1$, on a

$$\|F_{n+m} - F_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \frac{p}{p-1} \|f_{n+m} - f_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, par suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ vers une fonction notée $H \in L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

D'autre part on a

$$\|H\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|H - F^\sigma_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|F^\sigma_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \|H\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} &\leq \lim_{n\to\infty} \|F_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{p}{p-1} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a pour tout $t \in [a,\infty)_\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} |F_n(t) - F(t)| &\leq \frac{1}{\sigma(t) - a} \int_a^{\sigma(t)} |f_n(\tau) - f(\tau)| \, d\tau \\ &\leq (\sigma(t) - a)^{-\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_{L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Comme $(f_n) \in \mathbb{N}$ converge vers f dans $L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers F sur $[a,\infty)_\mathbb{T}$.
D'après l'unicité de la limite, on a :

$$H = F, \qquad \Delta - p.p.$$

Donc

$$\|F\|_{L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R}\right)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p_\Delta\left([a,\infty)_\mathbb{T},\mathbb{R}\right)}, \qquad \text{pour } f \in L^p_\Delta([a,\infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

La preuve est complète. □

Exemple 4.2.1. *Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Alors $\sigma(n) = n + 1$.*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive tel que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}) = L^p_\Delta(\mathbb{N})$, alors l'inégalité (4.2) *donné par :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{k=n+1} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_k)^p.$$

4.3 Inégalité de Hardy-Sobolev

Remarque 4.3.1. *Soit $1 < p < \infty$ et soit ψ une fonction définir sur $[0,1)$ par :*

$$\psi(x) = (1-x)^{1-p} - (p-1)x - 1.$$

Par la croissance de la fonction ψ sur $[0,1)$, on déduit que

$$\psi(x) \geq 0, \qquad \textit{pour tout } x \in [0,1). \tag{4.9}$$

Lemme 4.3.1. *Soit $1 < p < \infty$ et soit ξ une fonction définie sur l'échelle de temps $(a,b]_\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\xi(t) := \frac{1}{p-1}(t-a)^{1-p}.$$

Alors la fonction ξ est Δ-différentielle et

$$\xi^\Delta(t) \leq -(\sigma(t) - a)^{-p}, \qquad \textit{pour tout } t \in (a, \rho(b)]_\mathbb{T}. \tag{4.10}$$

Démonstration.

Soit $t \in (a, \rho(b)]_{\mathbb{T}}$. Si t est un point dispersé à droite, alors

$$\begin{aligned}
\xi^{\Delta}(t) &= \frac{1}{(p-1)} \frac{(\sigma(t)-a)^{1-p}-(t-a)^{1-p}}{\mu(t)} \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{(p-1)} \frac{(1-x(t))^{1-p}-1}{x(t)},
\end{aligned}$$

avec $x(t) = \dfrac{\mu(t)}{\sigma(t)-a}$.

Par l'inégalité (4.9), en déduit l'inégalité(4.10).

Si t est un point dense, alors

$$\begin{aligned}
\xi^{\Delta}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{\xi(t)-\xi(s)}{t-s} \\
&= \frac{1}{p-1} \lim_{s \to t} \frac{(t-a)^{1-p}-(t-a)^{1-p}}{t-s} \\
&= -(t-a)^{-p}.
\end{aligned}$$

D'où (4.10) est vérifiée. □

Théorème 4.3.1. *Soit $1 < p < \infty$. Alors il existe une constante $C_p > 0$ dépendante seulement p tel que l'inégalité*

$$\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^p \Delta t \geq C_p \int_a^b \frac{|f^{\sigma}(t)|^p}{|\sigma(t)-a|^p} \Delta t, \tag{4.11}$$

vérifié pour tout $f \in W_{0,\Delta}^{1,p}([a,b]_{\mathbb{T}})$.

Démonstration.

Soit $f \in W_{0,\Delta}^{1,p}([a,b]_{\mathbb{T}})$, alors

$$\int_a^b \xi(t) \left(|f|^p\right)^{\Delta}(t) \Delta t = -\int_a^b \xi^{\Delta}(t) |f^{\sigma}(t)|^p \Delta t.$$

D'autre part, pour $\phi_p(x) = |x|^p$, pour $x \in \mathbb{R}$. ϕ_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\phi_p'(x)\right| \leq p|x|^{p-1}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En appliquent le Théorème 1.2.4, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|(\phi_p \circ f)^{\Delta}(t)\right| &= \left|f^{\Delta}(t)\int_0^1 \phi_p'(hf(t)+(1-h)f^{\sigma}(t))\,dh\right| \\
&\leq \left|f^{\Delta}(t)\right|\int_0^1 |hf(t)+(1-h)f^{\sigma}(t)|^{p-1}\,dh \\
&\leq p\left|f^{\Delta}(t)\right||g(t)|^{p-1}, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Avec

$$g(t) := \max(|f(t)|, |f^{\sigma}(t)|), \qquad \text{pour tout} t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Par (4.12) et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \xi(t)\,|f^p|^{\Delta}(t)\,\Delta t\right| &\leq \int_a^b \xi^{\sigma}(t)\left||f^p|^{\Delta}(t)\right|\Delta t \\
&\leq p\int_a^b \xi^{\sigma}(t)\,|g(t)|^{p-1}\left|f^{\Delta}(t)\right|\Delta t \\
&\leq p\left\{\int_a^b \xi^{q}(\sigma(t))\,|g(t)|^p\,\Delta t\right\}^{q}\left\{\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^p\Delta t\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p(p-1)^{\frac{p}{1-p}}\left\{\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right\}^{q}\left\{\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^p\Delta t\right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

où q est l'exposent conjugué de p.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^p\Delta t &\geq C_p\left|\int_a^b \xi(t)\,|f^p|^{\Delta}(t)\,\Delta t\right|^p\left\{\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right\}^{1-p} \\
&\geq C_p\left\{-\int_a^b \xi^{\Delta}(t)\,|f^{\sigma}(t)|^p\,\Delta t\right\}^p\left\{\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right\}^{1-p} \\
&\geq C_p\left\{\int_a^b \frac{|f^{\sigma}(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right\}^p\left\{\int_a^b \frac{|f^{\sigma}(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right\}^{1-p} \\
&\geq C_p\int_a^b \frac{|f^{\sigma}(t)|^p}{|\sigma(t)-a|^p}\Delta t. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

□

4.4 Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya

Dans cette section, nous allons généraliser l'inégalité de Hardy-Sobolev–Maz'ya (4.5) sur les échelles de temps.

Soit $\delta : [a,b)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ une fonction définir par

$$\delta(t) := \frac{\mu(t)}{b-\sigma(t)}, \qquad \text{pour } t \in [a,b)_{\mathbb{T}}.$$

Théorème 4.4.1 (Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya). *Soit $q \geq 2$. Si la fonction δ est décroissante sur $[a,b)_{\mathbb{T}}$, alors il existe une constante $C_q > 0$ dépendante seulement de q telle que l'inégalité*

$$\int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t \geq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + C_q\left(\int_a^b |f(t)|^q \Delta t\right)^{\frac{2}{q}}, \tag{4.14}$$

vérifié pour tout $f \in W^{1,q}_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, avec $C_q \geq \frac{4}{(q+2)^2}$.

Démonstration.

Soit g une fonction définir par :

$$f(t) = \eta(t)\,g(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Avec

$$\eta(t) = \sqrt{b-t}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Alors $\eta \in C^1_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}})$ et

$$\eta^{\Delta}(t) = \frac{-1}{\eta(t)+\eta^{\sigma}(t)} \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.15}$$

En utilisant la propriété (4.15), on obtient

$$\eta^{\sigma}(t)\,g^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + \frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\,\eta^{\sigma}(t)}. \tag{4.16}$$

Par (4.15), nous avons

$$\eta^{\sigma}(t) \leq \eta(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\eta^{\sigma}(t)\,g^{\Delta}(t)\right)^2 &= \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 + \frac{f^2(t)}{\left(\eta^2(t)+\eta(t)\,\eta^{\sigma}(t)\right)^2} + \frac{2f^{\Delta}(t)\,f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\,\eta^{\sigma}(t)} \\
&\leq \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 + \frac{2f(t)}{\left(\eta^2(t)+\eta(t)\,\eta^{\sigma}(t)\right)}\left\{\frac{f(t)}{\left(\eta^2(t)+\eta(t)\,\eta^{\sigma}(t)\right)} + f^{\Delta}(t)\right\} - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2} \\
&\leq \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 + \xi(t)\,g^{\Delta}(t)\,g(t) - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Avec

$$\xi(t) := -2\eta^{\Delta}(t)\,\eta^{\sigma}(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Alors ξ est Δ-différentiable pour tous les points dispersés à droite. Soit $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que t est un point dense à droite, alors t est un point d'accumulation , nous avons deux cas.

(a) Le premier cas, il existe $c, d \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que $t \in [c,d] \subset [a,b]_{\mathbb{T}}$, alors ξ est Δ-différentiable en t et $\xi^{\Delta}(t) = 0$.

(b) Le deuxième cas, il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}\cap[a,b]_{\mathbb{T}}$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a t_k est un point isolé et t_k converge vers t lorsque k tend vers ∞. Dans ce cas, $\xi^{\Delta}(t)$ n'existe pas.

Le théorème 2.1.2, implique que

$$\mu_{\Delta}\left(\left\{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \sigma(t) = t \text{ et } t = \lim_{k\longrightarrow\infty} t_k,\ (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}\right\}\right) = 0.$$

Par conséquent, ξ^{Δ} est Δ-différentiable p.p sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Soit $t, s \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$ tel que $t > s$, nous avons

$$\begin{aligned}
\xi(t) - \xi(s) &= \frac{1}{2}\xi(t)\,\xi(s)\left\{\frac{\eta(s)}{\eta^{\sigma}(s)} - \frac{\eta(t)}{\eta^{\sigma}(t)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\xi(t)\,\xi(s)\left\{\sqrt{1+\frac{\mu(s)}{b-\sigma(s)}} - \sqrt{1+\frac{\mu(t)}{b-\sigma(t)}}\right\}.
\end{aligned}$$

Alors ξ une fonction croissante.

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \xi(t)\,g^{\Delta}(t)\,g(t)\,\Delta t &= -\int_a^b [\xi.g]^{\Delta}(t)\,g^{\sigma}(t)\,\Delta t \\
&= -\int_a^b \xi^{\Delta}(t)\,|g^{\sigma}(t)|^2\,\Delta t - \int_a^b \xi(t)\,g^{\Delta}(t)\,g^{\sigma}(t)\,\Delta t \\
&\leq -\int_a^b \xi(t)\,g^{\Delta}(t)\,g(t)\,\Delta t - \int_a^b \xi(t)\,\mu(t)\left|g^{\Delta}(t)\right|^2\Delta t \\
&\leq -\int_a^b \xi(t)\,g^{\Delta}(t)\,g(t)\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$\int_a^b \xi(t)\, g^{\Delta}(t)\, g(t)\, \Delta t \leq 0$$

En utilisant la dernière inégalité et l' inégalité (4.17), nous avons

$$\int_a^b \left|\eta^{\sigma}(t)\, g^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t \leq \int_a^b \left(\left|f^{\Delta}(t)\right|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\right) \Delta t. \tag{4.18}$$

Par le théorème 1.2.4, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \left(|g(t)|^{\frac{q+2}{2}}\right)^{\Delta} &\leq \frac{q+2}{2}\left|g^{\Delta}(t)\right| \int_0^1 |hg(t)+(1-h)\, g^{\sigma}(t)|^{\frac{q}{2}}\, dh \\ &\leq \frac{q+2}{2}\left|g^{\Delta}(t)\right| |g_1(t)|^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Avec $g_1(t) := \max(|g(t)|, |g^{\sigma}(t)|)$, pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

Comme la fonction η est décroissante, nous avons

$$\begin{aligned} |f(t)|^{\frac{q+2}{2}} &= |\eta(t)|^{\frac{q+2}{2}} \int_a^t \left(|g(s)|^{\frac{q+2}{2}}\right)^{\Delta} \Delta s \\ &\leq \frac{q+2}{2} \int_a^t |\eta(t)|^{\frac{q+2}{2}} \left|g^{\Delta}(s)\right| |g_1(s)|^{\frac{q}{2}}\, \Delta s \\ &\leq \frac{q+2}{2} \int_a^t \left|g^{\Delta}(s)\right| |g_1(s)|^{\frac{q}{2}}\, |\eta(s)|^{\frac{q+2}{2}}\, \Delta s. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} |f(t)|^{q+2} &\leq m_q \left(\int_a^b \left|g^{\Delta}(t)\right|^2 \eta^2(t)\, \Delta t\right) \left(\int_a^b |g_1(t)|^q\, \eta^q(t)\, \Delta t\right) \\ &\leq m_q \int_a^b \left(\left|f^{\Delta}(t)\right|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\right) \Delta t \left(\int_a^b |f_1(t)|^q\, \Delta t\right). \end{aligned}$$

Avec $m_q = \frac{1}{4}(q+2)^2$ et

$$f_1(t) := \max(|f_1(t)|, |f_1^{\sigma}(t)|), \qquad \text{pour tout} t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Alors

$$\int_a^b |f_1(t)|^q \Delta t \le (m_q)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int_a^b \left(\left| f^{\Delta}(t) \right|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2} \right) \Delta t \right)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int_a^b |f_1(t)|^q \Delta t \right)^{\frac{q}{q+2}}.$$

Donc

$$\int_a^b \left| f^{\Delta}(t) \right|^2 \ge \frac{1}{4} \int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2} \Delta t + \frac{1}{m_q} \left(\int_a^b |f_1(t)|^q \Delta t \right)^{\frac{2}{q}}.$$

D'où l'inégalité (4.14) est vérifié. $\square$

4.5 Problème aux limites linéaires

Dans [22], J. P. Garcia Azorero et I. Peral Alonso ont étudié l'existence d'une solution pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta_p u + \dfrac{\lambda}{|x|^p} |u|^{p-1} u = -f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

où Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ contenant le point 0, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \ge 2$, $f \in L^q(\Omega)$ où q est le conjugué de p.

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \left(r u^{\Delta} \right)^{\Delta}(t) + h(t)\, u^{\sigma}(t) = -f(t), & t \in [a, \rho^2(b)]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

où $f \in L^2([a,b]_{\mathbb{T}})$ et r, h sont des fonction satisfaisant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $r \in L^{\infty}([a,b]_{\mathbb{T}})$ et il exsite une constante $\alpha > 0$ tel que

$$r(t) > \alpha, \qquad \Delta\text{-p.p } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

$(\mathcal{H}_2)$ Il existe deux constante $\xi, \eta > 0$ tel que

$$h(t) \le \frac{\xi}{b-t} + \eta, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b)_{\mathbb{T}},$$

$(\mathcal{H}_3)$ $\gamma := (\alpha + 8\xi d) - (10\xi d + \eta)\sqrt{d} > 0$, avec $d := b - a$.

$(\mathcal{H}_4)$ La fonction δ est décroissante sur $[a,b)_{\mathbb{T}}$.

L'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.20) est étroitement liés à l'inégalité de Hardy.

Définition 4.5.1. *Une solution faible de* (4.20) *est une fonction* $u \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$ *telle que*

$$\int_a^{\rho(b)} r(t)\, u^{\Delta}(t)\, v^{\Delta}(t)\, \Delta t - \int_a^{\rho(b)} h(t)\, u(t)\, v^{\sigma}(t)\, \Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\, v^{\sigma}(t)\, \Delta t.$$

Le problème (4.20) est un problème variationnel dans l'espace de Hilbert $H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})$. Ce qui nous amène à utiliser le Théorème de Lax Milgram appliqué à la forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_a^{\rho(b)} r(t)\, u^{\Delta}(t)\, v^{\Delta}(t)\, \Delta t - \int_a^{\rho(b)} h(t)\, u^{\sigma}(t)\, v^{\sigma}(t)\, \Delta t.$$

Remarque 4.5.1. *Pour tout* $u \in H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})$, *on a les inégalités suivantes*

$$\|u^{\sigma}\|_{L^2_{\Delta}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})} \leq \|u\|_{L^2_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})} + d\left\|u^{\Delta}\right\|_{L^2_{\Delta}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})}, \tag{4.21}$$

et

$$\frac{1}{2}\int_a^{\rho(b)} \frac{|u^{\sigma}(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t \leq \int_a^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + \int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2\, \Delta t. \tag{4.22}$$

Théorème 4.5.1. *Le problème* (4.20) *admet une solution unique dans* $H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$. *De plus, il existe une constante* $C_0 > 0$ *indépendante* u *et* f *telle que*

$$\|u\|_{H^1_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})} \leq C_0\, \|f\|_{L^2_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})}. \tag{4.23}$$

Démonstration.

Il est clair que la forme bilinéaire $a(u,v)$ est symétrique.

Soit $u, v \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, par l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya (4.14), l'inégalité de Hölder et (4.21), on a

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_a^{\rho(b)} r(t)\left|u^{\Delta}(t)\right|\left|v^{\Delta}(t)\right| \Delta t + \int_a^{\rho(b)} |h(t)|\, |u(t)|\, |v^{\sigma}(t)|\, \Delta t \\
&\leq (\|r\|_{\infty} + 4\,|\xi|\, d)\left\|u^{\Delta}\right\|_{L^2_{\Delta}}\left\|v^{\Delta}\right\|_{L^2_{\Delta}} + |\eta|\, \|u\|_{L^2_{\Delta}}\, \|v^{\sigma}\|_{L^2_{\Delta}} \\
&\leq C\, \|u\|_{H^1_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})}\, \|v\|_{H^1_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})},
\end{aligned}$$

avec $C=\|r\|_{\infty}+4|\xi| d+|\eta|(1+d)$. Donc la forme $a(.,.)$ est continue.

Montrons que $a(.,.)$ est coercive. Soit $u \in H_{0,\Delta}^{1}([a,b]_{\mathbb{T}})$, par (4.22), on trouve

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \alpha \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\Delta}(t)\right|^{2} \Delta t-\xi \int_{a}^{\rho(b)} \frac{\left|u^{\sigma}(t)\right|^{2}}{b-t} \Delta t-\eta \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\sigma}(t)\right|^{2} \Delta t \\
&\geq \alpha \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\Delta}(t)\right|^{2} \Delta t-\xi d \int_{a}^{\rho(b)} \frac{\left|u^{\sigma}(t)\right|^{2}}{(b-t)^{2}} \Delta t-\eta \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\sigma}(t)\right|^{2} \Delta t \\
&\geq \alpha \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\Delta}(t)\right|^{2} \Delta t-2 \xi d \int_{a}^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^{2}}{(b-t)^{2}} \Delta t-(\eta+2 \xi d) \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\sigma}(t)\right|^{2} \Delta t .
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hardy -Sobolev-Maz'ya (4.14) , on trouve

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq (\alpha+8 \xi d) \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\Delta}(t)\right|^{2} \Delta t-(10 \xi d+\eta) \int_{a}^{\rho(b)}|u(t)|^{2} \Delta t \\
&\geq (\alpha+8 \xi d)\left\|u^{\Delta}\right\|_{L_{\Delta}^{2}\left([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}\right)}^{2}-(10 \xi d+\eta) \sqrt{d}\left\|u^{\Delta}\right\|_{L_{\Delta}^{2}\left([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}\right)}^{2} \\
&= \gamma\|u\|_{H_{\Delta,0}^{1}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)}^{2} .
\end{aligned}$$

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, alors le problème (4.20) admet une solution unique dans $H_{0,\Delta}^{1}([a,b]_{\mathbb{T}})$. Grace à l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $L>0$ telle que

$$\|u\|_{H_{\Delta}^{1}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)} \leq L\left\|u^{\Delta}\right\|_{L_{\Delta}^{p}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)},$$

Ce qui

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{\rho(b)} f(t) u^{\sigma}(t) \Delta t &= a(u,u) \geq \gamma \int_{a}^{\rho(b)}\left|u^{\Delta}(t)\right|^{2} \Delta t \\
&\geq \gamma L\|u\|_{H_{\Delta}^{1}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)}^{2} .
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder et l'inégalité (4.22), on obtient l'inégalité (4.23). □

Le Théorème 4.5.1 nous permet de montrer qu'il existe une unique solution $u \in H_{\Delta}^{1}([a,b]_{\mathbb{T}})$ de problème (4.20) .

Définition 4.5.2. *Si la solution u du problème* (4.20) *est dans $H_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}})$. On dit que u est une solution forte.*

Proposition 4.5.1. *Si la fonction r est $\Delta-$différentiable presque partout et $r^{\Delta} \in L_{\Delta}^{\infty}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, alors le problème (4.20) admet une solution unique dans $H_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}})$ et vérifié*

$$\|u\|_{H_{\Delta}^{2}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)} \leq C_1 \|f\|_{L_{\Delta}^{2}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)}, \tag{4.24}$$

où C_1 une constante indépendante de u et f.

Démonstration.

Grace au Théorème 4.5.1, le problème (4.20) admet une solution unique dans $H_{0,\Delta}^{1}([a,b]_{\mathbb{T}})$. Soit u la solution faible de (4.20) et soit $f \in L_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}})$, alors

$$\int_a^b |h(t)\,u(t)|^2\,\Delta t \leq 2\xi^2 \int_a^b \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + 2\eta^2 \int_a^b |u(t)|^2\,\Delta t.$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya $hu \in L_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}})$ et

$$\left(ru^{\Delta}\right)^{\Delta} = -f + hu \in L_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}}).$$

D'autre part on a

$$\left(ru^{\Delta}\right)^{\Delta}(t) - u^{\Delta}(t)\,r^{\Delta}(t) = r^{\sigma}(t)\,u^{\Delta^{(2)}}(t), \qquad \text{pour tout } t \in \left[a,\rho^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{4.25}$$

Ainsi, $u^{\Delta} \in L_{\Delta}^{2}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ et $r^{\Delta} \in L_{\Delta}^{\infty}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, par l'inégalité de Hölder $u^{\Delta}r^{\Delta} \in L_{\Delta}^{2}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ et par (4.25) on déduit que $r^{\sigma}u^{\Delta^{(2)}} \in L_{\Delta}^{2}([a,\rho^2(b)]_{\mathbb{T}})$.
D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on a $r^{\sigma}(t) \geq \alpha$, pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Alors $u^{\Delta^{(2)}} \in L_{\Delta}^{2}([a,\rho^2(b)]_{\mathbb{T}})$, ce qui signifie que la solution $u \in H_{\Delta}^{2}([a,b]_{\mathbb{T}})$.
Par suite on a

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^{\rho^2(b)} \left|u^{\Delta^{(2)}}(t)\right|^2 \Delta t &\leq \int_a^{\rho^2(b)} \left|r^{\sigma}(t)\,u^{\Delta^{(2)}}(t)\right|^2 \Delta t \\
&\leq \int_a^{\rho^2(b)} \left|h(t)\,u(t) - u^{\Delta}(t)\,r^{\Delta}(t) - f\right|^2 \Delta t \\
&\leq 2\xi^2 \int_a^b \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + 2\eta^2 \int_a^b |u(t)|^2\,\Delta t \\
&\quad + \|r\|_{\infty}^2 \int_a^{\rho(b)} \left|u^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t + \int_a^b |f(t)|^2\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^{\rho^2(b)} \left| u^{\Delta^{(2)}}(t) \right|^2 \Delta t &\leq \left(8\xi^2 + \|r\|_\infty^2\right) \int_a^{\rho(b)} \left| u^\Delta(t) \right|^2 \Delta t + 2\eta^2 \int_a^b |u(t)|^2 \Delta t + \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \\
&\leq c_1 \|u\|_{H_\Delta^1}^2 + \|f\|_{L_\Delta^2}^2 ,
\end{aligned}$$

avec $c_1 = 8\xi^2 + \|r\|_\infty^2$. Par l'inégalité (4.23) on obtient (4.24). □

Définition 4.5.3. *Si la solution du problème* (4.20) *est dans* $C^2([a,b]_{\mathbb{T}})$. *On parle alors de la solution classique.*

On déduit immédiatement la proposition ci-dessus

Proposition 4.5.2 (Régularité globale des solutions). *Si la fonction r est k fois $\Delta-$différentiable presque partout et* $r^{\Delta^{(k)}} \in L_\Delta^\infty\left(\left[a, \rho^k(b)\right]_{\mathbb{T}}\right)$.
Soit $f \in H_\Delta^k([a,b]_{\mathbb{T}})$, *alors le problème* (4.20) *admet une solution unique dans* $H_\Delta^{k+2}([a,b]_{\mathbb{T}})$ *et vérifié*

$$\|u\|_{H_\Delta^{k+2}\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)} \leq C_k \|f\|_{H_\Delta^k\left([a,b]_{\mathbb{T}}\right)}, \tag{4.26}$$

où C_k une constante indépendante de u et f.

Grâce au Théorème d'injections Sobolev, on déduit le corollaire suivante

Corollaire 4.5.1. *Si* $r^{\Delta^{(k)}} \in L_\Delta^\infty\left(\left[a, \rho^k(b)\right]_{\mathbb{T}}\right)$ *et* $f \in H_\Delta^k([a,b]_{\mathbb{T}})$ *avec* $k \geq 3$, *alors la solution de problème* (4.20) $u \in C^2([a,b]_{\mathbb{T}})$ *(u une solution classique).*

Bibliographie

[1] A. Cabada, D. Vivero, *Expression of the Lebesgue $\Delta-$integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of $\Delta-$antiderivatives*, *Mathematical and Computer Modelling* **43** (2006), 194-207.

[2] M. Bohner, A.Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales ; An Introduction with Applications*. Birkäuser, Boston, 2001.

[3] M. Bohner and A. Peterson, *Advences in Dynamic Equations on Time Scales,* Boston, 2003.

[4] S. Hilger, *Ein Maßkettenakül mit Anwendung auf Zentrumsannigfaltigkeiten.,* PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.

[5] V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram and B. Kaymakcalan, *Dynamic Systems on Mesure Chains,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[6] A. Benaissa cherif, A. Hammoudi, F. Z. Ladrani, Density problems in $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ space ; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 1(2) July 2013, pp. 178-187.

[7] Martin bohner and gusein sh. guseinov ; Improper integrals on time scales ; Dynamic Systems and Applications 12 (2003) 45-65.

[8] Ravi p. Agarwal, Victoria Otero Espinar, Kanishka perera, and Dolores R. Vivero, Basic properties of sobolev's spaces on time scales, Hindawi Publishing Corporation. Advances in Difference Equations. Volume 2006, Article ID 38121, Pages 1-14.

[9] Martin Bohner and Gusein sh. Guseinov, Multiple integration on time scales, Dynamic Systems and Applications (2005) pp-pp

[10] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso ; Hardy Inequalities and Some Critical Elliptic and Parabolic Problems ; journal of differential equations 144, 441 476 (1998)

[11] Gusein Sh. Guseinov ; Integration on time scales ; J. Math. Anal. Appl. 285 (2003) 107–127.

[12] Stathis Filippas ; Optimizing Improved Hardy Inequalities ; Journal of Functional Analysis 192, 186–233 (2002).

[13] Zhiynog, Wang, Jihui Zhang, Positive solutions for one-diemensional $p-$Laplacien boundary value problems with dependence on the frist order derivative, J.Math. Anal. Appl. 314(2006) -618-30.

[14] Ruyun Ma, Postive solutions of a nonlinear three-point boundary-value proble, J Electronic of Differential, Vol. 1998(1998), No. 34, pp 1-8

[15] L.H.Hrebe, Haiyan Wang, On the existence of positive solutions of ordianary diffrential equations, American Mathematical Society, volume 120, number 3, March 1994.

[16] Hong-Rui Sun, Wan-Tong Li, Existence theory for positive solutions to one-dimensional p-Laplacian boundary value problems on time scales, J. Differential Equations 240 (2007) 217–248.

[17] Bing Liu, Positive Solutions of Singular Three-Point Boundary Value Problems for the One-Dimensional p-Laplacian, Computers and Mathematics with Applications 48 (2004) 913-925.

[18] Rupert l. Frank and Michael loss, Hardy-sobolev-maz'ya inequalities For arbitrary domains. J. Math. Pures Appl. 97 (2012) 39–54.

[19] Adimurthi, nirmalendu chaudhuri, AND mythily ramaswamy, An improved hardy-sobolev inequality and its application, Proceedings Of The American Mathematical Society, Volume 130, Number 2, Pages 489(505).

[20] EVERALDO MEDEIROS, KANISHKA PERERA, KYRIL TINTAREV, Multiplicity results for problems involving the Hardy Sobolev operator via Morse theory, Nonlinear Analysis 72 (2010) 2170 2177

[21] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, Elementary theorems concerning power series with positive coefficents and moment constants of positive functions, J. Reine Angew Math. 157 (1927), 141-158.

[22] J. P. GARCIA AZORERO AND I. PERAL ALONSO, Hardy Inequalities and Some Critical Elliptic and Parabolic Problems, journal of differential equations 144, 441_476 (1998)

[23] S. FILIPPAS, V. G. MAZ'YA, A. TERTIKAS, Sharp Hardy-Sobolev inequalities. C. R. Math. Acad. Sci-Paris 339 (2004), no. 7, 483–486.

[24] S. FILIPPAS, V. G. MAZ'YA, A. TERTIKAS, Critical Hardy-Sobolev inequalities. J. Math. Pures Appl.(9) 87 (2007), no. 1, 37–56.

[25] CRAIG ANDREW SLOANE, Hardy-sobolev-maz'ya inequalities for Fractional integrals on halfspaces and Convex domains. Georgia Institute of Technology (2011).

[26] KONSTANTINOS T. GKIKAS, Hardy And Hardy-Sobolev Inequalities And Their Applications. University of Crete (2011).

[27] BRYAN P. RYNNE, L_2 spaces and boundary value problems on time-scales, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 1217–1236.

[28] UMUT MUTLU OZKAN AND HUSEYIN YILLDIRIM, Hardy-Knopp-type inequalities on time scales, Dynamic Systems and Applications 17 (2008) 477-486.

[29] PAVEL REHAK, Hardy inequality on time scales And its application to Half-linear dynamic quations, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Inequalities and Applications 5 (2005) 495-507.

[30] MAZ'YA, V.G, Sobolev Spaces. Springer-Verlag, Berlin etc. (1985).

Résume

Notre travail se compose en deux parties reliées les uns aux autres. La partie I est essentiellement consacrée à l'étude des propriétés des espaces fonctionnels sur les échelles de temps. La première partie I se départage en deux points. Dans le périmer point on parle sur les espace de Lebesgue qui sont importent dans l'analyse fonctionnels. Dans le deuxième point on s'intéresse à l'étude des propriétés des espaces de Sobolev établi de la théorie des équations aux dérivées partielles et l'analyse.

Dans la partie II de la thèse on s'intéresse à l'inégalité de Hardy qui sont essentielle à l'application dans le problème aux limites.

Abstract

Our work consists of two parts connected to each other. Part I is primarily devoted to the study of the properties of functional spaces on time scales. Part I is in two tiebreaker points. In talking points expire on the Lebesgue spaces which are imported into the functional analysis. In the second point we are interested in studying the properties of Sobolev spaces established theory partial differential equations and analysis.

In Part II of the thesis we are interested in Hardy inequalities which are essential for the application in the boundary value problem