N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

THESE
DE DOCTORAT

Présentée par

MANSOUR Khaled Ben Walid

Spécialité : *MATHEMATIQUES*
Option : *Systèmes Dynamiques et Applications*

Intitulée

Contribution à l'étude de stabilisation associée à certaines équations hyperboliques non linéaires

Soutenu le 13 Mai 2015
Devant le jury composé de :
Président :
Mr. Abdelkader LAKMECHE, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes
Examinateurs :
Mr. Abbes BENAISSA, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes
Mr. Mustapha YEBDRI, Professeur à l'Université Aboubakr Belkaid de Tlemcen
Mr. Ghouti DJELLOULI, Maître de Conférences A, Université de Saïda
Directeur de thèse :
Mr. Soufiane MOKEDDEM, Maître de Conférences A, Université de Sidi Bel Abbes

Dédicaces

C'est avec fierté que je dédie ce modeste travail à ma très chère mère qui, malgré les circonstances difficiles m'a aidé à terminer mes études, concrétiser mon but et qui ma beaucoup soutenu afin que je réussisses.

A mon très cher père qui s'est tant donné et sacrifié pour moi pour que je réussisses dans mes études et qui a attendu ce jour avec impatience.

Merci maman et papa pour votre soutien et encouragements et la chance que vous m'avez donné pour finir mes études, je vous souhaite une longue vie et une bonne santé.

Egalement, à mes frères Zaki et Chawchi et à mes sœurs Khaerour et Asma.

A toute ma famille et mes amis.

Et à tous ceux que j'aime

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail.

*J'exprime ma profonde gratitude envers Monsieur **Soufiane MOKEDDEM** pour sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail. Je n'omets pas de lui témoigner toute mon estime.*

*Mes sincères remerciements vont à Monsieur **Abdelkader LAKMECHE**, je suis très sensible à l'honneur que vous me faites en acceptant d'être le président du jury de cette thèse.*

*Mes remerciements les plus respectueux vont aussi à Monsieur **Abbes BENAISSA**, Monsieur **Mustapha YEBDRI** et Monsieur **Ghouti DJELLOULI** qui m'ont fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être examinateurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

Je remercie encore tous mes enseignants et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Un grand merci à tous mes amis.

Table des matières

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, présente un sujet important dont les premiers pas remontent à d'Alembert avec l'équation des ondes et à Euler pour des équations des ondes décrivant l'évolution d'un fluide.

Cette thèse se propose d'étudier certaines équations aux dérivées partielles du type hyperbolique faisant intervenir l'operateur divergentiel $\mathrm{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u)$.

L'objet principal de ce manuscrit concerne l'étude du comportement asymptotique des solutions globales d'une équation construite à partir du p-Laplacien défini par, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u)$ avec $p \geq 2$. L'aspect non linéaire d'un tel opérateur rend l'étude technique plus difficile que dans le cas où $p = 2$.

On se concentera sur des équations soumises à l'action d'un phénomène extérieur qui peut être de nature diverse ; on peut citer l'action de gravité, le frottement, la chaleur, etc. Ces phénomènes qui font décroitre l'énergie sont modélisés le plus souvent par des termes dissipatifs.

On démontrera que l'énergie notée $E(t)$ vérifie une inégalité intégrale et on déduira sa vitesse de décroissance vers 0.

On se penchera plus précisément sur des cas de stabilité uniforme où l'énergie $E(t)$ doit vérifier des estimations du type

$$E(t) \quad \leq \quad C\,G(t) \qquad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue décroissante satisfaisant

$$G(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad t \longrightarrow +\infty.$$

Rappelons ici que la dissipation découle du fait qu'on ait une fonctionnelle strictement convexe et strictement décroissante dépendant effectivement du temps. La fonctionnelle en question est souvent liée à une énergie c'est pourquoi on parle d'estimation de l'énergie.

Notre démonstration repose essentiellement sur la méthode des multiplicateurs et quelques inégalités intégrales introduites par Komornik **[18]**, Haraux **[14]** et Martinez **[23]**. L'étude fait aussi appel au concept des ensembles stables de Sattinger **[28]** ainsi que quelques propriétés sur les espaces de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.

Ce manuscrit est structré en cinq chapitres :

Le premier chapitre qui présente en fait des résultats préliminaires, a pour but de rappeler quelques définitions concernant surtout les espaces de fonctions continues, les espaces L^p, ainsi que quelques inégalités usuelles, à savoir l'inégalité de Hölder et Young. De telles inégalités seront très utiles lors des passages aux estimations présentes dans une grande partie de ce travail.

On avait aussi besoin de rappeler quelques propriétés des espaces de Sobolev en dimension n. Rappelons qu'en physique l'espace de Sobolev est souvent appelé espace d'énergie au sens où il est constitué de fonctions d'énergie finies (c'est à dire des normes $\| \,.\, \|_{H^1(\Omega)}$). Nous avons aussi donné un bref aperçu sur certaines inégalités de Sobolev ainsi que les différentes formes que peut avoir la formule de Green qui présente un outil de base dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

Le deuxième chapitre est consacré aux inégalités intégrales. On rappel d'abord quelques inégalités intégrales classiques introduites par Komornik **[18]** et Haraux **[14]**. Ensuite, on donne une forme plus générale à ces inégalités, c'est la forme introduite par Martinez **[23]** et dont l'idée consiste à introduire des fonctions poids. Il est important de noter que l'estimation du taux de décroissance de l'énergie repose essentiellemnt sur ces inégalités.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'équation des ondes non linéaire de type p-Laplacien avec une dissipation de type m-Laplacien. On considère le problème de la forme,

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) - a\operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t) = b|u|^{r-2}u \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ avec $a, b > 0$ et p, m, $r \geq 2$ des nombres réels.

Dans un premier temps et en combinant l'idée introduite par Ye **[32]** ainsi que le concept des ensembles stables de Sattinger **[28]**, on montre l'existence d'une solution globale pour des conditions initiales $(u_0, u_1) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et u_0 dans l'ensemble stable choisit. Par la suite, on détermine le comportement asymptotique de l'énergie. Plus justement on donne une estimation de sa vitesse de décroissance vers 0.

Les inégalités intégrales introduites par Haraux **[14]** et Komornik **[19]** restent l'outil de base nous permettant d'aboutir à de telles estimations.

Les résulats obtenus dans ce chapitre on fait l'objet d'un article paru dans Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (voir **[25]**).

Dans le quatrième quatre, on considère le problème aux limite à valeurs initiales pour l'équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation forte (de la forme Δu_t), suivant :

$$\begin{cases} (|u_t|^{l-2}u_t)_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) - \Delta u_t + g(x,u) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,+\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

Pour p, $l \geq 2$, on détermine le comportement asymptotique de l'énergie, en imposant certaine condition sur la fonction g. Les résultats obtenus étendent dans un certain sens ceux démontrés par Chen, Yao and Shao **[10]**.

Dans le cinquième chapitre, on considère l'équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation faible de la forme,

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) + \sigma(t)(u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où σ est une fonction positive vérifiant certaines conditions. A l'aide de nouvelles inégalités intégrales introduite par Martinez **[23]** et dont la preuve repose sur la construction d'une fonction poids liée au comportement asymptotique du terme dissipatif $(\sigma(t)(u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)))$; on aboutit à des résultats de décroissance polynomiale et exponentielle concernant l'énergie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette première partie, nous poserons les définitions et les résultats de base qui nous serons utiles par la suite. Nous nous somme contentés donc de donner un bref aperçu de certaines notions de base. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter les ouvrages **[1]** et **[9]**.

1.1 Les espaces de fonctions continues et de classe C^k

Définition 1.1.1. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue si $\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0$, tel que

$$x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$$

où la norme de $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne.

Définition 1.1.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit :
$C^0(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}|$ u est continue $\}$
$C^0(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}|$ u est continue et se prolonge continument à $\overline{\Omega}\}$

Exemple 1.1.1. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f se prolonge continûment à $\overline{\Omega} = \mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$. Ainsi

$f \in C^0(\overline{\Omega})$

Définition 1.1.3. Sur $C^0(\overline{\Omega})$, on pose l'application

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_{C^0}: & C^0(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|. \end{array}$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^0}$ ainsi définie est une norme sur $C^0(\overline{\Omega})$. De plus, $(C^0(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^0})$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u :\longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toute ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Plus formellement, $u :\longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k sur Ω si $\nabla^m u \in C^0(\Omega)$. $\forall m \in \{0, 1, ..., k\}$ où

$$\nabla^m u = \frac{\partial^m u}{\partial^{m_1} x_1 \partial^{m_2} x_2 ... \partial^{m_n} x_n} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = m.$$

On pose alors,

$C^k(\Omega)$ =$\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,|\,$ u est de classe C^k sur $\Omega\}$

$C^k(\overline{\Omega})$ =$\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, u \in C^k(\Omega)$ et toutes ses dérivées partielles jusqu' à l'ordre k se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$ $\}$.

Ainsi que

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega), \quad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\overline{\Omega})$$

Définition 1.1.5. Sur $C^k(\overline{\Omega})$. On pose l'application

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_{C^k}: & C^k(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \max\limits_{0\leq m\leq k} \left(\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla^m u(x)| \right). \end{array}$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^k}$ ainsi définie est une norme sur $C^k(\overline{\Omega})$. De plus, $C^k(\overline{\Omega})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Définition 1.1.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit le support d'une fonction $u \in C^k(\Omega)$, respectivement d'une fonction $u \in C^k(\overline{\Omega})$, comme étant l'ensemble,

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \,|\, u(x) \neq 0\}}.$$

Pour $k \geqslant 0$, on pose alors $C_0^k(\Omega)$, respectivement $C_0^k(\overline{\Omega})$, l'ensemble des fonctions $C_0^k(\Omega)$, respectivement des fonctions $C_0^k(\overline{\Omega})$, pour lesquelles le support de u est compact dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$. Pour tout $u \in C^0(\Omega)$ et pour tout sous-ensemble compact D de Ω, on pose

$$[u]_{C^{0,\alpha}(D)} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \mid x, y \in D,\, x \neq y \right\}.$$

On définit alors

$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^0(\Omega) \mid [u]_{C^{0,\alpha}(D)}$ est finie, pour tout sous-ensemble compact $D \subset \Omega\,\}$

et

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup \left\{ [u]_{C^{0,\alpha}(D)} \mid D \text{ est un sous ensemble compact de } \Omega \right\}.$$

Remarque 1.1.1. Ainsi, $\forall\, u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha$, $\forall x, y \in \Omega$.

Définition 1.1.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]\,0,1]$. On définit

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid [u]_{C^{0,\alpha}} < \infty\}.$$

On peut alors munir $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ de la norme $\|.\|_{C^{0,\alpha}}$ définie par

$$\|.\|_{C^{0,\alpha}} := \|.\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}\,, \quad \forall u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

L'espace $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|.\|_{C^{0,\alpha}}$ est alors est un espace de Banach.

Définition 1.1.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]\,0,1]$. On définit alors :

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \nabla^k u \in C^{0,\alpha}(\Omega)\}.$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\Omega) \mid [\nabla^k u]_{C^{0,\alpha}} < \infty\}.$$

Définition 1.1.10. Pour tout $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. On pose

$$\|.\|_{C^{k,\alpha}} := \|.\|_{C^k} + [\nabla^k u]_{C^{0,\alpha}}.$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^{k,\alpha}}$ ainsi définie est une norme et que $(C^k(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^{k,\alpha}})$, est un espace de Banach.

Remarque 1.1.2. par abus de notation, on note $C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$ et $C^k(\overline{\Omega}) = C^{k,0}(\overline{\Omega})$, pour $k \geq 0$.

1.2 Les espaces L^p

Définition 1.2.1 (Fonction mesurable).

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble,

$$E_\alpha = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.2.2 (Fonction intégrable).

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si,

$$\int_\Omega |f| < \infty.$$

Définition 1.2.3 (Espace de Lebesgue).

Soit $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble,

$$L^P(\Omega) = \{: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable}\}.$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^P(\Omega)$, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\| \, . \, \|_{L_\infty}$:

$$\| \, . \, \|_{L_\infty} = \inf \{ \alpha : |f(x)| \leq \alpha \text{ presque par tout } \} \, .$$

Définition 1.2.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ par l'ensemble des $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f \in L^p(\Omega^{'})$, pour tout Ω' avec $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.1.

1. En particulier, on a $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$.
2. En revanche, on a pas toujours l'égalité. En effet, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $L^1_{loc}(]0, 1[)$ mais f n'est pas $L^1(]0, 1[)$.

Définition 1.2.5 (Espaces de fonctions à valeurs dans X).
On introduit maintenant les espaces de fonctions à valeurs dans X (Espace de Hilbert séparable).
Une fonction $f : [0, T) \longrightarrow X$ est dit étagée si elle est de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} v_i \chi_{E_i}(t)$$

où les v_i sont des éléments de X, les E_i une partition mesurable (pour la mesure de Lebesgue) de $[0, T]$ et χ_{E_i} désigne la fonction caractéristique de E_i.
On dit qu'une fonction $f : [0, T) \longrightarrow X$ est mesurable, s'il existe une suite de fonctions étagées f_n telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_X = 0$ presque par tout dans $[0, T]$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on appelle $L^p(0,T;X)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de $[0,T]$ dans X telles que

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dx\right)^{1/p} < +\infty \quad \text{pour} \quad p < +\infty$$

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} \|f(x)\|_X < +\infty \qquad \text{pour} \quad p = +\infty$$

L'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme définie ci-dessus. il est séparable si $1 \leq p \leq \infty$. En fait, $\mathcal{C}([0,T];X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$ pour ces mêmes valeurs de p.

L'espace $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (f(t),g(t))_X dt.$$

Notons enfin que $L^\infty(0,T;X)$ est le dual d'un espace séparable.

1.3 Quelques inégalités usuelles

1.3.1 Inégalité de Young

Définition 1.3.1. On dit que $p,q \in [1,+\infty[$ sont deux exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Il est clair que si $p=1$ alors $q=\infty$, si $q=1$ alors $p=\infty$ et sinon $q = \frac{p}{p-1}$.

On donne ici quelques identités pratiques concernant les exposants conjugués quand $p,\, q > 1$:

$$p = \frac{q}{q-1} \Leftrightarrow p\,q = p+q \Leftrightarrow \frac{q}{p} = q-1\,.$$

Lemme 1.3.1 (Inégalité de Young). *Soient $a, b > 0$ et $1 < p, q < +\infty$ deux exposants conjugés. Alors*

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

1.3.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.3.1 ([9]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ainsi que deux réels $p, q \in [\,1, +\infty[$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$. Alors le produit $fg \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \qquad si\ p,\ q < +\infty\,.$$

1.4 Quelques rappels sur les espaces de Sobolev

Nous introduirons ici les espaces de Sobolev en dimension n. Nous mettrons en avant des résultats importants, particulièrement délicats en dimension supérieure à un.

1.4.1 Dérivée au sens faible

Lemme 1.4.1 ([1]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ tels que,*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0 \ pour\ tout\ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $u = 0$ presque partout dans Ω.

Définition 1.4.1. Soient Ω un ouvet de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que la fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i si,

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i},\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par abus de notation, on écrit $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou $v = u_{x_i}$.

Remarque 1.4.1. Rappelons quelques remarques importantes.

1. Si la dérivée faible existe, alors elle est unique. En effet, soient $v, v' \in L^P_{loc}(\Omega)$ tels que $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = \int_\Omega v'(x)\phi(x)dx$$

   Alors

$$\int_\Omega (v(x) - v'(x))\phi(x)dx = 0,\ \forall \phi \in L_0^\infty(\Omega)$$

   et ainsi, par le Lemme 1.4.1, $v = v'$ presque partout.

2. Si u différentiable, alors sa dérivée faible est toujours égale à sa dérivée partielle au sens useuel. En effet, on a de la formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = [u(x)\phi(x)]_{\partial\Omega} - \int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = -u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx,$$

   vu que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Exemple 1.4.1. La fonction $u(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de dérivée faible. Ainsi, toute fonction n'est pas forcément dérivable au sens faible.

1.4.2 Espaces de Sobolev en dimension 1

L'espace $W^{1,p}(I)$

Définition 1.4.2. Soit $I = (a, b)$ un intervalle (pas forcément borné) et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ par :

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\phi' = -\int_I g\phi\ \ \forall \phi \in C_0^\infty(I) \right\}$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

En utilisant le Lemme fondamental de calcul des variations qui dit :

Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que

$$\int_I f\phi = 0 \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

alors $f = 0$. On peut conclure que dans la définition précédente, si g existe, elle est unique. On pose alors $g = u'$.

Lemme 1.4.2. *On munit $W^{1,p}(I)$ de la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \tag{1.1}$$

L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H'} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L2}$$

et de sa norme associée

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.4.3. Soit $1 \leq p < \infty$, on désinge par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_0^\infty(I)$ dans $W^{1,p}(I)$, c'est -à-dire que $W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^\infty(I)}$. Si $p = 2$, on note $W^{1,p}(I) = H_0^1(I)$.

L'espace $W^{m,p}(I)$

Définition 1.4.4. Soit $m \geqslant 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$. On définit $W^{m,p}(I)$ par récurrence :

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) \ ; u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Une fonction u appartient à $W^{m,p}(I)$ si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m y appartiennent aussi. Plus précisément, $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'il existe m fonctions $g_1....g_m \in L^p(I)$ telles que

$$\int uD^j\varphi = (-1)^j \int g_j\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, ...m.$$

où $D^j\varphi$ dénote la dérivée à l'ordre j de φ. On peut considérer $u' = g_1$, $(u')' = g_2 \dots$ jusqu'à l'ordre m, que l'on note aussi $Du, D^2u, ...D^mu$. On munit l'espace $W^{m,p}$ de la norme.

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et H^m du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Définition 1.4.5. Soit un réel $1 \leq p \leq \infty$ et un entier $m \geq 2$. On définit l'espace $W_0^{m,p}(I)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(I)$. On peut ainsi écrire,

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) : u = Du = ... + D^{m-1}u = 0 \text{ sur } \partial I\}.$$

1.4.3 Espaces de Sobolev en dimension n

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \exists\, g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \;\; \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \, \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \;\; \forall i = 1, \ldots.., n \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = grad\ u. \tag{1.2}$$

On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.3}$$

ou parfois de la norme équivalente (si $1 \leq p < \infty$),

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et l'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

Remarque 1.4.2. En d'autre terme, on peut dire que $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots., n$.

Définition 1.4.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$.

Remarque 1.4.3. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{1,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Si $p = \infty$, alors l'assertion précédente est fausse. En revanche, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1(\overline{\Omega})$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $m > 0$ est un entier, on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dont les dérivés partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m$.

Définition 1.4.8. Nous appelons multi-indice tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. On définit

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

et

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Définition 1.4.9. Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{c} \forall\, \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \exists\, g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \nabla^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

cet espace est munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\nabla^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

qui lui donne une structure d'espace de Banach. On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

1.5 Inégalités de Sobolev

Nous allons ici nous intéresser aux possibilités d'injecter $W^{1,p}(\Omega)$ de façon continue ou même compacte dans des espace plus simples, tels que $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Commençons tout d'abord par un lemme technique :

Lemme 1.5.1. *Soient $n \geqslant 2$ et $f_1, f_2, ...f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $i = 1, ..., n$ on pose*

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{1.4}$$

Alors la fonction

$$f(x) := f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) .... f_n(\widetilde{x}_n), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{1.6}$$

Théorème 1.5.1 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg).
Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit $p^* := \dfrac{n\,p}{n-p}$ ou de façon équivalente par $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

De plus, il existe une constante $C = C(p, n)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{1.8}$$

On remarque que $p^* \in (p, \infty)$.

Preuve. Commençons par $p = 1$. Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\ltimes)$, on a

$$|u(x_1, x_2, ..., x_n)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} (t, x_2, ..., x_n)\, dt \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_1} (t, x_2, ..., x_n)\, dt \right|$$

et de même pour tout $1 \leq i \leq n$

$$|u(x)| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} (x_1, x_2, ...x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n) dt \right| = f_i(\widetilde{x}_i). \tag{1.9}$$

Donc

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(\widetilde{x}_i). \tag{1.10}$$

On déduit du Lemme 1.5.1 que

$$\int |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.11}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.12}$$

Soit $t \geqslant 1$. On applique (1.12) à $|u|^{t-1}u$ au lieu de u. On a donc :

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{t} \leq t \prod_{i=1}^{n} \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq t \|u\|_{L^{p^*(t-1)}(\mathbb{R})}^{t-1} \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \tag{1.13}$$

Ensuite, on choisit t tel que $\frac{tn}{n-1} = p^*(t-1)$, ce qui nous donne $t = \frac{n-1}{n} p^*$,de plus $t \geqslant 1$, car $1 \leq p < n$. On obtient finalement

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq t \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \tag{1.14}$$

et donc

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.15}$$

Prenons maintenant $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus $u_n \to u$ presque par tout dans $\mathbb{R}^n$.

Par (1.15), on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Par le lemme de Fatou, on a finalement que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x)|^{p^*} dx \\ &\leq C \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n(x)|^p dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.16}$$

□

Lemme 1.5.2 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante C dépendante de p et n telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.17}$$

Dans ce cas $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente sur $W_0^{1,p}$ à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Remarque 1.5.1. Nous donnerons une forme plus générale à cette inégalité, dans le chapitre qui va suivre.

1.6 Formule de Green sur les espaces de Sobolev

La formule de Green présente un outil fondamental pour la résolution des équations differentielles partielles. Commençons par quelques définitions préliminaires.

Définition 1.6.1. Soit n un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$. On appelle champ de vecteurs une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$.
Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence la fonction,

$$\text{div } v(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x).$$

Le Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donné par,

$$\Delta u(x) = \text{ div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

Définition 1.6.2. On appelle normale au domaine Ω un champ de vecteurs $n(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$ où le bord est régulier, $n(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire ($\|n(x)\| = 1$). On définit alors la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme le vecteur unité $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'exterieur de Ω.
Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on note dx la mesure de lebesque de dimension n. Sur $\partial\Omega$ on note ds la mesure de lebesgue de dimension $n-1$ sur $\partial\Omega$.

Théorème 1.6.1 (Formule de Green). *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds \tag{1.18}$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Corollaire 1.6.1 ([1]). *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

On peut aussi obtenir la formule de green, pour un ordre plus élevé, et cela sur l'espace H^m. Nous nous contenterons ici du cas $m = 2$.

Théorème 1.6.2 ([1]). *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds. \tag{1.19}$$

Une autre formule qui est aussi importante, et qui est en fait une conséquence directe de la formule de Green, c'est celle de Stokes.

Théorème 1.6.3 (Formule de Stokes). *Sous les mêmes conditions et avec $\phi \in H^1(\Omega)$. On a,*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega \sigma(x).\nabla\phi(x)dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x).n(x)\phi(x)ds,$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\mathrm{div}\sigma(x)\phi(x) + \sigma(x).\nabla\phi(x)\right) dx &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial x_i}(x)\phi(x) + \sigma_i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial\sigma_i\phi}{\partial x_i}(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \sigma_i(x)\phi(x)n_i(x)ds \\
&= \int_{\partial\Omega} \sigma(x).n(x)\phi(x)ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

Quelques inégalités intégrales

2.1 Inégalités intégrales fondamentales

Nous allons dans cette partie de notre travail énoncer quelques résultats sur les inégalités intégrales qui sont normalement l'outil de base lors des passages aux estimations de la vitesse de décroissance de l'énergie. Par le lemme ci-après on distingue deux types de résultats, une décroissance exponentielle expliquée par Haraux **[15]** et une décroissance polynomiale donnée par Komornik **[18]**.

Lemme 2.1.1 ([**15**], [**18**])**.** *Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe $q \geq 0$ et $\gamma > 0$ tels que*

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_t^{+\infty} E^{q+1}(\tau)\, d\tau \leq \gamma^{-1}\, E^q(0)E(t). \tag{2.1}$$

Alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante :

$$\textit{si } q = 0, \ \textit{alors } E(t) \leq E(0)\, \exp(1 - \gamma t), \forall t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$\textit{si } q > 0, \ \textit{alors } E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+q}{1+\gamma\, q\, t} \right)^{1/q}, \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Preuve.

<u>Le cas $q = 0$.</u>

Dans ce cas,

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau \leq \gamma^{-1}\, E(t). \tag{2.4}$$

L'inégalité (2.2) est bien vérifiée pour $t \leq \gamma^{-1}$, cela découle du fait que E est décroissante. Il faut donc démontrer qu'elle reste vraie pour $t \geq \gamma^{-1}$. Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau.$$

h est décroissante, positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De (2.4), on a

$$\forall t \geq 0, \quad h'(t) + \gamma h(t) \leq 0.$$

Soit

$$T_0 = \sup\{t,\ h(t) > 0\}. \tag{2.5}$$

Pour tout $t < T_0$, on a

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\gamma,$$

ainsi

$$h(0) \leq \exp(-\gamma t) \leq \gamma^{-1} E(0) \exp(-\gamma t), \qquad \text{pour} \ \ 0 \leq t < T_0. \tag{2.6}$$

Puisque $h(t) = 0$ pour $t \geq T_0$, cette relation reste vraie pour tout t. Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est positive, décroissante, on déduit que

$$\forall t \geq \varepsilon, \quad E(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} h(t-\varepsilon) \leq \frac{1}{\gamma\varepsilon} E(0) \exp(\gamma\varepsilon) \exp(-\gamma t).$$

En choisissant $\varepsilon = \gamma^{-1}$, on aura

$$\forall t \geq 0, \qquad E(t) \leq E(0) \exp(1 - \gamma t).$$

<u>Le cas $q > 0$.</u>

Nous allons supposer par homogénéité que $E(0) = 1$. Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau.$$

h est décroissante, positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De (2.1), on a

$$\forall t \geq 0, \quad -h' \geq (\gamma\, h)^{1+q}.$$

Pour donné par (2.5), on a

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad \left(h^{-q}\right)' \geq q\gamma^{1+q}.$$

Par intégration on a

$$0 \leq t < T_0, \quad h^{-q}(t) - h^{-q}(0) \geq q\gamma^{1+q}\, t,$$

ainsi

$$0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq \left(h^{-q}(0) + q\gamma^{1+q}\, t\right)^{-1/q}. \tag{2.7}$$

Il faut noter que cette relation reste vraie pour tout $t \geq T_0$. De plus et puisque

$$h(0) \leq \ \gamma^{-1} E(0)^{1+q} = \gamma^{-1},$$

on a

$$\left(h^{-q}(0) + q\gamma^{1+q}\, t\right)^{-1/q} \leq \gamma^{-1}(1 + \gamma\, q\, t)^{-1/q}, \tag{2.8}$$

Comme E est positive et décroissante, on déduit de l'estimation (2.8) que

$$\begin{aligned}
\forall S \geq 0, \quad E\left(\gamma^{-1} + (1+q)S\right)^{1+q} &\leq \frac{1}{\gamma^{-1} + q\, S} \int_S^{\gamma^{-1}+(q+1)S} E^{q+1}(\tau) d\tau \\
&\leq \frac{\gamma}{1 + \gamma\, q\, S}\; h(S) \\
&\leq \frac{\gamma}{1 + \gamma\, q\, S}\, \gamma^{-1}\, (1 + \gamma\, q\, S)^{-1/q}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall S \geq 0, \quad E\left(\gamma^{-1} + (q+1)S\right) \leq \frac{1}{(1 + \gamma\, q\, S)^{1/q}}.$$

En choisissant $t = \gamma^{-1} + (q+1)S$, on obtient l'estimation (2.3). $\square$

2.2 Nouvelles inégalités intégrales

Souvent appelées les inégalités avec poids. Ces nouvelles inégalités intégrales sont plus générales que celles introduites précédemment et qui ne sont vérifiées que si E est intégrable. Nous allons donc introduire de nouvelles inégalités grâce aux fonctions poids, cela nous permettra d'estimer la vitesse de décroissance de l'énergie E vers zéro même lorsque celle-ci est assez lente.

Lemme 2.2.1 ([23]). *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \phi(t) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad t \to +\infty. \tag{2.9}$$

Supposons qu'il existe $q \geq 0$ et $\gamma > 0$ tels que

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{q+1}\phi'(t)\,dt \leq \gamma^{-1}\,E(0)^q E(S), \quad 0 \leq S < +\infty. \tag{2.10}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$\textit{si } q > 0, \quad \textit{alors } E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+q}{1+q\,\gamma\,\phi(t)}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.11}$$

$$\textit{si } q = 0, \quad \textit{alors } E(t) \leq E(0)\exp(1-\gamma\,\phi(t)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.12}$$

Remarque 2.2.1. Il suffit de prendre $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}_+$ pour voir que ce lemme et bien une généralisation du Lemme 2.1.1.

Preuve. Du moment que ϕ définit une bijection. On note par ϕ^{-1} sa fonction inverse. Soit

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = E\left(\phi^{-1}(x)\right).$$

f est décroissante et $f(0) = E(0)$. Par un changement de variable, posons $x = \phi(t)$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(S)}^{\phi(T)} f(x)^{q+1}\,dx &= \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} E\left(\phi^{-1}(x)\right)^{q+1}\,dx = \int_S^T E(t)^{q+1}\phi'(t)\,dt \\
&\leq \gamma^{-1}\,E(0)^q E(S) \\
&= \gamma^{-1}\,E(0)^q f(\phi(S)), \quad 0 \leq S < T < +\infty.
\end{aligned}$$

Notons $s = \phi(S)$. En faisant tendre T vers l'infini, on déduit que

$$\forall s \geq 0, \quad \int_s^{+\infty} f(x)^{q+1}\,dx \leq \gamma^{-1}\; E(0)^q f(s).$$

En appliquant le Lemme 2.1.1, on aura

$$f(s) \leq f(0)\exp(1-\gamma\,s), \;\; \forall s \geq 0, \quad \text{ si } q = 0$$

et

$$f(s) \leq f(0)\left(\frac{1+q}{1+q\,\gamma\,s}\right)^{\frac{1}{q}}, \;\; \forall s \geq 0, \quad \text{ si } q > 0.$$

Du fait que $E(t) = f(\phi(t))$, on peut directement aboutir aux estimations (2.11) et (2.12). □

Remarque 2.2.2. Il faut noter que les inégalités intégrales considérées jusqu'à présent, concernent surtout l'estimation de la décroissance de l'énergie pour des problèmes dissipatifs (estimation de fonctions positives décroissantes).

Comportement asymptotique de la solution d'une équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation de type m-Laplacien

3.1 Introduction

On considère l'équation des ondes non linéaire de type p-Laplacien avec une dissipation de type m-Laplacien. Le problème et de la forme,

$$(P_1)\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) - a\ \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t) = b|u|^{r-2}u \quad \text{sur } \Omega \times [0,+\infty[, \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma \times [0,+\infty[, \\ u(0,\ x) = \ u_0(x) \quad , \quad u_t(0,\ x) = \ u_1(x) \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ avec $a, b > 0$ et $p,\ m,\ r \geq 2$ des nombres réels.

Rappelons ici que les premiers résultats concernant l'existence globale pour ce type de problème sont dûs à Nakao et Nanbu **[26]**. Dans ce même contexte, on peut citer les travaux de Andrews et Ball **[4]** ainsi que Kawashima et Shibata **[17]**.

Le cas $m = 2$ par exemple, modélise normalement quelques cas de visco-élasticité non-linéaire (voir **[3]**, **[11]** et **[5]**).

Biazutti **[8]** a pu généraliser ces résultats en démontrant l'existence globale et l'unicité de la solution faible et cela en passant par des arguments de monotonie et de compacité.

Dans **[29]**, Yang a pu démontrer que la décroissance polynomiale de l'énergie est de la forme $E(t) \leq (1+t)^{-1/(2p)}$ pour $t \geq 0$.

Messaoudi **[24]** a amélioré les résultats obtenus par Yang en donnant un taux de décroissance plus précis. Il a montré d'abord que, pour $p = 2$, il y a décroissance exponentielle de l'énergie de type $E(t) \leq Ce^{-kt}$, tandis que si $p > 2$, la décroissance est polynomiale, telle que $E(t) \leq C(1+t)^{-2/(p-2)}, t \geq 0$ où C et k sont deux constantes positives.

Dans cette partie du manuscrit on se propose d'étendre les résultats obtenus par Ye (**[30]** et **[31]**) pour une dissipation faible de type m-Laplacien. Dans un premier temps, en combinant l'idée dans **[31]** et le concept des ensembles stables de sattinger dans **[28]**. On montre l'existence d'une solution globale pour des conditions initiales $(u_0, u_1) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et u_0 dans l'ensemble stable choisit. Par la suite, on détermine le comportement asymptotique en utilisant le type d'argument dans **[7]** ainsi que les inégalités intégrales introduites par Haraux **[14]** et Komornik **[19]**.

3.2 Préliminaires et résultat principal

Commençons par quelques notions importantes dont nous ferons usage le long de ce chapitre. On définit d'abord les fonctionelles :

$$K(u) = \|\nabla u\|_p^p - b\|u\|_r^r,$$

et

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla_x u\|_p^p - \frac{b}{r}\|u\|_r^r$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

En suite, On définit l'ensemble stable H associé au problème (P_1) par

$$H \equiv \{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\,,\, K(u) > 0\} \cup \{0\}\,.$$

On définit aussi l'énergie totale $E(t)$ associée à la solution du problème (P),

$$E(t) = \frac{1}{2}\ \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{p}\ \|\nabla u\|_p^p - \frac{b}{r}\ \|u\|_r^r\ =\ \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2\ +\ J(u),$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \geq 0$.

On donne aussi quelques lemmes utiles pour la démonstration de notre résultat principal,

Lemme 3.2.1 (Identité de l'énergie)**.** *Soit $u(t,x)$ une solution du problème (P_1) sur $[0,\infty)$. Alors,*

$$E(t) + \int_\Omega \int_0^t a \mid \nabla u_t(s) \mid^m ds\, dx = E(0),$$

pour tout $t \in [0,\infty)$.

Remarque 3.2.1. *Il est clair que l'énergie ainsi définie est une fonction décroissante. Ainsi, pour $t > 0$, on a*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\|\nabla u_t\|_m^m \leq 0.$$

Lemme 3.2.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré)**.** *Soit r un nombre tel que $2 \leq r < +\infty$ $(n = 1, 2, ..., p)$ ou $2 \leq r \leq \frac{np}{n-p}$ pour $n \geq p+1$. Alors il existe une constante $c_* = c_*(\Omega, r)$ telle que,*

$$\|u\|_r \leq c_*\|\nabla u\|_p \quad \textit{pour} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La démonstration de notre résultat principal, plus justement le comportement asymptotique de l'énergie repose essentiellement sur le lemme ci-après.

Lemme 3.2.3 (**[18]**). *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante satisfaisant,*

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{\beta+1} dt \leq AE(S), \quad 0 \leq S < +\infty,$$

où $\beta \geq 0$ et $A > 0$. Alors, on a

$$E(t) \leq \left(A \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} t^{\frac{-1}{\beta}} \quad \forall t \geq 0, \qquad si \;\; \beta > 0,$$

et

$$E(t) \leq E(0) \exp \left(1 - \frac{t}{A} \right) \quad \forall t \geq 0, \qquad si \;\; \beta = 0.$$

Ce lemme est dû à Haraux. Les détails de la démonstration sont donnés dans **[14, 15]**, **[18, 19]** et **[20]**.

Rappelons maintenant le théorème assurant l'existence d'une solution locale du problème (P_1) dont l'idée générale de la démonstration est dans **[29]**.

Théorème 3.2.1. *Soit $2 < p < r < \frac{np}{n-p}$, $n > p$ et $2 < p < r < \infty$, $n \leq p$. Supposons que $2 \leq m \leq p$, $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et u_0 dans l'ensemble stable H. Alors, il existe $T > 0$ pour lequel le problème (P_1) admet une solution locale unique $u(t)$ vérifiant,*

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty \left([0, T); W_0^{1,p}(\Omega) \right), \\ &u_t \in L^\infty \left([0, T); L^2(\Omega) \right) \cap L^m \left([0, T); L^m(\Omega) \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rappelons, quelques lemmes importants, avant d'énnocer le théorème expliquant l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution.

Dans toute la suite, on note par T_{max} la durée de vie de la solution $u(t)$ associée au problème (P_1).

Lemme 3.2.4. *Sous les mêmes suppositions du Théoreme 3.2.1, on a*

$$\frac{r-p}{rp}\|\nabla_x u\|_p^p \leq E(t), \tag{3.2}$$

pour $u \in H$.

Preuve. De la définition de $K(u)$ et $J(u)$ on a

$$K(u) + \frac{r-p}{rp}\|\nabla_x u\|_p^p = rJ(u). \tag{3.3}$$

Puisque $u \in H$, alors $K(u) \geq 0$. De (3.2) on déduit que

$$\frac{r-p}{rp}\|\nabla_x u\|_p^p \leq J(u) \leq E(t). \tag{3.4}$$

□

Lemme 3.2.5 ([32]). *Soit $u(t)$ une solution du problème (P_1) sur $[0, T_{max})$. Supposons que $2 \leq r \leq \frac{np}{n-p}$, $n > p$ et $2 < p < r < +\infty$ pour $n \leq p$. Si $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ satisfisant*

$$\theta = bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{(r-p)/p} < 1, \tag{3.5}$$

alors, $u(t) \in H$, pour tout $t \in [0, T_{max})$.

Ainsi, nous avons le théorème suivant,

Théorème 3.2.2 ([25]). *Soit $u(t,x)$ une solution locale du problème (P_1) sur $[0, T_{max})$ qui a pour données initiales $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$. Supposons que l'énergie initiale $E(0)$ vérifie*

$$bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{(r-p)/p} < 1. \tag{3.6}$$

Si les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont satisfaites et que $2 < m < \frac{np}{n-p}$ pour $n > p$ et $2 < m < +\infty$ pour $n \leq p$. Alors, $T_{max} = +\infty$. De plus, la solution globale du problème (P_1) vérifie les propriétés de décroissance suivantes,

1. *Si $p = m = 2$, alors il existe une constante positive ω ne dépendant pas de $E(0)$ telle que,*
$$E(t) \leq E(0)\exp(1-\omega t) \qquad \forall t > 0.$$

2. *Si $m = 2$ et $p > 2$, alors il existe une constante positive τ dépendant de $E(0)$ telle que,*
$$E(t) \leq \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{p}{(p-2)}} \qquad \forall t > 0.$$

3. *Si $p \geq m \geq 3$, alors il existe une costante positive τ dépendant de $E(0)$ pour laquelle*
$$E(t) \leq \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{(m-2)}} \qquad \forall t > 0.$$

4. *Si $2 < m < 3$, alors il existe une costante positive τ dépendant de $E(0)$ telle que*
$$\begin{cases} \text{pour} \quad m \leq p \leq \frac{2}{3-m}, & E(t) \leq \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{(m-2)}} \qquad \forall t > 0, \\ \text{et pour} \quad p > \frac{2}{3-m}, & E(t) \leq \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{p-m}{p(m-1)}} \qquad \forall t > 0. \end{cases}$$

3.3 Preuve du résultat principal.

3.3.1 Existence globale

Puisque $E(t)$ est une fonction décroissante, de (3.2), on obtient,

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) = E(t) \leq E(0). \tag{3.7}$$

Par conséquent

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|_p^p \leq \max\left(2, \frac{rp}{r-p}\right) E(0) < +\infty.$$

Par le principe de la continuité et l'inégalité ci-dessus on a existence globale de la solution. Ainsi, $T_{max} = +\infty$.

3.3.2 Comportement asymptotique de l'énergie

Passant maintenant à l'estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie. Pour cela, nous utilisons la méthode des multiplicateurs. Dans la suite C désigne différentes constantes positives indépendantes de $E(0)$.
Multiplions la première équation du problème (P_1) par $E(t)^q u$. Par intégration sur $\Omega \times [S,T]$, avec $0 \leq S \leq T \leq \infty$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} 0 = \int_S^T \int_\Omega E(t)^q u [u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u) \\ - a \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2} \nabla_x u_t) - bu|u|^{r-2}] dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_\Omega E(t) u u_{tt} dx\, dt = \int_\Omega E(t)^q u u_t dx \,|_S^T - \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |u_t|^2 dx\, dt \\ - q \int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1} E'(t) u u_t dx\, dt. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} 0 = & \int_S^T \int_\Omega E(t)^q \left(|u_t|^2 + \frac{2}{p} |\nabla u|^p - \frac{2b}{r} |u|^r \right) dx\, dt \\ & -2 \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |u_t|^2 \, dx\, dt + \int_\Omega E(t)^q u u_t \, dx \,|_S^T \\ & -q \int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1} E'(t) u u_t \, dx\, dt \\ & + \left(1 - \frac{2}{p}\right) \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |\nabla u|^p dx\, dt \\ & + \left(\frac{2b}{r} - b\right) \int_S^T E(t)^q \int_\Omega u^r \, dx\, dt \\ & +a \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |\nabla u_t|^{m-2} \nabla u_t \nabla u \, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par le Lemme 3.2.2 et les inégalités (3.2) et (3.5) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& b\left(1-\frac{2}{r}\right)\int_S^T E(t)^q\|u\|_r^r\,dt \\
&\quad \le b\left(1-\frac{2}{r}\right)\int_S^T E(t)^q C^r\|\nabla u\|_p^r\,dt \\
&\quad = b\left(1-\frac{2}{r}\right)\int_S^T E(t)^q C^r\|\nabla u\|_p^{r-p}\|\nabla u\|_p^p\,dt \\
&\quad \le b\left(1-\frac{2}{r}\right)\int_S^T E(t)^q C^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{(r-p)/p}\frac{rp}{r-p}\,E(t)dt \\
&\quad = \theta\frac{(r-2)p}{r-p}\int_S^T E(t)^{q+1}dt,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

et

$$
\frac{p-2}{p}\int_S^T E(t)^{(m-2)/2}\|\nabla u\|_p^p\,dt \le \frac{r(p-2)}{r-p}\int_S^T E(t)^{q+1}dt. \tag{3.11}
$$

Ainsi, des inégalités (3.9), (3.10) et (3.11), nous avons

$$
\begin{aligned}
& \frac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p}\int_S^T E(t)^{q+1}dt \\
&\quad \le 2\int_S^T\int_\Omega E(t)^q|u_t|^2\,dx\,dt - \int_\Omega E(t)^q u u_t\,dx\,\Big|_S^T \\
&\qquad +q\int_S^T\int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)uu_t\,dx\,dt \\
&\qquad -a\int_S^T\int_\Omega E(t)^q|\nabla u_t|^{m-2}\nabla u_t\nabla u\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Ici, $\dfrac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p} > 0$ pour $0<\theta<1$.

Il va falloir estimer chaque terme du côté droit de l'inégalité (3.12).

Par l'inégalité de Hölder, on a,

$$
\begin{aligned}
& \left|-a\int_S^T\int_\Omega E(t)^q|\nabla u_t|^{m-2}\nabla u_t\nabla u\,dx\,dt\right| \\
&\quad \le a\int_S^T E(t)^q\|\nabla u_t\|_{\frac{p(m-1)}{p-1}}^{m-1}\|\nabla u\|_p\,dt,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

et

$$
\|\nabla u_t\|_{\frac{p(m-1)}{p-1}}^{m-1} \le |\Omega|^{\frac{p-m}{pm}}\|\nabla u_t\|_{m-1}^m. \tag{3.14}
$$

Pour $\varepsilon_1 > 0$ et grâce à l'inégalité de Young, le Lemme 3.2.2, l'identité de l'énergie et le Lemme 3.2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|-a\int_S^T\int_\Omega E(t)^q|\nabla u_t|^{m-2}\nabla u_t\nabla u\,dx\,dt\right| \\
&\quad\le a\int_S^T E(t)^q\left(\frac{rp}{r-p}E(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{-E'(t)}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}dt \\
&\quad\le \frac{1}{a^{1/m}}C\left(\frac{rp}{r-p}\right)^{\frac{m}{p}}\varepsilon_1^m\frac{1}{m}\int_S^T E(t)^{(q+\frac{1}{p})m}dt \\
&\qquad +C\frac{1}{\varepsilon_1^{\frac{m}{m-1}}}\frac{m-1}{m}E(S).
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Par un procédé analogue, et pour $\varepsilon_2 > 0$ on déduit que,

$$\begin{aligned}
&2\int_S^T\int_\Omega E(t)^q|u_t|^2\,dx\,dt \\
&\quad\le C\int_S^T E(t)^q\|\nabla u_t\|_m^2dt \\
&\quad\le C\int_S^T E(t)^q\left(-\frac{E'}{a}\right)^{\frac{2}{m}}dt \\
&\quad\le C\varepsilon_2^{\frac{m}{m-2}}\frac{m-2}{m}\int_S^T E(t)^{q\frac{m}{m-2}}dt + C\frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{m}{2}}}\frac{2}{m}\int_S^T -E'dt \\
&\quad\le C\varepsilon_2^{\frac{m}{m-2}}\frac{m-2}{m}\int_S^T E(t)^{q\frac{m}{m-2}}dt + C\frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{m}{2}}}\frac{2}{m}(E(S)-E(T)) \\
&\quad\le C\varepsilon_2^{\frac{m}{m-2}}\frac{m-2}{m}\int_S^T E(t)^{q\frac{m}{m-2}}dt + C\frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{m}{2}}}\frac{2}{m}E(S).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

En suite, l'inégalité de Hôlder, le Lemme 3.2.1 et (3.7), donnent,

$$\begin{aligned}
&\left|q\int_S^T\int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)uu_t\,dx\,dt\right| \\
&\quad\le q\int_S^T E(t)^{q-1}|E'(t)|\left(\frac{C^p rp}{r-p}\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2\right)dt \\
&\quad\le -q\max\left(\frac{C^p rp}{r-p},1\right)\int_S^T E(t)^qE'(t)dt \\
&\quad\le CE(S)^{q+1}.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

De même,

$$\left|-\int_\Omega E(t)^q uu_t\,dx\,dt\right|_S^T\Bigg| \le \max\left(\frac{C^p rp}{r-p},1\right)E(t)^{q+1}\Big|_S^T \le CE(S)^{q+1}.\tag{3.18}$$

On distingue en tout, cinq cas liés au paramètres p et m.

- $p \geq m \geq 3$.

  On pose,
$$q+1 = q\frac{m}{m-2}.$$
  De là, $q = (m-2)/2$. On prend par la suite, $q+1+\alpha = (q+1/p)m$, avec
$$\alpha = \frac{(m-2)(m-1)}{2} + \frac{m}{p} - 1 > 0.$$
  Pour ε, ε_1 assez petites, on choisit $\varepsilon_1 = \varepsilon/E(0)^{\alpha/m}$. Ainsi, des estimations (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18), l'inégalité (3.12) devient,
$$\begin{aligned}\int_S^T E(t)^{1+q}dt &\leq CE(S)^{q+1} + C'E(S) + C''E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}E(S)\\ &\leq \left(C' + CE(0)^q + C''E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}\right)E(S),\end{aligned}$$
  où $C, C^{'}$ et $C^{''}$ des constantes positives indépendantes de $E(0)$. En appliquant le Lemme 3.2.3, on obtient
$$E(T) \leq \left(C^{'} + CE(0)^q + C^{''}E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q}}.$$

- Si $2 < m < 3$ et $m \leq p \leq 2/(3-m)$.

  Dans ce cas, $(m-2)/2 \geq (p-m)/(p(m-1))$. En prenant $q = (m-2)/2$ et par un procédé identique à celui du cas précédent, on pose,
$$\alpha = \frac{(m-2)(m-1)}{2} + \frac{m}{p} - 1 \geq 0.$$
  Pour ε, ε_1 assez petites, on choisit $\varepsilon_1 = \varepsilon/E(0)^{\alpha/m}$. Des estimations, (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18), l'inégalité (3.12) devient,
$$\begin{aligned}\int_S^T E(t)^{1+q}dt &\leq CE(S)^{q+1} + C'E(S) + C''E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}E(S)\\ &\leq \left(C' + CE(0)^q + C''E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}\right)E(S),\end{aligned}$$

où C, C' et C'' sont des constantes positives indépendantes de $E(0)$. Ainsi, le Lemme 3.2.3 donne,

$$E(T) \leq \left(C' + CE(0)^q + C''E(0)^{\frac{(m-2)}{2}+\frac{m-p}{p(m-1)}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1+\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q}}.$$

- Si $2 < m < 3$ et $p > 2/(3-m)$.

Alors $(m-2)/2 < (p-m)/(p(m-1))$. On prend cette fois

$$q+1 = \left(q+\frac{1}{p}\right)m,$$

ce qui donne $q = (p-m)/(p(m-1))$. On pose encore $q+1+\alpha_1 = qm/(m-2)$ avec

$$\alpha_1 = \frac{m(3p-pm-2)}{p(m-1)(m-2)} > 0.$$

Pour ε, ε_2 suffisament petites, on prend $\varepsilon_2 = \varepsilon/E(0)^{(m-2)\alpha_1/m}$. Ainsi, des estimations (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18), l'inégalité (3.12) s'écrit

$$\begin{aligned}\int_S^T E(t)^{1+q}dt &\leq CE(S)^{q+1} + C'E(S) + C''E(0)^{\frac{m(3p-pm-2)}{2p(m-1)}}E(S)\\ &\leq \left(C' + CE(0)^q + C''E(0)^{\frac{m(3p-pm-2)}{2p(m-1)}}\right)E(S),\end{aligned}$$

où C, C' et C'' des constantes positives indépendantes de $E(0)$, De là le Lemme 3.2.3 nous amène à écrire,

$$E(T) \leq \left(C' + CE(0)^q + C''E(0)^{\frac{m(3p-pm-2)}{2p(m-1)}}E(S)\right)^{\frac{1}{q}} \left(1+\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q}}.$$

- $m = 2$ et $p > 2$.

Dans ce cas de l'inégalité (3.16) s'écrit

$$2\int_S^T E(t)^q \int_\Omega |u_t|^2 dx\, dt \leq C\int_S^T E(t)^q \left(-\frac{E'}{a}\right) dt \leq \frac{C}{q+1}E(S)^{q+1}. \quad (3.19)$$

On prend

$$q+1 = 2\left(q+\frac{1}{p}\right).$$

Donc, $q = (p-2)/p$. De même, en choisissant ε_1 suffisamment petite, tout en remplaçant les estimations (3.15), (3.19), (3.17) et (3.18) dans (3.12) on obient

$$\begin{aligned}\int_S^T E(t)^{1+q} dt &\leq CE(S) + C'E(S)^{q+1} \\ &\leq (C + C'E(0)^q)\, E(S)\end{aligned}$$

où C, C' et C'' des constantes positives indépendantes de $E(0)$, En faisant tendre T et en appliquant le Lemme 3.2.3 on obtient,

$$E(T) \leq (C + C'E(0)^q)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q}}.$$

- $m = p = 2$.

  Donc $q = 0$

  Choisisons ε_1 sufisament petit, puis en substituant les estimations (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18) dans (3.12) nous obtenons

$$\int_S^T E(t)\, dt \,\leq\, C\, E(S),$$

  où C est une constante positive indépendante de E (0). De même et par le Lemme 3.2.3 on déduit que

$$E(t) \,\leq\, E(0) \exp\left(1 - \frac{t}{C}\right).$$

  D'où la démonstration du Théorème 3.2.2.

Chapitre 4

Estimation du taux de décroissance de l'énergie associée à une équation des ondes de type p-Laplacien avec une forte dissipation

4.1 Introduction

On considère le problème aux limites à valeurs initiales pour l'équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation forte de la forme Δu_t :

$$(P_2)\begin{cases} \left(|u_t|^{l-2}u_t\right)_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) - \Delta u_t + g(x,u) = 0 \text{ in } \Omega \times [0,+\infty[, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ avec l, $p \geq 2$ deux nombres réels et $g(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

Dans **[10]**, Chen, Yao et Shao ont étudié le problème (P_2) pour $l = 2$. Ils ont démontrés l'existence et l'unicité d'une solution globale faible en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin (voir **[21]**). Ensuite et en imposant certaines conditions sur la fonction $g(x,u)$, il ont pu déterminer le comportement asymptotique de la solution en donnant un taux plus au moins précis de la décroissance de l'énergie. Leurs preuve repose essentiellement sur l'utilisation des inégalités intégrales introduites par Martinez **[23]**.

Dans le même contexte il est important de citer le travail de Ma et Soriano **[22]**.

Dans **[30]**, Ye a pu généraliser la méthode introduite par Nakao dans **[27]**. En prenant $\delta|u'|^{m-1}u'$ $(\delta > 0, m \geq 1)$ à la place de $g(x,u)$ et sans le terme dissipatif Δu_t, il a démontré que le taux de décroissance de l'énergie associée au problème (P_2) est de la forme $E(t) \leq (1+t)^{-\frac{p}{mp-m-1}}$.

On peut encore citer quelques papier dont l'estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie pour des équations non linéaires hyperboliques avec dissipation faisait le principal objet d'étude, à savoir **[5]**, **[6]**, **[29]** et **[31]**.

Dans cette partie de notre thèse on se propose de donner une estimation sur le comportement à l'infini de l'énergie associée aux solutions du problème (P_2) en utilisant l'idée introduite par Chen, Yao et Shao **[10]** tout en imposant une nouvelle condition sur la fonction $g(x,u)$. Les inégalités intégrales de Haraux **[14]** et Komornik **[18]** forment l'outil de base de notre démonstration.

4.2 Préliminaires et résultat principal

Notons d'abord que l'existence d'une solution unique faible vérifiant

$$u \in C([0,\infty); W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^l(\Omega)), \tag{4.1}$$

est déjà assurée. L'idée principale de la démonstration repose sur l'utilisation de la méthode de Faedo-Galerkin. Pour plus de détails, il est préférable de consulter **[10]** et **[21]**.

Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \geq 0$, on définie l'énergie totale associée à la solution u du problème (P_2) par,

$$E(t) = \frac{l-1}{l}\|u_t\|_l^l + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \int_\Omega G(x,u)dx, \tag{4.2}$$

où $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$ et $g(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

Lemme 4.2.1 (Identité de l'énergie)**.** *Soit $u(t,x)$ une solution du problème (P_2) sur $[0,\infty)$. Alors*

$$E(t) + \int_\Omega \int_0^t |\nabla u_t(s)|^2 \, ds \, dx = E(0),$$

pour tout $t \in [0,\infty)$.

Remarque 4.2.1. Il est clair que l'énergie $E(t)$ est décroissante pour $t > 0$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|\nabla u_t\|_2^2 \leq 0.$$

Lemme 4.2.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré)**.** *Soit r un nombre tel que $2 \leq r < +\infty$ $(n = 1,2,...,p)$ ou $2 \leq r \leq \frac{np}{n-p}$ pour $n \geq p+1$. Alors il existe une constante $c_* = c_*(\Omega, r)$ telle que,*

$$\|u\|_r \leq c_*\|\nabla u\|_p \quad pour \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On énonce le thèorème donnant la propriété de décroissance de l'énergie suivant,

Théorème 4.2.1. *Soient $2 < p < n$, $u_0 \in W_0^{1,p}$, $u_1 \in L^l$ et $g(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$. On suppose que*

$$ug(x,u) + (\nabla u_t)^2 \geq p\,G(x,u) \geq 0, \quad in\,\Omega \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Alors, il existe $C_0 = C(u_0,u_1)$ telle que la solution associée au problème (P_2) vérifie la propriété de décroissance suivante,

$$E(t) \leq C_0(1+t)^{-\frac{p}{p-2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

4.3 Preuve du résultat principal

Multiplions la première équation du problème (P_2) par $E(t)^q u$ où $q = (p-2)/p$. Dans la suite C désigne différentes constantes positives indépendantes de $E(0)$ et on désigne par S et T deux nombre réels tels que $0 \le S \le T \le \infty$. Il vient après intégration sur $\Omega \times [S, T]$ que

$$0 = \int_S^T \int_\Omega E(t)^q u[(|u_t|^{l-2}u_t)_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) - \Delta u_t + g(x,u)]dx\,dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega E(t)^q u(|u_t|^{l-2}u_t)_t\,dx\,dt \\
&\qquad = \left[E(t)^q \int_\Omega u(|u_t|^{l-2}u_t)dx\right]_S^T - \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |u_t|^l dx\,dt \\
&\qquad\quad - q\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)u|u_t|^{l-2}u_t\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

De l'égalité de l'énergie et les deux inégalités ci-dessus, on obient

$$\begin{aligned}
&p\int_S^T E(t)^{q+1}dt \\
&= \left(\frac{p(l-1)}{l} - 1\right)\int_S^T E(t)^q \|u_t\|_l^l dt - \int_S^T \int_\Omega E(t)^q \nabla u_t \nabla u\,dx\,dt \\
&\quad - \left[E(t)^q \int_\Omega u|u_t|^{l-2}u_t dx\right]_S^T + q\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)u|u_t|^{l-2}u_t\,dx\,dt \\
&\quad + p\int_S^T E(t)^q \int_\Omega G(u)dx - \int_S^T E(t)^q \int_\Omega ug(u)dx.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Il va donc falloir estimer chaque terme du côté droit de l'inégalité (4.4) afin d'aboutir à une inégalité similaire à (2.1) donnée au deuxième chapitre.

De (4.2), on voit que

$$\int_S^T E(t)^q \|u_t\|_l^l\,dt \le C\int_S^T E(t)^{q+1}dt. \tag{4.5}$$

Par l'inégalité de Hölder, l'inégalité (4.2), le Lemme 4.2.2 et l'identité de l'énergie, on a l'estimation,

$$
\begin{aligned}
&\left| -\int_S^T E(t)^q \int_\Omega E(t)^q \nabla u \nabla u_t \, dx \, dt \right| \\
&\quad \leq \int_S^T E(t)^q \|\nabla u\|_2 \|\nabla u_t\|_2 dt \\
&\quad \leq C \int_S^T E(t)^q \|\nabla u\|_p \|\nabla u_t\|_2 dt \\
&\quad \leq C \int_S^T E(t)^q E(t)^{\frac{1}{p}} \left(-E'(t)^{\frac{1}{2}} \right) dt \\
&\quad \leq C \int_S^T E(t)^{\frac{q+1}{2}} E(t)^{\frac{q}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(-E'(t)^{\frac{1}{2}} \right) dt.
\end{aligned}
$$

En utilsant l'inégalité de Young et le fait que $E(t)$ est une fonction décroissante sur $[0, +\infty)$, on déduit que,

$$
\begin{aligned}
&\left| -\int_S^T E(t)^q \int_\Omega E(t)^q \nabla u \nabla u_t \, dx \, dt \right| \\
&\quad \leq \int_S^T E(t)^{q+1} + C \int_S^T E(t)^{q+\frac{2}{p}-1} (-E'(t)) \, dt \\
&\quad \leq \int_S^T E(t)^{q+1} dt + C E(S)^{q+\frac{2}{p}}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Hölder et le Lemme 4.2.1 on aura

$$
\begin{aligned}
&\left[E(t)^q \int_\Omega u u_t \, dx \right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q \|u\|_2 \, \|u_t\|_{2(l-1)}^{l-1} \right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q \|\nabla u\|_p \, |\Omega|^{\frac{2-l}{2l}} \, \|u_t\|_l^{l-1} \right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q E(t)^{\frac{1}{p}} E(t)^{\frac{l-1}{l}} \right]_S^T \\
&\quad \leq C E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}},
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)uu_t^{l-1}\,dx\,dt\right| \\
&\qquad \leq \int_S^T |E'(t)|E(S)^{q-1+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}}dt \\
&\qquad \leq -\int_S^T E'(t)E(S)^{q-1+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}}dt \\
&\qquad \leq CE(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Nous avons besoin de la condition (4.3), afin de pouvoir estimer le terme restant du côté droit de l'inégalité (4.4). On aura donc

$$\begin{aligned}
&p\int_S^T E(t)^q \int_\Omega G(u)dx - \int_S^T E(t)^q \int_\Omega ug(u)dx \\
&\quad \leq \int_S^T E(t)^q \|\nabla u_t\|_2^2 dt \\
&\quad \leq \int_S^T E(t)^q(-E'(t))dt \\
&\quad \leq E^{q+1}(S).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi, des estimations (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9), l'inégalité (4.4) s'écrit comme suit,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E(t)^{q+1} \\
&\quad \leq C\left(E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}} + E(S)^{q+\frac{2}{p}} + E(S)^{q+1}\right) \\
&\quad = CE(S)\left(E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}-1} + E(S)^{q+\frac{2}{p}-1} + E(S)^q\right) \\
&\quad \leq CE(S)E(0)^q\left(E(0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{l}} + E(0)^{\frac{2}{p}-1} + 1\right) \\
&\quad = \frac{1}{\gamma}E(S)E(0)^q,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

où $\frac{1}{\gamma} = C\left(E(0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{l}} + E(0)^{\frac{2}{p}-1} + 1\right)$.

En faisant tendre T vers l'infini dans (4.10) et en appliquant le Lemme (2.1.1) on obtient

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+q}{1+q\gamma t} \right)^{1/q} \leq CE(0)(1+t)^{-p/(p-2)},$$

d'où le résultat voulu.

Estimation du taux de décroissance de l'énergie associée à une équation des ondes de type p-Laplacien dissipativement faible

5.1 Introduction

On considère l'équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation faible de la forme :

$$(P_3)\begin{cases} u_{tt} - \mathrm{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) + \sigma(t)(u_t - \mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ avec $p, m \geq 2$ deux nombres réels et σ est une fonction positive vérifiant certaines conditions qu'on précisera plus tard.

Le même problème a été étudié dans **[2]** et cela pour $|u_t|^{m-2}u_t$ à la place de $-\mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)$. L'utilisation des inégalités intégrales de Martinez **[23]** ainsi qu'une partition du domaine dépendant du comportement du terme dissipatif à permis de démontrer que l'énergie suit une décroissance polynomiale.

Pour $\sigma \equiv 1$ et $\delta|u'|^{m-2}u'$ $(\delta > 0, m \geq 2)$ au lieu de $(u_t - \mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t))$, Ye **[30]** a pu démontrer que, pour $t \geq 0$, le taux de décroissance de l'énergie est de la forme $E(t) \leq (1+t)^{-p/(mp-m-1)}$ et cela en généralisant la méthode introduite par Nakao dans **[27]**. Cette méthode dans **[30]** ne s'applique pas malheureusement pour $m > 2$ et des fonctions σ plus générales.

A l'aide de nouvelles inégalité intégrales introduite par Martinez **[23]** dont la preuve repose sur la construction d'une fonction poids liée au comportement asymptotique du terme dissipatif $(\sigma(t)(u_t - \mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)))$; on aboutit à des résultats de décroissance polynomiale et exponentielle concernant l'énergie.

5.2 Préliminaires et résultat principal

On suppose que $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive, décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \sigma(\tau)\, d\tau = +\infty. \tag{5.1}$$

On définie l'énergie totale associée à la solution du problème (P_3) par,

$$E(t) = \frac{1}{2}\,\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{p}\,\|\nabla u_t\|_p^p, \tag{5.2}$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \geq 0$.

Ainsi, on a le lemme suivant :

Lemme 5.2.1 (Identité de l'énergie)**.** *Soit $u(t,x)$ une solution du problème (P_3) sur $[0,\infty)$. Alors,*

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega \sigma(s) u_t(u_t - div\,(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t))ds\ dt\ = E(0),$$

pour tout $t \in [0,\infty)$.

De **[29]**, on a le théorème d'existence globale suivant :

Théorème 5.2.1. *Soit $2 \leq m \leq p$ et supposons que $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $T > 0$, le problème (P_3) admet une unique solution faible $u(t)$ dans $\Omega \times [0, T]$ vérifiant*

$$u(t) \in L^\infty([0,T], W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T], L^2(\Omega)) \cap W^{1,m}([0,T], W_0^{1,m}(\Omega)).$$

Notre résultat principal est donné par le théorème ci-après,

Théorème 5.2.2. *Soit $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p} \times L^2(\Omega)$, $p \geq m \geq 2$ et supposons (5.1) satisfaite. Alors l'énergie de la solution $u(x,t)$ du problème (P_3) vérifie l'estimation suivante,*

- *Si $p = m$, alors il existe une constante positive ω telle que*

$$E(t) \leq C(E(0)) exp\left(1 - \omega \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau\right) \quad \forall t > 0. \tag{5.3}$$

- *Si $p > m$, alors il existe une constante positive $C(E(0))$ qui dépend de $E(0)$ telle que*

$$E(t) \leq \left(\frac{C(E(0))}{\displaystyle\int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau}\right)^{\frac{p(m-1)}{p-m}} \qquad \forall t > 0. \tag{5.4}$$

5.3 Preuve du résultat principal.

Nous sommes amenés à estimer la vitesse de décroissance de l'énergie associée à la solution du problème (P_3) à l'aide de la méthode des multiplicateurs. On utilise $E^q \phi'(t)\, u$ comme multiplicateur où ϕ est une fonction satisfaisant les propriétés du Lemme 2.2.1. Multiplions donc la première équation du problème (P_3) par $E^q \phi'(t)\, u$.

Rappelons que dans tout ce qui suit C désigne différentes constantes positives indépendantes de $E(0)$.

Ainsi, par intégration sur $\Omega \times [S,T]$ on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T E^q \phi' \int_\Omega u \left[u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) + \sigma(t)(u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t))\right] dxdt \\
&= \left[E^q \phi' \int_\Omega u u_t\right]_S^T - \int_S^T \left(qE' E^{q-1}\phi' + E^q \phi''\right) \int_\Omega u u_t \, dxdt \\
&\quad - \int_S^T E^q \phi' \int_\Omega |u_t|^2 dxdt + \int_S^T E^q \phi' \int_\Omega |\nabla u|^p \, dxdt \\
&\quad + \int_S^T E^q \phi' \sigma(t) \int_\Omega u \left(u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\right) dxdt.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

De là

$$\begin{aligned}
p\int_S^T E^{q+1}\phi' dt = &- \left[E^q \phi' \int_\Omega u u_t\right]_S^T + \int_S^T \left(qE' E^{q-1}\phi' + E^q \phi''\right) \int_\Omega u u_t \, dxdt \\
&+ \left(\frac{p}{2}+1\right) \int_S^T E^q \phi' \int_\Omega |u_t|^2 \, dxdt \\
&- \int_S^T E^q \phi' \sigma \int_\Omega u \left(u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\right) dxdt.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

On pose,

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau.$$

Il est clair que ϕ est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et la condition (5.1) assure que

$$\phi(t) \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to +\infty. \tag{5.7}$$

Puisque E est décroissante, ϕ' est une fonction positive, bornée sur $\mathbb{R}_+$ (notons par μ sont maximum) on trouve que

$$-\left|\left[E^q \phi' \int_\Omega u u_t \, dx\right]_S^T\right| \leq C\mu E(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, \tag{5.8}$$

cela découle du fait qu'on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega uu_t\,dx &\le \|u\|_2\|u_t\|_2\\ &\le C\|\nabla u\|_p\|u_t\|_2\\ &\le CE(t)^{\frac{1}{p}}E(t)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De même, par l'inégalité de Hölder, celle de Sobolev-Poincaré et (5.2) on a

$$\begin{aligned}&\left|\int_S^T \left(qE^{'}E^{q-1}\phi^{'}+E^q\phi^{''}\right)\int_\Omega uu_t\,dxdt\right|\\ &\qquad\le C\mu\int_S^T -E^{'}E^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\,dt + CE^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(-\phi^{''})\,dt\\ &\qquad\le C\mu E(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt &\le \left(1+\frac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\int_\Omega \left(|u_t|^2+|\nabla u_t|^m\right)\,dxdt\\ &\le \left(1+\tfrac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\left(-\frac{E^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)\,dt\\ &\le CE^{q+1}(S).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Il reste a estimer le terme,

$$-\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma\int_\Omega u\left(u_t-\operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\right)\,dxdt.$$

On a

$$\begin{aligned}&\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega u(u_t-\operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t))\,dxdt\right|\\ &\quad\le\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega uu_t\,dxdt\right|\\ &\qquad+\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega u\operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\,dxdt\right|.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega u\operatorname{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)dxdt\right|\\ &\le\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla u_t|^{m-1}\,dxdt\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\int_S^T E^q\phi'(t)\sigma(t)\int_\Omega u\,\mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)dxdt\right|$$
$$\leq \int_S^T E^q\phi'\sigma(t)\|\nabla u\|_p\|\nabla u_t\|^{m-1}_{\frac{p(m-1)}{p-1}}\,dt.$$

On a encore

$$\|\nabla u_t\|^{m-1}_{\frac{p(m-1)}{p-1}} \leq C|\Omega|^{\frac{p-m}{pm}}\|\nabla u_t\|^{m-1}_m,$$

et

$$\|\nabla u_t\|^{m-1}_m \leq \left(\frac{-E'(t)}{\sigma(t)}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_S^T E^q\phi'(t)\sigma(t)\int_\Omega u\,\mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\right|$$
$$\leq C\int_S^T E^{q+\frac{1}{p}}\phi'\sigma(t)\left(\frac{-E'(t)}{\sigma(t)}\right)^{\frac{m-1}{m}}dt$$
$$= C\int_S^T E^{q+\frac{1}{p}}\phi'\sigma(t)^{\frac{1}{m}}\left(-E'(t)\right)^{\frac{m-1}{m}}dt.$$

Par l'inégalité de Young, on aura

$$\left|\int_S^T E^q\phi'(t)\sigma(t)\int_\Omega u\,\mathrm{div}(|\nabla_x u_t|^{m-2}\nabla_x u_t)\right|$$
$$\leq \frac{1}{m}\varepsilon^m\int_S^T E^{(q+\frac{1}{p})m}(\phi'(t))^m\sigma(t)\,dt + \frac{m-1}{m}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{m}{m-1}}}E(S) \qquad (5.12)$$
$$= \frac{1}{m}\varepsilon^m\int_S^T E^{(q+\frac{1}{p})m}\phi'(t)(\sigma(t))^m\,dt + \frac{m-1}{m}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{m}{m-1}}}E(S).$$

On pose

$$m\left(q+\frac{1}{p}\right) = q+1,$$

donc $q = (p-m)/p(m-1)$. Ainsi, des inégalités (5.8), (5.9), (5.10), (5.12) et (5.6) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{q+1}\phi'(t)\,dt \\
&\quad \leq CE(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} + C'E(S)^{q+1} + C''E(S) \\
&\quad \leq \left(\frac{CE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} + C'E(0)^q + C''}{E(0)^q}\right) E(0)^q E(S),
\end{aligned} \tag{5.13}$$

où C, C' et C'' sont des canstantes positives indépendantes de $E(0)$. Finalement, en faisant tendre T vers l'infini dans (5.13) et en appliquant le Lemme 2.2.1 on obtient

$$E(t) \leq \left(CE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} + C'E(0)^q + C''\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1+q}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \int_0^t \sigma(t)\,dt.$$

Il est clair que pour $p = m$, l'énergie $E(t)$ associée au problème (P_3) vérifie la propriété de décroissance (5.3).

Perspectives

Le fait d'imposer certaines conditions sur le terme dissipatif, donne de différents aspects au problème posé, ainsi l'étude de l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions nécessitera d'autres méthodes. On compte donc orienter notre recherche vers des cas de feedback non monotone. Plus justement une énergie qui n'est pas forcement décroissante. Des problèmes de ce genre font actuellement l'objet d'étude de plusieurs auteurs.

A. Guesmia (**[12]** , **[13]**) par exemple a pu introduire de nouvelles inégalités intégrales, plus générales que celles de Haraux **[14]**, Komornik **[19]** et Martinez **[23]**. Des inégalités permettant une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive non nécessairement décroissante. C'est donc le cas des problèmes non dissipatifs.

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation,* Editions de l'école polytechnique, Palaiseau. (2007).

[2] N. Amroun and S. Mimouni, *Asymptotic behaviour of solutions for some weakly dissipative wave equations of p-Laplacian type*, Applied Mathematics E-Notes, **11** (2011), 175–183.

[3] G. Andrews, *On the existence of solutions to the equation* $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$, Journal of Differential Equations. **35** (1980), no. 2, 200–231.

[4] G. Andrews and J. M. Ball, *Asymptotic behaviour and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity*, Journal of Differential Equations. **44** (1982), no. 2, 306–341.

[5] D. Ang and A. Dinh, *Strong solutions of quasilinear wave equation with non-linear damping*, Siam Journal on Mathematical Analysis. **19** (1988), 289-299.

[6] A. Benaissa and S. Mimouni, *Energy decay of solutions of wave equation of p-Laplacian type with a weakly nonlinear dissipation,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **7** (2006)-1, Article 15, 8 pp.

[7] A. Benaissa and S. Mokeddem, *Decay estimates for the wave equation of p-Laplacian type with dissipation of m-Laplacian type*,

[8] A. Biazutti, *On a nonlinear evolution equation and its applications*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. **24** (1995), 1221–1234.

[9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théore et applications,* Masson, Paris. (1983).

[10] C. Chen, H.Yao, and L. Shao, *Global Existence, Uniqueness, and Asymptotic behavior of solution for p-Laplacian Type wave equation*, J. Inequal. Appl. 2010, Art. ID 216760, 15 pp.

[11] J. C. Clements, *On the existence and uniqueness of solutions of the equation* $u_{tt} - \partial\sigma_i(u_{x_i})/\partial x_i - \Delta_N u_t = f$, Canadian Mathematical Bulletin 1975 ; **18** : 181-187.

[12] A. Guesmia, *Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 332 (2001), 633-636.

[13] A. Guesmia, *Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I.Math. Paris, 336 (2003), 801-804.

[14] A. Haraux, *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs nonlinéaires*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978, No. 78010.

[15] A. Haraux, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978, No. 78011.

[16] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems*, in :Research Notes in Mathematics, Pitman. (1985), 161–179.

[17] S. Kawashima and Y. Shibata, *Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity*,

[18] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization*, RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris ; Jhons Wiley, Ltd, Chichester. 1994.

[19] V. Komornik, *Decay estimates for the wave equation with internal damping*, International Series of Num. Math. Birkh¨auser Verlag Basel, **118** (1994), 253–266.

[20] S. Kouémou, *Stabilisation interne de certains systèmes distribués, Thesis*, U.L.P., Strasbourg 1995.

[21] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod-Gauthier Villars. Paris, France, 1969.

[22] T. F. Ma and J. A. Soriano, *On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities*,

[23] P. Martinez, *A new method to decay rate estimates for dissipative systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **4** (1999), 419–444.

[24] S. A. Messaoudi, *On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **28** (2005), 1819–1828.

[25] S. Mokeddem and Kh. B. W. Mansour, *Asymptotic behaviour of solutions for p-Laplacian wave equation with m-Laplacian dissipation*, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 3, 259–269.

[26] M. Nakao and T. Nanbu, *Existence of global (bounded) solutions for some nonlinear evolution equations of second order*, Mathematical Reports of College of General Education. Kyushu University. **10** (1975), 67–75.

[27] M. Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations*, Journal of the Mathematical Society of Japan. **30** (1978), 747-762.

[28] D. H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **30** (1968), 148–172.

[29] Z. Yang, *Existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of quasilinear evolution equations with nonlinear damping and source terms*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **25** (2002), 795–814.

[30] Y. J. Ye, *On the decay of solutions for some nonlinear dissipative hyperbolic equations*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica. English Series. **20** (2004), 93–100.

[31] Y. J. Ye, *Exponential decay of energy for some nonlinear hyperbolic equations with strong dissipation*, Adv. Difference Equ. 2010, Art. ID 357404, 12 pp.

[32] Y. J. Ye, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for some nonlinear hyperbolic equation*, J. Inequal. Appl. 2010, Art. ID 895121, 10 pp.