



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : **ISSAD Mohammed Naim**

Intitulé de la thèse

Investigation sur le comportement mécanique des plaques épaisse isotropes et orthotropes

Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	Président	UDL SBA
FEKRAR Abdelkader	MCA	Directeur de thèse	UDL SBA
BENYOUCEF Samir	Pr	Examineur	UDL SBA
CHIKH Abdelbaki	MCA	Examineur	U de TIARET
HEBALI Habib	MCA	Examineur	U de TIARET
KACI Abdelhakim	MCA	Examineur	U DE SAIDA

Année universitaire 2018-2019

REMERCIEMENT

DEDICACE

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENT	I
DEDICACE.....	II
TABLE DES MATIERES	III
LISTE DES FIGURES.....	VI
LISTE DES TABLEAUX	VIII
NOTATIONS.....	IX
INTRODUCTION GENERALE	1
I. CHAPITRE I : INTRODUCTION SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.....	6
I.1. INTRODUCTION :	6
I.2. LES COMPOSITES GRANDES DIFFUSIONS (GD) :.....	7
I.3. Les composites hautes performances (HP) :.....	7
I.4. Les Matrices :	7
I.4.1. Les Résines Thermodurcissables (TD) :	8
I.4.2. Les Résines Thermoplastiques (TP) :.....	9
I.4.3. Les matrices métalliques :	9
I.4.4. Les matrices céramiques :	9
I.5. Les Renforts :	10
I.5.1. Les fibres de verre :	10
I.5.2. Les fibres de carbone :	11
I.5.3. Les fibres d'aramide :	12
I.5.4. Les fibres de bore :.....	12
I.5.5. Architecture des renforts :	12
I.6. Théories du comportement élastique des matériaux :	14
I.6.1. Comportement élastique d'une couche de matériau orthotrope	16
I.6.2. Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des stratifiés :	29
II. CHAPITRE II : GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS	
EVALUE	34
II.1. Introduction.....	34
II.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés.....	35
II.3. Histoire du développement architectural du concept FGM.....	38
II.3.1. Pour Des Utilisations Structurales (Intégration Du Caractère Réfractaire Et De La Dureté).....	39
II.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :.....	42
II.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM.....	49
II.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM.....	50

II.4.2.	Densification des poudres compactes pour FGM.....	55
II.5.	L'intérêt d'utilisation des FGM.....	58
II.6.	Méthodes d'élaboration des FGM.....	58
II.6.1.	Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	59
II.6.2.	Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	60
II.6.3.	Compaction Sèche des Poudres	61
II.6.4.	Dépôt par Electrophorèse.....	61
II.6.5.	Projection Plasma.....	62
II.6.6.	C. V. D. et P. V. D.	62
II.6.7.	Frittage et Infiltration	62
II.6.8.	Frittage Laser Différentiel.....	63
II.6.9.	Implantation Ionique (Sputtering).....	63
II.6.10.	Dépôt par Centrifugation.....	63
II.7.	Propriétés physiques et mécaniques des FGM.....	64
II.7.1.	Propriétés physiques de l'aluminium	64
II.7.2.	Propriétés physiques du céramique.....	65
II.8.	Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.....	66
II.9.	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	67
II.9.1.	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :.....	68
II.9.2.	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	69
II.9.3.	Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :	70
III.	CHAPITRE III : DIFFERENTES THEORIES UTILISEES DANS LES	
	STRUCTURES COMPOSITES	73
III.1.	Introduction.....	73
III.2.	Les Différent Modèle des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	73
III.2.1.	Approche monocouche équivalente	73
III.2.2.	Approche par couche.....	80
III.3.	Conclusion	83
IV.	CHAPITRE IV : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES ET DU	
	FLAMBEMENT DES PLAQUES ORTHOTROPES	85
IV.1.	Introduction.....	85
IV.2.	Plaque ortho tropique étudiée.....	87
IV.3.	Solutions analytiques pour plaques orthotropes	93
IV.4.	Résultats numériques et discussion	95
IV.5.	Conclusion :.....	103
	CONCLUSION GENERALE	104
	BIBLIOGRAPHIE	106

LISTE DES FIGURES

Fig II-1 : les différentes familles de matrices	8
Fig II-2 principaux matériaux de renfort	10
Fig II-3 Nomenclature des composites stratifiés.....	16
Fig II-4: Orientation des couches d'un stratifié orthotrope	16
Fig II-5: les couches d'un stratifié	24
Fig II-6 : Forces par unités de longueur.....	25
Fig II-7 : Moments par unités de longueur	27
Fig II-1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	35
Fig II-2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin 2004).....	36
Fig II-3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). (Watari 2004)	37
Fig II-4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996).....	39
Fig II-5 : résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées »	41
Fig II-6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro 1996).....	43
Fig II-7 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro 1996)	44
Fig II-9 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois- couches [Ichiro 1996].....	46
Fig II-10 : Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi ₂ /Al ₂ O ₃ /Ni/Al ₂ O ₃ /MoSi ₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro 1996).....	47
Fig II-11 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro 1996).....	49
Fig II-12 : La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro 1996)	49
Fig II-13 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM (Neubrand 1997)	51
Fig II-14 : Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM (Anné 2006)	53
Fig II-15 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al ₂ O ₃ /ZrO ₂) (Anné 2006)	54
Fig II-16 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. (Anné 2006)	55
Fig II-17 : (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al ₂ O ₃ / ZrO ₂ (Anné 2006).....	55
Fig II-18 : Principe de la méthode coulage en bande	60
Fig II-19 : Disposition du procédé frittage laser différentiel	63
Fig II-20 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].....	64
Fig II-21 : Modèles analytiques pour une couche en FGM	67
Fig II-22 : Géométrie d'une plaque en	68

Fig II-23 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	69
Fig II-24 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	70
Fig III-1 : Cinématique de Love-Kirchhoff	74
Fig III-3 : Variation de la fonction de gauchissement et suivant l'épaisseur	76
Fig III-4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	77
Fig III-5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	79
Fig III-6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	80
Fig III-8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Nguyen 2004)	81
Fig III-7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Nguyen 2004)	81
Fig III-9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.....	82
Fig III-10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.[Nguyen 2004]	82

LISTE DES TABLEAUX

Tableau II-1 Caractéristique moyenne des matrices	8
Tableau II-2 principales différences entre TP et TD	9
Tableau II-3: Caractéristiques moyennes des fibres et renforts.	12
Tableau IV-1 : Comparaison des fréquences propres fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}_w$ en mode de flexion de la plaque carrée orthotrope simplement appuyée ($a/h=10$)	96
Tableau IV-2: Comparaison des fréquences propres fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}_\theta$ en mode de cisaillement en épaisseur de la plaque carrée orthotrope simplement appuyée ($a/h=10$)	96
Tableau IV-3: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge critique de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, m = n = 1$).	98
Tableau IV-4: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge critique de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, m = n = 1$)	99
Tableau IV-5: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale sur l'axe des x ($a/h=5, \gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, m = n = 1$).	100
Tableau IV-6: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale sur l'axe des y ($a/h=5, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1, m = n = 1$)	101
Tableau IV-7: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression biaxiale ($a/h=5, \gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, m = n = 1$).	102

NOTATIONS

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité de la céramique
$V(\mathbf{r})$	Fraction volumique
$\alpha(z), \beta(z)$	Coefficients de Lamé
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y

$\Psi(\mathbf{z})$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(\mathbf{z})$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation de l'énergie potentielle
δK	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
(m, n)	ième mode propre
(I_i, J_i, K_i, J_i^z)	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Abstract.

The present work presents a free vibration and buckling analysis of orthotropic plates by proposing a novel two variable refined plate theory. Contrary to the conventional higher order shear deformation theories (HSDT) and the first shear deformation theory (FSDT), the proposed theory utilizes a novel displacement field which incorporates undetermined integral terms and involves only two unknowns. The governing equations are obtained from the dynamic version of principle of virtual works. The analytical solution of a simply supported orthotropic plate has been determined by using the Navier method. Numerical investigations are performed by employing the proposed model and the obtained results are compared with the existing HSDTs.

Keywords: two variable refined plate theory; vibration, buckling; orthotropic plate

Résumé

Dans le présent travail une analyse des vibrations libres ainsi que le flambement des plaques orthotropes est développée. A cet effet, une nouvelle théorie de plaque raffinée à deux variables a été proposée. Contrairement aux théories conventionnelles de déformation par cisaillement d'ordre supérieur « Higher Order Shear Deformation Theories (HSDT) » et à la première théorie de déformation par cisaillement « First Shear Deformation Theory (FSDT) », la théorie proposée utilise un nouveau champ de déplacement qui incorpore des termes intégraux indéterminés et n'implique que deux inconnues. Les équations fondamentales sont obtenues à partir de principe des travaux virtuels. La solution analytique d'une plaque orthotrope simplement a été déterminée en utilisant la solution de Navier. Les investigations numériques sont réalisées en utilisant le modèle proposé et les résultats obtenus sont comparés à ceux de la théorie HSDT.

Mots clefs : la théorie raffinée des plaques a deux variables, vibration, flambement, plaque orthotrope.

ملخص

في هذا العمل، تم تحليل الاهتزازات الحرة وكذلك الاوجاج للصفائح المركبة. لهذا الأمر تم تطوير نظرية جديدة ذات التركيب العالي لمتغيرين واجراء مقارنة بين مختلف النماذج ذات الترتيب العالي لمتغيرين وإجراء مقارنة بين مختلف النماذج التي تأخذ أو لا التشوهات العمودية والتي تستند على إدخال التوزيعات، الخطية، المكافئة، القطعية، الآسية و الجيبية على سمك. على خلاف نظريات أخرى، عدد الدوال غير معروفة في النظرية المقترحة هم فقط أربعة، عوضا عن أخرى لنظريات تشوه القص العرضي. النظرية المقترحة متناسقة المتغيرات تشبه النظرية الكلاسيكية للصفائح في جوانب عديدة لا تتطلب معامل تصحيح القص وتعطي وصفا مكافئا للإجهادات القص العرضي من خلال السمك بينما تحقق الشروط على الاجهادات القص العرضي والتي تنعدم على الحواف العلوية والسفلية للصفحة. النظرية الحالية تستعمل حقل جديد من الحركة ذات متغيرين بصيغة تفاضلية.

استعملنا عدة أنواع من الصفائح المركبة بأخذ أو لا تماثل الصفحة وسمك كل طبقة. النتائج المتحصل عليها بالنظرية المقترحة (مع أربعة مجاهيل) والنظريات الأخرى ذو الترتيب العالي للتشوه في القص العرضي (خمسة مجاهيل أو أكثر) تكاد تكون متطابقة. نستخلص أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة لحل سلوك الاهتزازات والاعوجاجات.

الكلمات الرئيسية: نظرية الترتيب العالي لمتغيرين، الاهتزازات، الاعوجاجات، الصفائح المركبة.

INTRODUCTION GENERALE

Les performances des matériaux composites présentent de nombreux intérêts pour la conception des structures mécaniques. On peut citer notamment un rapport résistance/poids élevé, l'absence de corrosion, l'amortissement des vibrations ou encore la résistance au choc.

L'utilisation de ces matériaux, dont les atouts sont particulièrement intéressants dans des secteurs industriels de pointe tels que l'aéronautique, se heurtent encore toutefois à certains freins liés à des mécanismes d'endommagement et de rupture relativement complexes.

Actuellement les composites stratifiés sous forme de plaques ou de poutres constituent un sujet de recherche important, suite à leurs utilisation croissante en construction, et la tendance permanente vers une meilleure optimisation de résistance et de rigidité, ils sont des éléments structuraux qui couvrent un large éventail de besoins industriels. Leurs utilisations nécessitent la mise en œuvre d'outils performants indispensables à la modélisation de leur comportement mécanique et au dimensionnement de structures pour lesquelles ils sont utilisés.

L'analyse vibratoire et flambement sont des questions d'actualité importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations importants.

D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire et l'instabilité des plaques devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations et le flambement ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique et au flambement du matériau isotrope, orthotrope ou composite. Le contrôle des vibrations dans ces structures plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable.

L'analyse de vibration libre et l'étude de flambement des plaques rectangulaires qui font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés a été un sujet de recherche actif en raison

de leur grande importance à être employées pour les différents secteurs de l'industrie mécanique, aéronautique et pour le génie civil, à cet effet de nombreux travaux de recherches approfondies ont été accumulés au cours des 50 dernières années (Timoshenko (1955), Mishal (1969), Szilard (1974), Reddy (1999)). Ces composants structuraux avec une masse de patch localisée sont souvent rencontrés dans les pratiques d'ingénierie telles que la technologie aéronautique et spatiale, les dalles et panneaux de revêtement dans les structures de construction d'ouvrages d'art, les ponts et la construction des navires, ou encore les équipements électroniques sont souvent placés à proximité des dispositifs pyrotechniques. Ils subissent donc un environnement vibratoire très sévère pouvant les endommager.

La théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) qui se base sur les fameuses hypothèses de Kirchhoff, selon laquelle une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse, l'approche de cette étude fournit des résultats raisonnables uniquement pour les plaques minces et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes.

Cependant, la CLPT sous-estime les flèches et surestime les fréquences naturelles ainsi que les charges de flambement des plaques moyennement épaisses. De nombreuses théories de déformation en cisaillement ont été développées sur la base d'expliquer les effets de cisaillement transverse pour surmonter les insuffisances de la théorie CLPT. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) basée sur Reissner (1945) et Mindlin (1951) qui exige la prise en compte des déformations du cisaillement transverse au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan médian à travers l'épaisseur. Puisque la FSDT ne vérifie pas les conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures des plaques, les facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires afin de rectifier la variation irréaliste de la déformation en cisaillement et la contrainte à travers l'épaisseur. Par la suite, différentes théories d'ordre supérieur plus précises que les modèles du premier ordre ont été proposées afin de satisfaire les conditions aux limites sur les bords libres de la plaque. Ambartsumian (1958) a proposé une fonction de la contrainte de cisaillement transverse afin d'expliquer la déformation de la plaque. Une méthode similaire a été utilisée plus tard par Soldatos et Timarci (1993), pour une analyse dynamique de coques stratifiées. Ensuite, quelques nouvelles fonctions ont été proposées par Reddy (1984), Touratier (1991), Karama et al. (2003) et Soldatos (1992). La théorie des plaques raffinée à deux variables (RPT) en utilisant seulement

deux fonctions inconnues a été développée par Shimpi (2002) pour des plaques isotropes et a été prolongée par Shimpi et Patel (2006) pour des plaques orthotropes.

L'objectif principal de ce travail de thèse a été s'inscrire dans le cadre d'une étude développée sur un modèle de calcul analytique de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée orthotropes simplement appuyée en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé des plaques. La présente théorie ne possède que deux inconnues, mais elle satisfait aux conditions aux limites de nullité des contraintes de cisaillement transverse sur les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sans avoir besoin de facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en fonction d'un déplacement transversal constant et une variation sinusoïdale de déplacements membranaires à travers l'épaisseur. La superposition du déplacement transversal en deux parties (due à la flexion et au cisaillement) conduit à une réduction dans le nombre d'inconnues et des équations d'équilibre, par conséquent, rend la théorie simple à utiliser par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement proposées dans la littérature qui emploient cinq inconnues ou plus. L'effet de différents paramètres tels que la position de la masse du patch et le rapport géométrique des dimensions de la plaque sur la vibration libre sont également étudiés dans le présent travail.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux composites, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les différentes formulations des stratifiés utilisés pour l'analyse du comportement mécanique des structures en composite.

Le deuxième chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement mécanique des structures en « FGM ».

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse du comportement mécanique des plaques épaisses sous chargement. Ainsi, les autres modèles des plaques épaisses qui incluent ou non la déformation normale.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à des applications de la nouvelle théorie réalisées sur les plaques orthotrope avec une variation des propriétés matérielles. Afin d'étudier la réponse vibratoire et les charges limite de flambement en utilisant les divers modèles des plaques épaisses qui incluent ou non la déformation normale.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures.

CHAPITRE I :

INTRODUCTION SUR LES

MATERIAUX COMPOSI

I. CHAPITRE I : INTRODUCTION SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

I.1. INTRODUCTION :

Un matériau composite peut être défini comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de nature différente à échelle microstructurale.

Les composites sont le plus souvent constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts.

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels ; Ils apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Les matériaux composites (à matrice métallique, élastomère, polymère ou céramique) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer des fonctions (forme et matériaux), alors des systèmes de plus en plus performants.

Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement. Parmi les composites, on distingue deux types :

I.2. LES COMPOSITES GRANDES DIFFUSIONS (GD) :

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

I.3. LES COMPOSITES HAUTES PERFORMANCES (HP) :

Principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP.

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort.

I.4. LES MATRICES :

La matrice permet de lier les fibres de renforts, de répartir les contraintes, et de donner la forme désirée au produit final.

Les différentes familles de Matrice sont présentées par l'organigramme suivant :

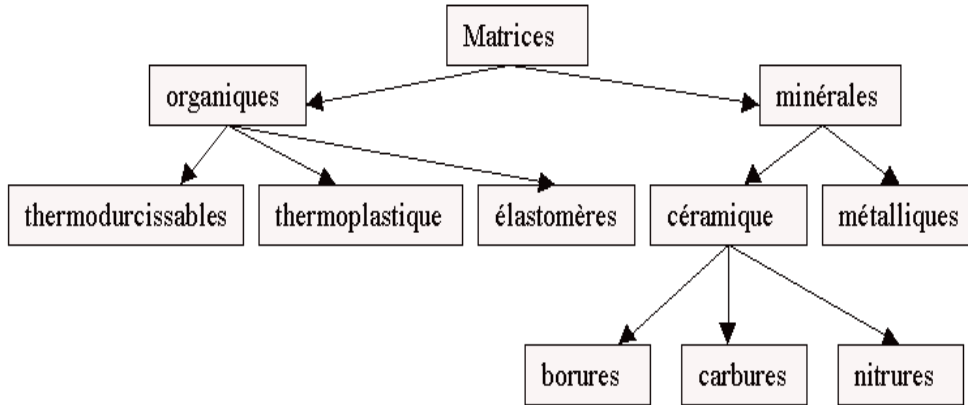


Fig I-1 : les différentes familles de matrices

Parmi ces familles de résines, on distingue deux types de résines qui sont, actuellement, les plus utilisées :

I.4.1. Les Résines Thermodurcissables (TD) :

Qui sont, en général, associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel ; au cours de la polymérisation, ce réseau se pont (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée, la transformation est irréversible.

Matrices TD	Masses volumique (kg.m ⁻³)	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Module de cisaillement (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
	?	E	G	?	s _r	A	a
Epoxyde	1 200	4 500	1 600	0.4	130	2	11*10 ⁻⁵
Phénolique	1 300	3 000	1 100	0.4	70	2.5	1*10 ⁻⁵
Polyester	1 200	4 000	1 400	0.4	80	2.5	8*10 ⁻⁵
Polycarbonate	1 200	2 400		0.35	60		6*10 ⁻⁵
Vinylester	1 150	3 300			75	4	5*10 ⁻⁵
silicone	1 100	2 200		0.5	35		
Uréthanne	1 100	700 à 7 000			30	100	
Polyimide	1 400	4 000 à 19 000	1 100	0.35	70	1	8*10 ⁻⁵

Tableau I-1 Caractéristique moyenne des matrices

I.4.2. Les Résines Thermoplastiques (TP) :

Renforcés avec des fibres courtes (et, parfois, avec des fibres longues) se développe fortement.

Les polymères thermoplastiques ont une structure linéaire ; ils sont mis en forme par chauffage (les chaînes se plient), et durcissent au cours du refroidissement (les chaînes se bloquent).

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
Etat de base	solide prêt à l'emploi	liquide visqueux à polymériser
Stockage	illimité	réduit
Mouillabilité renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage + refroidissement	chauffage continu
Cycle	court	long
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	propreté	émanation pour "méthode humide"

Tableau I-2 principales différences entre TP et TD

I.4.3. Les matrices métalliques :

Pour des applications plus haute température, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M.) jusqu'à 600 °.

Les métaux ou alliages métalliques, utilisées dans la fabrication des (C.M.M.), sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé ainsi , l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utilisés, les (C.M.M.) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en températures et au chocs thermiques.

I.4.4. Les matrices céramiques :

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

I.5. LES RENFORTS :

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique,
- l'architecture du renfort, Unidirectionnel (UD) ou Tissu...

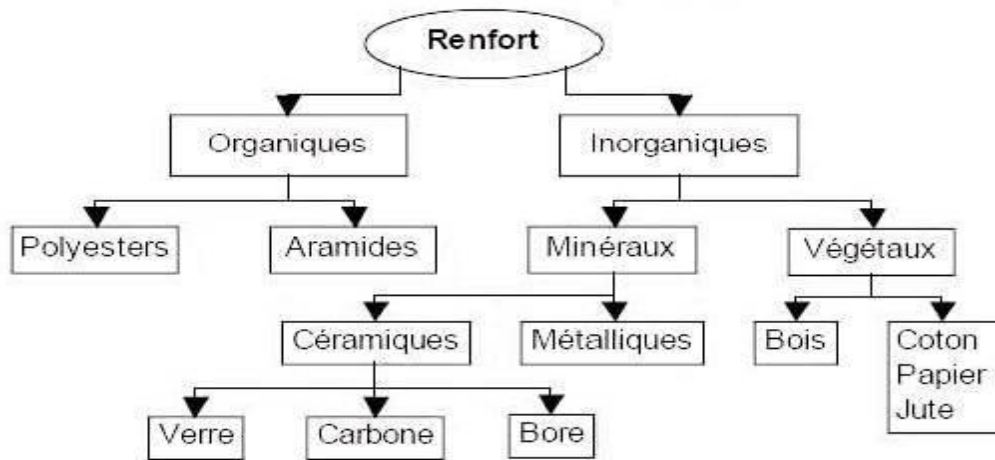


Fig I-2 principaux matériaux de renfort

I.5.1. Les fibres de verre :

Sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1.250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- **Fibres E** pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- **Fibres D** pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés).
- **Fibres R** pour les composites hautes performances (HP).

Chapitre I : Introduction Sur Les Matériaux Composites

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD).

Elles offrent, pour un prix raisonnable :

- Une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- Des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

Les fibres de verre sont utilisées principalement dans :

- la plupart des composites « grandes diffusions » (automobile, construction, construction électrique) ;
- Certains composites « hautes performances » avec des fibres de verre « R ».
- L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :
- Une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique ;
- Un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

I.5.2. Les fibres de carbone :

L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix.

Cependant, Les fibres de carbone souffrent aussi de handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour certaines applications dans les composites :

- Un allongement à la rupture insuffisant (inférieur à 2%) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4%) ;
- Une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à prix modéré.

I.5.3. Les fibres d'aramide :

Est issue de la chimie organique des polyamides aromatiques (ou poly aramide) par synthèse chimique à basse température ; on la nomme souvent «Kevlar». Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre,
- D'un prix encore trop élevé.

I.5.4. Les fibres de bore :

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

Renforts	Diamètre du filament (µm)	Masse volumique (kg.m ⁻³)	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Module de cisaillement (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
	d	?	E	G	?	s _r	A	a
Verre E	16	2 600	74 000	30 000	0.25	2 500	3.5	0.5*10 ⁻⁵
Verre R	10	2 500	86 000		0.2	3 200	4	0.3*10 ⁻⁵
Carbone HM	6.5	1 800	390 000	20 000	0.35	2 500	0.6	0.08*10 ⁻⁵
Carbone HR	7	1 750	230 000	50 000	0.3	3 200	1.3	0.02*10 ⁻⁵
Kevlar 49	12	1 450	130 000	12 000	0.4	2 900	2.3	-0.2*10 ⁻⁵
Bore	100	2 600	400 000			3 400	0.8	0.4*10 ⁻⁵
Silicate d'alumine	10	2 600	200 000			3 000	1.5	
Polyéthylène		960	100 000			3 000		

Tableau I-3: Caractéristiques moyennes des fibres et renforts.

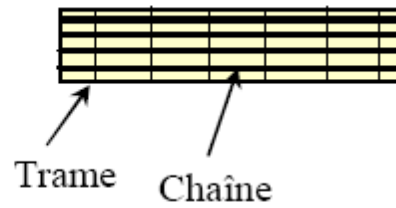
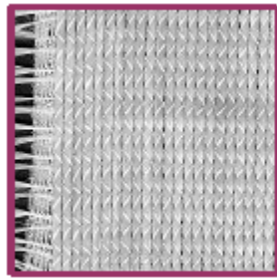
I.5.5. Architecture des renforts :

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

Il existe différentes géométries et textures de renforts :

a) Les unidirectionnels (UD) :

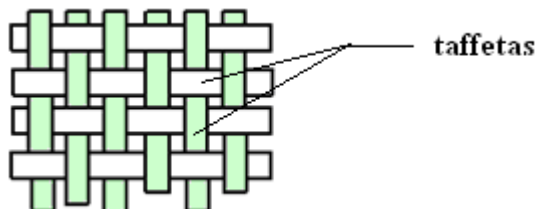
Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.



Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.

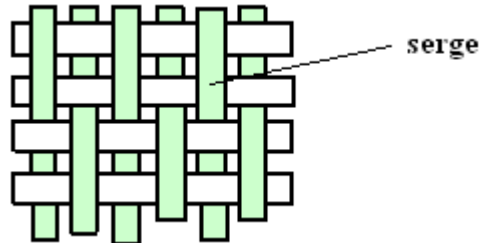
b) Toile ou taffetas :

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.



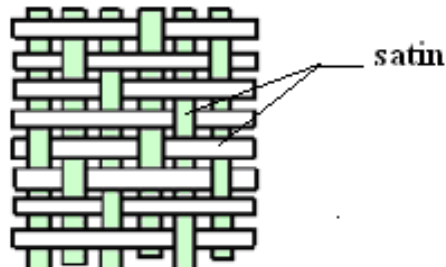
c) Serge :

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé 2/2.



d) Satin :

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n- 1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.



I.6. THEORIES DU COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MATERIAUX :

L'étude du comportement élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysée par la théorie des plaques basées sur une évaluation du champ des contraintes et champ des déplacements. Cette étude comportera deux phases :

Chapitre I : Introduction Sur Les Matériaux Composites

L'étude du comportement mécanique de champ couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau composite.

L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique globale d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

Nous développerons donc de manière assez détaillée cette théorie en considérant les hypothèses suivantes :

- L'interface entre les couches est homogène (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux. Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate (J.M.BERTHELOT, 2005)

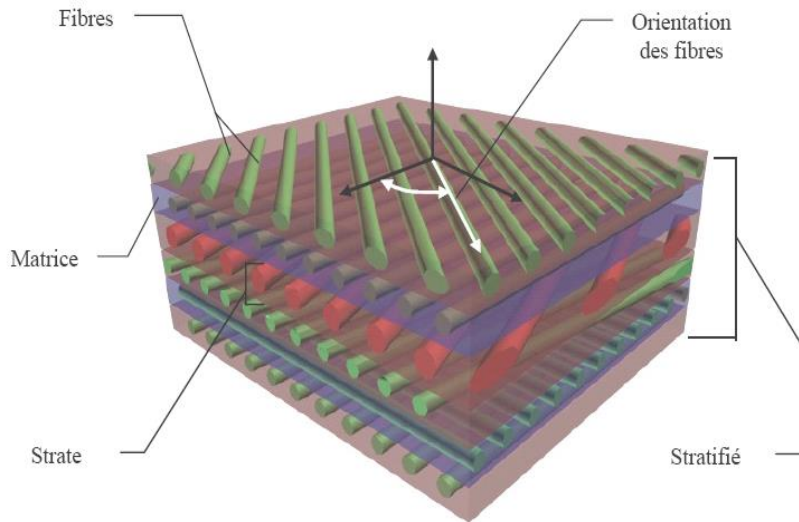


Fig I-3 Nomenclature des composites stratifiés

I.6.1. Comportement élastique d'une couche de matériau orthotrope

a) Comportement dans les axes du matériau

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope, rapporté à ses axes principaux Fig I-4, peut être décrit soit par sa matrice de rigidité C ,

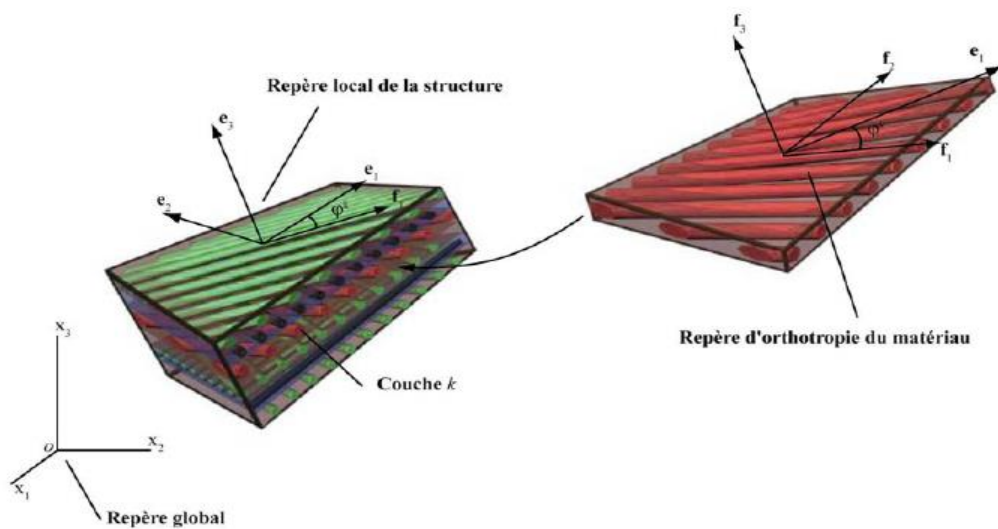


Fig I-4: Orientation des couches d'un stratifié orthotrope

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-1}$$

Soit par la matrice de souplesse en définie par S :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-2}$$

b) Etat de contraintes planes

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{q I-3}$$

La déformation normale « ε_z » peut être exprimée en fonction des composantes des contraintes planes en utilisant le fait que $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{36}\tau_{xy} \quad \text{eq I-4}$$

Dans le plan matériau principal, les termes des coefficients de rigidité Q_{16} ($i \neq 6$) sont nuls, par conséquent, $Q_{16} = Q_{26} = 0$. Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-5}$$

En inversant cette dernière équation, nous aurons :

Les éléments de cette matrice en contrainte plane sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-6}$$

Où : $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{12} &= \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned}$$

Etant donné que la matrice de souplesse est symétrique $S_{21} = S_{12}$ donc nous aurons :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

Les constantes qui peuvent être mesurées dans le laboratoire d'une façon exacte sont $E_1, E_2, \nu_{21}, G_{21}$. Une mesure exacte du coefficient de poisson ν_{21} est souvent très difficile car, il est très petit pour plusieurs matériaux composites.

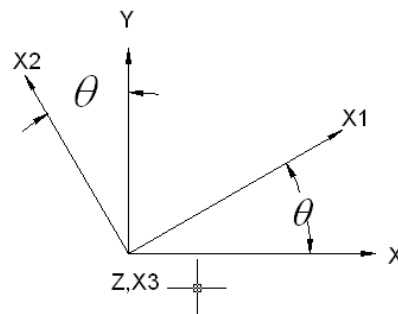
Les expressions explicites des termes Q_{ij} en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12}$$

c) Constantes de rigidités réduites d'un composite orthotrope en dehors de ces axes principaux :

On considère la rotation à travers un angle θ autour d'un axe « z » comme est indiqué dans la Fig I-4



Les cosinus directeurs pour ces transformations sont exprimés en fonctions de l'angle θ

$$m = \cos \theta$$

Et

$$n = \sin \theta$$

L'équation constitutive de contrainte plane dans un repère arbitraire x-y est alors écrite comme Suit :

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_x \quad \text{eq I-7}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-8}$$

Ou les termes \bar{Q}_{ij} sont définis comme suit : eq I-9

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \quad \text{(I-9a)}$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \quad \text{(I-9b)}$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \quad \text{(I-9c)}$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \quad \text{(I-9d)}$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^3 \quad \text{(I-9e)}$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(n^4 + m^4)$$

d) Théorie des stratifiés

e) Champs des déplacements

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Henkey-Mindlin, schéma de Kirchhoff) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y, 0) + \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y, 0) + \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y, 0) \end{cases} \quad \text{eq I-10}$$

(u_0, v_0, w_0) Est le déplacement du plan moyen

f) Champ des déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements soit

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{cases} \quad \text{eq I-11}$$

Pour un schéma où les déformations en cisaillement transverse sont nulles :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \text{eq I-12}$$

Cette hypothèse implique :

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \quad \text{eq I-13}$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \end{array} \right. \quad \text{eq I-14}$$

La matrice de la déformation se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{eq I-15}$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{eq I-16}$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{eq I-17}$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

En posant :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{eq I-18}$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion :

$$\text{Ou plus simplement : } \{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + z\{k\}_x$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

g) Champs de contraintes

Les contraintes dans la couche k s'expriment de la façon suivante :

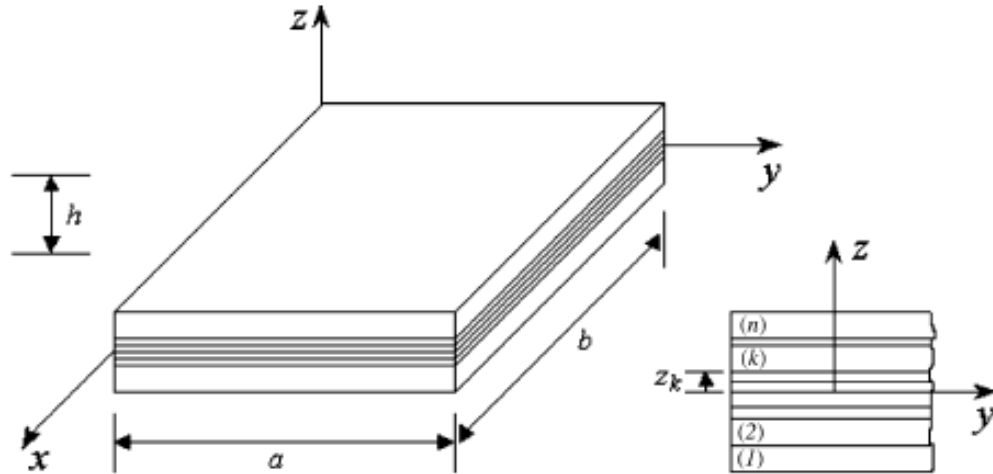


Fig I-5: les couches d'un stratifié

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{eq I-19}$$

Soit :

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}_x \quad \text{eq I-20}$$

Ou $[\bar{Q}]^k$ matrice de rigidité réduite transformée du kieme correspondant à la cote z.

À partir d'équation (I.20) nous pouvons obtenir :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + [\bar{Q}]^k z \{k\}_x \quad \text{eq I-21}$$

h) Expression des résultantes et moments

▪ **Résultantes en membrane**

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (voir Figure ci-dessous) sont définies

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad \text{eq I-22}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad \text{eq I-23}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad \text{eq I-24}$$

Comme suit :

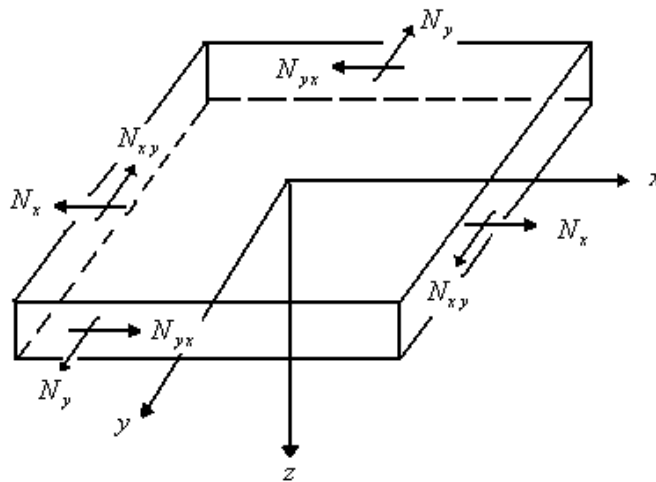


Fig I-6 : Forces par unités de longueur

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad \text{eq I-25}$$

Nous aurons : (J.M.BERTHELOT, 2005)

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad \text{eq I-26}$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]^k z dz \right) \{k\} \quad \text{eq I-27}$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \\ [A] &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1}) \\ [B] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Ou :

La matrice $[\bar{Q}]^k$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (I-27) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{k\}$ par les matrices [A] et [B]. La matrice [A] représente « la membrane » et la matrice [B] représente « la matrice de couplage membrane – flexion »

▪ **Moments par unité de longueur**

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_z dz$ », ainsi :

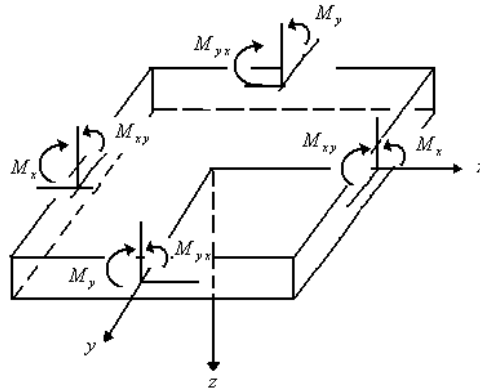


Fig I-7 : Moments par unités de longueur

M_x : Moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y.

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x\} z dz \quad (I.28)$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x.

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_y\} z dz \quad (I.29)$$

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \quad (I.30)$$

Ou bien sous une forme condensée : $\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz$

Substituant l'équation (I-20) dans les équations (I-28), (I-29) et (I-30), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (I.31)$$

Où la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (I.32)$$

i) Equation constitutive d'un stratifié

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les forces et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, Elle s'obtient en regroupant les expressions des résultantes et moments suivant une seule écriture matricielle sous la forme.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Où sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (I.33)$$

Les termes de la matrice introduite sont donnés par les expressions suivantes :

$$[A] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{Q} dz \quad (I.34)$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{Q} z dz \quad (I.35)$$

$$[D] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{Q} z^2 dz \quad (I.36)$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et la matrice de couplage membrane- flexion- torsion. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristique mécanique différente. Le couplage est nul (B=0), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une propriété des couches, de leurs côtes et de leurs orientations.

I.6.2. Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des stratifiés :

Les facteurs liés à l'environnement qui engendrent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans les matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz absorbés par ma matrice, etc. Ces phénomènes mécanique ; rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

a) Relation d'élasticité :

Le premier effet de variation de la température est de modifier la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatations thermiques peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y, z) et à l' instant tous la forme : $\varepsilon_{i(\text{thermique})}^T = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t)$
 $i=1,2,\dots,6 \quad (I-37),$

Où α_i sont les coefficients des dilatations thermiques et ΔT est la variation des températures a partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques comme étant nulles.

La loi d'élasticité, écrite dans un état de référence ou les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^T \quad (\text{I-38})$$

Où S_{ij} sont les constantes de souplesse et ε_i^T les déformation dues aux effets thermiques .

La forme inverse s'écrit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j + \varepsilon_j^T) \quad (\text{I-39})$$

Où C_{ij} sont les constantes de rigidité.

Dans la pratique, les phénomènes thermiques ne produisent que des extension ou contractions (appelées sous le terme général de dilatation) n'affectant pas les déformations en cisaillement. Dans ce cas, les relations d'élasticité peuvent être réécrites suivant :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^T \quad i=1, 2,3 \quad (\text{I-40})$$

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j \quad i=4, 5,6 \quad (\text{I-41})$$

Et

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j + \varepsilon_j^T) \quad i=1, 2,3 \quad (\text{I-42})$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j \quad i=4, 5,6 \quad (\text{I-43})$$

b) Contraintes Thermiques :

Au cours du processus de polymérisation, la résine thermodurcissable se contracte lors de son passage de la phase liquide à la phase solide.

Durant sa solidification, la résine tend à exercer une compression sur les fibres.

Mais de par leur structure fortement rigide, ces dernières sont créées à l'interface fibre/matrice.

Des contraintes additionnelles peuvent être provoquées dans les plis internes d'un Stratifié multidirectionnel. En fait, lors du rétrécissement de la résine dans un pli, elle se trouve entravée par les plis adjacents qui contraignent la déformation de rétrécissement.

De plus, ce qui provoque l'augmentation de leur tendance au flambage et produit des contraintes de cisaillement, particulièrement à l'interface fibre/matrice.

L'ensemble de ces micro- contraintes est souvent suffisant pour produire des microfissures, même en absence de contrainte externes. Il a d'ailleurs été reporté qu'une fatigue thermique au-delà de 250° c était suffisante pour causer des contraintes capables de provoquer de fissure inter laminaires. Si, de plus, un composite thermiquement affecté est soumis à des contraintes mécaniques, le processus d'endommagement sera plus accéléré et moins prévisible.

c) Coefficient d'expansion thermique (CET)

Le comportement thermique d'un laminé unidirectionnel est caractérisé par deux principaux coefficients d'expansion thermique : longitudinal α_L Et transversale α_T .

Diverses expressions de coefficients d'expansion thermique ont été formulées pour les transverse à la direction des fibres, établis par (Schapery 1998) et cités par (D.Hull.Dere 90), dans la cas d'un laminé unidirectionnel, sont formulée par :

$$\alpha_L = \frac{E_f \alpha_f V_f + E_m \alpha_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m}$$

$$\alpha_T = (1 + \nu_m) \alpha_m (1 - V_f) + (1 + \nu_f) \alpha_f V_f - \alpha_L [\nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)]$$

– α_L : est le coefficient d'expansion thermique longitudinal ;

- α_T : est le coefficient d'expansion thermique dans le sens transversal ;
- α_m, α_f : sont les coefficients thermiques de la matrice et des fibres respectivement ;
- E_m, E_f : sont les modules élastiques des fibres et la matrices respectivement ;
- V_m, V_f : sont respectivement les volumes de fibres et de matrice ;
- V_m, V_f : sont les fractions volumique de fibres et de matrices ;

Les coefficients d'expansion thermique de laminé dépendent non seulement des propriétés thermique des constituants, mais également de leurs propriétés mécaniques et de la fraction volumique des fibres.

Chapitre II : GENERALITE

SUR LES MATERIAUX A

GRADIENTS EVALUE

II. CHAPITRE II : GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS EVALUE

II.1. INTRODUCTION

Les matériaux à des gradients évalués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été défini au 21^{ème} siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace par exemple pose alors le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut collé à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une fortes concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer **Un Matériau à Gradient**

Evalué (de l'anglicisme FONCTIONALY GRADED MATERIALS (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient évalués ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures des plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

II.2. LA DEFINITION ET LE CONCEPT D'UN MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETES

Un matériau a gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure II.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. en revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.

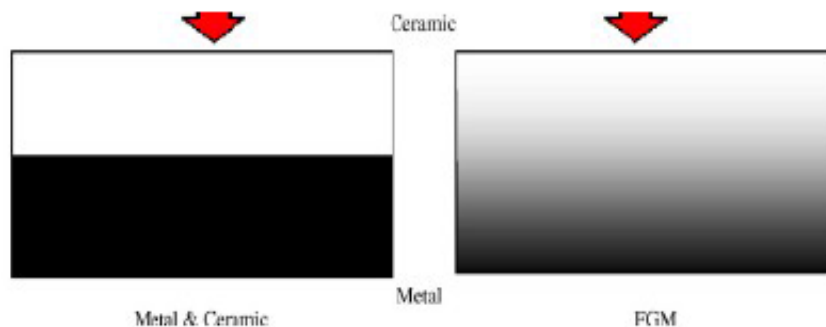


Fig II-1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Hirai 1999), (Chan 2001), (Uemura 2003). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure II.2 (Yin 2004) où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en

remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

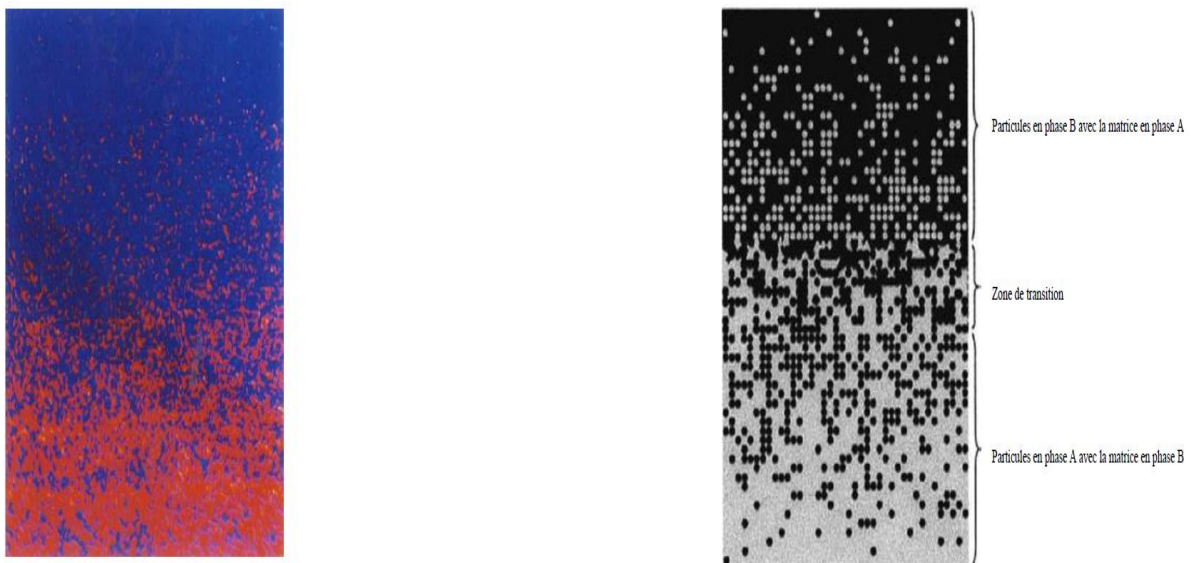


Fig II-2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin 2004)

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc ... (Nguyen 2004). D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [Müller 2003], des déclencheurs (Qiu 2003), des armures métal/ceramic (Liu 2003), des détecteurs photoélectriques (Paszkiwicz 2008) et des implants dentaires (Watari 2004). Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été éditées pendant

les deux dernières décennies (Fuchiyama 1995), (Markworth 1995), (Tanigawa 1995), (Noda 1999), (Paulino 2003). Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques (Hui 2009).



Fig II-3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). (Watari 2004)

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen (Shen 2004).

Récemment, Birman et Byrd (Birman 2007) ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient de propriétés.

II.3. HISTOIRE DU DEVELOPPEMENT ARCHITECTURAL DU CONCEPT FGM

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la Figure. II.4 (Koizumi 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

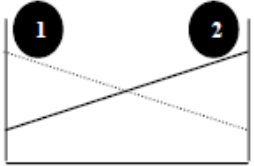

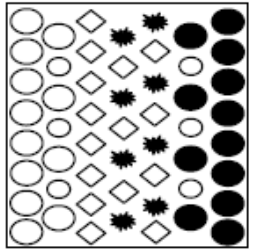
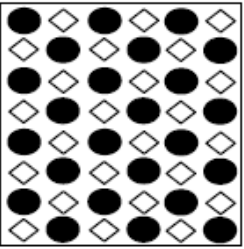
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibres ★</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Fig II-4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996)

II.3.1. Pour Des Utilisations Structurales (Intégration Du Caractère Réfractaire Et De La Dureté)

La véritable lancée de ce matériau à commencer en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l’auspice de l’agence des sciences et technologie. L’intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu’à un gradient de température de l’ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n’était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci été de développer l’architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

Chapitre II : Généralité Sur Les Matériaux à Gradients Evalué

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau (Abdizadeh 1997).

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté hautes températures) et des métaux (côté basse température) (Figure. II.4).

La figure. II.5 montre les principaux résultats du programme de recherche (Hirai 1996), (Ichiro 1996). Par exemple, du côté de la conception et de la modélisation, ils ont développés un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisés Des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service. Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établis une approche micromécanique pour corrélér les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées ; la méthode FEM a été employée pour modéliser la distribution des efforts internes.

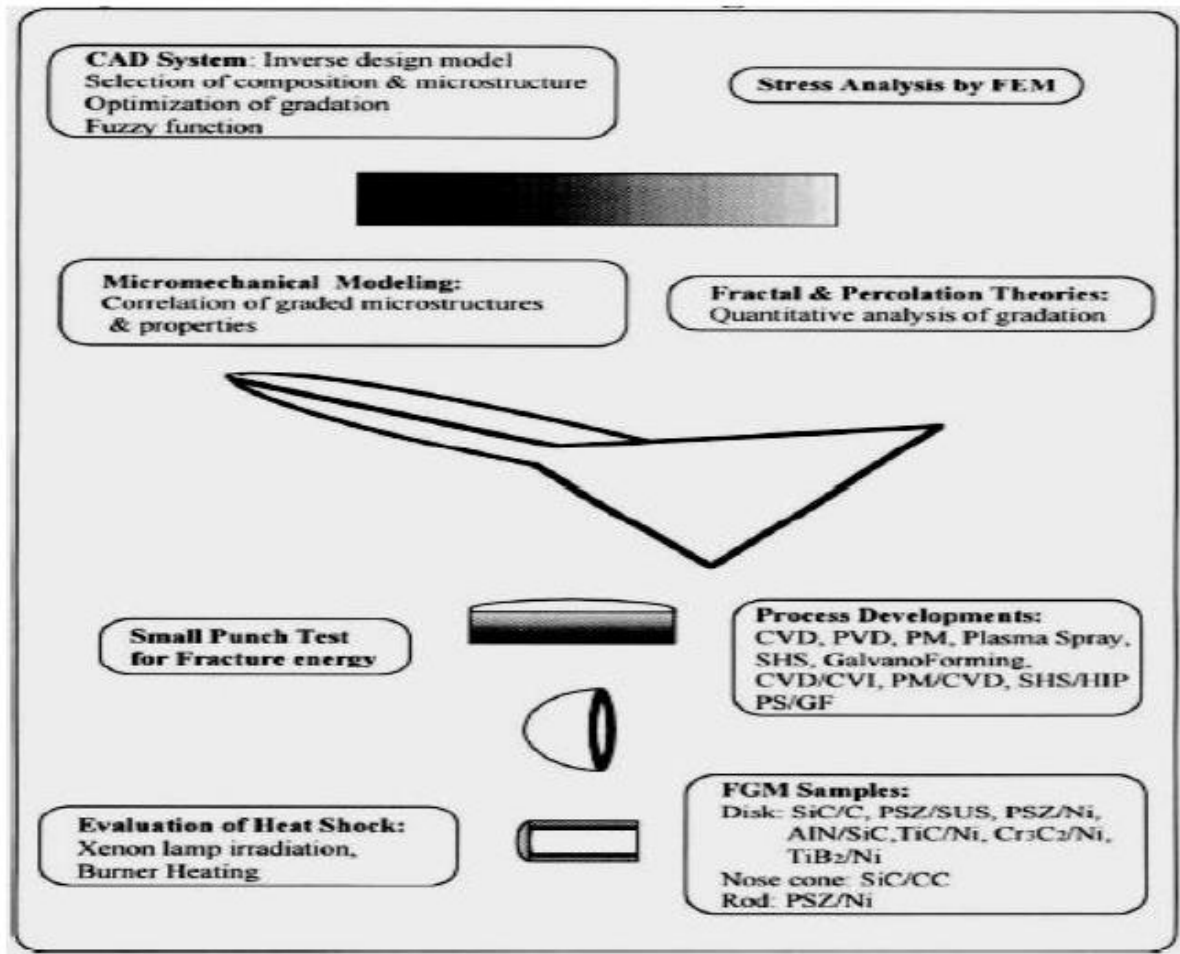


Fig II-5 : résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées »

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD, PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr3C2/Ni, TiB2/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc

thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par une forte lampe en xénon et une méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur. Les petites chambres de combustion pour des moteurs fusées faites de formations SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO₂/Ni par jet de plasma/galvano ont subis des essais de combustion au laboratoire aérospatial national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au-delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. A nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés [Ichiro 1996]. Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

II.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoioniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La figure. II.6 montre ce programme continu ; Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de $\sim 2000^{\circ}\text{K}$ à $\sim 300^{\circ}\text{K}$. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

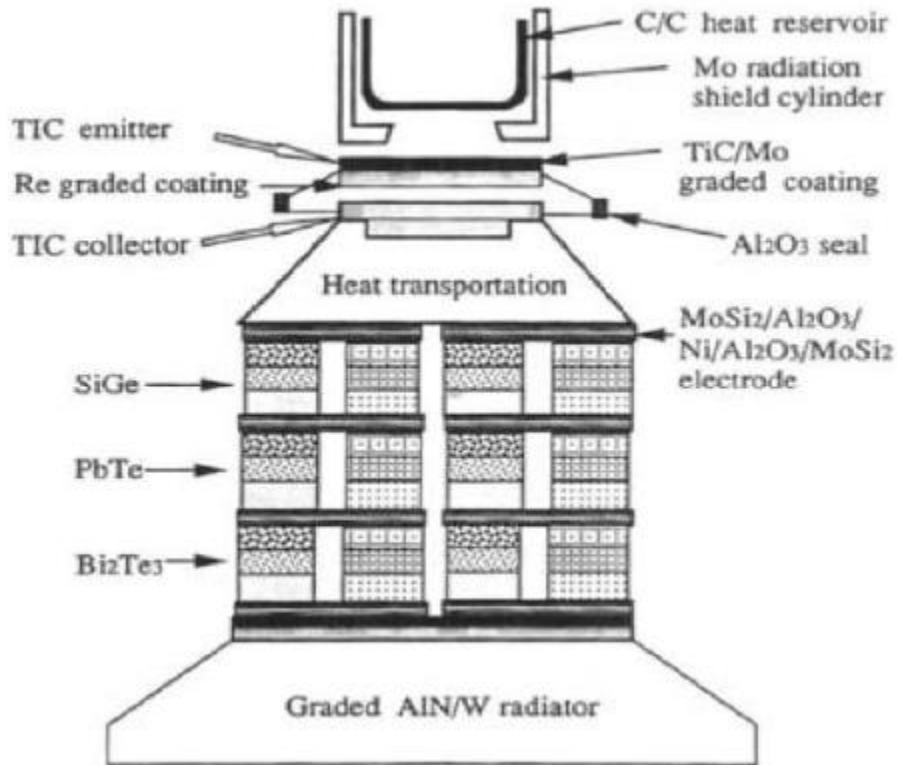


Fig II-6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro 1996)

a) La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC

Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

b) Un réservoir de chaleur gradué(C/C) :

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon Oil Company Ltd. (Ichiro 1996). Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et

perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent, l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes.

Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La figure II.7 (a) montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la figure II.7 (b) est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.

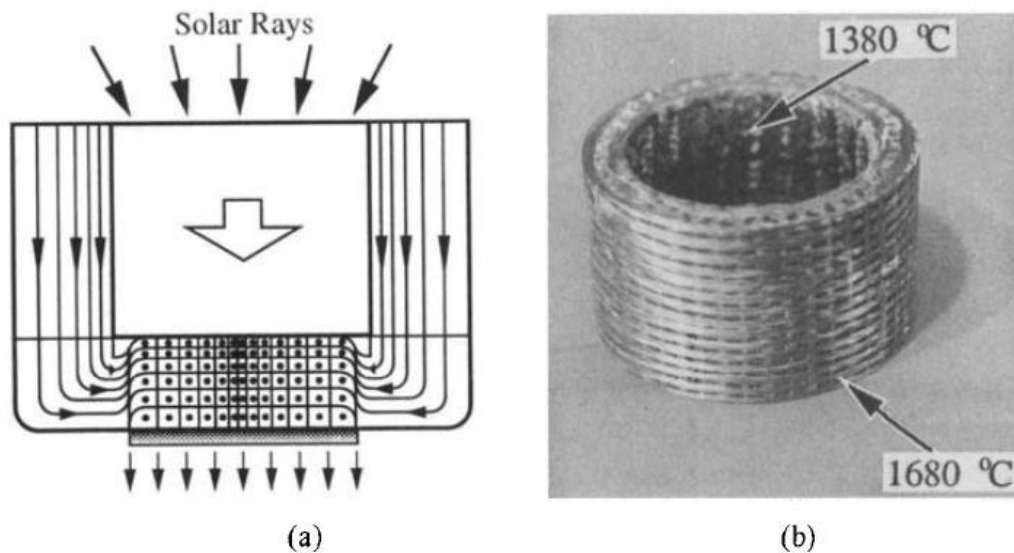


Fig II-7 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro 1996)

Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal M_0 (Figure. II.7). Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

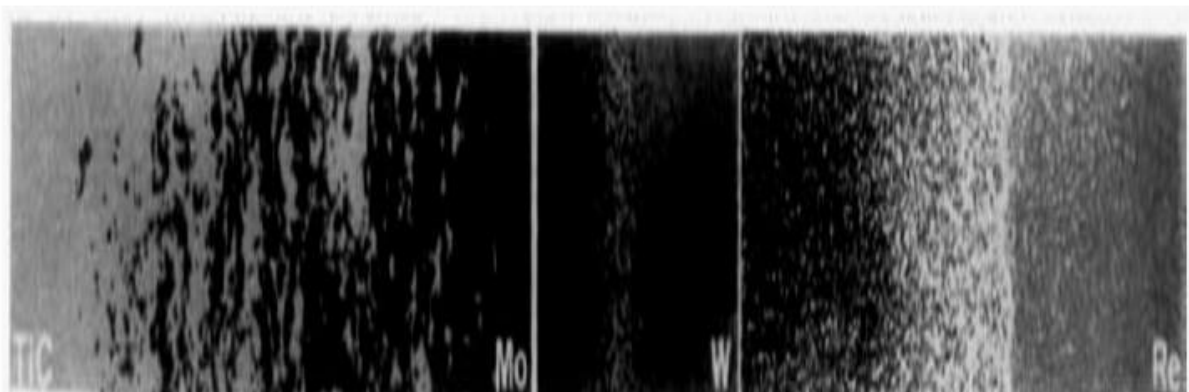
c) Un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re) :

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui permet l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TIC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une

technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au Japon (Ichiro 1996). Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re (Ichiro 1996). W et Re ont été déposés sur un substrat Mo par CVD. La couche graduée est formée à travers l'interdiffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une graduation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La figure. III.7 montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-Mo relaxent efficacement la contrainte thermique.



L'électrode du collecteur a été façonnée au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode Mo. Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm² obtenue à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co.Ltd. [Ichiro 1996].

d) Matériel thermoélectrique gradué en PbTe

Pour les dispositifs TEC tels que Bi₃Te₂, PbTe, et SiGe, exposés dans le procédé d'Ichiro (Ichiro 1996), les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de

conversion d'un pourcentage considérable par la gradation des compositions. La figure II.9 compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (A-couche $3.51 \times 10^{25}/m^3$, b-couche $2.6 \times 10^{25}/m^3$, c-couche $2.26 \times 10^{25}/m^3$), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une gradation du dopant Pbl2 a été préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour $\Delta T = 486^\circ K$, 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.

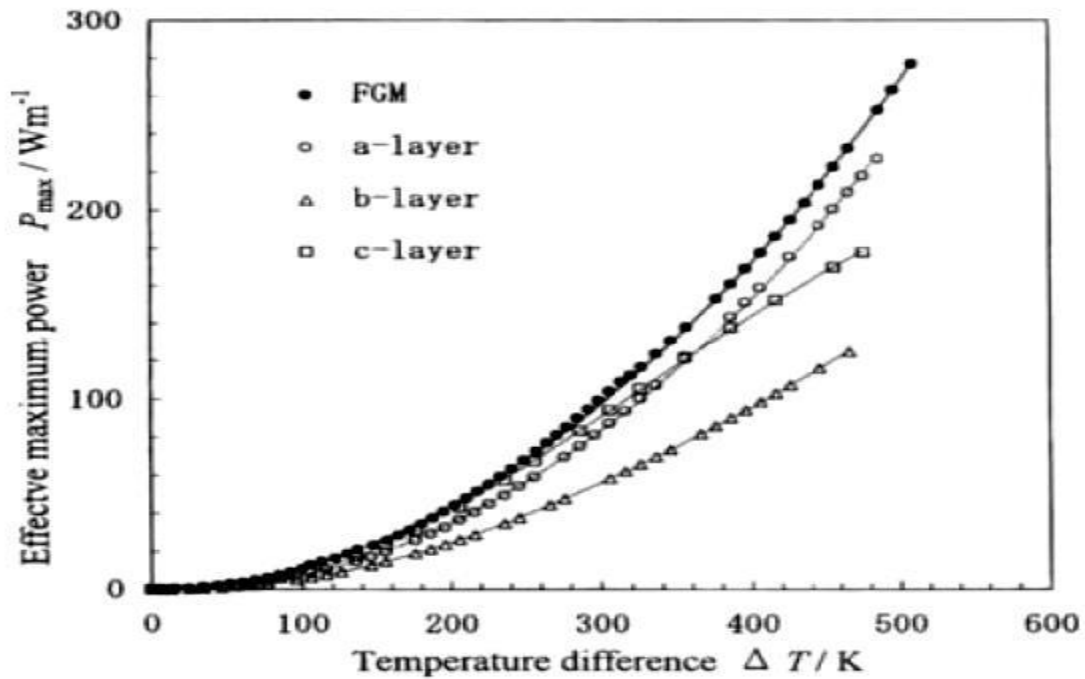


Fig II-8 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches [Ichiro 1996]

e) Une électrode symétriquement graduée

MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ pour un TEC SiGe

Dans le cas du dispositif TEC, MoSi₂ est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevé (2030°C), avec une résistivité appropriée de $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot cm)$ à 1000 °C), et une excellente résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique ($3-4 \text{ MPA} \cdot m^{1/2}$) est faible. Pour

façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ (représenté sur la figure II.10) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP).

Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de MoSi₂ due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du MoSi₂ jusqu'à 5,8 MPA m^{1/2}. Al₂O₃ agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ 800 °C. Un aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à 800°C il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 années. Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd) en utilisant des inters couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C (Ichiro 1996).

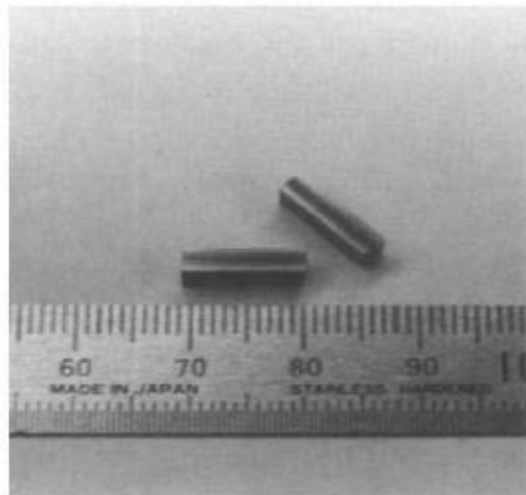


Fig II-9 : Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro 1996)

f) Matériau radiatif gradué AlN/W

Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries, Ltd. Au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AlN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C. L'AlN dense possède une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs

Chapitre II : Généralité Sur Les Matériaux à Gradients Evalué

d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AlN, peut être réfléctée par les particules W, comme illustré sur la figure. II.11. Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité.

Suivant les indications de la figure. II.12, la structure graduée AlN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels (Ichiro 1996).

Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants :

- 1) Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;
- 2) Synthèse des graduations p et n type (Bi_3Te_2 , PbTe, et SiGe) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
- 3) La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des perte d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
- 4) fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15%.
- 5) Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.

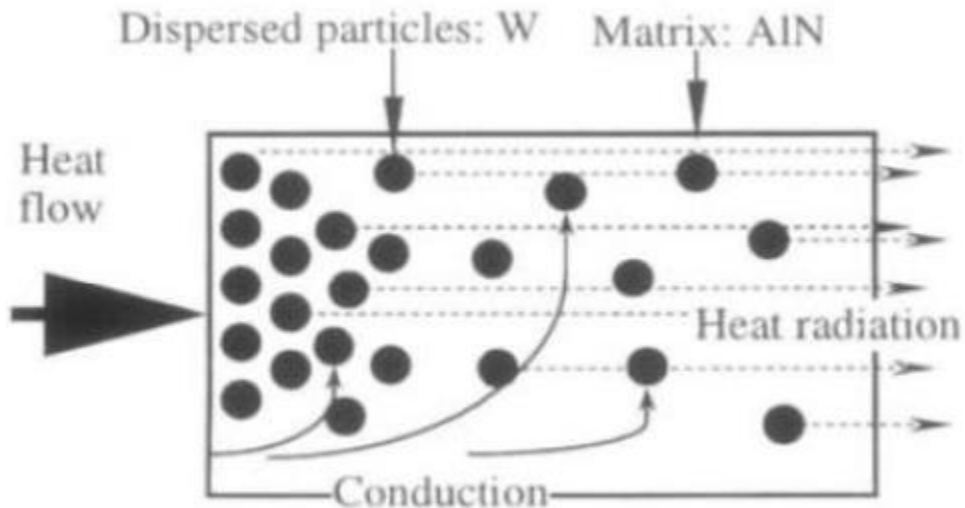


Fig II-10 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro 1996)

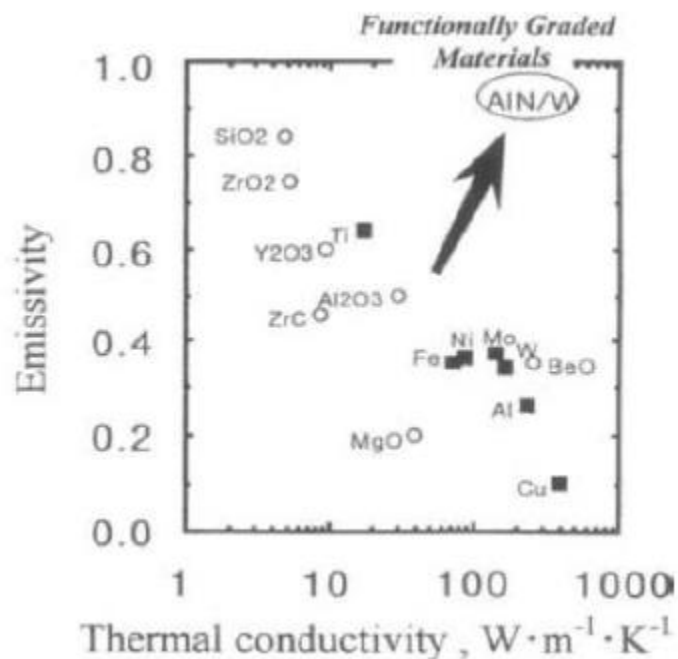


Fig II-11 : La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro 1996)

II.4. NOUVEAUX PROCÉDES POUR LE TRAITEMENT DES FGM

S'il y'a Une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles (Anné 2006). Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en

microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand on choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrême importance. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé. Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

II.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, ce corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de gradation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (figure II.13) (Neubrand 1997). Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.

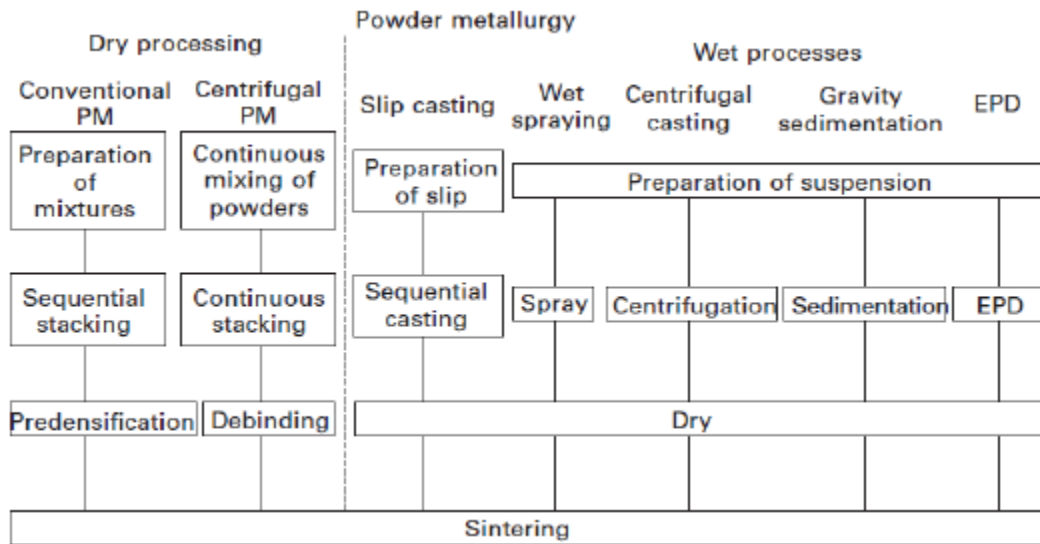


Fig II-12 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM (Neubrand 1997)

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage diffèrent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre (Requenna 1993). En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption (Chu 1993).

Dans un processus appelé la pulvérisation humide (Schindler 1998), des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créé en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation (Watanabe 1998) est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale. Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution

graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle (Bernhardt 1999). La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM.

Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électro phorétiques de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse (Anné 2004) parce que c'est un processus assez rapide qui ne coûte pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électro phorétique est un processus en deux étapes (figure. III.13). Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse). Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposée est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (fig. II.14).

L'adaptation Judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue.

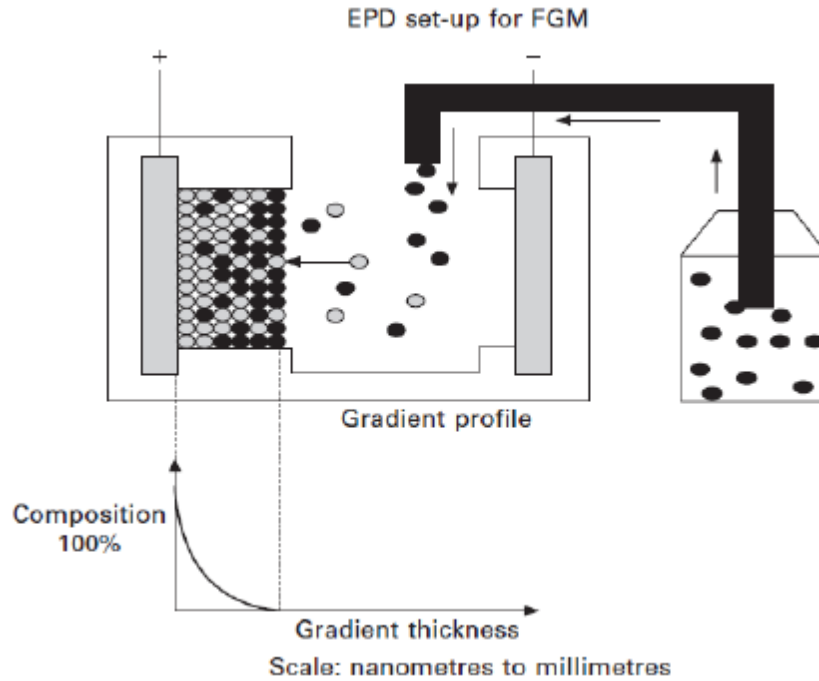


Fig II-13 : Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM (Anné 2006)

Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres, et en polymères (Van der Biest 1999). Généralement la seule limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système Al_2O_3/ZrO_2 , ZrO_2/WC , et WC/Co ont déjà été exploré au moyen du processus EPD (Anné 2006).

Un pré réquisition d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen d'EPD s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen d'EPD (Put 2003). Comme exemple, en présente une composition d'un profil (figure. II.15) et sa microstructure (figure. II.16) ; c'est un disque en FGM Al_2O_3/ZrO_2 (Vleugels 2003) avec un noyau homogène (75% volume d' Al_2O_3), une couche Al_2O_3 extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90%volume d' Al_2O_3) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graphe, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses contraintes de traction au noyau du disque. Les phases ZrO_2 (blanc) et Al_2O_3 (grises) peuvent

être clairement différenciées dans la microstructure. La phase ZrO₂ est bien dispersée dans la matrice Al₂O₃ dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

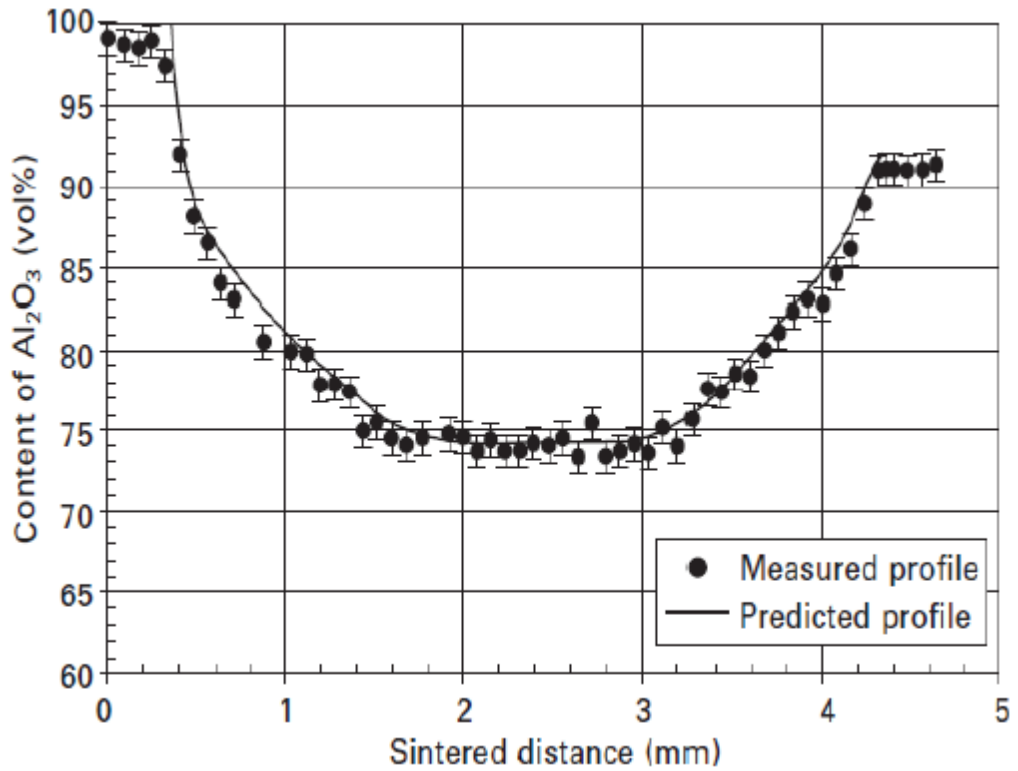


Fig II-14 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al₂O₃/ZrO₂) (Anné 2006)

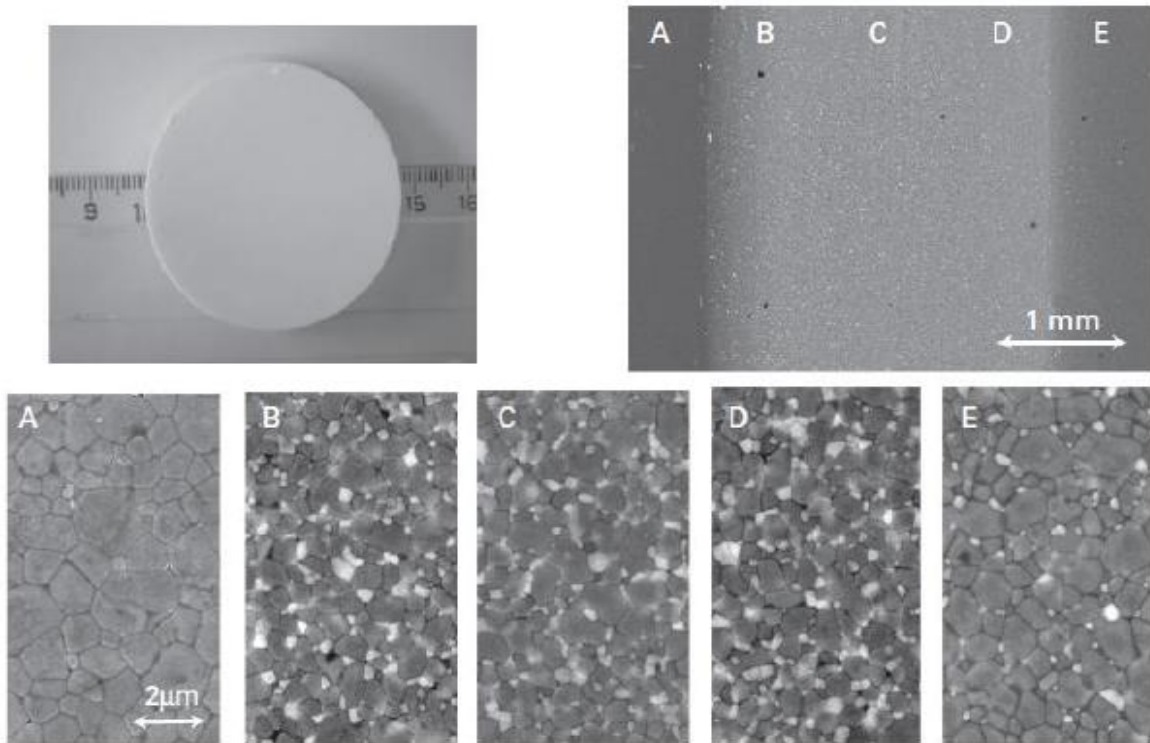


Fig II-15 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. (Anné 2006)

II.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. A cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent

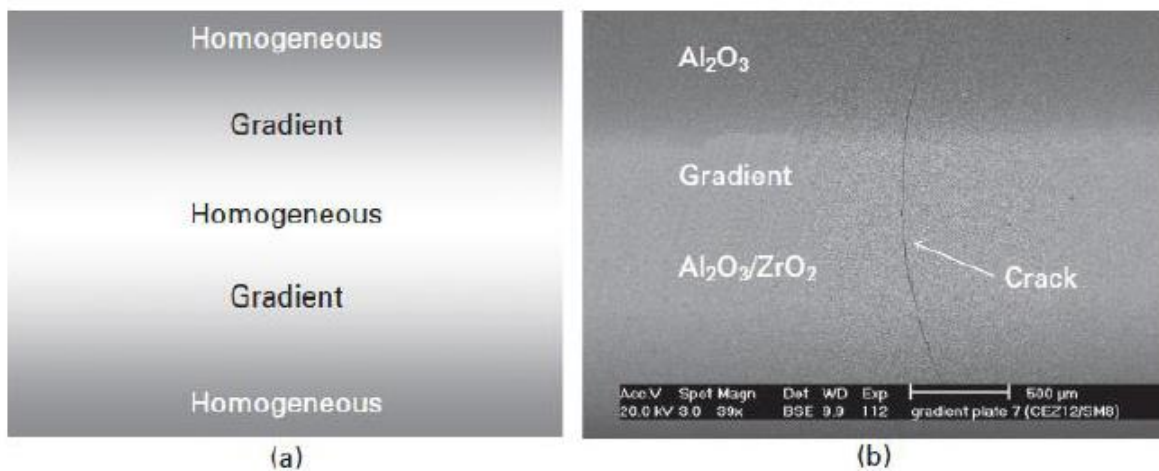


Fig II-16 : (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al_2O_3/ZrO_2 (Anné 2006)

La figure. II.17 montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, formés par les dépôts électro phorétiques et densifiés par frittage à basse pression. A partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en ZrO_2 d'un disque symétrique fritté en TZP/ Al_2O_3 . Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe Al_2O_3 , indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. Hillman (Hillman 1996) a observé des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ sur les surfaces et une couche médiane en ZrO_2 . Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dû au coefficient de dilatation thermique élevé de zircone. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$. Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitation els.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les différentes couches (Cai 1997a, Cai 1997b) ou en ajustant la densité verte des différentes couches [Novak 2005]. Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement Pendant le frittage (Cai 1997b). Les forces résiduelles pendant Le cycle de chauffage sont diminuées par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent ; ceci est probablement dû à La relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de frittage des deux composants (Anné 2006). Dans un FGM métal/ céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles (Neubrand 1997). Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM (Anné 2006). C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que des méthodes conventionnelles. Le frittage de plasma en étincelle des FGM utilise un gradient de température dans le système, qui permet une densification homogène des FGM en Correspondant le gradient de température au gradient de taux de retrait du compact. Avec un système de plasma d'étincelle, une grande masse FGM (céramique/métal) (~100 millimètres se section) peut être homogènement densifié en peu de temps avec des temps de chauffage et d'entreposage à moins d'une heure. Parmi les systèmes de frittage de plasma en étincelle rapportés on site des matériaux à base de WC (WC/Co, WC/Co/steel, WC/Mo), des composés à base de ZrO_2 (ZrO_2 /acier, ZrO_2 /TiAl, ZrO_2 /Ni), Al_2O_3 /TiAl, ...etc. (Anné 2006).

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique (Zhao 2000). Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenue par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

II.5. L'INTERET D'UTILISATION DES FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

II.6. METHODES D'ELABORATION DES FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention a tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

II.6.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. II.17). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité .Les liants (Plastifiants et défloculants) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

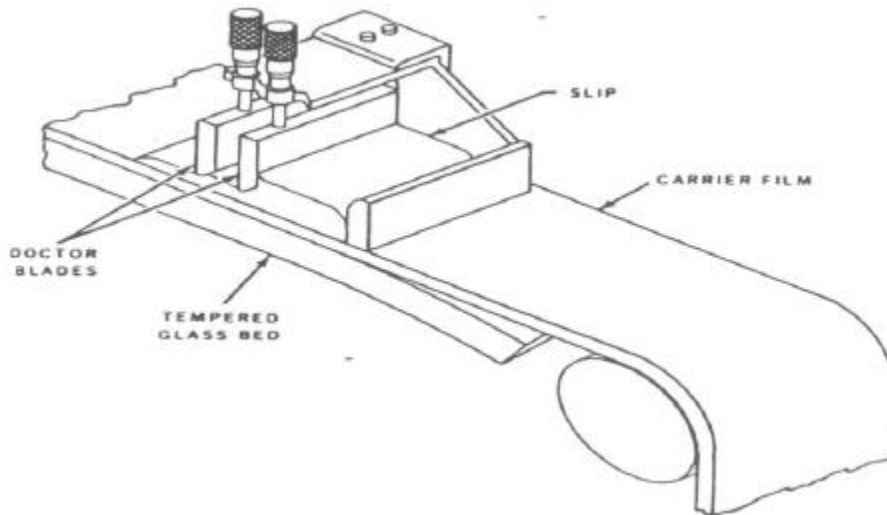


Fig II-17 : Principe de la méthode coulage en bande

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Boch 1986). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par MISTLER (MIST 1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch 1986).
-

II.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectué en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».

- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

II.6.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

II.6.4. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh 1997).

II.6.5. Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens 1990).

II.6.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

II.6.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (TEKA1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

II.6.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure II.18 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

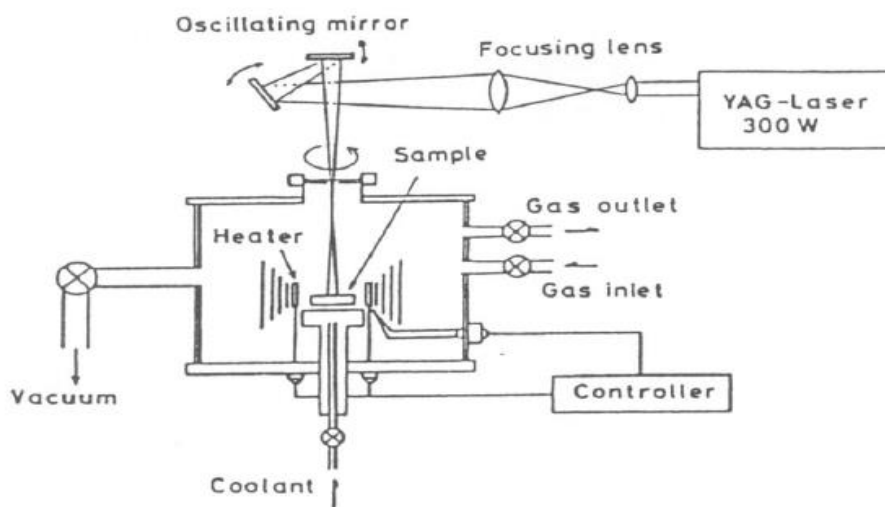


Fig II-18 : Disposition du procédé frittage laser différentiel

II.6.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh 1997).

II.6.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. II.19) (Abdizadeh 1997).

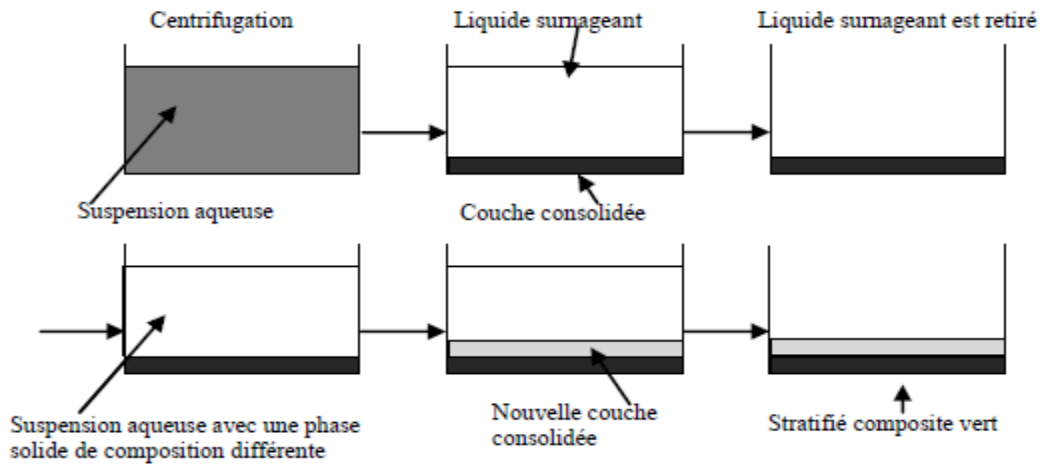


Fig II-19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997]

II.7. PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DES FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

II.7.1. Propriétés physiques de l'aluminium

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant

Propriétés physiques : L'Aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

II.7.2. Propriétés physiques du céramique

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m^3 . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

II.8. PROPRIETES MATERIELLES EFFECTIVES D'UN MATERIAU FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure.II.20a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure.II.20b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

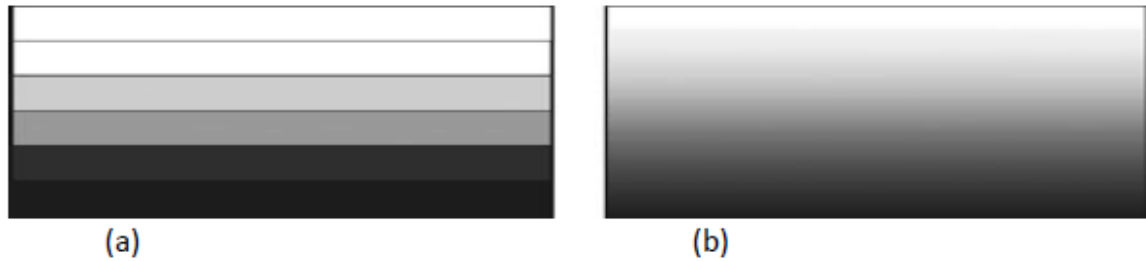


Fig II-20 : Modèles analytiques pour une couche en FGM

II.9. LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

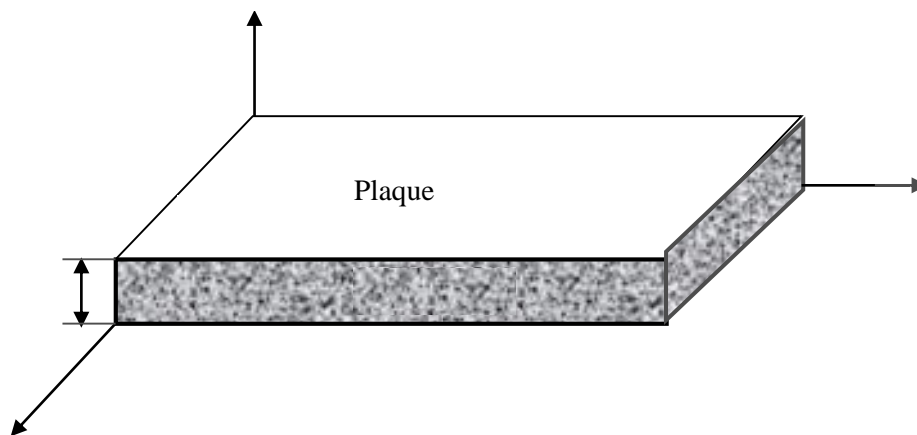


Fig II-21 : Géométrie d'une plaque en

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

II.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [35] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

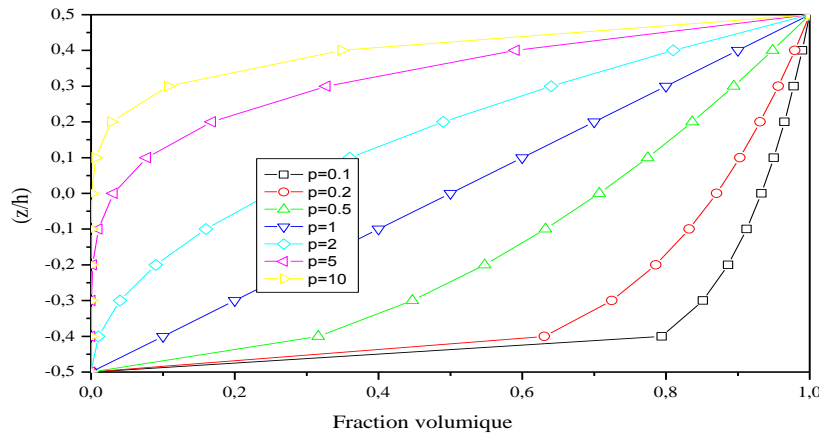


Fig II-22 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

II.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [35]. Par conséquent, Chung et chi [36] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4.a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4.b)$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

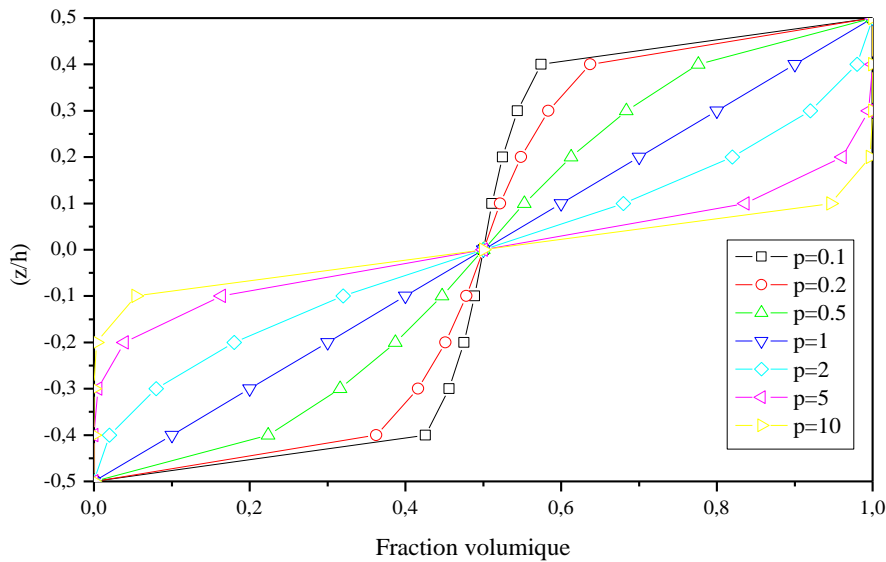


Fig II-25 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

II.9.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

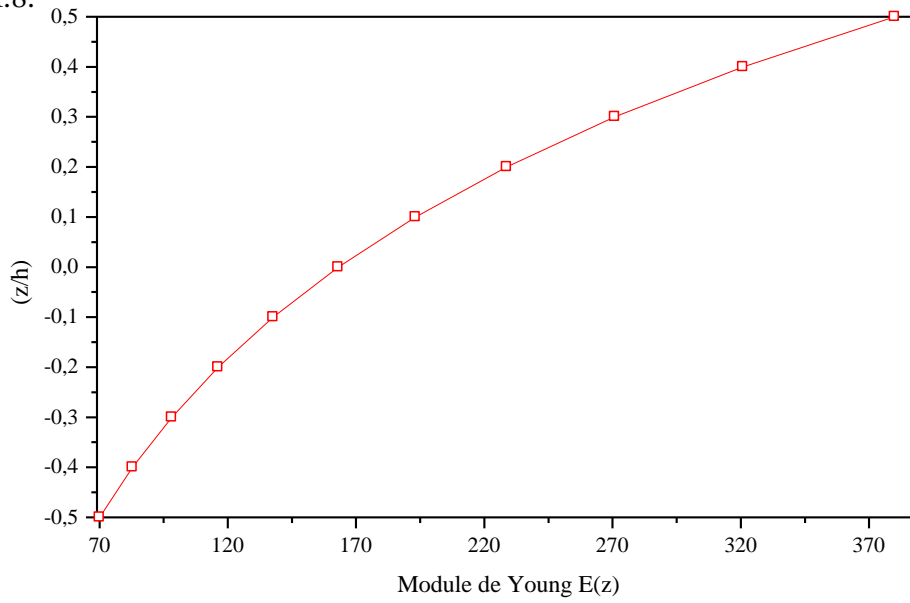
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [37] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.



**Chapitre III : DIFFERENTES
THEORIES UTILISEES DANS
LES STRUCTURES
COMPOSITES**

III. CHAPITRE III : DIFFERENTES THEORIES UTILISEES DANS LES STRUCTURES COMPOSITES

III.1. INTRODUCTION

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 1989, Kapania 1989, Kant 2000, Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

III.2. LES DIFFERENT MODELE DES STRUCTURES COMPOSITES DANS L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLES

III.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont

développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

a) Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Reissner 1961). L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff 1950) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. III.1).

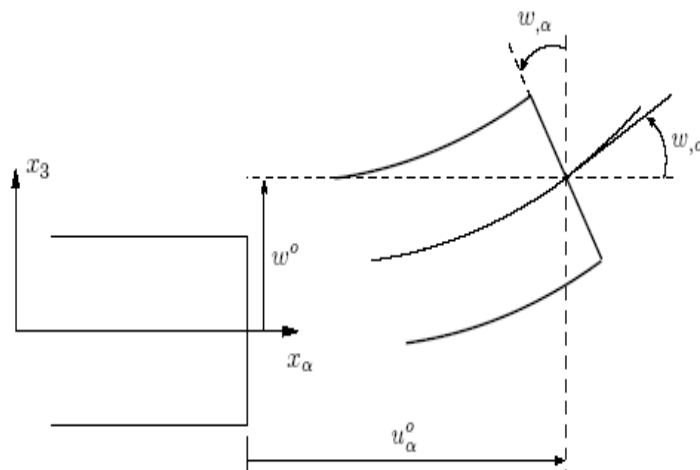


Fig III-1 : Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2 \quad \text{(III.1)}$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

b) Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé ; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

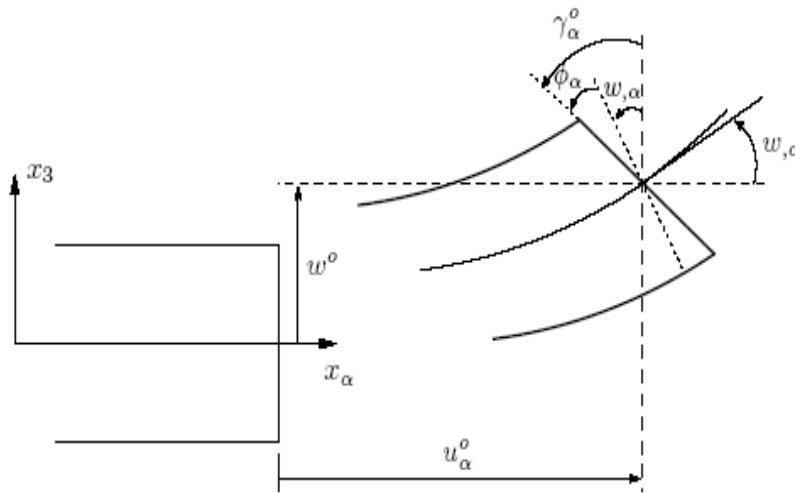
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.III.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (III.2)$$

Avec,

ϕ_{α} : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_{α} ,

$\gamma_{\alpha}^0 = (w_{,\alpha} + \phi_{\alpha})$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.



Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_{α}^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige

à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

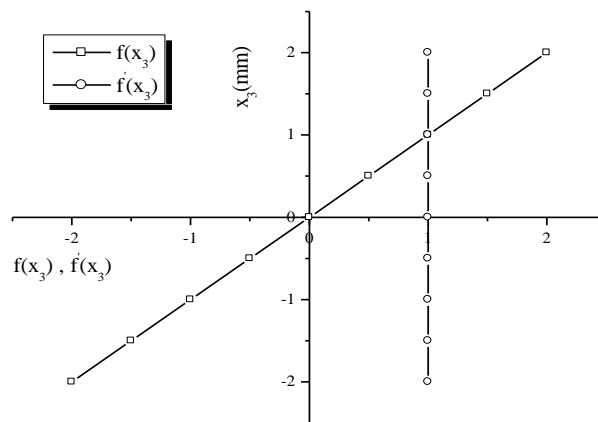


Fig III-2 : Variation de la fonction de gauchissement et suivant l'épaisseur

c) Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4) (Touratier 1991), (Nguyen 2004). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots$$

(III.3)

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement

en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{(4)} = \phi_i^{(2)} = \phi_i^{(3)} = \phi_i^{(1)} = 0, \phi_i^{(3)}, \alpha = \{1, 2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (III.4)$$

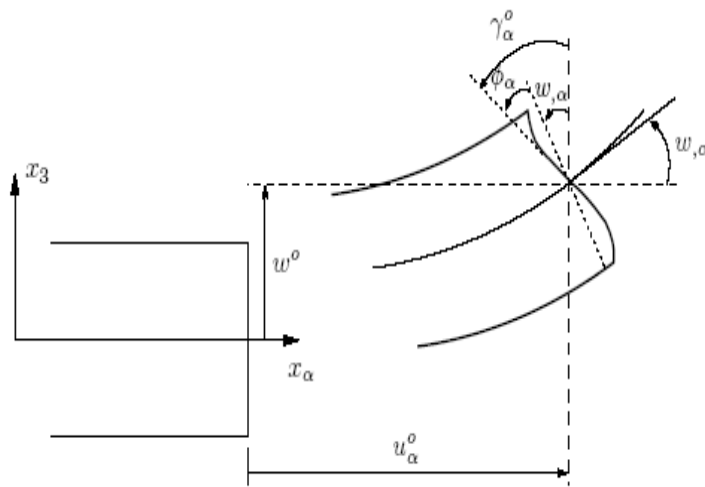


Fig III-3 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d' (Ambartsumyan 1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (III.5)$$

- L'approche de (Reissner 1945), Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

- L'approche de (Reddy 1987) avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

(III.7)

Dans le modèle de (Reddy 1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (Touratier 1991) avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale

Chapitre III : Différentes Théories Utilisées Dans Les Structures Composites

dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy 1984).

Récemment, Afaq et al. (Afaq 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de (Aydogdu 2005) avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

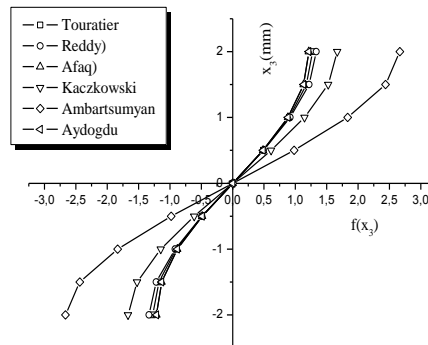


Fig III-4 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

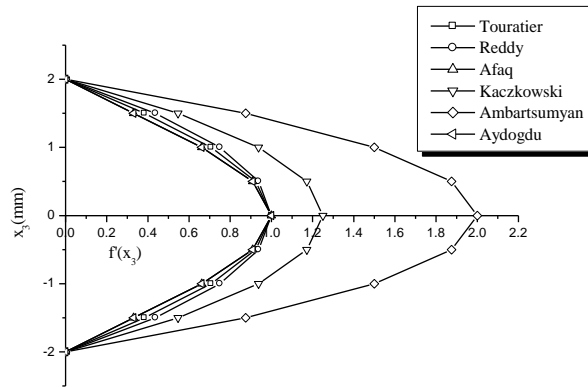


Fig III-5 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures. III.5 et III.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

III.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les Equations (III.3) et (III.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Chabot 1997), (Carrera 2000), (Afaq 2003), (Reddy 1984), (Di Sciuva, 1987). Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent

l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. III.7 et III.8).

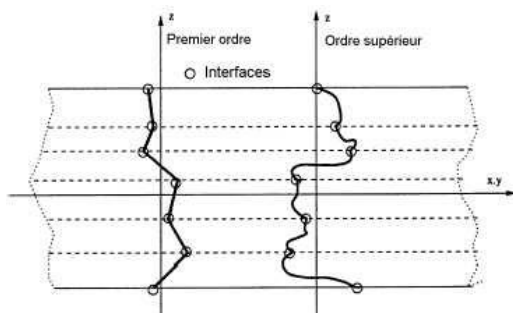


Fig III-7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Nguyen 2004)

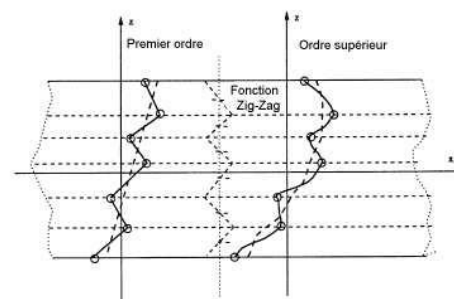


Fig III-6 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Nguyen 2004)

a) Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Di Sciuva 1987). Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

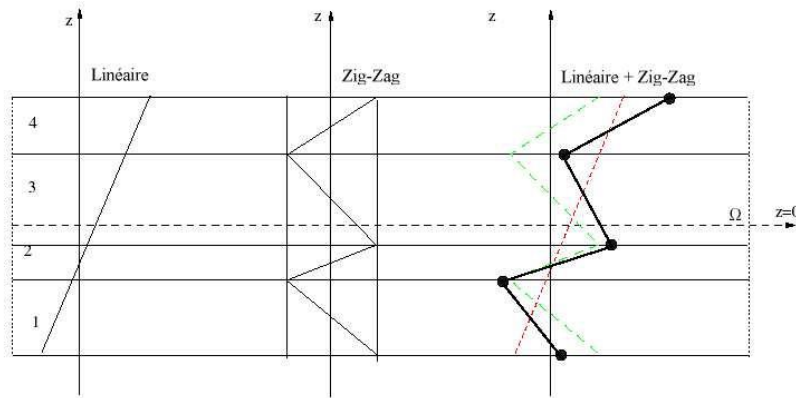


Fig III-8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre
(Nguyen 2004)

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le ϵ_n se basant sur le concept de, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Nguyen 2004). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

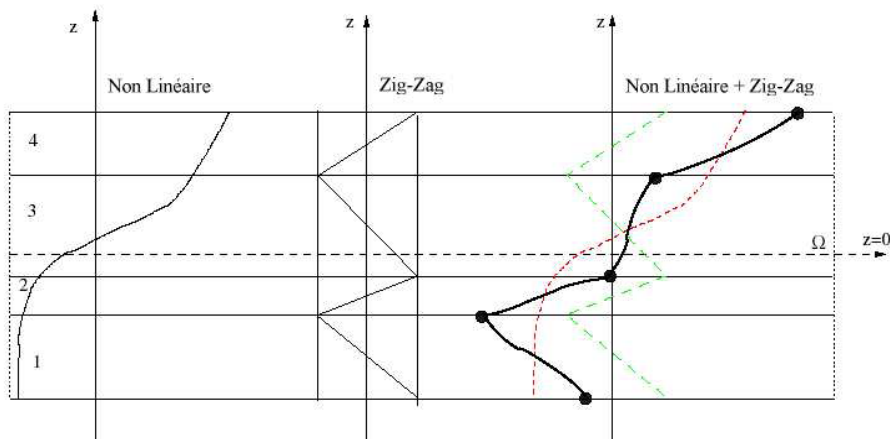


Fig III-9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.[Nguyen 2004]

Dans les travaux de (Karama 1998), (Ossadzow 2001), la fonction sinus de (Touratier 1991) est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. (Afaq 2003) combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue (Icardi 2001a). Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

III.3. CONCLUSION

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'Ya pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

**Chapitre IV : ANALYSE DES
VIBRATIONS LIBRES ET DU
FLAMBEMENT DES
PLAQUES ORTHOTROPES**

IV. CHAPITRE IV : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES ORTHOTROPES

IV.1. INTRODUCTION

La théorie classique des plaques (Kirchhoff, 1850a), (Kirchhoff, 1850b) est l'une des méthodes appropriées qui sont utilisées pour l'analyse vibrationnelle des plaques qui par contre surestime les fréquences naturelles et les charges dues au flambement et sous-estime le déplacement vertical. Cela est dû au fait qu'elle ne tient pas compte de l'influence du cisaillement transversal et des contraintes transverses. De plus, les erreurs produites dans le calcul des fréquences naturelles et les charges de flambement sont assez considérables notamment pour les plaques fabriquées à partir des matériaux composites.

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été développée pour améliorer la théorie classique des plaques (CPT). (Reissner, 1944), (Reissner, 1945) était le premier chercheur qui a proposé un modèle de plaque cohérent basé sur la contrainte, qui introduit l'influence de la déformation par cisaillement ; alors que (Mindlin, 1951) a développé une théorie de déformation de cisaillement du premier ordre basée sur la cinématique. Dans ces modèles, la variation de la contrainte due au cisaillement transversal est considérée comme constante tout au long de l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour tenir en compte l'énergie de déformation due au cisaillement Meifi (2016); En général, ces coefficients de correction de cisaillement dépendent du problème étudié.

Afin d'introduire l'influence du gauchissement transversal et fournir la distribution réaliste des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque, des limitations des deux méthodes CPT et FSDT ont stimulé le développement des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDTs). Pour les HSDTs, on utilise principalement deux types de formulations. Dans la première, les contraintes sont considérées comme des variables primaires tandis que dans la deuxième ce sont les déplacements qui sont considérés comme des variables primaires. (Reddy, 1984) a proposé l'application de la méthode bien connue HSDT pour l'étude des plaques stratifiées en supposant une fonction polynomiale

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

en termes des coordonnées de l'épaisseur de la plaque dans le but d'introduire l'influence de la déformation transversale du cisaillement. De nombreux travaux de recherches qui élaborent des modèles basés sur le déplacement sont disponibles (Ghugal et Shimpi, (2002), (Kreja, 2011), (Eltaher, et al., 2012), (Sobhy, 2013), (Tounsi, et al., 2013), (Han, et al., 2015), (Hadji, et al., 2015), (Barati & Shahverdi, 2016), (Rahmani, et al., 2017), (Aldousari, 2017). Récemment, plusieurs nouvelles théories affinées (Shimpi, 2002), (Shimpi, et al., 2007), (Ghugal & Sayyad, 2011), (Bouderba, et al., 2013), (Zidi, et al., 2014), (Belkorissat, et al., 2015), (Attia, et al., 2015). (Zemri, et al., 2015), (Mahi & Tounsi, 2015), (Taibi, et al., 2015), (Bounouara, et al., 2016), (Beldjelili, et al., 2016), (Becheri, et al., 2016), (Javed, et al., 2016); (Ahouel, et al., 2016), (Boukhari, et al., 2016), (Bousahla, et al., 2016), (Bellifa, et al., 2017a), (Mouffoki, et al., 2017), (Klouche, et al., 2017), (Zidi, et al., 2017), et qui sont applicables pour l'étude des éléments plaques et poutres isotropes et orthotropes. (Ghugal & Sayyad, 2011) ont proposé une théorie trigonométrique de la déformation par cisaillement qui comporte l'influence du cisaillement transversal et de la contrainte/déformation transverse pour l'analyse dynamique des plaques orthotropes épaisses. (Shimpi & Patel, 2006) ont proposé une théorie à deux variables des plaques raffinées pour l'analyse des plaques orthotropes. (Ghugal & Sayyad, 2011) ont étudié le comportement statique des plaques isotropes et orthotropes en flexion par la théorie hyperbolique de la déformation par cisaillement. (Karama, et al., 2003) ont utilisé la fonction exponentielle pour prédire la réponse mécanique des poutres composites stratifiées à multicouches.

Ait Amar Meziane et al. (2014) ont considéré une théorie raffinée simple et efficace pour le flambement et les vibrations libres des plaques sandwich à graduation exponentielle sous des diverses conditions aux limites. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation d'une onde dans les plaques FG avec des porosités en appliquant des différentes méthodes HSDT en considérant le système à quatre inconnues. (Kar, et al., 2015) ont étudié les réponses des vibrations libres des panneaux FG courbés en fonction de la variation de température dans un environnement thermique en utilisant une HSDT raffinée. (Akavci, 2016) a présenté de nouvelles techniques HSDT pour étudier le comportement mécanique des plaques FG. Ahmed et al. (2014) ont examiné la réponse des poutres sandwich avec des faces graduées fonctionnellement en post-flambement en utilisant une théorie consistante d'ordre supérieur. (Kar, et al., 2015) ont appliqué l'analyse non linéaire de flexion sur les panneaux plats composites stratifiés sous chargement hygro-thermo-mécanique. (Draiche, et al., 2016) ont développé une théorie de la plaque raffinée avec l'effet d'allongement pour l'analyse des

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes
 plaques composites stratifiées en flexion. (Saidi, et al., 2016) ont présenté une théorie hyperbolique simple de déformation par cisaillement pour l'analyse vibratoire des plaques rectangulaires épaisses graduées fonctionnellement et reposant sur des fondations élastiques. (Bennoun, et al., 2016) ont proposé une nouvelle théorie de la plaque raffinée à cinq variables pour l'analyse vibratoire des plaques sandwich fonctionnelles. (Baseri, et al., 2016) ont présenté une solution analytique à la base de la HSDT pour l'étude du flambement des plaques laminées intégrées. (Chikh, et al., 2017) ont proposé une HSDT simplifiée pour étudier la réponse des plaques stratifiées à couches croisées en flambement thermique. (Bourada, et al., 2016) ont présenté une analyse de flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables. Récemment, (Karami, et al., 2017) ont étudié les effets du champ magnétique triaxial sur les nano-plaques anisotropes.

En résumé, les modèles et les méthodes citées ci-dessus considèrent un nombre fini de variables et leurs solutions se basent principalement sur les deux théories HSDT et FSdT.

IV.2. PLAQUE ORTHO TROPIQUE ETUDIEE

Dans le présent travail, une plaque rectangulaire de longueur a , de largeur b et d'épaisseur constante h est considérée pour investigation. La plaque est soumise à des charges de compression (N_x^0, N_y^0 et N_{xy}^0) en plan. La structure occupe (dans le système de coordonnées cartésiennes droit (o,x,y,z)) une zone caractérisée comme suit:

$$0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b ; -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (IV.1)$$

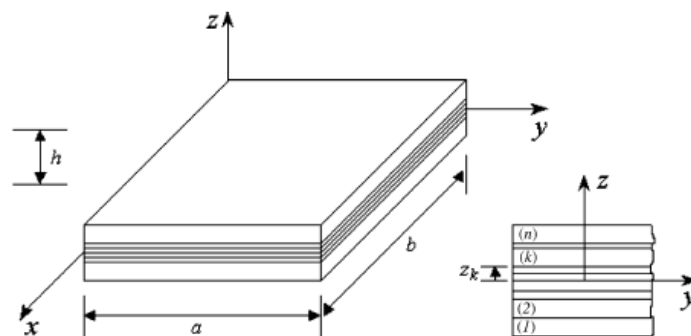


Fig. VI-1 : Nomenclature de la plaque stratifié orthotrope

IV.2.1. Cinématique

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

Dans cette étude, certaines hypothèses simplificatrices de la méthode HSDT existante sont utilisées, de sorte que le nombre de variables est réduit. Le champ de déplacement de la HSDT existante est donné par :

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \quad (IV\ 2a)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, t) \quad (IV\ 2b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (IV\ 2c)$$

Où w_0 , ϕ_x et ϕ_y sont cinq déplacements généralisés, $f(z)$ est la fonction de forme représentant la variation des déformations de cisaillement transversal et des contraintes à travers l'épaisseur. En adoptant que $\phi_x = \int \theta(x, y)dx$ et $\phi_y = \int \theta(x, y)dy$, la cinématique de la théorie proposée peut être exprimée sous une forme plus simple (Hebali, et al., 2016), (Meksi, et al., 2017), (Besseglier, et al., 2017), (El-Haina, et al., 2017); (Fahsi, et al., 2017), (Meftah, et al., 2017), (Menasria, et al., 2017), (Khetir, et al., 2017), (Bellifa, et al., 2017b), (Sekkal, et al., 2017) telle que:

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (IV\ 3a)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (IV\ 3b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (IV\ 3c)$$

Où $w_0(x, y)$ et $\theta(x, y)$ sont les deux fonctions inconnues du déplacement de la surface médiane de la plaque. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Alors que les intégrales utilisées sont indéterminées.

Dans ce travail, la HSDT appliquée est obtenue en posant :

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.4)$$

Les déformations associées à la cinématique en équation (IV.3) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (IV.5)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad (IV.6a)$$

et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.6b)$$

Les intégrales utilisées dans les expressions citées ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier et qui peuvent être exprimées par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.7)$$

Où les paramètres A' et B' sont définis en fonction du type de la solution utilisée, dans notre cas leurs expressions ont été dérivées à la base de la solution de Navier comme suit.

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (IV.22)$$

Où α et β sont définis ci-après par l'expression (IV.23).

IV.2.2. Équations constitutives

Les relations constitutives dans le cas des matériaux orthotropes peuvent être exprimées comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (IV.23)$$

Où Q_{ij} sont les raideurs réduites par contraintes, et qui sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12}; \quad Q_{44} = G_{23}; \quad Q_{55} = G_{13} \quad (IV.24)$$

IV.2.3. Equations de mouvements

Le principe d'Hamilton est utilisé pour déduire les équations de mouvements comme le montre l'équation ci-dessous :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta W - \delta K) dt \quad (IV.25)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δW est l'énergie potentielle virtuelle due aux forces de compression et de cisaillement constantes en plan (N_x^0, N_y^0 et N_{xy}^0) et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\
 &= \int_A \left[M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\
 &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0
 \end{aligned} \tag{IV 12}$$

Où A est la surface supérieure tandis que M et S sont les résultantes des contraintes et qui sont données par :

$$\left(M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad \left(S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{IV 13}$$

En substituant les équations (IV.5) et (IV.9) dans l'équation (IV.13) et en intégrant à partir de l'épaisseur de la plaque, les résultantes des contraintes sont liées aux déplacements généralisés (w_0 et θ) par les relations :

$$\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{IV 14a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV 14b}$$

Et les composants de rigidité sont donnés par :

$$(D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left(z^2, z f(z), f(z)^2 \right) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (IV.15a)$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left(g(z) \right)^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \quad (IV.15b)$$

Le travail ainsi effectué par les forces appliquées peut être exprimé comme :

$$\delta V = - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (IV.16)$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être calculée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \quad (IV.17) \end{aligned}$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable du temps t , ρ est la masse massique du matériau et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties de masse calculées par :

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho(z) dz \quad \text{Et} \quad (J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (z f, f^2) \rho(z) dz \quad (IV.18)$$

En substituant les relations de δU , δV et δK obtenues des équations (IV.12), (IV.16) et (IV.17) dans l'équation (IV.11), en intégrant par parties, et en recueillant les coefficients de δw_0 et $\delta \theta$, les équations de mouvements de la plaque sont déduites comme suit :

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} =$$

$$I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \quad (IV.19a)$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A + k_2 B) \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} =$$

$$-K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \quad (IV.19b)$$

En substituant les équations (IV.14) dans les équations (IV.19), les équations gouvernantes de la plaque en termes de déplacements généralisés sont dérivées comme suit :

$$-D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta$$

$$+ 2 \left(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + N_x^0 d_{11} w_0 + 2 N_{xy}^0 d_{12} w_0 + N_y^0 d_{22} w_0 =$$

$$I_0 \ddot{w}_0 - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \quad (IV.20a)$$

$$+ (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2 \left(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0$$

$$- H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2 H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left((k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right) d_{1122} \theta + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta =$$

$$J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 \left((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta} \right) \quad (IV.20b)$$

Où: d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \quad (IV.21)$$

IV.3. SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR PLAQUES ORTHOTROPES

La méthode de Navier est considérée afin d'élaborer les solutions analytiques des équations différentielles partielles (IV.20) mentionnées précédemment pour les plaques simplement appuyées.

En se basant sur cette méthode, les solutions de déplacement suivantes sont utilisées pour respecter automatiquement les conditions aux limites simplement appuyées de la plaque étudiée.

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV\ 22)$$

Où W_{mn} et X_{mn} sont des coefficients, ω est la fréquence naturelle du système, et α et β sont exprimés comme suit :

(IV 23)

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b$$

Les équations globales de la plaque dans le cas du flambement sont obtenues en établissant les efforts $N_x^0 = -\gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = -\gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$ dans les équations (IV.20).

En substituant l'équation (IV.22) dans les équations (IV.20), la solution de Navier des plaques orthotropes peut être déduite de l'équation suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{33}+k & S_{34} \\ S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV\ 24)$$

Où:

$$S_{33} = -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4), \quad (IV\ 25)$$

$$S_{34} = -k_1(D_{11}\alpha^2 + D_{12}\beta^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}\beta^2 + D_{12}\alpha^2),$$

$$S_{44} = -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2B')^2 A_{44}^s \beta^2$$

$$k = N_{cr} (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2)$$

$$m_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2) \quad m_{34} = J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad m_{44} = -K_2 \left((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 \right)$$

IV.4. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

a) Analyse des vibrations libres

Dans la présente section, l'étude dynamique d'une plaque orthotropique simplement appuyée est considérée. Les propriétés des matériaux de la plaque orthotrope sont comme suit :

$$E_1 / E_2 = 0.52500, \quad G_{12} / E_2 = 0.26293, \quad G_{13} / E_2 = 0.15991, \quad G_{23} / E_2 = 0.26681, \quad \nu_{12} = 0.44046, \quad (IV\ 26)$$

$$\nu_{21} = 0.23124$$

Les modes de flexion et de cisaillement de la plaque sont présentés sous la forme non dimensionnelle :

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} h \sqrt{\frac{\rho}{Q_{11}}} \quad (IV\ 27)$$

Les fréquences propres principales du mode de flexion ($\bar{\omega}_w$) et du mode de cisaillement en épaisseur ($\bar{\omega}_\theta$) de la plaque carrée sont déterminées pour un rapport d'épaisseur égale à $a/h=10$. Les tableaux 1 à 3 indiquent les fréquences non dimensionnelles de la plaque carrée simplement appuyée, où les résultats sont comparés avec la solution exacte de (Srinivas, et al., 1970), HSDT de (Reddy, 1984), théorie de la déformation trigonométrique par cisaillement (TSDT) de (Ghugal & Sayyad, 2011), théorie de déformation exponentielle par cisaillement (ESDT) de (Ghugal & Sayyad, 2014), théorie avancée raffinée (RPT) de (Shimpi & Patel, 2006), et la première théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) de (Mindlin, 1951) et CPT.

Les fréquences prédominantes du mode de flexion de la plaque carrée orthotrope sont présentées dans le tableau IV.1 pour des divers modes de vibration, où on aperçoit que le modèle proposé fournit d'excellents résultats pour tous les modes de vibration.

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

Tableau IV-1 : Comparaison des fréquences propres fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}_w$ en mode de flexion de la plaque carrée orthotrope simplement appuyée ($a/h=10$)

(m, n)	Présente	Exact	ESDT	HSDT	TSDT	RPT	FSDT	CPT
(1,1)	0.0477	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0477	0.0474	0.0497
(1,2)	0.1040	0.1033	0.1033	0.1033	0.1031	0.1040	0.1032	0.1120
(1,3)	0.1898	0.1888	0.1888	0.1888	0.1793	0.1898	0.1884	0.2154
(1,4)	0.2980	0.2969	0.2969	0.2969	0.2932	0.2980	0.2959	0.3599
(2,1)	0.1198	0.1188	0.1190	0.1189	0.1196	0.1198	0.1187	0.1354
(2,2)	0.1722	0.1694	0.1697	0.1695	0.1696	0.1722	0.1692	0.1987
(2,3)	0.2520	0.2475	0.2480	0.2477	0.2478	0.2520	0.2459	0.3029
(2,4)	0.3534	0.3476	0.3482	0.3479	0.3468	0.3534	0.3463	0.4480
(3,1)	0.2197	0.2180	0.2191	0.2184	0.2199	0.2197	0.2178	0.2779
(3,2)	0.2675	0.2624	0.2637	0.2629	0.2671	0.2675	0.2619	0.3418
(3,3)	0.3407	0.3320	0.3337	0.3326	0.3326	0.3407	0.3310	0.4470
(4,1)	0.3344	0.3319	0.3351	0.3330	0.3346	0.3344	0.3311	0.4773
(4,2)	0.3774	0.3707	0.3743	0.3720	0.3727	0.3774	0.3696	0.5415

D'après le tableau IV.2, on peut apprécier que les fréquences des modes de cisaillement au niveau de l'épaisseur de la plaque carrée orthotrope déterminées par ce modèle proposé sont en bonne concordance avec les autres résultats.

Tableau IV-2: Comparaison des fréquences propres fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}_\theta$ en mode de cisaillement en épaisseur de la plaque carrée orthotrope simplement appuyée ($a/h=10$)

(m, n)	Présente	Exact	ESDT	HSDT	TSDT	FSDT
----------	----------	-------	------	------	------	------

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

(1,1)	1.5137	1.6530	1.6448	1.6550	1.6530	1.6647
(1,2)	1.6791	1.7160	1.7105	1.7209	1.7145	1.7307
(1,3)	1.8073	1.8115	1.8052	1.8210	1.8044	1.8307
(1,4)	1.9418	1.9306	1.9249	1.9466	1.9121	1.9562
(2,1)	1.5155	1.6805	1.6728	1.6827	1.6817	1.6922
(2,2)	1.6784	1.7509	1.7462	1.7562	1.7513	1.7657
(2,3)	1.8310	1.8523	1.8418	1.8622	1.8458	1.8717
(2,4)	1.9795	1.9749	1.9701	1.9912	1.9524	2.0004
(3,1)	1.6478	1.7334	1.7274	1.7361	1.7373	1.7452
(3,2)	1.7691	1.8195	1.8068	1.8255	1.8255	1.8343
(3,3)	1.9115	1.9289	1.9203	1.9395	1.9301	1.9418
(4,1)	1.8414	1.8458	1.8437	1.8583	1.7163	1.7267
(4,2)	1.9306	1.9447	1.9351	1.9514	1.9568	1.9588

b) Analyse de flambement

Dans cette section, la réponse au flambement de la plaque orthotrope carrée étudiée est examinée. A cet effet, trois types de conditions de chargement en plan sont considérés: (1) compression uniaxiale le long de l'axe des x; (2) une compression uniaxiale le long de l'axe y; et (3) compression biaxiale. Les résultats numériques ainsi obtenues sont également comparés à ceux rapportés par HSDT de (Reddy, 1984), théorie de déformation trigonométrique par cisaillement (TSDT) de (Ghugal & Sayyad, 2011), théorie exponentielle de déformation de cisaillement (ESDT) de (Ghugal & Sayyad, 2014), première théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) de (Mindlin, 1951) et CPT.

Les tableaux IV.3 et IV.4 représentent une comparaison de la charge critique non dimensionnelle de flambement pour la plaque carrée étudiée sous compression uni axiale et biaxiale avec la variation des rapports modulaire et d'épaisseur. On peut observer que le modèle proposé avec seulement deux inconnues donne de bons résultats pour tous les rapports modulaires et d'épaisseur. La différence entre le modèle proposé et celui de la HSDT de (Reddy, 1984) augmentera légèrement au fur et à mesure avec les rapports modulaires. La CPT surestime les valeurs de la charge critique de flambement pour tous les rapports d'épaisseur et tous les rapports modulaires.

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

Tableau IV-3: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge critique de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, m = n = 1$).

a/h	Modèle	Facteur non-dimensionnel de la charge critique de flambement (N_{cr})				
		Rapport des modules E_1 / E_2				
		3	10	20	30	40
5	Présent	3.9587	6.3478	8.3967	9.6821	10.578
	ESDT	3.9650	6.3014	8.0946	9.2166	10.049
	HSDT	3.9434	6.2072	7.8292	8.7422	9.3472
	TSDT	4.0572	6.3212	7.9324	8.8418	9.4502
	FSDT	3.9386	6.1804	7.7450	8.5848	9.1084
	CPT	5.4248	11.163	19.383	27.606	35.830
10	Présent	4.9637	9.3732	14.563	18.772	22.258
	ESDT	4.9612	9.2998	14.080	17.748	20.676
	HSDT	4.9568	9.2772	14.001	17.577	20.386
	TSDT	5.0128	9.3646	14.116	17.711	20.534
	FSDT	4.9562	9.2734	13.982	17.532	20.304
	CPT	5.4248	11.163	19.383	27.606	35.830
20	Présent	5.3016	10.653	17.898	24.690	31.069
	ESDT	5.3004	10.625	17.681	24.146	30.094
	HSDT	5.2994	10.621	17.664	24.108	30.025
	TSDT	5.3194	10.653	17.714	24.175	30.107
	FSDT	5.2994	10.620	17.662	24.102	30.014
	CPT	5.4248	11.163	19.383	27.606	35.830
50	Présent	5.4047	11.078	19.129	27.094	34.972
	ESDT	5.4044	11.072	19.087	26.982	34.758
	HSDT	5.4040	11.072	19.085	26.976	34.748
	TSDT	5.4116	11.081	19.098	26.993	34.769

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

100	FSDT	5.4046	11.072	10.085	26.976	34.748
	CPT	5.4248	11.163	19.383	27.606	35.830
	Présent	5.4197	11.141	19.319	27.477	35.612
	ESDT	5.4196	11.400	19.308	27.447	35.554
	HSDT	5.4192	11.139	19.307	27.466	35.553
	TSDT	5.4250	11.145	19.314	27.453	35.562
	FSDT	5.4206	11.142	19.309	27.448	35.554
	CPT	5.4248	11.163	19.383	27.606	35.830

Tableau IV-4: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge critique de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, m = n = 1$)

a/h	Modèle	Charge critique non-dimensionnelle de flambement (N_{cr})				
		Rapport des modules E_1 / E_2				
		3	10	20	30	40
5	Présent	1.9793	3.1739	4.1984	4.8411	5.2892
	ESDT	1.9825	3.1507	4.0473	4.6083	5.0246
	HSDT	1.9717	3.1036	3.9146	4.3711	4.6736
	TSDT	2.0281	3.1606	3.9662	4.4209	4.7251
	FSDT	1.9693	3.0902	3.8725	4.2924	4.5542
	CPT	2.7124	5.5814	9.6917	13.8034	17.9154
10	Présent	2.4818	4.6866	7.2816	9.3862	11.1291
	ESDT	2.4806	4.6499	7.0402	8.8741	10.3380
	HSDT	2.4784	4.6386	7.0002	8.7885	10.1929
	TSDT	2.5064	4.6823	7.0582	8.8558	10.2674
	FSDT	2.4781	4.6367	6.9910	8.7662	10.1522
	CPT	2.7124	5.5814	9.6917	13.8034	17.9154
20	Présent	2.6508	5.3267	8.9490	12.3448	15.5343

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

	ESDT	2.6502	5.3124	8.8405	12.0731	15.0470
	HSDT	2.6497	5.3101	8.8320	12.0540	15.0127
	TSDT	2.6597	5.3266	8.8574	12.0875	15.0537
	FSDT	2.6497	5.3100	8.8311	12.0513	15.0070
	CPT	2.7124	5.5814	9.6917	13.8034	17.9154
50	Présent	2.7023	5.5390	9.5646	13.5470	17.4859
	ESDT	2.7022	5.5364	9.5437	13.4911	17.3791
	HSDT	2.7020	5.5360	9.5424	13.4884	17.3744
	TSDT	2.7058	5.5407	9.5490	13.4969	17.3849
	FSDT	2.7023	5.5362	9.5425	13.4885	17.3745
	CPT	2.7124	5.5814	9.6917	13.8034	17.9154
100	Présent	2.7099	5.5707	9.6596	13.7384	17.8060
	ESDT	2.7098	5.5700	9.6542	13.7238	17.7779
	HSDT	2.7096	5.5697	9.6533	13.7230	17.7767
	TSDT	2.7124	5.5727	9.6571	13.7269	17.7811
	FSDT	2.7103	5.5710	9.6544	13.7241	17.7772
	CPT	2.7124	5.5814	9.6917	13.8034	17.9154

La comparaison de la charge critique non dimensionnelle de flambement pour une plaque rectangulaire est présentée dans les Tableaux IV.5 à IV.7. On peut déduire à partir de ces Tableaux que la charge critique non dimensionnelle de flambement diminue avec l'augmentation des rapports d'aspect (b/a) lorsque la plaque est sous compression uniaxiale le long de l'axe des abscisses, tandis qu'elle augmente lorsque la plaque est soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe des y et de la stabilité biaxiale.

Tableau IV-5: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale sur l'axe des x ($a/h=5$, $\gamma_1=-1$, $\gamma_2=0$, $m=n=1$).

E_1/E_2	Modèle	Facteur non-dimensionnel de la charge critique de flambement (N_{cr})						
		Rapport d'aspect b/a						
		1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

10	Présent	6.3478	5.3284	5.0109	4.8706	4.7961	4.7518	4.7232
	ESDT	6.3014	5.3026	5.0148	4.8939	4.8317	4.7953	4.7723
	HSDT	6.2072	5.2245	4.9412	4.8223	4.7611	4.7253	4.7026
	TSDT	6.3212	5.2923	4.9940	4.8682	4.8033	4.7654	4.7412
	FSDT	6.1804	5.2025	4.9205	4.8021	4.7412	4.7056	4.6831
	CPT	11.163	9.3549	8.8428	8.6270	8.5154	8.4500	8.4083
25	Présent	9.1039	7.9408	7.5409	7.3561	7.2558	7.1952	7.1559
	ESDT	8.7062	7.8373	7.6007	7.5047	7.4562	7.4281	7.4109
	HSDT	8.3394	7.4929	7.2631	7.1701	7.1231	7.0961	7.0792
	TSDT	8.4398	7.5414	7.2929	7.1909	7.1391	7.1091	7.0905
	FSDT	8.2199	7.3805	7.1530	7.0610	7.0154	6.9883	6.9713
	CPT	23.495	21.690	21.179	20.964	20.854	20.783	20.744
40	Présent	10.579	9.2342	8.7587	8.5368	8.4158	8.3426	8.2950
	ESDT	10.049	9.2310	9.0145	8.9282	8.8853	8.8608	8.8454
	HSDT	9.3472	8.5541	8.3455	8.2628	8.2217	8.1983	8.1837
	TSDT	9.4502	8.6015	8.3719	8.2791	8.2324	8.2056	8.1888
	FSDT	9.1084	8.3237	8.1178	8.0363	7.9958	7.9728	7.9585
	CPT	35.830	34.027	33.516	33.300	33.189	33.124	33.082

Tableau IV-6: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression uniaxiale sur l'axe des y ($a/h=5$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=-1$, $m=n=1$)

E_1 / E_2	Modèle	Facteur non-dimensionnel de la charge critique de flambement (N_{cr})						
		Rapport d'aspect b/a						
		1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0
10	Présent	6.3478	11.989	20.044	30.441	43.165	58.210	75.572
	ESDT	6.3014	11.930	20.059	30.587	43.485	58.743	76.356
	HSDT	6.2072	11.755	19.765	30.139	42.849	57.885	75.242

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

	TSDT	6.3212	11.907	19.975	30.426	43.229	58.375	75.859
	FSDT	6.1804	11.705	19.682	30.013	42.670	57.644	74.929
	CPT	11.163	21.048	35.371	53.918	76.638	103.51	134.53
25	Présent	9.1039	17.867	30.164	45.976	65.302	88.141	114.494
	ESDT	8.7062	17.634	30.403	46.904	67.107	90.999	118.57
	HSDT	8.3394	16.859	29.052	44.813	64.110	86.931	113.27
	TSDT	8.4398	16.968	29.171	44.943	64.253	87.089	113.44
	FSDT	8.2199	16.606	28.611	44.131	63.132	85.604	111.54
	CPT	23.495	48.803	84.716	131.02	187.66	254.63	331.92
40	Présent	10.578	20.777	35.035	53.355	75.742	102.20	132.72
	ESDT	10.049	20.769	36.058	55.801	79.968	108.55	141.42
	HSDT	9.3472	19.246	33.382	51.642	73.995	100.42	130.93
	TSDT	9.4502	19.353	33.487	51.744	74.092	100.52	131.02
	FSDT	9.1084	18.728	32.471	50.226	71.962	97.667	137.33
	CPT	35.830	76.560	134.06	208.12	298.69	405.76	529.31

Tableau IV-7: Comparaison des facteurs non dimensionnels de la charge de flambement (N_{cr}) pour une plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous compression biaxiale ($a/h = 5$, $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = -1$, $m = n = 1$).

E_1 / E_2	Modèle	Facteur non-dimensionnel de la charge critique de flambement (N_{cr})						
		Rapport d'aspect b/a						
		1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0
10	Présent	3.1739	3.6889	4.0087	4.1988	4.3165	4.3932	4.4454
	ESDT	3.1507	3.6710	4.0118	4.2189	4.3485	4.4334	4.4915
	HSDT	3.1036	3.6170	3.9530	4.1571	4.2849	4.3687	4.4260
	TSDT	3.1606	3.6639	3.9952	4.1967	4.3230	4.4057	4.4623
	FSDT	3.0902	3.6017	3.9364	4.1398	4.2671	4.3505	4.4076

Chapitre IV : Analyse Des Vibrations Libres Et Du Flambement Des Plaques Orthotropes

	CPT	5.5814	6.4765	7.0743	7.4371	7.6638	7.8122	7.9137
25	Présent	4.5519	5.4974	6.0327	3.3415	6.5302	6.6522	6.7349
	ESDT	4.3531	5.4258	6.0806	6.4696	6.7107	6.8678	6.9750
	HSDT	4.1697	5.1874	5.8105	6.1811	6.4110	6.5609	6.6631
	TSDT	4.2199	5.2210	5.8343	6.1991	6.4253	6.5728	6.6734
	FSDT	4.1099	5.1096	5.7224	6.0870	6.3132	6.4607	6.5613
	CPT	11.757	15.016	16.943	18.072	18.767	19.217	19.524
	40	Présent	5.2892	6.3929	7.0069	7.3593	7.5742	7.7130
ESDT		5.0246	6.3907	7.2116	7.6967	7.9968	8.1920	8.3251
HSDT		4.6736	5.9221	6.6764	7.1231	7.3995	5.5796	7.7023
TSDT		7.7251	5.9549	6.6875	7.1372	7.4092	7.5863	7.7071
FSDT		4.5542	5.7626	6.4942	6.9278	7.1963	7.3711	7.4903
CPT		17.915	23.557	26.813	28.707	29.870	30.623	31.136

IV.5. CONCLUSION :

Une nouvelle théorie des plaques raffinées à deux variables est proposée dans ce travail pour l'investigation de la stabilité et l'analyse dynamique des plaques orthotropes. La théorie considère l'effet de cisaillement transversal et la variation parabolique de la déformation due au cisaillement transversal sur l'épaisseur de la plaque étudiée. A partir des résultats obtenus, on peut conclure que les fréquences calculées par la théorie proposée sont exactes, comme on peut le constater à partir de la comparaison avec les résultats exacts, en particulier dans le cas du mode de la flexion simple. En outre, il est confirmé par cette étude que la présente théorie peut estimer avec précision les charges critiques de flambement des plaques orthotropes.

CONCLUSION GENERALE

Les structures en matériaux composite représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'étudier du comportement vibratoire et de flambement des plaques épaisses en matériau composite orthotrope et isotrope. Afin d'étudier l'influence du chargement de rigidité sur le comportement vibratoire et de flambement des plaques tout en étudions l'évolution des fréquences propre et les charges critique de flambement.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse comportement vibratoire et de flambement des plaques épaisses en matériaux composite orthotrope et isotrope. Pour valider ce modèle, nous avons comparé ce modèle à des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature.

La théorie proposé à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences propres et les charges critique de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes vibratoire et de l'instabilité des plaques en matériaux composite orthotrope et isotrope.

Deuxièmement, nous avons étudié comportement vibratoire des plaques épaisses sandwichs en matériaux composite orthotrope et isotrope en utilisant le nouveau modèle hyperbolique de plaque de déformation en cisaillement avec la prise en compte de la déformation normale et, en supposant une variation des propriétés matérielles.

Le modèle hyperbolique d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale transversale offre des solutions précises et fiables pour l'analyse des plaques en matériaux composite orthotrope et isotrope en comparaison avec les autres théories de déformation de cisaillement. Des exemples illustratifs sont donnés pour montrer les effets de changement des paramètres du matériau sur la réponse de la plaque. Les résultats obtenus indiquent que les fréquences propres et les charges critique de flambement peuvent être relaxées pour quelques paramètres de matériau donnés.

Dans l'application de technologie, cette caractéristique représente beaucoup d'avantages et permet de choisir des paramètres de matériau appropriés dans l'intégrité structurale en matériaux composite orthotrope et isotrope.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire (LMH) dans le domaine des matériaux composites et précisément leurs comportements vis-à-vis aux comportements vibratoire et de flambement.

Bibliographie

Ahouel, M., Houari, M., Adda Bedia, E. & Tounsi, A., 2016. Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept. *Steel Compos.Struct*, 5(20), pp. 963-981.

Akavci, S., 2016. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Compos.Part B*, Issue 96, pp. 136-152.

Aldousari, S., 2017. Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam. *Appl.Phys.A*, 4(123), p. 296.

Amar, L., Kaci, A. & Tounsi, A., 2017. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams with porosities. *Struct. Eng. Mech*, 5(64), pp. 527-542.

Atmane, H., Tounsi, A. & Bernard, F., 2017. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *J.Mech.Mater.Des*, 1(13), pp. 71-84.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E. & Mahmoud, S., 2015. Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories. *Steel Compos. Struct*, 1(18), pp. 187-212.

Barati, M. & Shahverdi, H., 2016. A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions. *Struct. Eng. Mech*, 4(60), pp. 707-727.

Baseri, V., Jafari, G. & Kolahchi, R., 2016. Analytical solution for buckling of embedded laminated plates based on higher order shear deformation plate theory. *Steel Compos. Struct*, 4(21), pp. 883-919.

Becheri, T., Amara, K., Bouazza, M. & Benseddiq, N., 2016. Buckling of symmetrically laminated plates using nth-order shear deformation theory with curvature effects. *Steel Compos. Struct*, 6(21), pp. 1347-1368.

- Belabed, Z. et al., 2014. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Compos.Part B*, Issue 60, pp. 274-283.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2016. Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Struct. Syst*, 4(18), pp. 755-786.
- Belkorissat, I. et al., 2015. On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model. *Steel Compos.Struct*, 4(18), pp. 1063-1081.
- Bellifa, H. et al., 2017b. An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Steel Compos.Struct*, 3(25), pp. 257-270.
- Bellifa, H. et al., 2017a. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeam. *Struct.Eng.Mech*, 6(62), pp. 695-702.
- Bellifa, H. et al., 2016. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng*, 1(38), pp. 265-275.
- Benahmed, A. et al., 2017. *Geomech.Eng. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation*, 1(12), pp. 9-34.
- Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N. & Tounsi, A., 2016. A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates. *Steel Compos.Struct*, 5(22), pp. 975-999.
- Benchohra, M. et al., 2018. A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Struct.Eng.Mech*, 1(65), p. 19*31.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A & Tounsi, A., 2016. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech.Adv.Mater.Struct*, 4(23), pp. 423-431.
- Bessaim, A. et al., 2013. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J.Sandw.Struct.Mater*, 6(15), pp. 671-703.

- Besseghier, A., Houari, M., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2017. Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory. *Smart Struct. Syst*, 6(19), pp. 601-614.
- Bouafia, K. et al., 2017. A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams. *Smart Struct. Syst*, 2(19), pp. 115-126.
- Bouderba, B., Houari, M. & Tounsi, A., 2013. Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Steel Compos. Struct*, 1(14), pp. 85-104.
- Bouderba, B., Houari, M., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2016. Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory. *Struct. Eng. Mech*, 3(58), pp. 397-422.
- Boukhari, A. A. H., Tounsi, A. A. B. & Mahmoud, S., 2016. An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates. *Struct. Eng. Mech*, 5(57), pp. 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K., Belkorissat, I. & Tounsi, A., 2016. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel Compos. Struct*, 2(20), pp. 227-249.
- Bourada, F., Amara, K. & Tounsi, A., 2016. Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory. *Steel Compos. Struct*, 6(21), pp. 1287-1306.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M. & Tounsi, A., 2015. A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct*, 2(18), pp. 409-423.
- Bousahla, A., Benyoucef, S., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2016. On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion. *Struct. Eng. Mech*, 2(60), pp. 313-335.
- Bousahla, A., Houari, M., Tounsi, A. & Adda Bedia, E., 2014. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *J.Comput.Meth*, 6(11), pp. 135-142.

- Chaht, F. et al., 2015. Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect. *Steel Compos. Struct*, 2(18), pp. 425-442.
- Chen, W. & Zhen, W., 2008. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories. *Recent Patent.Mech.Eng*, 1(1), pp. 29-44.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. & Mahmoud, S., 2017. Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. *Smart Struct. Syst*, 3(19), pp. 289-297.
- Draiche, K., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2016. A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates. *Geomech.Eng*, 5(11), pp. 671-690.
- El-Haina, F. et al., 2017. A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates. *Struct. Eng. Mech*, 5(63), pp. 585-595.
- Eltaher, M., Emam, S.A & Mahmoud, F., 2012. Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Appl. Math. Comput*, 14(218), pp. 7406-7420.
- Fahsi, A. et al., 2017. A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Geomech.Eng*, 3(13), pp. 385-410.
- Fekrar, A., Houari, M., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2014. A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates. *Meccanica*, 4(49), pp. 795-810.
- Ghugal, Y. & Pawar, M., 2011. Flexural analysis of thick plates by hyperbolic shear deformation theory. *J.Exp.Appl.Mech*, 1(2), pp. 1-21.
- Ghugal, Y. & Sayyad, A., 2011. Free vibration analysis of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *Lat.Am.J.Solid.Struct*, 3(8), pp. 229-243.
- Ghugal, Y. & Sayyad, A., 2014. Buckling and free vibration analysis of orthotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Lat.Am.J.Solid.Struct*, 8(11), pp. 1298-1314.
- Ghugal, Y. & Shimpi, R., 2002. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated plates. *J.Reinf.Plast.Compos*, 9(21), pp. 775-813.

- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. & Adda Bedia, E., 2015. A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities. *Geomech.Eng*, 3(9), pp. 361-372.
- Hamidi, A., Houari, M., Mahmoud, S. & Tounsi, A., 2015. A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel Compos. Struct*, 1(18), pp. 235-353.
- Han, S., Park, W. & Jung, W., 2015. A four-variable refined plate theory for dynamic stability analysis of S-FGM plates based on physical neutral surface. *Compos.Struct*, Issue 131, pp. 1081-1089.
- Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A. & Kaci, A., 2016. A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Steel Compos. Struct*, 3(22), pp. 473-495.
- Hebali, H. et al., 2014. A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *J.Eng.Mech*, 2(140), pp. 374-383.
- J.M.BERTHELOT, 2005. *mechanical behaviour and Structural Analysis*. New york, Paris: SPRINGER-VERLAG.
- Javed, S. et al., 2016. Vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates under higher order shear theory. *Steel Compos. Struct*, 6(22), pp. 1281-1299.
- Karama, M., Afaq, K. & Mistou, S., 2003. Mechanical behavior of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *J.Solid.Struct*, 6(40), pp. 1525-1546.
- Karami, B., Janghorban, M. & Tounsi, A., 2017. Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates. *Steel Compos. Struct*, 3(25), pp. 361-374.
- Kar, V., 2015. Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment. *Lat.Am.J.Solid.Struct*, 11(12), pp. 2006-2024.
- Kar, V., Mahapatra, T. & Panda, S., 2015. Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading. *Steel Compos. Struct*, 4(19), pp. 1011-1033.

- Khetir, H. et al., 2017. A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates. *Struct. Eng. Mech*, 4(64), pp. 391-402.
- Kirchhoff, G., 1850a. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *J.Reine Angew.Math*, Issue 40, pp. 51-88.
- Kirchhoff, G., 1850b. Über die uchwingungen einer kriesformigen elastischen scheibe. *Poggendorffs Annalen*, Issue 81, pp. 58-264.
- Klouche, F. et al., 2017. An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates. *Struct. Eng. Mech.*, 4(63), pp. 439-446..
- Kreja, I., 2011. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Cent.Eur.J.Eng*, 1(1), pp. 59-80.
- Mahi, A. & Tounsi, A., 2015. Appl. Math. Model. *A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates*, 9(39), pp. 2489-2508.
- Meftah, A. et al., 2017. Steel Compos. Struct. *A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionallygraded thick rectangular plates on elastic foundation*, 3(23), pp. 317-330.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M. & Tounsi, A., 2015. A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Struct. Eng. Mech*, 6(53), pp. 1215-1240.
- Meksi, R. et al., 2017. An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *Sandw. Struct. Mater*, 6(1099), pp. 43-48.
- Menasria, A. et al., 2017. A new and simple HSDT for thermal stabilityanalysis of FG sandwich plates. *Steel Compos. Struct*, 2(25), pp. 157-175.
- Meradjah, M. et al., 2015. A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams. *SteelCompos. Struct*, 3(18), pp. 793-809.

- Meziane, M., Abdelaziz, H. & Tounsi, A., 2014. An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions. *J. Sandw. Struct. Mater*, 3(16), pp. 293-318.
- Mindlin, R., 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*, Issue 18, pp. 31-38.
- Mouffoki, A. et al., 2017. Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory. *Smart Struct.Syst*, 3(20), pp. 369-383.
- Rahmani, O., Refaeinejad, V. & Hosseini, S., 2017. Assessment of various nonlocal higher order theories for the bending and buckling behavior of functionally graded nanobeams. *Steel Compos. Struct*, 3(23), pp. 339-350.
- Reddy, J., 1984. A simple higher order theory for laminated composite plates. *J.Appl.Mech*, 4(51), pp. 745-752.
- Reissner, E., 1944. On the theory of bending of elastic plates. *J.Math.Phys*, 1-4(23), pp. 184-191.
- Reissner, E., 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J.Appl.Mech*, Issue 12, pp. 69-77.
- Saidi, H., Tounsi, A. & Bousahla, A., 2016. A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations. *Geomech.Eng*, 2(11), pp. 289-307.
- Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A. & Mahmoud, S., 2017. A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. *Steel Compos*, 4(25), pp. 389-401.
- Shimpi, R., 2002. Refined plate theory and its variants. *AIAA J*, 1(40), pp. 137-146.
- Shimpi, R. & Patel, H., 2006. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *J.Solid.Struct*, 22-23(43), pp. 6783-6799.

- Shimpi, R., Patel, H. & Arya, H., 2007. New first order shear deformation plate theories. *J.Appl.Mech*, 3(74), pp. 523-533.
- Sobhy, M., 2013. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos.Struct*, Issue 99, pp. 76-87.
- Srinivas, S., Rao, C. & Rao, A., 1970. An exact analysis of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J. Sound Vib*, 2(12), pp. 187-199.
- Taibi, F. et al., 2015. A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *J. Sandw. Struct. Mater*, 2(17), pp. 99-129.
- Tounsi, A., Houari, M., Benyoucef, S. & Adda Bedia, E., 2013. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp. Sci. Technol*, 1(24), pp. 209-220.
- Yahia, S., Atmane, H., Houari, M. & Tounsi, A., 2015. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Struct. Eng. Mech*, 6(53), pp. 1143-1165.
- Zemri, A., Houari, M., Bousahla, A. & Tounsi, A., 2015. A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory. *Struct. Eng. Mech*, 4(541), pp. 693-710.
- Zidi, M. et al., 2017. A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams. *Struct.Eng. Mech*, 2(64), pp. 145-153.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M. & Bég, O., 2014. Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory. *Aerosp. Sci. Technol*, Issue 34, pp. 24-34.
- C. Baron., S. Naili,(2008) Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.

M. Savoia., J.N. Reddy, (2008) Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608 x.

E. Reissner, (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77.

R.D. Mindlin, (1945) Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38.

S.P.Timoshenko, (1940) "Strength of materials", Chapitre I, 170-171. D. Van Nostrand Company.

S.P. Timoshenko., J.M.Gere,(1972) *Mechanics of Materials*. D. Van Nostrand Company.

S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, (1959) *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.

P.M. Ciarlet, (1997) *Mathematical Elasticity, Vol. II: Theory of Plates*. North-Holland, Amsterdam.

J.N. Reddy, (1997) *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.

J.N. Reddy,(1999) *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia.

X.Q. He., T.Y. Ng., S. Sivashankera., K. M, (2001)Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *Int. J; Solids Structures*; 38 (9): 1641-1655.

Chi, S. H., Chung, Y.L, (2006) Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part I: Analysis, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3657-3674.

Chi, S. H., Chung, Y.L, (2006) Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3675-3691.

G.N. Praveen., J.N. Reddy, (1998) Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *Int. J; Solids Structures*; 35 (33): 4457-4476.

L. D. Croce., P. Venini,(2004) Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*; 193: 705-725.

- T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, (2007) Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.
- T.K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet,(2008) First order shear deformation plates models for functionally graded materials. *Compos. Struct. Struct*; 83 (1): 25-36.
- J. N. Reddy, (2000) Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Methods Eng*; 47: 663-684.
- Z. Zhong., T. Yu,(2007) Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488.
- M. Koizumi, (1992) Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.
- K. Kokini., Y. Takeuchi, (1990) Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36,
- P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain,(1986) Tape casting of Al_2O_3/ZrO_2 laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192.
- M. Koizumi, (1997) FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4.
- H. Okamura,(1991) State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.
- L. Lostec,(1997) Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges.
- R. E. Mistler, (1973) High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854.
- J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO,(1992) Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35.
- A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane,(1993) A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18.

- H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel,(1990) Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43.
- M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, (1990) Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34.
- G. Bao., L. Wang, (1995) Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, (2003) Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- F. Delale., F. Erdogan,(1983) The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, (1949) Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*.
- P. M. Naghdi, (1957) On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.
- E. Reissner, (1975) On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- J.N. Reddy, (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- T. Kant., K. Swaminathan, ,(2002) Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.
- M. Touratier, (1991) An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.
- M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou,(2003)Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

- M.-J. Pindera., S. M. Arnold., J. Aboudi., D. Hui, (1994) Use of Composites in Functionally Graded Materials, *Composites Eng*; 4 (1): 1-145.
- A. J. Markworth., K. S. Ramesh., W.P. Parks, (1995) Review: Modeling studies applied to functionally graded materials, *J. Mater. Sci*; 30 (9) : 2183–2193.
- Suresh, S., and Mortensen, A., (1998) *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications, London.
- H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, (2004) Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Mater*; 52 (12):3535–3543.
- S. S. Vel., R.C. Batra, (2002) Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433.
- M. Nemat-Alla, (2003) Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials, *Int. J. Solids Struct*; 40 (26): 7339–7356,
- J. R. Zuiker, (1995) Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations,” *Composites Eng*, 5 (7): 807–819.
- T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, (1997) Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302.
- J. R. Cho., D.Y. Ha, (2001) Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196.
- R. Pal, (2005) New Models for Effective Young’s modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523.
- Z.-H. Jin, (2002) An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895.
- Y. Ootao., Y. Tanigawa, T., (2004) Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146.
- J. Sladek., V. Sladek., Ch. Zhang, (2003) Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504.

- B. V. Sankar., J.T. Tzeng, (2002) Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232.
- B. V. Sankar, (2001) An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696.
- A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, (2003) A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539.
- H.K. Ching., S.C. Yen, (2006) Transient thermoelastic deformation of 2-d functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply, *Compos. Struct*; 73 (4): 381–393.
- J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, (2001) Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855.
- M. Kashtalyan, (2004)Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864.
- J. Woo., S.A. Meguid, (2001) Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421.
- J.-Q. Tarn, (200) Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–82061.
- T. Fuchiyama., N. Noda, (1995) Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material. *JSAE Rev*; 16 (3):263–8.
- V. B. Tungikar., K. M. Rao, (1994) Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates, *Compos. Struct*; 27 (4): 419–427.
- E. Carrera, (2002)Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories, *AIAA J*; 40: 419–427.
- J.N. Reddy, Y.S Hsu,(1980)Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates, *Journal of Thermal Stresses*; 3 (4) :475–93.
- [83] Y. C. Das., B. K. Rath, (1972) Thermal bending of moderately thick rectangular plate. *J AIAA*; 10:1349–1352.