

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par : **M^{me} REMIL Aicha**

Sujet de thèse

**Proposition d'une nouvelle cinématique des plaques
pour l'étude de la réponse dynamique et statique des
plaques composites**

Soutenue le : 22 /06 / 2020 devant le jury composé de :

Mr. A.BENACHOUR	Pr	UDL – SBA	Président
Mr. K.H.BENRAHOU	Pr	UDL – SBA	Directeur de thèse
Mr. A. TOUNSI	Pr	UDL – SBA	Co-directeur
Mr. T.HASSAINE. DAOUADJI	Pr	U- TIARET	Examineur
Mr. M.M.AIT AMAR	Pr	U- TIARET	Examineur
Mr. A.CHIKH	MC A	U- TIARET	Examineur

Année universitaire 2019-2020.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicaces

*À ma chère mère et mon cher père,
À mon mari et mes enfants :Abdelhadi et Abdelaziz et Sarah
À mes sœurs et mes frères,
À ma famille ,
À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce
travail.*

Remerciements

*Mes remerciements s'adressent plus particulièrement à mes deux directeurs de thèse **Mr. BENRAHOU ABDELHALIM** et **Mr. ABDELOUAHED TOUNSI**.*

*A l'origine de cette thèse **Mr. ABDELOUAHED TOUNSI** n'a pas manqué de m'orienter dans le bon sens pour faire de ce travail un succès. Par ailleurs **Mr. BENRAHOU** d'avoir assuré la direction de ce travail par son aide, par ses conseils avisés et par sa rigueur scientifique.*

*Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à **Mr. A.BENACHOUR**, professeur de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury de thèse.*

*Mes sincères remerciements s'adressent également à Messieurs, **Mr. A.CHIKH** , **Mr. M.M.AIT AMAR** et **Mr. T.H. DAOUADJI** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner. Qu'il me soit permis de leurs exprimer ma profonde gratitude.*

Enfin, je ne saurais terminer sans adresser mes chaleureux remerciements à mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, tous mes amis, pour les nombreuses discussions, pour leur participation à la mise en forme de ce document et à la préparation de la soutenance de Thèse.

ملخص

في هذه الدراسة ، تم أخذ الصفائح المستطيلة المكونة من عدة طبقات في الحسبان وتم اختبار نموذج بسيط جيبي لتشوه القص العرضي البسيط لتحليل سلوكها الانحناء ، لانبعاج واهتزاز . يحتوي النموذج على أربعة عدد من المجاهيل التي هي في المقابل خمسة في نظرية الاولى و نظريات ترتيب عالي. في علم الحركة المجردة تستخدم مصطلحات عدد صحيح لتعبر كميًا عن تأثير تشوه القص العرضي. في النظرية المقترحة ، تحقق الشروط على الاجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف العلوية و السفلية للصفحة و لا تتطلب معامل تصحيح القص. معادلات الحركة وفق الصيغة المقترحة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي في نسخته الديناميكية. تتم عرض النتائج الرقمية التي تحصلنا عليها من هذا التحليل عبر سلسلة مثليته مزدوجة تم اقتراحها من طرف نافير.

تتم مقارنة الاجهاد والحركة والترددات الطبيعية وقوى التواء الحرجة المحسوبة باستخدام الطريقة الحالية مع البيانات المنشورة الأخرى حيث يتم إبرام اتفاق جيد بين النتائج.

الكلمات المفتاحية: تشوه القص العرضي ، والانحناء ، والانبعاج ، والديناميك ، الصفائح المتقاطعة ، الصفائح الطبقيّة.

Abstract

In the present study, cross ply laminated composite plates are considered and a simple sinusoidal shear deformation model is tested for analyzing their bending ,buckling and dynamic behaviors. The model contains only four unknown variables that are five in the first order shear deformation theory or other higher order models. The in-plane kinematic utilizes undetermined integral terms to quantitatively express the shear deformation influence. In the proposed theory, the conditions of zero shear stress are respected at bottom and top faces of plates without considering the shear correction coefficient. Equations of motion according to the proposed formulation are deduced by employing the virtual work principle in its dynamic version. The analytical solution is determined via double trigonometric series proposed by Navier. The stresses, displacements, natural frequencies and critical buckling forces computed using present method are compared with other published data where a good agreement between results is demonstrated.

Keywords: Shear deformation, bending, buckling, dynamic, cross-ply laminates, laminated plates.

Résumé

Dans la présente étude, on a pris en compte les plaques composites stratifiées croisées et on a testé un simple modèle de déformation par cisaillement sinusoïdal pour analyser leurs comportements en flexion, en flambement et en dynamique.

Ce modèle ne contient que quatre variables inconnues qui étaient cinq dans la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre ainsi que dans d'autres modèles d'ordre supérieur.

La cinématique dans le plan utilise des termes entiers indéterminés pour exprimer quantitativement l'influence de la déformation par cisaillement. Dans la théorie proposée, les conditions de la contrainte de cisaillement nulle sont respectées sur les faces inférieure et supérieure des plaques sans autant tenir compte du coefficient de correction de cisaillement.

Les équations de mouvement selon la formulation proposée sont déduites en utilisant le principe de travail virtuel dans sa version dynamique. La solution analytique est déterminée via une double série trigonométrique proposée par Navier. Les contraintes, les déplacements, les fréquences propres et les forces de flambement critiques calculées à l'aide de la méthode actuelle sont comparés avec d'autres résultats publiés par d'autres chercheurs qui montrent un bon accord entre les différents résultats.

Mots clés: déformation par cisaillement, flexion, flambement, dynamique, stratifiés croisées, plaques stratifiées.

Liste des notations

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y et z,
$\varphi_x, \varphi_y,$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$g(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
E_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice
N	Nombre de couches
h_k	Epaisseur de la kème couche
ω	Fréquence naturelle
N_{cr}	Charge critique de flambement
N_0	Intensité maximale des forces de compression dans le plan
θ_k	Angles des couches
ρ	Densité du matériau
q (x, y)	Charge transversale
qmn	Coefficient d'expansion de Fourier
q0	Intensité maximale de la charge transversale au centre de la plaque
[K]	Matrice de rigidité
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Déplacements non dimensionnels
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	Contraintes normales dans le plan non dimensionnelles

$\overline{\tau_{xz}}, \overline{\tau_{yz}}, \overline{\tau_{xy}}$

Contraintes de cisaillement non dimensionnelles

$\overline{\omega}$

Fréquence non dimensionnelle

Liste des figures

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

Figure I.1: Matériau composite	5
Figure I.2: Types de matrice	5
Figure I.3: Types de renfort	7
Figure I.4: Géométries des renforts	9
Figure I.5: Matériau composite monocouche	10
Figure I.6: Constitution d'un stratifié	11
Figure I.7: Composite sandwichs	12
Figure I.8 : Domaines d'application des matériaux composites	15

CHAPITRE II: Théories des plaques composites stratifiées

Figure II.1: Élément de stratifié	17
Figure II.2 : Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement	19
Figure II.3: Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse	20
Figure II.4: Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse	21
Figure II.5: Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié	23
Figure II.6 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement	24
Figure II.7: Schématisation des moments de flexion et de torsion	24
Figure II.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés	27
Figure II.9 : Plaque soumise à une traction suivant l'axe x	35
Figure II.10 : Cinématique de Reissner-Mindlin	36
Figure II.11 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé	37
Figure II.12: Description de déplacement du modèle Monocouche équivalente (à gauche) et Layer wise	39

Figure II.13 : Introduction de la fonction zig-zag de Murakami dans la distribution linéaire 39

Chapitre III : Etude analytique de la flexion, flambement et vibration d'une plaque stratifiée

Figure III.1: Système de coordonnées et numérotation de couches utilisées 43

Chapitre IV : Résultats et discussions

Figure IV.1 : Répartition de l'épaisseur du déplacement dans le plan (\bar{u}) pour une plaque composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1, a/h = 10$) 62

Figure IV.2 : Effet du rapport de forme (a/h) sur la déviation transversale non dimensionnelle (w) d'une plaque carrée laminée à couches croisées antisymétriques à deux couches soumise à une charge transversale sinusoïdale à ($x=a/2, y=b/2, z=0$).
..... 63

Figure IV.3 : Distribution de l'épaisseur de la contrainte normale dans le plan ($\bar{\sigma}_x$) pour une plaque composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1, a/h = 10$). 64

Figure IV.4 : Répartition de l'épaisseur de la contrainte de cisaillement dans le plan ($\bar{\tau}_{xy}$) pour une plaque composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1, a/h = 10$). 64

Figure IV.5 : Distribution de l'épaisseur de la contrainte de cisaillement transverse pour une plaque composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b = a, a/h = 10$). 65

Figure IV.6 : Distribution de l'épaisseur de la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{xz}$) pour une plaque composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1, a/h = 10$) 65

Figure IV.7 : Plaque simplement supportée soumise à des forces de compression dans le plan..... 66

Liste des tableaux

Liste des tableaux

CHAPITRE I

Tableau I.1	Caractéristiques des résines thermodurcissables	6
Tableau I.2	Caractéristiques des résines thermoplastiques	6
Tableau 1.3	Caractéristiques mécaniques des fibres	9

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	Propriétés matérielles sans dimension de matériau utilisé.....	60
Tableau IV.3	Comparaison des déplacements non dimensionnels et des contraintes pour la plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ / 90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale.....	61
Tableau IV.4	Comparaison de la charge de flambement critique (N_{cr}) pour des plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées sous compression <i>uniaxiale</i> et <i>biaxiale</i> ($a/h = 10$).....	67
Tableau IV.5	Comparaison de la charge de flambement critique (N_{cr}) pour des plaques rectangulaires composites stratifiées composées de quatre couches ($0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) simplement supportées, sous compression uniaxiale et biaxiale.....	68
Tableau IV.6	Comparaison des fréquences propres non dimensionnelles de plaques composites stratifiées carrées simplement appuyées ($a/h = 10$).....	69

Table des matières

Table des matières

ملخص	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des notations	iv
Liste des abréviations	vi
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
Introduction générale.....	1

CHAPITRE I:Généralités sur les Matériaux Composites

I-1. Introduction	4
I-2. Les constituants de base d'un matériau composite	5
I-3. Architecture des matériaux composites	9
I-3-1 Monocouches	9
I-3-2 Stratifiés	10
I-3-3 Les sandwichs	12
I-4. Secteurs d'application des composites	13
I-4-1 Construction aéronautique	13
I-4-2 Construction automobile	13
I-4-3. Secteur du bâtiment	14
I-4-4. Loisirs et sports	14
I-4-5 Autres domaines d'utilisation des composites	15
I-5 Conclusion	16

CHAPITRE II: Théories des plaques composites stratifiées

II-1. Introduction	17
II-2. Modélisation géométrique	17
II-3. Comportement mécanique des matériaux stratifiés	18
II-3-1. Champ des déplacements	18
II-3.1.1 Déformation d'une normale	18
II-3.1.2. Schémas du premier degré (CPT)	19
II-3.2. Champ des déformations	21
II-3.2. Champ des contraintes	21
II-3.3.1. Simplification dans le cadre de la théorie des plaques	22
II-4. Résultantes et moments	23
II-4.1 Résultantes en membrane	23
II.4.2 Résultantes en cisaillement	24
II-4.3 Moments de flexion et de torsion	24
II-5. Modèles de structures multicouches	25
II-5.1. Modèles de monocouche équivalente	26
II.5.1.1 Théorie Classique de Love-Kirchhoff	26
II.5.1.1.1. Champ des déformations	26
II.5.1.1.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés	26
II.5.1.1.1.2 Expression du champ des déformations	27
II.5.1.1.2. Champ des contraintes	29
II.5.1.1.2.1. Forme du champ des contraintes	29
II.5.1.1.2.2 Expression des contraintes	29
II.5.1.1.3. Expressions résultantes et moments	30
II.5.1.1.3.1. résultantes en membrane	30
II.5.1.1.3.2. Résultantes de flexion et de torsion	31
II.5.1.1.4 Équation du comportement mécanique d'un stratifié	32
II.5.1.2 Le modèle classique de Reissner-Mindlin (FSDT, First ordre Shear Deformation Theory).	36
II.5.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	37
II.5.2. Approche par couche (layer wise)	38

II.5.3. Théories Zig-zag.....	39
II.5.4. Approche par développement asymptotique	40
II-6. Conclusion	40

**CHAPITR III: Etude analytique de la flexion, flambement et vibration
d'une plaque stratifiée**

III-1. Introduction	42
III-2. Théorie d'ordre élevé à quatre variables.....	42
III.2.1. Configuration géométrique.....	42
III.2.2. Champ de déplacement de la nouvelle théorie.....	43
III.2.3. Champs des déformations	44
III.2.4. Champs des contraintes.....	45
III 2.5 Équations de mouvement	46
III.2.5.1. Energie de déformation	47
III.2.5.2. Energie cinétique.....	48
III.2.6. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée.....	50
III 2.6.1 Analyse de la flexion pour plaques composites stratifiées	51
III 2.6.2 Analyse de flambement pour plaques composites stratifiées	53
III 2.6.3 Analyse de la vibration pour plaques composites stratifiées.....	55
III-3. Conclusions	58

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV -1. Introduction	59
IV.2. Structure étudiée et matériaux	59
IV.1 Discussion des résultats numériques	60
IV.1 Analyse de flexion des plaques composites stratifiées	60
IV.3.2 Analyse de flambement des plaques composites stratifiées.....	65
IV.3.3 Analyse de vibration libre de plaques composites stratifiées	68
IV.4.Conclusion	70
Conclusion générale	71

Références Bibliographiques 109

Introduction générale

Introduction générale

Les structures en matériaux composites sont de plus en plus utilisées dans de nombreuses industries. Elles sont utilisées pour leurs caractéristiques telles que : la résistance, la rigidité, le poids réduit, les caractéristiques thermiques, leur résistance à la corrosion, à la fatigue et à l'usure.

Les plaques fabriquées avec ces matériaux nécessitent une étude structurelle précise pour prédire le comportement correct en statique et en dynamique.

L'influence de la contrainte de cisaillement transverse est plus importante dans les structures épaisses que dans les structures minces.

Les scientifiques ont donc proposé divers modèles de plaques pour prédire le comportement correct en flexion de structures épaisses. La théorie conventionnelle des plaques (CPT) de Kirchhoff (1850) ne s'applique pas aux structures épaisses en raison de la négligence de la déformation par cisaillement transversal [1-6]. La théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre proposée par Mindlin (1951) n'est pas non plus intéressante pour l'investigation, car elle ne vérifie pas les conditions de contrainte nulle sur les faces supérieure et inférieure de la plaque et nécessite des facteurs de correction du cisaillement [7-18]. Ainsi, de nombreuses théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été proposées pour l'étude des plaques [19-65].

Au cours de la dernière décennie, une nouvelle classe de modèles de plaques a été proposée par des scientifiques dans laquelle la cinématique n'implique que quatre variables. **Shimpi et Patel [66]** sont les premiers à utiliser un modèle de plaque avec deux variables pour la flexion et l'étude dynamique des plaques orthotropes. Ce modèle sera étendu par [67-70] pour l'effet thermo-mécanique sur la réponse à la flexion des plaques à gradation fonctionnelle (FG) en considérant quatre et cinq variables. **Meziane et al. [71]** ont également utilisé cette théorie pour la stabilité et la dynamique de structures en sandwich à gradations exponentielles dans diverses conditions aux limites. **Yahia et al. [72]** ont utilisé cette théorie pour analyser la propagation des ondes dans des plaques à gradient fonctionnel avec porosités. **Draiche et al. [73]** ont présenté une théorie raffinée pour l'analyse de la flexion de

plaques composites stratifiées soutenues par une masse de patch localisée. **Karami et al. [74]** ont utilisé une théorie de gradient de contrainte non locale et une théorie raffinée des plaques à quatre variables pour présenter l'analyse de la propagation des ondes dans des nano-plaques à gradient fonctionnelle (FG) soumises à un champ magnétique dans le plan.

Récemment, une autre nouvelle classe de modèles de plaques a été présentée dans la littérature. Dans ces modèles, des termes entiers indéterminés sont introduits afin de réduire le nombre d'équations de gouvernance [75-86].

Dans le présent travail, on vérifie l'efficacité de la théorie raffinée de la déformation par cisaillement à quatre variables pour l'investigation en stabilité et en dynamique des plaques composites. Des termes entiers indéterminés dans les déplacements dans le plan sont utilisés dans la cinématique du modèle. On prend en compte les influences de la déformation en cisaillement. Le modèle respecte les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces inférieure et supérieure des plaques.

Le modèle ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement. Les équations de mouvement sont déterminées en considérant le principe de travail virtuel.

La solution analytique est trouvée en utilisant une méthode de double série trigonométrique proposée par Navier. Enfin, les résultats calculés à l'aide du modèle actuel sont comparés aux solutions d'élasticité exactes décrites par **Pagano [87]** pour la flexion, **Noor [88]** pour dynamique et **Noor [89]** pour l'analyse de flambement des plaques composites stratifiées.

La thèse débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en donnant une vision assez large des principaux constituants, à savoir les résines, les renforts et leurs propriétés mécaniques, en particulier les matériaux composites structuraux. Dans ce chapitre, on définit le domaine d'application et la diffusion de ces matériaux dans les différents secteurs de construction.

L'objectif du deuxième chapitre est de présenter la théorie classique des plaques stratifiées, permettant de mettre en évidence leur champ de déplacement, de déformation et

leur comportement .Ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques composites. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie, faisant chaque fois le recours à leurs descriptions authentiques fondées sur des théories antérieures. L'évaluation de la performance et de l'efficacité numériques de ces contributions demeurent dans un cadre général de comparaison.

Le troisième chapitre est consacré à une étude analytique très importante pour le domaine de la conception des structures composites. Il s'agit du comportement statique et dynamique des plaques stratifiées simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables.

Dans le quatrième chapitre, on a présenté et commenté les résultats numériques obtenus par la validation du présent modèle, et on a étudié l'influence de ce dernier sur les contraintes de cisaillement, la charge de flambement et les fréquences propres.

Enfin, ce manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail .

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

Généralités sur les matériaux composites

I-1 Introduction

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite et liberté de formes.

Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à ces propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique et phonique .

Pour certains d'entre eux ou une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases.

Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, constructions civiles, aéronautique et spatiale.

Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

I.2. Les constituants de base d'un matériau composite

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges,
- D'un renfort.

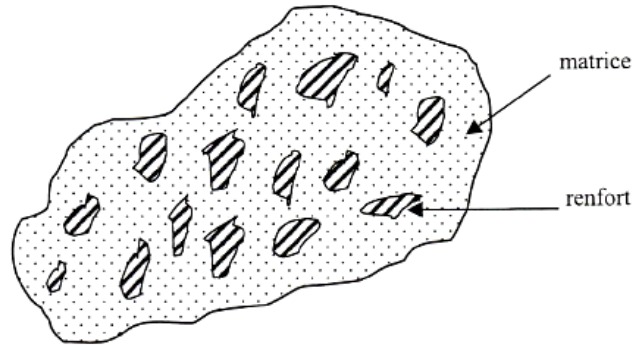


Figure I.1 : Matériau composite [90].

I.2.1. Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation.

Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.2.

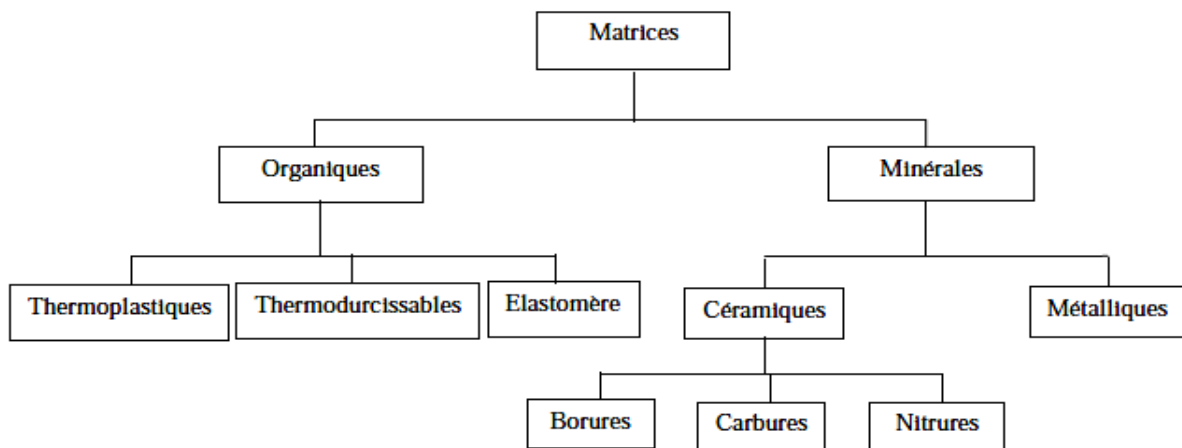


Figure I.2 : Types de matrice.

- **Résines thermodurcissables**

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxydes sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau I.1.

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\epsilon_r^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

Tableau I.1 - Caractéristiques des résines thermodurcissables

- **Résines thermoplastiques**

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques.

Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B. De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau I.2.

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (kg/m ³)	$\epsilon_r^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

Tableau I.2 - Caractéristiques des résines thermoplastiques

- **Additifs**

Des produits peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçantes, ex : charges sphériques creuses 5 à 150µm). Des charges non renforçantes peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine. Des additifs, de type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

I.2.2. Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée.

Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.3.

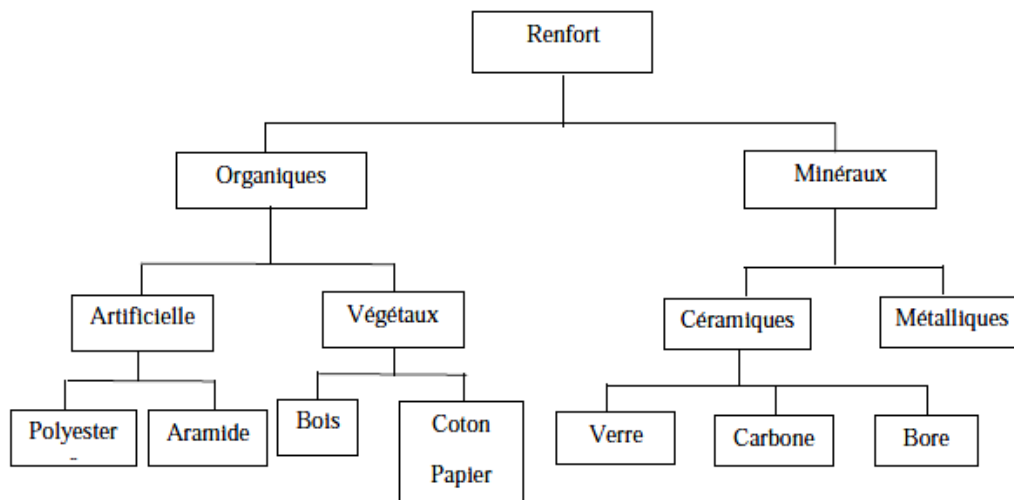


Figure I.3 : Types de renfort

➤ **Les fibres**

Les fibres utilisées se présentent soit sous forme continues (fibres longues), soit sous forme discontinues (fibres courtes).

- **Fibres de verre**

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance–prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites.

- **Fibres de carbone**

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur.

Actuellement, les fibres précurseurs utilisées sont des fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone. Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

- **Fibres aramides**

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbonés mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite.

Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des 4 Résines, fibres et structures stratifiées composites à fibres aramides.

Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis). Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

- **Fibres céramiques**

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C.

Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques : – fibres de Carbure de Silicium – fibres de Bore – fibres de Bore carbure de silicium

➤ **Caractéristiques mécaniques des fibres**

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

renforts	ρ (Kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
AS4	1 800		3 599	235
T300	1 700	1,2	3 654	231
IM6		0,88	1 460	
IM8	1 800		5 171	310
kevlar 49	1 440	2,5	3 620	124
verre E	2 580	3,5	3 450	69

Tableau I.3 - Caractéristiques mécaniques des fibres

➤ **Architecture des fibres**

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent des performances médiocres en compression et en cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts : Les unidirectionnels (1D), Toile ou taffetas, Serge, et Satin.

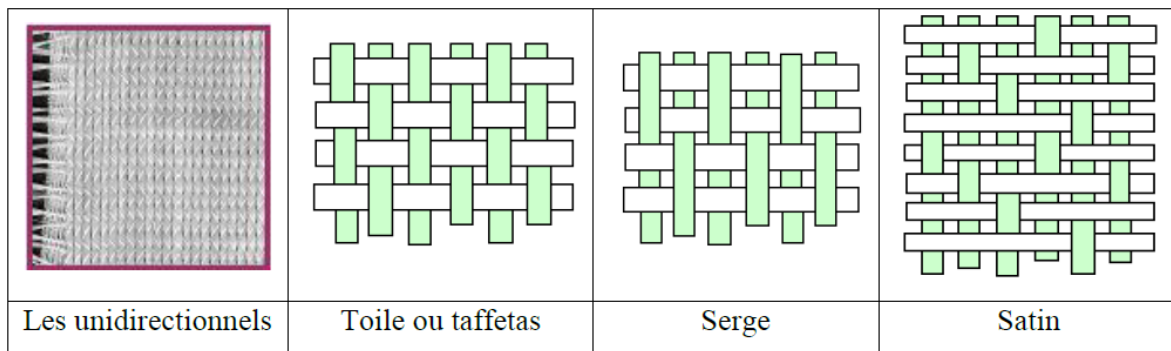


Figure I.4 : Géométries des renforts.

I.3. Architecture des matériaux composites

I.3.1. Monocouches:

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (Figure 1.5). Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, répartie aléatoirement), à fibres tissées fibres courtes,

dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres.

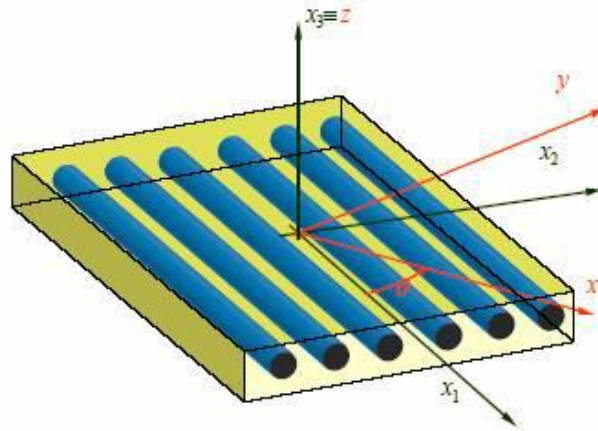


Figure I.5: Matériau composite monocouche.

I.3.2. Stratifiés :

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles.

Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure.

À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la figure I.6, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées.

L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier.

L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).

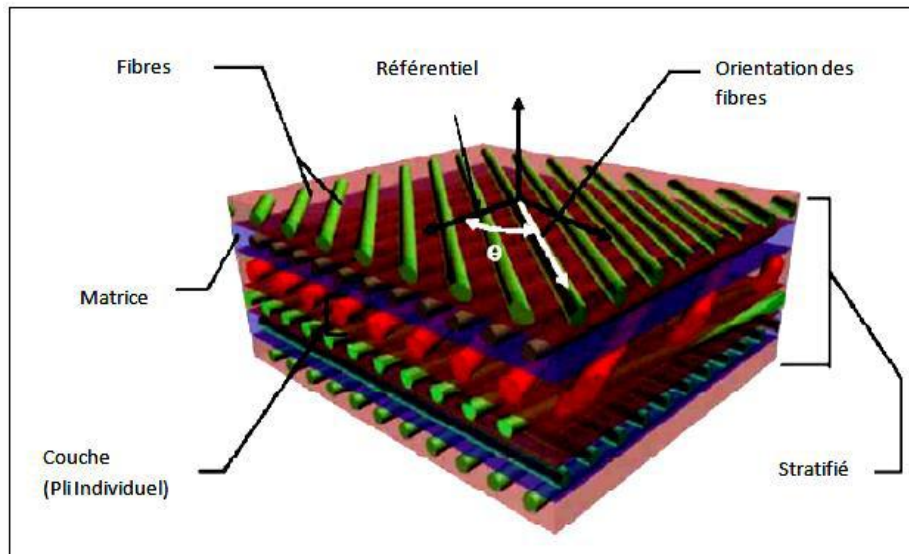


Figure. I.6: Constitution d'un stratifié.

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I.6). Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction θ_+ que de θ_- —couches orientées suivant la direction
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un

stratifié, un stratifié de type $(90^\circ, 0^\circ) 2s$ est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0° , puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90° . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

I.3.3. Les sandwichs

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés : peau et noyau (Figure I.7).

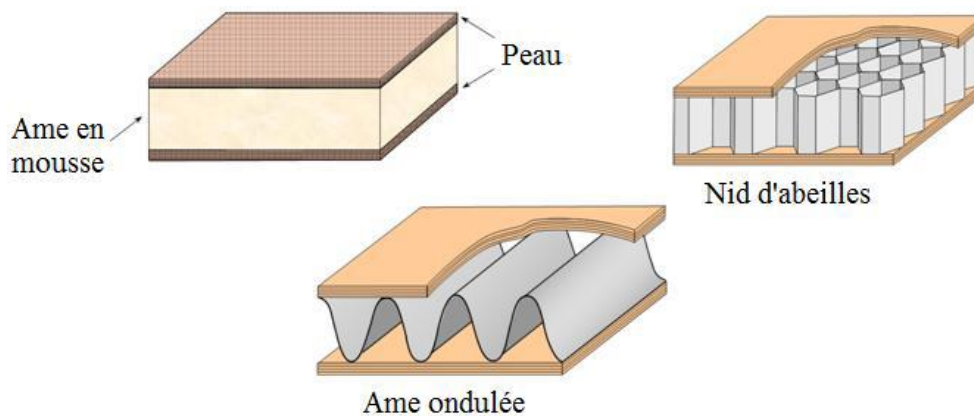


Figure. I.7: Composite sandwichs .

Les propriétés de ce type de matériaux dépendent de celles du noyau et des peaux, de leurs épaisseurs et des caractéristiques de liaison entre elles.

- Le noyau: Il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :
 - Matériaux solide à faible densité : balsa et d'autres types de bois.
 - Matériaux à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles.
 - Matériaux à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.
- La peau: Une large variété des matériaux est utilisée comme peau, par exemple : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane, ... etc.

Le choix des matériaux utilisés comme peau est important du point de vue de l'environnement de travail, car la présente partie entre en contact direct avec ce dernier, [91].

I.4. Secteurs d'application des composites

Les composites sont largement utilisés dans l'industrie, parce qu'ils présentent de bonnes caractéristiques telles la rigidité, légèreté et résistance à des contraintes d'origine mécanique ainsi qu'à celles d'origine thermique.

I.4.1. Construction aéronautique

Le choix des matériaux, tel que l'industrie aéronautique, aérospatiale, automobile, ferroviaire, sports et loisirs, bâtiment, génie civil est toujours un problème complexe où le comportement coût/performance règne en maître.

Les fibres de carbone pour la réalisation de structures bobinées ont été introduites dans le milieu des années 1970 [94] [95]. L'utilisation des matériaux composites dans les constructions aéronautiques entraîne un gain de poids substantiel. Leur emploi permet, à performances égales, des gains de masse variant de 10% à 20%. Le poids de l'avion moyen-courrier Boeing 767 a été réduit, par l'emploi des composites, de 921 kilogrammes par rapport à la solution conventionnelle.

Les matériaux composites sont essentiellement utilisés pour la conception et réalisation des propulseurs à poudre des lanceurs de satellites et de leur tuyère d'éjection des gaz de propulsion, obtenue par bobinage de fibres de verre, de kevlar ou de carbone [96], afin de résister à la pression interne résultant de la combustion du propergol solide et aux efforts de lancement qui, dans certain cas, se traduisent par des chocs et des vibrations.

I.4.2. Construction automobile

L'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisé que très récemment, chez les grands constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) pour développer des coffres et hayons.

La société LOHEAC de transports routiers [97], a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie du poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce renforcés de fibre à haute résistance [98]. Les composites sont choisis pour la conception de ressorts à lames [3].

Ce sont des pièces de suspension routières très sollicitées, utilisées par les véhicules de gros tonnage et dont la lame secondaire, assurant 80% de la fonction suspension en évitant des ruptures brutales. [99].

I.4.3. Secteur du bâtiment

Hormis le béton, les composites ont relativement peu pénétré le secteur du BTP, notamment du fait :

- d'un prix élevé comparé aux matériaux traditionnels (6 €/kg contre 3 €/kg pour l'acier et 1€/kg pour le bois),
- d'une relative méconnaissance des architectes et bureaux d'études vis-à-vis des composites,
- d'un manque d'information sur le cycle de vie (recyclabilité, durabilité). Les qualités des composites (légèreté, résistance au feu, résistance mécanique et chimique), permettent de prévoir un développement prometteur. Les fournisseurs de solutions composites (Acome, Uniject, Gimm Menuiseries, Owens Corning, etc.) ont développé de nombreux produits présentés au salon JEC d'avril 2000 : Fenêtres, Portes, Substituts d'ardoise, Renforts de poutres, ...etc.

I.4.4. Loisirs et sports

De part leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les matériaux composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux articles de sports et de loisirs tel que les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey,.....

Les constructeurs de matériels de sport et loisirs ont depuis longtemps adopté les composites, développés notamment par Shappe Technique et Ems Chimie (Suisse) ; ces nouveaux matériaux leur ont permis de faire preuve d'une grande créativité, tout en présentant des propriétés mécaniques intéressantes qui ont, dans une large mesure, été à l'origine du développement récent des sports de glisse modernes. (skis moulés et non stratifiés). Le Pôle de Plasturgie de l'Est (PPE) à Saint Avold ou du SIAAP (Syndicat Interdépartemental pour

l'Assainissement de l'Agglomération Parisienne) développe des matériaux composites pour leurs équipements de traitement des eaux.

I.4.5. Autres domaines d'utilisation des composites

Les matériels ferroviaires présentent de nombreuses possibilités d'utilisation des matériaux Composites comme le montrent la figure I.5. Les développements récents de l'entreprise allemande d'équipements de trains pendulaires, Comtas (Allemagne), secteur d'excellence où les acteurs européens font maintenant front commun, Le projet de Bombardier-ANF de réaliser des wagons en structure composite.

L'adaptation de composites, dans l'industrie maritime, permet de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motrice moins puissante et moins onéreuse [100].

L'équipement industriel (boîtes de stockage, isolation) et l'équipement électronique, représentent déjà 26% du marché des composites à matrice organique. Le potentiel plurifonctionnel des composites (alliant par exemple étanchéité et propriétés électriques) y est important. En électronique, les boîtiers céramiques pour microprocesseurs d'Egide, récemment introduits au Nouveau Marché, sont utilisés dans le monde entier [110].



Pales d'aérogénérateurs



Aéronautique

Figure I.8 : Domaines d'application des matériaux composites

Les composites jouent un rôle croissant dans le secteur dentaire (implants) et biomédical (matériaux prothésiques), en dépit de fortes contraintes de biocompatibilité, ainsi que dans la réalisation d'instruments de musique (pianos, clavecins, violons et mêmes accordéons).

I.5.Conclusion :

Ce chapitre a fait l'objet de généralités sur les matériaux composites, leurs propriétés physiques et mécaniques, les différents types de matériaux et résines les plus utilisées dans l'industrie. , Par ailleurs, nous avons décrit leur utilisation dans le secteur industriel tel que l'automobile, le sport et l'aéronautique...etc.

Chapitre II

Théories des plaques composites stratifiées

Théories des plaques composites stratifiées

II.1. INTRODUCTION :

Il faut bien noter que le comportement mécanique des structures composites stratifiées n'est pas toujours linéaire jusqu'à la phase ultime de la rupture. En particulier, les empilements constitués de couches désorientées présentent généralement un comportement non linéaire dès que le chargement dépasse une valeur critique à partir de laquelle les dégradations s'accroissent.

Néanmoins, dans une première phase de la conception, la théorie élastique linéaire des plaques stratifiées permet d'effectuer le dimensionnement des structures composites.

De nombreux travaux ont été consacrés à la mise au point de théories de plaques composites multicouches. Ces différentes théories vont d'une théorie quasitridimensionnelle, à la théorie de Love-Kirchhoff. Ce dernier modèle convient lorsque les plaques sont minces.

En revanche, pour des plaques épaisses ou sandwiches, les effets du cisaillement transverse deviennent importants et la théorie de Reissner-Mindlin est plus appropriée.

Dans ce chapitre, on développe, la théorie des stratifiés prenant en compte les effets du cisaillement transverse. Et ensuite on développe la théorie classique des stratifiés qui ne prennent pas en compte les effets du cisaillement transverse. De plus en va étudier l'effet de la séquence d'empilement des couches du stratifié.

II.2. Modélisation géométrique

Les notations utilisées sont reportées sur la Figure II.1. Le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence ($ox oy$) et l'axe oz dirigé dans le sens croissant des numéros des couches.

Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

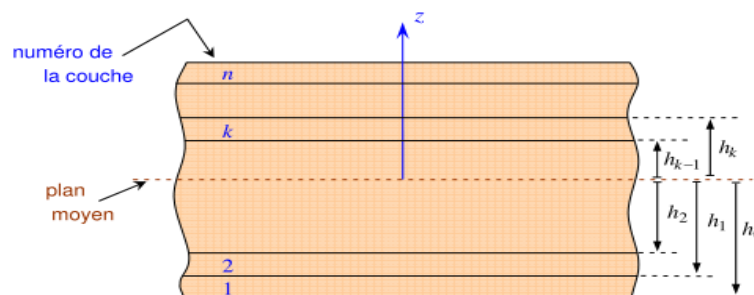


Figure II.1. Élément de stratifié.

II.3. Comportement mécanique des matériaux stratifiés

II.3.1. Champ des déplacements :

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point (M) d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynômes en (z) , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations, et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations (II.1). Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (II.1), en série de la variable (z) à coefficients en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ du plan (Oxy) . Le champ de déplacement du point (M_0) sera noté par la suite suivant l'une des notations :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v_0 &= v_0(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ w_0 &= w_0(x, y, 0) = w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

II.3.1.1 Déformation d'une normale :

Cherchons-la déformée d'une normale AB au plan de la plaque, définie par $(x=a, y=b)$ (figure II.2). Tout point M appartenant à la normale AB à pour coordonnées (a, b, z) et son déplacement s'écrit d'après (3.1) :

$$\begin{aligned} u_0(a, b, z) &= u_0(a, b) + z\varphi_x(a, b) + z^2\psi_x(a, b) + z^3\phi_x(a, b) \\ v_0 &= v_0(x, y, 0) = v_0(x, y) + z\varphi_y(a, b) + z^2\psi_y(a, b) + z^3\phi_y(a, b) \\ w_0 &= w_0(x, y, 0) = w_0(x, y) + z\varphi_z(a, b) + z^2\psi_z(a, b) + z^3\phi_z(a, b) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

L'équation de la déformée de la normale AB s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en z :

$$\begin{aligned}
 u(a,b,z) &= A_u + zB_u + z^2C_u + z^3D_u \\
 v(a,b,z) &= A_v + zB_v + z^2C_v + z^3D_v \\
 w(a,b,z) &= A_w + zB_w + z^2C_w
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale AB subit donc :

- une translation sans déformation suivant A'B', composée d'une translation [$A_u = u(a,b,z)$, $A_v = v(a,b,z)$], dans le plan (Oxy) et d'une translation [$A_w = w(a,b,z)$] suivant l'axe Oz;
- puis une déformation suivant A''B'', exprimée par les termes en z et dont la forme dépend du degré en z. Le champ des déplacements (II.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque.

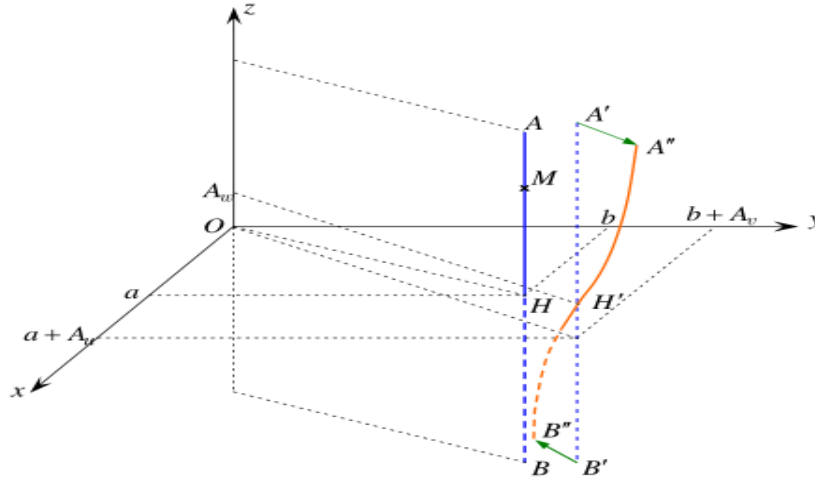


Figure II.2. Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement.

II.3.1.2. Schémas du premier degré (CPT) :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchhoff) pour décrire le comportement des plaques se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y), \\
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y), \\
 w(x,y,z) &= w_0(x,y),
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale AB est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(a,b,z) &= A_u + zB_u \\
 v(a,b,z) &= A_v + zB_v \\
 w(a,b,z) &= A_w
 \end{aligned}
 \tag{II.6}$$

La déformée A"B" reste dans ce cas un segment de droite : les points situés sur une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

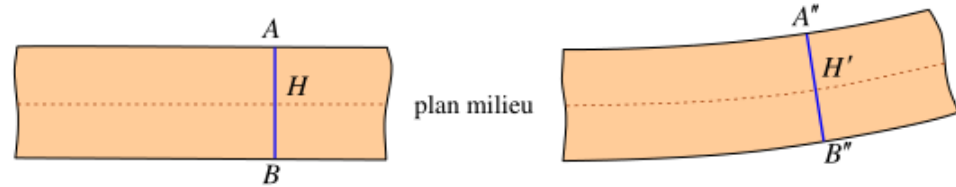


Figure II.3. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse.

Une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation reste sur un segment de droite au cours de la déformation. De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte (théorie classique de stratifié), les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen (figure II.3).

Dans ce cas, la déformée en H (déformée du plan (Oxy) et déformée de la normale AB) pourra être caractérisée (figure II.4) par :

- Les déplacements du point H: déplacement dans le plan (Oxy) [$A_u = u(a, b, z)$, $A_v = v(a, b, z)$], et déplacement transverse [$A_w = w(a, b, z)$]
- les rotations θ_x et θ_y autour des directions \vec{i} et \vec{j} .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles β_x et β_y (figure II.4), reliés à θ_x et θ_y par :

$$\beta_x = -\theta_y, \beta_y = \theta_x \quad (\text{II.7})$$

Un schéma du premier degré permet de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il serait alors nécessaire de considérer un schéma du deuxième ordre, voire du troisième ordre.

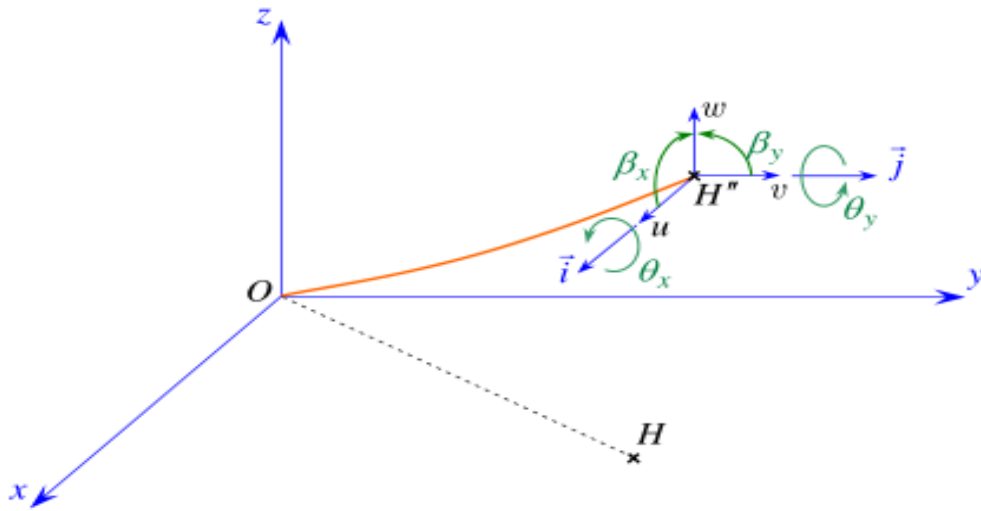


Figure II.4. Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse.

II.3.2. Champ des déformations :

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (II.4). Le champ des déformations se déduit par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

II.3.3. Champ des contraintes :

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes $(Oxyz)$ du stratifié. L'état des contraintes en un point (M) du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations. Si le point (M) appartient à la couche (k) du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C_{66}} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Où (C_{ij}) sont les coefficients de rigidité de la couche (k).

Il en résulte que les contraintes dans la couche (k) sont des polynômes en (z). La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y). La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments, exercés sur la plaque.

II.3.3.1. Simplification dans le cadre de la théorie des plaques :

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales (σ_{zz}) sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}).

Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique. Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée. L'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des déformations ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , γ_{xy} correspond à l'état de contraintes planes, les contraintes dans la couche (k) s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité $\overline{Q_{ij}}$ suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Avec $\varepsilon_{33} = -\frac{1}{C_{33}}(\overline{C}_{13}\varepsilon_{11} + \overline{C}_{23}\varepsilon_{22} + \overline{C}_{36}\varepsilon_{12})$ (II.12)

Les coefficients \overline{Q}_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche(k). La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

II.4. Résultantes et moments :

II.4.1 Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté N(x, y), est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2_1}^{h/2} \sigma_x(M) dz \quad (\text{II.13})$$

Où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$) dans la couche(k).

Soit ;
$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \int_{-h/2_1}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.14})$$

Les composantes (N_x, N_y, N_{xy}) sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y). Elles sont schématisées symboliquement sur la figure II.5.

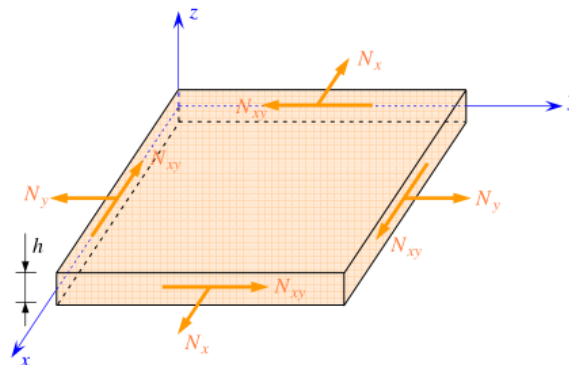


Figure II.5. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

II.4.2 Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.15})$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure (II.6).[90]

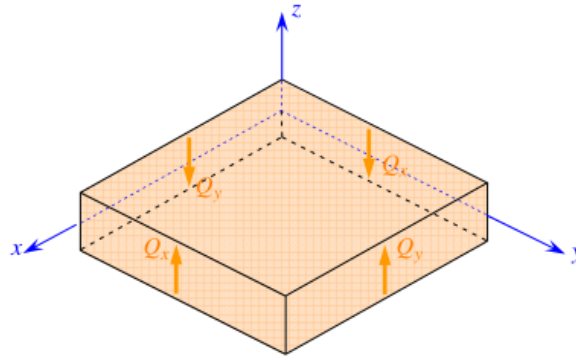


Figure II.6. Représentation schématique des résultantes de cisaillement.

II.4.3 Moments de flexion et de torsion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

Les composantes (M_x) et (M_y) sont les moments de flexion suivant les directions (x et y), respectivement, et la composante (M_{xy}) est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure II.7.

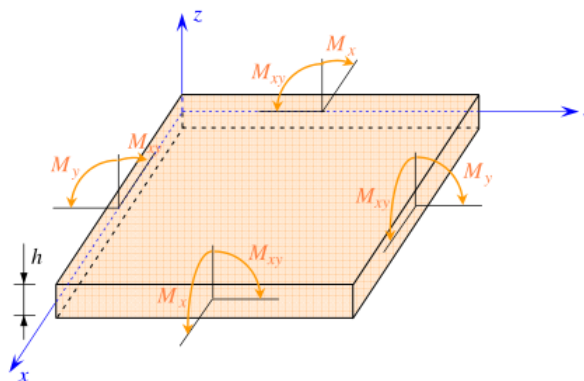


Figure II.7. Schématisation des moments de flexion et de torsion.

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (\text{II.16})$$

II.5. Modèles de structures multicouches

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. L'intérêt de la considération d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toute fois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles établies peuvent être résolues.

L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée de certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [111], [112].

De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse, . . .) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. Pour cette raison, une approche 3D peut fournir des informations dans certaines conditions (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires.

Dans la suite ce sont ces approches (2D) qui seront prises en considération.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models)
- Approche par couche LW (Layer-wise).
- Approche par Théories Zig-zag.
- Approche développement asymptotique.

II.5.1. Modèles de monocouches équivalentes

Dans la famille des modèles de monocouches équivalentes on peut citer :

- Le modèle classique de Love-Kirchhoff
- Le modèle de Reissner-Mindlin
- Les modèles d'ordre supérieur

II.5.1.1 Théorie Classique de Love-Kirchhoff (CLT, classic lamination theory):

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "classique" de plaque. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée Fig.II.9. Donc la déformation dite de "cisaillement transverse" est supposée nulle [H. Kraus] et les effets dus à l'effort tranchant négligés. Ce modèle concerne les plaques minces et ne présentant pas trop de gradient de propriété dans l'épaisseur (ce modèle ne s'applique pas aux sandwichs à âme souple par exemple).

II.5.1.1.1. Champ des déformations :

a- Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (II.7). Elle suppose ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse.

Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Cette hypothèse implique, d'après (II.8) :

φ_x et φ_y qui sont la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (II.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen (paragraphe II.3.2 et figure II.3). L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure II.8.

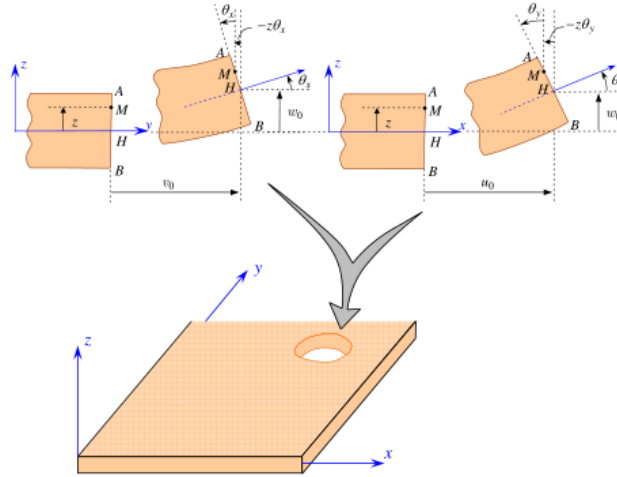


Figure II.8. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

b-Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, d'après (II.9) et en tenant compte des expressions (II.18):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= 0 \\
 \gamma_{yz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.20}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{II.21}$$

Et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la coté (z) du point (M). Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(M) \quad (\text{II.25})$$

En posant :

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_x \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

II.5.1.1.2. Champ des contraintes :

a. Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (II.8). Dans le cadre de la théorie

classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \overline{Q_{11}}\varepsilon_{xx} + \overline{Q_{12}}\varepsilon_{yy} + \overline{Q_{16}}\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \overline{Q_{12}}\varepsilon_{xx} + \overline{Q_{22}}\varepsilon_{yy} + \overline{Q_{26}}\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= \overline{Q_{16}}\varepsilon_{xx} + \overline{Q_{26}}\varepsilon_{yy} + \overline{Q_{66}}\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Le tenseur des contraintes en M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} .

b- Expression des contraintes

Les relations (II.26) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \overline{Q}_K \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$\overline{Q}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k$$

En tenant compte de (II.25), les contraintes dans la couche (k) s'expriment de la manière suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_x \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^K = [\overline{Q}]^K \{\varepsilon^0\} + z [\overline{Q}]^k \{k\} \quad (\text{II.32})$$

La matrice $\{\sigma\}^K$ représente la matrice des contraintes dans la couche $k : h_{k-1} \leq z \leq h$.

La matrice de rigidité réduite $[\overline{Q}_{ij}]^k$ varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

II.5.1.1.3. Expressions résultantes et moments

a- Résultantes en membrane

L'expression (II.14) associée à la relation (II.31) ou (II.32) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left[[\overline{Q}]^K \{\varepsilon^0\} + z [\overline{Q}]^k \{k\} \right] dz \quad (\text{II.33})$$

Soit :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]^K \{\varepsilon^0\} \int_{h_{n-1}}^{h_n} dz + \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]^k \{k\} \int_{h_{n-1}}^{h_n} z dz$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h^2_k - h^2_{k-1}) \{k\}$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + Bk(x, y)$$

Dont les coefficients (A_{ij}) sont appelés les rigidités de membrane :

$$A = [A_{ij}] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{II.34})$$

Et Les coefficients (B_{ij}) sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$B = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h^2_k - h^2_{k-1}) \quad (\text{II.35})$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

b-. Résultantes de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (II.30) des contraintes dans l'expression (II.14). Soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z^2 [\bar{Q}]^k \{k\} dz$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h^2_k - h^2_{k-1}) \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h^3_k - h^3_{k-1}) \{k\} \quad (\text{III.37})$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = B\varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = [D_{ij}] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h^3_k - h^3_{k-1}) \{k\} \quad (\text{II.38})$$

Dont les coefficients D_{ij} sont appelés les rigidités de flexion.

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

II.5.1.1.4 Équation du comportement mécanique d'un stratifié

a- Équation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.34) et (II.37) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{yz} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Les termes des matrices introduites A, B et D sont donnés par les expressions (II.34), (II.35) et (II.36). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur (h_k) et la cote (z_k) du centre de la couche k, sous la forme :

$$[A] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k \quad (\text{II.42})$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k z_k \quad (\text{II.43})$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left(e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12} \right) \quad (\text{II.44})$$

Les coefficients (A_{ij} , B_{ij} , D_{ij}) de l'équation constitutive (II.40) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche.

b- Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux

Pour une couche orthotrope, d'épaisseur (h), dont les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur

la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Où les constantes de la matrice de rigidité Q_{ij} sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}, \quad Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}, \quad Q_{66} = G_{LT}, \quad (\text{II.45})$$

En fonction des modules : (E_L) et (E_T) les modules d'Young longitudinal et transversal, (ν_{LT}) le coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction longitudinale et (G_{LT}) le module de cisaillement mesuré dans le plan de la couche. L'équation constitutive de la plaque s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{yz} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= Q_{11}h & D_{11} &= Q_{11} \frac{h^3}{12} \\
A_{12} &= Q_{12}h & D_{12} &= Q_{12} \frac{h^3}{12} \\
A_{22} &= Q_{22}h & B_{ij} &= 0 \\
A_{16} &= A_{16} = 0 & D_{22} &= Q_{22} \frac{h^3}{12} \\
& & D_{16} &= D_{16} = 0
\end{aligned} \tag{II.47}$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures. Les équations de mouvement sont ensuite obtenues en reportant l'équation constitutive (II.44) du stratifié dans les relations fondamentales des plaques. Ces équations de mouvement s'écrivent :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{II.48}$$

$$A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \tag{II.49}$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \tag{II.50}$$

Où (q) est la charge de pression exercée sur le stratifié.

c- Couche orthotrope non rapportée à ses axes

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope ne coïncident pas avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{II.51}$$

Où les coefficients \bar{Q}_{ij} hors axes en fonction des coefficients Q_{ij} dans les axes du matériau.

Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

L'équation constitutive de la plaque orthotrope s'écrit donc :

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij}h \quad B_{ij} = 0 \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} = A_{ij} \frac{h^2}{12} \tag{II.52}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les résultantes normales (N_x, N_y) dépendent des déformations axiales $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0$ ainsi que de la déformation en cisaillement ε_{xy}^0 .

Il existe donc dans ce cas un couplage traction-cisaillement.

De la même manière, les composantes des moments dépendent toutes des courbures en flexion (κ_x, κ_y), et de la courbure en torsion (κ_{xy}).

Il existe donc également un couplage flexion torsion. Le couplage traction-cisaillement peut être illustré en appliquant un déplacement ($u, 0, 0$) à une plaque orthotrope dont la direction (L) fait un angle (θ) avec l'axe de référence des déplacements (figure II.9).

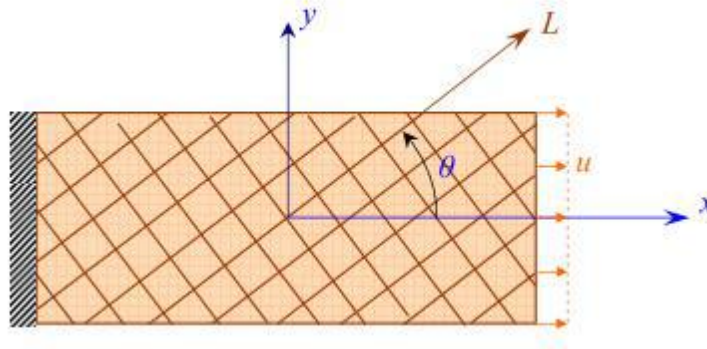


Figure II.9 : Plaque soumise à une traction suivant l'axe (x).

Les équations de mouvement (II.49) à (II.50) sont alors modifiées suivant :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.54})$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.55})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.56})$$

II.5.1.2 Le modèle classique de Reissner-Mindlin (FSDT, First ordre Shear Deformation Theory).

Pour introduire les effets dus au cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Fig. II.10).

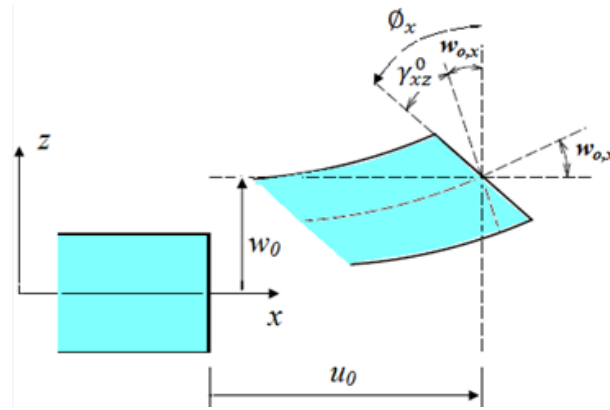


Figure II.10 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

Avec: φ_x , φ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (figure II.8), de tel sorte que :

$$\varphi_x = \gamma_{xz}^{(0)} + w_{0,x}, \varphi_y = \gamma_{yz}^{(0)} + w_{0,y} \quad (\text{II.58})$$

Où $\gamma_{xz}^{(0)}, \gamma_{yz}^{(0)}$ les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen. Ainsi on introduit la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte ces effets de cisaillements transverses.

En 2000, Choa [113] a comparé l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier d'ordre et celle déduite des équations d'équilibres de façon à obtenir des facteurs de corrections entre FSDT.

II.5.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Ces coefficients correcteurs dépendent du nombre de couches, des stratifications présentes dans le composite et du chargement. Ils sont donc difficiles à maîtriser pour du calcul de structure. Pour améliorer cela, des auteurs ont proposé des théories d'ordre supérieur ou les champs membranaires dans l'épaisseur sont non linéaires (Fig. II.11).

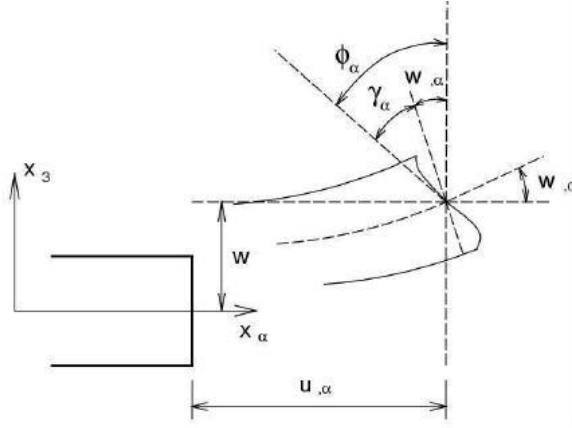


Figure II.11 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie tridimensionnelle. Le déplacement est donc supposé sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Cependant, pour augmenter la précision de la théorie, le nombre de degrés de liberté doit être croissant. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées.

Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". La forme du déplacement suivant l'épaisseur proposée est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) + f(z)\gamma_{yz}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur:

- L'approche d'Ambartsumyan donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.61})$$

- L'approche de Reissner [114] exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.62})$$

- L'approche de Reddy [115], La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.63})$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

O. Polit et M. Touratier proposent la forme "sinus" pour la fonction de cisaillement $f(z)$.

Cette fonction est exprimée sous forme trigonométrique sinusoïdale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit donc :

- L'approche de Touratier avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.64})$$

II.5.2. Approche par couche (layer wise)

Cette dernière remarque permet la transition avec les approches par couche (layer wise) [Reddy]. Si la réponse précise de chaque couche est nécessaire, si des gradients importants de déplacement et de contraintes entre les couches existent, comme c'est le cas pour les phénomènes locaux, les effets de bord, les sandwiches, alors une description plus raffinée et "par couche" des champs devient indispensable.

Cette approche augmente le nombre d'inconnues ainsi que la complexité de l'analyse. Les équations sont écrites pour chaque couche constitutive alors que les conditions d'interface sur le déplacement et la contrainte transversale sont présentées comme des contraintes supplémentaires. Ces exigences de l'interface peuvent être plus commodément imposées si les valeurs d'interface sont utilisées directement comme contraintes transverses et déplacements inconnus. Un exemple de descriptions LW a été tracé, voir la figure II.12.

A noter que le type et le degré d'expansion dans chaque couche peuvent être indépendants et que des conditions de continuité sont demandées à l'interface entre deux couches adjacentes.

Les modèles LW proposent ainsi une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur et zig-zag, une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale.

Mais le nombre de degrés de liberté dépend du nombre de couches de la plaque composite.

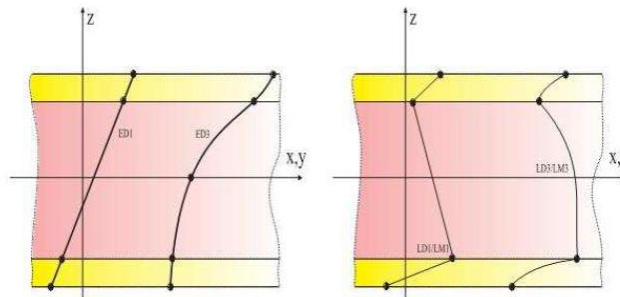


Figure II.12. Description de déplacement du modèle Monocouche équivalente (à gauche) et Layer wise.

II.5.3. Théories Zig-zag

Pour les modèles monocouches équivalentes, le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches. Une autre piste de développement concerne l'utilisation de modèles dans lesquels on introduit une fonction qui rend compte des perturbations des champs de déplacement aux interfaces.

Cela permet d'affiner les modèles (ESL) en gardant un nombre d'inconnues indépendant du nombre de couches. Ces modèles sont connus sous l'appellation Zig-Zag [E. Carrera][116].

Le déplacement reste continu suivant l'épaisseur. Cependant, la pente de la fonction de déplacement de chaque couche est différente. Ce changement en forme de Zig-Zag entre deux couches adjacentes parfaitement collées prétend rendre compte de la différence de dé des couches. Le modèle le plus connu est celui de [Murakami][117] qui sera décrit plus loin et illustre bien la méthode. (Voir figure II.13).

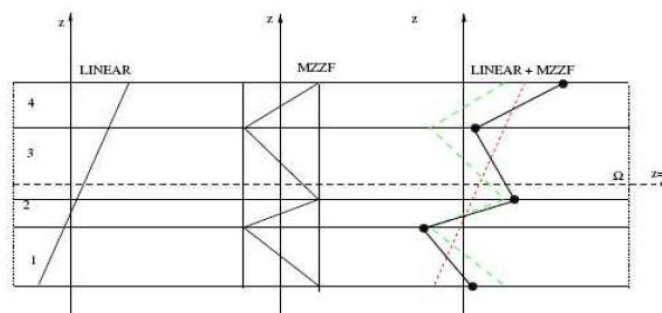


Figure II.13. Introduction de la fonction zig-zag de Murakami dans la distribution linéaire.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'épaisseur diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis.

La continuité de type $C1$ de la théorie zig-zag complique leur implémentation numérique. De plus, la justification physique de cette unique fonction $f(z)$ est loin d'être évidente.

II.5.4. Approche par développement asymptotique

La technique de développement asymptotique est appliquée à des structures à priori peu épaisses c'est à dire quand le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est très petit, quand l'épaisseur tend vers zéro [L.E. Aghalovyan][118].

Le développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équation de mouvement).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite).

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [Duc Thai Nguyen][119].

II.6. Conclusion

Ce chapitre est consacré à la modélisation des structures composite multicouches et l'acquisition des connaissances sur les différentes approches et modèles théoriques. On a présenté les modèles les plus rencontrés dans la littérature et qui se basent sur la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque

dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

Chapitre III

**Etude analytique de la flexion, flambement
et vibration d'une plaque stratifiée.**

Etude analytique de la flexion, flambement et vibration d'une plaque stratifiée.

III.1. Introduction

Dans cette analyse, nous proposons l'utilisation de la théorie raffinée pour les analyses analytique de la flexion, flambement et de vibrations des plaques en composites stratifiées en utilisant une fonction de gauchissement sinusoïdale.

La nouveauté de cette analyse est de créer des formules analytique sous forme de double séries trigonométrique . Les équations du mouvement dérivent du principe de Hamilton.

Les solutions mathématique pour les plaques en composites stratifiées croisées antisymétriques et simplement appuyées sont déterminées en utilisant la technique de Navier.

Les résultats obtenus par la présente analyse sont comparés avec des solutions dérivées d'autres modèles connus de la littérature.

III.2. Théorie d'ordre élevé à quatre variables

L'étude de la réponse statique et dynamique des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables est un travail de recherche très intéressant. La présente théorie identifiée la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Les équations du mouvement sont dérivées de principe d'Hamilton.

La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des structures en plaques composites stratifiées antisymétriques à couches croisés.

Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

III.2.1. Configuration géométrique

Prenons une plaque rectangulaire des côtés(a) et (b), une épaisseur constante (h) et une origine (o), comme le montre la Figure III.1. La plaque consiste en un nombre (n) de couches homogènes parfaitement liées et constituées d'un matériau linéairement élastique et orthotrope. La plaque occupe la région $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ dans le système de coordonnées cartésien. Une charge transversale $q(x, y)$ est appliquée sur la surface supérieure

de la plaque.

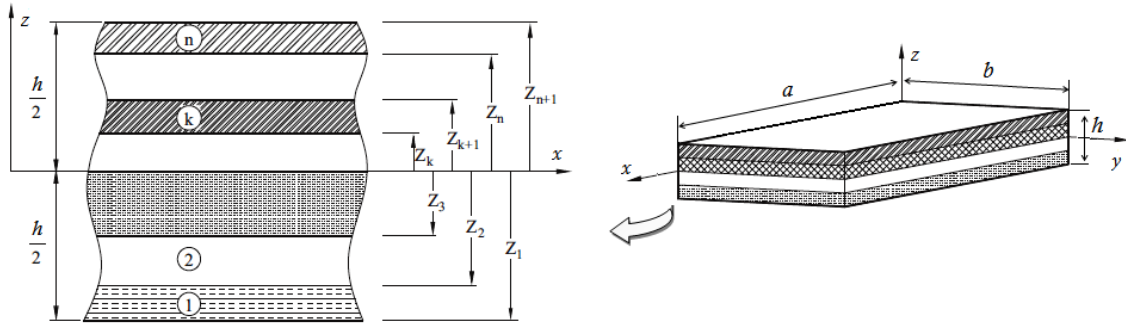


Figure III.1 : Système de coordonnées et numérotation de couches utilisées

III.2.2. Champ de déplacement de la nouvelle théorie

Dans la théorie raffinée des plaques déformables par cisaillement, le champ de déplacement en un point de la plaque stratifiée est exprimé par [120]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

où :

- u, v et w : sont les déplacements le long des directions $(x, y$ et $z)$, respectivement;
- u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y : sont cinq fonctions de déplacement inconnues du plan moyen de la plaque.

En supposant que $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$, $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$ et, le champ de déplacement de la présente théorie peut être réécrit avec quatre inconnues est exprimé par [121-129].

:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

Il est clair que $\theta(x, y)$ est un terme mathématique permettant d'obtenir les rotations de la normale au médium par rapport aux axes (x et y). Les constantes (k_1) et (k_2) dépendent de la géométrie et $f(z)$ désigne une fonction de forme déterminant les variations de la contrainte de cisaillement transverse et de la répartition des contraintes le long de l'épaisseur de la plaque et est défini comme (Touratier 1991).

$$f(z) = \left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.3})$$

III.2.3. Champs des déformations

Selon le champ proposé, la déformation transverse normale est encore nulle (ε_z). Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (III.1) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5a, 5b, 5c})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5d})$$

et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.6})$$

Les intégrales utilisées dans les relations ci-dessus doivent être résolues par une solution Navier et peuvent être exprimées par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

où les paramètres (A') et (B') sont définis en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas par Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.8})$$

où (α) et (β) sont définis dans l'expression (III.22).

III.2.4. Champs des contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un stratifié peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où : ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) et ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. les coefficients de rigidité Q_{ij} , sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (\text{III.10a})$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (\text{III.10b})$$

Etant donné que le matériau stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes avec leurs axes orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées de stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié (x, y, z).

Les relations constitutives pour n'importe quelle couche(k) d'un matériau stratifié dans le

système de coordonnées (x, y) , correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité réduite (Q_{ij}) sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.11})$$

où (\bar{Q}_{ij}) sont les constantes matérielles transformées de la kème couche orthotrope exprimées par:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^k &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{16}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{22}^k &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{26}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta_k + \sin^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{44}^k &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k \\ \bar{Q}_{45}^k &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \bar{Q}_{55}^k &= Q_{55} \cos^2 \theta_k + Q_{44} \sin^2 \theta_k \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où (θ_k) est l'angle des axes des matériaux avec les axes des coordonnées de référence de chaque strate et où Q_{ij} sont définis les coefficients de rigidité dans le plan réduits en contraintes, définis en termes de constantes d'ingénierie dans les axes des matériaux de la couche.

La théorie des plaques a pour objectif de simplifier le problème à trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y) . La réduction du problème est obtenue par intégration suivant l'épaisseur. Cette intégration conduite à introduire les résultants qui seront définis prochainement.

III 2.5 Équations de mouvement

Les équations principales et les conditions aux limites de la théorie actuelle de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur sont dérivées du principe du travail virtuel. Le principe du travail virtuel est appliqué sous la forme analytique suivante [130-146] :

$$\delta \int_{T1}^{T2} (U - V - T) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où U est l'énergie de déformation et T est l'énergie cinétique de la plaque composite et V est l'énergie potentielle.

III.2.5.1. Energie de déformation

L'énergie de déformation totale de la plaque peut être réécrite sous la forme :

$$\delta U = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \quad (\text{III.14})$$

Où (A) est l'aire de la surface supérieure de la plaque. Substitution des expressions pour les contraintes et les contraintes virtuelles dans le principe du travail virtuel et intégration de l'équation. (III.14) par parties et en recueillant les coefficients et on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes en termes de contraintes résultantes:

$$\begin{aligned} \delta U = & \left[\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v - \left(\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right) \delta w_b \right. \\ & \left. + \left(k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + K_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + K_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial Q_x^s}{\partial x} + K_2 B' \frac{\partial Q_y^s}{\partial y} \right) \delta \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Les résultantes des contraintes par unité de longueur (N), (M) et (Q) des couches totales de la plaque sont définies par : les résultantes de contrainte (N_x, N_y, N_{xy}), (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b), (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) et (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s), et sont définis comme suit:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz, \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Ou sous forme contractée :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{array} \right\} \quad (III.17a)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} \quad (III.17b)$$

Où les rigidités de la plaque $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ et A_{ij}^s sont définies comme suit:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (III.18a)$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (III.18b)$$

III.2.5.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la plaque est définie comme :

$$\delta T = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dA dz = 0 \quad (III.19)$$

Où (A) est l'aire de la surface supérieure de la plaque, (ρ) la densité du matériau.

III.2.5.2. Energie potentielle

La variation de l'énergie potentielle du chargement appliqué q et la charge de flambement est donnée par :

$$\delta V = - \sum_{k=1}^N \int_A q(x, y) \delta w dA + \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w dA \quad (III.20)$$

$q(x, y)$ et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont les charges appliquées transversalement dans le plan,

le (δ) symbole désigne l'opérateur variationnel.

Substitution des expressions pour les contraintes et les contraintes virtuelles dans le

principe du travail virtuel et intégration de l'équation. (III.19) et (III.20) par parties et en recueillant les coefficients de $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0 \text{ et } \delta \theta)$, on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes en termes de contraintes résultantes:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{III.21a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + k_2 B' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \quad (\text{III.21b})$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + k_1 A' I_4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' I_4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \quad (\text{III.21c})$$

$$\delta \theta : k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} = -I_3 \left(k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_5 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \quad (\text{III.21d})$$

où (∇^2) est l'opérateur laplacien dans le système de coordonnées cartésien à deux dimensions et. Les constantes d'inertie I_i ($i = 0, 2, 3, 4, 5$) sont définies par les équations suivantes:

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz \quad (\text{III.22})$$

En substituant les résultantes de stress en termes de variables de déplacement inconnues à partir de l'équation. (III.21) dans l'Eq. (III.17), les équations de mouvement de la présente théorie peuvent être réécrites comme suit:

$$\delta u_0 : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{III.23a})$$

$$\delta v_0 : (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + k_2 B' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + k_2 B' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \quad (\text{III.23b})$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
 & + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \\
 & + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\
 & + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \\
 & - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \tag{III.23c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta : & -k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (k_2 B' (E_{12} + E_{66}) + k_1 A' E_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
 & - k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
 & + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - 2k_1 A' k_2 B' (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - 2((k_1 A')^2 + k_1 A' k_2 B') H_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} \\
 & - (k_2 B')^2 H_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} - 2((k_2 B')^2 + k_1 A' k_2 B') H_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} - 2((k_1 A')^2 + (k_2 B')^2) H_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_2 B')^2 A_{s44} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 & + 2k_1 A' k_2 B' A_{s45} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + (k_1 A')^2 A_{s55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -I_3 \left(k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\
 & - I_5 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \tag{III.23d}
 \end{aligned}$$

III.2.6. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée

L'approche Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour l'analyse de flexion, de flambement et de vibration libre des plaques composites stratifiées rectangulaires simplement supportées. Les conditions aux limites suivantes simplement prises en charge aux quatre appuis sont données par:

$$u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (y = 0, b) \tag{III.24a}$$

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (x = 0, a) \tag{III.24b}$$

III 2.6.1 Analyse de la flexion pour plaques composites stratifiées

En suivant la technique de solution de Navier, les équations qui régissent les plaques composites stratifiées simplement supportées en cas d'analyse de flexion sont obtenues en éliminant les charges de compression dans le plan ($N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$) et les termes d'inertie I_1, I_2, I_3, I_4 des équations (III .23).

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \\ & + (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \\ & + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + k_2 B' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\ & + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \\ & + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\ & + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25c})$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta : & -k_1A'E_{11}\frac{\partial^3u_0}{\partial x^3} - (k_2B'(E_{12} + E_{66}) + k_1A'E_{66})\frac{\partial^3u_0}{\partial x\partial y^2} - (2k_1A' + k_2B')E_{16}\frac{\partial^3u_0}{\partial x^2\partial y} - k_1A'E_{16}\frac{\partial^3v_0}{\partial x^3} \\
& - k_2B'E_{22}\frac{\partial^3v_0}{\partial y^3} - k_2B'E_{26}\frac{\partial^3u_0}{\partial y^3} - (k_1A' + 2k_2B')E_{26}\frac{\partial^3v_0}{\partial x\partial y^2} - k_1A'E_{66}\frac{\partial^3v_0}{\partial x^2\partial y} - k_1A'F_{11}\frac{\partial^4w_0}{\partial x^4} \\
& + k_1A'(F_{12} + 2F_{66})\frac{\partial^4w_0}{\partial x^2\partial y^2} + (3k_1A' + k_2B')F_{16}\frac{\partial^4w_0}{\partial x^3\partial y} + k_2B'(F_{12} + 2F_{66})\frac{\partial^4w_0}{\partial x^2\partial y^2} + k_2B'F_{22}\frac{\partial^4w_0}{\partial y^4} \\
& + (k_1A' + 3k_2B')F_{26}\frac{\partial^4w_0}{\partial x\partial y^3} - (k_1A')^2H_{11}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} - 2k_1A'k_2B'(H_{12} + H_{66})\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2} - 2((k_1A')^2 + k_1A'k_2B')H_{16}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^3\partial y} \\
& - (k_2B')^2H_{22}\frac{\partial^4\theta}{\partial y^4} - 2((k_2B')^2 + k_1A'k_2B')H_{26}\frac{\partial^4\theta}{\partial x\partial y^3} - 2((k_1A')^2 + (k_2B')^2)H_{66}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2} + (k_2B')^2As_{44}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \\
& + 2k_1A'k_2B'As_{45}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + (k_1A')^2As_{55}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{III.25d}$$

Les variables de déplacement qui satisfont automatiquement les conditions aux limites ci-dessus peuvent être exprimées dans les séries de Fourier suivantes:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{III.26}$$

Où (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}) et (Φ_{mn}) sont les coefficients de Fourier inconnus à déterminer pour chaque valeur (m, n) , ainsi que les paramètres α et β sont définis comme suit:

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \tag{III.27}$$

La charge transversale $q(x, y)$ est étendue dans la série sinus à double Fourier comme suit:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \tag{III.28}$$

où $q_{mn} = q_0$ pour une charge distribuée de manière sinusoïdale $m = 1, n = 1$ et q_0 est l'intensité maximale de la charge distribuée au centre de la plaque .

Substitution de cette forme de solution de l'équation (III.26) et la charge transversale l'équation (III.28) dans les équations du mouvement (III.25) conduit à la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

où les éléments de la matrice de rigidité [K] sont les suivants:

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\ K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ K_{13} &= -[B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2] \\ K_{14} &= k_1 A' A_{11}^s \alpha^3 + [(k_2 B' A_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') A_{66}^s) \alpha \beta^2] \\ K_{22} &= A_{22}\beta^2 + A_{66}\mu^2 \\ K_{23} &= -[B_{22}\beta^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \beta] \\ K_{24} &= k_2 B' A_{22}^s \beta^3 + [(k_1 A' A_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') A_{66}^s) \alpha^2 \beta] \\ K_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 4D_{66})\alpha^2 \beta^2 + D_{22}\beta^4 \\ K_{34} &= -k_1 A' B_{11}^s \alpha^4 - (k_1 A' + k_2 B')(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2 \beta^2 - k_2 B' B_{22}^s \beta^4 \\ K_{44} &= k_1 A' A_{11}^s \alpha^4 + k_2 B' A_{22}^s \beta^4 + (k_1 A' + k_2 B')(A_{12}^s + 2A_{66}^s)\alpha^2 \beta^2 - k_1 A' A_{55}^{cc} \beta \alpha^2 - k_2 B' A_{44}^{cc} \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

De la solution de l'équation (III .29), on peut obtenir des constantes inconnues et (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}) et (Φ_{mn}) . Après avoir obtenu les valeurs de ces constantes inconnues, on peut ensuite calculer toutes les composantes de déplacement et de contrainte au sein de la plaque à l'aide des équations. (III .2), (III .4) et (III .9). Les contraintes de cisaillement transverses (τ_{xz}, τ_{yz}) sont obtenues en utilisant les relations constitutives $(\tau_{xz}^{CR}, \tau_{yz}^{CR})$ et en intégrant des équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité $(\tau_{xz}^{EE}, \tau_{yz}^{EE})$ pour établir la continuité à l'interface des couches.

III 2.6.2 Analyse de flambement pour plaques composites stratifiées

Dans cette section, une solution analytique pour l'analyse de flambement de la plaque est développée en utilisant la technique de solution de Navier. Les équations qui régissent la plaque en cas de flambement statique sont obtenues en écartant les termes de charge transversale (q) et d'inertie (I_1, I_2, I_3, I_4) de l'équation (III .18).

Dans le plan Les forces de compression (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) représentent désormais des charges plutôt que des forces de réaction, car il n'y a pas de charge transversale.

Les valeurs des forces de compression dans le plan sont prises comme ($N_x^0 = k_1 N_0$), ($N_y^0 = k_2 N_0$) et ($N_{xy}^0 = 0$). Les équations qui régissent le flambement statique sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \\ & + (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.31a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \\ & + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + k_2 B' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.31b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\ & + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \\ & + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\ & + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.31c})$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta : & -k_1A'E_{11}\frac{\partial^3u_0}{\partial x^3} - (k_2B'(E_{12} + E_{66}) + k_1A'E_{66})\frac{\partial^3u_0}{\partial x\partial y^2} - (2k_1A' + k_2B')E_{16}\frac{\partial^3u_0}{\partial x^2\partial y} - k_1A'E_{16}\frac{\partial^3v_0}{\partial x^3} \\
& - k_2B'E_{22}\frac{\partial^3v_0}{\partial y^3} - k_2B'E_{26}\frac{\partial^3u_0}{\partial y^3} - (k_1A' + 2k_2B')E_{26}\frac{\partial^3v_0}{\partial x\partial y^2} - k_1A'E_{66}\frac{\partial^3v_0}{\partial x^2\partial y} - k_1A'F_{11}\frac{\partial^4w_0}{\partial x^4} \\
& + k_1A'(F_{12} + 2F_{66})\frac{\partial^4w_0}{\partial x^2\partial y^2} + (3k_1A' + k_2B')F_{16}\frac{\partial^4w_0}{\partial x^3\partial y} + k_2B'(F_{12} + 2F_{66})\frac{\partial^4w_0}{\partial x^2\partial y^2} + k_2B'F_{22}\frac{\partial^4w_0}{\partial y^4} \\
& + (k_1A' + 3k_2B')F_{26}\frac{\partial^4w_0}{\partial x\partial y^3} - (k_1A')^2H_{11}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} - 2k_1A'k_2B'(H_{12} + H_{66})\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2} - 2((k_1A')^2 + k_1A'k_2B')H_{16}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^3\partial y} \\
& - (k_2B')^2H_{22}\frac{\partial^4\theta}{\partial y^4} - 2((k_2B')^2 + k_1A'k_2B')H_{26}\frac{\partial^4\theta}{\partial x\partial y^3} - 2((k_1A')^2 + (k_2B')^2)H_{66}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2} + (k_2B')^2As_{44}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \\
& + 2k_1A'k_2B'As_{45}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + (k_1A')^2As_{55}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{III.31d}$$

où (N_0) est l'intensité de la force de compression dans le plan. Après avoir remplacé l'équation (III .25) dans l'équation (III .18), le système d'équations suivant sous forme de matrice est obtenu.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} + N_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.32}$$

où le paramètre (N_{33}) fait référence à la charge de flambement correspondante et peut être exprimé par:

$$N_{33} = -(N_x^0\alpha^2 + N_y^0\beta^2) \tag{III.33}$$

III 2.6.3 Analyse de la vibration pour plaques composites stratifiées

Selon la technique de solution de Navier, les équations de base de la plaque en cas d'analyse de vibration libre sont obtenues en éliminant la charge transversale (q) et les forces de compression dans le plan $(N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0)$ de l'équation (III.18). Ces équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \\
& + (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{III.34a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' (E_{12} + E_{66}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \\
& + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + k_2 B' E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + k_2 B' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \quad (\text{III.34b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \\
& + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\
& + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \\
& - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \quad (\text{III.33c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\theta : & -k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (k_2 B' (E_{12} + E_{66}) + k_1 A' E_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (2k_1 A' + k_2 B') E_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - k_1 A' E_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
 & - k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - k_2 B' E_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - (k_1 A' + 2k_2 B') E_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - k_1 A' E_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
 & + k_1 A' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (3k_1 A' + k_2 B') F_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + k_2 B' (F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & + (k_1 A' + 3k_2 B') F_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - 2k_1 A' k_2 B' (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - 2((k_1 A')^2 + k_1 A' k_2 B') H_{16} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} \\
 & - (k_2 B')^2 H_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} - 2((k_2 B')^2 + k_1 A' k_2 B') H_{26} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} - 2((k_1 A')^2 + (k_2 B')^2) H_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_2 B')^2 A_{s44} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 & + 2k_1 A' k_2 B' A_{s45} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + (k_1 A')^2 A_{s55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -I_3 \left(k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\
 & - I_5 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \tag{III.34d}
 \end{aligned}$$

La forme de solution suivante est supposée pour les variables de déplacement inconnues :

(u_0, v_0, w_0) et (θ)

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{III.35}$$

En substituant l'équation (III .35) dans les équations. (III .34), le système d'équations suivant est obtenu.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} + N_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.36}$$

Les éléments de la matrice de rigidité [K] sont donnés dans l'équation (III .30). De la solution de l'équation (III.36), les fréquences propres les plus basses pour les plaques composites stratifiées peuvent être obtenues.

Les fréquences naturelles sont présentées sous la forme non dimensionnelle suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho h^2 / E_2} \quad (\text{III.37})$$

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement de la flexion, de flambement et de la vibration des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie d'ordre élevée. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que dans d'autres théories de déformation de cisaillement il existe cinq ou plus. La théorie présentée a une forte similitude avec la théorie d'ordre élevée des plaques dans de nombreux aspects : n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description sinusoïdale de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre IV

Résultats et discussions

Résultats et discussions

IV.1.Introduction

Les matériaux composites avancés tels que les plaques stratifiées et les coques ont été utilisés dans différentes applications d'ingénierie ces dernières années, grâce à leurs avantages dans les propriétés; cela a attiré beaucoup de scientifiques. Les chercheurs essaient de concevoir des matériaux composites stratifiés épais plus économiques. Les déformations du cisaillement transversal sont l'un des intérêts principaux des plaques stratifiées épaisses composites.

Il existe plusieurs théories des plaques stratifiées, qui incluent des contraintes de cisaillement transversales ; une des théories bien connues est le modèle de Reissner qui est connue comme la théorie des ordres première de déformation de cisaillement (FSDT) et prend le champ de déplacement comme variations linéaires au plan moyen.

Beaucoup de théories des plaques d'ordre élevé, ont été développées pour évaluer les déformations de cisaillement transversal des plaques stratifiées.

L'objectif de ce travail est d'analyser un simple modèle de déformation par cisaillement sinusoïdal pour des plaques stratifiées composites. Les solutions analytiques pour la stabilité et la vibration libre des stratifiés croisés sont présentés en utilisant la présente théorie.

L'utilisation du principe d'Hamilton tire les équations gouvernantes. Les contraintes, les déplacements calculés, la force de flambement et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres.

Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

IV.2. Structure étudiée et matériaux :

L'étude analytique a été menée sur des structures stratifiées croisées simplement appuyées suivant une section sous une charge répartie de manière sinusoïdale.

Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont

résolus. Il est supposé que l'épaisseur et les propriétés des matériaux pour tous les stratifiés sont les mêmes.

Dans l'analyse, les propriétés élastiques du stratifié sans dimension sont rapportées au tableau IV.1 suivant, le matériau 1 est utilisé en flexion et le matériau 2 est utilisé en flambement et en vibration :

Propriétés adimensionnelles	E_{11}/E_{22}	G_{23}/E_{22}	G_{13}/E_{22}	G_{12}/E_{22}	ν_{12}
Matériau 1	25	0.2	0.5	0.5	0.25
Matériau 2	Open	0.5	0.6	0.6	0.25

Tableau IV. 1 : Propriétés matérielles sans dimension des matériaux utilisés

Notre objectif est de vérifier l'exactitude et la convergence de la présente théorie actuelle pour prédire les réponses statiques et dynamiques des plaques composites stratifiées simplement appuyées grâce aux résultats numériques obtenus. Des comparaisons sont faites avec diverses théories de la plaque et les solutions exactes de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

IV.1 Discussion des résultats numériques

IV.1 Analyse de flexion des plaques composites stratifiées

Dans cet exemple numérique, l'efficacité de la théorie actuelle est démontrée pour l'analyse en flexion de plaque simplement appuyées. Les déplacements, la flèche et les contraintes normales et tangentielles sont présentés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}\left(0, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right) &= \frac{uE_2h^2}{q_0a^3}, & \bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) &= \frac{100wh^3E_2}{q_0a^4}, & \bar{\sigma}_x &= \frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\
 \bar{\sigma}_y &= \frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right), & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h^2}{q_0a^2}\tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{2}\right), & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0a}\tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), \\
 \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{q_0a}\tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) & & & &
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Les plaques carrées composites stratifiées anti-symétriques stratifiées ($0^\circ/90^\circ$) soumises à une charge répartie de manière sinusoïdale. Les déplacements non dimensionnels et les contraintes calculés à l'aide du modèle actuel sont comparés et discutés avec ceux rapportés par (CPT) de Kirchhoff (1850), FSDT de Mindlin (1951), théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy (1984), théorie du cisaillement sinusoïdal et de la déformation normale (SSNDT) de Sayyad et Ghugal (2014a), Sayyad et al (2016) et solution d'élasticité exacte fournie par Pagano (1970).

Les résultats adimensionnels sont présentés dans le tableau IV.2.

a/h	Théories	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	Présente	0.0114	1.9766	0.9143	0.0889	0.0577	0.1274	0.1274
	Sayyad et al. (2016)	0.0114	1.9793	0.9154	0.0890	0.0578	0.0660	0.1276
	Sayyad and Ghugal (2014a)	0.0111	1.9424	0.9062	0.0964	0.0562	0.1270	0.1270
	Reddy (1984)	0.0114	2.0256	0.9172	0.0932	0.0713	0.1270	0.1270
	Mindlin (1951)	0.0088	1.9682	0.7157	0.0843	0.0525	0.0910	0.0910
	Kirchhoff (1850)	0.0088	1.0636	0.7157	0.0843	0.0525	—	—
	Pagano (1970)	—	2.0670	0.8410	0.1090	0.0591	0.1200	0.1350
10	Présente	0.0093	1.2132	0.7483	0.0851	0.0533	0.1304	0.1304
	Sayyad et al. (2016)	0.0093	1.2135	0.7484	0.0851	0.0534	0.1270	0.1306
	Sayyad and Ghugal (2014a)	0.0092	1.2089	0.7471	0.0876	0.0530	0.1300	0.1300
	Reddy (1984)	0.0095	1.2479	0.7652	0.0889	0.0680	0.1310	0.1310
	Mindlin (1951)	0.0088	1.2083	0.7157	0.0843	0.0525	0.0910	0.0910
	Kirchhoff (1850)	0.0088	1.0636	0.7157	0.0843	0.0525	—	—
	Pagano (1970)	—	1.2250	0.7302	0.0886	0.0535	0.1210	0.1250

Tableau. IV.2: Comparaison des déplacements adimensionnels et des contraintes pour la plaque carrée stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale.

Le modèle proposé sous-estime la valeur du déplacement transversal pour le facteur d'élancement (4), mais il est en bon accord avec la solution exacte et d'autres modèles d'ordre supérieur pour le facteur d'élancement (10) (tableau IV.2).

Dans la figure (IV. 1), on voit que le déplacement dans le plan calculé par la théorie actuelle est en bon accord avec les autres modèles. Le déplacement dans le plan est maximum dans la couche à (90°) alors que dans la couche (0°) le minimum.

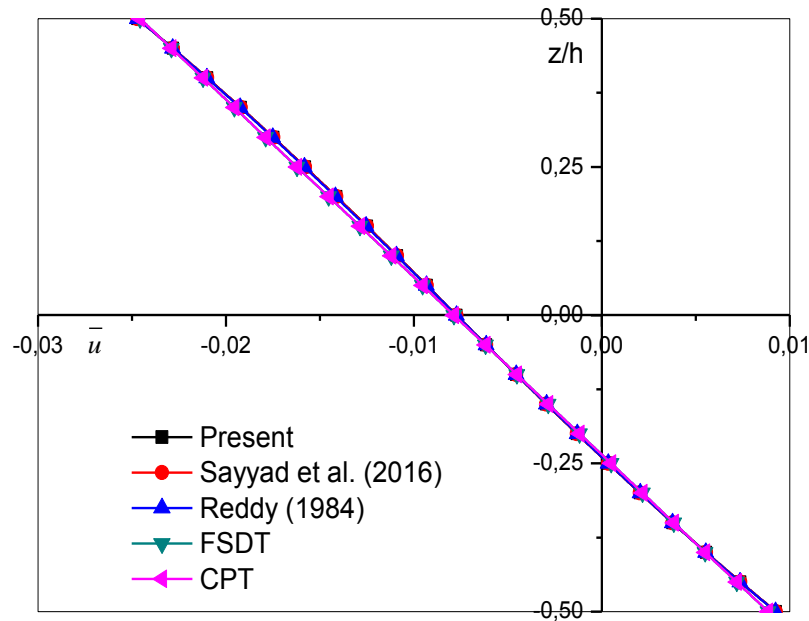


Figure IV.1 : Variation du déplacement dans le plan (\bar{u}) pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1$, $a/h = 10$).

Sur les figures (IV .2) on a calculé la flèche transversale .Les présents résultats sont comparés à ceux générés en utilisant la théorie CPT de Kirchhoff (1850), FSDT de Mindlin (1951), théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy (1984), théorie du cisaillement sinusoïdal et de la déformation normale (SSNDT) de Sayyad et Ghugal (2016) . L'examen de ces chiffres a révélé que la situation actuelle des résultats sont en bon accord avec ceux obtenus en utilisant d'autres théories.

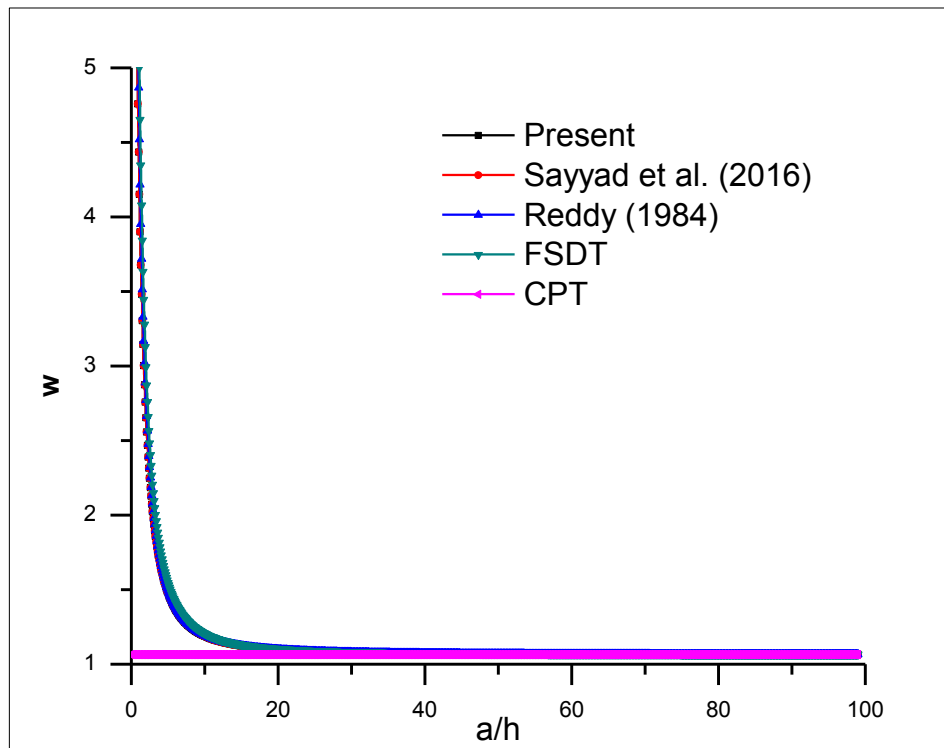


Figure IV.2 . Effet du rapport (a / h) sur la flèche transversale adimensionnelle (w) d'une plaque stratifiée carrée à couches croisées à deux couches soumise à une charge transversale sinusoïdale à ($x=a/2, y=b/2, z = 0$).

La figure (IV.3) montre que la contrainte normale dans le plan ($\bar{\sigma}_x$) calculée par la théorie proposée est en accord avec celui des autres modèles.

La contrainte de cisaillement dans le plan ($\bar{\tau}_{xy}$) est présentée dans la figure (IV.4), où un bon accord est démontré avec d'autres théories. La figure(IV.5) illustre la répartition de cette contrainte cisaillement transverse, à travers l'épaisseur, via des équations d'équilibre (τ_{xz}) où un bon accord est constaté avec d'autres théories. Le modèle proposé prédit de bonnes valeurs de contrainte de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}$) (figure. IV.6).

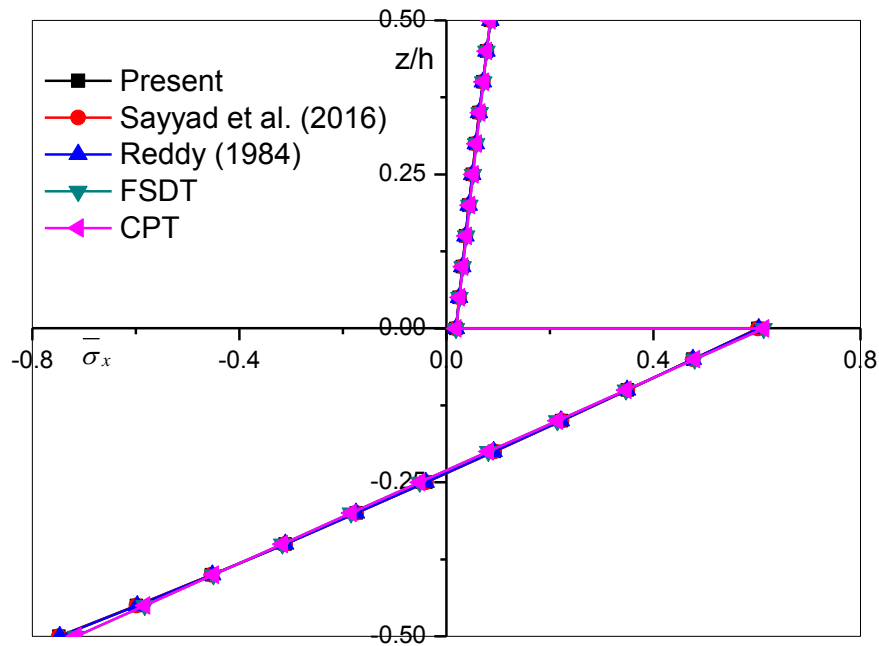


Figure IV.3 : Variation de la contrainte normale dans le plan ($\bar{\sigma}_x$) pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1$, $a/h = 10$).

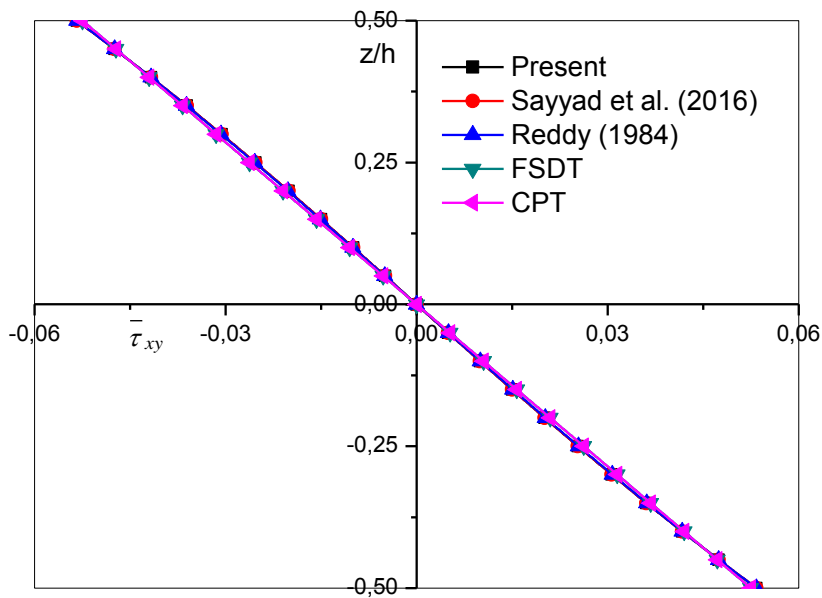


Figure IV.4: Variation de la contrainte de cisailement dans le plan ($\bar{\tau}_{xy}$) pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b/a = 1$, $a/h = 10$).

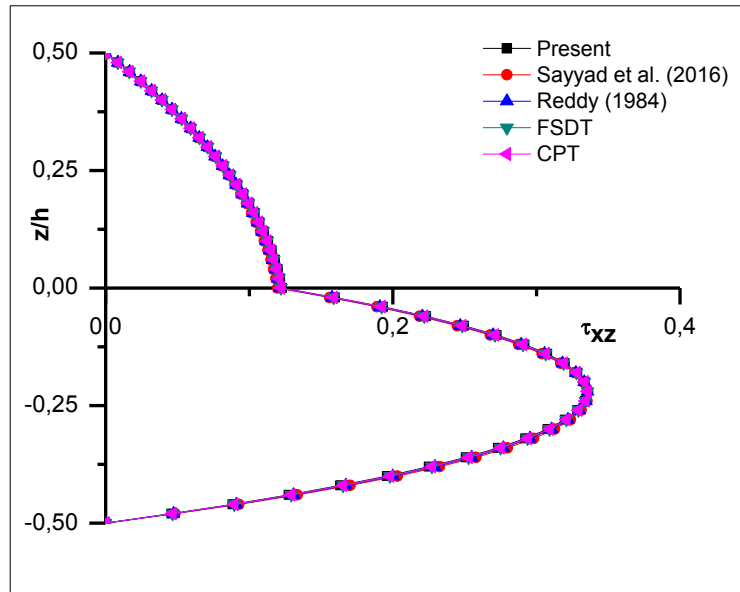


Figure IV.5: Variation de la contrainte de cisaillement transverse (τ_{xz}^{EE}) pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b = a$, $a / h = 10$).

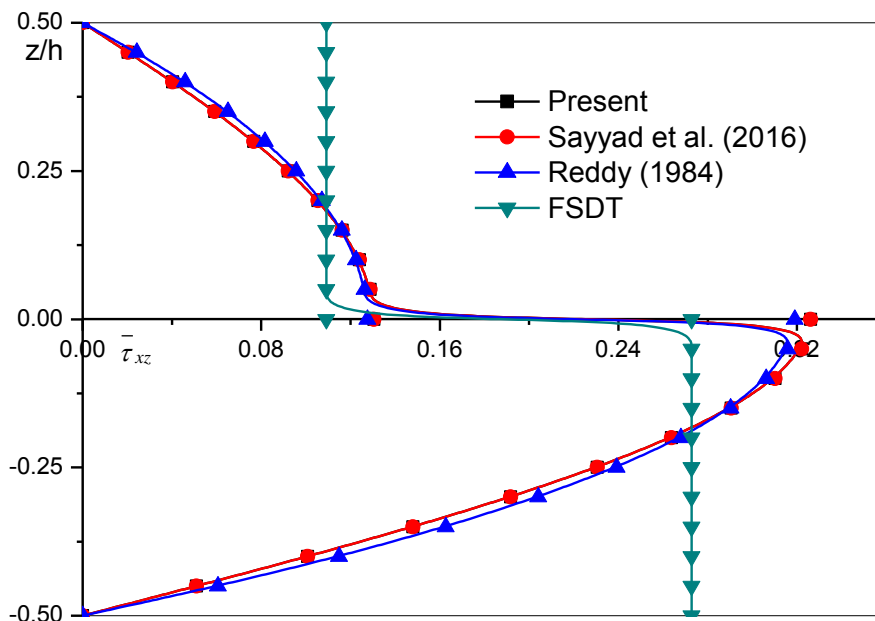


Figure IV.6: Variation de la contrainte de cisaillement transversale (τ_{xz}^{CR}) pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge répartie de manière sinusoïdale ($b / a = 1$, $a / h = 10$).

IV.3.2 Analyse de flambement des plaques composites stratifiées

On considère que les plaques carrées et rectangulaires composites stratifiées simplement appuyées dans les conditions de chargement uniaxial et biaxial, présentées dans la figure (IV.7), prouvent la précision du modèle proposé pour prévoir le comportement au flambement.

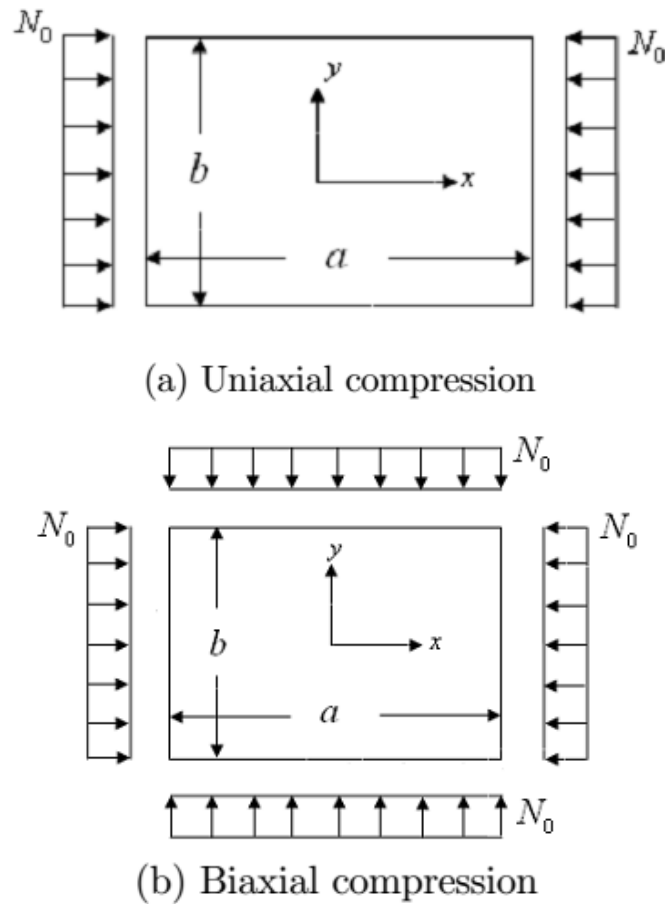


Figure IV.7 : Plaque simplement appuyée soumise à des forces de compression dans le plan.

Les charges critiques de flambement sont définies sous la forme non dimensionnelle suivante:

$$N_{cr} = (N_0 a^2) / (E_{22} h^3) \quad (\text{IV.2})$$

Une comparaison des paramètres critiques de charge de flambement déterminés par le modèle proposé pour un matériau composite stratifié à trois couches croisées symétriques ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et cinq couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$).

Le tableau (IV.4) illustre les plaques carrées soumises à des compressions uniaxiales et biaxiales selon divers rapports modulaires (E_{11}/E_{22}). Les résultats du modèle proposé sont comparés à ceux du modèle HSDT de Reddy (1984), du SSNDT de Sayyad et Ghugal (2014b), Sayyad et al. (2016), Turan et al. (2017) FSDT de Mindlin (1951) et CPT de Kirchhoff (1850) et solution d'élasticité exacte donnée par Noor (1975).

les couches	Compression	(k_1, k_2)	Théories	E_{11} / E_{22}		
				20	30	40
$(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	Uniaxial	$(1, 0)$	Présente	16.236	21.440	25.983
			Sayyad et al. (2016)	15.215	20.428	24.977
			Sayyad and Ghugal (2014b)	15.003	19.002	22.330
			Turan et al. (2017)	16.223	21.435	25.982
			Reddy (1984)	15.300	19.675	23.339
			FSDT	14.985	19.027	22.315
			CPT	19.712	27.936	36.160
	Noor (1975)	15.019	19.304	22.880		
	Biaxial	$(1, 1)$	Présente	8.1184	10.720	12.992
			Sayyad et al. (2016)	7.6075	10.214	12.488
			Sayyad and Ghugal (2014b)	7.5014	9.5009	11.165
			Turan et al. (2017)	7.6500	9.8376	11.669
			Reddy (1984)	7.4925	9.5135	11.157
			FSDT	9.8560	13.968	18.080
CPT			7.5095	9.6520	11.440	
$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	Uniaxial	$(1, 0)$	Présente	16.236	21.440	25.983
			Sayyad et al. (2016)	16.234	21.435	25.976
			Sayyad and Ghugal (2014b)	15.828	20.643	24.756
			Turan et al. (2017)	15.783	20.578	24.676
			Reddy (1984)	15.736	20.485	24.547
			FSDT	19.712	27.936	36.160
			CPT	15.653	20.466	24.593
	Biaxial	$(1, 1)$	Présente	8.118	10.720	12.992
			Sayyad et al. (2016)	8.117	10.717	12.988
			Sayyad and Ghugal (2014b)	7.9140	10.321	12.378
			Turan et al. (2017)	7.8915	10.289	12.338
			Reddy (1984)	7.8680	10.240	12.273
			FSDT	9.8560	13.968	18.080
			CPT	7.8265	10.466	12.296

Tableau IV .4: Comparaison de la charge de flambement critique (N_{cr}) pour des plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées sous compression *uniaxiale* et *biaxiale* ($a/h = 10$).

Le Tableau (IV.4) montre que les résultats actuels concordent bien avec les autres. Il est également montré que les charges de flambement données par CPT sont nettement plus élevées que celles obtenues par le modèle proposé. Ceci est la conséquence de la suppression de l'influence de la déformation par cisaillement transversal dans le CPT. On peut constater que les charges critiques de flambement en cas de compression biaxiale sont exactement la moitié de celles en compression uniaxiale pour les plaques carrées.

Le tableau (IV.5) présente la charge critique de flambement pour une plaque rectangulaire composite stratifié symétrique à quatre couches $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$. Les résultats numériques sont déterminés pour différentes valeurs de rapports b/a et de rapports (a/h) .

Le tableau (IV.5) montre que la charge critique de flambement augmente en fonction de l'augmentation des rapports (b/a) et (a/h) . Il est également souligné que le modèle proposé est

en bon accord tout en prévoyant la réponse au flambement des plaques composites stratifiées rectangulaires.

Compression	(k_1, k_2)	a/h	Théories	b/a			
				1	2	3	4
Uniaxial	(1, 0)	5	Présente	14.236	9.953	9.092	8.779
			Sayyad et al. (2016)	14.181	9.950	9.091	8.778
			Sayyad and Ghugal (2014b)	11.986	8.780	8.463	8.382
			FSDT	12.146	8.673	8.357	8.279
		CPT	36.160	29.833	29.259	29.102	
		10	Présente	25.983	19.792	18.708	18.315
			Sayyad et al. (2016)	25.908	19.785	18.705	18.313
			Sayyad and Ghugal (2014b)	23.387	18.500	18.057	17.941
			FSDT	23.453	18.398	17.962	17.849
		CPT	36.160	29.833	29.259	29.102	
		100	Présente	36.017	29.682	29.094	28.931
			Sayyad et al. (2016)	36.016	29.682	29.094	28.931
Sayyad and Ghugal (2014b)	35.961		29.652	29.080	28.924		
FSDT	35.956		29.648	29.077	28.921		
CPT	36.160	29.833	29.259	29.102			
Biaxial	(1, 1)	5	Présente	7.1181	7.9624	8.1826	8.2625
			Sayyad et al. (2016)	7.0900	7.9600	8.1820	8.2620
			Sayyad and Ghugal (2014b)	5.9934	7.0244	7.6171	7.8896
			FSDT	6.0730	6.9387	7.5216	7.7928
		CPT	18.080	23.866	26.333	27.390	
		10	Présente	12.992	15.834	16.837	17.238
			Sayyad et al. (2016)	12.954	15.828	16.834	17.236
			Sayyad and Ghugal (2014b)	11.694	14.800	16.251	16.886
			FSDT	11.726	14.719	16.166	16.799
		CPT	18.080	23.866	26.333	27.390	
		100	Présente	18.009	23.746	26.185	27.229
			Sayyad et al. (2016)	18.008	23.746	26.185	27.229
Sayyad and Ghugal (2014b)	17.980		23.722	26.172	27.223		
FSDT	17.978		23.718	26.169	27.219		
CPT	18.080	23.866	26.333	27.390			

Tableau IV.5. Comparaison de la charge de flambement critique (N_{cr}) pour des plaques rectangulaires stratifiées en quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement appuyées, sous compression uniaxiale et biaxiale.

IV.3.3 Analyse de vibration libre de plaques composites stratifiées

Pour cette étude, les propriétés des matériaux données par le tableau (IV.1) sont employées. Les fréquences naturelles sont présentées sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho h^2 / E_{22}} \tag{IV.3}$$

Dans le tableau (IV.5), les fréquences propres adimensionnelles de plaques composites stratifiées carrées simplement appuyées pour différents rapports modulaires (E_{11} / E_{22}) sont données et comparées à celles prédites par SSNDT de Sayyad et Ghugal (2015), Sayyad et al. (2016), HSNT de Reddy (1984), FSDT de Mindlin (1951), CPT de Kirchhoff (1850) et solution d'élasticité exacte fournie par Noor (1975).

Les couches	Théories	E_{11} / E_{22}			
		10	20	30	40
0°/90°	Présente	0.27986	0.31352	0.34126	0.36494
	Sayyad et al. (2016)	0.27987	0.31354	0.34128	0.36498
	Sayyad and Ghugal (2015)	0.28060	0.31415	0.34181	0.36543
	Reddy (1984)	0.27955	0.31284	0.34020	0.36348
	FSDT	0.27757	0.30824	0.33284	0.35353
	CPT	0.30968	0.35422	0.39335	0.42884
	Noor (1975)	0.27938	0.30698	0.32705	0.34250
0°/90°/0°	Présente	0.34307	0.40639	0.44507	0.47162
	Sayyad et al. (2016)	0.34261	0.40623	0.44502	0.47162
	Sayyad and Ghugal (2015)	0.32696	0.37037	0.39498	0.41176
	Reddy (1984)	0.33095	0.38112	0.41094	0.43155
	FSDT	0.32739	0.37110	0.39540	0.41158
	CPT	0.42599	0.55793	0.66419	0.75565
	Noor (1975)	0.32841	0.38241	0.41089	0.43006
0°/90°/0°/90°	Présente	0.3277	0.3848	0.4210	0.4465
	Sayyad et al. (2016)	0.3422	0.4055	0.4441	0.4706
	Sayyad and Ghugal (2015)	0.3319	0.3821	0.4119	0.4324
	Reddy (1984)	0.3308	0.3810	0.4108	0.4314
	FSDT	0.3319	0.3826	0.4130	0.4341
	CPT	0.4260	0.5579	0.6642	0.7556
	Noor (1975)	0.3257	0.3762	0.4066	0.4272
0°/90°/0°/90°/0°	Présente	0.3431	0.4064	0.4450	0.4716
	Sayyad et al. (2016)	0.3430	0.4063	0.4449	0.4715
	Sayyad and Ghugal (2015)	0.3384	0.3950	0.4287	0.4518
	Reddy (1984)	0.3399	0.3994	0.4350	0.4592
	FSDT	0.3368	0.3930	0.4271	0.4506
	CPT	0.4259	0.5579	0.6641	0.7556
	Noor (1975)	0.3408	0.3979	0.4314	0.4537

Tableau IV.6. : Comparaison des fréquences propres adimensionnelles de plaques composites stratifiées carrées simplement appuyées ($a/h= 10$).

Le tableau (IV.6) montre que le modèle proposé est en bon accord tout en prévoyant les fréquences propres des plaques composites stratifiées. Le CPT surestime les fréquences propres dues à de l'influence de la déformation par cisaillement transverse. On remarque également que les fréquences propres des plaques composites stratifiées augmentent en même temps que les rapports modulaires (E_{11} / E_{22}).

IV.4.Conclusion

Nous avons, dans le cadre de ce travail, développé une méthode analytique qui utilise les champs de déplacement et de déformation des plaques en matériaux composites stratifiés, prenant en compte les effets de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre élevés qui permettent en effet de modéliser des structures composites stratifiées ou sandwichs sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement.

Il est bien connu que les théories classiques des plaques stratifiées basées sur les hypothèses de Kirchhoff, négligeant les cisaillements transverses et ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composite minces.

Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevé ; par contre la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Reissner-Mindlin pour le cas des plaques épaisses, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement.

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées à quatre variables proposée est exacte, simple et même efficace pour la résolution du comportement à la flexion, en flambement et en vibration des plaques en matériaux composites stratifiés. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description trigonométrique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les propriétés des matériaux naturels ne permettent pas toujours de les utiliser pour des applications particulières. Les progrès scientifiques rendent désormais possible l'élaboration de matériaux composites dont les caractéristiques sont optimisées en fonction de l'application finale visée.

Les composites sont obtenus par assemblage d'au moins deux matériaux : l'un appelé renfort constitue l'ossature le plus souvent sous forme fibreuse qui assure la tenue mécanique, l'autre appelé matrice est un liant qui assure la cohésion de la structure et la transmission des efforts vers le renfort. Du fait de leur bonne tenue mécanique et de leur faible masse volumique, les composites sont largement utilisés, notamment dans l'industrie aéronautique et spatiale.

Deux grandes problématiques peuvent être associées à l'utilisation des matériaux composites. Premièrement, la diversité de leurs domaines d'application les expose à une grande variété de modes de sollicitation et d'endommagement. Deuxièmement, le choix d'un composite pour une application particulière nécessite d'avoir une bonne connaissance de ses propriétés. Dès lors, l'évaluation de ces propriétés présente un grand intérêt.

Ces deux problématiques se déclinent en des variantes multiples, suivant le type d'endommagement à détecter (délaminage, fissure, etc.) ou la nature de la propriété à évaluer (mécanique, thermique, etc.). En conséquence, le développement de nouvelles théories ou de méthode de calcul et contrôle s'avère nécessaire pour répondre efficacement à la diversité des situations.

Les plaques stratifiées en matériaux composites sont largement utilisées dans l'industrie et dans les nouveaux champs de technologie. À cause de hauts degrés d'anisotropie et de basse rigidité en cisaillement transversal, (Hypothèse de Kirchhoff). La théorie classique de stratifié n'est plus adéquate. L'hypothèse ne déclare que la normale transversale au plan moyenne d'une plaque reste droit et normale après la déformation, l'effet de cisaillement

transversal négligeable.

Les théories raffinées basé en enlèvement de ces termes de normaux transversal qui ont été utilisées récemment.

Dans la présente étude, une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique est appliquée pour l'étude de la réponse statique et dynamique de plaques composites stratifiées.

La caractéristique la plus importante de la présente théorie est qu'elle ne comporte que quatre inconnues, à savoir cinq dans le cas de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre et d'autres théories d'ordre supérieur. La présente théorie satisfait aux conditions des surfaces supérieure et inférieure des plaques sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

À partir de la formulation mathématique de la théorie actuelle, il a été observé que pour quatre variables inconnues, la théorie actuelle nécessite moins d'efforts de calcul contrairement aux autres théories de déformation par cisaillement qui contiennent à cinq et six variables.

En conclusion et à travers les exemples numériques, la théorie actuelle peut fournir des résultats précis et cela pour les déplacements, la flèche transversale, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement, les fréquences fondamentales et des charges de flambement pour les plaques composites stratifiées.

Alors les résultats de la theorie actuelle sont comparés avec différentes théories d'ordre élevé ; et trouvés dans le bon accord.

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures tel que les sandwichs , matériaux à gradient de propriétés FGM en tenant compte des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire.....) et des changements dans les propriétés matérielles des matériaux.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] Sofiyev, A.H., & Avcar, M. (2010), "The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation", *Engineering*, 2(4), 228-236.

[2] Sofiyev, A., Aksogan, O., Schnack, E., Avcar, M. (2008), "The stability of a three-layered composite conical shell containing a FGM layer subjected to external pressure", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 15, 461-466.

[3] Sofiyev, A.H., Alizada, A.N., Akin, Ö., Valiyev, Avcar, M., Adiguzel, S. (2012), "A. On the stability of FGM shells subjected to combined loads with different edge conditions and resting on elastic foundations", *Acta Mech*, 223, 189–204.

[4] Bilouei, B.S., Kolahchi, R., Bidgoli, M.R. (2016), "Buckling of concrete columns retrofitted with Nano-Fiber Reinforced Polymer (NFRP)", *Computers and Concrete*, 18(5), 1053-1063.

[5] Avcar, M., & Mohammed, W. K. M. (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10), 232.

[6] Cherif, R.H., Meradjah, M., Zidour, M., Tounsi, A., Belmahi, H., Bensattalah, T. (2018), "Vibration analysis of nano beam using differential transform method including thermal effect", *Journal of Nano Research*, 54, 1-14.

[7] Avcar, M. (2015), "Effects of rotary inertia shear deformation and non-homogeneity on frequencies of beam", *Struct Eng Mech*, 55, 871–884.

[8] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, 125, 621-630.

[9] Arani, A.J., Kolahchi, R. (2016), "Buckling analysis of embedded concrete columns armed with carbon nanotubes", *Computers and Concrete*, 17(5), 567 - 578.

[10] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38(1), 265-275.

[11] Madani, H., Hosseini, H., Shokravi, M. (2016), "Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions", *Steel and Composite Structures*, 22(4), 889-913.

[12] Kolahchi, R., Hosseini, H., Esmailpour, M. (2016a), "Differential cubature and quadrature-Bolotin methods for dynamic stability of embedded piezoelectric nanoplates based on visco-nonlocal-piezoelectricity theories", *Composite Structures*, 157, 174-186.

[13] Kolahchi, R., Safari, M., Esmailpour, M. (2016b), "Dynamic stability analysis of

temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium", *Composite Structures*, 150, 255–265.

[14] Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech.*, 58(3), 397-422.

[15] Zamanian, M., Kolahchi, R. and Bidgoli, M.R. (2017), "Agglomeration effects on the buckling behaviour of embedded concrete columns reinforced with SiO₂ nano-particles", *Wind Struct.*, 24(1), 43-57.

[16] Kolahchi, R. (2017), "A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods", *Aerospace Science and Technology*, **66**, 235–248

[17] Amnieh, H.B., Zamzam, M.S., Kolahchi, R. (2018), "Dynamic analysis of non-homogeneous concrete blocks mixed by SiO₂ nanoparticles subjected to blast load experimentally and theoretically", *Construction and Building Materials*, 174, 633–644.

[18] Youcef, D.O., Kaci, A., Benzair, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2018), "Dynamic analysis of nanoscale beams including surface stress effects", *Smart Structures and Systems.*, 21(1), 65-74.

[19] Reddy, J.N. (1984), "A simple higher order theory for laminated composite plates", *ASME J. of Applied Mechanics*, 51, 745–752.

[20] Reddy, J.N., & Khdeir, A. (1989), "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories", *AIAA journal*, 27(12), 1808-1817.

[21] Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory", *Int. J. of Engineering Sciences*, 29:901–916

[22] Soldatos, K.P. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mechanica*, 94, 195–220.

[23] Metin, A. (2009), "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 89, 94–101.

[24] Karama, M., Afaq, K.S. and Mistou, S. (2009), "A new theory for laminated composite plates", *Proc. IMechE Part L: J. Materials: Design and Applications*, 223, 53-62.

[25] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2012), "Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory", *Applied and Computational Mechanics*, 6, 65–82.

[26] Rezaiee-Pajand, M., Shahabian, F., & Tavakoli, F.H. (2012), "A new higher-order triangular plate bending element for the analysis of laminated composite and sandwich plates", *Structural Engineering and Mechanics*, 43(2), 253-271

[27] Sayyad, A.S. (2013), "Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10, 473-490.

- [28] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, 60, 274-283.
- [29] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2014a), "A new shear and normal deformation theory for isotropic, transversely isotropic, laminated composite and sandwich plates", *Int. J. of Mechanics and Materials in Design*, 10, 247–267.
- [30] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2014b), "On the buckling of isotropic, transversely isotropic and laminated composite rectangular plates", *Int. J. of Structural Stability and Dynamics*, 14, 1-32.
- [31] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Meth.*, 11(6), 1350082.
- [32] Ghugal, Y.M. and Sayyad, A.S. (2013), "Stress analysis of thick laminated plates using trigonometric shear deformation theory", *Int. J. of Applied Mechanics*, 5, 1–23.
- [33] Ahmed, A. (2014), "Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory", *Int. J. Civil Struct. Environ.*, 4(2), 59-64.
- [34] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.
- [35] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 54(4), 693-710.
- [36] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Model.*, 39(9), 2489-2508.
- [37] Panda, S.K. and Katariya, P.V. (2015), "Stability and free vibration behaviour of laminated composite panels under thermomechanical loading", *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 1(3), 475-490.
- [38] Kolahchi, R., Moniri Bidgoli, A.M. (2016), "Size-dependent sinusoidal beam model for dynamic instability of single-walled carbon nanotubes", *Applied Mathematics and Mechanics*, 37(2), 265-274.
- [39] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [40] Beldjelili, Y., Tounsi, A., & Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Structures and Systems*, 18(4), 755-786.

[41] Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Struct. Eng. Mech.*, 60(2), 313-335.

[42] Akavci, S.S. (2016), "Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation", *Composites Part B*, 96, 136-152.

[43] Baseri, V., Jafari, G.S., Kolahchi, R. (2016), "Analytical solution for buckling of embedded laminated plates based on higher order shear deformation plate theory", *Steel and Composite Structures*, 21(4), 883-919.

[44] Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H., Nouri, A. (2017a), "Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 534-545.

[45] Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H., Oskouei, A.N. (2017b), "Visco-nonlocal-refined Zigzag theories for dynamic buckling of laminated nanoplates using differential cubature-Bolotin methods", *Thin-Walled Structures*, 113, 162 - 169.

[46] Kolahchi, R., Keshtegar, B., Fakhar, M.H. (2017c), "Optimization of dynamic buckling for sandwich nanocomposite plates with sensor and actuator layer based on sinusoidal-visco-piezoelasticity theories using Grey Wolf algorithm", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, (In press).

[47] Abdelaziz, H.H., Meziane, M.A.A, Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S. (2017), "An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions", *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.

[48] Hajmohammad, M.H., Zarei, M.S., Nouri, A., Kolahchi, R. (2017), "Dynamic buckling of sensor/functionally graded-carbon nanotube-reinforced laminated plates/actuator based on sinusoidal-visco-piezoelasticity theories", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, (In press).

[49] Aldousari, S.M. (2017), "Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam", *Appl. Phys. A*, 123, 296.

[50] Kolahchi, R., Cheraghabak, A. (2017), "Agglomeration effects on the dynamic buckling of viscoelastic microplates reinforced with SWCNTs using Bolotin method", *Nonlinear Dyn*, 90, 479-492.

[51] Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Structures Systems*, 20(3), 369-383.

[52] Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., Tounsi, A. (2017), "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams", *Smart Structures and Systems.*, 19(2), 115-126.

- [53] Hajmohammad, M.H., Farrokhian, A., Kolahchi, R. (2018a), "Smart control and vibration of viscoelastic actuator-multiphase nanocomposite conical shells-sensor considering hygrothermal load based on layerwise theory", *Aerospace Science and Technology*, 78, 260–270.
- [54] Hajmohammad, M.H., Maleki, M., Kolahchi, R. (2018b), "Seismic response of underwater concrete pipes conveying fluid covered with nano-fiber reinforced polymer layer", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 110, 18–27.
- [55] Hajmohammad, M. H., Kolahchi, R., Zarei, M. S., and Maleki, M. (2018c), "Earthquake induced dynamic deflection of submerged viscoelastic cylindrical shell reinforced by agglomerated CNTs considering thermal and moisture effects", *Composite Structures.*, 187, 498–508.
- [56] Golabchi, H., Kolahchi, R., Rabani Bidgoli, M. (2018), "Vibration and instability analysis of pipes reinforced by SiO₂ nanoparticles considering agglomeration effects", *Computers and Concrete*, 21(4), 431-440.
- [57] Salami, S.J., & Dariushi, S. (2018), "Analytical, numerical and experimental investigation of low velocity impact response of laminated composite sandwich plates using extended high order sandwich panel theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 68(3), 325-334.
- [58] Kadari, B., Bessaim, A., Tounsi, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations", *Journal of Nano Research*, 55, 42-56.
- [59] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018a), "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, 129, 251–264.
- [60] Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., Tounsi, A. (2018b), "A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates", *Steel and Composite Structures*, 28(1), 99-110.
- [61] Bouadi, A., Bousahla, A.A., Houari, M. S. A., Heireche, H., Tounsi, A. (2018), "A new nonlocal HSDT for analysis of stability of single layer graphene sheet", *Advances in Nano Research*, 6(2), 147-162.
- [62] Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory", *Smart Structures Systems*, 21(4), 397-405.
- [63] Fakhar, A., Kolahchi, R. (2018), "Dynamic buckling of magnetorheological fluid integrated by visco-piezo-GPL reinforced plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 788–799.

[64] Hosseini, H., Kolahchi, R. (2018), "Seismic response of functionally graded-carbon nanotubes-reinforced submerged viscoelastic cylindrical shell in hygrothermal environment", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 102, 101–109.

[65] Taleb, O., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new plate model for vibration response of advanced composite plates in thermal environment", *Structural Engineering and Mechanics*, 67(4), 369-383.

[66] Shimpi, R.P. and Patel, H.G. (2006), "A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis", *Int. J. of Solids and Structures*, 43, 6783–6799.

[67] Boudierba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct.*, 14(1), 85-104.

[68] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Benyoucef, S. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp Sci Technol.*, 24(1), 209-220.

[69] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Bég, O.A. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygrothermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.

[70] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 235-253.

[71] Meziane, M.A.A, Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.

[72] Yahia, S.A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165.

[73] Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", *Geomech. Eng.*, 11(5), 671-690.

[74] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M. (2017), " Wave propagation analysis in functionally graded (FG) nanoplates under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory and four variable refined plate theory", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, (In press).

[75] El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates", *Struct. Eng. Mech.*, 63(5), 585-595.

[76] Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, 25(2), 157-175.

- [77] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 19(3), 289-297.
- [78] Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34.
- [79] Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017a), "An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, 25(3), 257-270.
- [80] Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 64(4), 391-402.
- [81] Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory", *Smart Struct. Syst.*, 19(6), 601-614.
- [82] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech. Eng.*, 13(3), 385-410.
- [83] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- [84] Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct. Eng. Mech.*, 65(1), 19-31.
- [85] Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R. (2018), "Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates", *Struct. Eng. Mech.*, 66(1), 61-73.
- [86] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S. (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.
- [87] Pagano, N.J. (1970), "Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates", *J. of Composite Materials*, 4, 20-34.
- [88] Noor, A.K. (1973), "Free vibrations of multilayered composite plates", *AIAA J.*, 11, 1038-1039.
- [89] Noor, A.K. (1975), "Stability of multilayered composite plates", *Fibre Science and Technology*, 8(2), 81-89.

- [90] J.M. Berthelot. (2010). Mécanique des matériaux et structures composites, institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés, le Mans, France.
- [91] N. Gupta, "Characterization Of Syntactic Foams And Their Sandwich Composites: Modeling And Experimental Approaches," The Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, 2003.
- [92] Narayanan S., Schadler L.S., « Mechanisms of Kink-band Formation in Graphite/Epoxy Composites : a Micromechanical Experimental Study », Composite Materials and Technology, vol. 59, (1999), pp. 2201-2213.
- [93] Degamber B., Fernando G.F., « Fibre Optic Dilato-spectroscopic Sensor : Simultaneous Thermal, and Physical Analysis of Materials », Smart Materials Structures, vol. 15, (2006), pp. 1054-1062.
- [94] Zinck P., Salmon L., Gérard J.F., « Durabilité d'Interfaces Polyépoxyde / Fibre de Verre E au Sein de Microcomposites et de Matériaux Composites Unidirectionnels en Milieu humide », Micromechanical Modeling Polymer, vol 42, (2001), pp. 5401-5413.
- [95] Nelson M.P., Aust J.F., Dobrowolski J.A., Verly P.G. Mysrick M.L., « Multivariate Optical Computation for Predictive Spectroscopy », Analytical Chemistry, vol. 70, N°1, (1998), pp. 73-82.
- [96] Cherdoud-Chihani A., Mouzali M., Abadie M.J.M., « Study of Crosslinking AMS/DGEBA System by FTIR », Journal of Applied Polymer Science, vol. 69, (1998), pp. 1167-1178.
- [97] Puglia D., Valentini L., Kenny J.M., « Analysis of the Cure Reaction of Carbon Nanotubes/Epoxy Resin Composites Through Thermal Analysis and Raman Spectroscopy », Journal of Applied Polymer Science, vol. 88, (2003), pp. 452-458.
- [98] Liang G., Zuo R., Lu T., Wang J., « Modification of Venyl Ester Resin by a New Thermoset Liquid crystalline Diacrylate », Journal of Materials Science, vol. 40, (2005), pp. 2089-2091.
- [99] Laine M.R., Kim S.G., Rush J., Mollan M., Sun H.J., Lodaya M., « Ringopening Polymerization of Epoxy end-terminated Poly (Ethylene Oxide) as a Route to Highly Crosslinked Materials with Exceptional Swelling Behavior (II) », Polymer International, vol. 56, (2007), pp.1006- 1015.
- [100] Yang H., James Lee L., « Effect of Resin Chemistry on Redox Polymerization of Unsaturated Polyester Resins », Journal of Applied Polymer Science, vol. 84, (2002), pp. 211-227.
- [110] Wallace M., Attwood D., Day R.J., Heatley F., « Investigation of the Microwave Curing of the PR500 Epoxy resin System », Journal Mater Sciences, vol. 41, (2006), pp. 5862-5869.
- [111] N.J. Pagano (1969). Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. J. Compos. Mat., 3, 398-411.
- [112] [Srinivas, S., Rao, A.K., 1970]: "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", International Journal of solids and structures,6, 1463–1481.

- [113] [M. Choa and Jun-Sik Kimb, 2000]: A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Composites: Part B*, 31 :65–74, 2000.
- [114] E. Reissner (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- [115] [Reddy, J.N. 1984]: “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *ASME J Appl Mech*, 51, 745–752.
- [116] [Carrera, E. 2003]: “Historical review of zigzag theories for multilayered plates and shells”, *Appl Mech Rev*, 56, 287–308
- [117] [H. Murakami. 1986]: Laminated composite plate theory with improved in-plane response. *Journal of Applied Mechanics*, 53(3) :661–666, 1986.
- [118] [L.E. Aghalovyan. 2007]: An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies. In G.Jaiani and G.Podio-Guidugli (Eds), *IUTAM Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Models*, Springer, 2007
- [119] [Duc Thai Nguyen. 2012] : Benchmark d'un modèle layer Wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Other. Université Paris-Est, 2012. French.
- [120] Bakhadda, B., Bachir Bouiadjra, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation", *Wind and Structures*, 27(5), 311-324.
- [121] Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017a), "A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate", *Steel and Composite Structures*, 25(4), 389-401.
- [122] Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017b), "A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate", *Structural Engineering and Mechanics*, 64(6), 737-749.
- [123] Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), “A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates”, *Structural Engineering and Mechanics*, 68(6), 661-675.
- [124] Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates", *Steel and Composite Structures*, 27(1), 109-122.
- [125] Yazid, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), “A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium”, *Smart Structures and Systems*, 21(1), 15-25.
- [126] Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F.Z., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2018), "Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates", *Geomechanics and Engineering*, 14(6), 519-532.

[127] Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, 26(2), 125-137.

[128] Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2019), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 21(2), 727-757.

[129] Zaoui, F.Z., Ouinas, D., Tounsi, A. (2019), "New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations", *Compos. Part B*, **159**, 231-247.

[130] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct.*, **18**(1),187-212.

[131] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 425-442.

[132] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 409-423.

[133] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct.*, 18(4), 1063-1081.

[134] Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", *Steel Compos. Struct.*, 20(5), 963-981.

[135] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.

[136] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation", *Steel Compos. Struct.*, 20(2), 227-249.

[137] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S. R. (2016), "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel and Composite Structures.*, 22(2), 257-276.

[138] Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, 25(6), 717-726.

[139] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017b), "A

nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Structural Engineering and Mechanics*, 62(6), 695 - 702.

[140] Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A., and Mahmoud, S.R. (2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Structural Engineering and Mechanics*, 63(4), 439-446.

[141] Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, 64(2), 145-153.

[142] Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), "An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities”, *Earthquakes and Structures*, 13(3), 255-265.

[143] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018c), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and Composite Structures*, 27(2), 201-216.

[144] Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 65(5), 621-631.

[145] Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate”, *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115

[146] Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A., Tounsi, A. (2019), "Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory”, *Wind and Structures*, **28**(1), 19-30.