

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

ABUALNOUR Moussa

Sujet de thèse

**Analyse dynamique des plaques en matériaux à  
gradient de propriétés**

Soutenu le 09/12/2018 devant le Jury composé de :

M <sup>r</sup> . BOURADA Mohamed	MCA	UDL-SBA	Président
M <sup>r</sup> . HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA	UMS-MASCARA	Directeur de Thèse
M <sup>r</sup> . TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL-SBA	Co-Directeur de Thèse
M <sup>r</sup> . BENYOUCEF Samir	Pr	UDL-SBA	Examineur
M <sup>r</sup> . KACI Abdelhakim	MCA	U-SAIDA	Examineur
M <sup>me</sup> BESSAIM Aicha	MCA	UMS-MASCARA	Examinatrice

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je suis très heureux de témoigner ma profonde estime à mon encadreur Monsieur **HOUARI Mohammed Sid Ahmed** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à mon co-directeur de thèse, Monsieur le professeur **Abdelouahed TOUNSI** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur, **BOURADA Mohamed** auquel je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **S. BENYOUCEF, K. Abdelhakim** et Madame **BESSAIM Aicha** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leurs exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie particulièrement Mr le Professeur **Adda Bedia el Abbas**, pour son aide et ses encouragements et je salue en lui ses hautes qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de toujours aller de l'avant.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés et tous les enseignants de la faculté des Sciences et technologie de l'Université de Mascara.

# *DEDICACE*

*À ma famille,*

*À mon épouse,*

*À mes enfants,*

*À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.*

## Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur pour la vibration libre des plaques simplement appuyée est présentée. La théorie tient compte de la distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales et vérifie les conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque, sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. L'avantage de cette théorie est que le nombre de variables dans le champ de déplacement est seulement cinq comparativement aux autres théories de cisaillement et de la déformation normale. La présente théorie a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. L'équation du mouvement de la structure vibratoire obtenue par le principe classique de Hamilton et résolue en utilisant les étapes de Navier. La validation du modèle théorique proposé est effectuée pour démontrer l'efficacité du modèle. On peut en conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi simple pour prédire les fréquences naturelles des plaques à gradient de propriété avec effet d'étirement de l'épaisseur.

**Mots clés :** Plaques FGM; nouvelle théorie de plaque ; Vibration ; effet d'étirement de l'épaisseur

## Abstract

This work presents a new shear deformation theory including the stretching effect for free vibration of the simply supported functionally graded plates. The theory accounts for parabolic distribution of the transverse shear strains and satisfies the zero traction boundary conditions on the surfaces of the functionally graded plate without using shear correction factors. This theory has only five unknowns, which is even less than the other shear and normal deformation theories. The present one has a new displacement field which introduces undetermined integral variables. The equation of motion of the vibrated structure obtained via the classical Hamilton's principle and solved using Navier's steps. The validation of the proposed theoretical model is performed to demonstrate the efficacy of the model. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the natural frequencies of functionally graded plates with stretching effect.

**Keywords:** Functionally graded plates; new plate theory; vibration; stretching effect.

## ملخص

يقدم هذه العمل نظرية جديدة لتشوه القص بما في ذلك تأثير تمدد السمك للاهتزاز الحر للألواح المتدرجة وظيفياً بسيطة المسندة، النظرية تأخذ بعين الاعتبار التوزيع المكافئ لتشوهات القص العرضي. بينما تحقق الشوط على إجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف الصفيحة بدون إستعمال معامل تصحيح القص. هذه النظرية لديها خمسة مجاهيل فقط، وهي أقل من نظريات تشوه القص والنظريات العادية. النظرية الحالية تحتوي على معادلات إزاحة جديدة مكونة من متغيرات التكامل غير المحدد. يتم الحصول على معادلة الحركة للهيكل المهتز من خلال مبدأ هاملتون الكلاسيكي وحلها باستخدام خطوات (Navier). يتم التحقق من النموذج النظري المقترح لإثبات دقة وفعالية النموذج. يمكن الاستنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فحسب، بل هي بسيطة أيضاً في التنبؤ بالترددات الطبيعية للصفائح المتدرجة وظيفياً مع تأثير تمدد السمك.

**كلمات مفتاحية:** الألواح المتدرجة وظيفياً، نظرية جديدة لتشوه القص، الاهتزاز الحر، تمدد السمك

# **Table des matières**



## SOMMAIRE

Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des notations	
Abstract	
Résumé	

Introduction générale .....	06
-----------------------------	----

### CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

I.1. Introduction.....	12
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	13
I.3. Histoire des matériaux à gradient de propriétés.....	16
I.4. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés.....	17
I.4.1. Estimation auto-cohérente « Self consistent estimates » .....	18
I.4.2. Modèle de Mori-Tanaka.....	19
I.4.3. Modèles sphères composites .....	19
I.4.4. Modèle d'assemblage de cylindres .....	20
I.5. Méthodes de fabrication des matériaux à gradient de propriétés FGM .....	20
I.5.1. Techniques de dépôt en phase vapeur .....	20
I.5.2. Métallurgie des poudres .....	20
I.5.3. Méthode centrifuge .....	21
I.5.4. Techniques de fabrication libre / fabrication additive (AM) .....	21
I.5.4.1. Dépôt de métal au laser (LMD) .....	22
I.5.4.2. Fabrication directe par faisceau d'électrons .....	23

I.5.4.3. Matériaux à gradient de propriétés FGM par les technologies de dépôt à l'arc .....	25
I.6. Domaines d'applications .....	26
I.6.1. Domaines d'applications dans divers domaines .....	26
I.6.2. Domaines d'applications dans le Génie civil .....	29
I.6.2.1. Dans les chaussées rigides .....	29
I.6.2.2. Dans les chaussées souples .....	30
I.6.2.3. Dans les grands vitrages des zones chaudes .....	30
I.6.2.4. Dans les tunnels .....	30
I.6.2.5. Dans les joints des charpentes métalliques .....	31
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	31
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	32
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	33
I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	34
I.8. Conclusion.....	35

**CHAPITRE II : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MATERIAUX  
FONCTIONNELLEMENT GRADUES (FGM)**

II.1. Introduction.....	37
II.2. Historique de développement de la théorie des plaques .....	37
II.3. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) .....	39
II.4. La théorie des plaques épaisses .....	40
II.4.1. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	40
II.4.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	41
II.4.2.1. Les différents modèles de fonction de cisaillement transverse .....	42
II.5. Travaux de recherche sur les structures en FGM .....	45
II.6. Conclusion.....	50

### CHAPITRE III : ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM

III.1. Introduction.....	52
III.2. Formulations théoriques.....	52
III.2.1. Propriétés des matériaux.....	52
III.2.2. Cinématique et équations constitutives.....	54
III.2.3. Les contraintes .....	56
III.2.4. Équations d'équilibres.....	57
III.2.5. Équations du mouvement en termes de déplacements .....	60
III.2.6. solutions analytiques .....	60
III.3. Conclusion.....	62

### CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSION

IV.1. Introduction.....	64
IV.2. Résultats de l'analyse en vibration libre des plaques FGM.....	64
IV. 2.1. Résultats des plaques isotropes .....	64
IV. 2.2. Résultats des plaques FGM carrées (Al/ZrO <sub>2</sub> ).....	66
IV. 2.3. Résultats des plaques FGM carrées (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ).....	67
IV. 2.4. Résultats des plaques FGM (Al/ZrO <sub>2</sub> )*.....	69
IV.3. Conclusion.....	72
Conclusion générale.....	75
Références Bibliographiques.....	77

## **Liste des figures**

## LISTE DES FIGURES

### CHAPITRE I

<b>Figure I.1</b>	La distribution composante des matériaux .....	13
<b>Figure I.2</b>	Concept des matériaux à gradient de propriétés .....	15
<b>Figure I.3</b>	Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM .....	16
<b>Figure I.4</b>	Système de protection thermique dans la navette spatiale .....	17
<b>Figure I.5</b>	Matériau à deux phases avec microstructure du squelette .....	18
<b>Figure I.6</b>	Modèle sphères composite .....	19
<b>Figure I.7</b>	Processus de mise en forme de base du réseau par laser .....	23
<b>Figure I.8</b>	Fabrication additive par faisceau d'électrons par dépôt de double fil .....	24
<b>Figure I.9</b>	Propriétés matérielles des aubes de turbine contenant des FGM .....	27
<b>Figure I.10</b>	Outil de coupe de métaux conventionnel et FGM .....	27
<b>Figure I.11</b>	Articulation de prothèse à l'aide de FGM .....	28
<b>Figure I.12</b>	La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides ...	30
<b>Figure I.13</b>	La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement .....	30
<b>Figure I.14</b>	Géométrie d'une plaque en FGM .....	31
<b>Figure I.15</b>	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM .....	33
<b>Figure I.16</b>	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM .....	34
<b>Figure I.17</b>	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM .....	35

### CHAPITRE II

<b>Figure II.1</b>	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	40
<b>Figure II.2</b>	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	41
<b>Figure II.3</b>	Illustration de la plaque d'ordre élevé.....	42

### CHAPITRE III

<b>Figure III.1</b>	Géométrie d'une plaque en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	53
---------------------	---	----

### CHAPITRE IV

<b>Figure IV.1</b>	Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\hat{\beta}$ en fonction de l'indice des lois des puissances $k$ pour des plaques carrées en FGM type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $a/h = 5$ ).....	68
<b>Figure IV.2</b>	Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\hat{\beta}$ en fonction de rapport de l'épaisseur $a / h$ pour des plaques carrées en FGM type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	68
<b>Figure IV.3</b>	La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle $\hat{\beta}$ des plaques FGM rectangulaires ( $b = 2a$ ) simplement appuyée en fonction de l'indice de la loi de puissance $k$ pour différents rapports $a/h$ .....	70
<b>Figure IV.4</b>	La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle $\hat{\beta}$ des plaques FGM rectangulaires ( $b = 2a$ ) en fonction de rapport de l'épaisseur $a / h$ pour les différentes valeurs de $k$ .....	71
<b>Figure IV.5</b>	La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle $\hat{\beta}$ des plaques FGM simplement appuyée en fonction du rapport $b/a$ pour les différents rapports $a/h$ avec $k = 0.2$ .....	72
<b>Figure IV.6</b>	La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle $\hat{\beta}$ des plaques FGM simplement appuyée ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $b/a$ pour les différentes valeurs de $k$ .....	72

## **Liste des tableaux**

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

**Tableau I.1** Les propriétés du métal et de la céramique ..... 14

CHAPITRE IV

**Tableau IV.1** les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM..... 64

**Tableau IV.2** Les fréquences naturelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque isotrope  
avec  $\nu = 0.3$ ,  $a/h = 10$  et  $a/b = 1$  ..... 65

**Tableau IV.3** Comparaison des premières fréquences naturelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho h/D}$   
d'une plaque isotrope rectangulaire, ( $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ), ( $a/b = 1.5$ )..... 66

**Tableau IV.4** Les fréquences fondamentales non-dimensionnelles  $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$  en  
(Al/ZrO<sub>2</sub>) d'une plaque carrée..... 66

**Tableau IV.5** Les fréquences fondamentales non-dimensionnelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$  en  
(Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) d'une plaque carrée..... 67

**Tableau IV.6** Les fréquences naturelles  $\hat{\beta} = (a^2/h) \sqrt{\rho_c/E_c}$  d'une plaque FGM  
rectangulaire avec ( $a/b = 0.5$ ,  $a/h = 10$ )..... 70



## **Liste des notations**

## Liste des notations

$G$	Module de cisaillement
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$k$	Paramètre du matériau
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes $x, y$ et $z$ ,
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$S_x, S_y, S_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$i$ et $j$	Sont des nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice
$m$	Nombre de mode selon x
$n$	Nombre de mode selon y
$\theta_x, \theta_y$	Les rotations autour des axes x et y, respectivement.
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de gauchissement)
$g(z)$	La fonction de forme (fonction de gauchissement)
$\int$	Intégrale indéterminée.
$k_1, k_2$	Des coefficients dépendent de la géométrie.
$A', B'$	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier).
$\alpha$	Nombre d'onde selon x

$\beta$	Nombre d'onde selon y
$\delta$	Variation
$g(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement

# **Introduction générale**

## *Introduction générale*

Des structures faites des matériaux à gradient de propriétés ont été largement utilisées dans les diverses applications telles que les constructions, l'aérospatiale, le nucléaire, le civil et l'automobile. Les avantages considérables offerts par les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sur les matériaux conventionnels sont d'éliminer les problèmes d'interface des matériaux composites conventionnels et ainsi la répartition des contraintes devient lisse [1]. Par la suite, un certain nombre d'études ont été réalisées pour analyser la statique, la vibration et le flambement des structures fonctionnellement graduées en raison de la pertinence accrue des composants structurels des FGM dans la conception des structures d'ingénierie [2-10]. Différentes théories ont été développées pour prédire avec plus de précision leurs réponses mécaniques. Ces théories de plaques peuvent être classées en trois groupes, à savoir: la théorie classique des plaques (CPT), la théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDT). La théorie classique des plaques (CPT) n'est acceptable que pour les plaques minces sans effet de déformation transversale. La théorie de la plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) surmonte ce problème en prenant en compte cet effet. Cependant, un facteur de correction de cisaillement pratiquement approprié est nécessaire. En appliquant une variation non linéaire du déplacement axial de haut ordre, la théorie HSDT prédit plus précisément que CPT et FSDT, et il n'est pas nécessaire d'introduire la notion de facteur de correction de cisaillement. Par conséquent, cette théorie a été de plus en plus utilisée pour prédire le comportement des plaques de matériaux composites avancés. Il est à noter que l'importance d'inclure les effets de déformation de cisaillement transverse vient du fait que les matériaux composites présentent des rapports très élevés entre les modules de Young dans le plan et les modules de cisaillement transverse. Par conséquent, la déformation par cisaillement est plus prononcée et joue un rôle important dans le comportement global de ces matériaux [11]. Le CPT néglige l'effet de déformation par cisaillement transverse et donne des résultats acceptables pour les structures minces (plaques) fonctionnellement graduées (FG) seulement [12-18]. La théorie FSDT définit un champ de déplacement linéaire dans le sens de l'épaisseur et donne des

résultats acceptables pour des plaques moyennement épaisses et minces mais nécessite un facteur de correction de cisaillement difficile à trouver car dépend de la géométrie, des propriétés matérielles et des conditions de chaque problème [19]. La théorie FSDT permet de modéliser des plaques relativement épaisses et leur précision dépend de la validité du facteur de correction utilisé. Hosseini-Hashemi et al. [20] ont étudié l'analyse des vibrations libres de plaques FG rectangulaires moyennement épaisses sur des fondations élastiques Winkler et Pasternak. Malekzadeh et Alibeygi [21] ont présenté l'analyse vibratoire libre de plaques quadrilatérales droites à fonctionnellement graduée (FG) dans un environnement thermique utilisant la méthode de quadrature différentielle (DQM) basée sur le FSDT. Panda et Katariya [22] ont étudié la vibration libre et le comportement de flambage des panneaux composites stratifiés plats et courbés en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et basés sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). Kolahchi et al. [23] ont étudié la stabilité dynamique non-linéaire dépendant de la température pour une visco-plaque renforcée fonctionnellement graduée au CNT reposant sur une fondation élastomère orthotrope. Madani et al. [24] ont étudié la vibration libre d'une enveloppe cylindrique piézoélectrique renforcée par des nanotubes de carbone (NG) fonctionnellement graduée (FG) et soumise à des répartitions de température uniformes et non uniformes basées sur le FSDT en utilisant la méthode des cubes différentiels. Contrairement à la FSDT existante, Mantari et Granados [25-27] ont étudié l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques fonctionnellement graduée en utilisant une nouvelle théorie de première déformation de cisaillement (FSDT) avec un nouveau champ de déplacement incluant des termes entiers indéterminés. De même, Meksi et al. [28] ont étudié la flexion et la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie simple de plaque de déformation de cisaillement de premier ordre basée sur la position de surface neutre et reposant sur des fondations élastiques Winkler ou Pasternak. Afin d'inclure les effets de déformation de cisaillement, plusieurs théories de déformation de cisaillement polynomiales [29-31] et non polynomiales [32-36] d'ordre élevé (HSDT), qui sont basées sur une variation non linéaire à travers l'épaisseur des déplacements dans le plan, sont développés. Les (HSDT) satisfont les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques. Un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas requis. Les HSDT polynomiaux peuvent être basés sur l'expansion en série de Taylor de termes d'ordre élevé. Kar et al. [37] ont étudié l'effet de différentes charges thermiques sur le comportement de post-flambement thermique de panneaux de coque incurvés peu profonds à fonctionnellement

graduée basés sur la théorie du plan médian d'ordre élevé et les relations de déformation non linéaire de déformation de Green-Lagrange. Ferreira et al. [38] ont étudié la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées basée sur la théorie de la plaque de Reddy en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et la méthode de collocation globale avec des fonctions de base radiales multi-quadratiques. Kar et al. [39] ont analysé les réponses de flambement des panneaux de coque incurvés à fonctionnellement graduée sous charge de température élevée, en utilisant une théorie déformable de cisaillement d'ordre élevé et une méthode d'étapes par éléments finis; les modules de matériaux effectifs ont été calculés en utilisant le modèle micromécanique de Voigt à travers la distribution de loi de puissance avec et sans propriétés dépendant de la température. Baseri et al. [40] ont étudié le comportement de flambage de la plaque composite stratifiée intégrée dans un milieu élastique en utilisant la théorie des plaques de Reddy. Kar et Panda [41] ont étudié le comportement de vibration libre non linéaire d'un panneau sphérique à fonctionnellement graduée basé sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée pour une coque peu profonde en prenant une cinématique non linéaire de type Green-Lagrange. Hosseini-Hashemi et al. [42] ont présenté une solution précise de forme fermée pour l'analyse vibratoire transversale des plaques rectangulaires de type Lévy basée sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre. Récemment, la théorie de la déformation de cisaillement polynomiale d'ordre élevé (HSDT) a été utilisée dans un environnement différent pour obtenir les réponses structurelles des structures composites stratifiées et de plaques fonctionnellement graduée, voir par exemple [43-46]. Contrairement aux théories HSDT polynomiales, les HSDT raffinés non polynomiaux peuvent être développés en utilisant des fonctions de déformation de forme non polynomiales. Dans ce contexte, un grand nombre d'études ont été réalisées pour étudier les réponses mécaniques des plaques composites avancées en utilisant des fonctions non polynomiales (sinus, sinus hyperbolique, cosinus, exponentielle et tangente) pour décrire le gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque et prendre en compte les effets de déformation transversale en cisaillement. Neves et al. [47,48] ont utilisé les fonctions non polynomiales sinusoïdales [47] et hyperboliques [48] pour les déplacements transversaux et dans le plan pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées. Mantari et al. [35,49] utilise également la fonction trigonométrique non polynomiale dans le domaine du déplacement pour l'analyse en flexion de plaques composites stratifiées, sandwiches et isotropes. Mahi et al. [50] ont étudié l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques composites stratifiées, sandwiches, isotropiques et



fonctionnellement graduée, en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique. Neves et al. [51] ont étudié l'analyse de flambage de plaques sandwich avec des peaux fonctionnellement graduées, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement sinus hyperbolique quasi-3D. Récemment, Mantari et Guedes Soares [52,53] ont développé des HSDT quasi-3D optimisés pour des plaques et des coques composites avancées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé non-polynomiale. Mantari [54] a présenté une solution en forme fermée d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D (HSDT) de type hybride généralisé pour l'analyse en flexion de coques à fonctionnellement graduées. Tounsi et ses collègues [55-58] ont développé une nouvelle théorie des plaques raffinée et robuste pour la vibration libre de la plaque FGM avec seulement quatre fonctions inconnues utilisant diverses fonctions non polynomiales. Afin d'introduire les effets transversaux de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur, les théories quasi-3D, qui sont basées sur une variation d'ordre élevé des déplacements dans le plan et dans le sens transversal, sont développées. En utilisant ces théories, bien que beaucoup de travail ait été fait pour les plaques FG [59-65]. Plus récemment, Tounsi et ses collègues [66-69] ont développé une nouvelle théorie de la plaque raffinée pour le comportement mécanique d'une plaque simplement appuyée avec seulement quatre inconnues. Ces théories ont un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Par opposition à cinq ou même plus grand nombre dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Cette théorie ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et tient compte de la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement, et vérifie les contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. Il convient de noter que l'effet d'étirement de l'épaisseur est ignoré dans ces nouvelles théories à quatre variables et que le déplacement transversal est considéré comme constant dans le sens de l'épaisseur, comme dans les théories en plaques minces de type Kirchhoff-Love. Cela semble tout à fait insuffisant car les plaques FGM sont caractérisées par une forte variation des propriétés du matériau dans le sens de l'épaisseur [70]. Cet article vise à améliorer la théorie des plaques développée par Tounsi et ses collègues [64-67] en incluant l'effet dit d'étirement. En utilisant la théorie proposée, les deux analyses de vibration libre des plaques FG sont étudiées. Cette théorie n'a que cinq inconnues, ce qui est encore moins que les autres théories Quasi-3D. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation trigonométrique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur et satisfait aux

conditions de limite des contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Il convient de noter que la fonction sinusoïdale a été utilisée pour la première fois par Levy [71] et évaluée par Stein [72], puis largement utilisée par Touratier [32] et Zenkour [34]. Ces théories sont capables de représenter la section déformée dans la configuration déformée et les résultats obtenus à partir de ces théories montrent que cette théorie est capable de calculer les contraintes et les fréquences propres plus précisément que les autres théories. Dans cette étude, des solutions analytiques de vibration sont obtenues pour la plaque de FGM et la précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

Ce travail sera donc présenté selon l'organisation qui suit :

- Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application. Puis, nous avons cité les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM. A la fin nous avons terminé par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM.
- Dans Le deuxième chapitre nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), ainsi que les différents modèles de fonction de cisaillement transverse. En outre, ce chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés FGM en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Divers espèces pour les différents aspects des FGM sont exposées dans ce chapitre.
- Le troisième chapitre a pour objet de présenter la nouvelle théorie trigonométrique quasi-3D des plaques en se basant sur le principe d'Hamilton permettant d'établir les équations d'équilibre et les résoudre en utilisant les étapes de Navier. Dans cette théorie, nous avons introduit la déformation normale « effect of thickness stretching » avec seulement cinq variables pour résoudre les problèmes de vibration libre des plaques.

- Le quatrième chapitre présente la discussion des résultats obtenus par la nouvelle théorie à ordre élevé dans le cas de vibration libre de la plaque en matériau à gradient de propriétés (FGM) et compare les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Ensuite, la validation du modèle théorique proposé est effectuée pour démontrer l'efficacité du modèle.
- Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la nouvelle théorie à ordre élevé.

CHAPITRE I :

**Généralités Sur Les Matériaux à Gradient  
De Propriétés FGM**

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

### **I.1. Introduction :**

Les matériaux composites sont la forme la plus avancée de matériaux constitués de deux ou plusieurs constituants ayant des propriétés physiques et chimiques significativement différentes des matériaux individuels. Les matériaux composites permettent des combinaisons distinctes donnant une surface dure et résistante à l'usure et un noyau souple conformément aux exigences fonctionnelles de l'application. Hétérogénéité, anisotropie, symétrie et hiérarchie sont les principales caractéristiques des matériaux composites qui suscitent un intérêt particulier pour diverses applications. Le rapport résistance / rigidité élevé, la résistance de la râpe à la fatigue, à l'usure et à la corrosion, une fiabilité élevée, etc.. sont les avantages des composites par rapport aux métaux purs ou alliés. En dépit de tous ces avantages, les matériaux composites sont soumis à une transition abrupte des propriétés à l'interface, ce qui peut entraîner une défaillance des composants (par délamination) dans des conditions de travail extrêmes.

Cet inconvénient des composites conventionnels éliminés par une forme modifiée de composites appelés matériaux à gradient de propriétés (FGM). Ces matériaux remplacent l'interface nette par l'interface de gradient, ce qui permet une transition en douceur des propriétés d'un matériau à un autre. Ces matériaux avancés, dotés de gradients de composition, de structure et de propriétés spécifiques dans la direction privilégiée, sont supérieurs aux matériaux homogènes composés de constituants similaires [73]. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, le coefficient de Poisson, le module d'élasticité au cisaillement, la densité du matériau et le coefficient de dilatation thermique varient de manière régulière et continue dans les directions préférées des FGM. Les os, les dents, la peau et le bambou sont quelques exemples de matériaux à gradient de fonction naturel.

Le concept de matériaux à gradient de propriétés (FGM) a été développé pour la première fois par des chercheurs japonais en 1984. Ils ont conçu une barrière thermique à gradient de fonction avec une température extérieure de 2000 K et une température intérieure de 1000 K sur une épaisseur de 10 mm. Depuis lors, l'utilisation de matériaux à gradient

fonctionnel a été accrue dans divers domaines, notamment l'aérospatiale, les mines, l'énergie et la médecine. Les FGM présentent de nombreux avantages qui les rendent aptes à ces applications. Cela comprend une grande ténacité, une réduction des contraintes transversales dans le plan et dans l'épaisseur, une amélioration des performances des systèmes de barrières thermiques, etc. En raison de cette importance des FGM, de nombreux efforts ont été déployés pour améliorer le processus de fabrication et les propriétés des FGM. Il existe plusieurs méthodes de fabrication pour la fabrication de FGM, en fonction du type de FGM requis. Celles-ci incluent la métallurgie des poudres, le dépôt en phase vapeur, la méthode centrifuge et les techniques de forme libre solide. Parmi toutes ces méthodes, les techniques sous forme libre utilisant le laser, le plasma ou un faisceau d'électrons comme source d'énergie sont devenues très populaires ces dernières années [74].

## I.2. Concept des matériaux à gradient de propriété FGM :

Le matériau à gradient de propriété peut être fabriqué en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs matériaux, ou en variant la microstructure d'un composant, de telles sortes, que le nouveau matériau possèdera les propriétés voulues suivant la direction désirée. C'est donc un composite, un hétérogène à caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique [75] et homogènes à l'échelle microscopique.

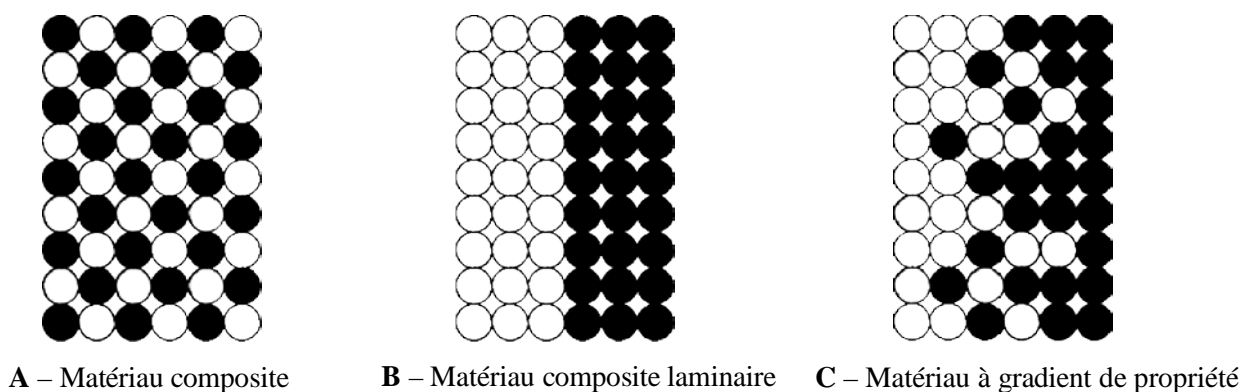


Figure I.1 : La distribution composante des matériaux [76]

Initialement conçus comme des boucliers thermiques pour les navettes spatiales et les réacteurs à fusion, les chercheurs et les concepteurs se sont intéressés à une combinaison de deux matériaux le métal et la céramique, l'un pour sa grande résistance à l'usure et à

l'oxydation du côté basse température, et l'autre pour sa résistance thermique du côté haute températures.

L'association de ces deux matériaux permet d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces, contre les agressions extérieures, en effet, la performance de la céramique à température élevée est plus attractive que celle des métaux, ainsi différentes qualités sont requises simultanément [77].

Le **tableau I.1.** regroupe les propriétés de chaque composant [75, 78]:

**Tableau I.1 :** Les propriétés du métal et de la céramique.

	Position	Propriétés
<b>Céramique</b>	Côté haute Température	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Faible réactivité chimique, bonne tenue aux corrosions.</li> <li>- Haute température de fusion ou de décomposition.</li> <li>- Haute dureté.</li> <li>- Hauts modules d'élasticité.</li> <li>- Charge à la rupture élevée.</li> <li>- Coefficient de frottement bas et bonne résistance à l'usure et l'oxydation.</li> <li>- Fragiles, très vulnérables aux défauts de petite taille et de caractéristiques dispersées.</li> </ul>
<b>Céramique / Métal</b>	Épaisseur intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Réduit les contraintes résiduelles.</li> <li>- Pas de problème d'interface.</li> </ul>
<b>Métal</b>	Côté basse Température	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance mécanique.</li> <li>- Conductivité thermique élevée.</li> <li>- Très bonne ténacité.</li> <li>- Bonne résistance à l'usure et l'oxydation.</li> </ul>

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la **figure I.2.** Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [79].

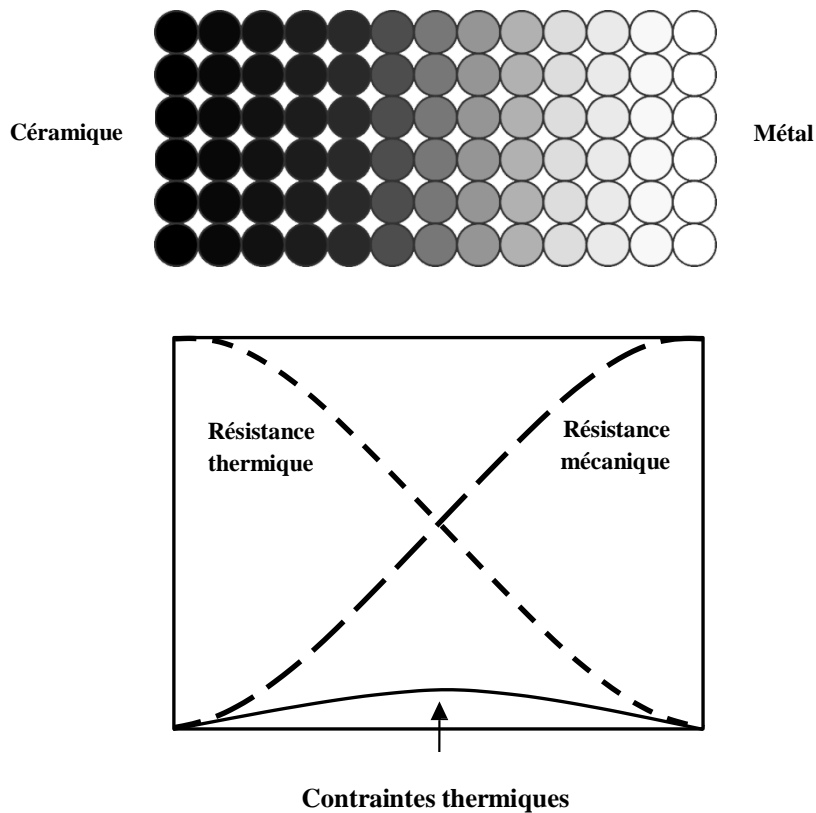


Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [80].

La figure I.3. montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



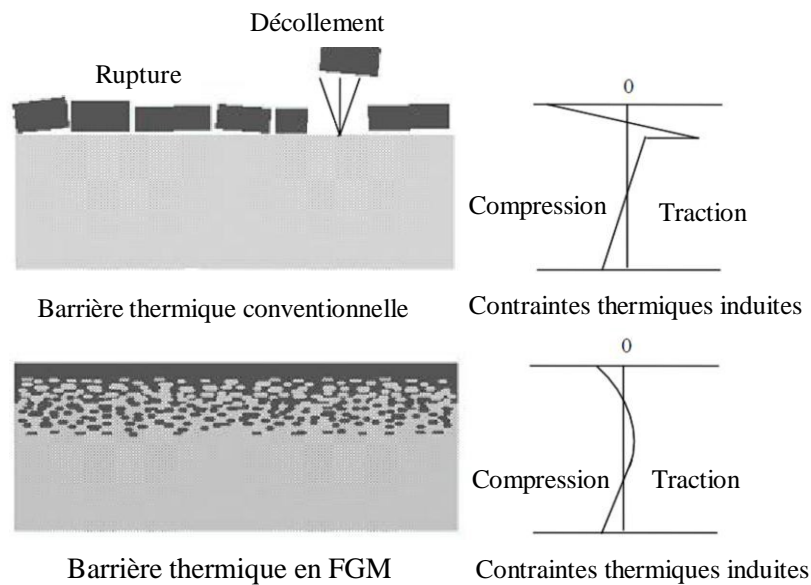


Figure I.3 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [80]

### I.3. Historique des matériaux à gradient de propriétés FGM :

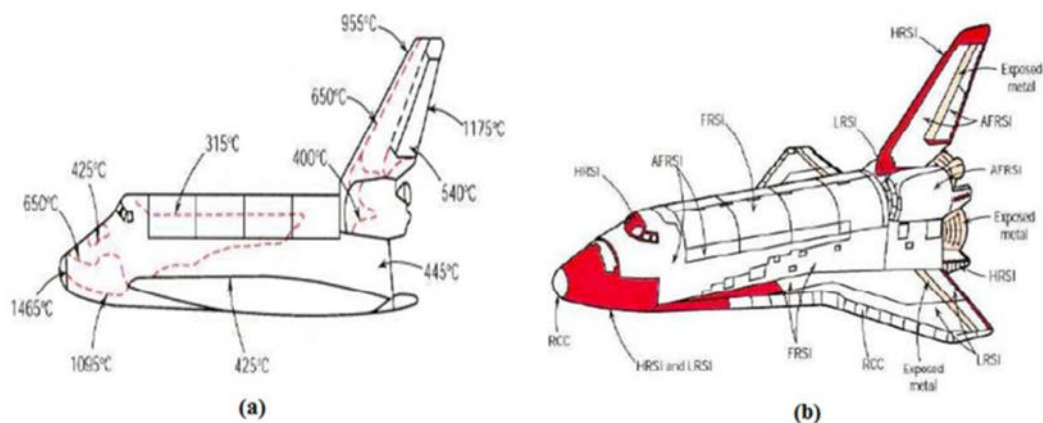
Le meilleur exemple de FGM est la peau humaine, qui procure résistance et qualités élastiques. Les matériaux de FGM impliquaient souvent deux constituants isométriques. Cela inclut les alliages de magnésium, aluminium, titane de céramique, acier, tungstène, etc. Les FGM ont un grand potentiel dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères, notamment les boucliers thermiques, les tubes d'échangeurs thermiques, les implants biomédicaux, les volants d'inertie et les revêtements à plasma pour réacteurs de fusion. , etc. Différentes combinaisons des fonctions habituellement incompatibles peuvent être utilisées pour créer de nouveaux matériaux pour l'aérospatiale, les usines chimiques, les réacteurs nucléaires, etc. Par exemple, une couche discrète de matériau céramique est collée à une structure métallique dans un revêtement de barrière thermique classique pour les applications à haute température.

La transition abrupte des propriétés des matériaux à l'interface entre des matériaux distincts peut être à l'origine de fortes contraintes inter laminaires et conduire à une déformation plastique ou à une fissuration. Ces effets néfastes peuvent être atténués par un nivellement spatial en douceur des constituants du matériau. Dans de tels cas, de grandes concentrations de céramique sont placées à des endroits corrosifs et soumis à des températures

élevées, tandis que de grandes concentrations de métal sont placées dans des régions où les propriétés mécaniques doivent être élevées.

L'application de ces matériaux avancés a été visualisée pour la première fois lors d'un projet d'avion spatial en 1984 au Laboratoire national de l'aérospatiale du Japon afin d'éviter les pointes de contrainte aux interfaces des panneaux revêtus de la navette spatiale.

Le concept de FGM a été appliqué avec succès dans les revêtements à barrière thermique où les exigences visent à améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion. Les systèmes de matériaux de recherche importants dans la technologie de fabrication des FGM sont les suivants: couches de céramique de protection extérieures en alumine « $\text{Al}_2\text{O}_3$ » et en zircone « $\text{ZrO}_2$ » sur des substrats à base de superalliage Ni (NiCrAlY).



**Figure I.4 :** Système de protection thermique dans la navette spatiale  
A- La variation de température lors de la rentrée dans l'atmosphère terrestre  
B - Emplacement des différents matériaux [81].

#### I.4. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés :

La fabrication des matériaux FGM est obtenue par le mélange de deux phases de matériaux distincts, par exemple, un mélange du métal et de céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules constituant des FGM ne peut pas être disponible. Ainsi, les propriétés effectives du matériau FGM, à savoir : (module d'élasticité, module de cisaillement, densité, etc...) sont évaluées seulement sur la base de la distribution de la fraction volumique des constituants et leur forme approximative. Plusieurs modèles de micromécanique ont été développés au cours des années pour déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes. Les

approches analytiques, la méthode des éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des matériaux FGM.

Les sujets les plus importants qui traitent la modélisation des structures en FGM sont: la déformation élastique, les contraintes élastiques, les déformations plastiques, le fluage dû à des températures élevées, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques de modélisation des FGM disponibles dans la littérature sont présentées comme suit :

#### **I.4.1. Estimation auto-cohérente « Self consistent estimates » :**

Cette méthode décrit ses estimations par la solution d'un problème élastique dans laquelle une inclusion ellipsoïdale est noyée dans une matrice possédant les propriétés effectives de matériau composite. Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau dont les propriétés effectives sont ceux du matériau composite homogénéisé recherché [82-84].

Cette méthode ne fait pas de distinction entre la matrice et les phases de renforcement et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans laquelle les rôles des phases sont échangés. Ceci le rend particulièrement adapté pour la détermination des modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure du squelette interconnecté comme le montre la Figure I.5. Il s'agit d'une méthode d'analyse rigoureuse applicable à des matériaux composites à deux phases isotrope.



**Figure I.5 :** Matériau à deux phases avec microstructure du squelette

#### I.4.2. Modèle de Mori-Tanaka :

Cette méthode fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée avec une matrice continue clairement défini et une phase particulière discontinue. Cette méthode suppose une petite particule sphérique noyée dans une matrice. La phase de matrice, est supposé être renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière.

$K_1$ ,  $G_1$  et  $V_1$  représente le module de compressibilité, le module de cisaillement et de la fraction volumique de la phase de matrice, respectivement, tandis que  $K_2$ ,  $G_2$  et  $V_2$  désignent le correspondant des propriétés du matériau et de la fraction volumique de la phase du renfort.

On remarque que  $V_1+V_2=1$ . La masse volumique effective peut être donnée par la loi des mélanges ( $\rho = \rho_1.V_1 + \rho_2.V_2$ ) [85, 86].

#### I.4.3. Modèles sphères composites :

Le modèle sphères composites a été introduite par Hashin [87]. Dans ce modèle, les propriétés effectives des matériaux composites isotropes ont été déterminées de façon analytique. Ce modèle est constitué par une gradation de taille de particules sphériques noyées dans une matrice continuée (figure I.6.) tels que les sphères remplissent complètement le volume du composite.

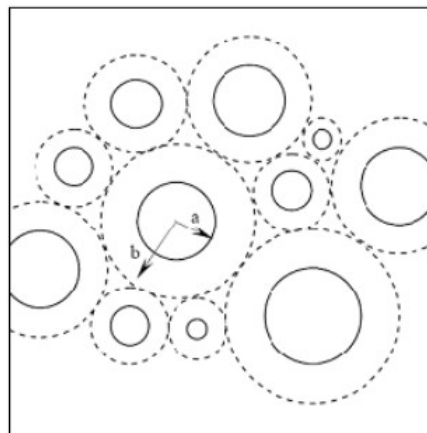


Figure I.6 : Modèle sphères composite

#### **I.4.4. Modèle d'assemblage de cylindres :**

Le modèle d'assemblage de cylindres est un modèle qui permet une détermination analytique des modules élastiques des composites, raisonnablement précise et exacte. Ce modèle est utilisé pour les composites orthotropes et nécessite à la fois que la fibre de renfort et la matrice soient isotropes, tandis que les éléments de volume représentatifs « VER » (élément qui représente le volume) est transversalement isotrope dans des plans matériels qui sont perpendiculaires à la direction des fibres [88].

#### **I.5. Méthodes de fabrication des matériaux à gradient de propriétés FGM :**

Plusieurs techniques sont disponibles pour produire des matériaux de qualité fonctionnelle (FGM). Peu d'entre eux sont décrits ci-dessous en détail.

##### **I.5.1. Techniques de dépôt en phase vapeur :**

Les techniques de dépôt en phase vapeur décrivent diverses méthodes de dépôt sous vide qui peuvent être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques ne peuvent être utilisées que pour produire des FGM minces. Les différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Celles-ci sont énergivores et produisent des jauges toxiques comme sous-produits [89]. Parmi les autres techniques basées sur le dépôt permettant de déposer des revêtements minces à gradient fonctionnel, il convient de citer le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau d'ions (IBD) et la synthèse à haute température autogame (SHS) [90]. Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des FGM épais.

##### **I.5.2. Métallurgie des poudres :**

Une technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des FGM de type épais à structure discontinue (par étapes). Le processus est réalisé en utilisant des étapes comprenant la pesée et le mélange de poudre selon la distribution spatiale prédéfinie selon les exigences fonctionnelles, l'empilement et le pilonnage des poudres pré-mélangées, et enfin le frittage [91].

### **I.5.3. Méthode centrifuge :**

La méthode centrifuge permet de produire des FGM épais à structure continue. Il utilise la force de gravité par rotation du moule pour produire des matériaux de calibre fonctionnel [92]. La différence de densité des matériaux et la rotation des moisissures produisent des FGM. Cette méthode présente deux inconvénients: elle ne peut produire que des FGM de forme cylindrique et il existe une limite quant au type de gradient qui peut être produit.

### **I.5.4. Techniques de fabrication libre / fabrication additive (AM) :**

Fabrication de forme libre solide (SFF) / Fabrication additive (AM), également appelée impression 3D, est un processus consistant à assembler des matériaux pour créer des objets à partir de données de modèle 3D, généralement couche après couche, par opposition à la technologie de fabrication soustractive [93]. Ce procédé de fabrication sans outil permet de produire des pièces métalliques entièrement denses en un temps bref, avec une grande précision. Les procédés Metal AM peuvent être classés en deux groupes principaux, les technologies basées sur les technologies de fusion en poudre (PBF) et les technologies basées sur le dépôt d'énergie dirigé (DED). Ces deux technologies peuvent en outre être classées en fonction du type de source d'énergie utilisée. Dans les technologies à base de PBF, l'énergie thermique fusionne sélectivement les régions du lit de poudre. Le frittage / fusion sélectif au laser (SLS / SLM) et la fusion par faisceau d'électrons (EBM) sont les principaux processus représentatifs des technologies à base de PBF. Dans les technologies basées sur le DED, l'énergie thermique focalisée est utilisée pour fusionner les matériaux (sous forme de poudre ou de fil) en les faisant fondre au moment de leur dépôt. La mise au point par laser (LENS), le dépôt direct de métal (DMD), la fabrication sous forme de faisceau d'électrons (EBFFF) et la technologie AM à l'arc sont quelques-unes des technologies populaires à base de DED.

La plupart des méthodes SFF / AM mentionnées ci-dessus sont capables de produire des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) à partir de revêtements épais et de pièces épaisses complexes.

Les avantages offerts par les techniques AM telles qu'une utilisation accrue des matériaux, une vitesse de production, une liberté de conception, une capacité de production de pièces compliquées et une intensité énergétique moindre suscitent un intérêt particulier dans la fabrication de FGM pour différentes applications.

Les technologies AM basées sur la fusion en poudre (PBF) telles que la fusion sélective au laser (SLM) et la fusion par faisceau d'électrons (EBM) sont des méthodes très populaires

pour la production de pièces complexes en raison de leur grande précision et de leur finition de surface comparé aux technologies à déposition d'énergie dirigée. Cependant, les technologies à base de PBF sont moins flexibles que les technologies à base de DED en ce qui concerne la fabrication de matériaux à gradient de fonctionnalité. Cela est dû au fait que le gradient de matériau en faisant varier la composition chimique de la poudre n'est pas possible. Cependant, ces méthodes peuvent produire des FGM épais en contrôlant la porosité ou en introduisant différents types de structures en treillis dans les pièces à fabriquer.

Les techniques AM basées sur le dépôt d'énergie dirigé (DED) sont les méthodes les plus pratiques pour produire des FGM car elles peuvent produire des FGM à partir de revêtements épais vers des pièces épaisses ayant un gradient continu ou discontinu. Ces méthodes peuvent produire des FGM avec une adhérence et des propriétés mécaniques supérieures à celles des technologies à lit de poudre. Le dépôt de métaux au laser (LMD) et le dépôt de forme libre par faisceau d'électrons (EBFFF) / la fabrication additive de faisceaux d'électrons (EBAM) sont des méthodes populaires basées sur les systèmes AM basés sur le DED qui peuvent être utilisés pour fabriquer différents types de FGM.

#### **I.5.4.1. Dépôt de métal au laser (LMD) :**

La mise au point par laser (LENS) et le dépôt direct de métaux (DMD) sont les principaux procédés basés sur la technologie DED qui utilise le faisceau laser comme source d'énergie et une matière première sous forme de poudre. Le procédé LENS a été développé à l'origine par les laboratoires nationaux Sandia en 1997, puis concédé sous licence à Optomec (États-Unis), tandis que le procédé DMD a été développé conjointement par le groupe POM et l'Université du Michigan [94, 95]. Dans ces processus, un faisceau laser de forte puissance est utilisé pour créer un pool fondu sur le matériau de base, puis le matériau en poudre est injecté dans le pool fondu à l'aide de buses. La poudre livrée au point du faisceau laser est absorbée dans le bain de fusion et crée un dépôt. Comme le montre la [figure I.7](#), la table de travail peut se déplacer dans la direction x - y pour obtenir la coupe transversale souhaitée du modèle en tranches, puis les couches suivantes peuvent être déposées en incrémentant la tête de dépose dans la direction z pour compléter l'objet. Le dépôt de couches est répété jusqu'à ce que le composant tridimensionnel souhaité ait été formé de manière additive. La poudre de métal est acheminée par des buses et répartie sur la circonférence de la tête de dépôt soit par gravité, soit à l'aide d'un gaz vecteur inerte.

L'ensemble du processus est effectué sous atmosphère d'argon contrôlée, où les niveaux d'oxygène sont maintenus au-dessous de 10 ppm.

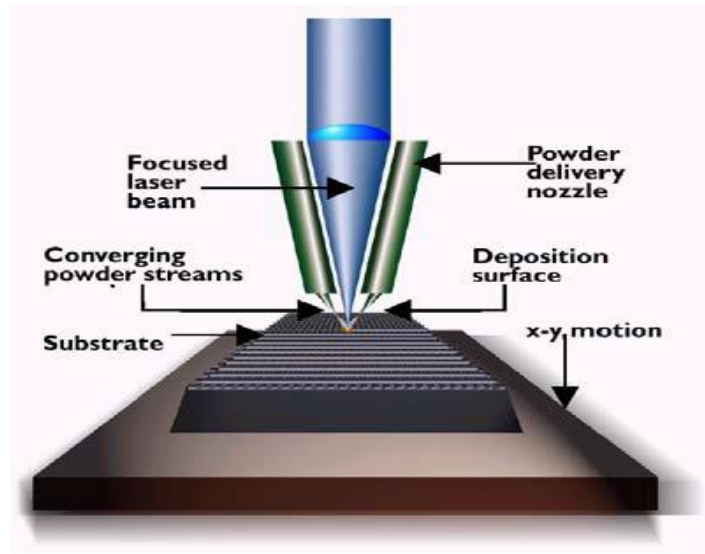


Figure I.7 : Processus de mise en forme de base du réseau par laser [96].

La technique de déposition dirigée d'énergie (DED) de métal à base de laser (AM) est la technologie la plus appropriée pour produire des FGM. Tous les types de FGM, y compris les types continu / discontinu structuré et mince / épais, peuvent être facilement fabriqués en utilisant un dépôt de métal au laser (LMD). Des poudres pré-alliées peuvent être utilisées pour produire des FGM de type discontinu. Alors que les poudres élémentaires peuvent être livrées en quantités précises dans la zone de fusion en utilisant des alimentations séparées pour générer divers alliages et matériaux composites de manière graduelle. Avec l'adoption de cette technique, le nombre de FGM peut être transformé en formes complexes, car le taux de dépôt de poudre élémentaire peut être contrôlé pour chaque alimentateur pendant la fabrication de chaque couche et le produit final obtenu en quelques heures [97].

#### I.5.4.2. Fabrication directe par faisceau d'électrons :

Le dépôt direct par faisceau d'électrons (EBDM) est une autre technologie basée sur le dépôt d'énergie dirigé (DED) qui utilise un faisceau d'électrons comme source d'énergie et une matière première sous forme de fil. Cette technologie a été développée par Sciaky (Chicago, États-Unis) et est également connue sous le nom de fabrication additive par faisceau d'électrons (EBAM). Ce processus permet de produire des composants de taille moyenne à



grande, proches du réseau, à l'intérieur d'une chambre à vide directement à partir d'un modèle numérique. Après la fabrication, le composant nécessite des opérations de finition telles que le traitement thermique et l'usinage. La taille maximale du composant devant être fabriqué par EBAM est limitée par la taille de la chambre à vide de la machine. Des fils de soudure disponibles dans le commerce sont utilisés comme matériau de dépôt. Le système à faisceau d'électrons standard est une soudeuse Sciaky de 60 kW / 60 kV. Le faisceau d'électrons peut être mis au point électroniquement et la puissance de sortie est évolutive sur une très large plage. Cela permet d'obtenir une très large gamme de vitesses de dépôt en utilisant le même système. Les taux de dépôt typiques des systèmes EBAM vont de 3 à 9 kg / h, en fonction du matériau utilisé et de la complexité de la pièce. En outre, le système EBAM dispose d'un système de contrôle en boucle fermée dans lequel la taille du bain de fusion est surveillée en permanence et les paramètres sont ajustés pour maintenir la taille constante. Cela garantit une géométrie homogène des pièces, une microstructure et des propriétés mécaniques uniformes.



**Figure I.8 :** Fabrication additive par faisceau d'électrons par dépôt de double fil [98]

La technologie EBAM peut également produire divers types de matériaux à calibrage fonctionnel (FGM) en utilisant plusieurs buses d'alimentation en fil, comme illustré à la [figure I.8](#), sur un seul pistolet EB. Deux fils ou plus de différents alliages métalliques peuvent être contrôlés indépendamment et acheminés simultanément vers un seul bain fondu pour former des matériaux gradués. Les FGM de type revêtement et épais peuvent être formés de manière continue ou discontinue.

#### **I.5.4.3. Matériaux à gradient de propriétés FGM par les technologies de dépôt à l'arc :**

Il existe une large gamme de procédés de fabrication additive à base d'arc où l'arc (plasma, TIG, MIG) est utilisé comme source d'énergie et le matériau utilisé sous forme de poudre ou de fil. L'arc à plasma transféré (PTA) et le soudage à l'arc au plasma (PAW) sont des procédés AM à forme libre qui utilisent l'arc au plasma comme source d'énergie et comme matière première sous forme de poudre et de fil, respectivement. Le dépôt de métal façonné (SMD) est une autre technique AM qui utilise le soudage au tungstène sous gaz inerte (TIG) ou au métal inerte (MIG) avec un matériau sous la forme de fils pour la fabrication de formes libres. Étant donné que la plupart de ces systèmes sont du type à alimentation en fil, ils sont également connus sous le nom de systèmes de fabrication additive assistée par fil (WAAM).

Un grand nombre de configurations de système peut être obtenu en intégrant des systèmes de soudage conventionnels à des robots, des manipulateurs ou des portiques d'automatisation. Tous ces processus avec un blindage adéquat contre les gaz inertes ont un fort potentiel de production de pièces de taille moyenne à grande, de forme proche du filet, à un coût bien inférieur à celui des processus basés sur le laser et le faisceau d'électrons.

Peu de systèmes AM à base de soudage ont été développés, capables de déposer des matériaux à gradient de propriétés. Dans ce cas, deux fils de remplissage sont commandés séparément et fournis à l'arc (TIG ou MIG) pour le dépôt. Plusieurs études ont été menées pour démontrer l'efficacité des configurations AM basées sur des arcs pour produire des FGM. Sajan Kapil et al [99] a fabriqué avec succès un alliage Al-Si ayant un gradient de conductivité thermique. Il a été fabriqué à l'aide d'une machine de fabrication en couches hybride (HLM) qui combine un système de dépôt à 3 axes à commande numérique par ordinateur et un système de dépôt par soudage à l'arc avec un gaz en métal (GMAW). S. Suryakumar et al. [100] ont montré deux manières différentes de fabriquer des matériaux à gradient de propriétés en utilisant le dépôt par soudure. Les FGM peuvent être produites en faisant varier les paramètres du processus ou en utilisant un double dévidoir qui peut être guidé et contrôlé séparément.

## **I.6. Domaines d'applications :**

### **I.6.1. Domaines d'applications dans divers domaines :**

Ces dernières années, l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (FGM) suscite un intérêt croissant en raison de leurs nombreux avantages par rapport aux matériaux composites. En raison de la variation graduelle de la composition, les propriétés des FGM changent de manière significative et continue d'une surface à l'autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface tels que les concentrations de contraintes et la mauvaise adhérence [101]. L'utilisation des FGM augmente dans les secteurs de l'aérospatiale, de la défense, du nucléaire, du biomédical et de l'électronique.

Les FGM sont principalement utilisées dans les applications où la combinaison de deux propriétés extrêmes est requise dans un seul composant, par exemple la dureté et la ténacité [102]. Dans le cas d'aube de turbine, des propriétés de résistance thermique et anti-oxydation sont requises du côté des hautes températures et la résistance mécanique et de la ténacité sont requises du côté des basses températures. Pour répondre à ces exigences, les aubes de turbine ont été utilisées pour la fabrication en utilisant des composites métal-céramique [103]. Cependant, la différence de propriétés entre deux matériaux créait des contraintes résiduelles et des problèmes d'adhérence à l'interface pouvant conduire à une défaillance. Une aube de turbine fabriquée à l'aide de FGM présente un changement de propriété régulier de la céramique au métal et diminue les problèmes d'interface [104]. La figure I.9 montre une aube de turbine fabriquée à l'aide de FGM, dans laquelle des propriétés telles que la conductivité thermique et la résistance mécanique sont progressivement dégradées d'une zone métallique à une zone céramique.

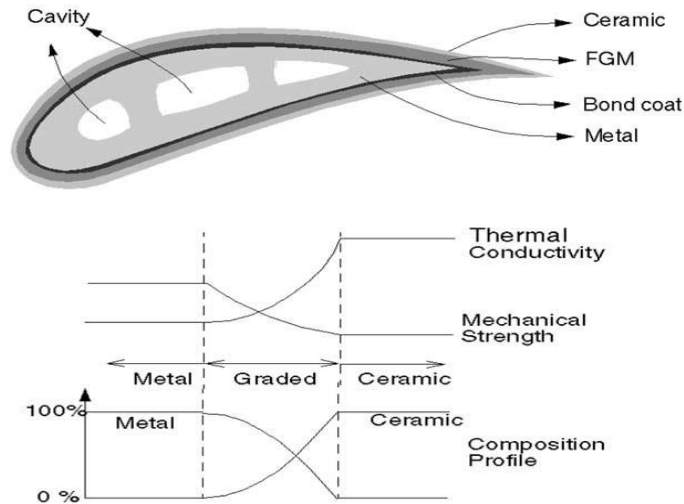


Figure I.9 : Propriétés matérielles des aubes de turbine contenant des FGM [105]

Les applications telles que les outils de coupe et les pièces de machine nécessitent de la chaleur, de l'usure, des chocs mécaniques et une résistance à la corrosion. La fiabilité et le rapport coût / performance jouent un rôle majeur dans ces applications [102]. La figure I.10 montre des outils de coupes composites et FGM avec une tige en métal et une pointe en céramique. Un outil composite subit une transition abrupte des propriétés du métal vers la céramique, ce qui peut entraîner des contraintes résiduelles et une défaillance de l'outil. Cependant, l'outil de coupe FGM dans lequel le matériau FGM utilisé entre le métal et la céramique augmente la résistance thermique et la durée de vie prévue de l'outil.

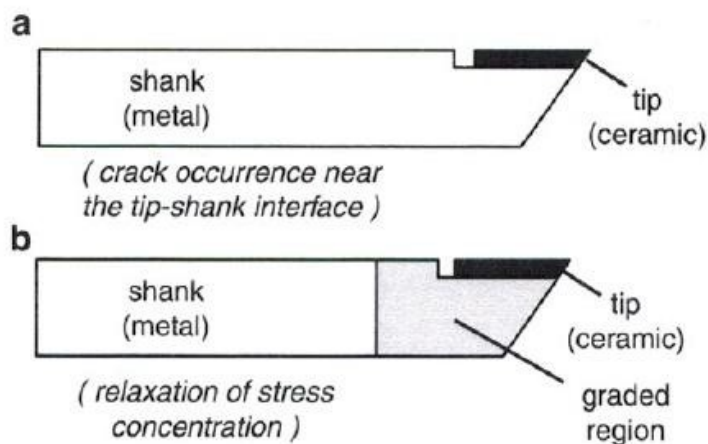


Figure I.10 : Outil de coupe de métaux conventionnel et FGM [106]

Les FGM métallo-céramiques sont également utilisées dans les armures [107, 108], alors que la surface avant en céramique dure émousse le projectile, tandis que la surface arrière en métal capture les fragments et empêche la pénétration [109]. Des FGM similaires trouvent également des applications en tant que vannes résistant à la chaleur des moteurs à combustion interne [103]. Les revêtements de barrières thermiques à classification fonctionnelle (FTBC) utilisant diverses techniques de pulvérisation sont des méthodes populaires de production de telles FGM [110, 111].

Un autre domaine émergent pour les FGM est le secteur biomédical où un joint de prothèse à gradation fonctionnelle peut augmenter la force adhésive et réduire la douleur [112].

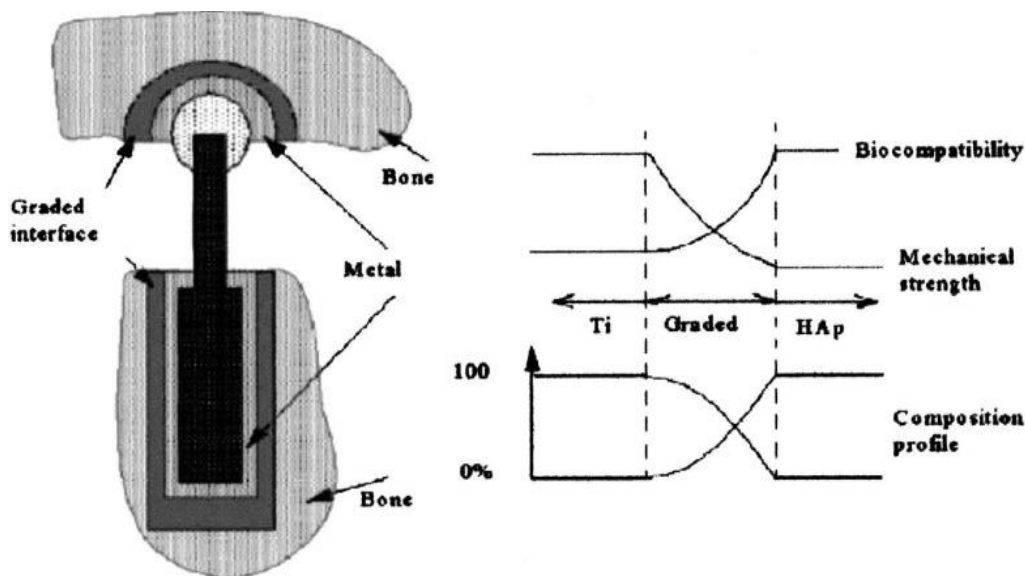


Figure I.11 : Articulation de prothèse à l'aide de FGM [113]

La performance de l'articulation de prothèse métallique peut être améliorée en utilisant un matériau à gradient de fonctionnalité présentant une biocompatibilité élevée en surface. Comme le montre la figure I.11, la propriété de biocompatibilité augmente et la résistance mécanique décroît à mesure que nous passons du métal à l'os.

Nombre de technologies basées sur la diffusion et le dépôt sont utilisées pour améliorer les propriétés de surface des composants. Cependant, récemment, il a été observé que leurs performances peuvent être encore améliorées en combinant des processus de diffusion et de dépôt. La combinaison de processus de diffusion comme la nitruration, la nitro-carburation, etc. avec des processus de dépôt tels que le PVD, les revêtements de type CVD de type dur

permet d'obtenir un effet de gradient fonctionnel qui améliore les propriétés [114]. Ces traitements sont bien connus sous le nom de traitements de surface duplex, dans lesquels les processus de diffusion (nitruration, boruration, etc.) sont combinés à des procédés de revêtement (tels que la diffusion PVD, CVD ou la diffusion thermo-réactive TRD). Les technologies de dépôt peuvent produire une couche dure et résistante à l'usure sur une surface métallique. Cependant, l'épaisseur de ce revêtement est très faible et il y a un changement soudain de propriétés entre le revêtement et le matériau du substrat. Cela pourrait entraîner une défaillance prématurée du revêtement pendant les conditions de service par délamination du revêtement. Le traitement de diffusion thermochimique, tel que la nitro-carburation avant le dépôt d'un revêtement dur, peut former une structure graduée de la surface au substrat et constitue une sous-surface résistante et solide pour le revêtement dur [115]. Il est également observé qu'une telle structure graduée peut déplacer le mécanisme de défaillance, Ainsi, le traitement de surface Duplex impliquant un dépôt nitro-carburant et thermo-réactif peut conserver les effets bénéfiques des deux traitements et en éliminer les inconvénients en formant une structure graduée de la surface à la base.

Parallèlement à toutes ces applications, les FGM sont également utilisés dans les actionneurs piézoélectriques [116], systèmes de protection thermique à niveaux fonctionnels pour plans hypersoniques et supersoniques [modèles-pap et analyse-206] et systèmes de planchers chauffants à niveaux fonctionnels [117].

## **I.6.2. Domaines d'applications dans le Génie civil :**

### **I.6.2.1. Dans les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements) :**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériaux rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

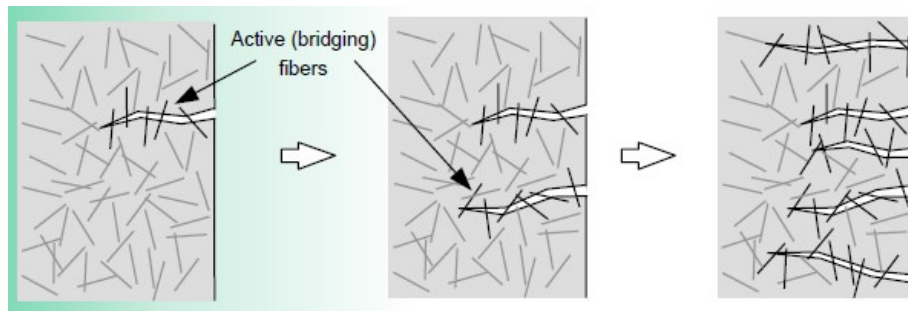


Figure I.12 : La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides.

#### I.6.2.2. Dans les chaussées souples :

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

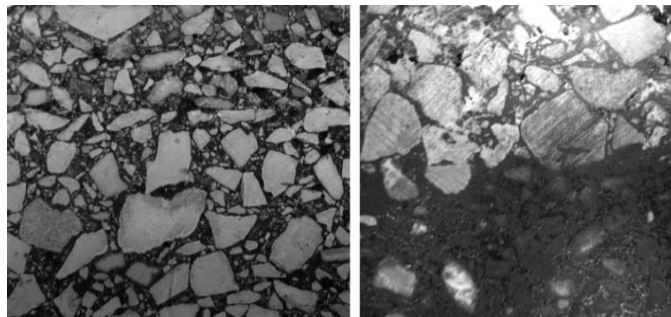


Figure I.13 : La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement.

#### I.6.2.3. Dans les grands vitrages des zones chaudes :

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

#### I.6.2.4. Dans les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel) :

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM est une solution efficace.

### I.6.2.5. Dans les joints des charpentes métalliques :

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre de élément de nature différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints en FGM est une solution optimale.

### I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

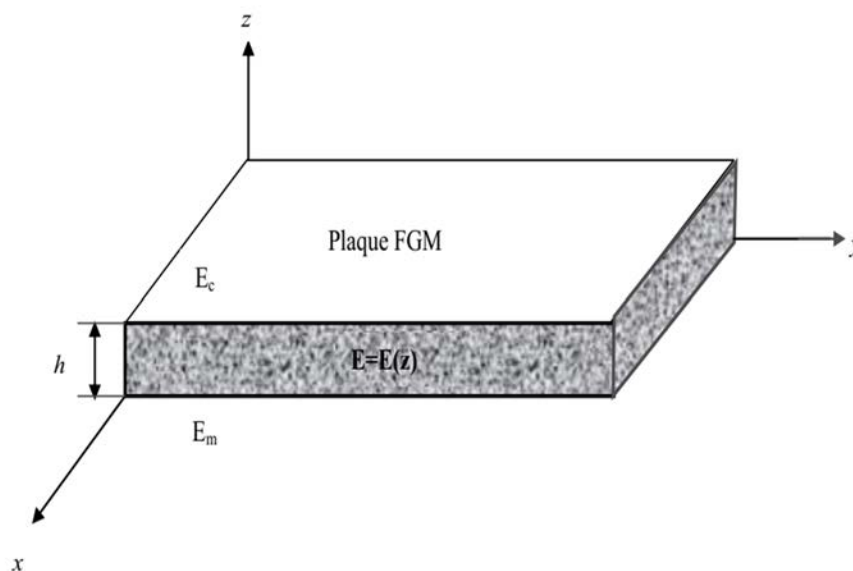


Figure I.14 : Géométrie d'une plaque en FGM.



Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés matérielles, module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe  $z$ ),  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ .

Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

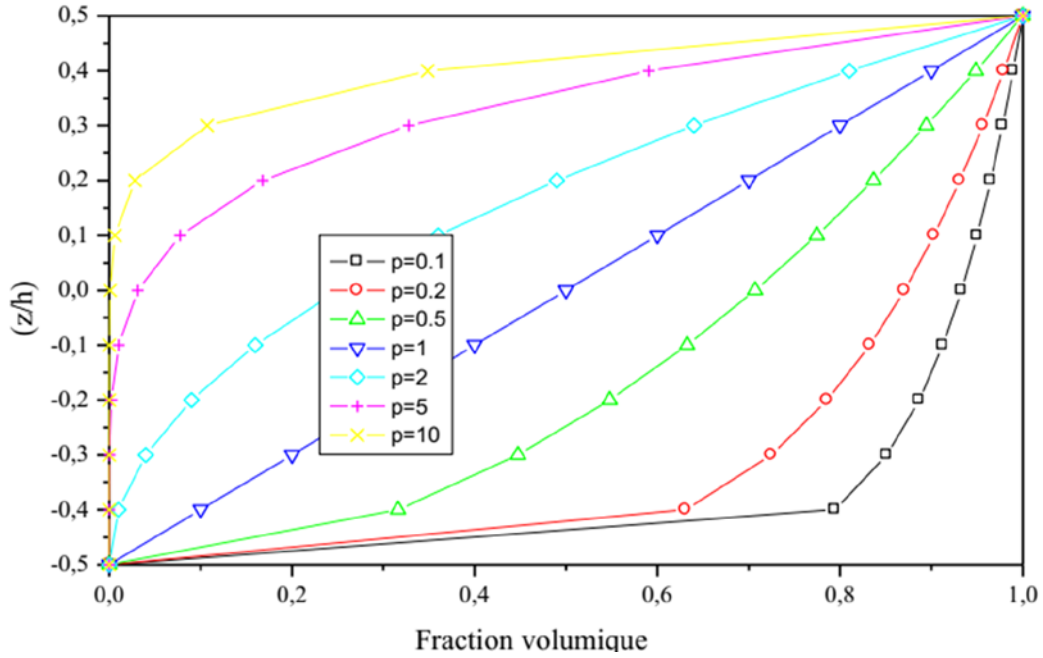
La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une fonction de loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où:  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface du métal (surface inférieure :  $z = -h/2$ ) et de la surface du céramique supérieure :  $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la [figure I.15](#) ci-dessous :



**Figure I.15 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

On distingue clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .

### I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [118]. Par conséquent, [119] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

Et en utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé comme suit :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.16 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

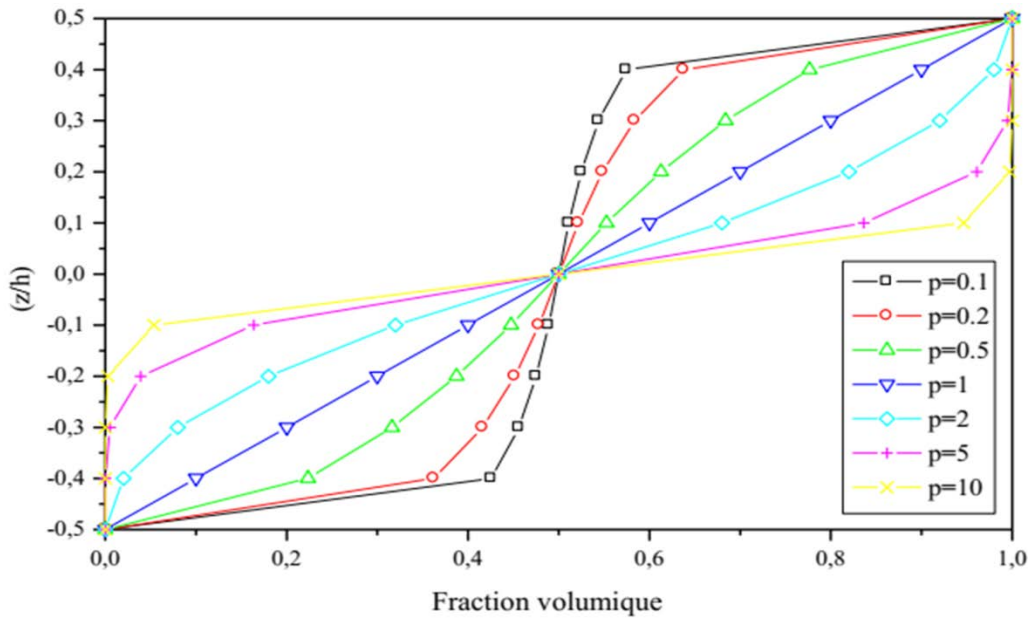


Figure I.17 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

La fonction exponentielle est la plus utilisée pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM. Elle s'écrit de la forme suivante :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right)$$

La figure I.18 ci-dessous représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

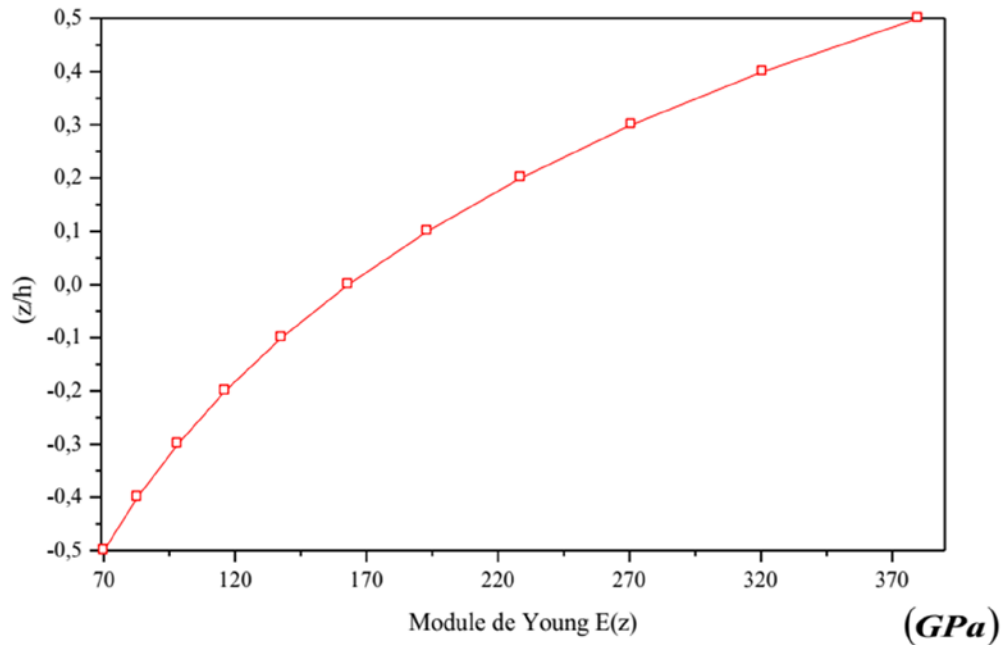


Figure I.18 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.8. Conclusion :

L'objectif de ce chapitre est de présenter et définir la notion d'un matériau à gradient de propriétés FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique des matériaux à gradient de propriétés FGM, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Puis, nous avons cité les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM. A la fin nous avons terminé par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

## CHAPITRE II :

# **Revue bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)**

## CHAPITRE II : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS (FGM)

### **II.1. Introduction :**

D'ordre général, pour modéliser le comportement d'un solide, soumis à un chargement quelconque, il est impératif de connaître le déplacement de chaque point de ce solide, dans les 3 directions de l'espace, par rapport à sa position au repos. Ces déplacements dépendent des propriétés physique du ou des matériaux le constituant (Module d'élasticité, masse, coefficient de poisson, coefficient de dilatation thermique,...etc.), de sa géométrie, de ces conditions aux limites, de la nature et de l'intensité de la charge. La science qui prédit le mouvement de chaque point d'un solide est la mécanique des milieux continus, cette discipline purement théorique est évolutive, il n'est donc pas étrange de voir des corrections, des améliorations, de nouvelles approches ou de nouvelles hypothèses.

Une plaque est un solide dont l'épaisseur est plus petite par rapport aux deux autres dimensions. A priori, il faudrait utiliser les équations dans un espace de trois dimensions pour décrire ses déplacements, mais compte tenu de la géométrie particulière d'un tel solide, il n'est pas écarté de chercher à restreindre le problème à une équation dans un espace de deux dimensions, décrivant le comportement du plan moyen de la plaque, et permettant ainsi de réduire la taille des calculs.

### **II.2. Historique de développement de la théorie des plaques :**

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquant l'évolution de la théorie des plaques.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

En 1764, par analogie aux poutres, Leonhard Euler est arrivé à définir une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration libre de la peau des tambours assimilée à une membrane élastique [120].

En 1787, Ernst Chladni, physicien allemand, connu pour être le fondateur de l'acoustique moderne, publia ses études expérimentales sur les vibrations des plaques, où il cherchait une méthode de mesure de la vitesse du son dans les corps solides. L'expérience de Ernst Chladni consistée à faire vibrer des plaques de taille, de forme et d'épaisseur différentes, saupoudrées de sable fin, et déposées horizontalement sur un support fixe à leurs centres, à l'aide d'un archet. La vibration des plaques fait migrer les grains de sable des zones de forte vibration aux zones de faible vibration, faisant apparaître des figures correspondants aux différents modes de vibration des plaques.

En 1811, l'Académie Française des sciences a lancé un concours pour la détermination d'une théorie mathématique expliquant les travaux du physicien Ernst Chladni, et c'est en 1816 que Sophie Germain mathématicienne et philosophe française obtient finalement l'équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler tenant compte des rayons de courbure dans les deux directions perpendiculaires.

En 1821, Henri Navier présente un mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, ces derniers sont considérés comme le fondement de la théorie d'élasticité.

Les travaux de Henri Navier ont été suivi par d'autres travaux tels ceux d'Augustin Louis Cauchy, de Siméon Denis Poisson, de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron.

Gustav Robert Kirchhoff l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, a réussi par ces travaux, à cerner le champ de validité de la solution de Navier, en calculant toutes les composantes du champ de déformation et de contrainte. Et il constata que la solution classique ne satisfaisait pas les conditions aux limites en déplacement pour une plaque d'étendue finie (appuyée ou encadrée), mais précisa que l'écart tend à s'annuler lorsque l'épaisseur relative de la plaque tend vers 0 et c'est en 1850 qu'il arriva à établir de façon correcte des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

En 1888, Augustus Edward Hough Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, pour fonder une théorie des plaques minces.

C'est ainsi que les trois principales théories feront leurs apparitions dans les années qui suivent.

### **II.3. La théorie Classique des plaques minces de Love-kirchhoff (CPT) :**

Le modèle de Kirchhoff-Love dit de plaque mince ou théorie classique des plaques (Classical Plate Theory - CPT) est le plus communément utilisé [121]. Il s'appuie sur deux hypothèses qui permettent d'approcher ce qui se passe dans l'épaisseur d'une plaque élastique, homogène et isotrope.

1- Une section droite et normale au plan moyen avant déformation, reste droite et normale après déformation.

2- Le plan moyen ne subit pas de déformation dans son plan, on ne considère que le déplacement transversal.

Sous ces deux hypothèses, les déformations à l'effort tranchant, le champ des contraintes normales au plan moyen et l'effet de l'inertie de rotation sont négligés [122].

Le champ de déplacement s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{II.1}$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



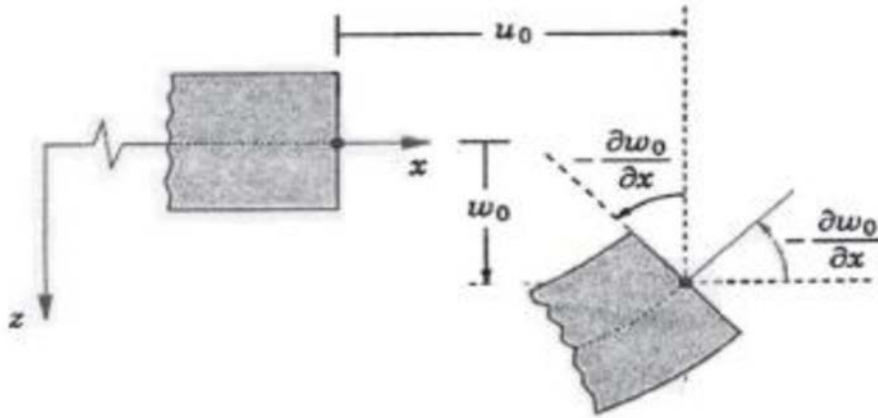


Figure II.1 : Illustration de la théorie de la plaque de Kirchhoff [121]

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élancement de la plaque, plus il est important plus les résultats sont précis.

#### II.4. La théorie des plaques épaisses :

##### II.4.1. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff).

Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Où  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements dans la surface moyenne et les rotations autour de l'axe y et x, respectivement, Figure II.2 Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des plaques classique décrite dans la section précédente en remplaçant  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ .

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

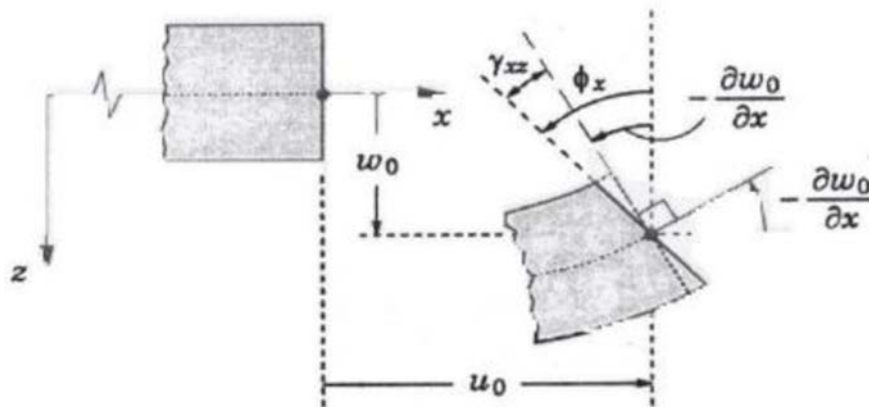


Figure II.2: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [123].

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

#### II.4.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Une meilleure modélisation du comportement réel des plaques épaisses, requière une reproduction fidèle de champ de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque, plusieurs théories ont été proposées, où la distribution de champs de cisaillement transverse est d'une part non linéaire et d'autre part les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  s'annulent sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

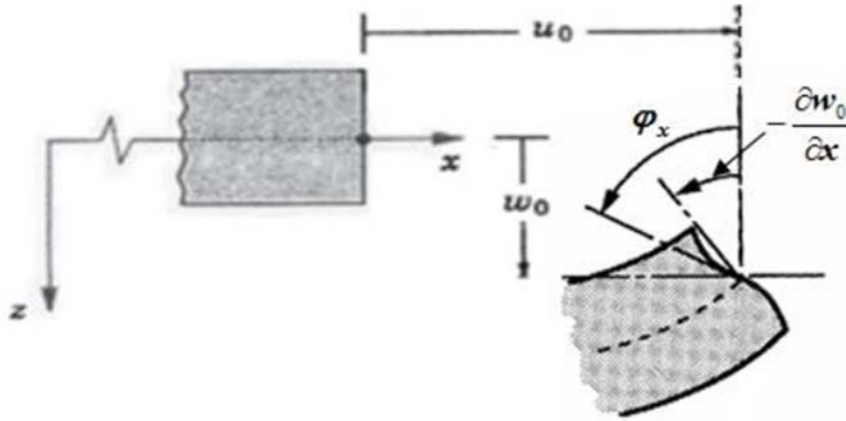


Figure II.3 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [123].

En général, le champ de déplacement dans la théorie d'ordre élevée s'écrit, comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement  $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .

#### II.4.2.1. Les différents modèles de fonction de cisaillement transverse :

Parmi les théories les plus communément utilisées par la communauté scientifique, celle du Reddy où le champ de cisaillement est cubique, sur un tel modèle la distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur est parabolique, ainsi les conditions sur les surfaces libres sont satisfaite, la fonction de cisaillement dite (Three Shear Déformation Theory –TSDT) s'écrit dans un tel modèle comme suit [124-126] :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)
 \tag{II.4}$$

Une autre théorie plus précise que la précédente a été proposée par Touratier, où le champ de cisaillement n'est pas polynomial mais sinusoïdale, la fonction de cisaillement dite (Sinus Shear Déformation Theory –SSDT) s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Karma et al. Ont proposé une autre approche du champ de cisaillement, une approche exponentielle, la fonction de cisaillement dite (Exponential Shear Déformation Plate Theory – ESDPT) s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

Soldatos et al. Ont proposé une approche hyperbolique du champ de cisaillement, la fonction de cisaillement dite (Hyperbolic Shear Déformation Plate Theory –HSDPT) s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.7})$$

Mantari et al. Ont proposé une autre approche sinusoïdale du champ de cisaillement, la fonction de cisaillement dite (New Sinus Shear Déformation Plate Theory –NSSDPT) s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

On cite aussi les théories d'ordre élevé de :

- Ambartsumian (1958) :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.9})$$

- Parabolique de Levinson (1980) :

-

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \quad (\text{II.10})$$

- Parabolique de Reissner (1975) :

-

$$f(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \quad (\text{II.11})$$

- Exponentielle de Aydogdu (2009):

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2 \left( \frac{z}{h} \right)^2}{\ln \alpha}} \quad \text{Avec} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.12})$$

- J. L. Mantari:

$$f(z) = \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{II.13})$$

- N. Grover et al. :

$$f(z) = \sin^{-1} \left( \frac{rz}{h} \right) \quad (\text{II.14})$$

Avec  $r = 3$

- Ait Atmane H. et Tounsi A. (2011) :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh \left( \frac{\pi}{h} z \right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.15})$$

- Tahar Hassaine Daouadji et Abdeouahed Tounsi **[127, 128]**:

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.16})$$

Avec la fonction  $\sec = \frac{1}{\cos}$

- Hebali et al. (2014) :

$$f(z) = \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{II.17})$$

## **II.5. Travaux de recherche sur les structures en FGM :**

Un grand nombre de travaux de littérature ont été réalisés dans le domaine des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ainsi que des techniques de traitement de matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été exposé par de nombreux chercheurs.

Pagano [129] et [130], Srinivas et Rao [131], et Srinivas et al. [132] ont développé les solutions exactes des plaques stratifiées simplement appuyées en utilisant la théorie de l'élasticité 3D. Les solutions de référence qu'ils ont fournies sont révélées très utiles pour évaluer la précision de diverses théories des plaques approximatives 2D par divers chercheurs. Leurs méthodes sont valables pour les plaques ou les coques laminées, pour lesquelles les propriétés du matériau sont constantes, mais elles ne sont pas applicables pour la recherche de solutions aux problèmes de plaque avec anisotropie continue des propriétés du matériau, comme avec les matériaux à gradient de propriétés (FGM).

Reddy JN [29] a publié une théorie simple d'ordre élevé pour des plaques composites stratifiées simplement appuyées, qui tiendrait compte de la déformation par cisaillement transverse parabolique contrairement à la FSDT dans laquelle une variation constante est supposée. Les résultats de déflexion sont comparés à ceux de la FSDT. Les résultats étaient plus précis et plus proches des solutions d'élasticité tridimensionnelle. Il a ensuite étendu son étude aux caractéristiques de vibration et de flambement en utilisant sa nouvelle théorie dans son travail (1985) et a montré que celle-ci produisait des résultats plus précis par rapport à FSDT.

Reddy J N [133] a présenté une formulation théorique basée sur les solutions de plaques rectangulaires de Navier et sur la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (HSDT) afin d'analyser des plaques à épaisseur fonctionnelle traversées. Un matériau à deux phases a été supposé isotrope, avec une distribution qui varie dans

l'épaisseur en fonction de la loi de puissance de l'exposant. Shen [134] a présenté l'analyse de flexion non linéaire d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée et simplement appuyée soumise à une charge transversale uniforme ou sinusoïdale dans des environnements thermiques, basant sur la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé de Reddy.

Sankar [135] a présenté une solution d'élasticité pour une poutre fonctionnellement graduée soumise à des charges transversales. Une théorie simple de la poutre de type Euler – Bernoulli est également développée sur la base de l'hypothèse selon laquelle les sections planes restent planes et normales par rapport à l'axe de la poutre.

Chakraborty et al. [136] ont mis au point un nouvel élément de poutre pour étudier le comportement thermo-élastique de structures de poutre à fonctionnellement graduée.

Reddy [137] a présenté des solutions pour les plaques rectangulaires fonctionnellement graduées basée sur la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre. Najafizadeh et Eslami [138] ont prédit l'analyse de flambement d'une plaque FGM circulaire encastree et simplement appuyée en utilisant la théorie classique des plaques (CPT).

Zenkur [34] a présenté la réponse statique pour une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée et simplement appuyée soumise à une charge transversale uniforme. Bhangale et al. [139] on étudie le comportement du flambement et aux vibrations d'une poutre sandwich en matériau (FGM) ayant une couche viscoélastique contrainte (VEL).

Prakash T, Singha MK [140] ont étudié l'influence de la position de la surface neutre sur le comportement non linéaire de la stabilité des plaques FGM asymétriques en utilisant les techniques FSDT et Newton-Raphson pour résoudre des équations non linéaires et ont découvert que le décalage de la surface neutre vers le côté riche en céramique et l'augmentation du décalage avec l'augmentation de l'indice de gradient, également obtenus à partir de la formulation actuelle basée sur la position de la surface neutre, sont qualitativement similaires à ceux de la formulation à base moyenne. Cependant, ils ont obtenu une flèche beaucoup plus haute hors du plan et sa différence par rapport aux calculs de surface moyenne augmentait avec l'augmentation de l'indice de gradient et la non-linéarité.

Sina [141] a développé une nouvelle théorie de la poutre, différente de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre traditionnelle, et l'a utilisée pour analyser la vibration libre de poutre fonctionnellement graduée.

Zenkour et Alghamdi [142] ont examiné le problème de flexion des plaques sandwich fonctionnellement graduées sous l'effet des sollicitations mécaniques et thermiques sur la base de la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdal.

Kazerouni et al. [143] ont présenté une analyse de déformation thermique des plaques minces fonctionnellement graduées sous deux cas de chargement thermique, variation uniforme et non linéaire de la température.

Benachour et al. [144] ont utilisé une théorie de plaque raffinée à quatre variables pour étudier le comportement en vibrations libres des plaques FG avec gradient arbitraire.

Efraim E. [145] a mis au point une formule empirique permettant de corréler les fréquences naturelles des plaques FGM avec celles des matériaux constitutifs, même celles ayant des coefficients de Poisson différents et les fréquences naturelles obtenues sont comparées aux résultats obtenus avec d'autres méthodes numériques pour les plaques annulaires FGM épaisses.

Henni Abdelaziz [146] a mis en œuvre une nouvelle théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé basée sur le déplacement pour la réponse statique des plaques sandwich fonctionnellement graduées.

Bachir Bouiadjra M. et al. [147] a présenté une théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement des plaques FG. Birman V [113] avait montré qu'il existait un fort couplage entre micromécanique et aspect de transfert de chaleur afin d'obtenir des résultats précis. Il a conclu qu'une fois la répartition de la température et des propriétés spécifiée, la réponse structurelle de la structure peut être analysée à l'aide des méthodes numériques si la variation de température est limitée à la direction de l'épaisseur, et par éléments finis ou aux méthodes de différence si une variation tridimensionnelle est supposée.

Kennedy D et al. [148] ont donné un modèle de plaque isotrope équivalent pour la plaque FGM basé sur le CLP. Cela ne vaut que pour les plaques de FGM minces où le cisaillement transversal est négligeable. Mantari et al. [149] ont discuté la réponse en flexion des plaques fonctionnellement graduées rectangulaires en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Une théorie des poutres de déformation en cisaillement



efficace basée sur la position de la surface neutre a été proposée par Ould Larbi et al [150] pour la flexion et la réponse des poutres FG en vibration libre.

Houari et al. [151] ont développé une nouvelle théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse de la flexion thermo-élastique des plaques FGM sandwiches. La même théorie a été utilisée par Bessaim et al. [61] pour l'analyse des vibrations statiques et libres des plaques FGM sandwiches. Saidi et al. [152] ont utilisé la nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique dans laquelle l'effet d'étirement (stretching) est incluse pour étudier la réponse en flexion thermomécanique des plaques FGM. Bachir Bouiadjra et al. [153] ont étudié le comportement de flambement thermique non linéaire des plaques FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale efficace. Sobhy [154] a étudié la vibration et le comportement en flambement des plaques sandwiches en matériau à gradient exponentiel (EGM) reposant sur fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Tran LV [155] ont réalisé une analyse iso-géométrique des plaques de FGM à l'aide de formulations HSDT. Les analyses statiques, dynamiques et de flambement ont été réalisés pour des plaques rectangulaires et circulaires pour différentes conditions aux limites et ils ont découvert que les résultats obtenus étaient en parfait accord avec ceux de plusieurs autres solutions publiées. Bui et al. [156] ont décrit les réponses transitoires et les fréquences propres de poutre sandwich avec un noyau inhomogène de fonctionnellement gradués (FG).

Ait Amar Meziane et al. [56] ont développé une théorie raffinée efficace et simple pour étudier les réponses au flambement et à la vibration libre des plaques sandwich exponentiellement gradués sous différentes conditions aux limites.

Hebali et al. [63] ont étudié les réponses en flexion et en vibration libre des plaques FG à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D. Nedri et al. [157] ont proposé une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique raffinée pour le comportement en vibration libre des plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques. Fekrar et al. [158] ont proposé une nouvelle théorie raffinée de cinq inconnus basée sur la position de la surface neutre pour l'analyse de la flexion des plaques à graduation exponentielle. Khalfi et al. [159] a présenté une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques FG solaires reposant sur une fondation élastique. Draiche et al. [160] ont examiné la vibration libre des plaques composites rectangulaires avec une masse de pièce en utilisant un modèle de plaque

à quatre variables trigonométriques. Klouche D. et al. [161] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables d'ordre « n » pour le comportement en flexion et en vibration libre des plaques FG. Belabed et al. [62] ont développé une théorie de déformation normale et de cisaillement simple et efficace d'ordre supérieur pour les plaques FG. Ait Amar Meziane et al. [56] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyse de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwichs sur fondations élastiques en considérant différents types de conditions aux limites.

Bourada et al. [162] a présenté une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich FG. Ait Atmane et al. [163] ont étudié l'effet d'étirement d'épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique des poutres FGM reposant sur fondation élastique. Kennedy D et al. [164] dans son travail ont présenté un modèle en couches équivalent pour la plaque FGM. L'idée était de remplacer la plaque FGM d'origine par une plaque isotrope équivalente, simplifiant ainsi l'analyse, il a présenté un modèle isotrope à une couche et un modèle à deux couches basé sur le CLP en supposant que le coefficient de Poisson est constant et variant, et a montré que cela peut être étendu aux plaques composites à trois couches et à quatre couches si nous utilisons le HSDT qui serait nécessaire pour les plaques FGM épaisses. Bernardo G M S et al. [165] ont étudié le comportement structurel (analyses de vibrations statiques et libres) de plaques de FGM en utilisant FSDT et diverses techniques numériques et lois de gradation comme la loi de puissance et la loi exponentielle, et sont comparées les unes aux autres ainsi qu'avec les résultats de MEF publiés. Les configurations en couches et continues ont été examinées et soulignent le développement d'un ensemble de méthodes et de modèles différents permettant de sélectionner celles qui répondent le mieux aux besoins de l'étude en termes de précision, de robustesse ou de coût de calcul. Zenkur [166] a présenté des solutions bidimensionnelles pour l'analyse de la flexion des plaques sandwich en métal-céramique fonctionnellement graduée et simplement appuyée. Mantari et al. [167] ont étudié une analyse statique de poutres simples et sandwich de fonctionnellement graduées (FG) en utilisant une théorie de type hybride quasi-3D simple et efficace à 4 inconnues, qui inclut à la fois des effets de déformation en cisaillement et d'étirement d'épaisseur.

Bennai et al. [168] a développé une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement et de déformation normale pour la vibration libre et le flambement des poutres sandwich FG dans diverses conditions aux limites. Ces constituants structurels tels que les

plaques appuyées sur une fondation élastique trouvent souvent des applications dans la construction nucléaire, mécanique, aéronautique, et des structures de génie civil (Houari et al, [151]; Bessaim et al, [169]; Hebbali et al, [63]; Zidi et al, [170]; Fekrar et al, [158]; Bousahla et al, [171]; Ramu et Mohanty, [172]; Hamidi et al, [173]; Ait Yahia et al., [174]; Mahi et al., [50]). Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs modèles de fondations ont été développés. Le plus simple est le modèle de Winkler ou le modèle à un seul paramètre (Winkler) [175] qui modélise la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux. Ce modèle a été amélioré par Pasternak [176] en prenant en compte un ressort de cisaillement qui simule les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle Winkler. Le modèle Pasternak ou le modèle à deux paramètres est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structurelles de la fondation et sera utilisé ici pour simuler les interactions entre la plaque et la fondation. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des effets de la fondation élastique pour une meilleure compréhension de la réponse de post-flambement des structures telles que les plaques et les coques.

## **II.5 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ainsi que les différents modèles de fonction de cisaillement transverse qui vérifient les contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

De plus, nous avons passé en revue quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés FGM en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Ces travaux montrent l'importance de l'utilisation des matériaux à gradient de propriété dans différents domaines. Divers espèces pour les différents aspects des FGM sont exposées dans ce chapitre.

Nous concluons ainsi, à travers les différents travaux exposés dans le présent chapitre, que la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) donne les meilleurs résultats et permet de réduire le temps de calcul.

## CHAPITRE III :

# **Analyse en vibration libre des plaques FGM**

## CHAPITRE III : ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM

### III.1 Introduction :

Dans notre travail, une nouvelle théorie quasi-3D avec seulement cinq variables incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur, et un champ de déplacement en fonction d'une variation sinusoïdale est utilisée pour résoudre les problèmes de vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement graduée (FGM).

En utilisation des termes d'intégrales au champ de déplacement, le nombre de variables de la théorie est réduit, ce qui permet d'économiser le temps de calcul. Sur la base du principe d'Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues et résolues pour résoudre des problèmes de vibration libre d'une plaque simplement appuyée.

### III.2. Formulations théoriques :

#### III.2.1. Propriétés des matériaux :

Les propriétés des matériaux des plaques FGM (Figure III.1) sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur. Dans ce travail, deux méthodes d'homogénéisation sont utilisées pour calculer le module de Young ; la première est la distribution de la loi de puissance, et la deuxième méthode de Mori-Tanaka le module de Young est donné comme [177, 174, 58] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c, \quad (\text{III.1a})$$

Pour le schéma de Mori-Tanaka, le module de Young est donné comme [178, 179],

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(E_c/E_m - 1)(1 + \nu)/(3 - 3\nu)} \right) \quad (\text{III.1b})$$

Où  $V_c = (2z + h/2)^p$  est la fraction volumique de la céramique. Pour simplifier, le coefficient de Poisson de la plaque est supposé constant dans cette étude pour que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation soit très inférieur à celui du module de Young [180]. La densité effective  $\rho(z)$  est déterminée en utilisant la distribution donnée par la loi des mélanges de Voigt comme [62] :

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V_c \quad (\text{III.1c})$$

Où  $(E_m, \rho_m)$  et  $(E_c, \rho_c)$  sont les propriétés correspondantes du métal et céramique, respectivement, et  $k$  est l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La valeur égale à zéro de  $k$  représente une plaque entièrement en céramique.

A noter que la fraction volumique de la céramique est élevée à proximité de la surface supérieure de la plaque, et celui du métal est élevé à proximité de la surface inférieure. En outre, Eq. (III.1) indique que la surface inférieure de la plaque ( $z = -h/2$ ) est entièrement métallique tandis que la surface supérieure de la plaque ( $z = +h/2$ ) est entièrement en céramique.

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$  en plan et une épaisseur uniforme  $h$ . Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé de telle sorte que le plan  $x$ - $y$  coïncide avec le plan médian de la plaque. La plaque est composée d'un matériau à gradation de propriété variant dans la direction de l'épaisseur.

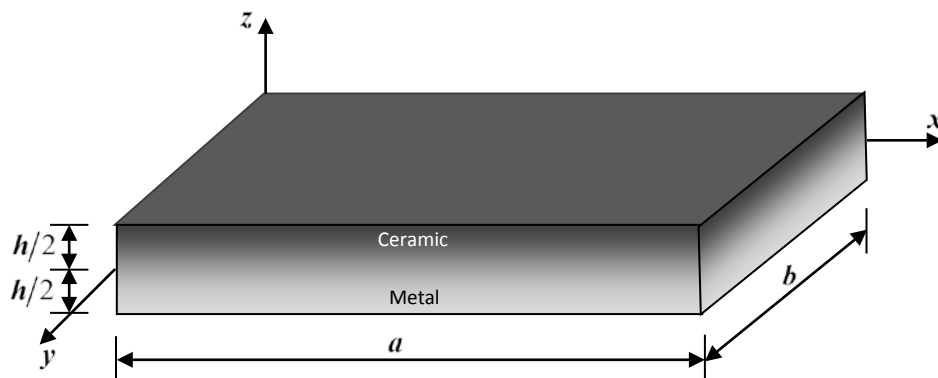


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

### III.2.2. Cinématique et équations constitutives :

En considérant une distribution sinusoïdale pour toutes les composantes de déplacement, La cinématique de la théorie quasi-3D est généralement donnée par:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t) \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t) \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III.2c})$$

Où  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y, \text{ et } \varphi_z$  sont les six déplacements inconnus du plan médian de la plaque, et  $f(z)$  est une fonction de forme indique la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Dans ce travail, la fonction de forme choisie est la fonction sinusoïdale donnée par Touratier [32] comme :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \text{ et } g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.3})$$

La fonction de cisaillement est présentée dans cette théorie pour satisfaire les contraintes nulles sur la surface supérieure et inférieure de la plaque.

Avec  $h$  est l'épaisseur de la plaque. En considérant que  $\varphi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx$  et  $\varphi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$ .

Basées sur la théorie de la plaque épaisse et incluant l'effet de la contrainte normale transversale (effet d'étirement de l'épaisseur), les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque et la cinématique de la théorie quasi-3D proposée peuvent s'exprimer sous une forme simple :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{III.4a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.4b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III.4c})$$

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de la géométrie. On peut observer que la cinématique dans l'équation. (III.4) utilise seulement cinq inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\varphi_z$ ). Les contraintes non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation. (III.4) sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.5})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.6a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad (\text{III.6b})$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III.6c})$$



On peut observer à partir de l'équation. (III.5) que les contraintes de cisaillement transversales ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) sont nuls sur les surfaces supérieure ( $z = h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque.

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une procédure de type de Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

Où les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont considérés selon le type de solution utilisée, dans ce cas par la méthode Navier. Par conséquent,  $A', B', k_1$  et  $k_2$  sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.8})$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis dans l'expression (III-23).

### III.2.3. Les contraintes :

La relation contrainte-déformation pour une plaque élastique linéaire s'écrit sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ ) et ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx}$ ) sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation. (III.10), les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$ , sont exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.10a})$$

$$\mathcal{Q}_{12} = \mathcal{Q}_{13} = \mathcal{Q}_{23} = \frac{\nu (1-\nu) \mathbf{E}(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.10b})$$

$$\mathcal{Q}_{44} = \mathcal{Q}_{55} = \mathcal{Q}_{66} = \frac{\mathbf{E}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.10c})$$

Avec  $E(z)$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson d'une plaque FG.

### III.2.4. Équations d'équilibres :

Le principe d'Hamilton est employé ici pour déduire les équations du mouvement. Le principe peut être exprimé analytiquement comme [181-183] :

$$0 = (\delta U - \delta K) dt \quad (\text{III.11})$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation,  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est exprimée explicitement par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où  $A$  est la surface supérieure de la plaque, et les résultantes des efforts,  $N$ ,  $M$  et  $S$  sont exprimées par :

$$\begin{aligned} (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy); \\ N_z &= \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

La variation de l'énergie cinétique est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\
 &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] + J_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z) \right. \\
 &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad + J_1 \left( (k_1 A') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left( \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\
 &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( (k_1 A')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\
 &\quad \left. - J_2 \left( (k_1 A') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + K_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z) \right\} dA \quad (III.14)
 \end{aligned}$$

$\rho(z)$  est la masse volumique exprimée par l'équation. (III.3) ; et  $(I_0, J_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2, K_3)$  sont des inerties de masse définis comme suit :

$$(I_0, J_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, g(z), z, z^2) \rho(z) dz \quad (III.15a)$$

$$(J_1, J_2, K_2, K_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f^2(z), g^2(z)) \rho(z) dz \quad (III.15b)$$

Les équations de mouvement peuvent être déduites en remplaçant  $\delta U$  et  $\delta K$  des équations. (III.12) et (III.14) dans l'équation. (III.11), intégrant par parties et en collectant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$ , et  $\delta \varphi_z$  :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_0 \ddot{\varphi}_z \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 \left( k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 &\quad - K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\varphi}_z
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

En substituant de l'équation. (III.5) dans l'équation. (III.9), et les résultats trouvés dans l'équation. (III.13), peuvent être écrites en termes de déplacements généralisés ( $u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$ ) comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix} \tag{III.17}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{III.18}$$

Où

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \tag{III.19a}$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) C_{ij} dz \tag{III.19b}$$

### III.2.5. Équations du mouvement en termes de déplacements :

En remplaçant l'équation. (III.17) par l'équation. (III.16), les équations de mouvement de la théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D de cette étude peut être écrite en termes de déplacements  $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$  comme suit:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 + X_{13}d_1\varphi_z - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}\theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + J_1A'k_1d_1\ddot{\theta}, \quad (III.20a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + X_{23}d_2\varphi_z - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1)d_2\theta = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + J_1B'k_2d_2\ddot{\theta}, \quad (III.20b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 + Y_{13}d_{11}\varphi_z + Y_{23}d_{22}\varphi_z - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}\theta + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}\theta = I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) + J_2(k_1A'd_{11}\ddot{\theta} + k_2B'd_{22}\ddot{\theta}) + J_0\ddot{\varphi}_z \quad (III.20c)$$

$$- (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2)d_2v_0 - k_1Y_{13}^s\theta_z - k_2Y_{23}^s\theta_z + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}w_0 - H_{11}^s k_1^2\theta - H_{22}^s k_2^2\theta - 2H_{12}^s k_1 k_2\theta - ((k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s)d_{1122}\theta + A_{44}^s(k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')^2 d_{11}\theta + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\varphi_z + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\varphi_z = -J_1(k_1A'd_1\ddot{u}_0 + k_2B'd_2\ddot{v}_0) + J_2(k_1A'd_{11}\ddot{w}_0 + k_2B'd_{22}\ddot{w}_0) - K_2((k_1A')^2 d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2 d_{22}\ddot{\theta}) \quad (III.20d)$$

$$X_{13}d_1u_0 + X_{23}d_2u_0 + Z_{33}\varphi_z + Y_{13}d_{11}w_0 + Y_{23}d_{22}w_0 + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\theta \quad \text{Où } d_{ij}, d_{ijl} \text{ et } d_{ijlm} \text{ sont des opérateurs différentiels.} \\ + A_{44}^s d_{22}\varphi_z + A_{55}^s d_{11}\varphi_z = K_3\ddot{w}_0 + J_0\ddot{\varphi}_z, \quad (III.20e)$$

$d_{ijlm}$  sont des opérateurs différentiels.

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (III.21)$$

### III.2.6. solutions analytiques :

Dans cette partie, une plaque rectangulaire simplement appuyée est considérée avec une longueur  $a$  et une largeur  $b$ . En utilisant la procédure de la solution de Navier, les expressions des déplacements  $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$  sont prises:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{w}_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Z_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (\text{III.23})$$

Où  $i = \sqrt{-1}$ ,  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Z_{mn})$  sont les amplitudes maximales des déplacements, et  $\omega$  la fréquence des vibrations.

En remplaçant l'équation. (III.22) dans les l'équation. (III.20), les solutions analytiques peuvent être déterminées par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & M_{35} & 0 & M_{55} \end{pmatrix} \begin{cases} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Z_{mn} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), & a_{12} &= -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), & a_{13} &= \alpha (B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ a_{14} &= \alpha (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), & a_{15} &= X_{13}\alpha \\ a_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), & a_{23} &= \beta (B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\ a_{24} &= \beta (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) \\ a_{25} &= X_{23}\beta \\ a_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \\ a_{34} &= -k_1 (D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 (D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2), \\ a_{35} &= -(Y_{13} \alpha^2 + Y_{23} \beta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{44} &= -\mathbf{k}_1 (\mathbf{H}_{11}^s \mathbf{k}_1 + \mathbf{H}_{12}^s \mathbf{k}_2) - (\mathbf{k}_1 \mathbf{A}' + \mathbf{k}_2 \mathbf{B}')^2 \mathbf{H}_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - \mathbf{k}_2 (\mathbf{H}_{12}^s \mathbf{k}_1 + \mathbf{H}_{22}^s \mathbf{k}_2) - (\mathbf{k}_1 \mathbf{A}')^2 \mathbf{A}_{55}^s \alpha^2 - (\mathbf{k}_2 \mathbf{B}')^2 \\
 \mathbf{a}_{45} &= -\mathbf{k}_1 \mathbf{A}' \mathbf{A}_{55}^s \alpha^2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{B}' \mathbf{A}_{44}^s \beta^2 + \mathbf{k}_1 \mathbf{Y}_{13}^s + \mathbf{k}_2 \mathbf{Y}_{23}^s \\
 \mathbf{a}_{55} &= -(\mathbf{A}_{55}^s \alpha^2 + \mathbf{A}_{44}^s \beta^2 + \mathbf{Z}_{33}) \\
 \mathbf{M}_{11} &= -\mathbf{I}_0, \mathbf{M}_{13} = \alpha \mathbf{I}_1, \mathbf{M}_{14} = -\mathbf{k}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{A}' \alpha, \mathbf{M}_{15} = 0 \\
 \mathbf{M}_{22} &= -\mathbf{I}_0, \mathbf{M}_{23} = \beta \mathbf{I}_1, \mathbf{M}_{24} = -\mathbf{k}_2 \mathbf{B}' \beta \mathbf{J}_1, \mathbf{M}_{25} = 0 \\
 \mathbf{M}_{33} &= -\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_2 (\alpha^2 + \beta^2), \mathbf{M}_{34} = \mathbf{J}_2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{A}' \alpha^2 + \mathbf{k}_2 \mathbf{B}' \beta^2), \mathbf{M}_{35} = -\mathbf{J}_0 \\
 \mathbf{M}_{44} &= -\mathbf{K}_2 \left( (\mathbf{k}_1 \mathbf{A}')^2 \alpha^2 + (\mathbf{k}_2 \mathbf{B}')^2 \beta^2 \right), \mathbf{M}_{45} = 0 \\
 \mathbf{M}_{55} &= -\mathbf{K}_3
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

### III.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de déformation du cisaillement quasi-3D, avec cinq variables incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur, est appliquée sur les plaques en FGM simplement appuyée pour la résolution des problèmes de vibration libre.

Le principal avantage de la théorie proposée par rapport aux théories existantes de déformation de cisaillement d'ordre élevé est que les présentes impliquent moins d'inconnus ainsi que l'effet d'étirement dans la plaque FG. Le taux de calcul peut donc être réduit.

Le champ de déplacement pour la théorie actuelle est présenté même concernant le tenseur de déformation. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient de propriétés est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée. Le principe d'Hamilton est appliqué pour obtenir les équations du mouvement qui sont facilement résolues en utilisant les solutions de Navier.

## CHAPITRE IV :

### **Résultats et discussions**



## CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSION

### IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, la précision de la théorie de la plaque trigonométrique quasi-3D présentée pour la vibration libre des plaques FGM est démontrée en comparant les résultats numériques à celles d'autres résultats disponibles dans la littérature. En outre, les influences du paramètre indice de loi de puissance  $k$ , la déformation de cisaillement et l'étirement d'épaisseur sur les comportements vibratoires des plaques FGM sont étudiées.

### IV.2. Résultats de l'analyse en vibration libre des plaques FGM

L'analyse en vibration libre des plaques FGM est conduit pour des combinaisons du métal et de céramique, trois types de plaque FGM sont considérés: la plaque en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, la plaque Al/ZrO<sub>2</sub> et la plaque en (Al/ZrO<sub>2</sub>)\*. Les propriétés des matériaux de plaques FGM sont données dans le **Tableau IV.1**.

**Tableau IV.1** : les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM

Propriétés	Métal		Céramique		
	(Al)	(Al)*	(Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	(ZrO <sub>2</sub> )	(ZrO <sub>2</sub> )*
$E$ (GPa)	70	68.9	380	200	211
$\nu$	0.3	0.33	0.3	0.3	0.33
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2702	2700	3800	5700	4500

#### IV.2.1. Résultats des plaques isotropes

Les fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque isotrope sont montrées dans le **tableau IV.2**, d'après ce tableau on constate que les fréquences naturelles obtenues par la présente théorie pour une plaque carrée isotrope sont comparés avec ceux obtenus par les résultats d'élasticité en trois dimensions de Srinivas et al. [132], les résultats de Reddy et Phan [184] basés sur la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé et par les résultats de Hebali et al. [63] basé sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique Quasi-3D. La comparaison des résultats montre que la présente théorie concorde très bien avec les solutions d'élasticité en trois dimensions (3D) et la théorie de déformation par cisaillement Quasi-3D. Cependant, la troisième théorie de la déformation par cisaillement Reddy et Phan

[185] qui négligent l'effet d'éirement d'épaisseur ( $\varepsilon_z = 0$ ), elle sous-estime légèrement la fréquence par rapport à la présente théorie (Quasi-3D) et à la 3D.

**Tableau IV.2 :** Les fréquences naturelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque isotrope avec  $\nu = 0.3$ ,  
 $a/h = 10$  et  $a/b = 1$

$m$	$n$	Présent $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al.[63] $\varepsilon_z \neq 0$	Srinivas et al.[132] 3D	Reddy and Phan [184]
1	1	0.0933	0.0933	0.0932	0.0931
1	2	0.2231	0.2228	0.2226	0.2222
2	2	0.3429	0.3422	0.3421	0.3411
1	3	0.4182	0.4173	0.4171	0.4158
2	3	0.5254	0.5240	0.5239	0.5221
3	3	0.6912	0.6890	0.6889	0.6862
2	4	0.7537	0.7512	0.7511	0.7481
1	5	0.9305	0.9268	0.9268	0.9230
4	4	1.0938	1.0890	1.0889	1.0847

La comparaison des premières fréquences naturelles adimensionnelles des plaques isotropes est représentée dans le **tableau IV.3**, la validation de la solution du modèle de plaque trigonométrique quasi-3D proposée est réalisée en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus par la méthode Ritz trois dimensions développée par Liew et al. [185], les solutions d'élasticité trois dimensions développées par Alibeigloo [186] et la théorie de la plaque trigonométrique quasi-3D développée par Bessaim et al. [187].

On peut observer que les résultats de la méthode Ritz trois dimensions obtenus par Liew et al. [185] et les solutions d'élasticité trois dimensions obtenus par Alibeigloo [186] sont un excellent accord avec les résultats obtenus par la présente théorie de la plaque trigonométrique quasi-3D. Aussi, le résultat donné dans le **tableau IV.3** révèle que la présente théorie donne des résultats identiques à ceux obtenus par la théorie sinusoidale de la plaque trigonométrique Quasi-3D développée par Bessaim et al. [187]. Ceci démontre que la même précision est réalisable avec la présente théorie.

On constate que plus le rapport d'élanement augmente, la fréquence naturelle adimensionnelle augmente.

**Tableau IV.3 :** Comparaison des premières fréquences naturelles  $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 / \pi^2 \sqrt{\rho h / D}$  d'une plaque isotrope rectangulaire, ( $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ ), ( $a/b = 1.5$ ).

Théorie	$a/h$				
	5/2	10/3	5	10	100
3D Ritz method Liew <i>et al.</i> [185]	1.0954	1.2088	1.3209	1.4096	1.444
Elasticity 3D Alibeigloo [186]	1.0940	1.2075	1.3200	1.4096	1.444
Bessaim <i>et al.</i> [187] $\epsilon_z \neq 0$	1.0996	1.2122	1.3237	1.4120	1.446
Présent $\epsilon_z \neq 0$	1.0996	1.2122	1.3237	1.4120	1.446

#### IV.2.2. Résultats des plaques FGM carrées (Al/ZrO<sub>2</sub>)

Les fréquences fondamentales non-dimensionnelles  $\bar{\beta}$  sont montrées dans le **Tableau IV.4**, pour différentes valeurs de rapport de l'épaisseur et l'indice de loi de puissance  $k$ . La vérification est réservée pour des plaques carrées minces et épaisses en FGM de type Al/ZrO<sub>2</sub>. D'après ce tableau on remarque que les résultats obtenus du présent modèle sont en bon accord avec les résultats obtenus avec les solutions 3D de Vel et Batra [188], les résultats solutions Quasi-3D obtenues par Neves *et al.* [47] et les solutions Quasi-3D obtenues par Belabed *et al.* [62].

On remarque que plus l'indice de loi de puissance  $k$ , plus la fréquence non-dimensionnelles  $\bar{\beta}$  augmente. Et plus le rapport d'élancement augmente, la fréquence non-dimensionnelles  $\bar{\beta}$  diminue.

**Tableau IV.4 :** Les fréquences fondamentales non-dimensionnelles  $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$  en (Al/ZrO<sub>2</sub>) d'une plaque carrée.

Méthode	$k = 0$		$k = 1$			$a/h = 5$		
	$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
Vel and Barta [188] 3D	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Neves <i>et al.</i> [47] $\epsilon_z \neq 0$	/	/	0.2193	0.0596	0.0153	0.2198	0.2212	0.2225
Belabed <i>et al.</i> [62] $\epsilon_z \neq 0$	0.4659	0.0578	0.2192	0.0597	0.0153	0.2201	0.2214	0.2225
Present $\epsilon_z \neq 0$	0.4674	0.0579	0.2197	0.0598	0.0153	0.2205	0.2218	0.2229

**IV.2.3. Résultats des plaques FGM carrées (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)**

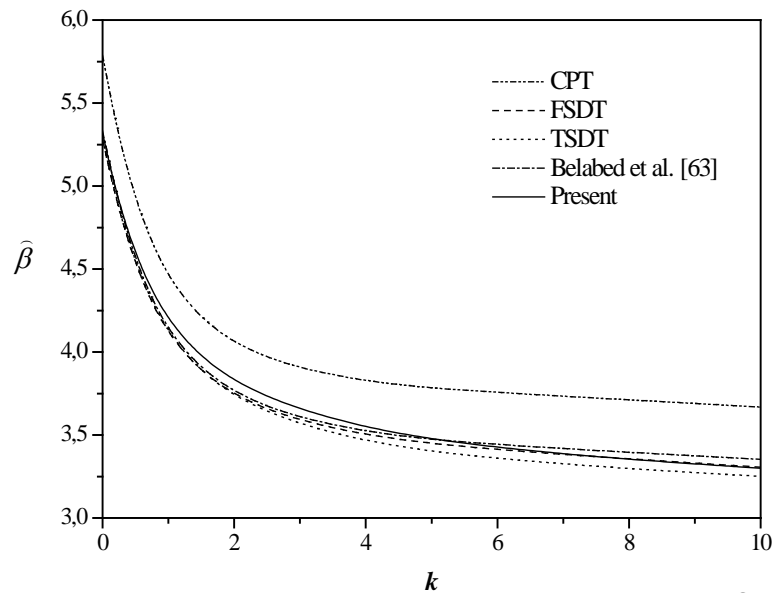
Le **tableau IV.05** présente une plaque carrée minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, avec un rapport d'épaisseur varié de 5 à 20 et l'indice de loi de puissance  $k$  est varié entre 0 à 10 est réalisé en utilisant différentes théories de plaques.

L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) rigidifie la plaque, par conséquent, conduit à une augmentation de la fréquence naturelle  $\hat{\omega}$

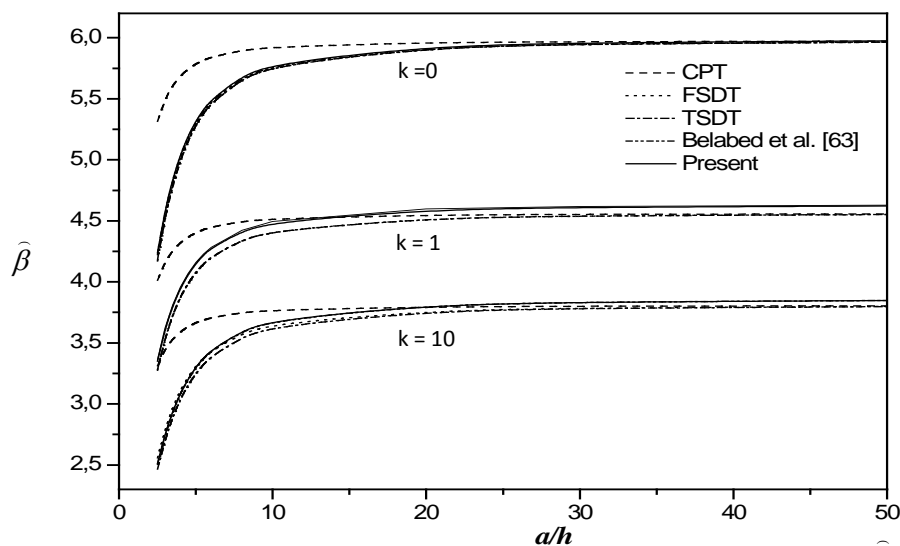
**Tableau IV.5 :** Les fréquences fondamentales non-dimensionnelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$  en (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) d'une plaque carrée.

a/h	Mode (m,n)	Méthode	(k)				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
	2(1,2)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.4674	0.4052	0.3687	0.3052	0.2817
	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.6783	0.5911	0.5381	0.4389	0.4018
10	1(1,1)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0579	0.0495	0.0450	0.0390	0.0369
	2(1,2)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1383	0.1186	0.1078	0.0924	0.0868
	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
20	1(1,1)	TSDT Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [42] $\varepsilon_z = 0$	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Belabed <i>et al.</i> [62] $\varepsilon_z \neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Les fréquences non-dimensionnelles  $\hat{\omega}$  prédites par la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) obtenue par Hosseini-Hashemi et al. [42], les solutions Quasi-3D de Belabed et al. [62], et la présente théorie sont comparées dans le (Tableau IV.05). Comme on peut le constater, les résultats obtenus par la présente théorie sont dans un excellent accord avec ceux prédits par Hosseini-Hashemi et al. [42] basé sur la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre, et Belabed et al. [62] basé sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique Quasi-3D.



**Figure IV.1 :** La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\hat{\beta}$  en fonction de l'indice des lois des puissances  $k$  pour des plaques carrées en FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $a/h = 5$ ).



**Figure IV.2 :** La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\hat{\beta}$  en fonction de rapport de l'épaisseur  $a/h$  pour des plaques carrées en FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Les figures [Figure.IV.1](#) et [Figure.IV.2](#) montrent la variation de la fréquence non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  correspondante à l'indice de la loi des puissances  $k$  et le rapport d'épaisseur  $a/h$  respectivement. Dans ces figures, les paramètres de la fréquence naturelle des plaques en FGM sont calculés utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique Quasi-3D obtenues par Belabed et al. [\[62\]](#), (CPT, FSDT, TSDT) et la présente théorie.

Il est remarquable que la présente théorie et la théorie de troisième ordre atteignent des résultats presque identiques pour toutes les valeurs de l'indice de la loi des puissances  $k$  et le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ). Puisque le modèle CPT omet les effets de déformation de cisaillement, par conséquent, il est visible les sous-estimations de la fréquence des plaques épaisses.

En outre, on peut voir que le paramètre de fréquence fondamentale diminue à mesure que l'indice de loi de puissance augmente jusqu'à la stabilisation à un certain point.

#### IV.2.4. Résultats des plaques FGM (Al/ZrO<sub>2</sub>)\*

Afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie pour des plaques rectangulaires épaisses en FGM, (Al/ZrO<sub>2</sub>)\* et une plaque carrée est maintenant examinée.

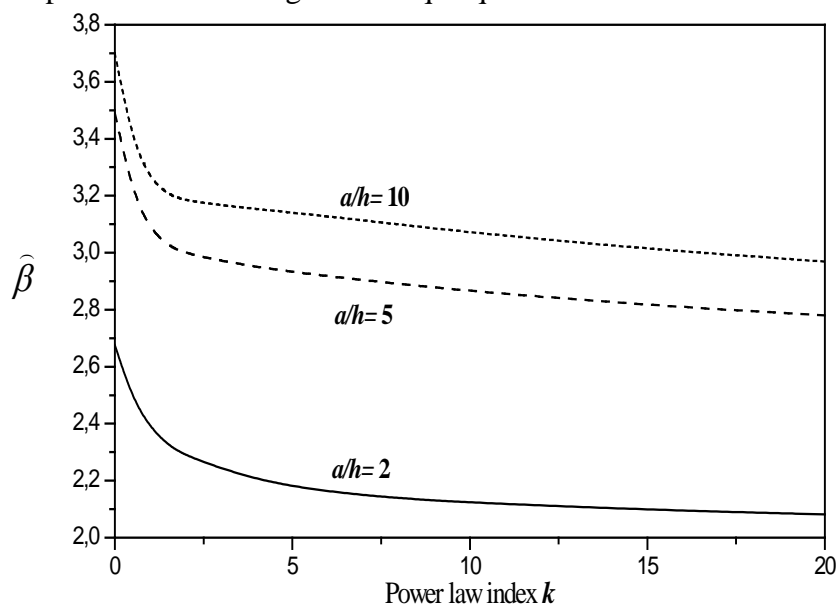
Les fréquences naturelles fondamentales non dimensionnelles  $\hat{\beta}$  pour des plaques rectangulaires en FGM (Al/ZrO<sub>2</sub>)\* obtenues par Jha et al. [\[60\]](#) à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé et la théorie de la déformation normale (HOSNT12), Hebali et al. [\[63\]](#) basées sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique Quasi-3D, et la présente théorie sont données dans le [Tableau IV.6](#). Un excellent accord entre les résultats obtenus par HOSNT12 de Jha et al. [\[60\]](#), le résultat de Hebali et al. [\[63\]](#) et la théorie actuelle est observée.

Il convient de noter que la présente théorie contient cinq inconnues, contre douze dans le cas de la théorie HOSNT12 (Jha et al. 2012) [\[60\]](#). On peut conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi efficace et simple pour prédire les réponses de la vibration libre des plaques FGM.

**Tableau IV.6 :** Les fréquences naturelles  $\hat{\beta} = (a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$  d'une plaque FGM rectangulaire avec  $(a/b = 0.5, a/h = 10)$ .

Mode ( <i>m, n</i> )	$\hat{\beta} = (a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$											
	<i>k</i> = 0			<i>k</i> = 0.5			<i>k</i> = 1			<i>k</i> = 2		
	Present	Quasi-3D Hebali et al. [63]	HOSNT 12 Jha et al. [60]	Present	Quasi-3D Hebali et al. [63]	HOSNT12 Jha et al. [60]	Present	Quasi-3D Hebali et al. [63]	HOSNT12 Jha et al. [60]	Present	Quasi-3D Hebali et al. [63]	HOSNT 12 Jha et al. [60]
1(1,1)	3.7002	3.6959	3.6911	3.3906	3.3877	3.3664	3.2586	3.2550	3.2179	3.1804	3.1757	3.1291
2(1,2)	5.8471	5.8392	5.8323	5.3620	5.3564	5.3238	5.1525	5.1460	5.0886	5.0239	5.0157	4.9434
3(2,1)	11.9976	11.9752	11.965	11.02480	11.0079	10.946	10.5905	10.5720	10.461	10.2988	10.2776	10.137
4(2,2)	13.9607	13.9324	13.921	12.8366	12.8149	12.745	12.3297	12.3062	12.180	11.9806	11.9543	11.794
5(2,3)	17.1461	17.1070	17.096	15.7805	15.7500	15.668	15.1551	15.1225	14.973	14.7079	14.6726	14.481
6(3,2)	26.1355	26.0579	26.051	24.1129	24.0503	23.941	23.1483	23.0833	22.876	22.3950	22.3285	22.059
7(3,3)	28.9674	28.8754	28.871	26.7445	26.6697	26.554	25.6718	25.5947	25.372	24.8141	24.7361	24.446

La variation de la fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques rectangulaires (FGM) avec  $(b/a = 2)$  simplement appuyée en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  pour différentes valeurs des rapports  $a/h$  est illustrée sur la **figure IV.3**. Basée sur la nouvelle présente théorie trigonométrique quasi-3D de déformation de cisaillement.

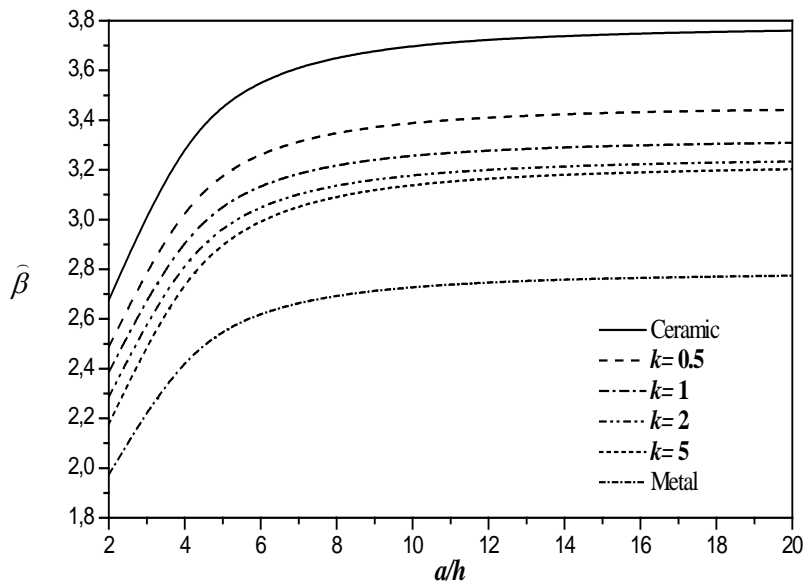


**Figure IV.3 :** La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM rectangulaires  $(b = 2a)$  simplement appuyée en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  pour différents rapports  $a/h$ .

On remarque d'après la **figure IV.3.** que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance  $k$  pour différentes valeurs des rapports  $a/h$ .

La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM rectangulaires ( $b=2a$ ) en fonction de rapport de l'épaisseur  $a/h$  pour les différentes valeurs de  $k$  sont illustrés dans la **figure IV.4.**

On peut le constater que le paramètre de fréquence de vibration  $\hat{\omega}$  diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique  $k$ .



**Figure IV.4 :** La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM rectangulaires ( $b = 2a$ ) en fonction de rapport de l'épaisseur  $a / h$  pour les différentes valeurs de  $k$ .

La variation de la fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM simplement appuyée en fonction du rapport ( $b/a$ ) pour les différents rapports ( $a/h$ ) avec  $k = 0.2$  est illustrée sur la **figure IV.5.**

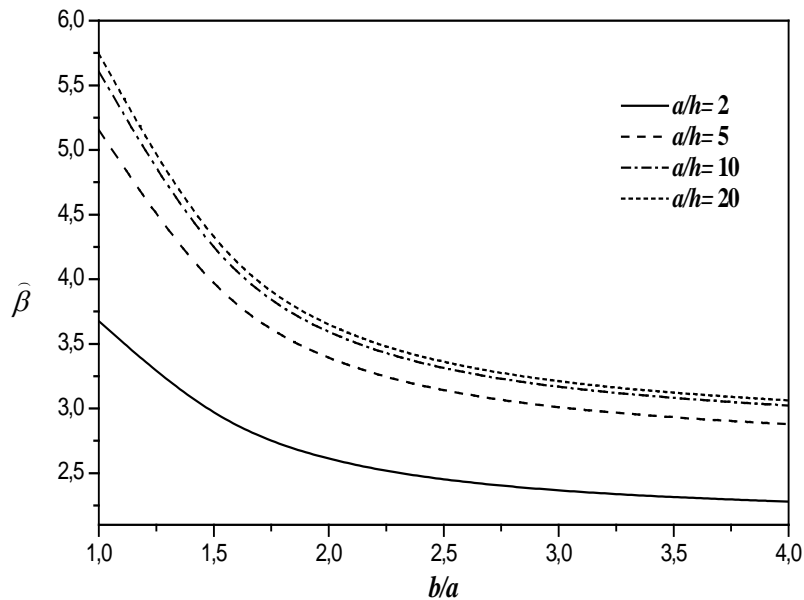
On remarque d'après la **figure IV.5** que la fréquence adimensionnelle  $\hat{\beta}$  diminue avec l'augmentation du rapport ( $b/a$ ) pour différentes valeurs des rapports ( $a/h$ ).

La variation de la fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM simplement appuyée ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport ( $b/a$ ) pour les différentes valeurs de  $k$  est illustrée sur la **figure IV.6.**

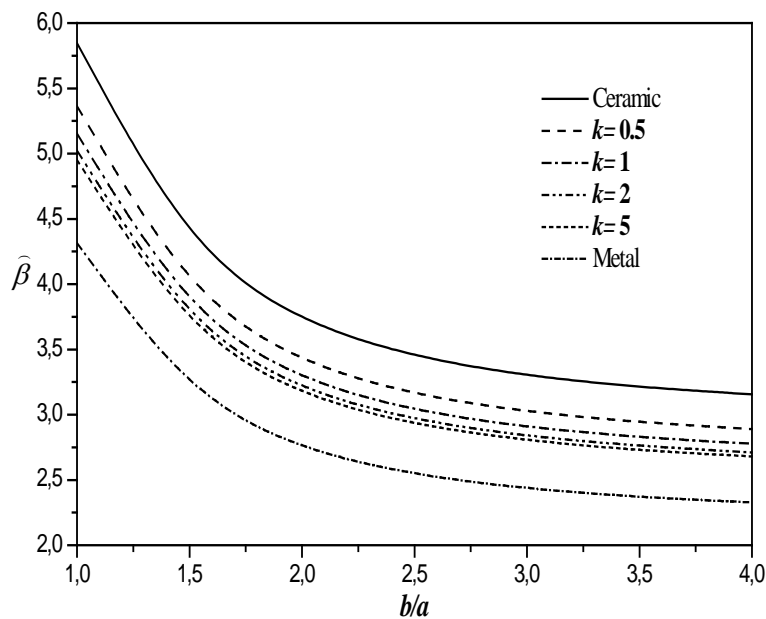


On remarque d'après la **figure IV.6** que la fréquence adimensionnelle  $\hat{\beta}$  diminue significativement avec l'augmentation des valeurs de  $k$ .

Cette diminution est due au fait que l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ , l'augmentation de la fraction volumique du métal influe automatiquement sur la rigidité de la plaque.



**Figure IV.5 :** La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM simplement appuyée en fonction du rapport  $b/a$  pour les différents rapports  $a/h$  avec  $k = 0.2$



**Figure IV.6 :** La fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle  $\hat{\beta}$  des plaques FGM simplement appuyée ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $b/a$  pour les différentes valeurs de  $k$ .

### **IV.3. Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de vibration libre des plaques en FGM simplement appuyée pour la présente théorie de déformation de cisaillement trigonométrique quasi-3D à cinq variables, avec la considération des influences de l'étirement à travers l'épaisseur. Nous avons travaillé sur trois types de plaque FGM : plaque en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, plaque en Al/ZrO<sub>2</sub> et la plaque (Al/ZrO<sub>2</sub>)\*.

Ensuite, nous avons comparé ces résultats avec ceux rapportés dans la littérature, ce qui nous a conduits à établir que notre nouvelle théorie donne des résultats en excellent accord avec ceux des théories existantes.

Nous avons ainsi constaté que l'effet d'étirement de l'épaisseur rigidifie la plaque, et par conséquent, conduit à une augmentation de la fréquence naturelle et Plus le rapport ( $a/h$ ) augmente, la fréquence naturelle se stabilise à un certain point.

En conclusion, on peut en dire que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi simple pour prédire les fréquences naturelles des plaques à gradient de propriété avec effet d'étirement de l'épaisseur.

# **Conclusion Générale**

## CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des matériaux composites fonctionnellement gradués apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique quasi-3D est développée pour résoudre les problèmes de vibration libre de plaques FG au repos, sans nécessiter d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, elle satisfait la condition de la contrainte de cisaillement nulle dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM.

Le déplacement transversal est dévisé en deux composantes à savoir : composante en flexion et composante due à l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur.

En considérant de nouvelles suppositions simplificatrices à la théorie quasi-3D, avec l'incorporation d'un terme intégral, la théorie présente seulement cinq inconnues, par contre égal à six ou plus inconnus dans les autres théories correspondantes.

L'équation du mouvement de la structure vibratoire obtenue par le principe classique de Hamilton est résolue en utilisant les étapes de Navier.

Les principaux points suivants peuvent être tirés de la présente étude:

- La validation de l'exactitude de la présente théorie est déterminée par des comparaisons avec les solutions existantes des différentes théories proposées dans la littérature et donne un excellent accord pour tous les cas étudiés.
- L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) rigidifie la plaque, par conséquent, conduit à une augmentation de la fréquence naturelle.
- L'effet d'étirement de l'épaisseur joue un rôle important dans les plaques FGM modérément épaisses, il doit être pris en compte dans la modélisation.

- Le paramètre de fréquence de vibration  $\hat{\omega}$  diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique  $k$ . Une chute importante de la fréquence se produit lorsque l'indice de la fraction volumique varie entre 0 et 10. Cette diminution est due au fait que l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ , augmente la fraction volumique du métal qui influe automatiquement sur la rigidité de la plaque.
- Plus le rapport  $a / h$  augmente, la fréquence naturelle se stabilise à un certain point.
- La théorie classique des plaques CPT surestime les résultats de la fréquence naturelle des plaques FGM, et la différence entre la théorie classique CPT et la présente théorie est considérable pour une plaque épaisse.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie quasi-3D est non seulement précise, mais aussi efficace pour la prédiction de l'analyse vibratoire des plaques FGM.

**En perspective**, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle quasi-3D à cinq variables pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique) en prendre en compte des différents types d'appuis.

Finalement, on espère que ce travail reflète la modeste contribution dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient évalué (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de vibration.

## **Références bibliographiques**

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Li Q, Iu V P, Kou K P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration* 2008; 311 (1): 498-515.
- [2] Kolahchi R, Zarei M S, Hajmohammad M H, Nouri A. Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 2017; 130: 534-545.
- [3] Boudërba B, Houari M S A, Tounsi A, Mahmoud S R. Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics* 2016; 58(3): 397-422.
- [4] Houari M S A, Tounsi A, Bessaim A, Mahmoud S R. A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Steel and Composite Structures* 2016; 22(2): 257-276.
- [5] Boukhari A, Ait Atmane H, Tounsi A, Adda Bedia E A, Mahmoud S R. An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates. *Structural Engineering and Mechanics* 2016; 57(5): 837-859.
- [6] Hajmohammad M H, Zarei M S, Nouri A, Kolahchi R. Dynamic buckling of sensor/functionally graded-carbon nanotube-reinforced laminated plates/actuator based on sinusoidal-visco-piezoelectricity theories. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 2017; 1099636217720373.
- [7] Bourada M, Kaci A, Houari M S A, Tounsi A. A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel and Composite Structures* 2015; 18(2), 409-423.
- [8] Ghorbanpour A A, Cheraghbak A, Kolahchi R. Dynamic buckling of FGM viscoelastic nano-plates resting on orthotropic elastic medium based on sinusoidal shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics* 2016; 60: 489-505.
- [9] Neves A M A, Ferreira A J M, Carrera E, Cinefra M, Jorge R M N, Mota Soares C M, Araújo A L. Influence of zig-zag and warping effects on buckling of functionally graded sandwich plates according to sinusoidal shear deformation theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 2017; 24(5): 360-376.
- [10] Giunta G, Belouettar S, Ferreira A J M. A static analysis of three-dimensional functionally graded beams by hierarchical modelling and a collocation meshless solution method. *Acta Mechanica* 2016, 227(4): 969-991.
- [11] Reddy J N, Arciniega R A. Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 2004; 11(6): 535-582.
- [12] He X Q, Ng T Y, Sivashanker S, Liew K M. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International journal of Solids and Structures* 2001; 38: 1641-1655.
- [13] Woo J, Meguid S A, Ong L S. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration* 2006; 289: 595-611.
- [14] Abrate S. Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Composites part B: engineering* 2008; 39: 151-158.

- [15] Zhang D G , Zhou Y H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Computational Materials Science* 2008; 44:716-720.
- [16] Arefi M. The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers. *Smart Structures and Systems* 2015; 15:1345-1362.
- [17] Darilmaz K. Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems. *Steel and Composite Structures* 2015; 18:395-408.
- [18] Pradhan K K , Chakraverty S. Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports. *Structural Engineering and Mechanics* 2015; 53:337-354.
- [19] Ferreira A J M, Castro L M , Bertoluzza S. A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory. *Composite Structures* 2009; 89: 424-432.
- [20] Hosseini-Hashemi S, Taher H R D , Akhavan H , Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 2010; 34:1276-1291.
- [21] Malekzadeh P , Alibeygi Beni A. Free vibration of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates in thermal environment. *Composite Structures* 2010; 92 : 2758-2767.
- [22] Panda S K, Katariya P V. Stability and free vibration behaviour of laminated composite panels under thermo-mechanical loading. *International Journal of Applied and Computational Mathematics* 2015; 1(3): 475-490.
- [23] Kolahchi R, Safari M, Esmailpour M. Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium. *Composite Structures* 2016; 150: 255-265.
- [24] Madani H, Hosseini H, Shokravi M. Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Steel and Composite Structures* 2016; 22(4): 889-913.
- [25] Mantari J L, Granados EV. A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. *Thin-Walled Structures* 2015; 90:150-158.
- [26] Mantari J L, Granados EV. Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT. *Composites Part B: Engineering* 2015;75:148-155.
- [27] Mantari J L, Ore M. Free vibration of single and sandwich laminated composite plates by using a simplified FSDT. *Composite Structures* 2015; 132: 952-959.
- [28] Meksi A , Benyoucef S , Houari M S A , Tounsi A. A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics* 2015; 53(6):1215-1240.
- [29] Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 1984 ; 51(4):745-752.
- [30] Pai, P F. A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *International Journal of Solids and Structures* 1995; 32(16): 2295-2313.
- [31] Bounouara F, Benrahou K H, Belkorissat I, Tounsi A. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel and Composite Structures* 2016; 20(2): 227 - 249.



- [32] Touratier M. An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science* 1991; 29(8):901–16.
- [33] Soldatos, K. P. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3), 195-220.
- [34] Zenkour A M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 2006;30(1):67-84.
- [35] Mantari J L, Oktem A S, Soares C G. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures* 2012; 49(1): 43-53.
- [36] Karama M, Afaq K S, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures* 2003; 40(6): 1525-1546.
- [37] Kar V R, Mahapatra T R, Panda S K. Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels. *Composite Structures* 2017; 160:1236-1247.
- [38] Ferreira A J M, Batra R C, Roque C M C, Qian L F, Jorge R M N. Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Composites Structures* 2006; 75(1) : 593-600.
- [39] Kar V R, Panda S K, Mahapatra T R. Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties. *Advances in Materials Research-An International Journal* 2016; 5(4): 205-221.
- [40] Baseri V, Jafari G S, Kolahchi R. Analytical solution for buckling of embedded laminated plates based on higher order shear deformation plate theory. *Steel and Composite Structures* 2016; 21(4): 883-919.
- [41] Kar VR, Panda S K. Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel. *Steel and Composite Structures* 2015; 18(3): 693-709.
- [42] Hosseini-Hashemi S , Fadaee M , Taher H R D. Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 2011; 35(2): 708-727.
- [43] Singh V K, Mahapatra T R, Panda S K. Nonlinear transient analysis of smart laminated composite plate integrated with PVDF sensor and AFC actuator. *Composite Structures* 2016; 157: 121-130.
- [44] Hirwani C K, Patil R K, Panda S K, Mahapatra S S, Mandal S K, Srivastava L, Buragohain M K. Experimental and numerical analysis of free vibration of delaminated curved panel. *Aerospace Science and Technology* 2016; 54: 353-370.
- [45] Sahoo S S, Panda S K, Mahapatra T R. Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel—An experimental approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 2016; 59: 95-113.
- [46] Mahapatra T R, Kar V R, Panda S K. Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 2016; 16(3): 1450105.
- [47] Neves A M A, Ferreira A J M, Carrera E, Roque C M C, Cinefra M, Jorge R M N, Soares C M M. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering* 2012; 43(2): 711-725.

- [48] Neves A M A, Ferreira A J M, Carrera E, Cinefra M, Roque C M C, Jorge R M N, Soares C M M. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 2012; 94(5): 1814-1825.
- [49] Mantari J L, Oktem A S, Soares C G. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering* 2012; 43(3) :1489-1499.
- [50] Mahi A, Adda Bedia E A, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling* 2015; 39(9): 2489-2508.
- [51] Neves A M A, Ferreira A J M, Carrera E, Cinefra M, Jorge R M N, Soares C M M. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 2012; 92(9): 749-766.
- [52] Mantari J L, Soares C G. Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering* 2015; 56:126-136.
- [53] Mantari J L, Soares C G. A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates. *Composite Structures* 2014; 107:396-405.
- [54] Mantari J L. Refined and generalized hybrid type quasi-3D shear deformation theory for the bending analysis of functionally graded shells. *Composites Part B: Engineering* 2015; 83:142-152.
- [55] Bousahla A A, Benyoucef S, Tounsi A, Mahmoud S R. On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion. *Structural Engineering and Mechanics* 2016; 60: 313-335.
- [56] Ait Amar Meziane M, Abdelaziz H H, Tounsi A. An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 2014; 16(3), 293-318.
- [57] Attia A , Tounsi A , Adda Bedia E A , Mahmoud S R. Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories. *Steel and composite structures* 2015; 18(1):187-212.
- [58] Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud S R. Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Structures and Systems* 2016; 18(4):755-786.
- [59] Carrera E , Brischetto S , Cinefra M , Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering* 2011; 42(2):123-133.
- [60] Jha D K , Kant T , Singh R K. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design* 2012; 250: 8–13.
- [61] Bessaim A , Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R , Adda Bedia E A. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 2013; 15(6):671-703.

- [62] Belabed Z, Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R, Anwar Bég O. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering* 2014; 60: 274-283.
- [63] Hebali H , Tounsi A , Houari M S A , Bessaim A, Adda Bedia E A. New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 2014; 140(2): 374 – 383.
- [64] Akavci S S. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Composites Part B* 2016; 96: 136 - 152.
- [65] Benahmed A, Houari M S A, Benyoucef S, Belakhdar K, Tounsi A. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering* 2017; 12(1): 9-34.
- [66] Hebali H, Bakora A , Tounsi A , Kaci A. A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Steel and Composite Structures* 2016 ; 22(3): 473-495.
- [67] Meftah A, Bakora A, Zaoui F Z, Tounsi A, Adda Bedia E A. A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Steel and Composite Structures* 2017; 23(3): 317-330.
- [68] Krenich F, Heireche H, Houari M S A, Tounsi A. A novel nonlocal four variable plate theory for thermal stability of single- layered graphene sheets embedded in an elastic substrate medium. *Current Nanomaterials* 2017; 1: 215-222.
- [69] Besseghier A, Houari M S A, Tounsi A, Mahmoud S R. Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory. *Smart Structures and Systems* 2017; 19(6): 601-614.
- [70] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering* 2011; 42(2) : 123-133.
- [71] Levy M. Mémoire sur la théorie des plaques élastique planes. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 1877;30:219–306.
- [72] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA Journal* 1986; 24(9):1537–44.
- [73] Shahistha A, Varghese B, Baby A 2014 A review on functionally graded materials *The International Journal Of Engineering And Science (IJES)*, Volume 3, Issue 6, Pages 90-101, ISSN (e): 2319 – 1813 ISSN (p): 2319 – 1805.
- [74] Valmik B, Prakash K, Sandeep Th, Sachin P, A Review on Functionally Gradient Materials (FGMs) and Their Applications. *Materials Science and Engineering* 229 (2017) 012021.
- [75] [Hossein Abdizadeh 1997] Hossein Abdizadeh, *Elaboration et Caractérisation de Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'alumine»*, Thèse de Doctorat, L'institut National des Sciences appliquées de Lyon, 1997.
- [76] Bachir Bouiadjra Rabbab, *Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur fondations Elastiques*, Thèse de doctorat, Université de des sciences et de la technologie d'ORAN MOHAMED BOUDIAF, 2015.
- [77] Benoit Watremetz, *Modele Thermomecanique 3d D'un Matériau A Gradient De Propriétés A L'aide De Techniques Multigrilles. Application Aux Moules D'injection De Polymeres*, Thèse de doctorat, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon, 2006.

- [78] Hassen Ait Atmane, Abdelouahed Tounsi, El Abbes Adda BEDIA, Etude analytique des plaques à caractéristiques matérielles aléatoires en utilisant une théorie raffinée, 31èmes Rencontres de l'AUGC, E.N.S. Cachan, 2013.
- [79] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 ( 8):191-192,1986.
- [80] Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [81] Mine Uslu Uysal, Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering Vol:7 No:11, 2013
- [82] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. J Mech Phys Solids 1965;13:213–22.
- [83] Hashin Z. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. J Compos Mater 1968; 4:284–300.
- [84] Bhaskar K, Varadan TK. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. ASME J Appl Mec 2001; 68(4):660–2.
- [85] Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V. Micromechanical models for graded composite materials. J Mech Phys Solids 1997; 45:1281–302.
- [86] Z.-H. Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” Int. Commun. Heat Mass Transfer; 29 (7): 887–895. 2002.
- [87] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. J. Appl. Mech., 29(143), 1962.
- [88] Hashin Z, Rosen BW. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. ASME J Appl Mech 1964;4:223–32.
- [89] J. F. Groves, and H. N. G. Wadley 1997 Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition Composites Parts B 28B, (1997), 57-69.
- [90] R. Knoppers, J. W. Gunnink, J. Van den Hout, and W. Van Vliet The reality of functionally graded material products TNO ScienceandIndustry, The Netherlands, pp 38-43.
- [91] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, and Lee S Fabrication of ZrO<sub>2</sub>–NiCr functionally graded material by powder metallurgy Materials Chem. Phys. 68 130. Crossref.
- [92] Watanabe Y, Inaguma Y, Sato H, and Miura-Fujiwara E 2009 Novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: the centrifugal mixed-Powder method Materials, Vol. 2, No. 4, pp.2510-2525.
- [93] Bhavar V, Kattire P, Patil V, Khot S, Gujar K, Singh R 2014 A Review on Powder bed fusion technology of metal additive manufacturing AMSI Conference 2014, Bangalore, India.
- [94] Ruan J, Sparks T, Fan Z, Stroble J, Panackal A and Liou F 2006 A Review of Layer Based Manufacturing Processes for Metals Solid freeform fabrication symposium, January 2006.
- [95] Thymianidis M, Achillas C, Tzetzis D, Iakovou E, Pariente F, Guagliano M. 2012 Modern Additive Manufacturing Technologies: An Upto-Date Synthesis and Impact on Supply Chain Design”, 2nd International conference on supply chains, October -2012.
- [96] Hedges M., Calder N 2006 Near Net Shape Rapid Manufacture & Repair by LENS Cost Effective Manufacture via Net-Shape Processing, pp. 13-1 – 13-14. Meeting Proceedings RTOMP-AVT-139, Paper 13. Neuilly-sur-Seine, France: RTO. Available from:<http://www.rto.nato.int/abstracts.asp>

- [97] Popoola P, Farotade G, Fatoba G and Popoola O, Zlatanovic M 2016 Laser Engineering Net Shaping Method in the Area of Development of Functionally Graded Materials (FGMs) for Aero Engine Applications - A Review, from "Fiber Laser", book edited by Mukul Chandra Paul, ISBN 978-953-51-2257-9Chapter 17
- [98] SLM Solution website [online], available at [www.sciaky.com](http://www.sciaky.com), accessed January 2017.
- [99] Kapil S, Kulkarni P, Karunakaran K, Joshi P 2014 Development and Characterization of Functionally Graded Materials Using Hybrid Layered Manufacturing 5th International & 26th All India Manufacturing Technology, Design and Research Conference (AIMTDR 2014)
- [100] Suryakumar S, Somashekara M 2013 Manufacture of functionally gradient materials using weld-deposition Solid Free. Fabr. Symp. (2013) 1-36.
- [101] Bharti I, Gupta N, and Gupta K 2013 Novel Applications of Functionally Graded Nano, Optoelectronic and Thermoelectric Materials International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing, Vol. 1, No. 3, August 2013.
- [102] Jamian S. (2012) Application of Functionally Graded Materials for Severe Plastic Deformation and Smart Materials : Experimental Study and Finite Element Analysis Thesis submitted to Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Doctor degree of engineering.
- [103] Maciejewski G, Mroz Z 2013 Optimization of functionally gradient materials in valve design under cyclic thermal and mechanical loading CAMES, 20: 99–112, 2013.
- [104] Coomar N, Kadoli R 2010 Comparative analysis of steady state heat transfer in a TBC and functionally graded air cooled gas turbine blade”, Sadhana Vol. 35, Part 1, February 2010, pp.1–17. © Indian Academy of Sciences.
- [105] Qian X. Design of heterogeneous turbine blade Computer aided design, (2003) 35, 319-329.
- [106] Birman V 2014 Functionally graded material and structures Encyclopedia Thermo stresses,
- [107] Liu, L. S., Zhang, Q.-J., and Zhai, P.-C., 2003, “The Optimization Design on Metal/Ceramic, FGM Armor With Neural Net and Conjugate Gradient Method,” Functionally Graded Materials, VII Proceedings of the Seventh International Symposium on Functionally Graded Materials \_FGM2000\_, Materials Science Forum Vols. 423–425.
- [108] Pan W, Gong J, Zhang L, and Chen L, eds., Trans Tech Publications Ltd., Uetikon-Zuerich, Switzerland, pp. 791–802.
- [109] Chin ESC 1999 Army focused research team on functionally graded armor composites Mater Sci. Engg. A259: 155-161.
- [110] Lee W, Stinton D 1996 Concept of Functionally Graded Materials for Advanced Thermal Barrier Coating Applications Journal of the American Ceramic Society, 79,12 (3003), 12.
- [111] Das D, Saini A, Pathak M, Kumar S 2012 Application of functionally graded materials as thermal insulator in high temperature engineering components IJREAS Volume 2, Issue 2
- [112] Quin, X., and Dutta, D. 2004 Feature-Based Design for Heterogeneous Objects Comput.-Aided Des., 36, pp. 1263–1278.
- [113] Birman V, Byrd L, Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures”. Springer, Dordrecht.
- [114] Zlatanović M 2003 Combined plasma surface treatments for wear and corrosion protection 8th International Tribology Conference, 8. - 10. Oktober 2003, Belgrade, Serbia 25.

- [115] Epler L 2012 New Duplex Surface Treatment Dramatically Improves Die Life, Part Quality & Cost Saving Die Cast Engineer Magazine, September 2012.
- [116] Li F, Takagi K, Ono M, Pan W, Watanabe R, Almajid A, and Taya M 2003 Fabrication and Evaluation of Porous Piezoelectric Ceramics and Porosity Graded Piezoelectric Actuators J. Am. Ceram. Soc., 86, pp. 1094– 1098.
- [117] Takeuch K, Kawazoe M, and Kanayama K. 2003 Design of Functionally Graded Wood-Based Board for Floor Heating System With Higher Energy Efficiency Functionally Graded Materials VII Proceedings of the Seventh International Symposium on Functionally Graded Materials (FGM2000), Materials Science Forum Vols. 423–425
- [118] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [119] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [120] Chaouche Abdellah, Analyse Vibratoire Des Plaques Minces Sous Dégérentes Conditions Aux Limites, Master Professionnel, université Kasdi Merbah Ouargla, 2013.
- [121] Kaci Abdelhakim, Étude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique, Thèse de doctorat, Université de Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès, Algérie, 2012.
- [122] Girault Grégory, Réponse d'une plaque couplée à un liquide et soumise à une pression mobile. Aspects Théoriques et expérimentaux en détonique, Thèse de doctorat, Université D'Orleans, 2006.
- [123] Reddy J.N., Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [124] Alireza Daneshmehr, Mohsen Heydari et Majid Akbarzadeh Khorshidi, Post-buckling analysis of FGM beams according to different shear deformation theories, International Journal of Multidisciplinary and Current, JulyAugust-2013.
- [125] Slimane Merdaci, Abdelouahed Tounsi, Mohammed Sid Ahmed, Houari Ismail Mechab, Habib Hebali, Samir Benyoucef, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, 2010.
- [126] Reddy J N, Analysis of functionally graded plate, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2000, P 663-684.
- [127] Tahar Hassaine Daouadji, Abdeouahed Tounsi, Lazreg Hadji, Abdelaziz Hadj Henni, Adda Bedia El Abbes, a theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates, Materials Physics and Mechanics 14 (2012) 110-128, 2012.
- [128] Tahar Hassaine Daouadji, Abdelouahed Tounsi, El Abbes Adda Bedia, Analytical solution for bending analysis of functionally graded plates, Scientia Iranica B (2013) 20 (3), 516\_523, 2013.
- [129] Pagano NJ. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. J Compos Mater 1969;3(3):398–411.
- [130] Pagano NJ. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. J Compos Mater 1970;4(1):20–34.
- [131] Srinivas S, Rao AK. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic plates and laminates. Int J Solids Struct 1970;6:1463–81.

- [132] Srinivas S, Joga Rao CV, Rao AK. An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 1970;12:187–99.
- [133] Reddy J N, Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 47, 663–684 (2000)
- [134] Shen H S, Nonlinear Bending Response of Functionally Graded Plates Subjected to Transverse Loads and in Thermal Environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 561–584, 2000.
- [135] Sankar B.V. “An elasticity solution for functionally graded beams.” *Composites Science and Technology* (2001); Vol. 61, pp. 689–696.
- [136] Chakraborty A. “New beam finite element for the analysis of functionally graded materials.” *International Journal of Mechanical Sciences* (2003); Vol. 45, pp. 519–539.
- [137] Reddy J. N., Analysis of Functionally Graded Plate, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 663–684, 2000.
- [138] M. M. Najafizadeh and M. R. Eslami, Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial Compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2474–2493, 2004.
- [139] Bhangale Rajesh (2006) “Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core.” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, pp. 294–316.
- [140] Prakash T et al. Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behaviour of functionally graded plates, *Comp. Mech*(2009).
- [141] Sina S.A, H.M. Navazi(2009) , H. Haddadpour “An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams.” *Materials and Design*, Vol. 30, pp. 741–747.
- [142] A. M. Zenkour and N. A. Alghamdi, Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 17, pp. 419–432, 2010.
- [143] S. M. Kazerouni, A. R. Saidi, and M. Mohammadi, Buckling Analysis of Thin Functionally graded Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported, *International Journal of Engineering Transactions B: Applications*, vol. 23, pp. 179–192, 2010.
- [144] A. Benachour, T. Hassaine Daouadji, H. Ait Atmane, A. Tounsi, S.A. Meftah, *Composites B : Engineering* 42, 1386, 2011.
- [145] Efraim E, Accurate formula for determination of natural frequencies of FGM basing on frequencies of isotropic plates, *Procedia Engineering* 10(2011).
- [146] Hadj Henni ABDELAZIZ , Hassen Ait ATMANE , Ismail MECHAB, Lakhdar BOUMIA, Abdelouahed TOUNSI, Adda Bedia El ABBAS (2011) “Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory.” *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 24, pp. 434-448.
- [147] Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012) “Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *Journal of Thermal Stresses*, 35, 677–694.
- [148] Kennedy D et al. An equivalent isotropic model of functionally graded plates, proceedings of 12th international conference on computational structures technology, Strilingshire (UK): civil-comp press; (2012).

- [149] Mantari J. L, A. S. Oktem, and C. Guedes-Soares, Bending Response of Functionally Graded Plates by Using a New Higher Order Shear Deformation Theory, *Composite Structures*, vol. 94, pp. 714–723, 2012.
- [150] L. Ould Larbi, A. Kaci, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 41, pp. 421–433, 2013.
- [151] Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013) “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, 76, 467-479.
- [152] Saidi H, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and E. A. Adda Bedia, Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory, *Steel Composite Structures*, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [153] Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013) “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 547 – 567.
- [154] Sobhy M, Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions, *Composite Structures*, vol. 99, pp. 76–87, 2013.
- [155] Tran L V et al. Isogeometric analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory. *Composites Part II*(2013).
- [156] Bui T Q et al. (2013) “Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method.” *Engineering Structures*, Vol.47. pp. 90–104.
- [157] Nedri K, N. El Meiche, and A. Tounsi, Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 641–650, 2014.
- [158] Fekrar A, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and S. R. Mahmoud, A New Five- Unknown Refined Theory Based on Neutral Surface Position for Bending Analysis of Exponential Graded Plates, *Meccanica*, vol. 49, pp. 795–810, 2014.
- [159] Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014) “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Method.*, 11(5), 135007.
- [160] Draiche K, A. Tounsi, and Y. Khalfi, A Trigonometric Four Variable Plate Theory for Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass, *Steel and Composite Structures*, vol. 17, no. 1, pp. 69–81, 2014.
- [161] Kaddouri Djamel Eddine, Analyse des effets de l’amplitude et température sur le comportement non linéaire d’une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel, Thèse de Magister, Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen, 2014.
- [162] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2015) “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 14(1), 5-33.
- [163] Ait Atmane, H. Tounsi, A. and Bernard, F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater.*, 1- 14, 2015.



- [164] Kennedy D et al. Equivalent layered models for functionally graded plates. *Comp struct*(2015).
- [165] Bernardo G M S et al. A study on the structural behaviour of FGM plates static and free vibration analyses, *Comp Struct*(2016).
- [166] Zenkour A.M. (2005) “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses.” *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, pp. 5224–5242.
- [167] Mantari J.L.(2015) “A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams.” *Composite Structures*, Vol.134, pp. 593–601.
- [168] Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015) “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel and Composite Structures*, 19(3), 521-546.
- [169] Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013) “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15, 671–703.
- [170] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014) “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.
- [171] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014) “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Method.*, 11(6), 1350082.
- [172] Ramu, I., Mohanty, S.C. (2015) “Free vibration and dynamic stability of functionally graded material plates on elastic foundation”, *Defence Science Journal*, 65(3), 245 – 251.
- [173] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015) “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [174] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015) “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- [175] Winkler, E. (1867) “Die lehre von der elasticitaet und festigkeit”, Prague: Prag Dominicus.
- [176] Pasternak, P.L. (1954) “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosudarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu I Arkhitekture*, 1, 1–56.
- [177] Marur P R. Fracture behaviour of functionally graded materials. PhD Thesis, Auburn University, Alabama. 1999.
- [178] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica* 1973; 21(5): 571-574.
- [179] Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials* 1987; 6(2):147-157.
- [180] Delale F , Erdogan F. The crack problem for a non-homogeneous plane. *ASME J. Appl. Mech* 1983; 50(3): 609-614.

- [181] Reddy J N. Energy principles and variational methods in applied mechanics. John Wiley & Sons , 2002.
- [182] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F, Mahmoud S R. A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel and Composite Structures* 2015; 19(2):369-384.
- [183] Bennoun M, Houari M S A, Tounsi A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 2016; 23(4):423-431.
- [184] Reddy J N, Phan N D. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *Journal of sound and vibration* 1985; 98(2): 157–170.
- [185] Liew K M, Hung KC, Lim M K. A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates. *International Journal of Solids and Structures* 1993; 30(24) : 3357-3379.
- [186] Alibeigloo A. Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity. *Acta Mechanica* 2011; 222(1):149-159.
- [187] Bessaim A , Houari M S A, Bernard F, Tounsi A. A nonlocal quasi-3D trigonometric plate model for free vibration behaviour of micro/nanoscale plates. *Structural Engineering and Mechanics* 2015; 56(2): 223-240.
- [188] Vel S S, Batra R C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 2004; 272(3):703-730.