

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS
Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par

Mademoiselle : **BOUKHLIF Zoulikha**

Intitulé de la thèse

**Modélisation analytique de la vibration libre des plaques
FGM posées sur fondation élastique**

Soutenue le : / /

devant le jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	Président	UDL SBA
BOUREMANA Mohammed	Pr	Directeur de thèse	UDL SBA
FAHSI Bouazza	Pr	Examineur	UDL SBA
SADOUN Mohamed	MCA	Examineur	U. MASCARA
CHIKH Abdel Baki	MCA	Examineur	U. TIARET
HEBALI Habib	MCA	Examineur	U. MASCARA

Année universitaire 2019-2020

Dédicaces

Je dédie ce travail

A mes parents

A ceux qui m'ont aidé à découvrir le 'savoir' le trésor inépuisable. De tous les parents, vous avez été les meilleurs, vous avez su m'entourer d'attention, m'inculquer les valeurs nobles de la vie, m'apprendre le sens du travail, de l'honnêteté et de la responsabilité. Merci d'avoir été toujours là pour moi, un grand soutien tout au long de mes études.

Ce travail est votre œuvre, vous qui m'avez donné tant de choses et vous continuez à le faire...sans jamais vous plaindre. J'aimerais pouvoir vous rendre tout l'amour et la dévotion que vous nous avez offerts, mais une vie entière n'y suffirait pas. J'espère au moins que ce mémoire y contribuera en partie. Puisse Dieu tout puissant vous protéger du mal, vous procurer longue vie, santé et bonheur afin que je puisse vous rendre un minimum de ce que je vous dois.

A mon très cher frère et regretté Mokhtar

Je ne saurai traduire sur du papier l'amour et l'affection que j'ai pour Toi, je n'oublierai jamais ces merveilleux moments passés ensemble J'aimerais que tu sois avec moi pour être fier de moi mais tu es dans un monde meilleur avec un Dieu généreux رحمة الله عليك

A mon cher frère, mes chères : sœurs, neveux et nièce

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour et mon attachement. Puisse nos fraternels liens se pérennisent et consolident encore. J'espère que ma thèse sera pour vous source de fierté et qu'elle sera un exemple à suivre.

A mes beaux frères, mes tantes, mes oncles et mes amis.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics, de l'Université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Bouremana Mohammed de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et leur amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

Je remercie particulièrement M^r le Professeur Tounsi Abdelouahed, pour son aide et ses encouragements et je salue en lui ses hautes qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de toujours aller de l'avant et m'a fait honneur de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, Sedoun Mohamed, Fahsi Bouazza, Chikh Abdel Baki et Hebali Habib de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Belbachir Nesrine, Benyoucef Houria, Bourada Fouad, Sekkal mohammed et l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à ma famille, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé. Et je n'oublierai pas mes très chers parents qui m'apportent toujours leur soutien sans faille ; ainsi une partie de cette thèse leur revient.

Résumé

Ce travail présente une étude dynamique de plaques à gradient fonctionnel (FG) reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie de déformation de cisaillement supérieure quasi-3D simple (HSDT quasi-3D) dans laquelle l'effet d'étirement est considéré. Le principe de cette théorie est qu'en plus de prendre en compte l'effet de l'extension d'épaisseur ($\epsilon_z \neq 0$), la cinématique est définie avec seulement 4 inconnues, ce qui est même inférieur à la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT). La fondation élastique est incluse dans la formulation en utilisant le modèle mathématique Pasternak.

Les équations gouvernantes sont déduites par le principe de Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues via des solutions de type fermé de type Navier. Les fréquences fondamentales sont prédites en résolvant le problème des valeurs propres. Le degré de précision des solutions actuelles peut être montré en le comparant à la solution 3D et à d'autres solutions de forme fermée disponibles dans la littérature.

Mots-clés: vibration, quasi-3D, gradient fonctionnel (FG), Quasi-3D HSDT.

Abstract

This work presents a dynamic investigation of functionally graded (FG) plates resting on elastic foundation using a simple quasi-3D higher shear deformation theory (quasi-3D HSDT) in which the stretching effect is considered. The culmination of this theory is that in addition to taking into account the effect of thickness extension ($\varepsilon_z \neq 0$), the kinematic is defined with only 4 unknowns, which is even lower than the first order shear deformation theory (FSDT). The elastic foundation is included in the formulation using the Pasternak mathematical model. The governing equations are deduced through the Hamilton's principle. These equations are then solved via closed-type solutions of the Navier type. The fundamental frequencies are predicted by solving the eigenvalue problem. The degree of accuracy of present solutions can be shown by comparing it to the 3D solution and other closed-form solutions available in the literature.

Keywords: vibration; FG plate; Quasi-3D HSDT

الملخص

في هذه الأطروحة، قمنا بتحليل الاهتزاز الحر للصفائح متدرجة الخاصية التي تركز على أساس مرن باستخدام نظرية تشوه القص العالي ثلاثية الأبعاد (HSDT-quasi 3) شبه البسيطة التي يتم فيها النظر في تأثير التمدد. مبدأ هذه النظرية أنه بالإضافة إلى مراعاة تأثير امتداد السماكة ($\epsilon z \neq 0$)، يتم تعريف الحركة الحركية بأربعة مجاهيل فقط، وهي أقل من نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى (FSDT) يتم تضمين الأساس المرن في الصيغة باستخدام نموذج وينكلر باسترنك الرياضي (Winkler-Pasternak).

يتم استخلاص المعادلات التفاضلية من خلال مبدأ هاملتون. ثم يتم حل هذه المعادلات عبر حلول تقريبية من النوع نافير. ثم نستخلص الترددات الأساسية عن طريق حل مشكلة القيم الذاتية.

النتائج المحصل عليها في هذا التحليل الاهتزازي الحر للوحات المستقر على أساس مرن فعالة وسهلة لتحليل حركة اللوحات. يمكن إظهار درجة دقة الحلول الحالية من خلال مقارنتها بالحل ثلاثي الأبعاد وغيره من الحلول ذات الأشكال المغلقة المدروسة سابقاً.

الكلمات المفتاحية: الاهتزاز، الصفائح متدرجة الخاصية، نظرية تشوه القص العالي ثلاثية الأبعاد.

Table des matières

Résumé

Abstract

الملخص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	
I.1.Introduction.....	05
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués(FGM).....	05
I.3. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	08
I.4. Procédés de fabrication FGM.....	12
I.4.1 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting).....	12
I.4.2. Coulage en bande (tape casting).....	13
I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement).....	13
I.4.4.Coulée par centrifugation.....	14
I.4.5. Projection plasma.....	14
I.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (pvd).....	15
I.4.7.Dépôt chimique en phase vapeur (cvd).....	16
I.4.8. Frittage et infiltration.....	17
I. 4.9.Frittage laser différentiel.....	17
I.4.10 .Dépôt par électrophorèse.....	18
I.5. Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs).....	19
I.5.1 Génie civil.....	19
I.5.2 Réacteur nucléaire.....	20
I.5.3.Domains aérospatial.....	21
I.5.4.Domaine biomédical.....	21
I.6 Avantage et inconvénients de la FGM.....	22
I.6.1 Avantages de la FGM.....	22

I.6.2 Inconvénient de la FGM.....	23
I.7. Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM.....	23
1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	25
1.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	27
1.7.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	28
1.7.4. D'autres propriétés matérielles des plaques FGMs.....	29
I.8. Conclusion.....	30

Chapitre II : Revue bibliographique sur la modélisation du comportement mécanique des plaques FGMs

II.1. Introduction.....	31
II.2. Définition d'une plaque	31
II.3. Différents types de plaques.....	32
II.4. Différents types de comportements des plaques.....	32
II.5. Etat membranaire et état flexionnel.....	33
II.6. Hypothèses pour l'étude des plaques.....	34
II.7. Classement des théories de déformation en cisaillement.....	36
II.8. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés.....	36
II.8.1. Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT).....	36
II.8.1.1. Hypothèses de la théorie classique des plaques.....	36
II.8.1.2. Champ de déplacement (Théorie classique des plaques (CPT))....	37
III.8.1.3. Limitation de la théorie classique.....	38
III.8.2 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT).....	38
II.8.3. Le modèle de la plaque basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT).....	40
II.8.4. La théorie raffinée de déformation des plaques.....	44
II.8.5. La théorie quasi-3D de déformation des plaques.....	45
II.9. Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs.....	45
II.10. Modélisation du support élastique (Winkler et Pasternak).....	50
II.11. Conclusion.....	53

Chapitre III : Le modèle théorique et le développement analytique

III.1. Introduction.....	54
--------------------------	----

III.2. Présentation de la plaque.....	54
III.3. Champs de déplacement.....	56
III.4.Champs de déformation.....	56
III.5.Les équations constitutives.....	57
III.6. Détermination des équations gouvernantes.....	58
III.7. Les équations gouvernantes de la plaque.....	60
III.8. Méthode de Navier pour le calcul des fréquences de la plaque FGM.....	63
III.9. Conclusion	66
Chapitre IV : Résultats et interprétations	
IV.1. Introduction.....	67
IV.2. Présentation de l’outil Maple	67
IV.3. Résultat numériques et discussions.....	68
IV. 3.1. Les propriétés matérielles.....	69
IV.3.2. Etude comparative.....	70
IV. 3.2.1. Plaque isotrope.....	70
IV.3.2.2. Plaques FGM.....	73
IV.3.3. Etude paramétrique.....	78
IV.3.3.1. Plaques simplement supportées.....	78
IV.3.3.1. Plaques reposent sur un support élastique.....	79
IV. Conclusion.....	82
Conclusion et perspectives.....	83
Références bibliographiques.....	85

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique - métal [Mahmoudi, 2018].....	07
Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Mahmoudi, 2018].....	08
Figure I.3 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.....	10
Figure I.4 : La distribution composante des matériaux [Yoshihisa, 2012]. Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).....	11
Figure I.5 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)[Tchikawa, 2000].....	15
Figure I.6 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto et al, 1999].....	17
Figure I.7 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [Yuki, 1990].....	18
Figure I.8 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux FGM [Aldo et al, 2002].....	19
Figure I.9 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [Hermann, 2017].....	20
Figure I.10 : Réacteur nucléaire [Mahmoudi, 2018].....	20
Figure I.11 : Pièces multimatériaux dans le domaine aérospatial.....	21
Figure I.12 : Pièces multimatériaux dans le domaine biomédical.....	22
Figure I.13 : géométrie d'une plaque FGFM.....	25
Figure I.14 :Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	26
Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	28
Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	28

Chapitre II

Figure II.1 : Modèle d'une plaque FGM.....	31
Figure. II.2 : Efforts intérieurs dans une plaque.....	34
Figure. II.3 : Description d'une plaque (géométrie et variables).....	35
Figure II.4 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [Reddy, 1997]....	37
Figure II.5 : Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).....	39

Figure II.6: Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre..... 40

Figure II-7 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre élevé..... 41

Chapitre III

Figure III-1: Plaque FGM reposant sur une fondation élastique..... 54

Figure III.2: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p 55

Chapitre IV

Figure IV.1: Variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle

$\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ en fonction d'indice matériels d'une plaque FGM carré (a/h=10)..... 78

Figure IV.2: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ en fonction du rapport a/b d'une plaque FGM (a/h=10, p=1)..... 79

Figure IV.3: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction d'indice matériels d'une plaque FGM Al/Al₂O₃ carré (a/h=10)..... 80

Figure IV.4: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction du rapport a/b d'une plaque FGM (a/h=10, p=1)..... 80

Figure IV.5: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque carrée FGM Al/ZrO₂ repose sur une fondation élastique en fonction de paramètre \bar{K}_0^w ($\bar{K}_1^w=10$, p=1)..... 81

Figure IV.6: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque carrée FGM Al/ZrO₂ repose sur une fondation élastique en fonction de paramètre \bar{K}_1^w ($\bar{K}_0^w=10$, p=1)..... 81

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [Mahmoudi, 2018].....	07
Tableau 1.2 : caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koisimi, 1996].....	11

Chapitre IV

Tableau IV.1 : Les propriétés mécaniques des matériaux de la plaque FGM...	69
Tableau IV-2 : Fréquences naturelles non dimensionnelles $\hat{\omega} = \sqrt{ph / D_0}$ pour plaques carrées isotropes simplement supportées.....	71
Tableau IV-3 : Comparaison de la fréquence fondamentale $\hat{\omega} = \sqrt{ph / D_0}$ d'une plaque carrée isotrope repose sur un support élastique.....	72
Tableau IV-4 : Fréquences naturelles non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque FGM Al/Al ₂ O ₃ simplement supportées.....	73
Tableau IV.5: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$ d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée.	74
Tableau IV.6: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$ d'une plaque rectangulaire en FGM Al/ZrO ₂ repose sur un support élastique (a/b=1.5)	76
Tableau IV.7: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$ d'une plaque rectangulaire en FGM Al/Al ₂ O ₃ repose sur un support élastique (a/h=0,15)	77

Nomenclature

$E(z)$	Module de YOUNG en fonction des l'épaisseur
E_c	Le module de YOUNG (céramique)
E_m	Le module de YOUNG (métal)
$\rho(z)$	La masse volumique
ρ_c	Les masses volumiques (céramique)
ρ_m	Les masses volumiques (métal)
ν	Coefficients de Poisson
a	Largeur de la plaque
b	Longueur de la plaque
h	L'épaisseur de la plaque
p	L'indice de la puissance (Loi de puissance)
k_0^w	Rigidité de Winkler
k_1^w	Rigidité de cisaillement de Pasternak
$P_{(z)}$	La propriété de matériau
$V(z)$	La fraction volumique
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
$u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les déplacements inconnus du plan médian de la plaque
k_1 et k_2	Les coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de cisaillement)
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de forme
Pm	Modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux métalliques

Pm	Modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux métalliques
Pc	Modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux céramiques
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
i, j	Nombre naturel
δ	Variation
C_{ij}	Les coefficients de rigidité
δU	L'énergie de déformation virtuelle
δV_e	La variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique
δK	La variation de l'énergie cinétique.
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à x
$\frac{\partial}{\partial y}$	Dérivée partielle par rapport à y
α	Nombre d'onde selon x
β	Nombre d'onde selon y
A	La surface supérieure de la plaque
N	Composant de l'effort normal
M	Composant de moment fléchissant
S, Q	Les efforts d'ordre élevé
ε	Vecteur de déformation
K^b	Vecteur de courbure
K^s	Vecteur de rotation normal
γ^0, γ^1	Vecteur d'orde élevé

$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8)$	Composants de moment d'inertie
$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$	Composants de rigidité
$(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s), (F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s)$	Composants de rigidité
L, L^a, R, R^a	Composants de rigidité
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels
\sum	Somme
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Les paramètres arbitraires
ω	La fréquence propre associée au mode propre (m, n) .
γ^0, γ^1	Vecteur d'ordre élevé
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$[K]$	La matrice de rigidité
$[M]$	La matrice de masse
γ	Paramètre de charge non dimensionnel
$ $	Déterminant
\int	Intégrale indéterminée
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
CPT	Théorie classique des plaques minces
ESDT	Théorie exponentielle de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory)
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier degré
HSDT	Théorie hyperbolique de déformation de cisaillement d'ordre élevé
SSDT	Théorie sinusoïdal de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The sinusoidal shear deformation theory)
ISS	Interaction Support Structure
PRT	Théorie raffiné des plaques (Refined Plate Theory)

PM	Métallurgie des poudres (Powdered metallurgy)
<i>CSPM</i>	Méthode particule-solide centrifuge
FGM	Les matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials)

Introduction générale

Le monde industriel est en évolution permanente et une quête dans le perfectionnement de la recherche. Ce développement ne peut être réalisé sans le progrès de la science qui fournit les résultats de la recherche scientifique dans l'industrie, ce qui permet de féconder des processus innovants dans le domaine de l'industriel.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie.

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ou la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées.

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

À cet effet, naissent les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux à gradation fonctionnelle, qui a été développé par des chercheurs japonais tels que Niino au laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 [Niino et al. 1988]. Ces matériaux intelligents sont capables de supporter des gradients de température très élevés et qui représentent une innovation récente en science des matériaux, ce sont des composites compliqués avec une variation progressive continue des fractions volumiques de chaque constituant, induisant des changements et éliminent les discontinuités aux interfaces, tandis que les propriétés des matériaux sont conservées. Il est donc possible de joindre entre les propriétés de deux composants complètement différents sans que nul ne fasse des concessions au profit de l'autre.

Actuellement, la plupart des recherches dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur les principes de joindre deux constituants, la combinaison de la céramique et le métal améliore la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, l'usure et l'oxydation de la céramique. En conséquence, ce sont de nouveaux matériaux qui peuvent répondre aux spécifications multicritères pour combiner des propriétés mécaniques et thermiques.

Durant ces trois dernières décennies, les matériaux FGM ont captivé une attention particulière et un intérêt en raison de leurs avantages; de ce fait leur utilisation est en surcroît dans plusieurs domaines comme l'aéronautique, les réacteurs nucléaires, les constructions navales et aussi comme source d'énergie biomécanique [Koizumi M.1993; Tounsi et al.2013; Boudierba et al. 2013; Ait Amar Meziane et al.2014; Hebali et al.2014; Hamidi et al. 2015; Tagrara et al.2015; Bennai et al.2015; Larbi Chaht et al.2015; Boukhari et al.2016; Turan et al.2016; El-Hassar et al.2016]. Ces structures sont soumises à des chargements et des contraintes, ces derniers induisent la ruine de ces structures [M. Savoia et al.1995].

À cet effet, il faut développer des calculs efficaces et plus exacts, afin de comprendre l'impact de la transformation mécanique sur le comportement de ces structures épaisses en matériaux à gradient de propriété dans un but de déterminer la variation des déplacements, des déformations et des contraintes en chaque élément de ces structures ainsi que les fréquences de vibration.

Ces contraintes étant normales ou de cisaillement ainsi que les fréquences de vibration dans les différents types de structures que ce soit plaques ou coques en matériau à gradient de propriété sont déterminé en se basant sur des hypothèses du champ de déplacement développé et la théorie appropriée choisie.

Dans cette catégorie de recherche, plusieurs chercheurs ont élaboré des études dans le comportement statique et vibratoire des plaques fonctionnellement graduées FGM. [Ferreira et al.2006] ont étudié les vibrations des plaques fonctionnellement graduées pour un modèle des plaques que soit de premier et troisième ordre de déformation de cisaillement en utilisant une technique globale de collocation.

[Qian et al.2015] ont étudié la flexion et les vibrations libres d'une plaque fonctionnellement graduées épaisse de forme géométrique rectangulaire en utilisant une théorie de cisaillement d'ordre supérieur, et une théorie de déformation normale.

[Matsunaga,H. 2008] a étudié les fréquences naturelles et le flambement des plaques fonctionnellement graduées en considérant les effets de déformations transversales.

[Lu et al. 2009] ont présenté une analyse des vibrations libres des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique tridimensionnelle, [Malekzadeh, P. 2009] a utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour la réponse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduée reposante sur des fondations élastiques du type Winkler-Pasternak.

[Neves et al. 2012a; Neves et al. 2012b] ont proposé une formule de déformation de cisaillement sinusoïdal, et une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi- 3D pour l'analyse statique et dynamique de plaques fonctionnellement graduées. [Bessaim et al. 2013] ont développé une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur pour la déformation normale dans le cas de l'analyse statiques et la vibration libre des plaques sandwich avec des feuilles de face isotropes fonctionnelles. [Akavci, SS. 2014] a utilisé une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour une analyse de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique. [Hebali et al. 2014] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi- 3D pour l'analyse statique et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées. [Nguyen et al. 2015] ont développé une théorie de déformation de cisaillement à ordre supérieur pour l'analyse de la flexion, la vibration et le flambement des plaques sandwiches à gradation fonctionnelle. [Hamidi et al. 2015] ont développé une théorie pour la plaque sinusoïdale avec cinq inconnues avec prise en compte de l'effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwich à gradation fonctionnelle. [Ramu et al. 2015] ont étudié la vibration libre ainsi que la stabilité dynamique des plaques en matériau à gradations fonctionnelles sur une fondation élastique.

Ce travail porte une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques FGM simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak. Cette analyse vibratoire est examinée par une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre élevé HSDT quasi-3D qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur dans un but d'étudier la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées. Dans cette théorie le nombre d'inconnu est de quatre au lieu de cinq et six dans d'autre théorie publié dans la littérature.

Deux objectifs seront visés à travers cette thèse. Le premier objectif principal de ce travail est de déterminer le comportement mécanique de la plaque FGM par un nouveau

modèle analytique basé sur la théorie d'ordre supérieur pour déterminer les équations d'équilibre d'une plaque FGM et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles proposés dans la littérature.

Le second objectif de cette thèse est l'étude de l'influences des différents paramètres caractérisant les matériaux FGM sur la reponse d'une plaque reposant sur un support élastique.

Ce manuscrit s'organise ainsi en quatre chapitres :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel, le premier chapitre sera consacré à une généralité et une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leur comparaison aux matériaux composites, ainsi qu'à leurs domaines d'application.

Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les différentes théories des plaques existantes, que soit la théorie classique des plaques minces de love-kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des plaques. Nous présentons aussi une modélisation des plaques et le support élastique.

Le chapitre trois, quant à lui, sera consacré à la formulation d'un modèle analytique des plaques basé sur la théorie raffinée de déformation en cisaillement HSDT quasi-3D à quatre inconnues pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM. La formulation énergétique et variationnelle abouti ensuite à un système d'équation différentielle et présente le problème aux valeurs propres à partir de la méthode analytique de Navier. Les solutions du problème sont présentées dans le chapitre cinq passant par l'étude paramétrique d'une plaque P-FGM en vibration libre et par la résolution du problème aux valeurs propres. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à l'étude effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

I.1.Introduction

Les matériaux modernes tendent à devenir «multifonctionnels», même si leur objet premier permet en général de les classer en «Matériaux de structure » et en « matériaux fonctionnels ». Le problème du concepteur est qu'il demande non pas une propriété, mais un ensemble. [Sellai, 2011]. De nouveaux développements de matériaux et de la recherche mènent l'invention des matériaux, et l'utilisation scientifiques des matériaux de base disponibles (tableau périodique) en divers composés inorganiques et organiques a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurelles, etc. Les matériaux composites sont une classe de matériaux avancés, constitués d'un ou plusieurs matériaux combinés dans des états solides avec des propriétés physiques et chimiques distinctes. Le matériau composite offre une excellente combinaison de propriétés différentes des matériaux d'origine et est également plus léger. Les matériaux composites vont tomber en panne dans des conditions de travail extrêmes grâce à un processus appelé délaminage (séparation des fibres de la matrice). Cela peut arriver par exemple, dans une application à haute température où deux métaux avec un coefficient de dilatation différent sont utilisés [Mahmoudi, 2018].

Le changement brutal des propriétés des matériaux à travers l'interface entre les différents matériaux peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires menant à la délimitation, au craquage et à d'autres mécanismes de dommages. Pour remédier à ces défauts, des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), au sein de laquelle les propriétés des matériaux varient sans cesse, ont été proposés. Des chercheurs japonais [Niino et al, 1987], confrontés à ce défi dans un projet d'avion spatial hypersonique nécessitant une barrière thermique (température extérieure de 2000K et température intérieure de 1000K sur moins de 10 mm d'épaisseur), est venu avec un nouveau matériau appelé Matériau Fonctionnellement Gradué « en anglais: Functionally Graded Material » (FGM) [Niino et al. 1987].

Au début, les FGMs ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGMs ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures [Raje, 2005].

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués(FGM)

Le concept de la FGM a été proposé en 1984 par un groupe de spécialistes des matériaux, à Sendai, au Japon, pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage de chaleur [Koizumi, 1997]. Au début le FGM a été conçu comme un matériau de barrière

thermique pour l'application dans l'aérospatiale et les réacteurs de fusion. Plus tard, les FGMs ont été développés pour les industries militaires, automobile, biomédicale et les semi-conducteurs et comme un élément de structure générale dans des environnements thermiques élevés. Le FGM est l'un des matériaux à haute température de pointe pour les environnements haute température capable de résister à des températures extrêmes. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont inhomogènes à l'échelle microscopique, dans lequel les propriétés mécaniques varient de façon régulière et de façon continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé en faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métal ou d'une combinaison de différents matériaux.

Le constituant de la matière céramique fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique et protège le métal de l'oxydation. Le constituant de métal ductile, d'autre part, empêche la rupture provoquée par contraintes dues au gradient à haute température dans un très court laps de temps. En outre, un mélange d'une céramique et d'un métal avec une fraction de volume variant de façon continue peuvent être facilement fabriqués [Pindera, 1994 ; Pindera et al, 1997] . Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de la FGM ont été publiés au cours des dernières années [Pindera, 1994 ; Biest et al, 2004 ; Fuchiyama et Noda 1995, Markworth et al 1995, Tanigawa 1995, Noda 1999, Paulino et al., 2003]. Ils montrent que la plupart des premières études sur les FGM étaient plus axées sur l'analyse des contraintes thermiques et le comportement mécanique. [Shen, 2004] a présenté une étude complète sur l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations des structures en plaques et en coques composées de FGM.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Une microstructure graduée en continu avec des constituants métalliques/céramiques est représentée sur la figure I.1. Cela est dû au fait que les constituants céramiques des FGM sont capables de résister à des environnements à haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent des performances mécaniques plus élevées et réduisent la possibilité de fracture catastrophique. Récemment, [Birman et Byrd, 2007] ont présenté une revue des principaux développements des FGM, notamment les problèmes de transfert de chaleur, le stress, la

stabilité et les analyses dynamiques, les essais, la fabrication et la conception, les applications et les fractures.

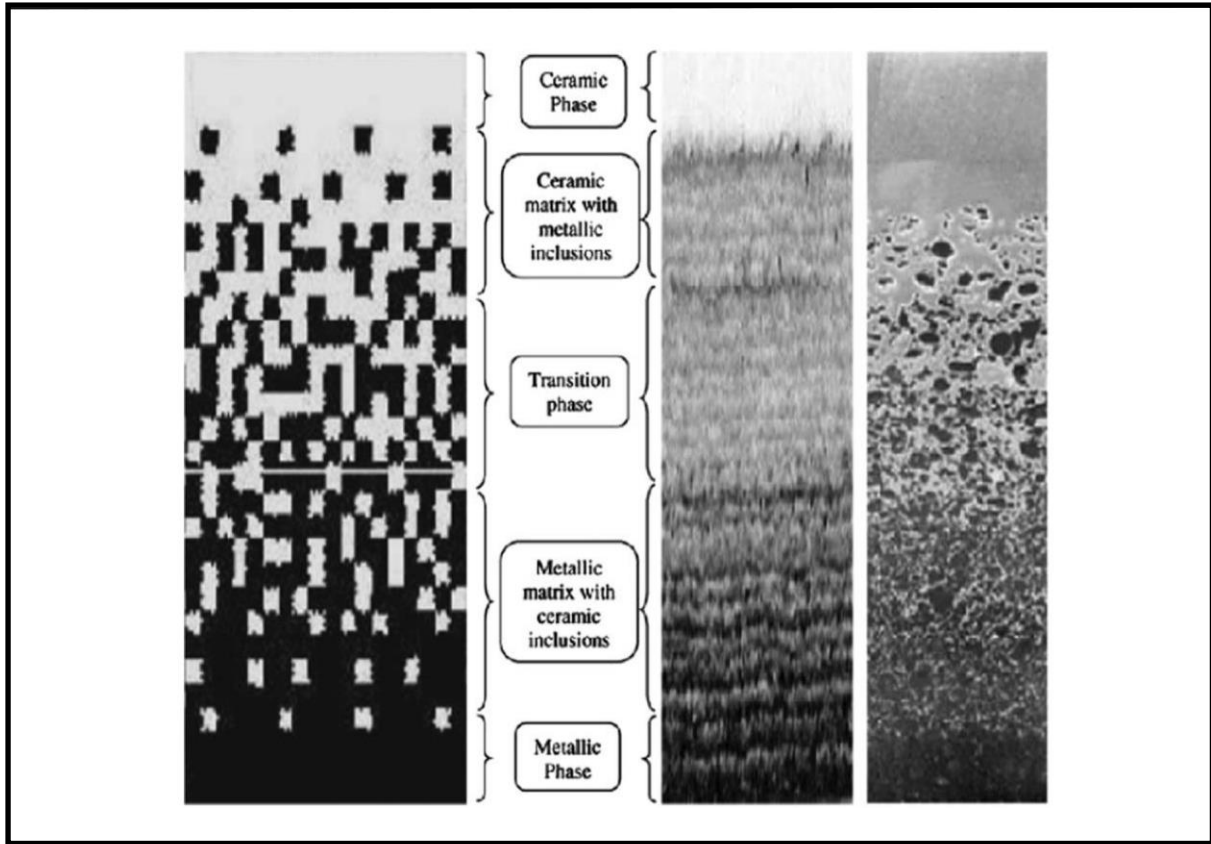


Figure I.1 : Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique -métal [Mahmoudi, 2018].

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le Tableau I.1.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [Mahmoudi, 2018].

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes d'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité à la rupture.

Le changement est continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM ». Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Un exemple d'un tel matériau est montré dans la figure I.2 [Yin et al, 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

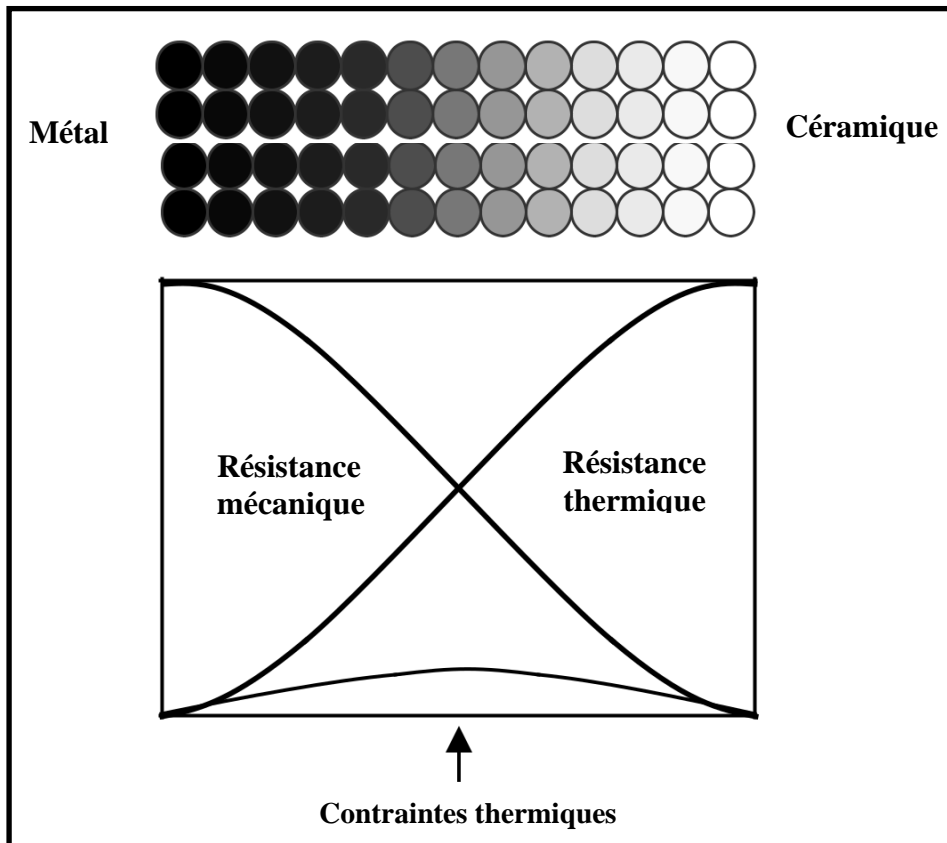


Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Mahmoudi, 2018].

Le concept de FGM a été appliqué avec succès dans des revêtements de barrière thermique où les exigences visent à améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion. Deux matériaux importants dans la technologie de fabrication des FGM sont: les couches céramiques protectrices extérieures Alumina ' Al_2O_3 ' et Zircon ' ZrO_2 ' sur les substrats Ni-super alloy ' NiCrAlY ' [Mahmoudi, 2018].

I.3. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Avec l'évolution technologique et les exigences de concurrence économique, les laboratoires de recherches ont poussé d'avantage leurs objectifs techniques, visant à satisfaire

la demande en matière de performances et de qualité. Ces performances prescrites ne peuvent être atteintes avec des matériaux purs à cause des propriétés de ces derniers qui ne sont pas assez polyvalentes pour certaines utilisations. Pour résoudre ce problème, la combinaison d'un métal avec d'autres métaux ou non métaux en état de fusion est utilisée, c'est ce qu'on appelle alliage, ceci donne des propriétés différentes de celles des matériaux de base. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique [Rasheedat et al, 2012], car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Ainsi qu'il est prohibitif de combiner deux matériaux par ce procédé avec un écart de température de fusion des composants. La métallurgie des poudres (powdered metallurgy PM) est une autre méthode de production d'une pièce qui ne peut être produite par alliage conventionnel, où l'alliage est produit sous forme de poudre à faire fritter. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [Rasheedat et al, 2012]. Bien que ces limitations sont avantageuses à certaines applications (par exemple, filtre et applications non structurelles) mais, elles sont préjudiciables à d'autres. Une autre méthode de production des matériaux avec combinaison de propriétés est celle de combinaison de matériaux à l'état solide, donnant des matériaux composites.

Les matériaux composites sont des matériaux constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux différents dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués d'une matrice et d'un renfort, souvent ce dernier est sous forme de fibres. Ainsi, il est possible d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau obtenu telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres.

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue ..., etc. [Lionel, 2011]. En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure 1.3 a), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure 1-3.b). En d'autres termes, au lieu

d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. Les matériaux composites donc sont échoués dans des conditions extrêmes à travers le processus de délamination (séparation des fibres de la matrice) dû à la transition brutale de composition. Cela peut se produire par exemple, dans une application à haute température, où deux matériaux avec différents coefficients de dilatation thermique sont utilisés.

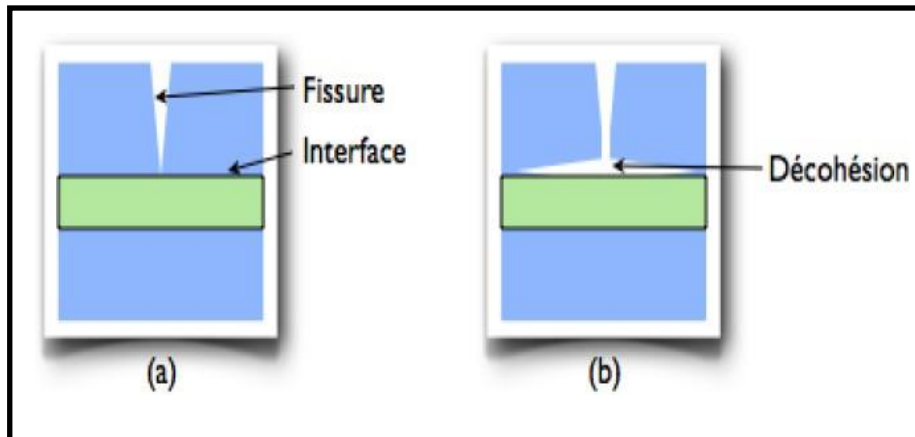


Figure 1.3 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue, les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau (1.2) [Koisimi, 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch et al, 1986].

Tableau 1.2 : caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koisimi, 1996].

	exemple	FGM	Non-FGM
propriétés	Resistance mecanique Conductivité thermique		
structure	Elément constituants : Ceramique ○ Métal ● Microporosité * fibre		

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure (figure I- 4). Le matériau plan (figure 1-4a) composé à une caractéristique plane, et le matériau relié (figure 1.4b) a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

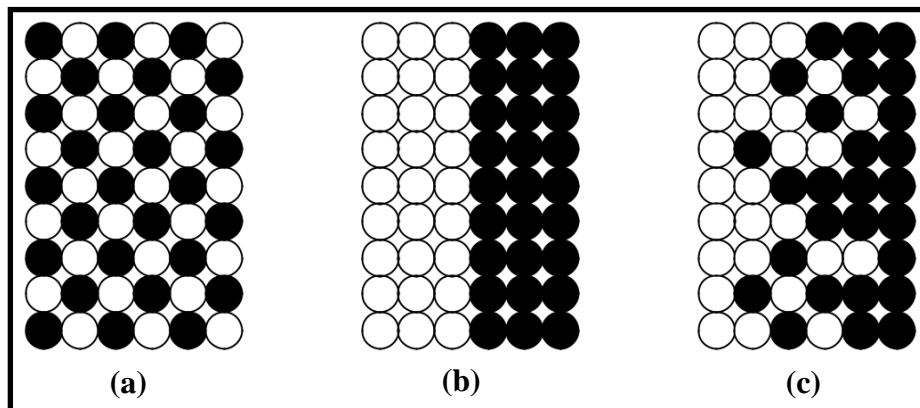


Figure I.4 : La distribution composante des matériaux [Yoshihisa, 2012].

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.4. Procédés de fabrication FGM

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par Bever et Duwez, Shen et Bever [Kieback et al, 2003]. Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment -là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur FGMs a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée [Mortensen 1995, Hirai 1996].

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les pages qui suivent illustrent les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel sont les plus importants.

I.4.1 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un Al_2O_3 /W FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain [Morinaga, 1993 ; Schwartz, 2005]. Quand il utilise une densité mince en barbotine (5% ou 10%), la couche d' Al_2O_3 et la couche de W ont été séparées, confirmant des couches inclinées continues et claires. Dans le passé, le dépôt en phase vapeur, l'implantation ionique, et la diffusion ont été employées pour fabriquer des matériaux de gradient, mais cette technique a attiré l'attention et pourrait permettre pour fabriquer une série de FGM en utilisant des densités minces en barbotine et de fines particules comme matière première avec différentes densités spécifiques.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par Grazzini et Wilkinson [Grazzini et al, 1992]. Leur travail a couvert le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et Al_2O_3 -Si avec des formulations de coulée en barbotine basées sur les boues d'émouillage dispersées et coagulées qui ont été analysées, et

d'excellents résultats ont été obtenus en utilisant les boues d'émouillage coagulées, sans présence de fissuration après séchage. L'effet de la pression s'est avéré pour augmenter la densité avec une augmentation conséquente de la densité de feu. En outre, des microstructures homogènes ont été réalisées dans le système composé, malgré la grande différence de tailles des particules utilisées.

I.4.2. Coulage en bande (tape casting)

Le processus de coulage, en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM Al_2O_3 - TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [Zeng et al, 2000].

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SiC pour B_4C (problème d'usure) ; ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant 4 heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation.

Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Myler siliconé afin de faciliter le décollement de la bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μ m). Des disques (20mm de diamètre) et des carrés (50mm de côté) sont découpés dans les bandes puis empilés. Ainsi on obtient des matériaux soit monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique de couches denses et poreuses) après thermo- compression sous 60 MPa [Reynaud al, 2001].

I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [Atarashiya, 2003 ; Leushake, 1999]. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des

différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm²) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [Zhang et al, 1998].

I.4.4. Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant [Zhang et al, 1998] ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg₂Si), [Zhang et al, 1998] et une densité plus élevée (Al₃Ti), [Watanabe et al 1997] que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube.

I.4.5. Projection plasma

La projection dans plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure 100µm environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000°C et la vitesse 1000- 1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watanabe, 2006]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [Omori et al, 1998]. Fukumoto a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur-concentration-gradué avec une microstructure homogène [Tchikawa, 2000]. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.5.

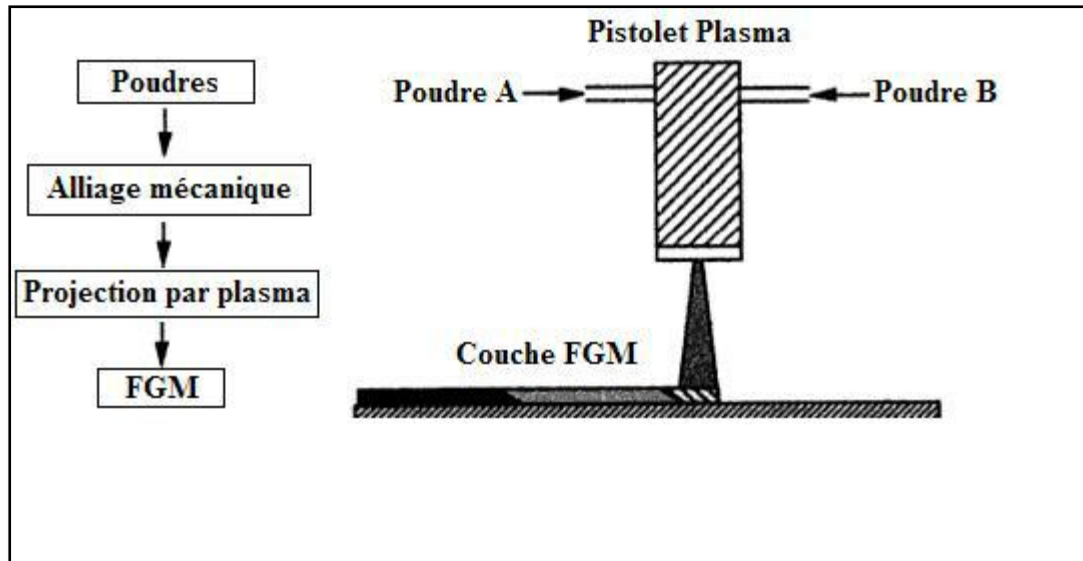


Figure I.5 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)[Tchikawa, 2000]

II.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (pvd)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [Miyamoto et al, 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto et al, 1999]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de

zircon, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

I.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (cvd)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement à la (figure I.6), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto et al, 1999]. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C . des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - $SiCl_4$ - H_2) sont employés aux températures de dépôt entre $1400^\circ C$ et $1500^\circ C$ et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa

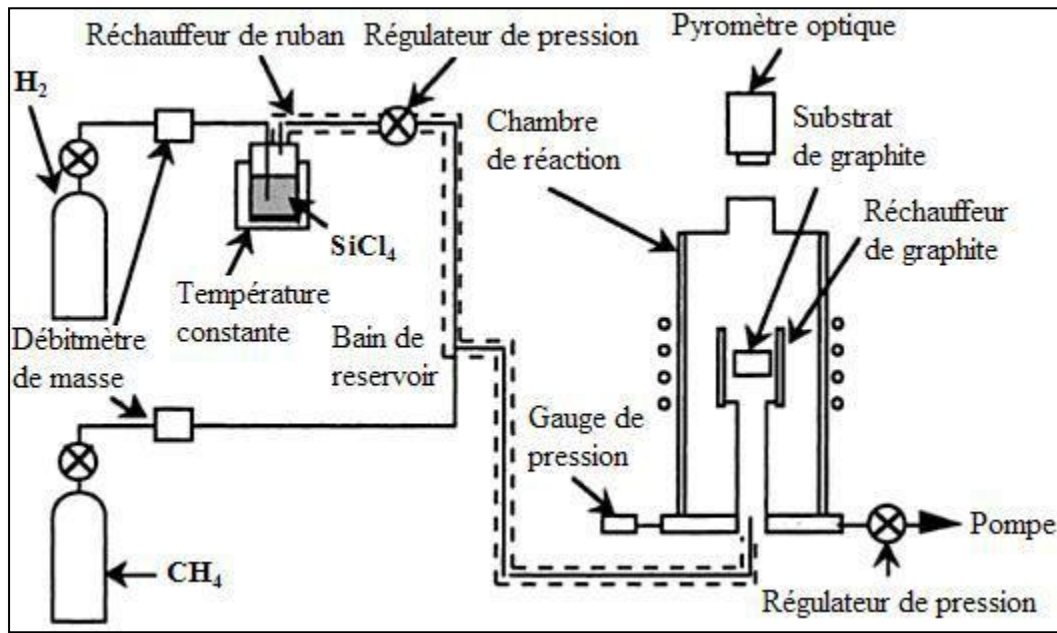


Figure I.6 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto et al, 1999].

I.4.8. Frittage et infiltration

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce.

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahushi, 1990]. Ce procédé peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I. 4.9.Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et al. [Yuki et al, 1990] ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure I.7 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

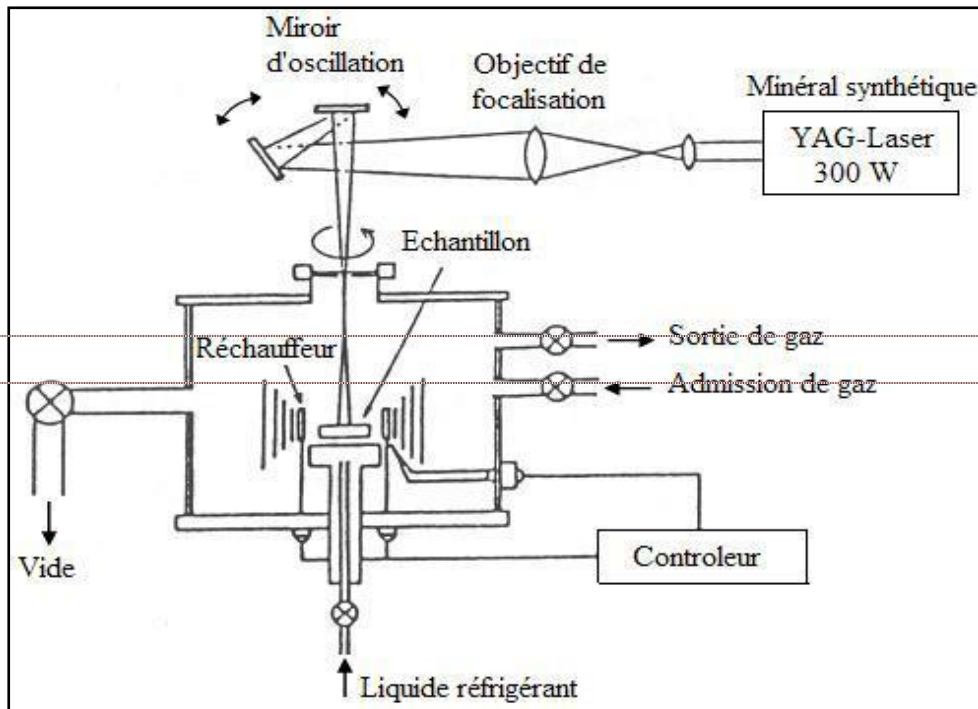


Figure I.7: Disposition du procédé frittage laser différentiel [Yuki, 1990].

I.4.10 .Dépôt par électrophorèse

Processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo et al, 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique - métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite

composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure(I.8).

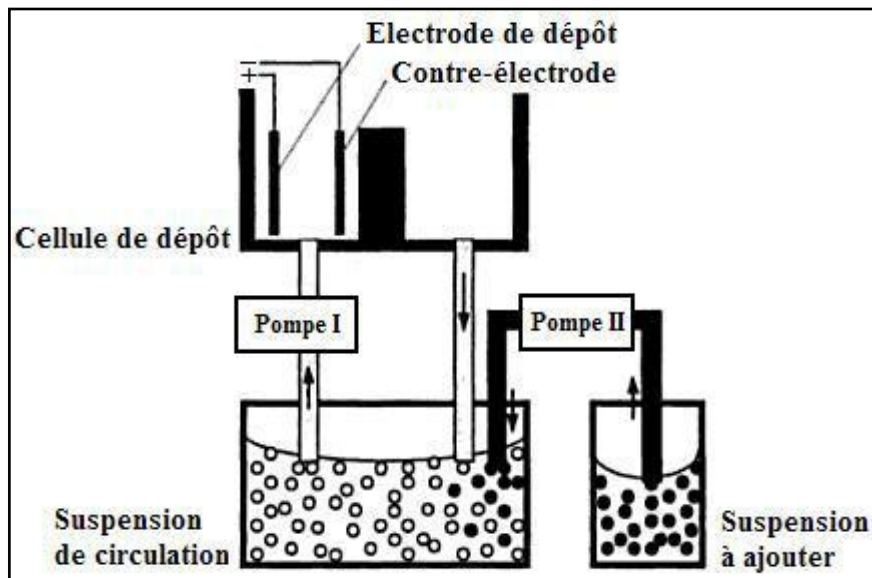


Figure I.8 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux FGM [Aldo et al, 2002].

I.5. Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Les FGMs ont un grand potentiel dans les applications où les conditions d'exploitation sont graves, y compris les boucliers thermiques des engins spatiaux, des tubes d'échangeurs de chaleur, les implants biomédicaux, revêtements de plasma dans les réacteurs de fusion, etc. Diverses combinaisons des fonctions normalement incompatibles peuvent être mises en œuvre pour créer de nouveaux matériaux pour l'aéronautique, les usines chimiques, des réacteurs nucléaires, etc.

I.5.1 Génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, y compris sa porosité, sa résistance ou sa rigidité. Le changement graduel des composants en béton permet l'altération continue des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure I.9)[Mahmoudi , 2018].

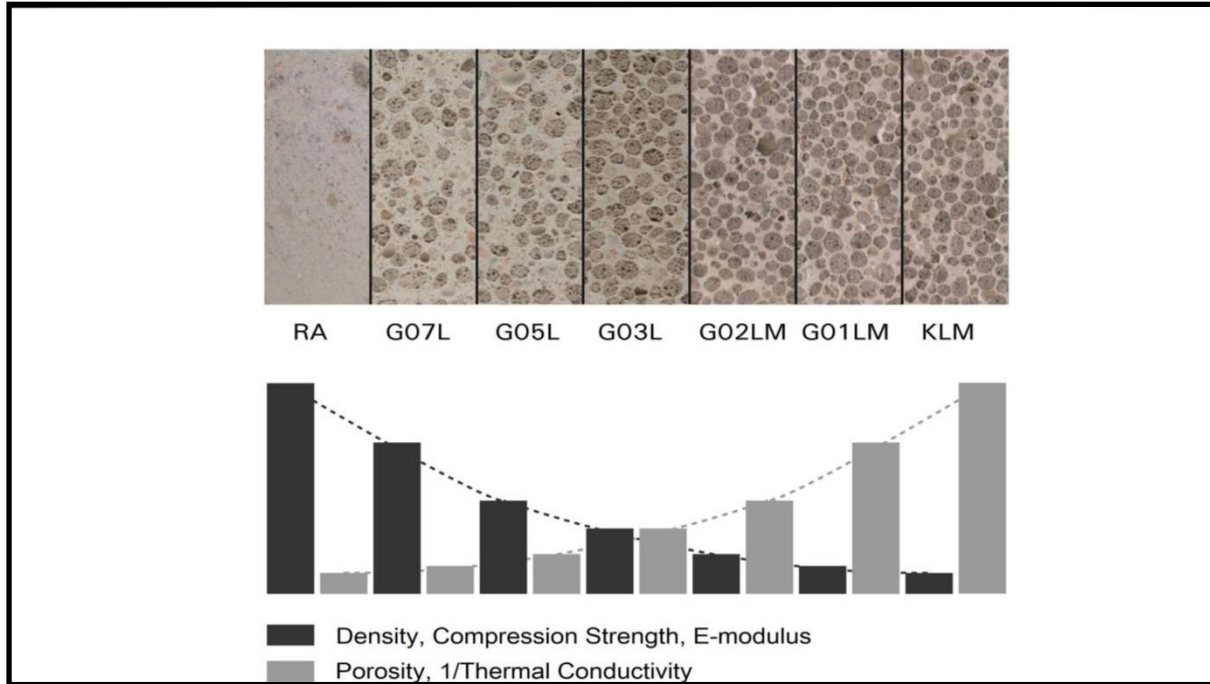


Figure I.9 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [Hermann, 2017].

I.5.2 Réacteur nucléaire

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont constituées de FGM (Céramique / Métal) dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal comme le montre la figure I.10 [Mahmoudi, 2018].

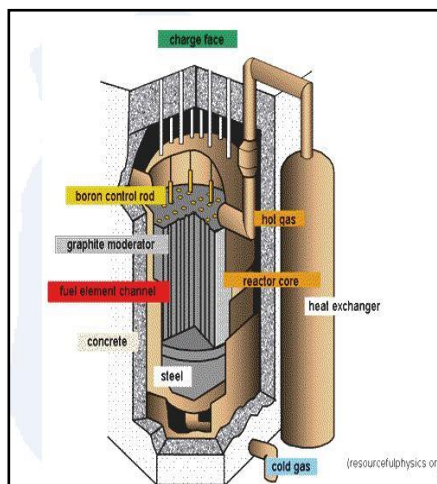
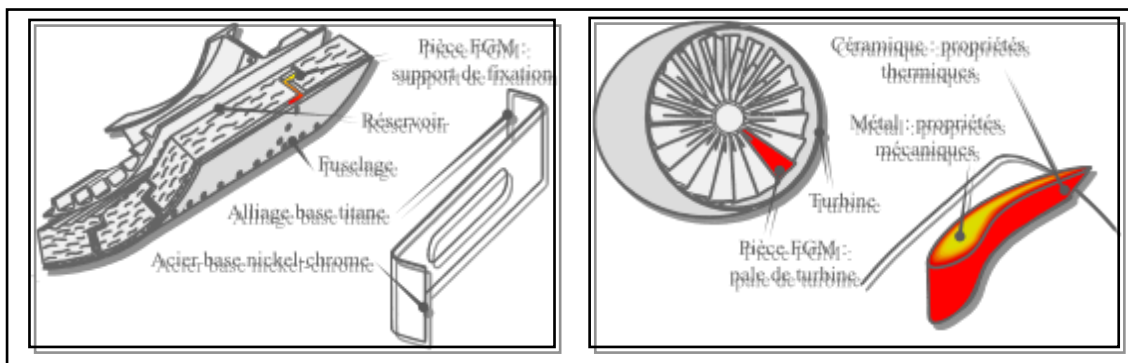


Figure I.10 : Réacteur nucléaire [Mahmoudi, 2018].

I.5.3. Domaines aérospatial

Dans le domaine aérospatial, où le concept de FGM fit sont apparition, les pièces multimatériaux sont en majorité développées dans le but de résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques. Le centre de recherche de la NASA propose, par exemple, de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales [Domack, 2005]. Ces pièces sont des supports de fixation permettant de relier le réservoir au fuselage (Figure I.11(a)). Des analyses thermiques montrent que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000 °C tandis que celle du réservoir est proche des 400 °C. La conception de ces supports de fixation doit leur permettre de supporter ces contraintes thermiques en limitant les efforts de cisaillement et de flexion qui impactent leur durée de vie. Ici, l'utilisation d'un gradient de matériau - d'un alliage base titane à un alliage base nickel-chrome - peut permettre de réduire les concentrations de contraintes et d'augmenter la durée de vie par rapport à une pièce en alliage base nickel-chrome. Des problématiques similaires existent sur d'autres pièces aérospatiales telles que les pales de turbines [Qian, 2003a]. En effet, elles aussi sont soumises à des sévères sollicitations thermiques et mécaniques qui peuvent entraîner des déformations de la structure et des fissures. Dans ce cas, l'utilisation d'un gradient de matériau peut permettre de résoudre ces problèmes (Figure I.11(b)).



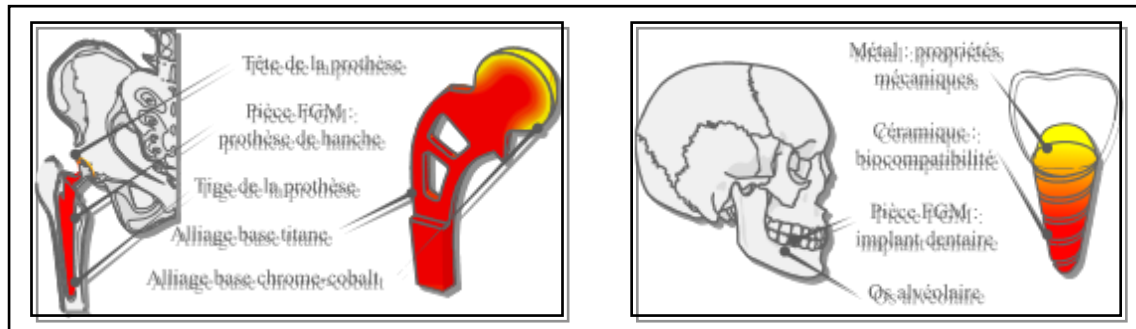
(a) Support de fixation NASA [Domack, 2005] (b) Pale de turbine [Qian, 2003a]

Figure I.11 : Pièces multimatériaux dans le domaine aérospatial

I.5.4. Domaine biomédical

Dans le domaine biomédical, les raisons pour utiliser un gradient sont plus variées [Pompe, 2003 ; Watari, 2004 ; Balla, 2010a ; España2010]. Il est possible, par exemple, d'utiliser un gradient de ma-tériaux pour combiner les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure sur une prothèse de hanche [Bandyopadhyay, 2009]. Un acier inoxydable peut alors être utilisé pour la tige tandis qu'un alliage base chrome-cobalt peut être utilisé pour la tête

(Figure I.12(a)). L'acier inoxydable est utilisé pour ses caractéristiques mécaniques et l'alliage base chrome-cobalt pour sa meilleure résistance au frottement. Des applications sont aussi envisageables avec une évolution des propriétés mécaniques et de biocompatibilité, sur des implants dentaires par exemple (Figure I.12(b))



(a) Prothèse de hanche [Bandyopadhyay, 2009] (b) Implant dentaire [Watari, 1997]

Figure I.12 : Pièces multimatériaux dans le domaine biomédical

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique [Müller2003], de la défense [Lu, 2011] ou de la production d'outillage [Jiang, 2005]. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques l'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettra encore de l'élargir. Effectivement, les possibilités de combinaison sont en théorie quasiment illimitées et chaque combinaison forme une structure avec des propriétés spécifiques. On peut donc penser que les structures multimatériaux vont transformer en profondeur le monde de la conception en augmentant considérablement les possibilités dans l'étape stratégique du choix des matériaux.

I.6 Avantage et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients:

I.6.1 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que [Narottam et al, 2011]:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;

- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminage ;
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.6.2 Inconvénient de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam et al, 2011].

I.7. Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes, avec une transition idéalement continue de la composition de la structure, et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures

non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen, 2009] :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I-1})$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_i : La propriété mécanique du constituant (i) ;

V_i : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{I-3})$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_m : La propriété mécanique du métal ;

P_c : La propriété mécanique de la céramique ;

V_m : La fraction volumique du métal ;

V_c : La fraction volumique de la

céramique. Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{I-4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

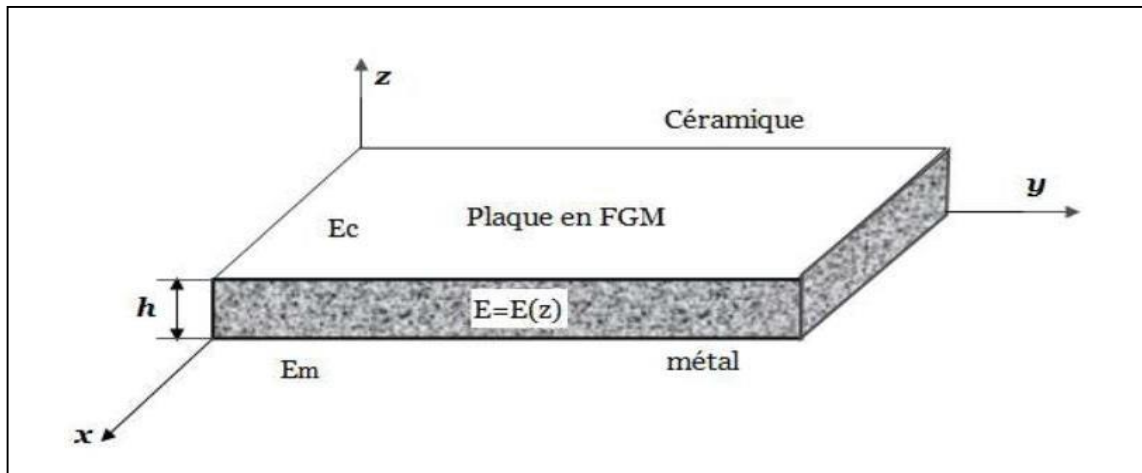


Figure I.13 : géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur $E = (z)$ et $\nu = (z)$.

L'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (I-5)$$

Où p est un paramètre matériels (paramètre de puissance) et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale (z) a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et al, 1995]:

$$E(z) = P_m + (P_c - P_m) \cdot V(z) \quad (I-6)$$

Où P_m et P_c sont respectivement les propriétés de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM.

(z) étant la fraction volumique du P-FGM défini par la relation (I-5).

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (I.14). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

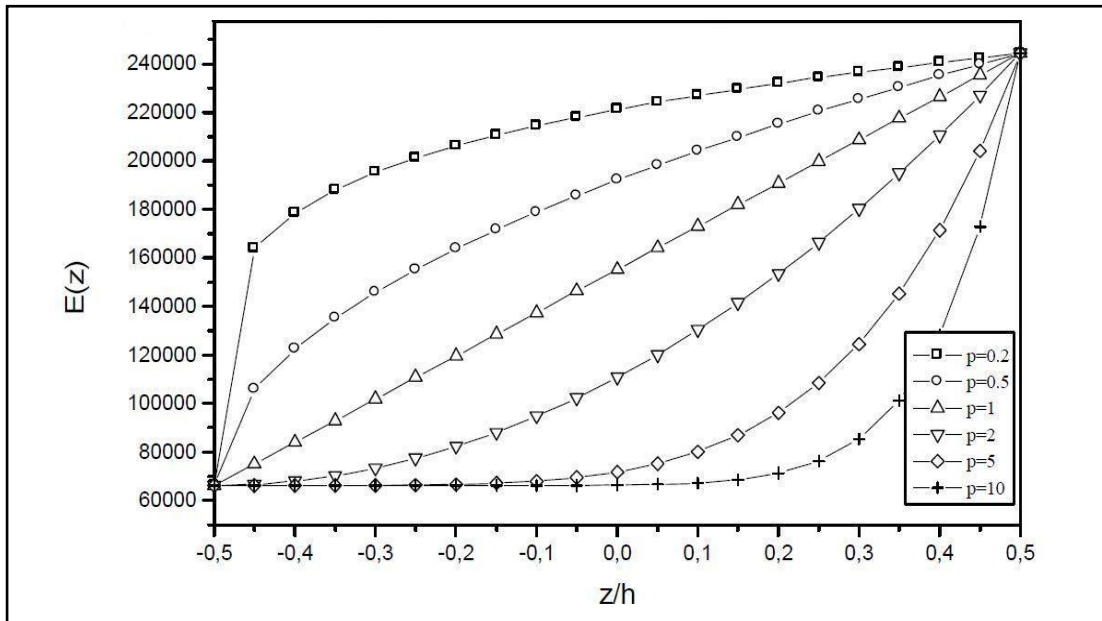


Figure I.14 :Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

On considérant la loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice c) et surface inférieure 100% métal (indice m)), les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)(z) \quad (I-7)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)(z) \quad (I-8)$$

(z) : La variation du module de Young le long de l'axe z ;

E_m : Module de Yung du métal ;

E_c : Module de Young du la céramique ;

(z) : La variation de la masse volumique le long de l'axe z ;

ρ_m : La masse volumique du métal ;

ρ_c : La masse volumique de la céramique.

Lorsque ($p = 1$), la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que

lorsque ($p = 1/2$ ou 2), la composition change d'une manière quadratique ou parabolique.

Dans le cas par exemple d'un revêtement d'isolation thermique (barrière thermique), il est souhaitable d'avoir le maximum de céramique sur la surface exposé à de fortes températures pour améliorer l'isolation sans sacrifier les aspects mécanique des zones gradées. Pour répondre à ce besoin, un profil parabolique enrichi de la céramique est tout a fait adapté.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [Chi et al, 2003]:

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-9a})$$

$$V'(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-9b})$$

On utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = E_1 + (1 - V(z))E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-10a})$$

$$E(z) = V'(z)E_1 + (1 - V'(z))E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-10b})$$

La figure (I.15) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1-9 a) et (1-9 b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

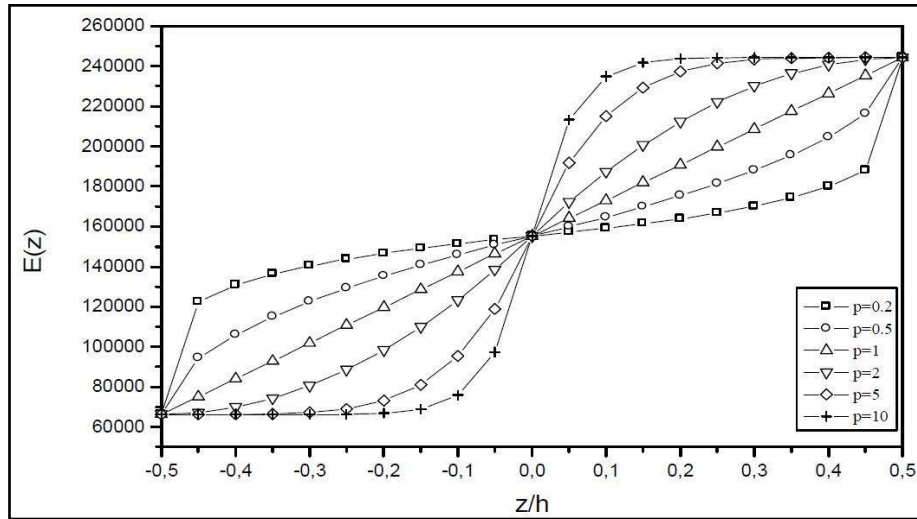


Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.7.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [Delale et al, 1983] :

$$E(z) = E_2 e^{B\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (I-11)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I-12)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (I.16).

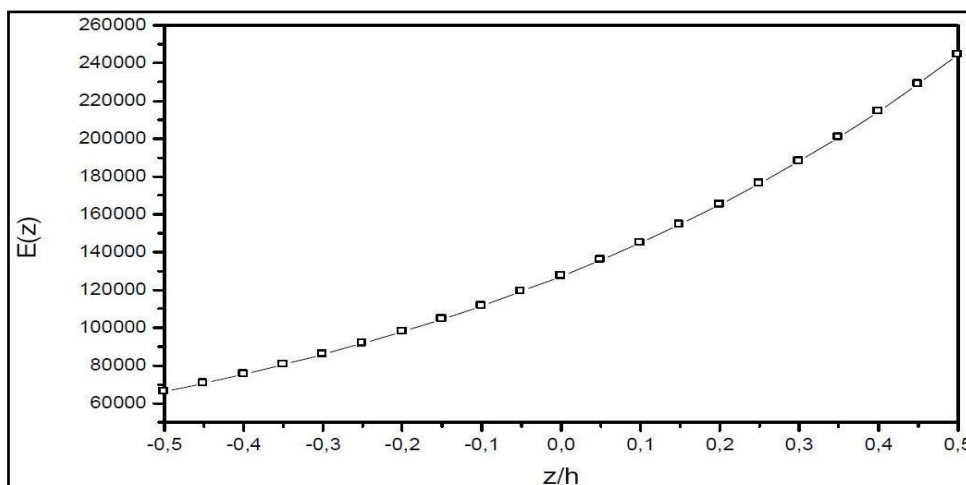


Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7.4. D'autres propriétés matérielles des plaques FGMs :

Les lois de mélange P-FGM, S-FGM et E-FGM sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Plusieurs autres modèles permettant d'évaluer les propriétés globales de la structure existent.

Le modèle le plus utilisé est basé sur le schéma de Mori et Tanaka [Mori et al, 1973], ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Pour une distribution aléatoire de particules isotropes (indice 2) dans une matrice isotrope (indice 1) Les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1) \left(K_1 - \frac{4}{3}G_1 \right)} \quad (\text{I-13})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)(G_1 - f_1)} \quad (\text{I-14})$$

$$f_1 + \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_2)} \quad (\text{I-15})$$

Avec :

K : Module de compressibilité ;

V : Fraction volumique ;

G : Module de cisaillement.

Il y a aussi un autre modèle qui suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celle d'un composite (schéma auto-cohérent de Hill). Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement. Les modules élastiques sont donnés par :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{\left(K_1 + \left(\frac{4}{3} \right) G \right)} + \frac{V_2}{\left(K_2 + \left(\frac{4}{3} \right) G \right)}} - \left(\frac{4}{3} \right) G \quad (\text{I-16})$$

Le module G est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{\left(K_1 + \left(\frac{4}{3} \right) G \right)} + \frac{V_2 K_2}{\left(K_2 + \left(\frac{4}{3} \right) G \right)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{I-17})$$

Pour les deux schémas précédent, le module de Young est calculé par :

$$E = 9KG/(3K + G) \quad (1-18)$$

La masse volumique est évaluée à partir de la loi de Voigt (1-3)

Il est bien connu que le modèle de Mori-Takana conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusion sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

I.8. Conclusion :

Ce chapitre nous a permis d'avoir un aperçu global sur les matériaux à gradient fonctionnel « FGM ». Nous avons vu l'histoire de leur développement, leurs définitions, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Les différentes lois de mélange ont été présentées et la variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes.

La connaissance de quelques éléments mécaniques des FGM est indispensable pour aborder par la suite le problème de vibration des plaques. Dans le chapitre qui suit, nous allons mettre la loupe sur la théorie générale des plaques et la formulation énergétique.

II.1. Introduction

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur.

Dans ce chapitre, des différentes théories pour la modélisation et l'analyse des plaques fonctionnellement graduées sont présentées. La revue est consacrée à des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des plaques à gradient fonctionnel sous chargement mécanique.

II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan x, y) et par une petite épaisseur (notée $h(x, y)$), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence CT. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène ou d'un empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

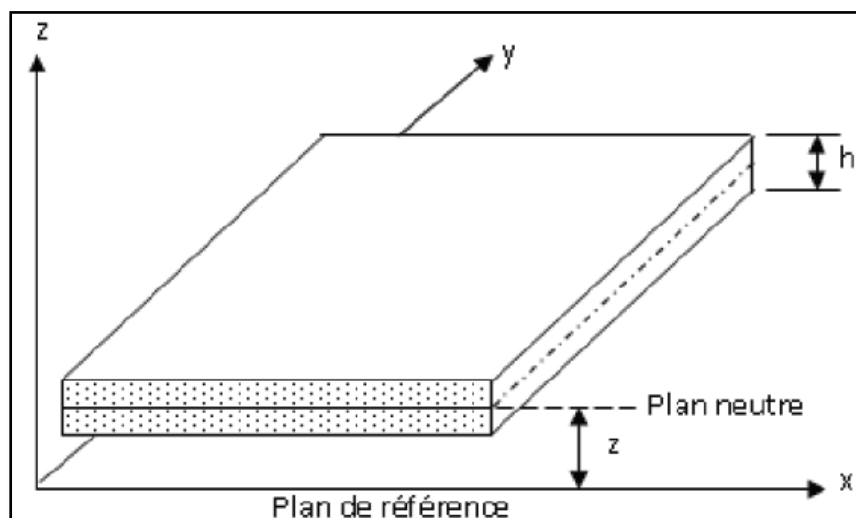


Figure II.1 : Modèle d'une plaque FGM

II.3. Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories;

1) **Les plaques isotropes**: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).

2) **Les plaques orthotropes**: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aeronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art [Bathe et al, 2003].

3) **Les plaques anisotropes**: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

II.4. Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux : la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées :

- 1) La flexion dominante;
- 2) La membrane dominante;
- 3) Le cas mixte;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne. [Sanchez et al, 1997 ; Pitkaranta et al, 1995].

L'espace continu des déplacements inextensionnels « avec énergies de membrane et cisaillement nul, est nommé V_0 » qui joue un rôle fondamental dans le classement évoqué ci-dessus : dans le cas flexion-dominante, le problème limite est formulé dans cet espace qui doit

être différent de zéro, tandis que dans le cas membrane-dominante, cet espace est réduit au champ nul.

II.5. Etat membranaire et état flexionnel

L'état de contrainte par le quel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par les efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

L'état membranaire s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels.

L'état flexionnel regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

- Selon le mode du comportement, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux :
L'élément de paroi est défini par la géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (figure. II. 2a); les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte.
- L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen); il résiste aux charges agissantes normalement à son plan moyen par un état flexionnel (figure. II.2b).
- L'élément de plaque-membrane est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (figure. II.2c); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des structures plissées.
- En fin l'élément structural de plaque est, par nature, la courbe spatiale; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (figure. II.2d); exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc...) [Baiocchi et al, 2002].

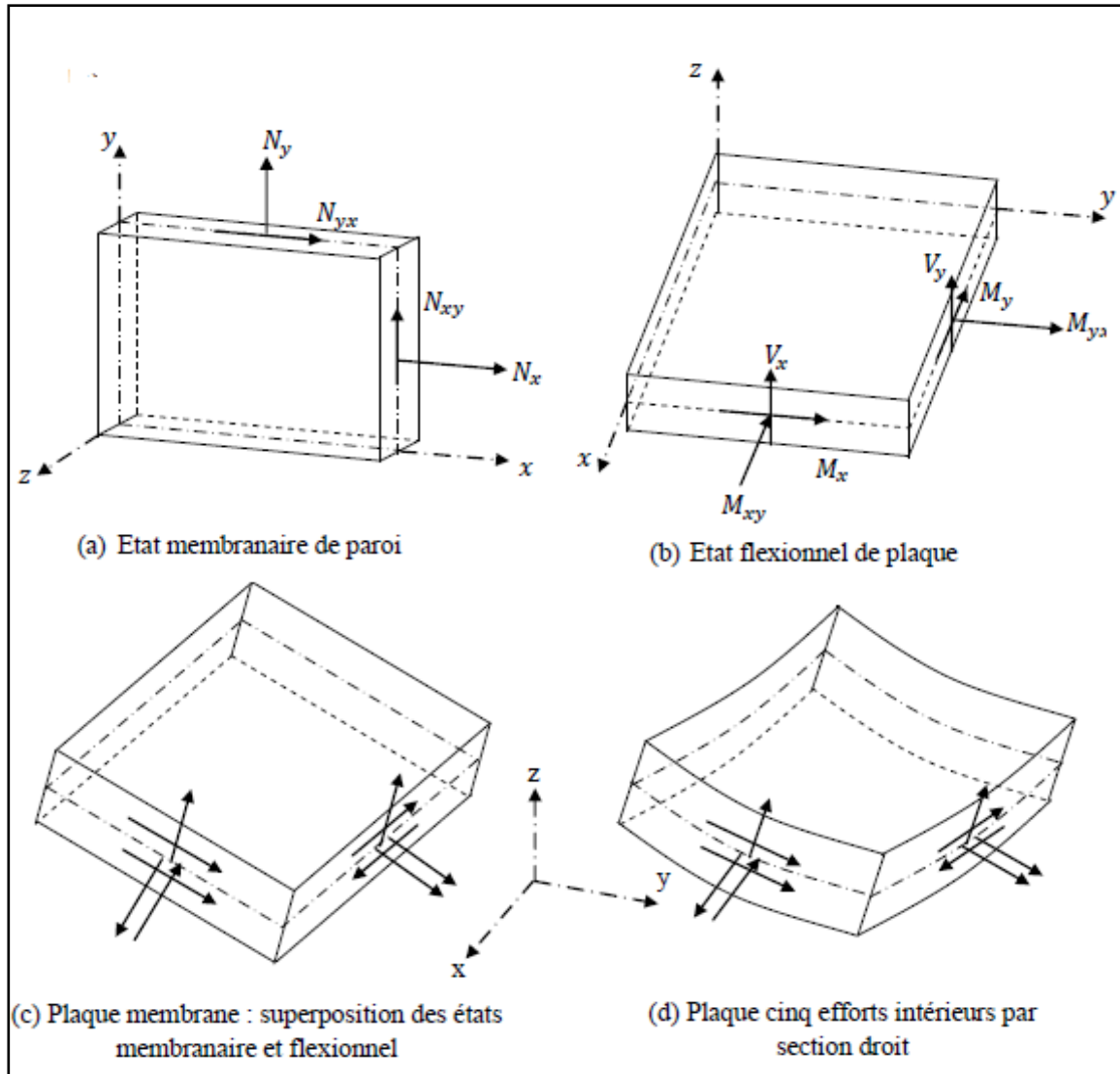


Figure. II.2 : Efforts intérieurs dans une plaque

II.6. Hypothèses pour l'étude des plaques

La théorie des plaques, qu'on considère dans ce qui suit, est basée sur :

- L'hypothèse dite des sections droites (ou planes) : les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. les déplacements u et v (suivant x et y) d'un point quelconque x,y,z , varient alors linéairement en z et le déplacement transversal w (suivant z) n'est fonction que de x et y . cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont Reissner, Hencky, Bollé, Mindlin et permet de prendre en compte l'influence des déformations de CT. Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes mais ensuite a été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches.

- L'hypothèse d'une déformation transversale ε_z nulle (pas de variation d'épaisseur).
- L'hypothèse des contraintes planes : dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.
- L'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite (l'axe z est l'axe d'orthotropie de toutes les couches).
- La prise en compte d'une loi de comportement de cisaillement transversal CT dépendant de facteurs de correction déterminés a priori par des considérations d'équivalences énergétiques, en généralisant la démarche utilisée pour les poutres et en s'inspirant de la théorie mixte de Reissner.

Cette théorie des plaques, dite du premier ordre (relative aux effets de CT) est appelée, dans la suite de ce chapitre, théorie (ou modèle) de Reissner/Mindlin. Elle fait intervenir (figure II.3) :

- Cinq variables cinématiques indépendantes (les déplacements de membrane u et v dans le plan de référence $z = 0$, le déplacement transversal w et les rotations β_x et β_y de la normale à la surface moyenne dans les plans xz et yz respectivement) ;
- Trois efforts résultants de membrane notés N_x, N_y, N_{xy} ; trois moments de flexion (ou couples) notés M_x, M_y, M_{xy} ; deux efforts tranchants notés T_x et T_y .

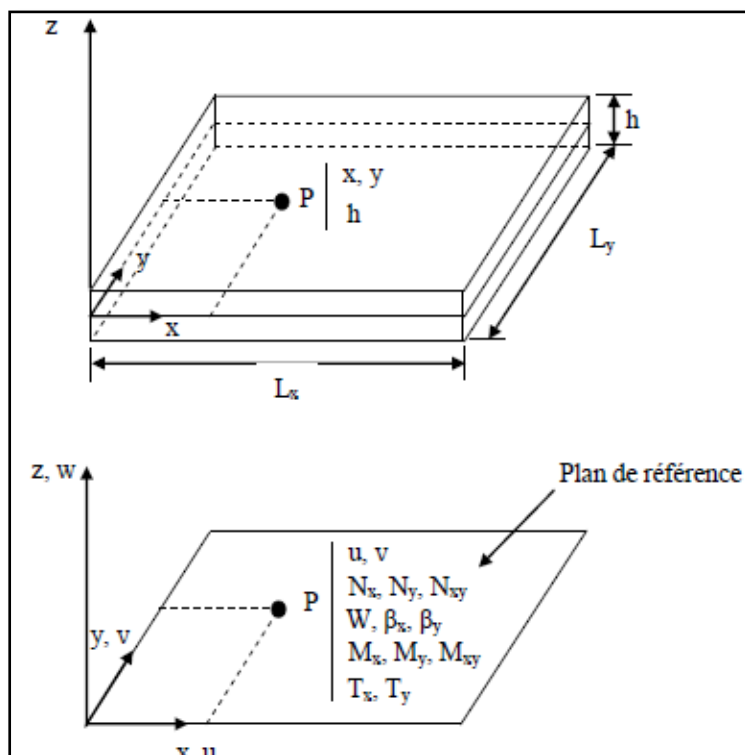


Figure. II.3 : Description d'une plaque (géométrie et variables).

II.7. Classement des théories de déformation en cisaillement :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolée par Mindlin à partir des travaux de [Rayleigh, 1877], [Timoshenko, 1921], [Reissner, 1945]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories: théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaque semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théorie d'ordre supérieur applicables aux plaque épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D).

II.8. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés :

II.8.1. Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)

Le modèle de plaque basé sur la théorie classique de la plaque (CPT) satisfait l'hypothèse de Love-Kirchhoff avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur.

Dans cette théorie, l'effet de cisaillement transversal est négligeable de ce fait, la déformation est due à la déformation de flexion et de membrane. Ce modèle est référé à Timoshenko et Woinowsky- Krieger [Timoshenko, 1959; Reddy, 1997; Reddy, 1999].

II.8.1.1. Hypothèses de la théorie classique des plaques

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisant à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivants :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement ou h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen.
- Hypothèse dite de section droite (section plane) figure (II-4): Les sections droites,

initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformations. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.

- Les termes non linéaires du déplacement U et V sont négligés, et l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal W est considéré.

La déformée de la normale au plan moyen (oxy), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure (II-4).

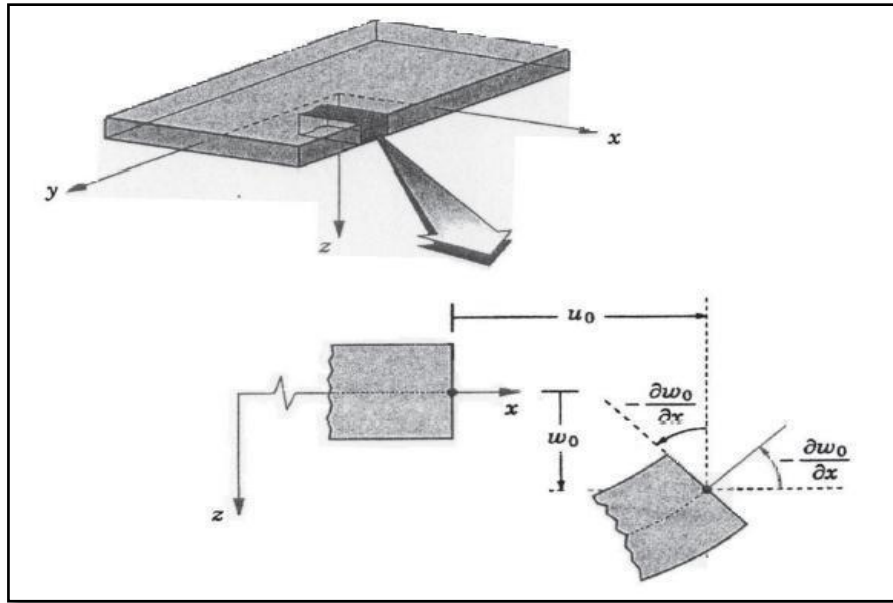


Figure II.4 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [Reddy, 1997].

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

II.8.1.2. Champ de déplacement (Théorie classique des plaques (CPT)) :

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques ». Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 W(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II-1}$$

Ou u, v, w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du

plan moyen (plan $z = 0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (figure II-4) ; ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques épaisses.

III.8.1.3. Limitation de la théorie classique :

La théorie classique des plaques basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformation dans les plaques peu épaisses. Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse.

III.8.2 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (i.e. elle n'est plus très petite devant les dimensions des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (théorie des plaques moyennement épaisses).

En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de Timoshenko montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres.

Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié 3 ans plus tard qui fera date.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformations figure (II-5), d'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Etant donné que la théorie des plaques de premier ordre (FSDT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de traction non nulles),

un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de facteur correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

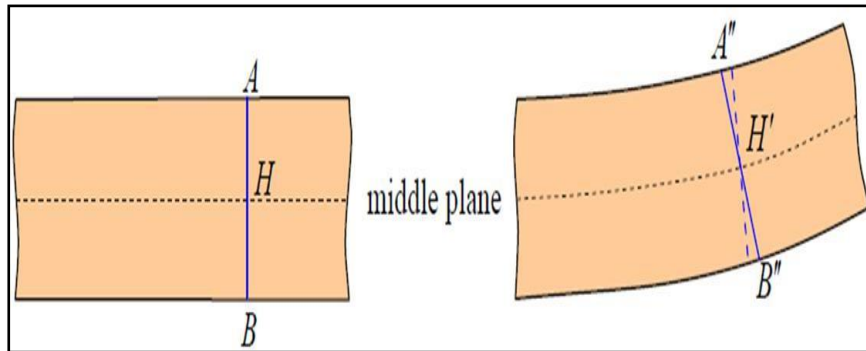


Figure II.5 : Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).

✓ **Champ de déplacement :**

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter les déformations en cisaillement transverses dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements (voir figure (II-6)) est alors le suivant :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (\text{II-2}) \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned}$$

Ou u, v, w sont les déplacements le long des coordonnées (x, y, z) d'un point du plan moyen (plan $z=0$) (déplacement en membrane); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normales à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

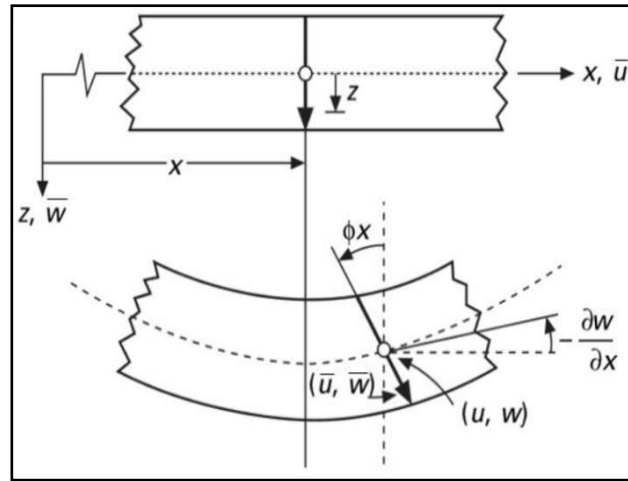


Figure II.6: Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre.

II.8.3. Le modèle de la plaque basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff. Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par plusieurs chercheurs. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur. Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformations.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.
- Les contraintes normale dans la direction transversale n'est en générale pas négligeables.

De nouvelles formulations et théorie d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années. Carrera a proposé une formulation compacte et unifiée des théories d'ordre supérieur [Carrera et al, 2010] [D'Ottavio et al, 2009]. Cependant, les théories du premier ordre (FSDT)

et d'ordre supérieur (HSDT) ne sont pas pratiques vu le nombre de termes d'ordre supérieur introduits dans la formulation. Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, Shimpi a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (Refined Plate Theory -RPT). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement. La théorie RPT a été ensuite adaptée avec succès aux plaques orthotropes. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim et Thai [Thai et al, 2010a] pour le cas de flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim [Thai et al, 2010b], ont adapté la méthode RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

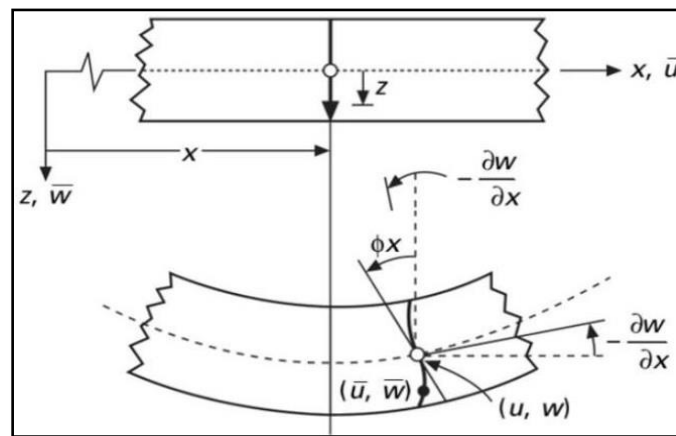


Figure II-7 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre élevé.

- **Champ de déplacement (HSDPT) :**

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2eme ordre, 3eme ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en séries. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

Théories des plaques du second ordre:

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \quad (\text{II-3}) \\
 W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t)
 \end{aligned}$$

Où : $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ sont des fonction inconnues dépendant des coordonnées

x et y et du temps t .

Cette théorie apporte une amélioration substantielle par rapport à la théorie du premier ordre tout en nécessitant un facteur de correction comme pour la FSDT.

Théories des plaques du troisième ordre :

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont vu le jour. Le champ des déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\chi_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\chi_y(x, y, t) \quad (\text{II-4}) \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) + z^3\chi_z(x, y, t) \end{aligned}$$

Où : u , v , w , ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z , ψ_x , ψ_y , ψ_z , χ_x , χ_y , χ_z sont des fonction inconnues dependant des coordonnées x et y et du temps t .

• **La fonction de forme de la théorie d'ordre élevé :**

Pour le cas des théories raffinées basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contraintes nulles sur les faces inferieure et supérieur de la plaque, le champ de déplacement d'un point matériel situé aux coordonnées (x, y, z) dans la plaque s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\Phi_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\Phi_y(x, y, t) \quad (\text{II-5}) \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y) \end{aligned}$$

$U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ sont les déplacements dans les directions x, y, z .

u, v, w sont les déplacements du plan médian (plan $z = 0$).

$$\Phi_x = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II- 6a})$$

$$\Phi_y = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II- 6b})$$

ϕ_x et ϕ_y sont les rotations des plans yz et xz .

$f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $f(z)=0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $f(z)=z$. En plus, Le champs de déplacement de la théorie de déformation de

cisaillement du troisième ordre de Reddy est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier a proposé le modèle sinusoïdal (The sinusoidal shear deformation theory - SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II-8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory -ESDT) développée par Karma en 2003 [Karma et al, 2003] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II-9})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The Hyperbolic shear deformation plate theory HSDT) développée par Ait Atmane en 2010 [Ait Atmane et al, 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} z - \frac{h}{\pi} \frac{\sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \quad (\text{II-10})$$

La théorie dominante, utilisée dans les études de flexion, de flambage et de vibrations des plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy. Le champ des déplacements de Reddy est le suivant :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left[\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left[\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
 W(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II-11}$$

Le champ des déplacements inclut une variation parabolique des déformations en cisaillement transversal et des contraintes qui leurs sont associées. Les contraintes de cisaillement s'annulent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Cette théorie ne nécessite donc pas de facteur de correction des contraintes puisqu'elle fournit une distribution plus réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur. Elle fournit également de meilleures précisions par rapport aux théories précédentes quant à la réponse globale des plaques minces et des plaques épaisses et une meilleure estimation des déflexions moyennes, des charges critiques de flambage, des fréquences de vibration et de leurs modes propres associés.

II.8.4. La théorie raffinée de déformation des plaques

En 2002, Un modèle raffiné de déformation des plaques, RPT a été développé par le chercheur Shimpi pour les plaques isotropes dans un but de réduire le nombre de variables par rapport aux théories d'ordre élevé existante [Shimpi, 2002].

Cette théorie raffinée de déformation elle présente une similitude par rapport à la théorie classique des plaques (CPT) et ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement. Plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que Kim et Thai [Kim et al, 2009] et [Ait atmane et al, 2010] ou ils ont appliqué cette théorie dans le cas de la flexion des plaques FGM dans le cas statique ainsi que d'autre travaux de Thai et Kim [Thai et al, 2011] et [Hadji et al, 2011] dans le cas du flambement des plaques orthotropes.

De ce fait, le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II-12}$$

Ou (u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y.
 (w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse.

II.8.5. La théorie quasi-3D de déformation des plaques

Dans ce type de théorie quasi-3D le déplacement transversal est scindé en trois constituantes qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque en anglais: « stretching effect ». Plusieurs chercheurs ont travaillé dans ce type de théorie tel que Kim et Thai [Kim et al, 2009] qui avait proposé une théorie à cinq variables pour la déformation au cisaillement de premier ordre au lieu des théories d'ordre élevé à six variables, d'autre chercheurs ont proposée par le biais de plusieurs fonctions des théories quasi-3D à cinq variable tel que [Hebali et al, 2014], [Bennoun et al, 2016], [Abdelaziz et al, 2017], [Benchohra et al, 2018], [Bouhadra et al, 2018] et [Meksi et al, 2018], [Abualnour et al, 2018]. Des théories quasi-3D à quatre variable en vue le jours est cela grâce à l'introduction de nouvelle hypothèses pour les théories quasi-3D à six inconnues suivant les travaux de Zenkour qui à développer une nouvelle théorie quasi-3D a quatre inconnues pour différents types de plaques: FGM [Zenkour, 2013a], pour les plaques sandwich [Zenkour, 2013b] et les plaques composite stratifiées [Zenkour, 2015], il y a aussi Mantari et Guedes Soares [Mantari et al, 2014] qui ont développer une théorie quasi -3D à quatre inconnues en combinant à l'aide d'une fonction hyperbolique l'effet de cisaillement et l'effet de l'étirement du déplacement transversal.

De ce fait le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II -13})$$

(u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y

(w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement.

$g(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II-14})$$

II.9. Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs

Cette section présentera un aperçu de l'ensemble de la littérature disponible sur la dynamique des plaques FGMs spécifiquement les vibrations et les analyses modales des plaques FGMs.

Cheng et Kitipornchai [Chenge et al, 1999] ont utilisé la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour étudier le

comportement de flambement et de vibration des plaques FGM par analogie avec les vibrations membranaires. Ng et al [Ng et al, 2000] ont étudié la résonance paramétrique des plaques en utilisant le principe d'Hamilton. He et al [He et al, 2001] ont rapporté la formulation d'éléments finis basée sur la théorie de la plaque mince pour contrôler la forme et la vibration de la plaque FGM avec des capteurs piézo-électriques intégrés et des actionneurs sous charge mécanique.

Reddy et Cheng [Reddy et al, 2003] ont développé des analyses vibratoires tridimensionnelles pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une formulation asymptotique et une méthode de matrice de transfert. Yang et Shen [Yang et al, 2002] ont étudié la réponse dynamique des plaques de FGM soumises à des charges latérales impulsives combinées à des actions initiales dans le plan dans un environnement thermique. Kim [Kim, 2005] a utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz basée sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre pour étudier les caractéristiques de vibration des plaques rectangulaires FG.

Ferreira et al [Ferreira et al, 2006] ont utilisé des méthodes de maillage pour étudier les fréquences naturelles des plaques fonctionnelles. Li et al [Li et al, 2009] ont utilisé la théorie de l'élasticité tridimensionnelle avec la méthode de Ritz pour générer les fréquences propres des plaques rectangulaires FG dépendant de la température. Sheikholeslami et Saidi [Sheikholeslami et al, 2013] ont étudié le cisaillement d'ordre supérieur et la théorie des plaques déformables normales pour analyser les caractéristiques des vibrations des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées posées sur une fondation élastique. Shen et Wang [Shen et al, 2012] ont analysé les vibrations de petites et de grandes amplitudes de la plaque à gradients fonctionnels reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans un environnement thermique à l'aide de modèles Voigt et Mori-Tanaka basés sur la théorie des ordres supérieurs. Akavci [Akavci, 2014] a examiné l'effet des déformations de cisaillement transversales lors de la réponse vibratoire d'une plaque de FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak; ils supposaient que les propriétés matérielles de la plaque variaient comme une fonction continue à travers l'épaisseur par simple distribution de la loi de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants. Le principe d'Hamilton est utilisé pour formuler les équations gouvernantes basées sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur.

Serge Abrate [Abrate, 2006] a étudié les vibrations libres, le flambement et la flexion statique des plaques FGM dans lesquelles les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur. Après avoir comparé avec la littérature disponible, il a conclu que les fréquences

propres, la température critique, la charge de flambement dans le plan et la flexion des plaques de FGM étaient proportionnelles à celles des plaques homogènes équivalentes. Des études approfondies ont été réalisées pour des plaques minces et épaisses avec différents rapports d'aspect, ainsi que des plaques inclinées et circulaires et de nombreuses combinaisons de conditions aux limites. Ces problèmes ont été analysés avec la théorie des plaques classique, les théories de déformation de cisaillement du premier et du troisième ordre. La méthode multi-quadratique permet une discrétisation de domaine et de frontière rapide et facile. Le schéma Mori-Tanaka est utilisé pour homogénéiser les propriétés du matériau.

Talha [Talha et al, 2010] a étudié la vibration libre et la réponse statique des plaques de FGM avec une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur en considérant une modification spécifique du déplacement transversal en combinaison avec des méthodes d'éléments finis. Les équations de mouvement des plaques FGM sont dérivées en utilisant une approche variationnelle, prise en compte la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les résultats de calcul ont été obtenus au moyen d'un élément fini lagrangien iso-paramétrique continu avec 13 degrés de liberté par nœud. On conclut que l'effet du rapport d'épaisseur de la plaque est indépendant de l'indice de fraction volumique. Un changement graduel dans les propriétés du matériau détermine la réponse des plaques FGM. Xiang et al [Xiang et al, 2011] ont suggéré une théorie de plaque de déformation de cisaillement d'ordre n pour étudier la réponse de vibration libre des plaques sandwich composites à gradations fonctionnelles. Le champ de déplacement est représenté par un terme polynomial d'ordre n . Les conditions de contrainte de cisaillement transversale nulle sont satisfaites aux faces supérieure et inférieure de la plaque.

La théorie du troisième ordre de Reddy [Reddy, 1999] peut être considérée comme un cas particulier de la théorie actuelle de l'ordre n . Les fréquences naturelles des FGM et des plaques composites avec différents rapports de géométrie, les propriétés matérielles sont calculées par la théorie n -ordre avec différentes valeurs d'indice matérielle. Benachour et al [Benachour et al, 2011] utilise la théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres des plaques en FGM avec une gradation aléatoire des matériaux. Cette théorie considère les effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque, de sorte que les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires. Dans cette théorie de la plaque raffinée, le nombre de fonctions inconnues est de quatre alors que dans la théorie de la déformation par cisaillement a 5 fonctions inconnues. Les équations du mouvement sont

dérivées selon le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir des solutions de forme, et les fréquences fondamentales sont ensuite calculées en résolvant les résultats des problèmes de valeur propre. Hao et al [Hao et al, 2011] ont étudié la réponse vibratoire transversale non linéaire des plaques rectangulaires FGM de type cantilever qui ont été soumises à des charges transversales et thermiques combinées. Les équations de mouvement non-linéaire pour la plaque FGM sont dérivées de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy [Reddy, 1999] et du principe d'Hamilton.

Madani et al [Madani et al, 2016] ont étudié la vibration libre d'une coque cylindrique piézoélectrique renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNT) soumise à des distributions de température uniformes et non uniformes basées sur le FSDT en utilisant la Méthode différentielle cubique. Contrairement à la FSDT existante, Mantari et Granados [Mantari 2015a, 2015b] ont étudié l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement de première ordre (FSDT) avec un nouveau champ de déplacement incluant des termes indéterminés. De même, Meksi et al [Meksi et al, 2015] ont étudié la flexion et la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de plaque de déformation de cisaillement de premier ordre basée sur la position de surface neutre et reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak.

Afin d'inclure les effets de déformation de cisaillement, plusieurs théories de déformation de cisaillement polynomiales et non polynomiales d'ordre supérieur (HSDT), sont développés.

Les (HSDT) satisfont les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques. Un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas requis. Les HSDT polynomiaux peuvent être basés sur l'expansion en série de Taylor de termes d'ordre supérieur. Ferreira et al [Ferreira et al, 2006] ont étudié la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées basée sur la théorie de la plaque de Reddy [Reddy, 1997] en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et la méthode de collocation globale avec des fonctions de base radiales multi-quadratiques. Récemment, la théorie de la déformation de cisaillement polynomiale d'ordre élevé (HSDT) a été utilisée dans des différents environnements pour obtenir les réponses structurelles des structures composites de coques et de plaques fonctionnellement graduées, voir par exemple [Singh 2016 ; Hirwani, 2016, Sahoo 2016].

Contrairement aux théories HSDT polynomiales, les HSDT raffinés non polynomiaux peuvent être développés en utilisant des fonctions de déformation de forme non polynomiales.

Dans ce contexte, un grand nombre d'études ont été réalisées pour étudier les réponses mécaniques des plaques composites avancées en utilisant des fonctions non polynomiales (sinus, sinus hyperbolique, cosinus, exponentielle et tangente) pour décrire le gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque et prendre en compte les effets de déformation transversale en cisaillement. Mantari et al [Mantari et al 2014, 2015c] ont développé un HSDT quasi-3D optimisé pour les plaques composites avancées et les coques en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur non polynomiale. Tounsi et ses collègues [Boussahla et al. 2016, Attia et al. 2015, Beldjelili 2016] ont développé une nouvelle théorie des plaques raffinée et robuste pour la vibration libre de la plaque FGM avec seulement quatre fonctions inconnues utilisant diverses fonctions non polynomiales. Afin d'introduire les effets transversaux de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur, les théories quasi-3D, qui sont basées sur une variation d'ordre supérieur des déplacements dans le plan et dans le sens transversal, sont développées. En utilisant ces théories, bien que beaucoup de travail ait été fait pour les plaques FG [Jha et al. 2012, Belabed et al. 2014, Akavci 2016].

Hebali et al [Hebali et al, 2014] ont développé une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion statique et de la vibration libre des plaques FGM. Les effets du cisaillement transverse et des déformations normales pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG ont été pris en compte par Bessaim et al [Bessaim et al, 2013]. Une théorie efficace de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale a été développée pour les plaques FGM, en divisant le déplacement transversal en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement en épaisseur par Belabed et al [Belabed et al, 2014] en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Bourada et al [Bourada et al, 2015] ont proposé une théorie simple de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale pour les plaques FGM. Une vibration libre de sandwich avec une feuille de face FGM et un noyau FGM ainsi qu'un sandwich avec une feuille de face homogène et un noyau FGM a été analysée par une nouvelle théorie de plaque quasi-3D par Bennoun et al [Bennoun et al, 2016]. Akavci [Akavci, 2015] a étudié le comportement statique et dynamique de plaques à fonctionnellement graduées basées sur des théories de déformation en cisaillement quasi-3D et 2D. Benahmed et al [Benahmed et al, 2017] a utilisé une nouvelle théorie quasi-3D pour expliquer les interactions mécaniques des plaques souples avec différentes distributions des propriétés matérielles.

Abualnour et al [Abualnour et al , 2018] ont présentés une nouvelle théorie de déformation de cisaillement en tenant compte l'effet d'étirement « stretching » pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées. Le comportement dynamique et

statique des nano-poutres en FGM sont investigués par Bouafia et al [Bouafia et al, 2017] en utilisant une théorie non-local quasi-3D dans lequel les effets de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur sont introduits. Sekkal et al [Sekkal et al, 2017] ont réalisés une étude numérique détaillée pour examiner le flambement et vibration des plaques FGM avec une nouvelle théorie quasi-3D HSDT.

Les études comparatives et de validation montrent que les théories avec moins d'inconnues peuvent atteindre la même précision du HSDT conventionnel qui a plus de variables inconnues.

Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs modèles de fondations ont été développés. Le plus simple est le modèle de Winkler ou le modèle à un seul paramètre (Winkler) [Winkler, 1867] qui modélise la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux. Ce modèle a été amélioré par Pasternak [Pasternak, 1954] en prenant en compte un ressort de cisaillement qui simule les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle Winkler. Le modèle Pasternak ou le modèle à deux paramètres est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structurelles de la fondation et sera utilisé ici pour simuler les interactions entre la plaque et la fondation. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des effets de la fondation élastique pour une meilleure compréhension de la réponse de post-flambement des structures telles que les plaques et les coques.

II.10. Modélisation du support élastique (Winkler et Pasternak):

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant au domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au support élastique, et l'ensemble structure et support doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'interaction support-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques. Le terme générique désignant l'étude de ces phénomènes porte le nom d'Interaction Support Structure (ISS). Le terme interaction est très important puisqu'il met bien en évidence le fait que non seulement la nature du support a une influence sur le comportement de la structure, mais aussi la structure a une influence sur le comportement du support qui peut modifier ainsi les composantes de la sollicitation selon le modèle adopté.

En construction aéronautique et aérospatiale, tout équipement (moteur, modules électroniques, etc.) n'est pas attaché/fixé directement à la structure, mais par l'intermédiaire d'un support élastique (plaque, poutre, tige, ressort, support d'amortissement, etc.). Ce dernier

doit être conçu de telle manière à ce que les vibrations propres (dus au fonctionnement de l'élément) ne soient pas transmises à la structure sans amortissement. Donc partant de là, on comprend bien que l'étude de l'interaction support-structure doit être menée soigneusement afin de déterminer le comportement statique et dynamique de tels assemblages.

Les plaques posées sur fondations élastiques ont été largement étudiées pour modéliser divers problèmes constructifs et modéliser divers problèmes d'ingénierie pendant les dernières décennies. Pour décrire les interactions entre la plaque et la fondation, les scientifiques ont proposé divers modèles de base. Le modèle le plus simple concernant la base élastique est le modèle de Winkler établi en 1867 (modèle à un seul paramètre K_w). Dans ce modèle, le rapport entre la pression externe p et la déflexion w de la surface de base est exprimé par:

$$P = K_w w \quad (\text{II-15})$$

Où w le déplacement vertical du sol qui est proportionnel à la pression de contact p . La constante de proportionnalité K_w s'appelle le module de la réaction de sol.

Dans le modèle linéaire de Winkler, on suppose que le support de base se compose de ressorts élastiques qui sont étroitement alignés et indépendants les uns des autres avec une rigidité K_w commune (c'est une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux). Le déplacement de la plaque est indépendant du déplacement du sol en dehors de la région chargée. Le modèle de Winkler implique deux problèmes majeurs. Le premier problème est que le déplacement de la plaque est une constante quand il est soumis à une charge uniformément distribuée q . Il n'y a aucun moment de flexion ou force de cisaillement dans la plaque pendant cette condition de charge, qui est complètement peu réaliste et non conservative. Le deuxième problème est que la valeur de K_w n'est pas unique et dépend des diverses propriétés de la plaque et du support ainsi que du chargement. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (1954) qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant (modèle à deux paramètres). Ce deuxième paramètre (modèle de Pasternak) prend en compte l'effet de l'interaction entre les points de cisaillement dans la fondation. Dès lors, le modèle de Pasternak a été largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions plaques-structures.

Plusieurs recherches ont été menées en vue de l'étude du comportement

thermomécanique des FGM. Cependant, les recherches sur les vibrations libres des FGM sont tout à fait limitées, particulièrement concernant les effets d'interaction avec la base élastique. En 1999 **Cheng** a proposé une analogie de membrane pour obtenir des valeurs propres explicites et exactes pour la vibration des plaques FGM sur une base de Winkler-Pasternak basée sur la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement. Récemment **Malekzadeh** (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses en FGM sur bases d'élastiques avec deux paramètres. Les formulations sont basées sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité. Le but de ce travail est d'analyser la vibration libre des plaques en FGM reposant sur une base de Winkler-Pasternak en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement des plaques.

La relation entre la flèche et la réaction de la fondation est exprimée par :

$$f_e = K_x w - K_s \nabla^2 w \quad (\text{II-16})$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Si la fondation est modélisée par le modèle linéaire de Winkler, le coefficient K_s dans l'équation (II-16) est identiquement nul.

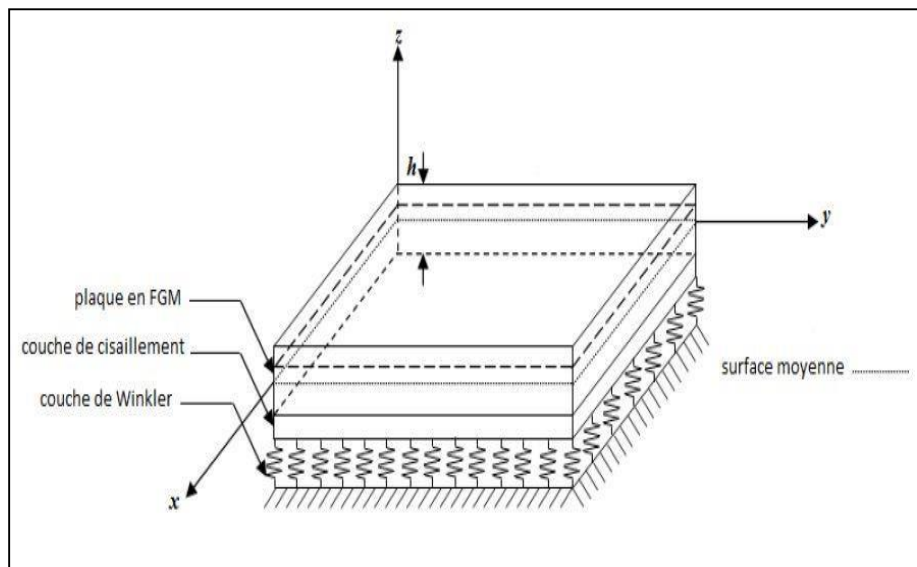


Figure II.8 : plaque reposant sur une fondation élastique.

II.11. Conclusion

La théorie classique des plaques, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et la théorie du premier ordre permettent de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations dans les plaques peu épaisses. Par contre dans le cas des plaques épaisses ces théories deviennent assez mal adaptées à décrire le comportement mécanique (flèche de la plaque, répartition des contraintes, etc.)

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de la nouvelle théorie de déformation quasi- 3D pour l'étude de la vibration libre d'une plaque FGM repose sur une fondation élastiques.

III.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de trouver les relations fondamentales du comportement mécanique des plaques FGM soumises à des charges extérieures transversales, de les écrire sous une forme unifiée et de les résoudre.

Une modélisation du comportement mécanique dans le cas de l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques en FGM est présentée dans ce chapitre par l'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec seulement quatre variables, cette dernière tient en compte de l'effet d'étirement dans le sens de l'épaisseur de la plaque « Stretching effect ». La fraction volumique des particules est supposée changer selon les lois de la puissance. L'analyse de la vibration libre est effectuée pour une plaque à gradation fonctionnelle simplement supportée reposant sur une fondation élastique de type Pasternak.

Après avoir déterminé l'énergie de déformation de la plaque, l'énergie cinétique et l'énergie de déformation du support élastique, Ces énergies sont utilisés dans la formulation variationnelle pour aboutir ensuite à un système d'équations différentielles.

Le problème aux valeurs propres sera établi à partir de la méthode de Navier présentée afin d'aboutir au calcul des fréquences de la plaque FGM.

III.2. Présentation de la plaque

Considérons une plaque rectangulaire en FGM d'une longueur a , largeur b , et d'épaisseur h Figure (III-1). On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_0^w et une rigidité de cisaillement de k_1^w . On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire.

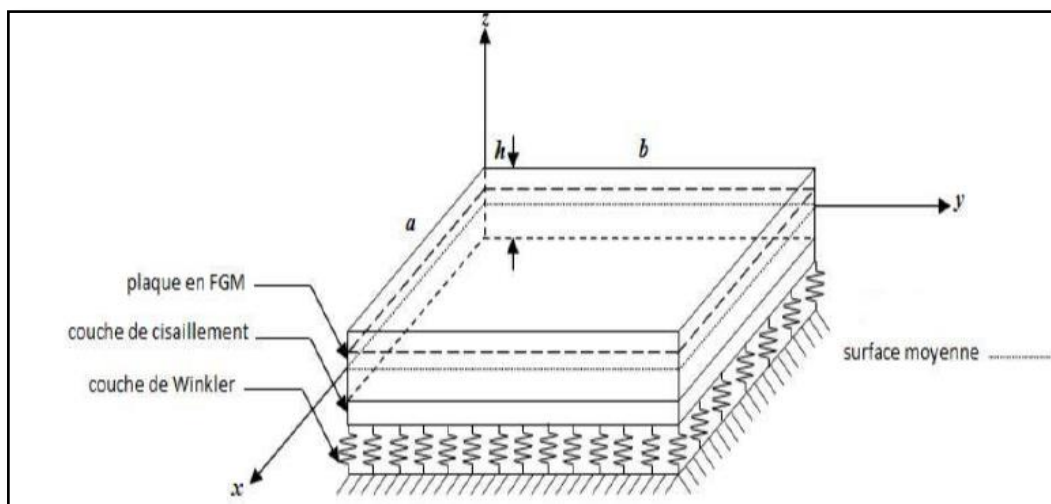


Figure III-1: Plaque FGM reposant sur une fondation élastique.

La plaque est supposée isotrope en tout point, alors que le module de Young E , la densité de la masse ρ et le coefficient de Poisson ν varient selon une distribution de puissance en termes de fractions volumique des constituants suivant l'épaisseur et la fonction donnée dans l'équation suivante:

$$P_{(z)} = (P_t - P_b)V_{(z)} + P_b \quad \text{(III-1)}$$

$$V_{(z)} = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{(III-2)}$$

Où $P_{(z)}$ présente la propriété de matériau, P_t et P_b présente la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque respectivement, $V(z)$ est la fraction volumique, et p est l'indice qui contrôle le mélange de la céramique et du métal à travers l'épaisseur h de la plaque. Il prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

On note que la fraction volumique du métal est élevée au voisinage de la surface inférieure de la plaque et celle de la céramique est élevée au voisinage de la surface supérieure. Généralement, le coefficient de Poisson ν varie très légèrement. Pour simplifier les équations, ν est supposé constant.

La figure III.2 montre la fonction en puissance pour les plaques graduées en puissance (PGP).

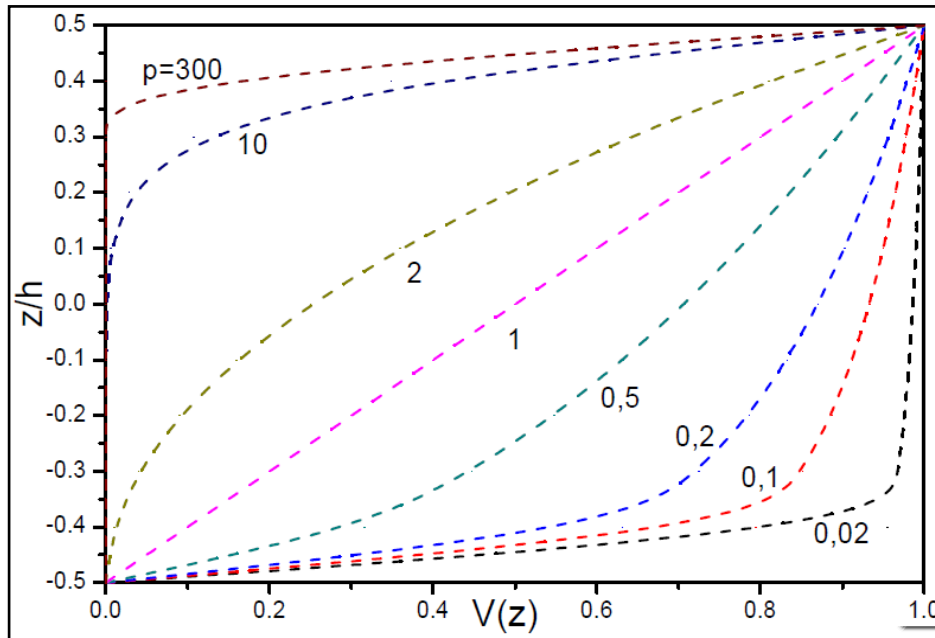


Figure III.2: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .

III.3. Champs de déplacement

Des hypothèses réductrices sont introduites dans le but de modifier les théories de déformation des plaques traditionnelles quasi-3D dont l'effet de l'étirement est pris en compte de manière à ce que le nombre d'inconnues soit réduit. Dans les théories quasi- 3D traditionnelles le champ de déplacement est défini par:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y)dx \quad (\text{III-3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y)dy \quad (\text{III-3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{III-3c})$$

Où $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ et φ_z sont les déplacements inconnus du plan médian de la plaque et $f(z)$ est la fonction définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur.

Notre champ de déplacement est obtenu en s'appuyant sur les hypothèses sus-cités:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{III-4a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{III-4b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y) \quad (\text{III-4c})$$

Où k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque.

Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont définis comme suit :

$$\text{Model 1 : } f(z) = -\left[\frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right); \quad g(z) = \frac{2}{15} \frac{df}{dz} \quad (\text{III-5a})$$

$$\text{Model 2 : } f(z) = \frac{4h}{5} \sinh\left(\frac{5}{4h} z\right) + z \left[-\cosh\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{8}\right) \right]; \quad g(z) = -\frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{4h} z\right) \quad (\text{III-5a})$$

$$\text{Avec: } q^* = -g\left(\frac{h}{2}\right)$$

III.4. Champs de déformation

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements définis dans l'équation (III-4 a-c)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III-6})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{III-7a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_z^0 = \theta \quad \text{et} \quad g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III-7b})$$

Les intégrales présentées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III-8})$$

Les coefficients A' et B' sont formulés en fonction de la méthode de Navier et sont définis par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = -\alpha^2, \quad k_2 = -\beta^2 \quad (\text{III-9})$$

III.5. Les équations constitutives

Etant donnée que la plaque FGM, élastique et isotrope, possède deux plans de symétrie (xz) et (yz), les relations contrainte déformation peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{III-10})$$

Où : $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$ et $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$ sont respectivement les vecteurs de contrainte et de déformation.

Les coefficients de rigidité C_{ij} (dépend que de z) sont exprimés par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III-11a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III-11b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III-11c})$$

$E(z)$: Module de Young en un point z de la plaque ;

ν : Coefficient de Poisson en un point z de la plaque (il est supposé constant dans notre étude).

III.6. Détermination des équations gouvernantes

Le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué dans le but d'élaborer les équations du mouvement et les conditions aux limites d'une plaque fonctionnellement graduée. Le principe d'Hamilton est exprimé par:

$$0 = \int_t^0 (\delta U + \delta V_e - \delta K) dt \quad (\text{III-12})$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle, δV_e est la variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est définie par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \\ &= \int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x \delta k_x^b + M_y \delta k_y^b + M_{xy} \delta k_{xy}^b + S_x \delta k_x^s \right. \\ &\quad \left. + S_y \delta k_y^s + S_{xy} \delta k_{xy}^s + Q_{zz} \varepsilon_z^0 + G_{yz} \gamma_{yz}^1 + G_{xz} \gamma_{xz}^1 + Y_{yz} \gamma_{yz}^0 + Y_{xz} \gamma_{xz}^0 \right] dA \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

Où Ω est la surface supérieure, les résultantes des contraintes N , M , S , Q , G et Y sont données par :

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (\text{III-14a})$$

$$Q_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{III-14b})$$

$$(G_{xz}, G_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III-14c})$$

$$(Y_{xz}, Y_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III-14d})$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimé par:

$$\begin{aligned} \delta K &= \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \\ &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ \begin{aligned} &I_1 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &+ I_3 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + I_4 \left[(k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right] \\ &+ I_5 \left[(k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] \\ &+ I_6 \left[(k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial y} \right) \right] + I_7 (\dot{w}_0 \delta \dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_0 \delta \dot{w}_0) + I_8 \dot{\theta}_0 \delta \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} dA \quad (\text{III-15}) \end{aligned}$$

Où : $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (III.1) et $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8)$ sont les inerties massiques définis comme :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2, f, zf, f^2, g, g^2) dz \quad (\text{III-16})$$

La variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique est exprimée comme :

$$\delta V_e = \int_A \left[k_0^w w \delta w + k_1^w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dA \quad (\text{III-17a})$$

$$\delta V_e = \int_A \left[k_0^w \left[w_0 \delta w_0 + q^* (w_0 \delta \theta + \theta \delta w_0) + q^{*2} \theta \delta \theta \right] + k_1^w \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + q^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) + q^{*2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) \right] dA \quad (\text{III-17b})$$

Avec k_0^w and k_1^w sont les paramètres du modèle de Winkler-Pasternak.

III.7. Les équations gouvernantes de la plaque

En substituant les expressions de déplacement par déformation ainsi que contrainte par déformation qui sont définie respectivement par les l'équation (III.13), (III.15) et (III.17) dans l'équation (III.12), ensuite en intégrant par parties tout en mettant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$ égal à zéro. Les équations du mouvement obtenues sont données sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_4 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + I_4 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - k_0^w (w_0 + q^* \theta) + k_1^w \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + q^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ &= I_1 \ddot{w}_0 + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) - I_7 \ddot{\theta} \\ \delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} - Q_{zz} + k_1 A' \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial G_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial G_{yz}}{\partial y} \\ &- q^* k_0^w w_0 - q^{*2} k_0^w \theta + q^* k_1^w \frac{\partial w_0}{\partial x^2} + q^{*2} k_1^w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q^* k_1^w \frac{\partial w_0}{\partial y^2} + q^{*2} k_1^w \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{u}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{v}_0}{\partial y^2} \right) \\ &+ I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - I_6 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right] + I_7 \ddot{w}_0 + I_8 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

Ces dernières expressions représentent les équations différentielles du mouvement en vibration libre d'une plaque FGM en nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec seulement quatre variables, et reposant sur un support élastique de Winkler-Pasternak. En substituant l'équation (III.6) dans l'équation (III.10) et les résultants trouvés dans l'équation (III.14), les contraintes résultantes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \varepsilon^0 \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-19})$$

Où:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III-20a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III-20b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III-20c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III-20d})$$

$$Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}^t, \quad S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \quad \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}^t \quad (\text{III-20e})$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{55}^s & 0 \\ 0 & F_{44}^s \end{bmatrix}, \quad X^s = \begin{bmatrix} X_{55}^s & 0 \\ 0 & X_{44}^s \end{bmatrix}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III-20f})$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{III-20g})$$

Les coefficients de rigidité sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ \nu \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III-21a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{III-21b})$$

$$\left(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left([f'(z)]^2, f'(z)g(z), g^2(z)\right) dz \quad (\text{III-21c})$$

$$\left(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s\right) = \left(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s\right) \quad (\text{III-21c})$$

En substituant l'équation (III-19) dans l'équation (III-18), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prennent la forme suivante:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B') + B_{12}^sk_2B')d_{122}\theta + B_{11}^sk_1A'd_{111}\theta + Ld_1\theta = I_1u_0 - I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x} + I_4k_1A'\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial x} \quad (\text{III-22a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B') + B_{12}^sk_1A')d_{112}\theta + B_{22}^sk_2B'd_{222}\theta + Ld_2\theta = I_1v_0 - I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y} + I_4k_2B'\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y} \quad (\text{III-22b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + D_{11}^sk_1A'd_{1111}\theta + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + D_{22}^sk_2B'd_{2222}\theta + L^a(d_{11}\theta + d_{22}\theta) - k_0^w(w_0 + q^*\theta) + k_1^w\left(\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2} + q^*\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2w_0}{\partial y^2} + q^*\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) \quad (\text{III-22c})$$

$$= I_1\ddot{w}_0 + I_2\left(\frac{\partial\ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial\ddot{v}}{\partial y}\right) - I_3\left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) + I_5\left(k_1A'\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2B'\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial y^2}\right) + I_7\ddot{\theta}$$

$$-k_1A'B_{11}^sd_{111}u_0 - (B_{12}^sk_2B' + B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}u_0 - (B_{22}^sk_1A' + B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 - B_{22}^sk_2B'd_{222}v_0 + D_{11}^sk_1A'd_{1111}w_0 + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 + D_{22}^sk_2B'd_{2222}w_0 - H_{11}^s(k_1A')^2d_{1111}\theta - H_{22}^s(k_2B')^2d_{2222}\theta - (2H_{12}^sk_1k_2A'B' + (k_1A' + k_2B')^2H_{66}^s)d_{1122}\theta + ((k_1A')^2F_{55}^s + 2k_1A'X_{55}^s + A_{55}^s)d_{11}\theta + ((k_2B')^2F_{44}^s + 2k_2B'X_{44}^s + A_{44}^s)d_{22}\theta - 2R(k_1A'd_{11}\theta + k_2B'd_{11}\theta) - L(d_1u_0 + d_2v_0) \quad (\text{III-22d})$$

$$+ L^a(d_{11}w_0 + d_{22}w_0) - R^a\theta - k_0(q^*w_0 + q^{*2}\theta) + k_1^w\left(q^*\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2} + q^{*2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + q^*\frac{\partial^2w_0}{\partial y^2} + q^{*2}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)$$

$$= -I_4\left(k_1A'\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x} + k_2B'\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\right) + I_5\left(k_1A'\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2B'\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) - I_6\left[(k_1A')^2\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2B')^2\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial y^2}\right] + I_7\ddot{w}_0 + I_8\ddot{\theta}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III-23})$$

III.8. Méthode de Navier pour le calcul des fréquences de la plaque FGM :

Les formules de comportement de divers types des plaques en flexion, présentent les équations mathématiques différentielles partielles exactes. Malheureusement, les solutions analytiques de ces équations ont été limitées aux plaques homogènes d'états relativement simples (la géométrie, le chargement et les frontières). Même lorsque les solutions analytiques pourraient être trouvées, elles étaient souvent trop difficiles et encombrantes pour employer dans la pratique. Les méthodes numériques traitées peuvent satisfaire la plupart de ces conditions pratiques.

Le but de toutes ces méthodes numériques est de fournir des algorithmes informatiques appropriés pour obtenir les solutions numériques approximatives aux problèmes difficiles. Les techniques numériques présentées sont des méthodes discrètes. C'est-à-dire, le volume de la plaque ou de sa frontière est discrétisé mathématiquement ou physiquement. Les méthodes numériques sont :

- La méthode des différences finies (FDM);
- Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles ;
- La méthode des éléments finie (FEM) ;
- La méthode des éléments de frontière (BEM).

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales: Les méthodes de résidus pondérés (ou méthodes intégrales) et les méthodes variationnelles (méthodes à extremum).

Le principe général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction sur le domaine d'intégration de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. La solution est écrite sous forme d'une série polynomiale ou trigonométrique à termes finis. Des paramètres généralisés sont introduits et des fonctions de base sont alors construites. Le principe de la méthode consiste à rechercher les paramètres qui donnent la meilleure approximation construite à l'aide de fonctions de base.

Les méthodes des résidus pondérés utilisent des fonctions test de manière à minimiser l'erreur ou le résidu de l'équation différentielle. Différentes méthodes de résidus pondérés sont obtenues selon la valeur de la fonction test. La méthode de collocation par points, la méthode de collocation par sous domaines, la méthode des moindres carrés et la méthode de Galerkin.

Dans d'autres cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est à dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle comme c'est le cas de l'énergie totale par exemple en mécanique des structures. La méthode adaptée à ce type de

formulation est la méthode de Ritz et Navier, qui aboutit plus tard à la méthode des éléments finis en mécanique des structures.

La méthode de Navier est une méthode qui approxime les déplacements par des séries finies. Elle ne peut être appliquée qu'aux plaques sur appuis simples car les conditions aux limites correspondantes sont automatiquement satisfaites.

Les conditions aux limites (appuis simple) de Navier sont:

$$v = w_0 = \theta = \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = N_x = M_x = S_x = 0 \dots \dots \dots (x = 0, a) \quad \text{(III-24a)}$$

$$v = w_0 = \theta = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_y = M_y = S_y = 0 \dots \dots \dots (y = 0, b) \quad \text{(III-24b)}$$

La méthode de Navier approxime les déplacements de la structure à travers les équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{(III-25)}$$

Avec :

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \quad \text{(III-26)}$$

m, n sont des nombres naturels

a : Longueur (suivant x)

b : Largeur (suivant y)

ω : La fréquence propre associée au mode propre (m, n).

Où : U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et X_{mn} sont les amplitudes des déplacements; t est le temps.

Cette forme des déplacements vérifie exactement les conditions aux limites de la plaque. Les déplacements u, v, w et θ sont ensuite injectés dans les équations du mouvement (III-18). Il faut alors isoler les U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et X_{mn} . Les coefficients de ces termes doivent être identiquement nuls (pour ne pas avoir une solution triviale), ce qui donne un système d'équations algébriques homogènes et linéaires. Le déterminant de ce système d'équations fournit les fréquences propres.

Substituant les équations (III-25) dans les équations (III-22) nous obtenons des équations aux valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n ,

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

Où :

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad S_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = -\alpha(B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2), \\ S_{14} &= \alpha((k_2B'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s)\beta^2 + k_1A'B_{11}^s\alpha^2 - L), \\ S_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad S_{23} = -\beta(B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2), \\ S_{24} &= \beta((k_1A'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s)\alpha^2 + k_2B'B_{22}^s\beta^2 - L), \\ S_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + k_0^w + k_1^w(\alpha^2 + \beta^2), \\ S_{34} &= -k_1A'D_{11}^s\alpha^4 - D_{12}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta^2 - 2D_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta^2 - k_2B'D_{22}^s\beta^4 + L^a(\alpha^2 + \beta^2) \\ &+ q^*k_0^w + q^*k_0^w(\alpha^2 + \beta^2) \\ S_{44} &= (k_1A')^2H_{11}^s\alpha^4 + (2k_1k_2A'B'H_{12}^s + (k_1A' + k_2B')^2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + ((k_1A')^2F_{55}^s + 2k_1A'X_{55}^s + A_{55}^s)\alpha^2 \\ &+ (k_2B')^2H_{22}^s\beta^4 + R^a - 2R(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2) + ((k_2B')^2F_{44}^s + 2k_2B'X_{44}^s + A_{44}^s)\beta^2 + q^{*2}k_0^w \\ &+ q^{*2}k_1^w(\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{11} &= I_1, \quad m_{13} = -\alpha I_2, \quad m_{14} = I_4k_1A'\alpha, \quad m_{22} = I_1, \quad m_{23} = -\beta I_2, \quad -m_{24} = I_4k_2B'\beta \\ m_{33} &= I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2), \quad -m_{34} = -I_5(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2) + I_7, \quad -m_{44} = -I_6((k_1A')^2\alpha^2 + (k_2B')^2\beta^2) + I_8 \end{aligned} \quad (\text{III-28})$$

Ce sont des équations aux valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = 0 \quad (\text{III-29})$$

$[K]$ est la matrice de rigidité et $[M]$ est la matrice masse et $\{\Delta\}$ est un vecteur propre.

$\{\Delta\} = \{0\}$ étant une solution triviale, nous obtenons le problème aux valeurs propres standard suivant :

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (\text{III-30})$$

En résolvant ce système, les fréquences naturelles de notre système vibratoire libre sont facilement calculées par des procédures standards de résolution.

III.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution pour l'analyse du comportement mécanique dans le cas la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » par l'utilisation d'une récente théorie quasi-3D pour la déformation de cisaillement.

Les équations différentielles du mouvement de la plaque FGM vibrant librement sur un support élastique ont été écrites en se basant sur la version dynamique des travaux virtuels connue en tant que principe de Hamilton. En utilisant la méthode analytique de Navier appliquée à une plaque FGM sur appuis simples, nous aboutissons à un problème aux valeurs propres représenté par l'équation canonique dont la résolution nous permettra d'obtenir l'ensemble des fréquences naturelles du système vibratoire analysé.

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats numériques pour le comportement mécanique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » dans le cas de la vibration libre par l'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Dans cette théorie l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque est pris en compte sans la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement avec une distribution parabolique à travers l'épaisseur. Le nombre d'inconnues dans cette nouvelle théorie est de quatre contrairement à d'autre théorie d'ordre élevé.

Nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les fréquences propres naturelles d'une plaque FGM sous appuis simples en fonction de l'index de la fraction volumique $P(z)$, du rapport d'épaisseur a/h et des paramètres du modèle Winkler-Pasternak (k_0^w, k_1^w) et présenter les résultats obtenus suite à son exécution, Nous commencerons par valider nos résultats, en les comparants avec ceux de l'article déjà publiés ; nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter l'influence des différents paramètres sur les fréquences propres naturelles.

IV.2. Présentation de l'outil Maple

Maple a été initialement développé à l'Université de Waterloo en Ontario (Canada) à partir de 1981, La première version publique date de 1985 (version 3.3).

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, fonctions et séries. Maple réalise des dérivations, intégrations, résolutions de systèmes d'équations linéaires, inversions de matrices, développements asymptotiques et résolutions d'équations différentielles. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en arithmétique des nombres et en combinatoire.

Il est possible de :

- Copier et coller les formules mathématiques correspondantes dans un traitement de texte ;
- Tracer des courbes ou des surfaces (en aspect 3D) ;
- Générer des programmes de calculs numériques.

➤ Description du programme

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la théorie des plaques. Nous allons d'abord calculer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de z , puis nous calculons les

constantes de rigidités réduites (C_{ij}). Par la suite, nous allons construire les matrices élémentaires masse et rigidité d'une plaque, en passant par le calcul des inerties et les intégrales constantes.

Enfin, dans un but de validation des algorithmes et matrices développés, nous faisons quelques applications numériques et nous les comparons avec les résultats de la référence pour des charges sinusoïdales appliquées.

Afin de concevoir notre programme de calcul, nous passons par les étapes suivantes :

➤ La spécification des paramètres d'entrées suivants :

1. les caractéristiques mécaniques de la plaque :

E_c, E_m : Les modules de YOUNG (céramique et métal),

ν : Coefficients de Poisson (supposé constant),

ρ_c, ρ_m : Les masses volumiques (céramique et métal),

2. Les caractéristiques géométriques de la plaque :

a : Largeur de la plaque,

b : Longueur de la plaque,

h : L'épaisseur de la plaque,

p : L'index de la fraction volumique du P-FGM,

3. Les caractéristiques du support élastique :

k_0^w : Rigidité de Winkler ;

k_1^w : Rigidité de cisaillement de Pasternak.

➤ L'analyse modale et résolution du problème aux valeurs propres : Après la formation de la matrice rigidité K et de la matrice masse M , nous résolvons le problème aux valeurs propres.

➤ Les résultats: les sorties du programmes sont les valeurs propres du système vibratoire libre.

IV.3. Résultat numériques et discussions

Les résultats de l'analyse de la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués sont présentés, d'où différentes plaques en matériaux fonctionnellement gradués sont étudiées avec des caractéristiques géométriques et matériels différents dans le but d'évaluer la précision de la théorie proposée.

L'idéal pour la validation d'un programme numérique serait de confronter les résultats avec ceux des tests expérimentaux, ce qui à notre niveau, n'est pas possible (manque de moyens expérimentaux).

Nous optons donc pour une comparaison avec les résultats des quelques références. Pour ce faire, nous annulons les charges transversales et nous calculons la fréquence propre naturelle adimensionnelle (ou paramètre de fréquence).

IV. 3.1. Les propriétés matérielles

Les propriétés mécaniques des matériaux de la plaque FGM (céramique et métal) sont données comme suit :

Tableau IV.1 : Les propriétés mécaniques des matériaux de la plaque FGM.

Matériel	Propriétés		
	Module de Young E(GPa)	Coefficient de poisson ν	La masse volumique ρ (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al ₂ O ₃)	380		3800
Zirconia (ZrO ₂)	200		5700

Les quantités adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0} \quad (IV-1)$$

$$\bar{K}_0 = k_0^w a^4 / D_0 \quad (IV-2)$$

$$\bar{K}_1 = k_1^w a^2 / D_0 \quad (IV-3)$$

$$\text{Ou : } D_0 = Eh^3 / [12(1-\nu^2)] \quad (IV-4)$$

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M / E_M} \quad (IV-5)$$

$$\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C} \quad (IV-6)$$

$$\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M} \quad (IV-7)$$

$$\tilde{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_C / E_C} \quad (IV-8)$$

$$\bar{K}_0^w = k_0^w a^4 / A \quad (IV-9)$$

$$\bar{K}_1^w = k_1^w a^2 / A \quad (IV-10)$$

Ou

$$A = \left[h^3 / 12(1-\nu^2) \right] \left[p(8+3p+p^2)E_M + 3(2+p+p^2)E_C \right] / \left[(1+p)(2+p)(3+p) \right] \quad (\text{IV-11})$$

IV.3.2. Etude comparative

Dans cette section, divers exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier la précision de la nouvelle théorie de la plaque Quasi 3D actuelle en prédisant le comportement de vibration libre des plaques FG simplement supportées ou bien reposent sur une fondation élastique. Ces résultats sont comparés avec les solutions exactes de :

- [Akavci, 2014], où la formulation est basée sur une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur.
- [Mantari et al, 2014] et [Belabed et al, 2014] qui ont proposé un HSDT quasi-3D récent.
- Les résultats de [Leissa, 1973] qui ne considère que la théorie classique régie par l'équation différentielle
- Les solutions de [Zhou et al, 2002] , l'analyse est basée sur une théorie d'élasticité tridimensionnelle linéaire à faible déformation.
- [Liu et al, 1999] et [Hosseini-Hashemi et al, 2011a] basée sur la théorie de déformation du 1^{er} ordre.
- [Nagino et al, 2008] modélisé par la méthode de Ritz et la méthode d'élément fini.
- [Shufrin et al, 2005] basé sur la théorie du premier ordre CPT et la théorie d'ordre élevé HSDT.
- [Hosseini-Hashemi et al, 2011a] basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT.

IV. 3.2.1. Plaque isotrope

Le tableau IV.2 montre les résultats des fréquences d'une plaque carrée isotrope simplement supportée, pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h)

Tableau IV-2 : Fréquences naturelles non dimensionnelles $\hat{\omega} = \sqrt{ph / D_0}$ pour plaques carrées isotropes simplement supportées.

a/h	Théorie	Mode							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1000	Leissa(1973)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou et al (2002)	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci(2014)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020	128.3020
	Mantari(2014)	19.7405	49.3486	49.3486	78.9580	98.6967	98.6967	128.3049	128.3049
	Modèle 1	19.7548	49.3868	49.3868	79.0185	98.7728	98.7728	128.4041	128.4041
	Modèle 2	19.7398	49.3492	49.3492	79.9584	98.6977	98.6977	128.3064	128.3064
100	Liu et al (1999)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Nagino et al (2008)	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Akavci (2014)	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0120	128.0120
	Mantari(2014)	19.7332	49.3086	49.3086	78.8550	98.5365	98.5365	128.0346	128.0346
	Modèle 1	19.7484	49.3469	49.3469	78.9164	98.6134	98.6134	128.1347	128.1347
	Modèle 2	19.7332	49.3084	49.3084	78.8539	98.5344	98.5344	128.0307	128.0307
10	Liu et al(1999)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Nagino et al (2008)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci (2014)	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040	107.3040
	Mantari(2014)	19.1190	45.7339	45.7339	70.3148	85.7622	85.7622	107.7376	107.7376
	Modèle 1	19.1356	45.7791	45.7791	70.3912	85.8603	85.8603	107.8696	107.8696
	Modèle 2	19.1109	45.7047	45.7047	70.2646	85.6991	85.6991	107.6572	107.6572
5	Shufrin etal(2005)	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Hosseini-Hashemi et al (2011)	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci (2014)	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Mantari(2014)	17.5899	38.6582	38.6582	56.0674	66.3474	66.3474	80.3365	80.3365
	Modèle 1	17.5978	38.6792	38.6792	56.1025	66.3922	66.3922	80.3963	80.3963
	Modèle 2	17.5661	38.5969	38.5969	55.9711	66.2278	66.2278	80.1810	80.1810

D'après le tableau (IV-2), on observe que les fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega}$ décroît avec la décroissance du rapport (a/h).

On peut constater que les résultats sont en excellent accord avec ceux obtenus par les références pour des rapports d'épaisseur de a/h=1000 et a/h=100 pour tous les modes de vibration. On remarque dans ce tableau que pour la valeur du rapport d'épaisseur (a / h = 1000), les résultats obtenus par modèle 2 sont très proches des valeurs fournies par Leissa (1973). Pour le rapport d'épaisseur (a / h = 100), les valeurs du modèle 2 sont légèrement supérieurs à ceux donnés par Akavci (2014) et Nagino et al. (2008).

En diminuant le rapport d'épaisseur (a / h), les résultats des deux modèles sont très proches des résultats de la théorie raffinée présentée par Mantari (2015). Il est à noter qu'il y a une légère différence par rapport aux solutions des autres formulations.

Tableau IV-3 : Comparaison de la fréquence fondamentale $\hat{\omega} = \sqrt{ph / D_0}$ d'une plaque carrée isotrope repose sur un support élastique.

h / a	k_0^w, k_1^w	Théories			
		Akhavan et al. (2009)	Ait Atmane et al. (2010)	Modèle 1	Modèle 2
0.001	0, 0	19.7391	19.7392	19.7548	19.7398
	100, 10	26.2112	26.2112	26.2229	26.2116
	1000, 100	57.9961	57.9962	58.0014	57.9962
0.1	0, 0	19.0840	19.0658	19.1356	19.5765
	100, 10	25.6368	25.6236	25.6070	25.7883
	1000, 100	57.3969	57.3923	57.0933	56.1803
0.2	0, 0	17.5055	17.4531	17.5978	17.5661
	100, 10	24.3074	24.2728	24.1656	25.7883
	1000, 100	56.0359	56.0311	55.2073	56.1803

Dans le but de valider la présente méthode dans le cas de plaques posées sur des fondations élastiques, les résultats de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope avec différentes valeurs de rapport des dimensions (a/h) et différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique sont présentés dans le tableau IV.2. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Akhavan et al (2009) et Ait Atman et al (2010). Un excellent accord entre les trois méthodes peut être observé. On remarque aussi que les fréquences fondamentales

augmentent avec l'augmentation des paramètres de la fondation élastique

IV.3.2.2. Plaques FGM

Les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) simplement supportées sont présentées dans le tableau IV-4

Tableau IV-4 : Fréquences naturelles non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque FGM Al/Al₂O₃ simplement supportées.

b/a	a/h	p	Theories				
			Jin et al. (2014)	Mantari(2014)	Modèle 1	Modèle 2	
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1137	0.1136	
		1	0.0870	0.0883	0.0883	0.0882	
		2	0.0789	0.0806	0.0806	0.0805	
		5	0.0741	0.0756	0.0756	0.0756	
	5	0	0.4169	0.4183	0.4185	0.4177	
		1	0.3222	0.3271	0.3271	0.3266	
		2	0.2905	0.2965	0.2965	0.2962	
		5	0.2676	0.2726	0.2727	0.2728	
	2	0	1.8470	1.8543	1.8588	1.8539	
		1	1.4687	1.4803	1.4836	1.4800	
		2	1.3095	1.3224	1.3254	1.3226	
		5	1.1450	1.1565	1.1577	1.1574	
	2	10	0	0.0719	0.0719	0.0719	0.0718
			1	0.0550	0.0558	0.0558	0.0557
			2	0.0499	0.0510	0.0510	0.0509
			5	0.0471	0.0480	0.0479	0.0479
5		0	0.2713	0.2721	0.2721	0.2717	
		1	0.2088	0.2121	0.2121	0.2118	
		2	0.1888	0.1928	0.1928	0.1926	
		5	0.1754	0.1789	0.1789	0.1789	
2		0	0.9570	1.3075	1.3101	1.3070	
		1	0.7937	1.0371	1.0389	1.0367	
		2	0.7149	0.9297	0.9314	0.9298	
		5	0.6168	0.8248	0.8252	0.8254	

D'après la lecture du tableau on observe que la fréquence naturelle est en diminution avec la croissance du rapport (b/a) et de l'indice matériel p. Les résultats des deux modèles coïncident à ceux obtenus par la solution 3D exacte proposée par [Jin et al.2014] et sont très proches a la théorie raffinée présentée par [Mantari.2015], ce qui est tout à fait normal puisque les deux théories utilisent une théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur HSDT quasi-3D.

Tableau IV.5: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles

$\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$ d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée.

a/h	Mode	Théorie	p				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini et al. (2011.b)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed et al. (2014)	0.2121	0.1805	0.1640	0.1383	0.1306
		Modèle 1	0.2130	0.1834	0.1665	0.1411	0.1321
		Modèle 2	0.2126	0.1831	0.1663	0.1411	0.1322
	2(1,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Hosseini et al. (2011.b)	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Belabed et al. (2014)	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Modèle 1	0.4681	0.4063	0.3692	0.3051	0.2818
		Modèle 2	0.4672	0.4056	0.3685	0.3051	0.2819
	3(2,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Hosseini et al. (2011.b)	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Belabed et al. (2014)	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Modèle 1	0.6790	0.5923	0.5387	0.4387	0.4018
		Modèle 2	0.6775	0.5911	0.5376	0.4387	0.4018
10	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Hosseini et al. (2011.b)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Belabed et al. (2014)	0.0578	0.0494	0.0494	0.0389	0.0368
		Modèle 1	0.0579	0.0495	0.0449	0.0389	0.0368
		Modèle 2	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	2(1,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Hosseini et al. (2011.b)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0856
		Belabed et al. (2014)	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Modèle 1	0.1385	0.1189	0.1079	0.0924	0.0869
		Modèle 2	0.1383	0.1187	0.1078	0.0923	0.0869
	3(2,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini et al. (2011.b)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed et al. (2014)	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Modèle 1	0.2130	0.1834	0.1665	0.1411	0.1321
		Modèle 2	0.2126	0.1831	0.1663	0.1411	0.1322
20	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Hosseini et al. (2011.b)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0098
		Belabed et al. (2014)	0.0148	0.0126	0.0115	0.0098	0.0095
		Modèle 1	0.0148	0.0126	0.0114	0.0100	0.0095
		Modèle 2	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Le tableau IV.5 présente une comparaison des trois premières fréquences propres adimensionnelles d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée pour différentes valeurs de l'indice p et le rapport d'épaisseur (a/h). On remarque que la fréquence naturelle est en diminution avec la croissance du rapport (a/h) et de l'indice matériel p . Les résultats obtenus par la nouvelle théorie quasi-3D sont en bonne concordance avec les solutions données par la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Hosseini et al.2011a], théorie de déformation de cisaillement de premier ordre [Hosseini et al.2011b] et la théorie quasi-3D HSDT donnés par [Belabed et al. 2014].

Pour vérifier l'exactitude de la présente étude pour fonctionnellement plaques reposent sur fondation élastique, les fréquences naturelles des plaques sont comparées à celles rapportées dans la littérature.

Les tableaux IV.6 et IV.7 montre les fréquences fondamentales non dimensionnelles de plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle Al/ZrO₂ et Al/Al₂O₃ respectivement reposant sur des fondations élastiques. Les résultats de la théorie actuelle sont comparés aux résultats de la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre de Hosseini-Hashemi et al. [2010] et théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Alavci [2014]. On peut voir à partir des tableaux IV.6 et IV.7 que les résultats de présents la théorie pour les deux modèles sont en bon accord avec les résultats d'autres théories.

Tableau IV.6: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire en FGM Al/ZrO₂ repose sur un support élastique (a/b=1.5).

k_0^w, k_1^w	h/a	p	Théories				
			Hosseini et al [2010]	Akavci [2014]	Modèle 1	Modèle 2	
(0,0)	0,05	0	0.02392	0.02393	0,02394	0,02396	
		0,25	0.02269	0.02309	0,02313	0,02315	
		1	0.02156	0.02202	0,02218	0,02220	
		5	0.02180	0.02244	0,02259	0,02261	
	0,1	0	0.09188	0.09203	0,09220	0,09233	
		0,25	0.08603	0.08895	0,08927	0,08940	
		1	0.08155	0.08489	0,08560	0,08567	
		5	0.08171	0.08576	0,08639	0,08644	
	0,2	0	0.32284	0.32471	0,32578	0,32642	
		0,25	0.31003	0.31531	0,31695	0,31757	
		1	0.29399	0.30152	0,30419	0,30470	
		5	0.29099	0.31860	0,30001	0,30027	
	(250,25)	0,05	0	0.03421	0.03422	0,02762	0,02797
			0,25	0.03285	0.03312	0,02741	0,02773
			1	0.03184	0.03213	0,02749	0,02785
			5	0.03235	0.03277	0,02924	0,02969
0,1		0	0.13365	0.13375	0,10453	0,10846	
		0,25	0.12771	0.12959	0,10341	0,10777	
		1	0.12381	0.12585	0,10319	0,10839	
		5	0.12533	0.12778	0,10798	0,11502	
0,2		0	0.49945	0.50044	0,51896	0,39354	
		0,25	0.48327	0.48594	0,51343	0,39363	
		1	0.46997	0.47298	0,49681	0,39830	
		5	0.47400	0.47637	0,45941	0,41943	

Tableau IV.7: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles

$\beta = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$ d'une plaque rectangulaire en FGM Al/Al₂O₃ repose sur un support élastique

(a/h=0,15).

k_0^w, k_1^w	h/a	p	Théories			
			Hosseini et al [2010]	Akavci [2014]	Modèle (1)	Modèle (2)
(0,0)	0,5	0	0.08006	0.08018	0,08043	0,08031
		0,25	0.07320	0.07335	0,07379	0,07368
		1	0.06335	0.06148	0,0625	0,06245
		5	0.05379	0.05215	0,05329	0,05329
	1	0	0.12480	0.12508	0,12555	0,12536
		0,25	0.11354	0.11457	0,11532	0,11518
		1	0.09644	0.09613	0,09781	0,09767
		5	0.08027	0.08089	0,08267	0,08270
	2	0	0.28513	0.28659	0,28807	0,28751
		0,25	0.25555	0.26356	0,26579	0,26529
		1	0.20592	0.22189	0,22584	0,22546
		5	0.16315	0.18232	0,18628	0,18638
(100,10)	0,5	0	0.12870	0.12876	0,12828	0,11767
		0,25	0.11842	0.11847	0,11818	0,10865
		1	0.10519	0.10388	0,10405	0,09578
		5	0.09223	0.09098	0,09119	0,08308
	1	0	0.17020	0.17039	0,16983	0,15565
		0,25	0.15599	0.15665	0,15642	0,14375
		1	0.13652	0.13592	0,13646	0,12536
		5	0.11786	0.11774	0,11828	0,10703
	2	0	0.32768	0.32889	0,32842	0,30484
		0,25	0.29612	0.30297	0,30310	0,28208
		1	0.24674	0.25901	0,26115	0,24237
		5	0.20359	0.21785	0,21964	0,19980

IV.3.3. Etude paramétrique

IV.3.3.1. Plaques simplement supportées

La figure IV.1 présente la variation des fréquences naturelles non dimensionnelles en termes d'indice matériels d'une plaque FGM carré.

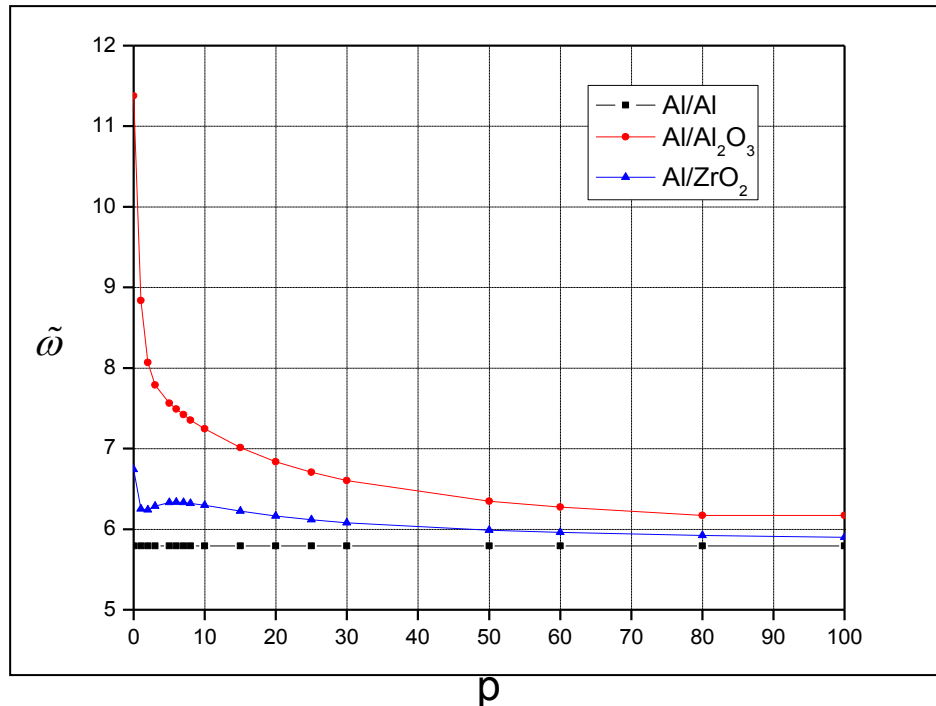


Figure IV.1: Variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ en fonction d'indice matériels d'une plaque FGM carré ($a/h=10$).

On peut observer à partir de ces résultats que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'indice matériels. Il est dû au fait qu'une valeur plus élevée de p correspond à une faible valeur de la fraction volumique de la phase céramique, ce qui rend les plaques plus souples [Nguyen 2015].

On remarque que les fréquences non dimensionnelles des plaque FGM sont plus importantes par rapport aux celle d'une plaque isotrope. Il est à noter que les fréquences de la plaque Al/Al₂O₃ sont supérieures à celles du plaque Al/ZrO₂, cela peut être expliqué par la différence des valeurs de module de Young. On remarque aussi qu'à partir de $p=20$ les valeurs des fréquences des plaques FGM convergent vers celles de la plaque isotrope.

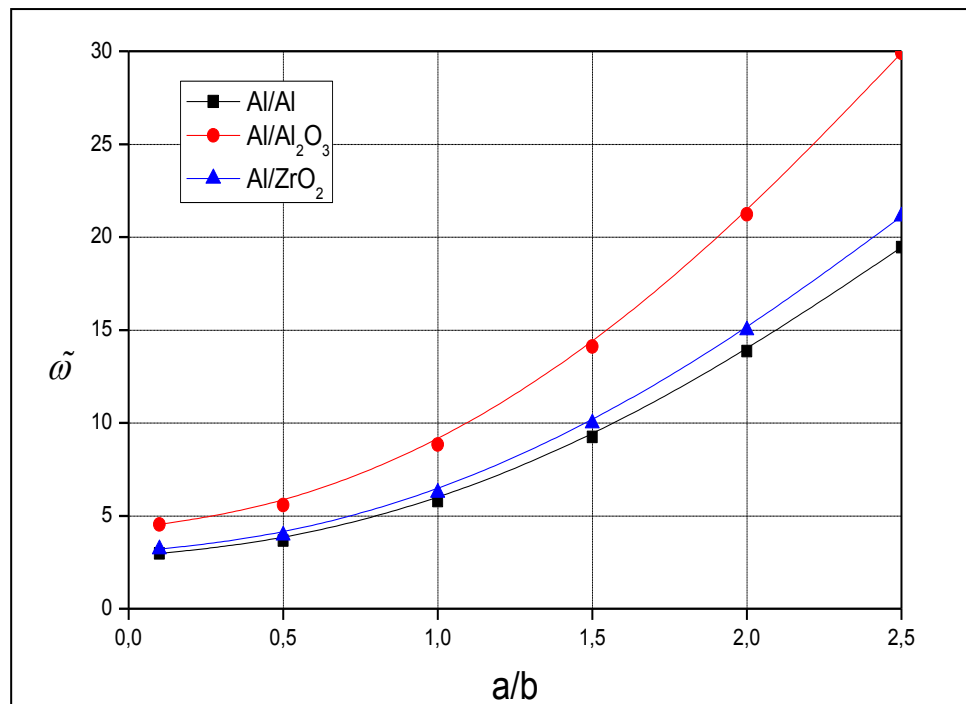


Figure IV.2: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ en fonction du rapport a/b d'une plaque FGM ($a/h=10$, $p=1$).

La figure IV.2 montre l'influence de rapport a/b sur le paramètre de la fréquence fondamentale de notre plaque FGM, avec un rapport d'épaisseur $a/h=10$ et l'index de la fraction volumique $p=1$. On remarque que les fréquences non dimensionnelles augmentent avec l'augmentation de rapport a/b.

IV.3.3.1. Plaques reposit sur un support élastique

Les figures IV.3 et IV.4 présentent la variation des fréquences non dimensionnelles des plaques FGM reposit sur une fondation élastique en termes d'indice matériels p et de rapport a/b respectivement.

On Remarque que les fréquences augmentent on augmentant les paramètres de la fondation élastique. On remarque que pour une petite valeur de rapport de géométrie a/b on note un écart entre les fréquences pour des valeurs des paramètres de support élastique k_0^w k_1^w égales à $(10^3,0$ et $10^3,10)$ respectivement .On constate une divergence des valeurs le la fréquence avec l'augmentation de rapport a/b.

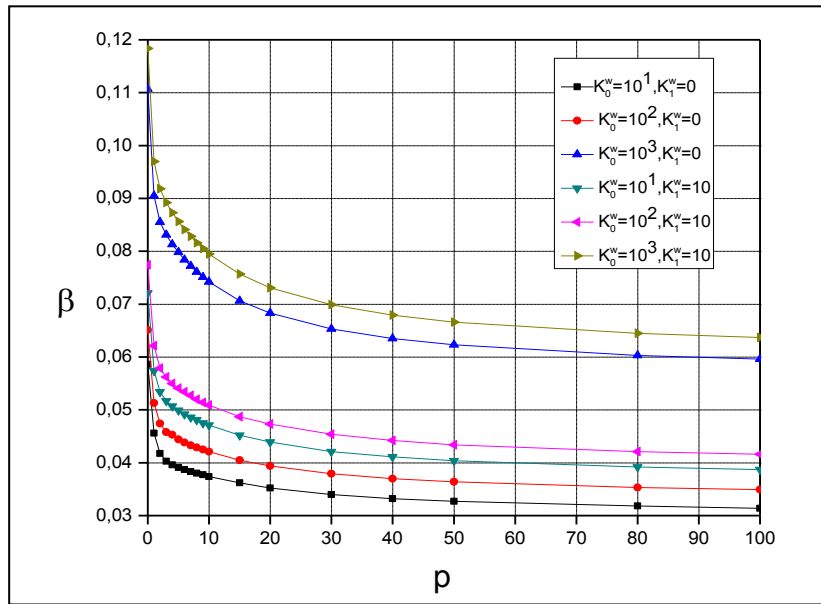


Figure IV.3: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction d'indice matériels d'une plaque FGM Al/Al₂O₃ carré (a/h=10).

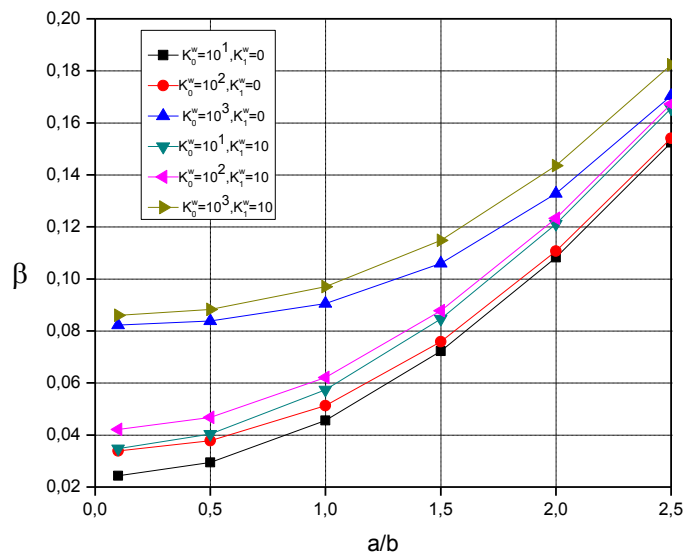


Figure IV.4: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction du rapport a/b d'une plaque FGM (a/h=10, p=1).

Les figures IV.5 et IV.6 représentent la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une plaque FGM carré en fonction des paramètres de support élastique k_0^w k_1^w respectivement

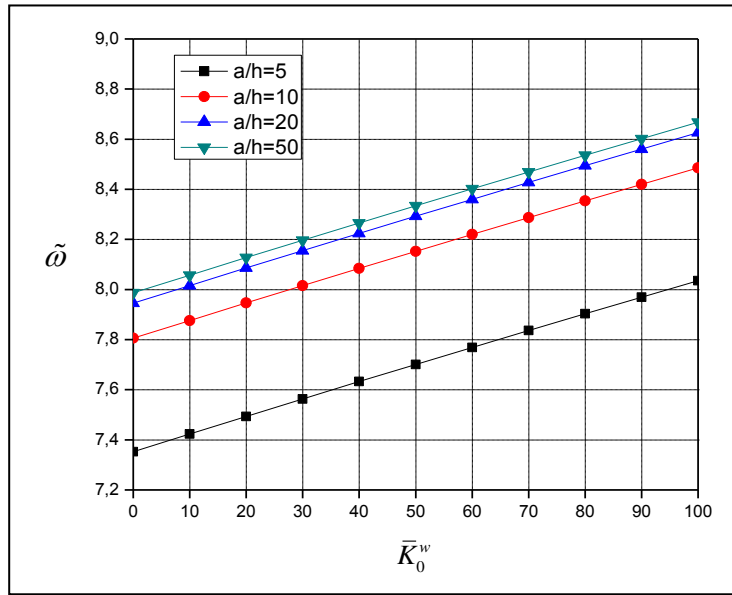


Figure IV.5: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque carrée FGM Al/ZrO₂ repose sur une fondation élastique en fonction de paramètre \bar{K}_0^w ($\bar{K}_1^w = 10, p=1$)

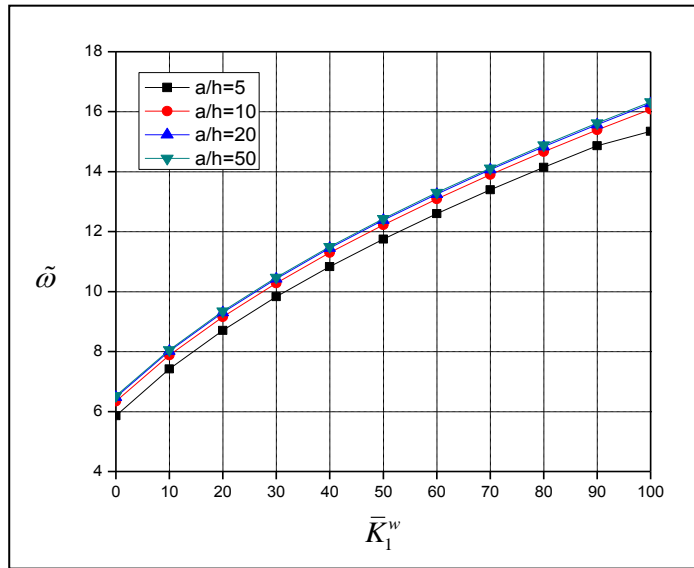


Figure IV.6: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque carrée FGM Al/ZrO₂ repose sur une fondation élastique en fonction de paramètre \bar{K}_1^w ($\bar{K}_0^w = 10, p=1$)

D'après les figures précédentes, on remarque que la fréquence augmente avec l'augmentation de rapport a/h. Il est à noter que pour les valeurs de rapport a/h égales à 20 et 50 les valeurs de fréquence sont très proches.

Les courbes représentées sur la figure IV.6 ont une pente plus élevée que celles de la figure IV.5, c'est-à-dire que le coefficient Pastarnek a un effet sur la fréquence fondamentale plus élevé que le coefficient Winkler.

IV. Conclusion

L'étude des vibrations libres de la plaque FGM sur une fondation élastique s'est faite en tenant compte de la théorie d'ordre élevé HSDT quasi-3D. Les propriétés mécaniques de la plaque ont été prises comme variant à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. La méthode de Navier a permis la résolution du système d'équations différentielles et l'obtention des fréquences propres naturelles du système. De ce fait, le programme de calcul élaboré a été validé par comparaison avec des résultats déjà publiés.

Par la suite, une étude paramétrique de la plaque a été réalisée, en tenant compte des variables suivantes :

- L'indice de la fraction volumique p (concentration des matériaux constituants) ;
- Le rapport d'allongement a/h (géométrie de la plaque) ;
- Les coefficients de rigidité de la fondation.

Il a été noté que les fréquences naturelles du système vibratoire décroissent lorsque l'index de la fraction volumique p croit (en augmentant la concentration du métal et en diminuant celle de la céramique). La géométrie de la plaque influe aussi sur les fréquences naturelles calculées : plus le rapport d'épaisseur est grand, plus les fréquences sont importantes.

L'accroissement de la fréquence non dimensionnelle est toujours significatif pour tous les rapports d'épaisseurs et les indices de puissances. Ceci implique que pour une plaque FGM, il y aurait beaucoup de changement des valeurs de fréquence fondamentale non dimensionnelle à partir d'un support élastique souple à un autre dur.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques FGM carrées à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal à la face inférieure), sur appuis simples aux quatre bords, et sans contraintes thermiques et reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak. Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons étudié un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie raffinée HSDT quasi-3D. Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé aux autres modèles issus de la littérature. Il était prudent d'avoir choisi cette méthode pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM, car les recherches sur les vibrations libres des FGM sont tout à fait limitées, particulièrement concernant les effets d'interaction avec une base élastique.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences fondamentales non dimensionnelles obtenues en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnues) et les autres théories de déformation sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes vibratoires des plaques FGM.

Deuxièmement, l'étude paramétrique menée a démontré que le comportement vibratoire des plaques est intimement lié à la forme géométrique représentée par les rapports d'épaisseur, les propriétés des matériaux constituants par l'indice de la fraction volumique, les paramètres de fondation élastique, et aux théories appliquées pour modéliser la plaque. De plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement vibratoire.

Dans les applications technologiques, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir des paramètres de matériaux appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne remettent pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à des conditions extérieures sévères.

En perspective. Le travail présenté dans cette thèse peut être développé et enrichi. Nous envisageons de réaliser l'étude de flambage des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques dans le cadre d'étude du comportement thermomécanique des plaques FGM. Il est également envisageable d'étendre l'analyse à des éléments structuraux à section variable et d'élargir l'étude aux coques qui sont des éléments très utilisées et très présentes dans les structures aérospatiales. On peut aussi résoudre les problèmes de vibration des structures reposant sur des fondations élastiques par la méthode des éléments finis et sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique, etc.) et sous diverses conditions aux limites.

Références bibliographiques

A

- [Abdelaziz et al, 2017] Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S. (2017) ,“An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- [Abrate, 2006] Abrate S, Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates, *Compos. Sci. Technol.*, 66, 2383–94. (2006)
- [Abualnour et al, 2018] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates ” , *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- [Ait Atmane et al, 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda, B. A. (2010), free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory , *Int. J Mech. Mater. Des*, 6, 113–121
- [Akavci et al, 2015] Akavci S., A. Tanrikulu(2015), Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories, *Composites, Part B, Eng.* 83,203–215
- [Akavci et al, 2016] Akavci S (2016). —Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Composites Part B*; 96: 136 - 152.
- [Attia et al, 2015] Attia A , Tounsi A , Adda Bedia E A , Mahmoud S R (2015). F vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable

ned plate theories. Steel and composite structures; 18(1):187-212.

- [Aldo et al, 2002] Aldo R. Boccaccini, O. Van der Biest, Jan B. Talbot, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications: Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002
- [Atarashiya et al, 1993] Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., in: Holt J.B., Koizumi M., Hirai T., Munir Z.A. (Eds.), Ceram. Trans. 34, Functionally Graded Materials, American Ceramic Society, Westerville, OH, 1993, pp. 141–148.

B

- [Baiocchi et al, 2002] Baiocchi C and C. Lovadina. « A shell classification by interpolation ». Math. Models Methods Appl. Sci., 2002.
- [Balla et al, 2010] Balla V.K., Banerjee S., Bose S., Bandyopadhyay A. Direct laser processing of a tantalum coating on titanium for bone replacement structures. Acta Biomaterialia, 6(6):2329– 2334, 2010.
- [Bandyopadhyay et al, 2009] Bandyopadhyay A., Krishna B.V., Xue W., Bose S. Application of Laser Engineered Net Shaping (LENS) to manufacture porous and functionally graded structures for load bearing implants. Journal of Materials Science, 20:29–34, 2009.
- [Bao et al, 1995] Bao. G, Wang. L. (1995), Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19):2853–2871.
- [Bathe et al, 2003] K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat ». J. Numer. Methods Engrg, 2003
- [Belabed et al, 2014] Belabed Z, Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R, Anwar

- Bég O (2014). —An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*; 60: 274-283.
- [Beldjelili et al, 2016] Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud S R. (2016) —Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Structures and Systems*; 18(4):755-786.
- [Benahmed et al, 2017] Benahmed, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., &Tounsi, A. (2017). —A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34
- [Benchohra et al, 2018] Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R, (2018), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 65(1), 19-31.
- [Bennoun et al, 2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [Bessaim et al, 2013] Bessaim A ,Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R , AddaBedia E A. (2013)—A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures and Materials*; 15(6):671-703.
- [Biest et al, 2004] O.V.D. Biest, M. Gasik, J. Vleugels, *Functionally Graded Materials VIII : FGM2004*, Trans Tech Publications Ltd, Materials Science Forum, Uetikon-Zuerich, Vols. 492–493.
- [Birtman et al, 2007] Birman V. and Byrd L.W. (2007), —Modeling and analysis of

- functionally graded materials and structures, *Applied Mechanics Reviews*, 60, 195–216.
- [Boch., 1986] Boch. P Chartier .Huttepain. M Tapa (1986) casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites.
- [Bouafia et al, 2017] Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., &Tounsi, A. (2017). —A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams. *Smart Structures and Systems*, 19(2), 115-126.
- [Bouhadra et al, 2018] Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R. (2018), “Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*
- [Bourada et al, 2015] Bourada M., A. Kaci, M.S.A. Houari, A. Tounsi, (2015)—A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams, *Steel Compos. Struct.* 18 409–423.

C

- [Carrera et al, 2010] Carrera, E. et petrolo, M., « Guidelines and recommendations to constuct theories for metallic and composite plates », (2010), 48(12).
- [Cheng et al, 1999] Cheng Z.Q., S.Kitipornchai, (1999)-Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates, *J.Eng.Mech.ASCE*125. (11)1293–1297.
- [Chi et al, 2003] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics* ; 70 (10), 1227–1243.

D

- [Delale et al, 1983] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*;

50 (3):609-614.

[D'Ottavio et al, 2009] D'Ottavio, M. et Carrera, E., «variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells», AIAA journal, (2010), 48(9).

[Domack2005] Domack M.S., Baughman J.M. Development of nickel-titanium graded composition components. Rapid Prototyping Journal, 11(1):41–51, 2005.

E

[España2010] España F.A., Balla V.K., Bose S., Bandyopadhyay A. Design and fabrication of CoCrMo alloy based novel structures for load bearing implants using laser engineered net shaping. Materials Science and Engineering : C, 30(1):50–57, 2010.

F

[Ferreira et al, 2006] Ferreira A.J.M., R.C.Batra, C.M.C.Roque, L.F.Qian, R.N.Jorge, (2006) —Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, Compos.Struct. 75593–600

[Fuchiyama et al, 1995] Fuchiyama T. and Noda N. (1995), —Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, JSAE Review, 16, 263–268.

G

[Grazzini et al, 1992] Grazzini H. H. and Wilkinson D. S., Slip Casting under pressure, Dept. of Mater. Sci. and Engrg., McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada, January 7/10/1992.

H

[Hbali et al, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", Applied

- Mathematics and Mechanics, 925–942.
- [Hao et al, 2011] Hao Y.X., W. Zhang , J. Yang,(2011) —Nonlinear Oscillation of a Cantilever FGM Rectangular Plate Based on Third-Order Plate Theory and Asymptotic Perturbation Method *Journal of Composites Part B* Vol.42 pp. 402-413
- [Hebali et al, 2014] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383.
- [He et al, 2001] He X.Q., T.Y.Ng, S.Sivashankar, K.M.Liew, (2001)-Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *Int.J.SolidsStruct.*38 1641–1655.
- [Herrmann et al, 2017] Herrmann M, Sobek W (2017) —Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components. *StructConcr*, 18(1), 54-66.
- [Hirai et al, 1996] Hirai T., in: R.J. Brook (Ed.), *Materials Science and Technology*, vol. 17B, *Processing of Ceramics, Part 2*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, Germany, 1996, p. 292–341.
- [Hirwani et al, 2016] Hirwani C K, Patil R K, Panda S K, Mahapatra S S, Mandal S K, Srivastava L, Buragohain M K. (2016)—Experimental and numerical analysis of free vibration of delaminated curved panel. *Aerospace Science and Technology*; 54: 353-370.

I

- [Ichikawa et al, 2000] Ichikawa K. (Ed), *Functionally graded materials in the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts*, 2000, 264 p., Hardcover.

J

- [Jha et al, 2012] Jha D K , Kant T , Singh R K.(2012)—Higher order shear and

normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design* 20; 250: 8–13.

[Jiang2005]

Jiang W., Nair R., Molian P. Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication : processing modeling, structural analysis, and performance evaluation. *Journal of Materials Processing Technology*, 166(2):286–293, 2005.

[Jin et al. 2014]

Jin G Su Z, Shi S-Ye-T, Gao S. (2014) Three-dimensional exact solution the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Compos Struct*; 108:565e77

K

[Karama et al, 2003]

M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity". *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

[Kieback et al, 2003]

Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering*, A362 (2003) 81–105.

[Kim, 2005]

Kim Y.W., (2005)—Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates, *J.SoundVib*.284531–549.

[Kim et al, 2009]

Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J. (2009), "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", 47(4), 455–462.

[Koizumi, 1996]

Koizumi, M. (1996), FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.

[Koizumi, 1997]

Koizumi, FGM activities in Japan. *Compos. Part B-Eng*. 28(1–2) (1997) 1–4. doi:10.1016/S1359-8368(96)00016-9.

L

- [Leissa.1973] Leissa AW. (1973), The free vibration of rectangular plates. *J Sound Vib* ;31(3):257e93.
- [Leushake et al, 1998] Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A., in: Kaysser W.A., (Ed.), *Functionally Graded Materials 1998, Proceedings of the 5th International Symposium on FGM 1998*, Trans Tech Publications, Switzerland, 1999, p. 13–18.
- [Li et al, 2009] Li Q., V.P.Iu, K.P.Kou, (2009)—Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment, *J.SoundVib.* 324, 733–750.
- [Lionel, 2011] Lionel Gendre, "Materiaux composites et structures composites" publiée le 17-03-2011.
- [Lu et al, 2011] Lu L., Chekroun M., Abraham O., Maupin V., Villain G. Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT&E International*, 44(2):169–177, 2011

M

- [Mahmoudi, 2018] Mahmoudi A.E.K (2018) Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM ; Thèse de Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi BelAbbès.P3-60.
- [Markworth et al, 1995] Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995), —Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.
- [Melshwartz, 2005] Mel Schwartz, *New Materials, Processes, and Methods Technology*, CONSULTANT, CLEARWATER, FLORIDA, USA, November 04, 2005.
- [Mévrel, 1993] Mévrel R., Les systèmes barrières thermiques pour aubes de

- turbine, Département Morinaga K., Toto K.U., Fabricate thick Alumina-Tungsten FGM using slip cast method, Sci. Technol., December 1993, p.4.
- [Miyamoto et al, 1990] Miyamoto, Y., Nakanishi, H., Tanaka, I., Okamoto, T. and Yamada, O. Gas Pressure Combustion Sintering of TiC-Ni FGM. 'Proceedings of the First Int. Symp., FGM', Sendai, 1990, Functionally Gradient Materials Forum and the Society of Non-traditional Technology, Tokyo, 257-262
- [Miyamoto et al, 1999] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., Functionally graded materials: design, processing and applications, Materials Technology Series , Vol. 5 – 1999.
- [Mori et al, 1973] Mori, T. et Tanaka, K., « average stress in matrix and average élastic energy of material withe misfitting inclusions », Actametall, (1973),571-574.
- [Müller2003] Müller E., Drasar C., Schilz J., Kaysser W.A. Functionally graded materials for sensor and energy applications. Materials Science and Engineering : A, 362(1-2):17–39, 2003.
- [Mantari et al, 2014a] Mantari, J.L. and Guedes Soares, C. (2014), “Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates”, Compos. Struct., 109, 231-239.
- [Mantari et al, 2014b] Mantari J L, Soares C G. (2014) —A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates. Composite Structures; 107:396-405.
- [Mantari et al, 2015a] Mantari J L, Granados EV. (2015a)—A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. Thin-Walled Structures; 90:150-158.
- [Mantari et al, 2015b] Mantari J L, Granados EV.(2015b) —Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT. Composites Part B: Engineering;75:148-155.
- [Mantari et al, 2015c] Mantari J L, Soares C G. (2015c) —Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. Composites Part B:

Engineering; 56:126-136.

[Meksi et al, 2015] Meksi A ,Benyoucef S , Houari M S A , Tounsi A. (2015)—A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*; 53(6):1215-1240.

[Meksi et al, 2018] Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, SR.(2018), “An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates”, *J. Sandw . Struct.Mater.*, 1099636217698443.

N

[Niino, 1987] Niino M., T. Hirai and R. Watanabe, (1987) —The functionally gradient materials, *J Jap Soc Compos Mat*, vol.13, pp. 257-264.

[Noda, 1999] Noda N. (1999), —Thermal stresses in functionally graded material, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.

[Ng et al, 2000] Ng T.Y ,K.Y.Lam, K.M.Liew, (2000)—Effect of FGM materials on parametric response of plate structures, *Comput.Methods.Appl.Mech.Eng.*190953–962.

[Nguyen et al. 2015] Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), "A refined higher- order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 91-120.

P

[Pasternak, 1954] Pasternak, P.L. (1954) “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu I Arkhitekture*, 1, 1–56.

- [Paulino et al, 2003] Paulino G.H., Jin Z.H., and Dodds Jr. R.H. (2003), Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- [Pindera, 1994] M.J. Pindera, S.M. Arnold, J. Aboudi, D. Hui, Use of Composites in Functionally Graded Materials. Invited paper, In: *Functionally Graded, Advanced Composites Materials Symposium*, University of Virginia, Charlottesville, U.S.A., 1993, *Composites Eng.* 4(1994) 1–145.
- [Pindera et al, 1997] M.J. Pindera, J. Aboudi, A.M. Glaeser, S.M. Arnold, Use of Composites in Multi-Phased and Functionally Graded Materials. *Compos. Part B-Eng.* 28(1997) 1–175.
- [Pitkaranta et al, 1995] J. PITKÄRANTA, Y. LEINO, O. OVASKAINEN, and J. PIILA. « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells ». *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1995.
- [Pompe2003] Pompe W., Worch H., Epple M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., Hempel U., Scharnweber D., Schulte K. Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):40–60, 2003.

Q

- [Qian2003a] Qian X., Dutta D. Design of heterogeneous turbine blade. *Computer-Aided Design*, 35:319–329, 2003.

R

- [Rajesh et al; 2006] Rajesh K., Bhangale, N., Ganesan, Chandramouli Padmanabhan, Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006) 341–371
- [Rasheedat et al, 2012] Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi *Member, IAENG*, Mukul Shukla and Sisa Pityana, "Functionally Graded Material: An Overview". dans *Proceedings of the World*

- Congress on Engineering 2012 Vol III WCE 2012, July 4 - 6, 2012, London,U.K.).
- [Rayleigh , 1877] Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company (1877).
- [Reddy, 1997] Reddy, J., 1997. Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis. CRC Press, Boca Raton.
- [Reddy, 1999] Reddy, J.N., (1999). —Theory and Analysis of Elastic plates|. Taylor & Francis, Philadelphia
- [Reddy et al, 2003] Reddy J.N., Z.Q.Cheng, (2003)—Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach|, J.Eng.Mech.ASCE129 (8) 896–900.
- [Reissner , 1945] Reissner E. " The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". J. of appl. Mech., (12) A69-A77 (1945).
- [Reynaud et al, 2001] Reynaud C., Thévenot F., Chartier T., Processing and microstructure of SiC laminar composites, International Journal of Refractory Metals and Hard Materials Vol 19, 2001, p. 425-435.,
- S**
- [Sahoo et al, 2016] Sahoo S S, Panda S K, Mahapatra T R. (2016)—Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel—An experimental approach|. European Journal of Mechanics-A/Solids; 59: 95-113.
- [Sanchez el al, 1997] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. « Coques Elastiques Mince- Propriétés Asymptotiques ». Masson, Paris, 1997.
- [Sekkal et al, 2017] Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). —A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. steel and composite structures, 25(4), 389-401.
- [sellai, 2001] Sellai ,B.O.(2011), “Etude et Analyse des Structures en FGM: Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM ” ; Thèse de

- Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès.
- [Shen et al, 2012] Shen, H.S., Wang, Z.X. (2012), —Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates‡. *Compos. Struct.*, 94(7), 2197-2208.
- [Shen, 2016] Shen, H. (2016) —Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells‡. CRC press.
- [Shen, 2009] Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & FrancisGroup.
- [Sheikholeslami et al, 2013] Sheikholeslami S.A., A.R.Saidi, (2013)—Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher order shear and normal deformable plate theory‡, *Compos.Struct.*106350–361.
- [Shimpi, 2002] Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146.
- [Singh et al, 2016] Singh V K, Mahapatra T R, Panda S K. (2016)—Nonlinear transient analysis of smart laminated composite plate integrated with PVDF sensor and AFC actuator‡. *Composite Structures*; 157: 121-130.

T

- [Takahashi et al, 1990] Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1990, 129-34.
- [Talha et al, 2010] Talha, M., Singh, B. N. (2010) —Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl.Mathem.Modell*, 34(12), 3991-4011.
- [Tanigawa, 1995] Tanigawa Y. (1995), —Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials‡, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- [Thai et al, 2010a] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory",

International Journal of Mechanical Sciences

- [Thai et al, 2010b] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- [Thai et al, 2011] Thai, H.-T., Kim, S.E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- [Timoshenko , 1921] S.Timoshenko" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars "Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [Timoshenko et al, 1959] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S. (1959), "Theory of plates and Shells". Mc Graw-Hill, New York.
- [Tounsi et al. 2013] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.

W

- [Watari et al, 1997] Watari F., Yokoyama A., Saso F., Uo M., Kawasaki T. Fabrication and properties of functionally graded dental implant. *Composites Part B : Engineering*, 28(1-2):5–11, 1997.
- [Watari et al, 2004] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., Kawasaki T. Bio-compatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*, 64(6):893–908, 2004.
- [Watermetz, 2006] Watremetz B., *Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères*, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.

- [Winkler, 1867] Winkler, E. (1867) “Die lehre von der elasticitaet und festigkeit”, Prague: Prag Dominicus.

X

- [Xiang et al, 2011] Xiang S, Yao-xing J, Ze-yang Bi, Shao-xi J, Ming-sui Y, (2011) —A n-order Shear Deformation Theory for Free Vibration of Functionally Graded and Composite Sandwich Plates Journal of Composite Structures. Vol.93 pp. 2826–2832

Y

- [Yin et al, 2004] Yin H.M, Sun L.Z, Paulino G.H. (2004), —Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materialia, 52,3535–3543.

- [Yoshihisa et al, 2004] Yoshihisa Uchida, Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B, Mar., 2004

- [Yin et al, 2004] Yin H.M, Sun L.Z, Paulino G.H. (2004), —Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materialia, 52,3535–3543.

- [Yuki et al, 1991] Yuki M., Murayama T., Irisawa T., Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1991, 203-208.

Z

- [Zeng et al, 2000] ZENG Y. P., JIANG D. L., WATANABE T., Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials, Journal of the American Ceramic Society, 2000, vol. 83, no12, p. 2999-3003 (20 ref.)

- [Zenkour, 2013a] Zenkour AM. (2013), “A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates ”. Appl Math Model; 37(20–21):9041–51.
- [Zenkour, 2013b] Zenkour AM. (2013), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory”. J Sandwich Struct Mater ; 15(6):629–56.
- [Zenkour, 2015] Zenkour AM. (2015), “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using fourunknown shear and normal deformations theory”. Compos Struct; 122:260–70.
- [Zhang et al, 1998] Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q., Mater J..Sci. Lett. 17 (1998) 1677–1679