

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS  
THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

M<sup>r</sup> : **KHILOUN Mokhtar**

Intitulé de la thèse

## **Investigation sur la réponse mécanique des structures en matériaux à gradient de propriété**

Soutenu le 20 / 02 / 2020 devant le Jury composé de :

<b>Président</b>	<b>BENRAHOU Kouider halim</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Directeur de thèse</b>	<b>BOUSAHLA Abdelmoumen Anis</b>	<b>MCA</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Co-Directeur de thèse</b>	<b>TOUNSI Abdelouahed</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>MEFTAH Sid Ahmed</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>CHIKH Abdelbaki</b>	<b>MCA</b>	<b>U DE TIARET</b>
<b>Examineur</b>	<b>HEBALI Habib</b>	<b>MCA</b>	<b>U DE TIARET</b>

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# ***DÉDICACE***

*A la mémoire de mon père et ma mère*

*A ma petite famille*

*À tous ceux qui m'ont apporté leurs aide.*



# REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, monsieur Abdelmoumen Anis Bousahla , pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je désire exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse monsieur TOUNSI Abdelouahed de l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme de ce travail.

Je tiens aussi à rendre hommage à Monsieur BENRAHOU Kouider halim Professeur à UDL SBA pour son intérêt à mon travail et je lui exprime mon honneur ainsi que mes gratitudes d'être président de jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : MEFTAH Sid Ahmed Professeur à UDL SBA, CHIKH Abdelbaki Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret et HEBALI Habib Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret qui ont bien voulu participer à ce jury, et ont pris le temps de lire, d'examiner ce travail et vont honorer par leur présence et leur jugement, la soutenance de cette thèse.

Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabess de Sidi Bel Abess.

Je voudrais exprimer mes plus vifs remerciements à toutes personnes ayant contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

# *RESUME*

Ce travail présente une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé qui est originale par le fait qu'elle inclue l'effet d'étirement d'épaisseur (stretching effect) et cela pour l'analyse statiques et la vibrations libres des plaques à gradient de propriétés. Le principe de Hamilton est utilisé pour obtenir les équations du mouvement. Le nombre d'inconnues pour la formulation proposée est de seulement quatre contrairement à d'autres théories d'ordre élevé proposées dans la littérature, ce qui la rend plus efficace et simple à prédire le comportement statique et dynamique des plaques , les résultats obtenus par l'analyse mathématique sont analysés et comparés à ceux de la littérature ce qui conduit à démontrer l'exactitude du modèle proposé. L'approche théorique actuelle de la plaque tient compte à la fois des déformations transversales en cisaillement et des déformations normales et satisfait aux conditions aux limites de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque sans l'aide de facteur de correction de cisaillement.

**Mots-clés :** Plaques à gradient fonctionnel (FG) ; flexion ; vibration ; nouvelle théorie des plaques ; déformation normale.

# *ABSTRACT*

This work presents a new theory of high order shear deformation which is original in that it includes the effect of thickness stretching for static analysis and free vibration of gradient property plates. The Hamilton principle is used to obtain the equations of motion. The number of unknowns for the proposed formulation is only four, unlike other high order theories proposed in the literature, which makes it more effective and simple to predict the static and dynamic behaviour of the plates, the results obtained by the mathematical analysis are analyzed and compared with those of the literature, which leads to demonstrating the accuracy of the proposed model. The current theoretical approach to the plate takes into account both transverse shear deformations and normal deformations and satisfies the conditions at the zero shear stress limits on the plate surfaces without the use of shear correction factors.

The accuracy of the proposed solutions is verified by comparison with other results found in the literature.

**Keywords :** Functionally graded (FG) plates · Bending · Vibration · New plate theory · Normal deformation

## ملخص

يقدم هذا العمل نظرية جديدة لتشوه القص ذي الترتيب العالي وهو أصلي من حيث أنه يشمل تأثير تمدد السماكة من أجل التحليل الثابت والاهتزاز المجاني لألواح خاصة التدرج. يستخدم مبدأ هاملتون للحصول على معادلات الحركة. عدد المجهول للصياغة المقترحة هو أربعة فقط ، على عكس النظريات الأخرى ذات الترتيب العالي المقترحة في الأدبيات ، مما يجعله أكثر فعالية وبساطة في التنبؤ بالسلوك الثابت والديناميكي للوحات ، ويتم تحليل النتائج التي تم الحصول عليها من خلال التحليل الرياضي وتحليلها مقارنة مع تلك الأدبيات ، مما يؤدي إلى إثبات دقة النموذج المقترح. يأخذ النهج النظري الحالي للوحة في الاعتبار كل من تشوهات القص المستعرض والتشوهات العادية وتلبية الظروف عند حدود إجهاد القص الصفري على يتم التحقق من دقة الحلول المقترحة أسطح اللوحة دون استخدام عوامل تصحيح القص بالمقارنة مع النتائج الأخرى الموجودة في الأدبيات

**كلمات البحث :** لوحات التدرج الوظيفي . انثناء . الاهتزاز . نظرية جديدة للوحات . تشوه طبيعي

# TABLE DES MATIERES

Remerciement	
Dédicace	
Liste des Notations	
Liste des Tableaux	
Liste des figures	
Abstract	
Résumé	
ملخص	
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Les matériaux composites et les matériaux à gradients fonctionnel</b>	
I.1 Définition générale d'un matériau composite.....	7
I.2 Classification des matériaux composites.....	7
I.3 Constituants des matériaux composites.....	8
I.3.1 Les fibres.....	9
I.3.2 Les matrices.....	13
I.3.3 L'interphase.....	15
I.4 Composite final : le stratifié.....	16
I.5 Considérations d'usage des matériaux composites.....	17
I.5.1 Les avantages.....	17
I.5.2 Les inconvénients.....	18
I.6 Mise en œuvre des matériaux composites.....	20
I.6.1 Moulage au contact .....	21
I.6.2 Moulage par projection simultanée .....	21
I.6.3 Injection thermodurcissable BMC: (Bulk Molding Compound).....	22



I.6.4 Compression thermodurcissable SMC: (Sheet Molding Compound).....	22
I.6.5 Enroulement filamentaire (ou bobinage).....	23
I.7 Architecture des matériaux composites.....	24
I.7 .1 Monocouche.....	24
I.7 .2 Stratifiés.....	24
I.7 .3 Sandwichs.....	25
I.8 Matériaux à gradients de propriétés.....	26
I.8.1 Introduction.....	26
I.8.2 Conception des structures FGM.....	27
I.8.3 Le gradient.....	28
I.8.4 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.....	29
I.9 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM.....	31
I.9.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	32
I.9.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	33
I.9.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	34
I.10 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites Traditionnels.....	35
I.11 Avantages et inconvénients des FGM.....	37
I.11.1 Avantages des FGM .....	37
I.11.2 Inconvénients des FGM .....	38
I.12 Développements récents et défis des FGM.....	38
I.13 Conclusion.....	39

## **Chapitre II Généralité sur le comportement élastique du matériau**

Introduction.....	41
II.1 Généralité sur le comportement élastique du matériau.....	43
II.1.1 Elasticité linéaire.....	44
II.1.2 Matériau anisotrope.....	44
II.1.3 Matériau monoclinique.....	45
II.1.4 Matériau orthotrope.....	45
II.1.5 Matériau orthotrope à isotrope transverse.....	46
II.1.6 Matériau isotrope .....	47

**Chapitre III Théorie des plaques**

III.1 Introduction .....	50
III.2 Les modèles analytiques des plaques FGM .....	52
III.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	52
III.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	54
III.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	56
III.2.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques(RPT).....	59
III.2.5 Théorie de zig-zag.....	60
III.3 Conclusion .....	62

**Chapitre IV Formulation théorique**

IV.1. Introduction.....	64
IV.2. Hypothèses de base.....	64
IV.3 Relations constitutive.....	67
IV.4 Équations gouvernantes.....	69
IV.5 Solution exacte pour la plaque FG supportée simplement .....	73
IV.6 Conclusion.....	75

**Chapitre V : Résultats et discussion**

V .1 Résultats numériques.....	77
V .2 Analyse de flexion.....	77
V .3 Analyse des vibrations libres.....	85
V .4 Conclusion.....	89

<b>Conclusion générale et perspectives.....</b>	<b>92</b>
---	-----------

<b>Références.....</b>	<b>95</b>
------------------------	-----------

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure I.1</b>	Classification des matériaux composites.....	8
<b>Figure I.2</b>	Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom).....	9
<b>Figure I.3</b>	Différentes familles du renfort.....	10
<b>Figure I.4</b>	Représentation d'un pli unidirectionnel : en zoom un toron et une fibre...11	
<b>Figure I.5</b>	Représentation d'un tissu taffetas.....	12
<b>Figure I.6</b>	Représentation d'un tissu sergé.....	12
<b>Figure I.7</b>	Représentation d'un tissu satin pour $n=4$ .....	13
<b>Figure I.8</b>	Diférentes familles de matrice.....	14
<b>Figure I.9</b>	Partie gauche - stratifié composite. Partie droite - un pli composite.....	17
<b>Figure I.10</b>	Moulage par contact.....	21
<b>Figure I.11</b>	Moulage par projection simultanée.....	21
<b>Figure I.12</b>	Injection thermodurcissable BMC.....	22
<b>Figure I.13</b>	Compression thermodurcissable SMC.....	23
<b>Figure I.14</b>	Enroulement filamentaire (ou bobinage).....	23
<b>Figure I.15</b>	Couche de composite.....	24
<b>Figure I.16</b>	Constitution d'un stratifié.....	24
<b>Figure I.17</b>	Matériaux sandwiches à âmes pleines.....	25
<b>Figure I.18</b>	Configurations des composites et des FGM.....	26
<b>Figure I.19</b>	Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -SUS304).....	27
<b>Figure I.20</b>	Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.....	28
<b>Figure 1.21</b>	Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM.....	29
<b>Figure I.22</b>	Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel...30	
<b>Figure I.23</b>	Variation continue de la microstructure.....	30
<b>Figure I.24</b>	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.....	33
<b>Figure I.25</b>	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).....	34
<b>Figure I.26</b>	Variation du module de Young dans une plaque (E-FGM).....	35
<b>Figure I.27</b>	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec	

	les matériaux composites conventionnels.....	36
<b>Figure I.28</b>	Différentes schématisations de matériaux.....	37
<b>Figure II.1</b>	Plan de symétrie.....	45
<b>Figure II.2</b>	Matériau orthotrope.....	46
<b>Figure II.3 :</b>	Plan d'isotropie La matrice de rigidité s'écrit donc suivant La matrice de souplesse a la même forme.....	47
<b>Figure III.1</b>	Description d'une plaque.....	51
<b>Figure III.2</b>	Conventions générales.....	51
<b>Figure III.3</b>	contraintes agissant sur un element differential de plaque homogène.....	52
<b>Figure III.4</b>	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.....	53
<b>Figure III.5</b>	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	54
<b>Figure III.6</b>	Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.....	55
<b>Figure III.7</b>	la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT.....	55
<b>Figure III.8</b>	Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).....	57
<b>Figure III.9</b>	Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen 2004).....	61
<b>Figure III.10</b>	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera, 2004).....	61
<b>Figure IV.1</b>	plaque rectangulaire de dimensions $a$ et $b$ en plan et d'épaisseur uniforme $h$ .....	64
<b>Figure V.1</b>	Le déplacement transversal, $\bar{w}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).....	81
<b>Figure V.2</b>	Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).....	82
<b>Figure V.3</b>	La variation de la contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).....	83
<b>Figure V.4</b>	La variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).....	84
<b>Figure V.5</b>	Variation de la contrainte transversale normale $\bar{\sigma}_z$ dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).....	85

**Figure V.6** Fréquence propre fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG simplement supportées ( $b = 2a$ ) en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  pour les différents  $a/h$  .....88

**Figure V.7** Fréquence propre fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG simplement supportées ( $b = 2a$ ) en fonction du rapport côté sur épaisseur  $a/h$  pour différents indices de loi de puissance  $k$  .....89

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1	Propriétés mécaniques des fibres.....	10
Tableau I.2	Principales propriétés des matrices Thermodurcissables et Thermoplastiques.....	14
Tableau I.3	Quelques caractéristiques principales de résines.....	15
Tableau V.1	Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.....	77
Tableau V.2	Effet d'une déformation normale $\varepsilon_z \neq 0$ sur les contraintes sans dimension et le déplacement transversal pour une plaque carrée isotrope ( $a/h=10$ ) soumise à un UDL.....	78
Tableau V.3	Effet d'une contrainte normale $\varepsilon_z$ sur la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ sans dimension et le déplacement $\bar{w}$ pour une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale.....	79
Tableau V.4	Effets de l'exposant de fraction volumique sur les contraintes et déflexions sans dimension d'une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale.....	80
Tableau V.5	Fréquences naturelles $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque isotrope avec $\nu = 0.3$ , $a/h = 10$ et $a/b = 1$ .....	86
Tableau V.6	Fréquences propres de la plaque rectangulaire FG ( $a/b = 0.5, a/h = 10$ ).....	87

## LISTE DES NOTATIONS

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$E_m$	Module de Young du métal
$E_c$	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	Densité du matériau en fonction de « z »
$\rho_m$	Densité du métal
$\rho_c$	Densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$k$	Paramètre du matériau
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u_b, v_b, w_b$	Composantes du champ de déplacement de flexion
$u_s, v_s, w_s$	Composantes du champ de déplacement de cisaillement
$u, v, w$	Déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$w_{st}$	Composante de déplacement due à l'effet d'étirement
$\varphi_x, \varphi_y$	Rotations autour des axes $x$ et $y$

$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation
$\delta V$	Variation de l'énergie potentielle
$\delta K$	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice



$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$(m,n)$	ième mode propre
$q(x,y)$	Charge transversale
$(I_i, J_i, K_i)$	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice

***INTRODUCTION  
GÉNÉRALE***

## *Introduction générale*

Les matériaux à gradient de propriété (FGM) sont une nouvelle classe de composites qui ont un changement continu des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre, ce qui permet d'éliminer les problèmes d'interface disponibles dans les composites classiques et d'atténuer la distribution des contraintes.

De nos jours, les MGF sont utilisées dans de nombreuses applications techniques dans les industries modernes, notamment l'aérospatiale, la mécanique, l'électronique, l'optique, la chimie, le biomédical, le nucléaire et le génie civil [47].

Compte tenu de leurs avantages et motivés par ces vastes applications techniques, les caractéristiques statiques, de flambement et dynamiques des plaques à gradient fonctionnel (FG) ont fait l'objet d'une grande attention[51-52], et une vaste gamme de théories sur les plaques a été développée pour fournir plus correctement leurs réponses mécaniques.

En général, ces théories des plaques peuvent être divisées en trois catégories principales, à savoir: la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation par cisaillement au premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT).

La théorie classique des plaques (CPT) ne donne de bons résultats que pour l'analyse de plaques minces sans effet de déformation par cisaillement transversal.

En attendant, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) surmonte ce problème en tenant compte de cet effet, est applicable à la fois pour les tôles minces et modérément épaisses. Cependant, un facteur de correction de cisaillement pratiquement approprié est nécessaire pour corriger la distribution transversale des contraintes de cisaillement, ce qui est difficile à trouver car il dépend de la géométrie, des propriétés des matériaux et des conditions de chaque problème[47, 46].

Pour éviter d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement, plusieurs polynômes[52-54] et non polynomiaux[52, 53, 55] ont été mis au point pour obtenir des résultats plus précis et plus fiables, basés sur une variation non linéaire de l'épaisseur des déplacements en plan.

De façon typique, l'analyse des plaques FG est effectuée à l'aide de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) ou des théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Quelques chercheurs ont utilisé la théorie classique des plaques rectangulaires (CPT) pour étudier le comportement statique, de flambement et de vibration des plaques minces à

gradient fonctionnel (FG). Woo et al[56] ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques avec des conditions limites arbitraires basées sur l'hypothèse CPT et les hypothèses de Von Karman.

Chakraverty et Pradhan[57] ont utilisé la théorie classique des plaques pour étudier la vibration libre d'une plaque à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique Winkler avec diverses conditions aux limites en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. Feldman et Aboudi[58] ont étudié le flambement élastique d'une plaque à gradient fonctionnel sous des charges de compression dans le plan avec des bords simplement supportés et serrés en utilisant une combinaison d'approches micromécanique et structurelle et les équations directrices sont tirées de la théorie classique des plaques (CPT).

Chi et al[59, 60] ont également adopté le CPT pour effectuer des analyses de flexion des plaques FG sous charge transversale.

Joshi et al[61] ont utilisé la théorie classique des plaques et la théorie modifiée des contraintes de couple pour étudier les vibrations libres et le flambement des microplaques isotropes partiellement fissurées et les microplaques MGF dans un environnement thermique.

La théorie classique des plaques ignore les effets de cisaillement transversal, fournit des résultats raisonnables pour des plaques relativement minces, et suffit pour calculer les premiers modes de vibrations[62].

Dans le FSDT, la distribution de la contrainte transversale de cisaillement par rapport à la coordonnée de l'épaisseur est supposée constante.

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre suppose que la contrainte de cisaillement transversale par rapport à la coordonnée de l'épaisseur est constante et donne des résultats acceptables pour les tôles épaisses et minces, mais nécessite l'utilisation de coefficients de correction du cisaillement.

Le FSDT a été largement utilisé pour la modélisation de plaques fonctionnellement calibrées. Praveen et Reddy[63] se sont basés sur le FSDT pour étudier la réponse des plaques céramique-métal classées fonctionnellement en utilisant la méthode des éléments finis. Hosseini-Hashemi et al[39] ont également étudié l'analyse vibratoire de plaques FG rectangulaires modérément épaisses sur des fondations élastiques Winkler et Pasternak en utilisant la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement (FSDT).

Park et Kim[64] ont adopté la FSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier le postbouclage et la vibration des plaques fonctionnellement graduées sous des charges thermiques en utilisant la méthode non linéaire par éléments finis.

Contrairement à la FSDT existante, Meksi et al[65] ont étudié la vibration libre et l'analyse statique des plaques (FG) à l'aide d'une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement de premier ordre basée sur une position de surface neutre et reposant sur des fondations élastiques Winkler ou Pasternak.

Comme l'a expliqué Pai[53], la précision de la FSDT ne peut être déterminée en raison de la dépendance du facteur de correction du cisaillement par rapport aux propriétés des matériaux, à la géométrie et aux conditions aux limites de chaque problème.

Afin d'inclure certains effets d'ordre supérieur tels que le gauchissement de la section transversale et les effets d'étirement de l'épaisseur, diverses théories de déformation par cisaillement polynomial et non polynomial d'ordre supérieur (HSDT), qui sont basées sur une variation non linéaire de l'épaisseur des déplacements en plan, ont été développées.

La théorie de la déformation par cisaillement polynomial d'ordre supérieur (TSDT)[52] a été utilisée dans un environnement différent pour étudier les réponses des plaques et coques composites classées et laminées fonctionnellement, par exemple[66].

Mehar et al[67] ont étudié les fréquences de vibration d'une structure composite polymère multi-parois renforcée de nanotubes de carbone, examinée numériquement par une cinématique générique de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour différentes géométries de panneaux.

Sahoo et al[68] ont étudié le comportement statique et le comportement en vibration libre de la plaque composite verre tissé laminé/époxy et l'ont validé par des expériences ultérieures.

La plaque composite laminée déformable par cisaillement a été modélisée mathématiquement à l'aide de deux théories cinématiques d'ordre supérieur différentes et de l'ensemble des éléments finis commerciaux (ANSYS).

Sahoo et al[45] ont étudié le comportement en flexion non linéaire de panneaux composites stratifiés carbone/époxy à l'aide d'un modèle mathématique non linéaire généralisé basé sur deux cinématiques moyennes de déformation par cisaillement d'ordre supérieur et sur la non-linéarité géométrique de type Green-Lagrange.

La résistance à la flexion de la plaque composite délaminée a été analysée numériquement et comparée aux résultats expérimentaux par Hirwani et al[69] en utilisant deux modèles cinématiques d'ordre supérieur.

Récemment, la théorie de la déformation par cisaillement polynomial d'ordre supérieur (HSDT) a été utilisée pour obtenir les réponses structurelles de l'enveloppe composite stratifiée et des structures composites de nanotubes de carbone à parois multiples et de

polymères polymères forcés, voir par exemple [70].

Outre la théorie de la déformation par cisaillement polynomial d'ordre supérieur, diverses fonctions non polynomiales (sinusoïdale, sinusoïdale hyperbolique, cosinusienne, exponentielle et tangente) ont été développées comme fonctions de cisaillement pour les HSDT pour décrire la déformation à travers l'épaisseur de la plaque et pour prendre en compte la déformation transversale en cisaillement.

Neves et al[70, 48] ont étudié l'analyse de la flexion et des vibrations libres des plaques de qualité fonctionnelle à l'aide des fonctions sinusoïdale[70] et hyperbolique[48] pour les déplacements transversaux et en plan.

Neves et al[71] ont également étudié l'analyse du flambement linéaire des plaques sandwich MGF à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal hyperbolique quasi-3D.

Récemment, une nouvelle théorie de plaque raffinée et robuste[72] a été développée pour la réponse en flexion, le flambement, la vibration et la propagation des ondes des plaques FG à support simple avec seulement quatre fonctions inconnues.

Ces théories ont un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées.

Plus récemment, une nouvelle théorie de déformation par cisaillement simple et novatrice[73] a été mise au point pour la flexion, le flambement et la réponse aux vibrations libres des plaques et poutres FG avec seulement trois fonctions inconnues pour les modèles de plaques et deux fonctions inconnues pour les modèles de poutres. Contrairement à quatre, cinq ou même plus dans le cas d'autres théories de déformation par cisaillement plus élevées, cette théorie est cohérente de façon variable, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et tient compte de la distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement et satisfait la traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser aucun facteur de correction par cisaillement.

Il est à noter que l'effet d'étirement de l'épaisseur est négligé dans ces trois nouvelles théories sur les plaques variables et l'effet d'étirement de l'épaisseur est négligé.

Le déplacement transversal est considéré comme constant dans la direction de l'épaisseur, comme dans les théories des plaques minces de type Kirchhoff-Love.

Cela semble tout à fait inadéquat puisque les plaques MGF sont caractérisées par une forte variation des propriétés des matériaux dans la direction de l'épaisseur[47, 46]. L'effet d'étirement de l'épaisseur dans les structures à gradient fonctionnel a été souligné et discuté

récemment par de nombreux chercheurs[50].

Cet article vise à développer une nouvelle et simple théorie des plaques en incluant l'effet dit d'étirement.

En utilisant la théorie proposée, les analyses de flexion et de vibration libre des tôles à gradient fonctionnel sont étudiées.

Cette théorie n'a que quatre inconnues, ce qui est encore moins que les autres théories quasi-3D avec cinq déplacements inconnus ou plus.

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation hyperbolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement.

Dans cette étude, l'analyse des solutions de flexion et de vibration libre est obtenue pour les tôles à gradation fonctionnelle et la précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

La thèse débute par une introduction générale, structuré ensuite autour de cinq chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives.

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites et les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en donnant une représentation assez large des principaux constituants, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, leurs domaines d'application, ainsi que les lois du mélange et les lois de comportement.

L'objectif du deuxième chapitre est de présenter un rappel sur le comportement élastique du matériau.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons la théorie des plaques stratifiées, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons des différentes théories des plaques composites correspondantes.

Le quatrième chapitre est consacré à présenter la nouvelle théorie hyperbolique des plaques en se basant sur le principe des travaux virtuels permettant d'établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites de la plaque.

Le cinquième chapitre consiste à discuter les résultats obtenus par la nouvelle théorie à ordre élevé et les comparer avec ceux rapportés dans la littérature.

Enfin, ce travail s'achève par une conclusion générale permettant de souligner l'efficacité de la méthode utilisée dans les calculs des matériaux composites.

***CHAPITRE I  
LES MATÉRIAUX  
COMPOSITES ET LES  
MATÉRIAUX A GRADIENTS  
FONCTIONNEL***



# Chapitre I : Les matériaux composites et les matériaux à gradients fonctionnel

## *1.1 Définition générale d'un matériau composite*

Un matériau composite peut être défini comme l'association d'une ou de plusieurs phases discontinues réparties dans une même phase continue. L'assemblage final donne un nouveau matériau dont on attend des propriétés supérieures à celles qu'auraient les constituants élémentaires pris séparément. Dans une terminologie issue du vocabulaire de la résistance des matériaux, les constituants de la phase discontinue sont appelés de manière générique : « renforts ». Le rôle essentiel des renforts est d'assurer la tenue mécanique du composite. La phase continue est appelée « matrice ». En premier lieu, la matrice garantit la cohésion de la structure et la transmission des efforts mécaniques aux renforts. Elle fournit également une protection à ces derniers contre diverses agressions chimiques qui pourraient provenir de l'environnement extérieur.

D'un point de vue général, les matériaux qui constituent la matrice peuvent être des métaux, des céramiques ou des polymères. On peut utiliser des renforts de type particulaire ou fibreux.

On distingue les fibres courtes (longueur : 0,1 mm à 1mm), longues (longueur : 1 mm à 50 mm) et continues (longueur supérieure à 50 mm).

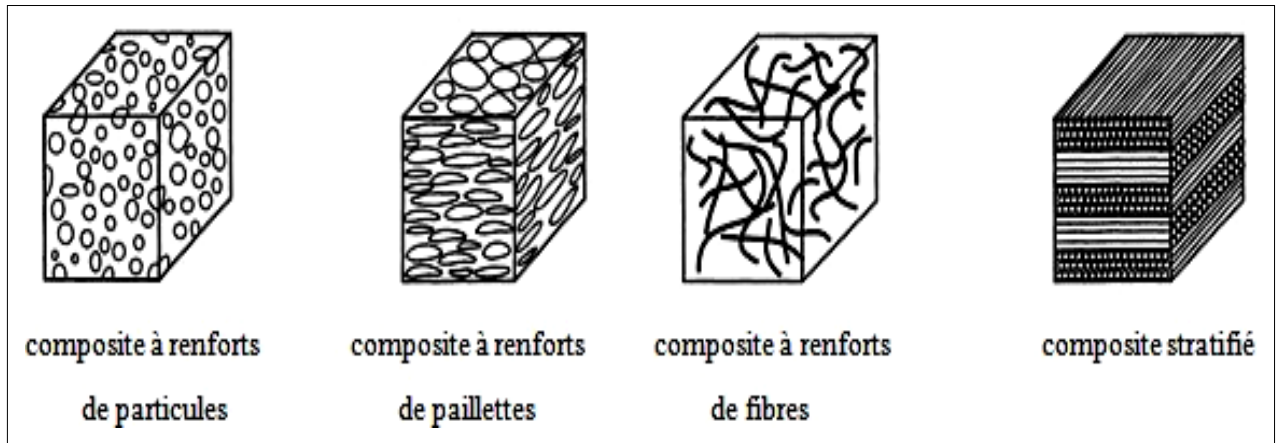
Schématiquement, les propriétés des matériaux composites dépendent :

- Des propriétés des constituants élémentaires.
- De la distribution géométrique des renforts ; par exemple s'ils sont constitués de fibres, de leur orientation.
- Des interactions éventuelles entre les constituants : qualité de l'adhésion entre la matrice et les renforts.

## *1.2 Classification des matériaux composites*

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts [1], [2]. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (Fig I.1).

- Composites à renforts de particule
- Composites à renforts de paillettes
- Composites à renforts de fibres
- Composites stratifiés



**Figure I.1** : Classification des matériaux composites [2]

Les matériaux composites peuvent également être classés par la nature de la matrice comme suit :

- Composites à matrice polymérique
- Composites à matrice métallique
- Composites à matrice céramique

### ***1.3 Constituants des matériaux composites***

Les propriétés mécaniques des composites sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la fibre, la matrice, ainsi que l'interphase. La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.

Cette dernière, quant à elle, réunit les fibres et donne la forme géométrique de la structure. La matrice sert également à transférer les efforts mécaniques entre les fibres et les protéger contre les environnements.

L'interphase est la zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice [3].

La disponibilité d'un grand choix de fibres et de matrices permet de réaliser des composites ayant diverses propriétés. Nous présenterons rapidement quelques-uns des constituants les plus couramment utilisés.

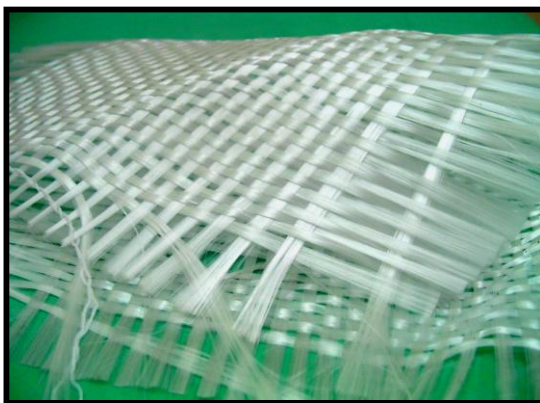
### *1.3.1 Les fibres*

Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres. Par sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat la redistribution du chargement sur les autres fibres, ce qui empêche la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes:

- Fibres de verre
- Fibres de carbone
- Fibres aramides



a – Roving de verre



b – Tissu de verre



c – Mat de verre

**Figure I.2** : Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom)

a) *Différentes natures de renfort:*

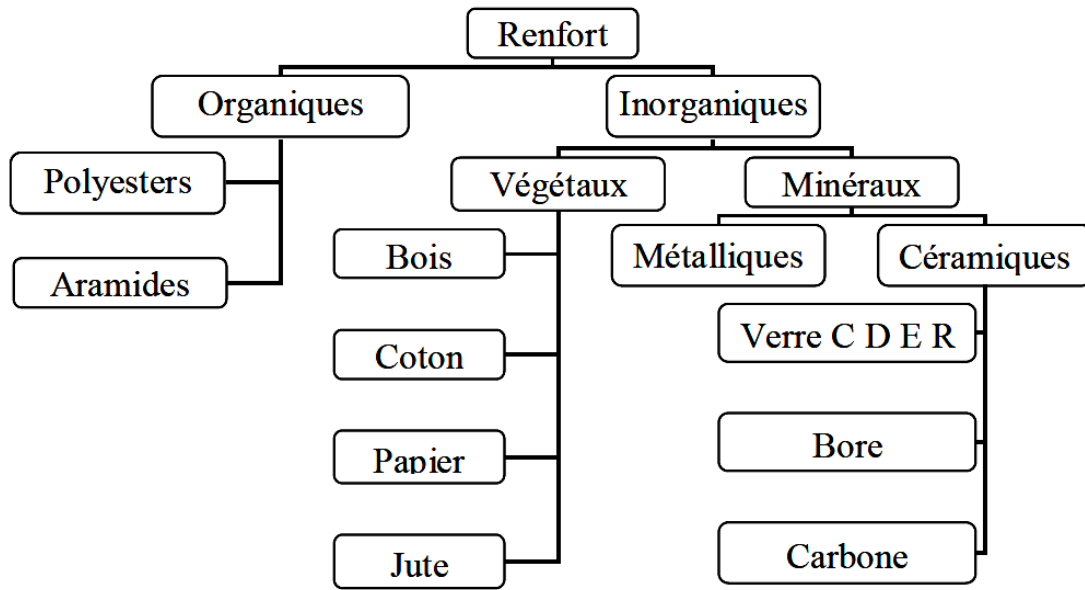


Figure I.3 : Différentes familles du renfort.

b) *Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base : [4]*

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques des fibres

fibre	densité	$\sigma_r$ (MPa) en traction	Allongement à la rupture en %	$E_L$ (MPa) Longitudinale	Diamètre du filament élémentaire $\mu\text{m}$
Verre E	2.54	3400	4.8	73000	3-30
Verre R	2.48	4400	5.4	86000	3-30
Aramide BM	1.45	3100	2	70000	12
Aramide HM	1.45	3100	1	130000	12
Kevlar	-	2900	2.3	130000	1.45
Aluminium	-	1380	0.7	380000	3.9
Carbone HT	1.78	2800	0.5	200000	8
Carbone HM	1.80	2200	-	400000	8
Bore	2.63	3500	0.8	400000	100-200

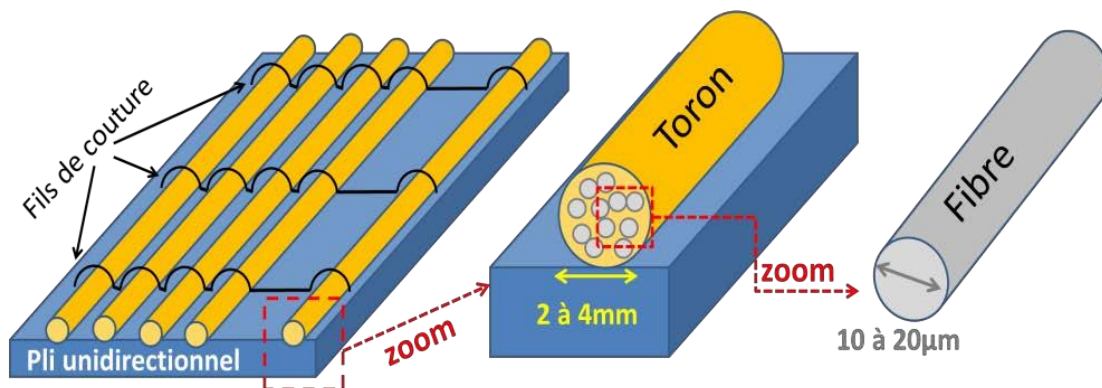
### *c) Architecture des renforts*

Dans une structure composite, ce sont les sollicitations mécaniques qui définissent la nature, l'orientation et l'architecture du renfort. Dans le cas de matériaux réalisés avec des fibres longues, on utilise fréquemment des tissus (satin, sergé, taffetas) ou des stratifiés obtenus à partir de plis unidirectionnels (UD) (figure. I.4). Pour un renfort tissé, la période spatiale représente le plus petit intervalle pour qu'un motif se reproduise suivant les directions de chaîne ou de trame (figures I.5 et I.6).

Généralement, les mèches de base, ou torons, constituant les armatures sont fabriquées à partir de plusieurs centaines de filaments enrobés dans de la matrice.

### *d) Les plis unidirectionnels*

Ce qu'on appelle plis correspond à une nappe de torons parallèles, assemblés et maintenus entre eux par des fils de trame légers et cousus perpendiculairement.



**Figure I.4** : Représentation d'un pli unidirectionnel : en zoom un toron et une fibre.

### *e) Le taffetas*

Le taffetas correspond à une nappe de tissu où chaque toron de chaîne passe successivement en dessous puis au-dessus de chaque toron de trame (figure I-3). Le tissu possède de bonnes propriétés en terme de stabilité lors de la mise en œuvre du composite. Toutefois du fait des nombreux entrecroisements successifs, un embuvage important est créé. Cela correspond à l'ondulation des fibres qui peut réduire les propriétés mécaniques d'ensemble.

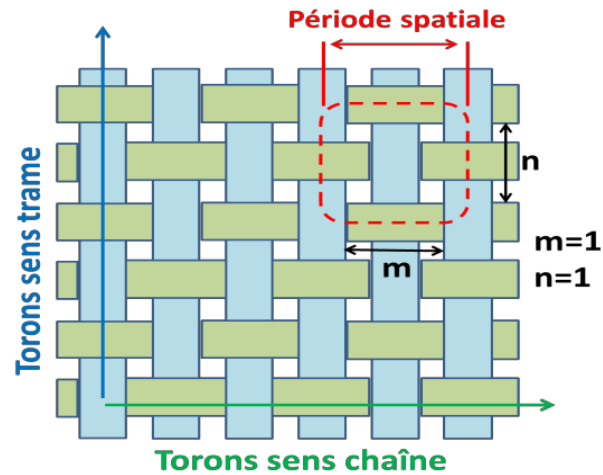


Figure I.5: Représentation d'un tissu taffetas.

f) *Le sergé*

Le sergé correspond à une nappe de tissu où chaque toron de chaîne passe au-dessus de ( $n=2$ ) torons de trame et où chaque toron de trame passe au-dessus de ( $m=2$ ) torons de chaîne (figure I-4). Cette armure offre une plus grande souplesse que le tissu taffetas en gardant une bonne densité de fils.

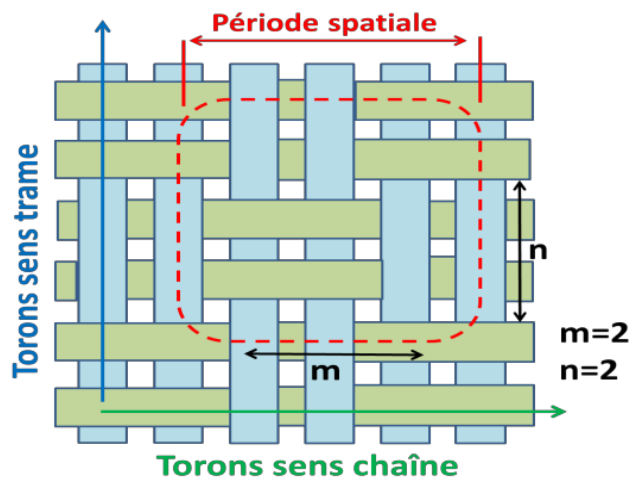
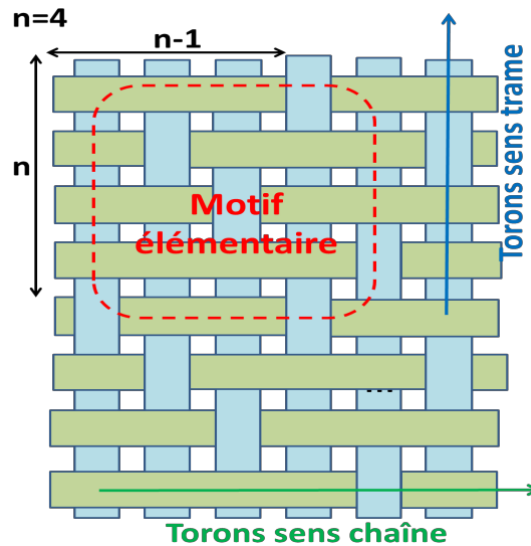


Figure I.6 : Représentation d'un tissu sergé.

g) *Le satin*

Le satin correspond à une nappe de tissu où chaque fil de chaîne passe au-dessus de ( $n-1$ ) fils de trame et réciproquement. Sur la figure I-5 on représente un tissu satin pour «  $n=4$  ». Ces tissus présentent un aspect différent sur chaque face. Ils présentent également une forte masse spécifique tout en restant assez souples et adaptés à la mise en forme de surfaces complexes.



**Figure I.7 :** Représentation d'un tissu satin pour  $n=4$ .

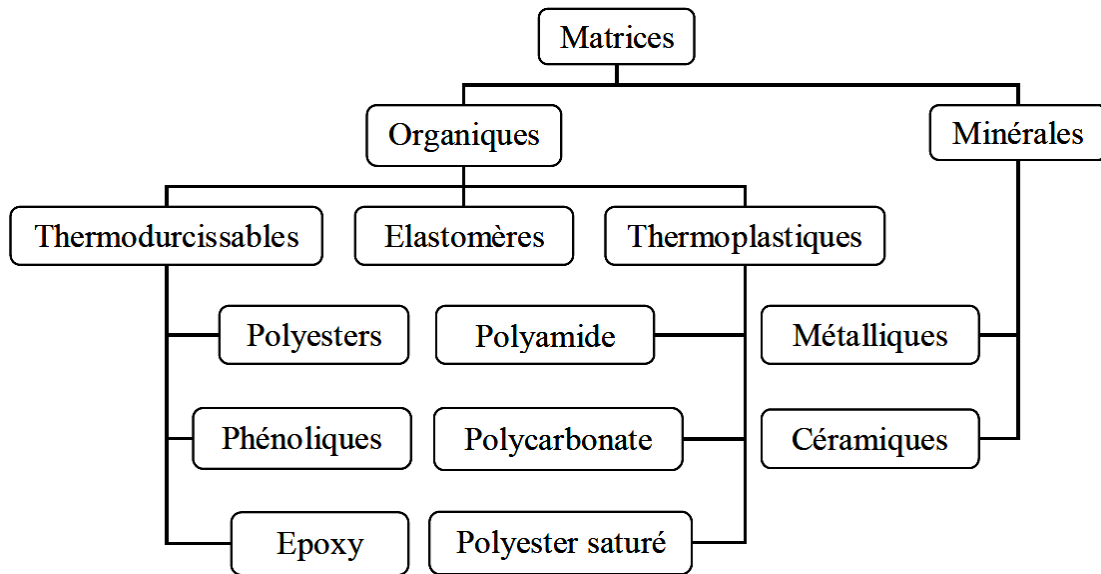
### ***1.3.2 Les matrices***

La matrice réunit les fibres par ses caractéristiques cohésive et adhésive. Elle maintient les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées. Ses autres rôles consiste à distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et fournir toutes les résistances en cisaillement du composite [1]. La matrice détermine en général la limite de la température d'utilisation et l'environnement de service du matériau.

Il existe un grand nombre de polymères pouvant servir de matrice aux matériaux composites. Ceux parmi les plus utilisés sont les suivants :

- Les résines thermodurcissables
- Les résines thermoplastiques

a) *Différentes natures de la matrice:*



**Figure I.8** Différentes familles de matrice.

- Résine thermodurcissable: sont mis en forme et se polymérisent selon la forme souhaitée. La transformation irréversible.
- Résine thermoplastique: mis en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement. La transformation est réversible.

**Tableau I.2 :** Principales propriétés des matrices Thermodurcissables et Thermoplastiques:

Matrices	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté



**b) Principales caractéristiques mécaniques des résines :**

c) Tableau I.3 Quelques caractéristiques principales de résines [22].

Résine	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E$ (GPa)	$G$ (MPa)	$\nu$ (-)	$\sigma_r$ (MPa)	$T_{max}$ (°C)	$\alpha_t$ (10 <sup>-5</sup> K <sup>-1</sup> )
Époxyde	1,2	4,5	1600	0,4	130	90-200	0,3-1,6
Phénolique	1,3	3	1100	0,4	70	120-200	1,0-2,3
Uréthane	1,1	0,7-7	-	-	30	100	-
Polyester	1,2	4	1400	0,4	80	60-200	0,4-1,6
UF	1,2-1,5	6-10	-	-	40-80	140	0,7-1,1
PF	1,1-1,3	3-4	-	0,36	35-60	80-300	-
pMDI	1,24	-	-	-	-	230	-

**I.3.3 L'interphase**

L'interphase est constituée de la surface de contact (interface) fibre/matrice ainsi que de la région d'un volume fini prolongée dans la matrice. Elle peut être considérée comme un constituant du composite car elle possède des propriétés chimiques, physiques, et mécaniques différentes de celles de la fibre et de la matrice. L'interphase assure la liaison fibre/matrice et permet le transfert des contraintes de l'une à l'autre sans déplacement relatif. Cependant, l'hypothèse que l'interphase n'a pas d'épaisseur est souvent faite pour faciliter l'analyse micromécanique des composites [3].

**a) Rôle de l'interphase**

La région interfaciale joue un rôle essentiel dans la définition des caractéristiques des composites. Il est généralement reconnu qu'elle affecte ses propriétés mécaniques ultimes [5], [6], [7]–[8]. En fonction de la nature du traitement de surface, l'adhésion fibre-matrice via l'interphase peut être grandement impactée. Ainsi une modification de l'interphase peut changer les propriétés mécaniques fondamentales comme : la résistance à la traction/compression/cisaillement, la dureté et la durabilité du composite [5], [9], [10], [11], [12]

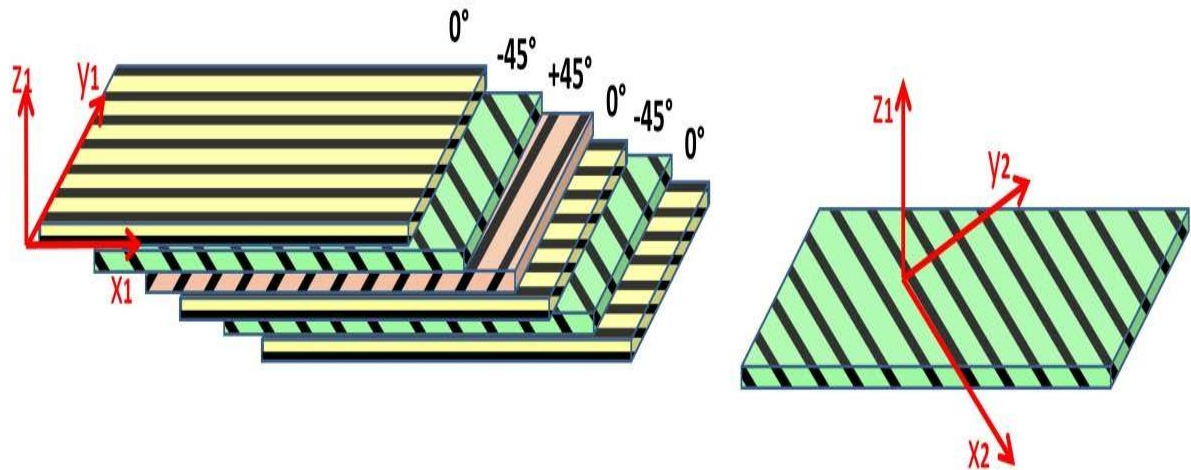
Au-delà des performances statiques il a été démontré que l'interphase permet essentiellement d'améliorer la résistance à la fatigue [13], [11], [14]. En général, les phénomènes mis en jeu sont assez complexes. Les premiers travaux dans ce domaine, obtenus principalement pour des UD, montrent qu'il existe trois mécanismes d'endommagement successifs pour une sollicitation en fatigue. En premier lieu il y a formation et croissance de fissures. Par la suite une décohésion fibre-matrice est observée qui conduit à la rupture du renfort. Ainsi une interphase de bonne qualité a pour effet de retarder la décohésion fibres-matrice améliorant ainsi les performances du matériau en fatigue [15]. Des travaux complémentaires ont montré que ces mécanismes d'endommagements sont liés à la ductilité de l'interphase [16], [17]. Dans le cas d'une faible adhésion interfaciale, les fissures de fatigue se localisent de façon privilégiée à l'interface. La ruine du matériau intervient par décohésion fibres-matrice sans aucune rupture de fibres [16], [18]. Les fissures se propagent le long de l'interphase ainsi la rupture de la fibre est retardée et la durabilité du matériau est améliorée [16]. Par ailleurs dans le cas d'une forte adhésion interfaciale, une amélioration significative de la durabilité des matériaux est aussi observée, en particulier lorsque le composite est sollicité en fatigue à des niveaux de contrainte très élevés [16]. Tous ces travaux montrent que le challenge actuel est de relier les caractéristiques microscopiques d'interphase aux propriétés mécaniques sous chargement statique et en fatigue.

### ***1.4 Composite final : le stratifié***

Le composite stratifié est une structure formée d'une superposition de «n» plis de renforts à fibres longues qui sont liés par de la résine polymère. L'orientation des différentes nappes est choisie en fonction des sollicitations mécaniques que la structure doit subir. Les propriétés globales du composite dépendent donc des propriétés matériaux de chaque pli. Les séquences d'empilements constituant le stratifié sont codifiées par une nomenclature qui décrit, selon la direction de l'épaisseur, la position et l'orientation de chaque pli du composite. Afin de préciser leur orientation, il faut définir un repère de référence associé au stratifié.

Ensuite on définit un repère local associé à chaque pli du stratifié.

Pour un composite à n plis à architecture identique, la description des empilements se fait du haut vers le bas en écrivant les angles d'orientations couche après couche. La figure I-8 donne un exemple de stratifié à cinq couches pour un composite à renfort  $[0^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ .



**Figure I. 9** : Partie gauche - stratifié composite  $[0^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ . Partie droite - un pli composite.

### ***1.5 Considérations d'usage des matériaux composites***

Dans la conception des produits, il est essentiel d'évaluer et comparer les composites avec les matériaux conventionnels pour bien choisir les matériaux. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

#### ***1.5.1 Les avantages***

Les avantages les plus cités des matériaux composites incluent :

##### ***a) Propriétés mécaniques adaptables***

Un stratifié composite fibreux est un empilement des plis élémentaires qui se comportent ensemble comme un élément structural. Un pli élémentaire est anisotrope, ou orthotrope dans la plupart des cas, avec la résistance et la rigidité dans la direction des fibres beaucoup plus élevées que dans d'autres directions. Il faut alors associer différentes orientations de fibres afin d'obtenir un stratifié capable de résister à diverses sollicitations.

Un avantage principal du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée corresponde aux chargements prévus. La part de matériau dans des directions non-sollicitées est donc minimisée.

***b) Haute résistance et haut module d'élasticité***

Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et le module des matériaux composites hauts performances permettent de répondre aux exigences de l'industrie aéronautique. D'autres industries en profitent également, par exemple la vitesse d'une balle de tennis est plus élevée avec des raquettes en carbone/époxy.

***c) Poids***

Les matériaux composites hauts performances ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent un gain de 10 à 30 % sur les éléments de structure [19]. Ce gain de masse permet d'employer des moteurs moins puissants. Ceux-ci consomment moins et permettent de réduire la taille des réservoirs de carburant pour le même cahier des charges de l'avion.

***d) Production***

Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle. Par exemple, un tronçon de fuselage qui réclame typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations est fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787 [19].

***e) Maintenance***

Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne. Par exemple, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans au lieu de dix ans sur un 777 [19].

***1.5.2 Les inconvénients***

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

### *a) Coût*

Les matériaux composites hauts performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

### *b) Conception et analyse*

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels.

Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micro mécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macro- mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres) [20].

### *c) Assemblage*

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration telle que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée [20]. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

### *d) Tolérance aux dommages*

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages [21].

### *I.6 Mise en œuvre des matériaux composites :*

Généralement le choix d'un procédé de moulage se fait en fonction de certains paramètres à savoir:

- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- Mise en forme à la géométrie de la pièce.

Durcissement du système :

- soit par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissables,
- soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

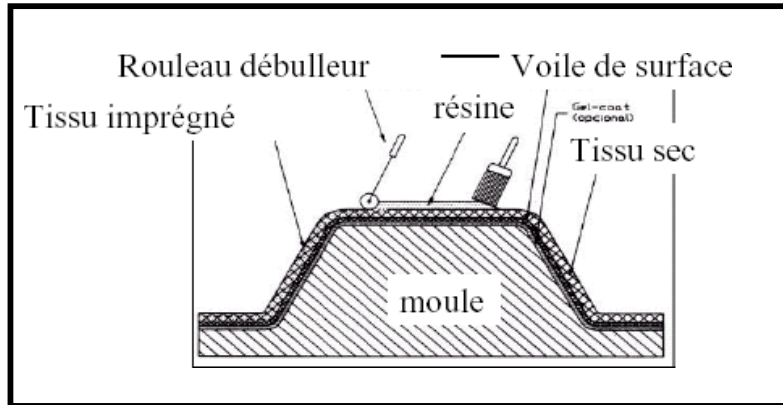
Les procédés les plus importants sont :

- Moulage par contact
- Moulage par projection simultanée
- Injection thermodurcissable BMC
- Compression thermodurcissable SMC
- Enroulement filamentaire (ou bobinage)

### ***1.6.1 Moulage au contact :***

Le principe consiste à disposer dans un moule les renforts (sous forme de mat ou de tissu) imprégnés manuellement d'une matrice thermodurcissable.

Les pièces de formes quelconques peuvent être réalisées avec une cadence très faible.

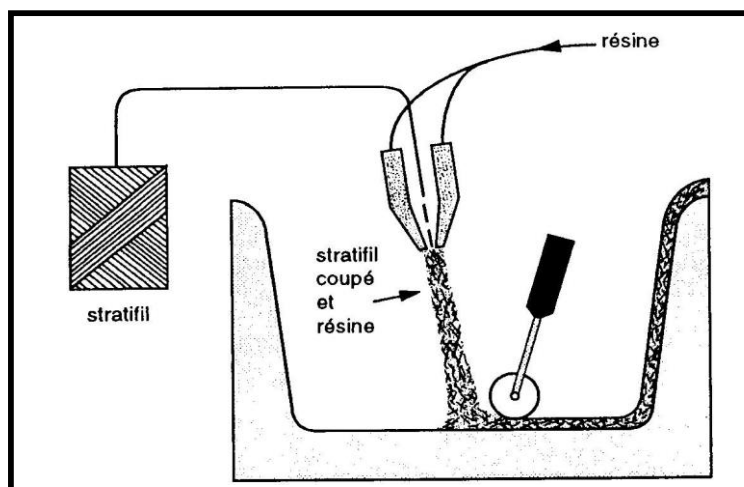


**Figure I.10 :** Moulage par contact

### ***1.6.2 Moulage par projection simultanée :***

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifil et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et ébullée au rouleau cannelé.

Le moulage par projection permet d'obtenir de grandes séries de pièces, avec un bas prix de revient.



**Figure I.11 :** Moulage par projection simultanée

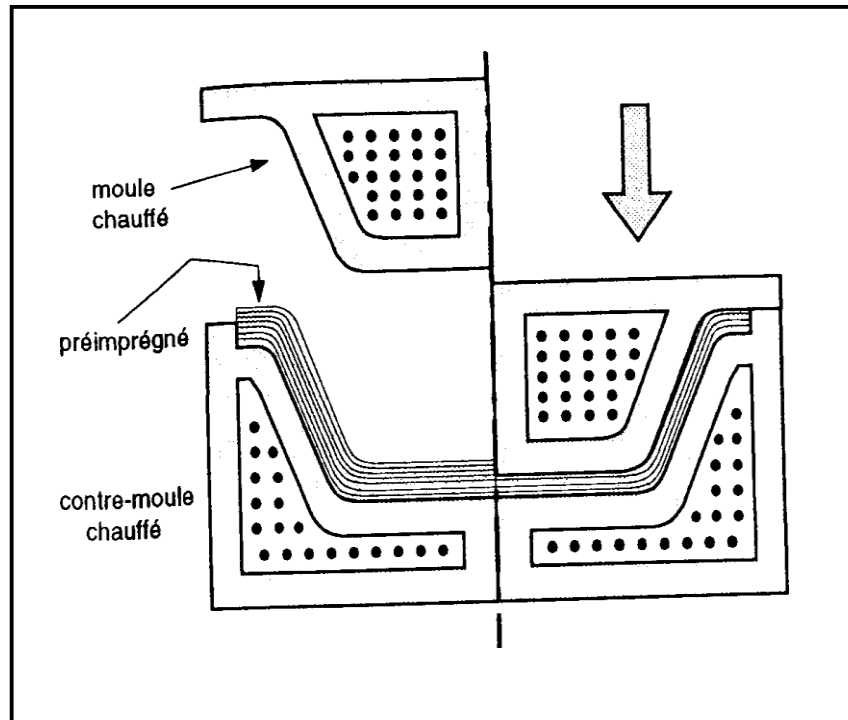
### ***I.6.3 Injection thermodurcissable BMC:*** (Bulk Molding Compound).

Le moulage du compound est réalisé entre moule et contre moule chauffé à température entre 140 à 170°C sous une pression de 50 à 100 bars.

#### ***Les avantages :***

réalisation de grandes séries, peu de finition.

Le compound : c'est de la résine, du fibre coupé et de la charge



**Figure I.12 :** Injection thermodurcissable BMC

### ***I.6.4 Compression thermodurcissable SMC:*** (Sheet Molding Compound)

Le principe consiste à déposer des feuilles de préimprégnés dans un contre moule chauffé, de comprimer le matériau avec un moule chauffé, polymérisation puis éjection de la pièce.

Les avantages : coût matière, propriétés mécaniques et thermiques. Les limites sont l'aspect, le dimensionnement des presses et la finition.



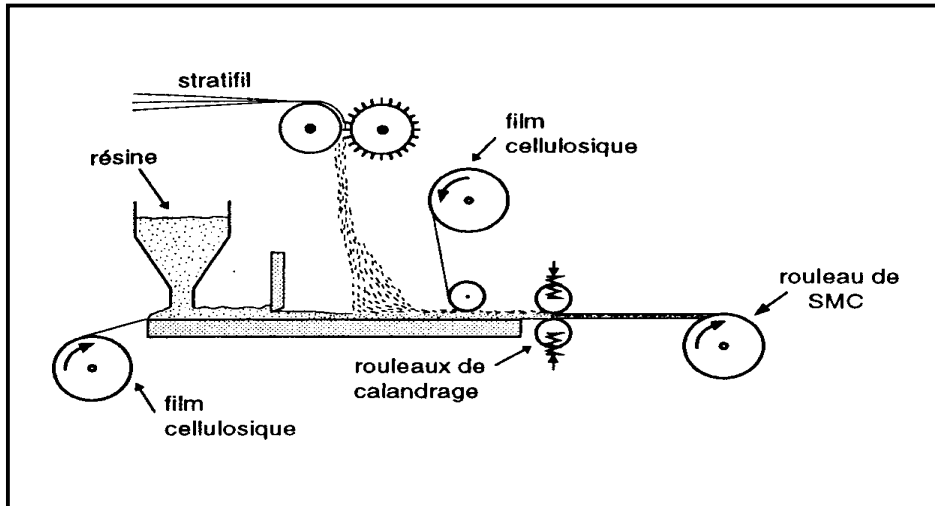


Figure I.13 : Compression thermodurcissable SMC

### I.6.5 Enroulement filamentaire (ou bobinage):

Technologie pour les HP. Le principe consiste en un enroulement sous tension sur un mandrin tournant autour de son axe de fibres continues préalablement imprégnées d'un liant. Les avantages sont la disposition optimale des renforts, les très bonnes propriétés mécaniques, possibilité de réaliser des pièces de grandes dimensions avec des surfaces internes lisses.

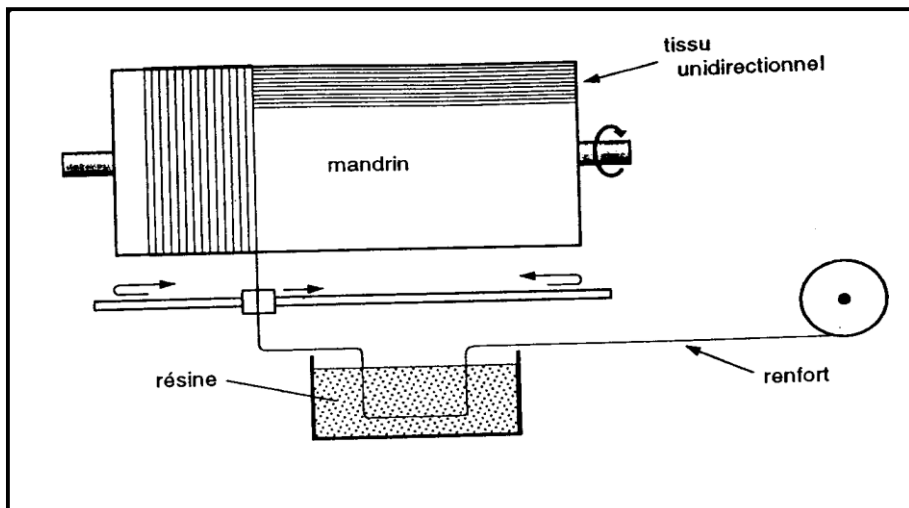


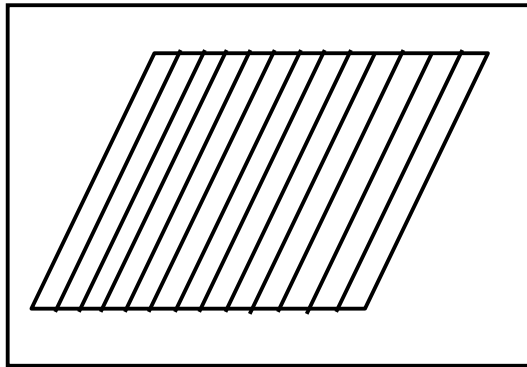
Figure I.14 : Enroulement filamentaire (ou bobinage)

Il existe d'autres procédés : pultrusion, drapage en autoclave, centrifugation, stratification en continu, thermoformage sous vide et estampage...

**I.7 Architecture des matériaux composites :**

**I.7 .1 Monocouche:**

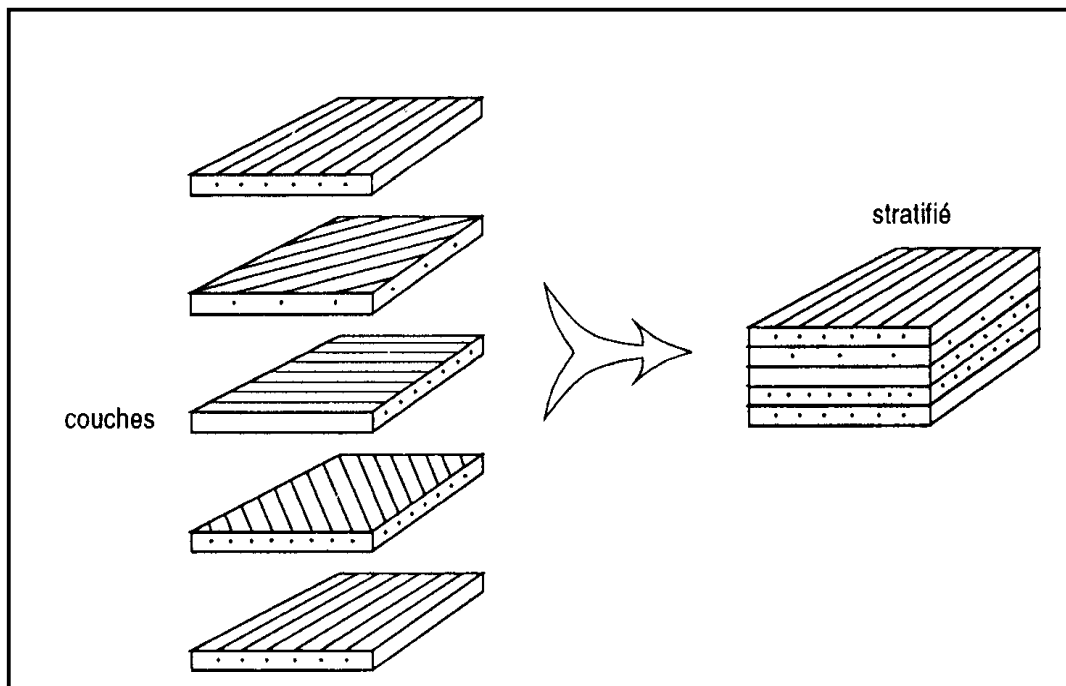
Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissus et mat.



**Figure I.15:** Couche de composite

**I.7 .2 Stratifiés :**

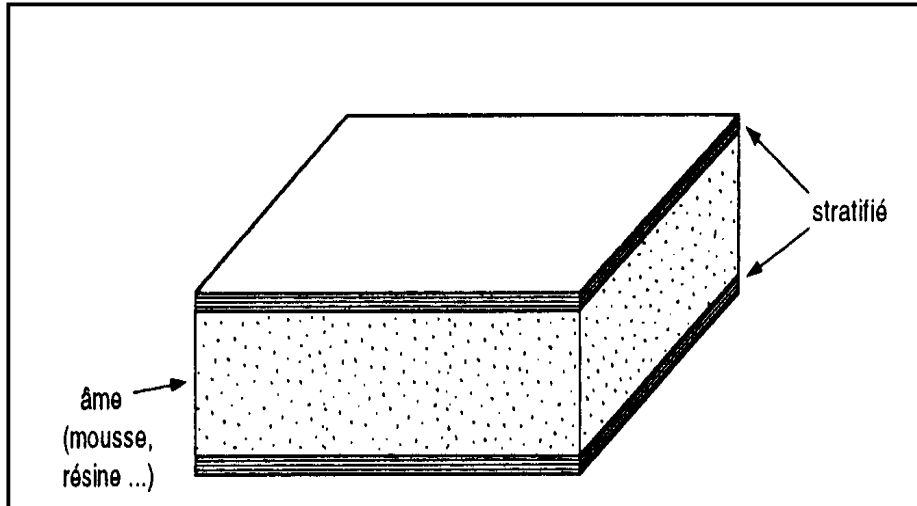
Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifiles, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines.



**Figure I.16 :** Constitution d'un stratifié

***I.7.3 Sandwichs :***

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

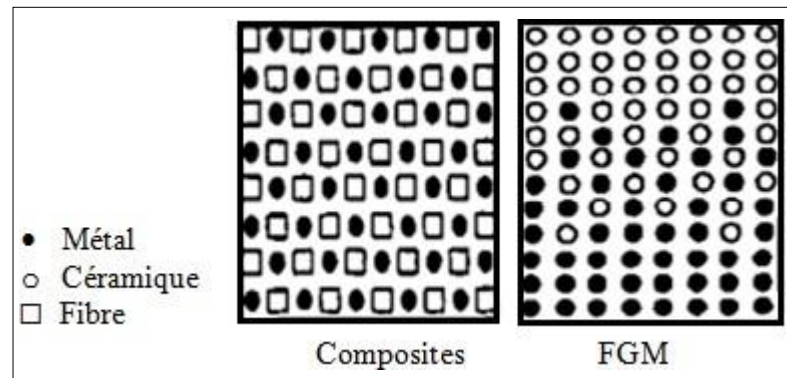


**Figure I.17 :** Matériaux sandwichs à âmes pleines

## ***1.8 Matériaux à gradients de propriétés***

### ***1.8.1 Introduction***

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM); un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscités beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes.



**Figure I.18** Configurations des composites et des FGM

Le concept de "Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [23].

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc....[24]

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux [25].

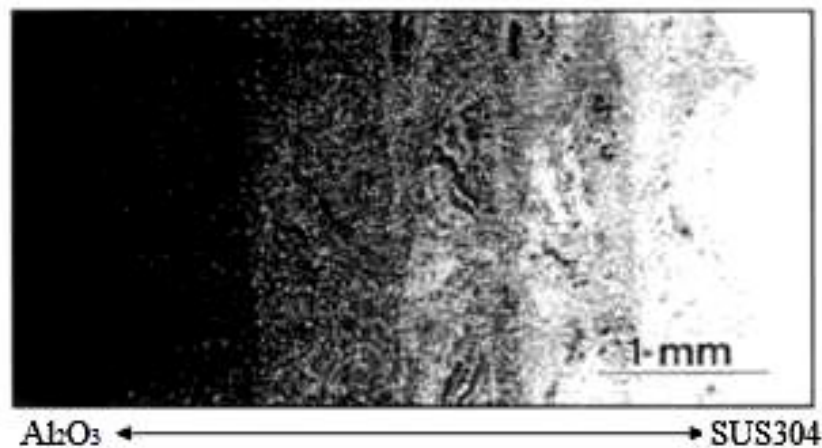
Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels [23].

### I.8.2 Conception des structures FGM

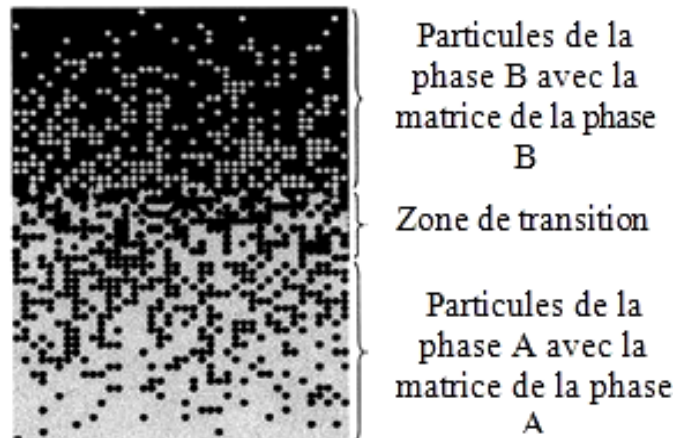
Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures a l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

La (Fig I.19) montre une micrographie par microscope électronique à balayage de la section transversale d'une billette en FGM ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -SUS304).

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases micro-structurelles ont des fonctions différentes, et le matériau à gradient fonctionnel global atteint le statut multi structural par gradation de leurs propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes. Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique.



**Figure I.19** Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -SUS304)



**Figure I.20** Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [26]

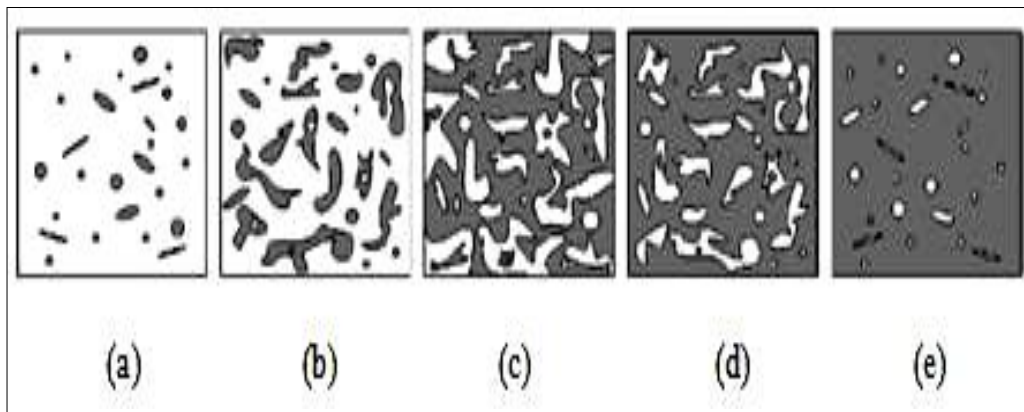
Un FGM typique, avec un effet élevé de couplage flexion-extension est illustré dans la (Fig I.20) [26], où les particules sphériques ou presque sphériques sont intégrées au sein d'une matrice isotrope.

### ***1.8.3 Le gradient***

Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des FGM varient non seulement avec leur composition, mais dépendent également de la connectivité de la structure du réseau interne. (Fig I.21) montre une représentation schématique de la microstructure commune produisant dans un matériau tel que le contenu de la deuxième phase est augmentée.

À des fractions de faible volume, la seconde phase existe sous forme des particules isolées dispersées dans une matrice (a). Comme le contenu de la deuxième phase augmente, les particules commencent à avoir des contacts et former des amas agglomérés (b).

Comme il augmente encore, une transition microstructurale critique a lieu, où la deuxième phase n'est plus dispersée, mais devient plutôt reliés entre eux sur de longues distances (c, d, e). La transition a un effet profond sur les propriétés des matériaux, par exemple, conductivité thermique ou électrique, et un petit changement de composition va donc se traduire par une variation distincte des propriétés [27].



**Figure I.21** Changement schématique de la microstructure dans un profil FGM

#### ***1.8.4 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel***

Plusieurs FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle est généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase graduellement varie dans la direction de gradation, les propriétés effectives de FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les FGM comme modèles : Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire, couche quasi-homogène de céramique-métal (Fig I.22.a) ; Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée (Fig I.22.b).

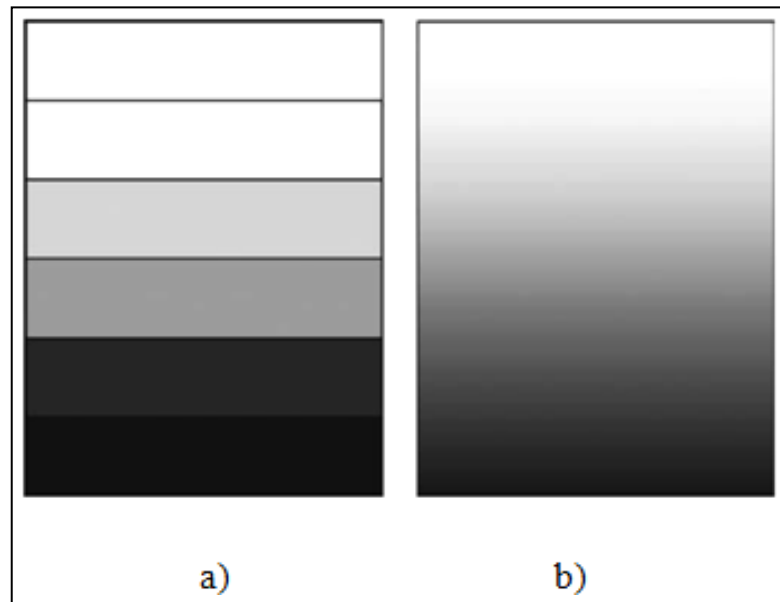


Figure I.22 Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel :  
a) première approche; b) deuxième approche

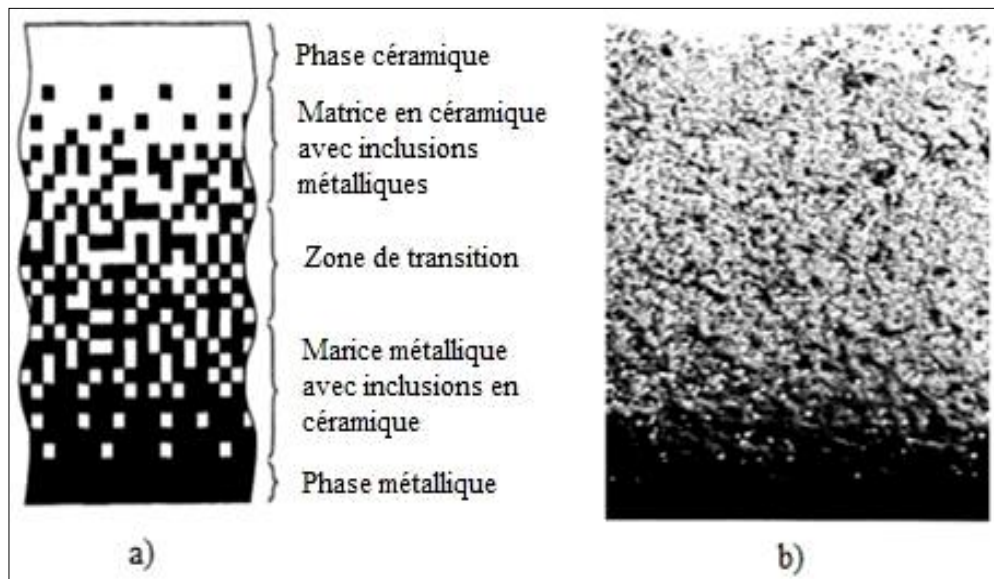


Figure I.23 Variation continue de la microstructure : a) (schématisée) ; b) (photo)

La variation continue des propriétés (Fig I.23) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- Bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Pendant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

### ***1.9 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM***

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (I-1)$$

Où et sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif  $i$  avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (\text{I-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général . Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (\text{I-3})$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{I-4})$$

### ***1.9.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM***

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V_c(Z) = \left( \frac{Z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I-5})$$

Où  $p$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale à été définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(Z) = (E_c - E_m) V_c(Z) + E_m \quad (\text{I-6})$$

Où  $E_c$  et  $E_m$  sont respectivement les modules de young de la surface supérieure ( $Z = +h/2$ ) et de la surface inférieure ( $Z = -h/2$ ) dz la pouter FGM.

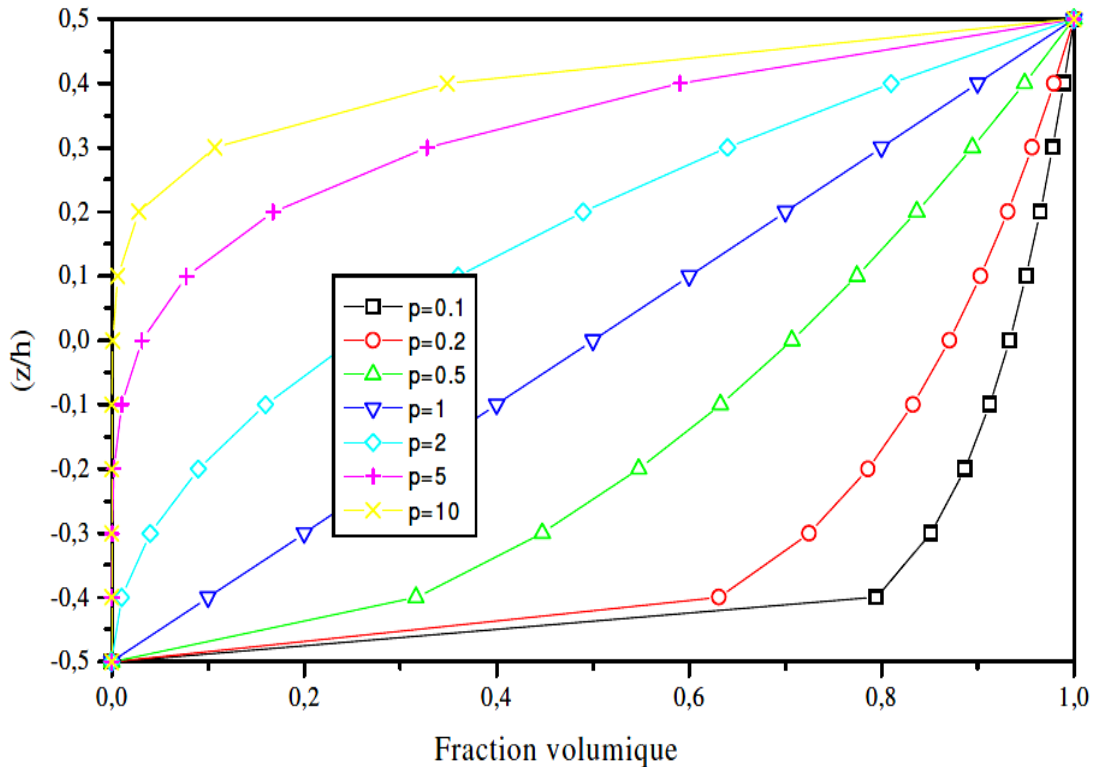


Figure I.24 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (Fig I.24). Il apparaît clairement que cette dernière change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$

### 1.9.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chi et al [28] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_c(Z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + Z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } : -h/2 \leq Z \leq 0 \quad (\text{I-7a})$$

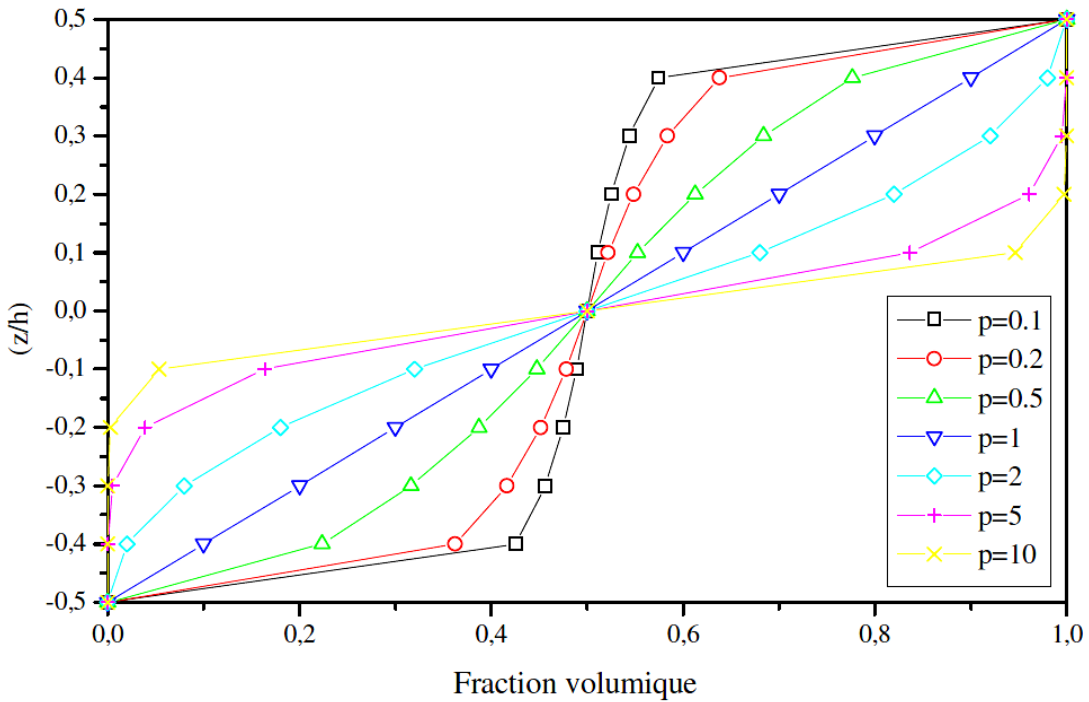
$$V_m(Z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - Z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } : 0 \leq Z \leq h/2 \quad (\text{I-7b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(Z) = V_c(Z)E_c + [1 - V_c(Z)]E_m \quad \text{Pour : } -h/2 \leq Z \leq 0 \quad (\text{I-8a})$$

$$E(Z) = V_m(Z)E_c + [1 - V_m(Z)]E_m \quad \text{Pour : } 0 \leq Z \leq h/2 \quad (\text{I-8b})$$

La (Fig I.25) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-7a) et (I-7b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S- FGM).



**Figure I.25** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM)

### 1.9.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

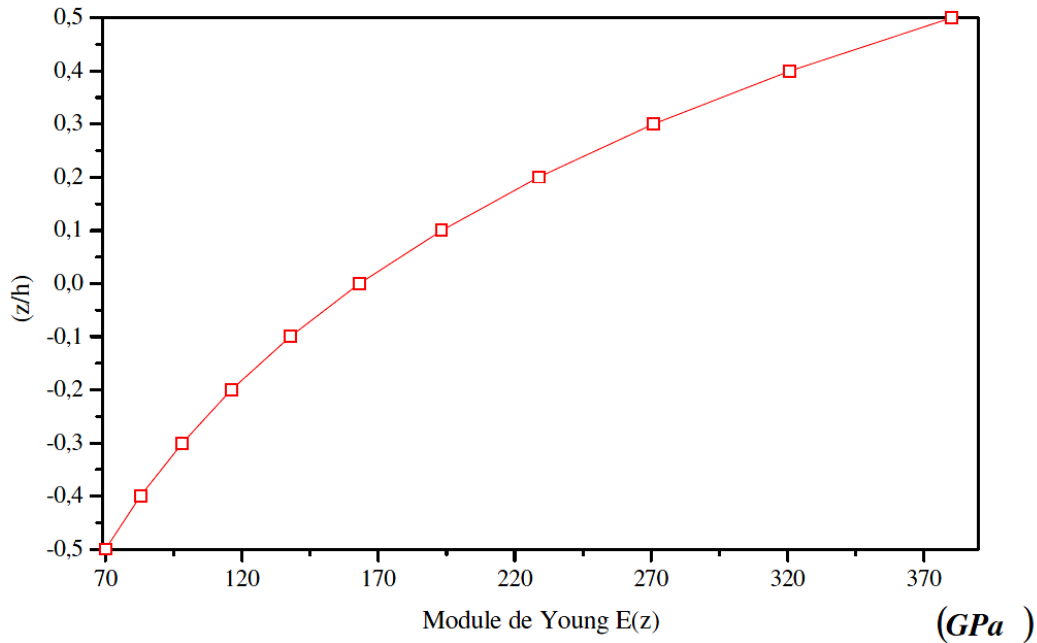
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [29]

$$E(Z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I-9a})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right) \quad (\text{I-9b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée

sur la  
(Fig  
I.26).


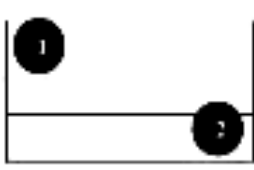
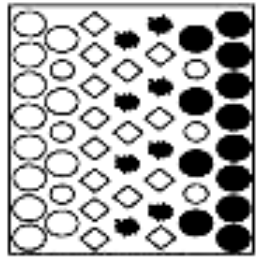
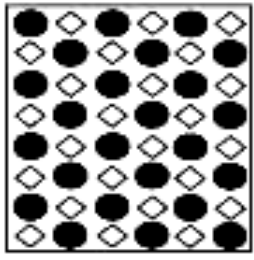


**Figure I.26** Variation du module de Young dans une plaque (E-FGM)

### ***I.10 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites***

#### ***Traditionnels :***

On peut facilement comparer les FGM aux composites car ils partent du même principe, si on prend les FGM on peut généralement dire que ce sont des matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non homogènes, et leur changement continue dans la composition et donc dans la microstructure. Dans certains cas on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ◈</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Figure I.27** : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [30]

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié, a une frontière sur l'interface de deux matériaux.

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

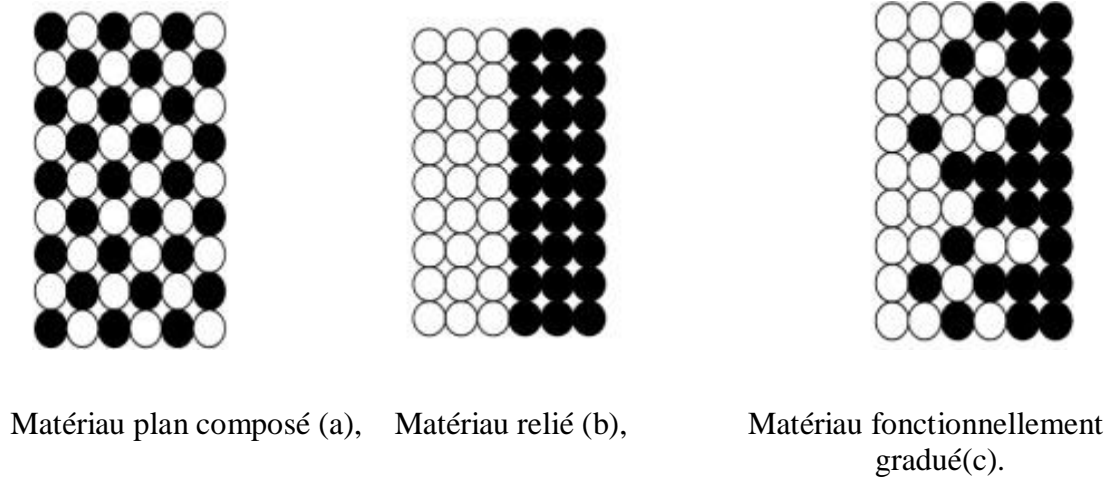


Figure I.28 : Différentes schématisations de matériaux

### ***1.11 Avantages et inconvénients des FGM :***

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

#### ***1.11.1 Avantages des FGM :***

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.

- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les sur faces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

### ***1.11.2 Inconvénients des FGM :***

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T1) et une céramique avec une température de fusion (T2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T1 \ll T2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [31].

### ***1.12 Développements récents et défis des FGM***

Dans le cas de la plupart des MGF, une propriété matérielle varie dans le sens de l'épaisseur [32]. Cependant, les applications modernes peuvent exiger des matériaux FG dans lesquels les propriétés matérielles dans l'épaisseur et les directions axiales [33]. Récemment, un matériau de gradient dans lequel les propriétés varient dans les deux directions sont également développés et étudiés en profondeur [34, 35].

Ces matériaux intelligents sont connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (BDFGM).

La technique AM basée sur le dépôt de métaux au laser est la plus appropriée pour produire de tels BDFGM [36].



## **Chapitre I : Les matériaux composites et les matériaux à gradients fonctionnel**

---

Bien que d'importants progrès technologiques aient été réalisés dans le domaine des FGM, quelques problèmes critiques doivent encore être résolus.

Une base de données correcte des FGM en termes de paramètres et de tests n'est toujours pas disponible.

La méthode d'essai et de mesure conventionnelle peut ne pas convenir pour évaluer les performances des MGF modernes, de sorte que des développements de méthodes d'essai avancées sont nécessaires [36].

La plupart des techniques de traitement des FGM sont très coûteuses, de sorte qu'une technique de traitement à faible coût qui peut produire en masse des MGF de grande taille et complexes reste encore un défi.

Le choix du matériau approprié pour l'application prévue est le défi immédiat et direct pour le développement futur de la technologie dans le domaine de la recherche sur les FGM.

### ***1.13 Conclusion***

Ce Chapitre présente une présentation générale sur les matériaux composites et les matériaux à gradients de propriétés, le rôle des différentes phases (fibre, interface, matrice...) y est faite avec ses avantages et ses inconvénients, leur conception ainsi que leurs différents domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Le changement continu dans la composition est donc dans la microstructure des matériaux, distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM.

***CHAPITRE II  
GÉNÉRALITÉ SUR LE  
COMPORTEMENT  
ÉLASTIQUE  
DU MATÉRIAU***

### **INTRODUCTION**

Le comportement mécanique d'un matériau est fonction des forces extérieures appliquées et traduit les évolutions de la cohésion de ces atomes.

Ainsi, les propriétés mécaniques dépendent de la température d'utilisation, de l'état de surface, des conditions d'application des efforts, de la vitesse de déformation.

Les propriétés mécaniques sont déterminées au moyen d'essais normalisés. Les principales propriétés mécaniques sont :

- Module d'élasticité
- Limite d'élasticité, écrouissage, ductilité
- Viscosité, vitesse de fluage, amortissement
- Charge à la rupture, résistance à la fatigue, à l'usure

### **Loi de Hooke**

La contrainte (en MPa) est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{P}{A_0} \quad (\text{IIa})$$

La déformation (sans unité) est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\Delta_x}{L_0} \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta_y}{L_0} \quad (\text{IIb})$$

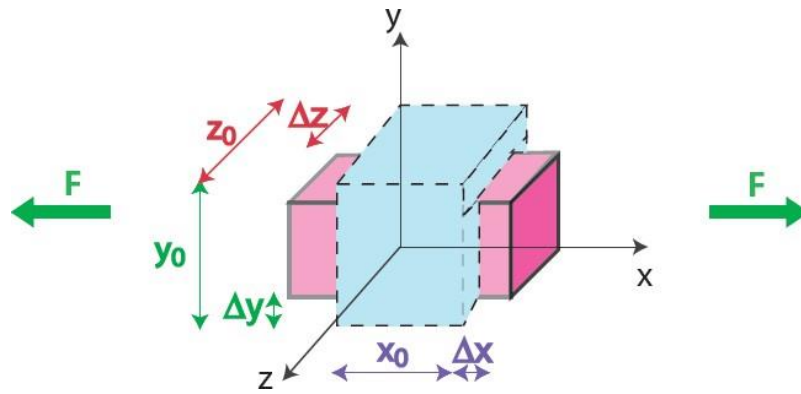
La relation contrainte-déformation en élasticité linéaire isotrope est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{IIc})$$

Où E est le module de Young (en GPa).

### **Coefficient de Poisson**

Dimensions avant déformation :  $x_0, y_0, z_0$

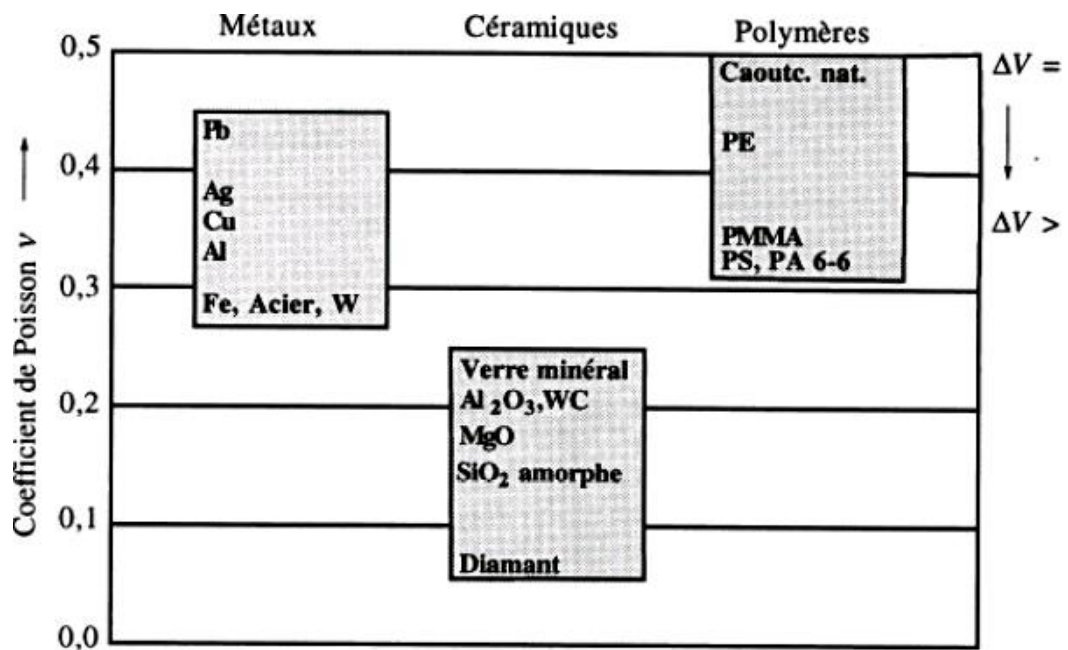


$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\sigma_x}{E}$$

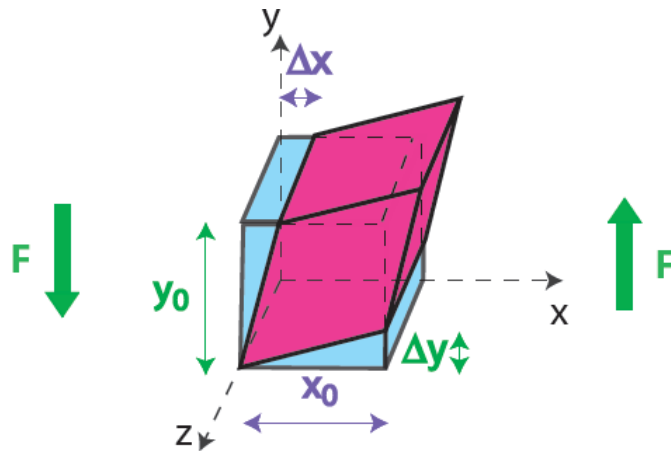
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\Delta y}{y_0} \\ \epsilon_z &= \frac{\Delta z}{z_0} \end{aligned} \right\} \text{avec } \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

$\nu$  (sans dimension) : est le coefficient de poisson et représente une autre constante caractéristique du matériau

$$\nu = \frac{\text{contraction transversale unitaire}}{\text{allongement axial unitaire}}$$



## Coefficients de Poisson de différents matériaux

**Module de cisaillement**

$\gamma_{xy}$  : Déformation par distorsion

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta_y}{x_0} = \frac{\Delta_x}{y_0} = \frac{T_{xy}}{2G} \Rightarrow T_{xy} = 2G\gamma_{xy}$$

G: module de cisaillement

Dans le cas d'un milieu isotrope, le module de cisaillement est lié au module d'Young et au coefficient de Poisson par la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

**II.1 Généralité sur le comportement élastique du matériau :**

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée et dans un intervalle donné de déformation, un comportement élastique linéaire.

Dans le domaine de linéarité et en admettant que la température est uniforme dans tout le volume considéré, les matériaux composites se déforment comme les autres matériaux traditionnels.

**II.1.1 Elasticité linéaire:**

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad \text{II.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \sigma_{\alpha} & \varepsilon_{ii} &= \varepsilon_{\alpha} & \alpha &= 1 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{\beta} & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{\beta} & \beta &= 9 - i - j \end{aligned}$$

Ou sous forme condensée :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$  II.2

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C, symétrique.

Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général par 21 coefficients indépendants.

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme inverse, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{Avec} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \quad \text{II.3}$$

S : matrice de flexibilité ou de souplesse (symétrique).

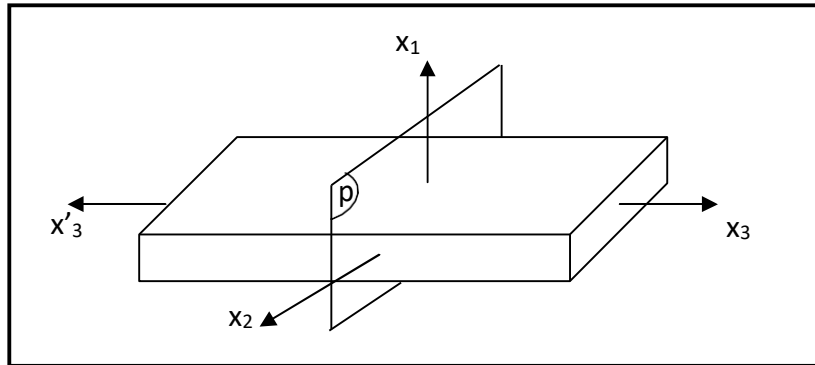
**II.1.2 Matériau anisotrope :**

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou

matériau anisotrope.

**II.1.3 Matériau monoclinique :**

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.



**Figure II.1 : Plan de symétrie**

La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

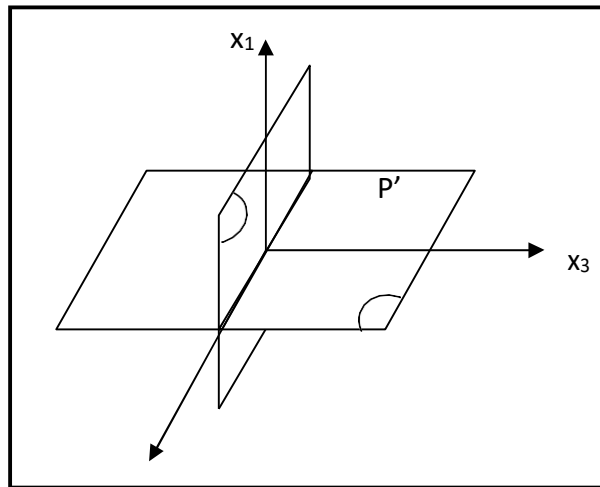
$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\
 C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\
 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\
 C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix} \quad \text{II.4}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

**II.1.4 Matériau orthotrope :**

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence

du troisième.



**Figure II.2 : Matériau orthotrope**

La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme:

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix} \quad \text{II.5}$$

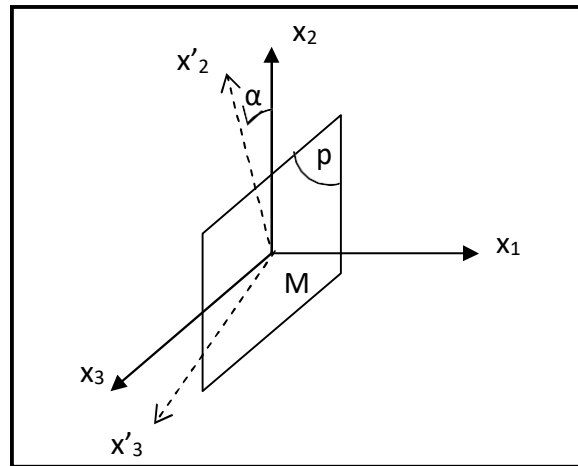
La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

### ***II.1.5 Matériau orthotrope à isotrope transverse :***

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de



cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou souplesse).



**Figure II.3 :** Plan d'isotropie La matrice de rigidité s'écrit donc suivant La matrice de souplesse a la même forme.

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix} \quad \text{II.6}$$

Les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

### **II.1.6 Matériau isotrope :**

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées.

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})
 \end{bmatrix} \quad \text{II.7}$$

La matrice de souplesse a la même forme.

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases}
 C_{11} = \lambda + 2\mu \\
 C_{12} = \lambda
 \end{cases} \quad \text{II.8}$$

***CHAPITRE III***

---

**THÉORIES DES  
PLAQUES**

## Chapitre III Théorie des plaques

### III.1 Introduction :

Les plaques sont des structures très utilisées dans le domaine du génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle (Levy, 1877; Whitney, 1969; Srinivas et Rao, 1970; Srinivas et *al.*, 1970; Praveen et Reddy, 1998; Javaheri et Eslami, 2002; Yang et *al.*, 2004; Woo et *al.*, 2006; Ganapathi et *al.*, 2006; Abrate, 2008; Kim et *al.*, 2008; Prakash et *al.*, 2009; Mohammadi et *al.*, 2010; Hosseini- Hashemi et *al.*, 2010; Mohammadi et *al.*, 2010; Akbarzadeh et *al.*, 2011; Ameer et *al.*, 2011; El Meiche et *al.*, 2011; Merdaci et *al.*, 2011; Hu et Zhang, 2011; Mantari et *al.*, 2012; Tounsi et *al.*, 2013; Sadoune et *al.*, 2014; Pradhan, 2014; Bourada et *al.*, 2016; Tounsi et *al.*, 2016; Bellifa et *al.*, 2016 et Bourada et *al.*, 2018).

Afin de résoudre les problèmes des structures mécaniques ayant comme éléments structuraux des plaques dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement dynamique et statique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Nous présentons dans ce chapitre des divers modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

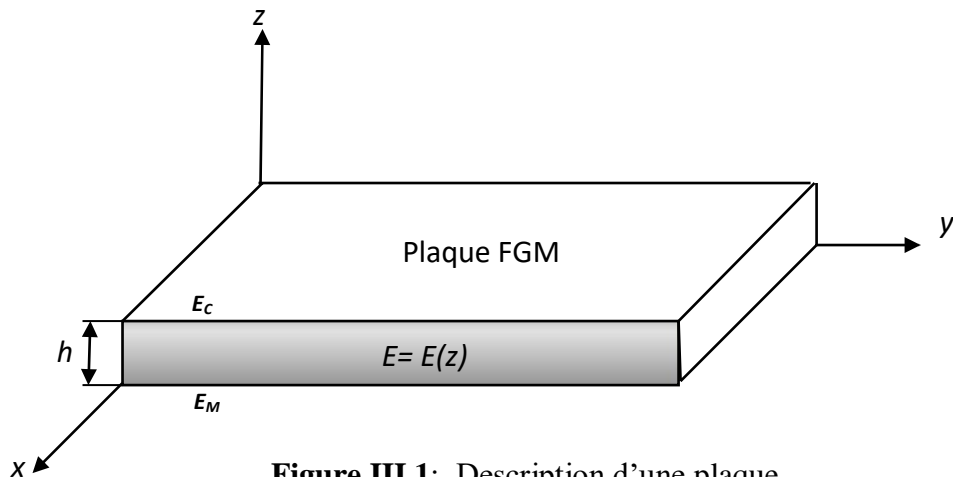
définition d'une plaque:

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface plane (plan  $x, y$ ) et par une petite épaisseur notée ( $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur, voir Fig. III.1), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou bien non homogène. Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

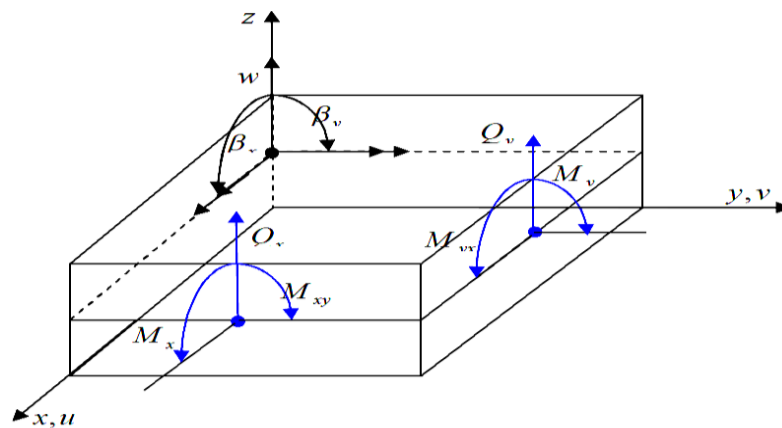
- Les plaques isotropes: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).
- Les plaques orthotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres

élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art (Batoz, 1990).

- Les plaques anisotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.



**Figure III.1:** Description d'une plaque.



**Figure III.2:** Conventions générales

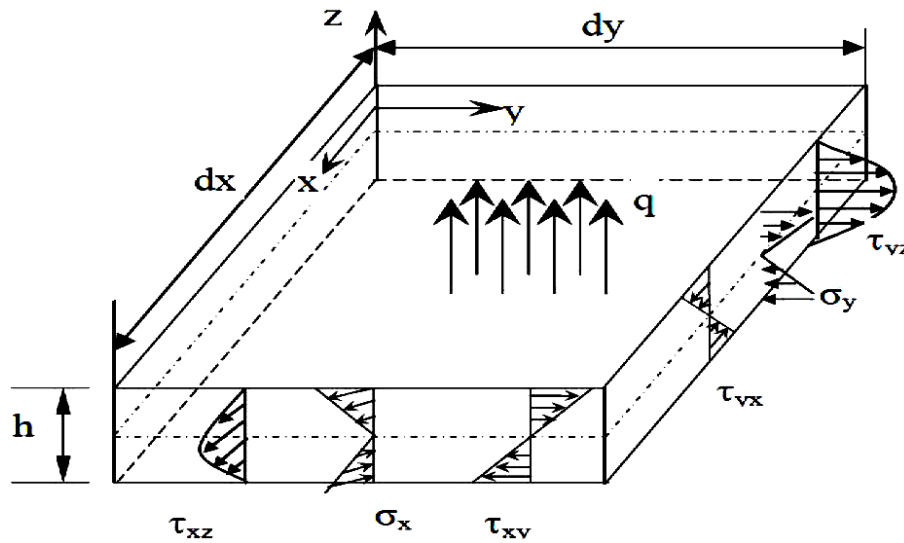


Figure III.3: contraintes agissant sur un element differentiel de plaque homogène

### III.2 Les modèles analytiques des plaques FGM :

#### III.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

Cette théorie est basé sur les hypothèses de Kirchhoff 1950, dans lesquelles les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées et La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Fig. III.4) ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Donc dans ce cas-là une distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire (Reissner, 1961).

Plusieurs investigations ont publié en utilisant cette théorie telle que (Yanga et Shen, 2003 ;Ghannadpour et Alinia, 2009; Chakraverty et Pradhan, 2014;Ruan et Wang, 2014; Loy et al., 1999; Du et al., 2014 et Ebrahimi et Najafizadeh,2014).

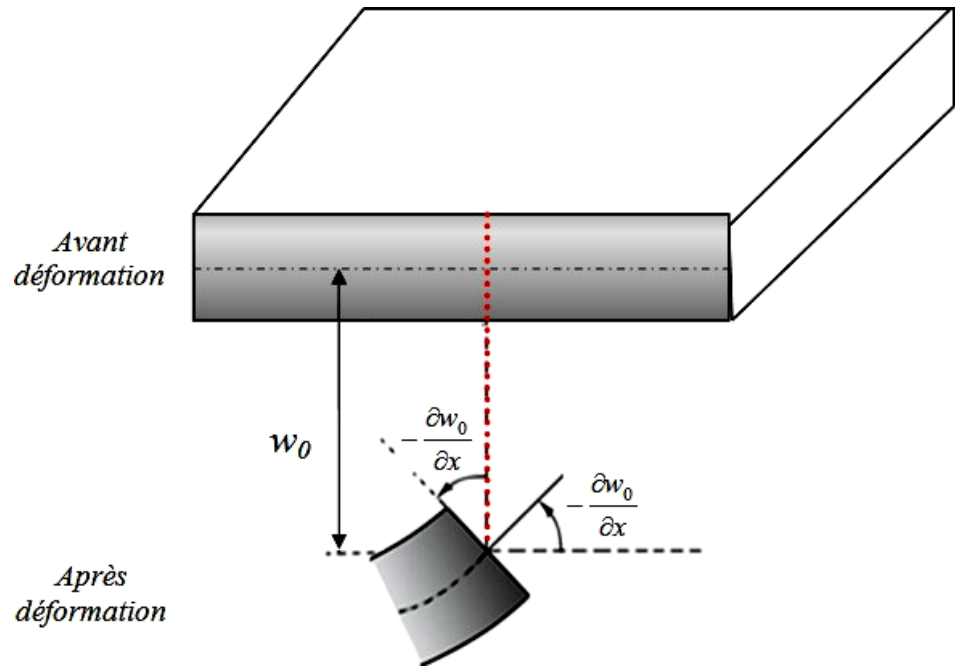
En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus (Kirchhoff, 1950), le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Figure III.4 :** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'Eq. (III.1) est obtenu comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2a})$$

avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2b})$$

Puisque la CPT est limité et donne des résultats non précis pour les plaques semi-épaisses et épaisses (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) ont prolongé la théorie classique des plaques minces (CPT) en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

### **III.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :**

Dans cette théorie le cisaillement transverse est inclus. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque (Fig. III.5), ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement «  $ks$  ». La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs (Whitney, 1969 ; Reddy, 1979; Reddy, 1998; Praveen and Reddy, 1998;Kant and Swaminathan, 2001; Della et Venini, 2004; Chen, 2005; Hosseini-Hashemi et al., 2010,Bouazza et al., 2010; Valizadeh et al.,2013;MemarArdestani et al., 2014; Meksi et al.,2015; Mantari and Granados,2015 ;Bellifa et al., 2016 et Hadji et al., 2016)

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

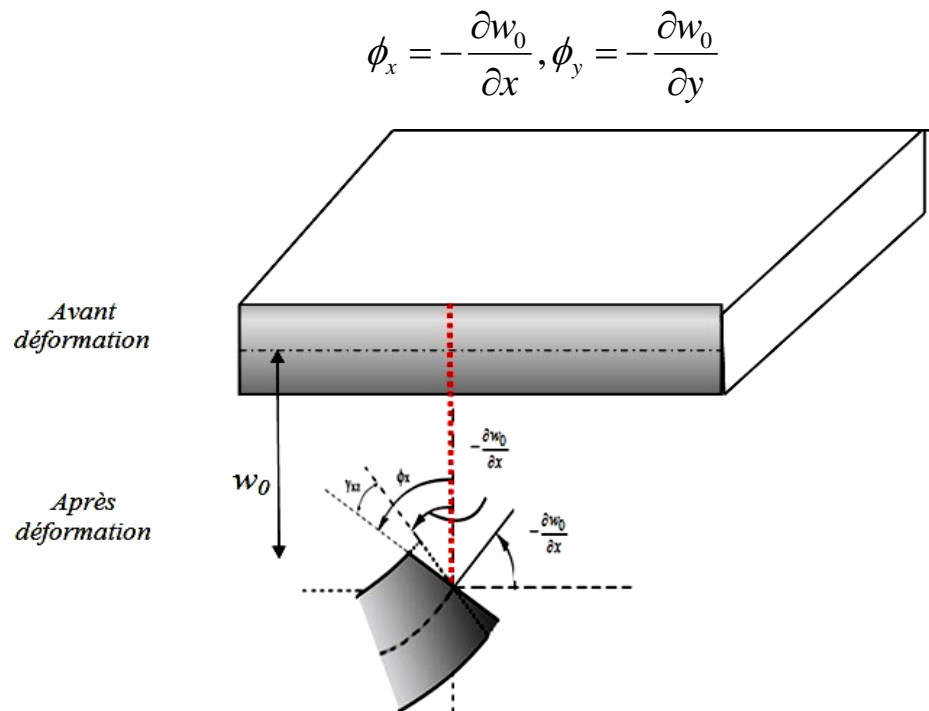
$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y), \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y), \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.3c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement



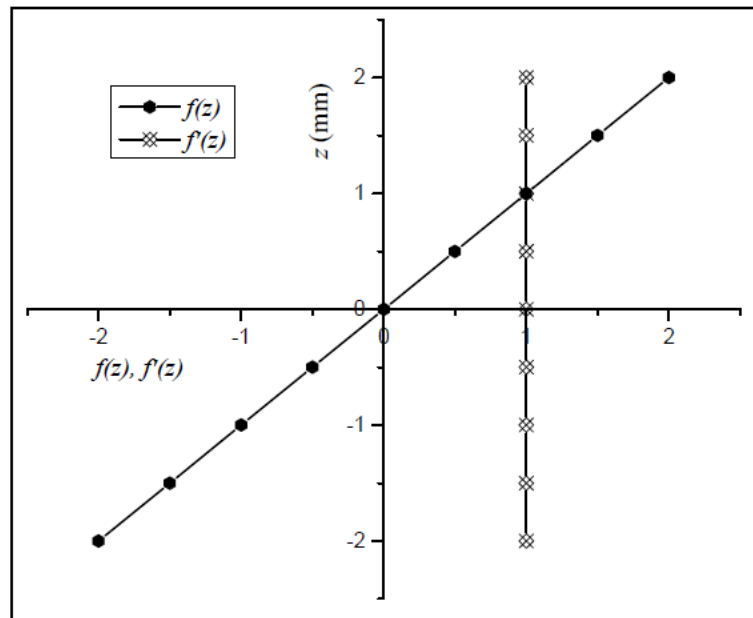
**Figure III.5:** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.



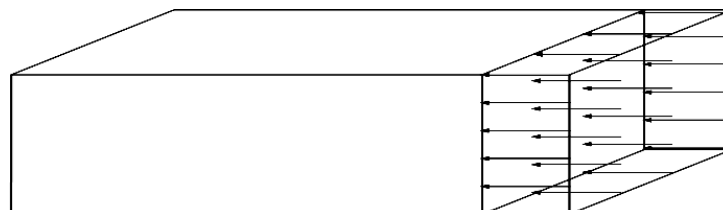
Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'Eqs. (III.4) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Les contraintes de cisaillement et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur figures (III.6 et III.7)



**Figure III.6** Variation de la fonction de gauchissement  $f(z) = z$  et  $f'(z)$  suivant l'épaisseur.



**Figure III.7** la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSĐT.

Pour éviter l'introduction à chaque fois le facteur de correction, qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur.

### ***III.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :***

La théorie d'ordre élevé (HSDT) est basée l'hypothèse de la section plane et perpendiculaire à l'axe moyenne avant déformation perd sa perpendicularité et sa planéité après déformation, dans ce cas la distribution est non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles ne nécessitent pas l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al., 1949; Naghdi, 1957; Reissner, 1975; Reddy, 1984; Soldatos 1992 ; Kantet Swaminathan, 2002 ; Zenkour 2007 ; Akavci 2010 ; Mantari et al. 2011 ; Mantari et Guedes Soares 2012 ; Mantari et Guedes Soares 2012 ; Mantari et Guedes Soares 2013 ; Ahmed, 2014 ; Akavci 2014 ; Bousahla et al., 2014 ; Mahi et al. 2014 ; Meradjah et al., 2015 ; Attia et al., 2015 ; Ait Atmane et al., 2015 ; Merazi et al., 2015 ; Bakora and Tounsi, 2015; Tebboune et al., 2015; Larbi Chaht et al., 2015; Nguyen et al., 2015; Bourada et al., 2015; Mahi et al., 2015; Chikh et al., 2016; Eltaher et al., 2016; Bourada et al., 2016; Bounouara et al., 2016; Mouaici et al., 2016; Beldjelili et al., 2016 et Bennoun et al., 2016 ).

Le champ de déplacement de cette théorie (HSDT) est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \quad \text{(III.5a)}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \quad \text{(III.5b)}$$

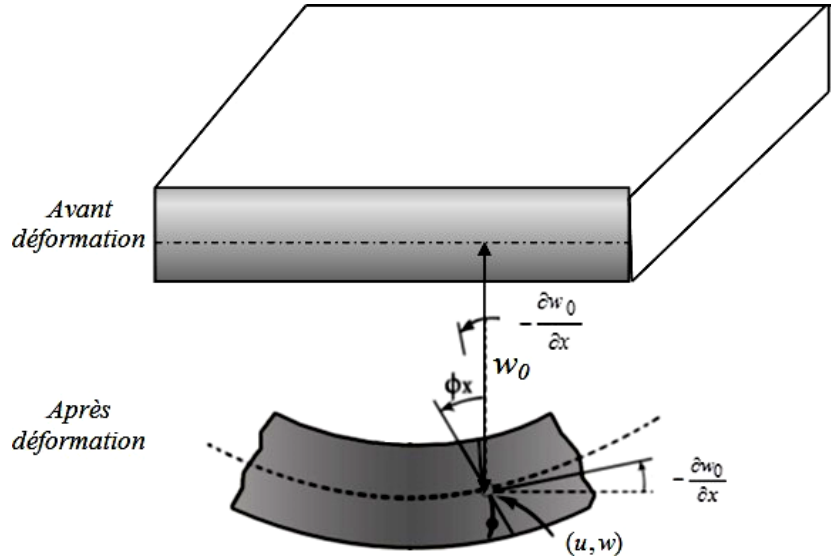
$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad \text{(III.5c)}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des Axes  $y$  et  $x$ , respectivement

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$  est. une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories

correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$ .



**Figure III.8** Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (l'Eqs. III.5) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.6a})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.6b})$$

et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.6c})$$

oici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes  $f(z)$ . Dans ce qui suit, nous allons présenter ces modèles de fonction de gauchissement qui assure la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces libres de la plaque.

Le premier modèle est celle de Reddy, (1997,1999):

$$f(z) = Z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} Z^2 \right) \quad (\text{III.7})$$

Dans ce modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Ce qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Elasticité 3D).

Le deuxième modèle est de Touratier (1991), une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite dans un modèle sinus (SSDT) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, ce modèle (SSDT) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi Z}{h} \quad (\text{III.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (SSDT) prennent une forme Co-sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Le troisième modèle exponentielle a été développée par Karama et al., (2003) (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) est obtenue en prenant :

$$f(z) = Z.e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.9})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z, alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

La quatrième version est hyperbolique (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al., (2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} Z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{h}.Z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \quad (\text{III.10})$$

La cinquième est de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = Z.\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

La sixième est d'ElMeiche et al. (2011) avec ;

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi.z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \quad (\text{III.12})$$

### ***III.2.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques(RPT) :***

Cette nouvelle théorie raffiné a été développé par Shimpi (2002) pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Ce modèle est similaire avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments et ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas (HSDT) classique, avec une distribution parabolique des contraintes cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Plusieurs chercheurs ont utilisé ce modèle tel que (Ait Atmane et al.,2010 ; Thai et Kim, 2010 et 2011 et Hadji et al.,2011).

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.13a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.13b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.13c})$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de la théorie des plaques raffiné (l'Eqs. II.13) peut être obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.14a})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} -\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ -\frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix},$$

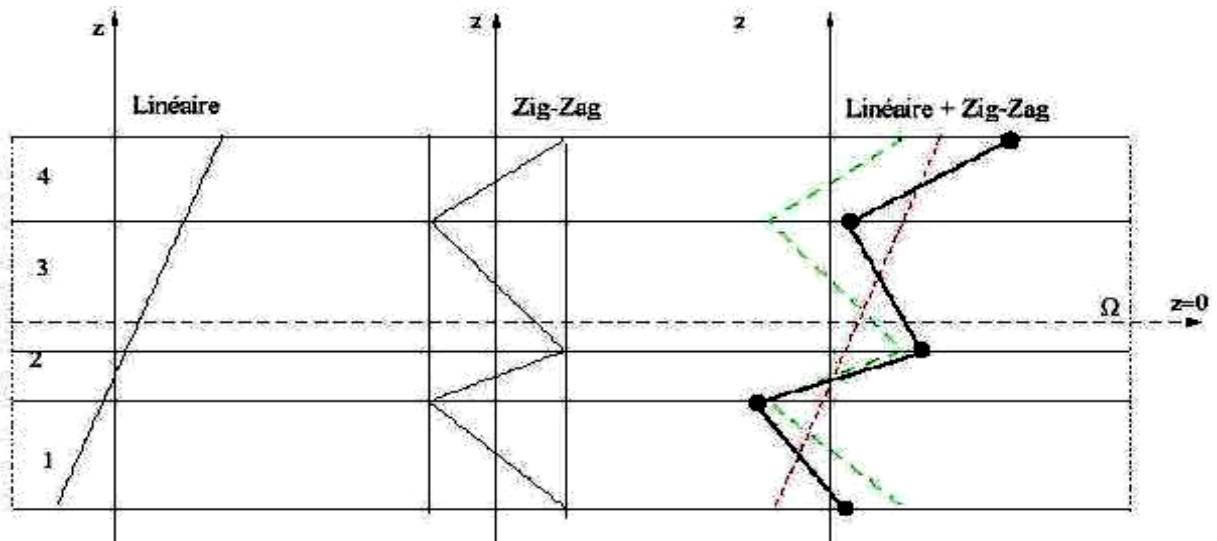
$$(\text{III.14b})$$

et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.14c})$$

### **III.2.5 Théorie de zig-zag :**

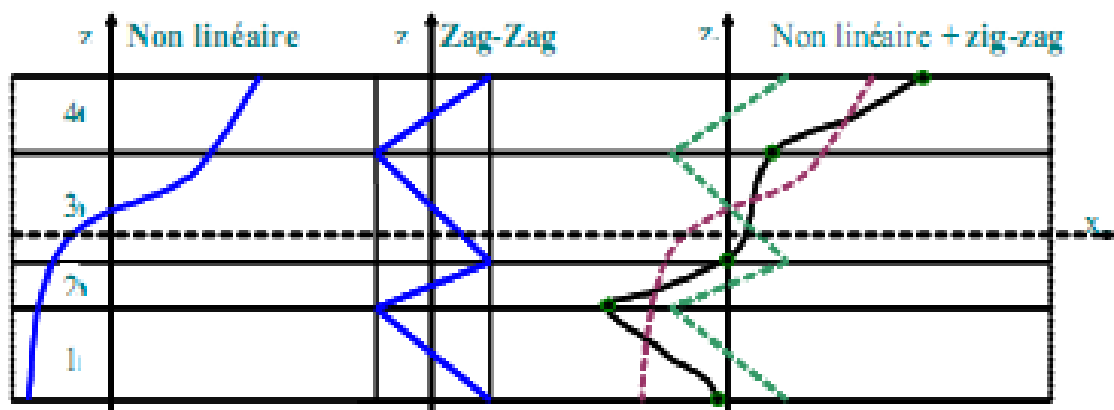
La théorie de zig-zag du premier ordre a été développé la première fois par Di Sciuva (1987), dans ce modèle, la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (FSDT) et d'une fonction zig-zag, cette fonction de zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires continue à travers l'épaisseur mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Fig. III.9) Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure III.9** Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen 2004).

Pour éviter l'introduction des coefficients de correction pour le cisaillement transverse. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Murakami, 1986 ; He, 1994 ; Icardi, 2001 ; Carrera, 2004) en se basant sur le concept de Di Sciuva (1987). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non

linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (Fig. III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres (Tafla, 2007).



**Figure III.10** Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera, 2004).

### ***III.3 Conclusion :***

Dans ce chapitre on a présenté une série de théories des plaques telle que la théorie classique des plaques minces de Love- Kirchhoff (CPT), théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT), et aussi la théorie raffinée des plaque à deux variables (RPT). A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.



# ***CHAPITRE IV***

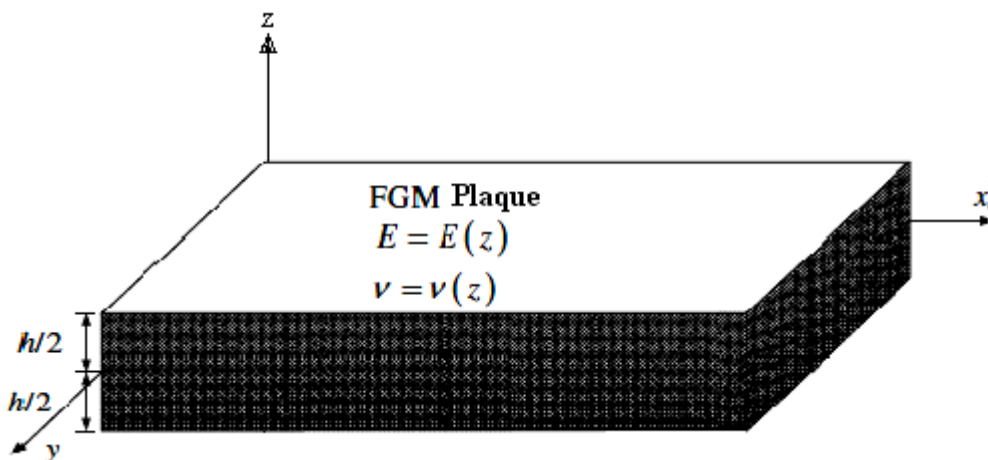
## ***FORMULATION THÉORIQUE***

### IV.1. Introduction

L'utilisation de la théorie de plaque de déformation de cisaillement hyperbolique avec seulement quatre fonctions inconnues a d'abord été présentée par El Meiche et al. (2011), où  $\varepsilon_z = 0$  une approche a été utilisée. L'utilisation de la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique avec  $\varepsilon_z \neq 0$  pour l'analyse des plaques n'a pas été utilisée auparavant. Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement avec la prise en compte de la déformation normale.

### IV.2. Hypothèses de base

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$  en plan et une épaisseur uniforme  $h$ . Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé de telle sorte que le plan  $x$ - $y$  coïncide avec le plan médian de la plaque. La plaque FGM est soumise à une charge transversale  $q(x, y)$ . La plaque est composée d'un matériau à gradation de propriété variant dans la direction de l'épaisseur.



**Figure IV.1** Plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$  en plan et d'épaisseur uniforme  $h$

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes:

- Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur  $h$  de la plaque, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.

- la composante du déplacement transversal  $w$  peut être dissociée en trois termes le premier  $w_b$  représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que la dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le seconde terme  $w_s$ , représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale, le troisième terme  $w_{st}$  représente la flèche induit par l'effet de la déformation normale (effet de l'étirement) .Les deux premiers composantes sont en fonctions des coordonnées  $x, y$  seulement et la troisième est en fonction de  $x, y$  et  $z$  et s'écrit comme suit :

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + w_{st}(x, y, z, t) \quad (IV 1)$$

Les déplacements  $u$  dans la direction (x) et  $v$  dans la direction (y) se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement.les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions (x) et (y) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (IV 2)$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane.

Les deuxièmes composante  $u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacement donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (IV 3)$$

Les troisièmes composantes sont Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, en collaboration avec  $w_s$ , une variations hyperboliques des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  sont nulles aux facettes (supérieure et

inférieure) de la plaque. les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  sont donnée comme

suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV } 4)$$

Basé sur la même formulation proposée par Houari et al [37] et incluant l'effet des contraintes transversales normales (effet d'étirement de l'épaisseur), le champ des déplacements de la théorie proposée est exprimé par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \beta g(z) \varphi \end{aligned} \quad (\text{IV } 5)$$

où  $u_0$  et  $v_0$  désignent les déplacements le long des directions et coordonnées d'un point sur le plan médian de la plaque ;  $w_0$  est la composante de flexion du déplacement transversal ;  $\varphi$  est le déplacement supplémentaire qui tient compte de l'effet des contraintes normales (effet d'étirement). Dans cette étude, la fonction de forme est choisie comme [38] :

$$f(z) = \frac{z \cosh(\pi/2) - (h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{IV } 6)$$

et  $g(z)$  est donnée comme suit:

$$g(z) = f'(z) \quad (\text{IV } 7)$$

Les déformations linéaires non nulles liées au champ de déplacement

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \beta f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \beta g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = \beta g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV } 8)$$

Où

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ -\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ -\frac{\partial^2 (\nabla^2 w_0)}{\partial x \partial y} \end{cases}, \quad (IV\ 9a)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases},$$

Et

$$\varepsilon_z^0 = \varphi, \quad g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (IV\ 9b)5$$

### IV.3 Relations constitutive

La plaque est classée de l'aluminium (en bas) à l'alumine (en haut). Les propriétés mécaniques des MGF sont déterminées à partir de la fraction volumique des constituants du matériau. On suppose que le module de Young et la densité du matériau varient dans la direction de l'épaisseur selon la règle de Voigt sur toute la plage de la fraction volumique. Les propriétés matérielles effectives des MGF à deux constituants peuvent être exprimées par [39].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z + h}{2} \right)^k \quad (IV\ 10a)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{2z + h}{2} \right)^k \quad (IV\ 10b)$$

où  $(E_m, \rho_m)$  et  $(E_c, \rho_c)$  propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement ;  $k$  est un exposant de fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La valeur de est égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique. L'hypothèse de loi de puissance mentionnée précédemment reflète une règle simple des mélanges utilisés pour obtenir les propriétés effectives de la plaque céramique-métal. La règle des mélanges ne s'applique qu'à la direction de l'épaisseur. Notez que la fraction volumique de la céramique est élevée près de la surface supérieure de la plaque et celle du métal est élevée près de la surface inférieure. De plus, Eq. (IV 10) indique que la surface inférieure de la plaque ( $z = -h/2$ ) est

entièrement métallique tandis que la surface supérieure de la plaque ( $z = h/2$ ) est entièrement céramique. Généralement, par souci de simplicité, il est supposé constant sur toute l'épaisseur de la tôle.

Les relations constitutives d'une plaque FG peuvent être exprimées comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV } 11)$$

où  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$  sont des composantes de contrainte et de déformation, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques  $C_{ij}$  dépend de l'hypothèse  $\varepsilon_z$  dont on tient compte.

Si  $\varepsilon_z = 0$ , alors  $C_{ij}$  sont les constantes élastiques planes à contrainte réduite.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (\text{IV } 12a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV } 12b)$$

Si  $\varepsilon_z \neq 0$  (étirement de l'épaisseur), alors  $C_{ij}$  sont des constantes élastiques 3D,

données par

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad (\text{IV } 13a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV } 13b)$$

Où  $\lambda(z) = [\nu E(z)] / [(1-2\nu)(1+\nu)]$  et  $\mu(z) = G(z) = E(z) / [2(1+\nu)] =$  Coefficients de Lamé.

Le module  $E$  et  $G$  et les coefficients d'élasticité  $C_{ij}$  varient en fonction de l'épaisseur, selon l'équation (IV 10).

#### IV.4 Équations gouvernantes

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement.

Le principe peut être énoncé sous la forme analytique [40]

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta T) dt \quad (\text{IV14})_{10}$$

où  $\delta U$  variation de l'énergie de déformation,  $\delta V$  variation de l'énergie potentielle et  $\delta T$  variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ &= \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - \beta S_x \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x^4} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - \beta S_y \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial y^4} \right. \\ &\quad + \beta N_z \delta \varphi_z + N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} - \beta S_{xy} \left( \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x \partial y^3} \right) \\ &\quad \left. + Q_{yz} \beta \frac{\partial \delta \varphi_z}{\partial y} - Q_{yz} \beta \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial y^3} + Q_{xz} \beta \frac{\partial \delta \varphi_z}{\partial x} - Q_{xz} \beta \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^3} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{IV15})$$

Dans laquelle le stress qui en résulte  $N, M, S$  et  $Q$ , sont définis par :

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f)(\sigma_i) dz, \quad (i = x, y, xy), \quad (\text{IV 16a})$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_i) g(z) dz, \quad (i = xz, yz) \quad (\text{IV 16b})$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz. \quad (\text{IV 16c})$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée ainsi :

$$\delta V = - \int_A q \delta (w_0 + g(h/2) \varphi_z) dA \quad (\text{IV 17})$$

où  $q$  est la charge transversale répartie

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite dans la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta K = & \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz = \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \\
 & - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 & - \beta J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 & + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \beta^2 K_2 \left( \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} \right) \\
 & + \beta J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\
 & + \beta J_1^s (\dot{\phi} \delta \dot{w} + \dot{w} \delta \dot{\phi}) + \beta^2 K_2^s \dot{\phi} \delta \dot{\phi} \} dA
 \end{aligned} \tag{IV 18}$$

où la convention point-superscript indique la différenciation par rapport à la variable temporelle  $t$  ; et  $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^s, J_2, K_2, K_2^s) =$  inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^s, J_2, K_2, K_2^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, g, zf, f^2, g^2) \rho(z) dz \tag{IV 19}$$

En substituant les expressions pour  $\delta U$ ,  $\delta V$ , et  $\delta K$  à partir des équations (IV 15), (IV 17) et (IV 18) dans l'équation (IV 14), on obtient les équations suivantes de mouvement de la plaque, en intégrant par parties, et en recueillant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \phi$ , on obtient les équations de mouvement suivantes de la plaque on obtient les équations de mouvement suivantes de la plaque :



$$\begin{aligned}
 \delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \\
 \delta v_0 &: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial y^3} \\
 \delta w_0 &: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \beta \left( \frac{\partial^4 S_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 S_y}{\partial y^4} + \left( \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x \partial y^3} \right) - \frac{\partial^3 Q_{yz}}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 Q_{xz}}{\partial x^3} \right) + q = \\
 & I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + \beta J_1 \left( \frac{\partial^3 \ddot{u}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \ddot{v}_0}{\partial y^3} \right) \\
 & - 2\beta J_2 \left( \left( \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} \right) + \left( \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial y^4} \right) \right) - \beta^2 K_2 \left( \frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial y^6} \right) + \beta J_1^s \ddot{\phi} \\
 \delta \phi &: \beta \left( \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - N_z + q g(h/2) \right) = \beta^2 K_2^s \ddot{\phi} + \beta J_1^s \ddot{w}_0 \tag{IV 20}
 \end{aligned}$$

En substituant l'équation (IV 13) dans l'équation (IV 15) et les résultats subséquents dans l'équation (IV 20), on obtient les résultats de contrainte comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & \beta D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & \beta H_{11}^s & \beta H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & \beta H_{12}^s & \beta H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & \beta H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta L \\ \beta L \\ 0 \\ \beta L^a \\ \beta L^a \\ 0 \\ \beta R \\ \beta R \\ 0 \end{Bmatrix} \phi \tag{IV 21a}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV 21b}$$

$$N_z = L \gamma_{xy}^0 + L^a (k_x + k_y) + \beta R (\eta_x + \eta_y) + \beta R^a \phi_z \tag{IV 21c}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV 21d})$$

où les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , . . . etc., sont définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV 22a})$$

Et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV 22b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mu(z) [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV 22c})$$

En substituant l'équation (IV 21) à l'équation (IV 20), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \varphi$ ) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ & - \beta (B_{66}^s d_{11122} w_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s) d_{12222} w_0 + B_{11}^s d_{11111} w_0) + L d_1 \varphi \\ & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + \beta J_1 d_{111} \ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV 23a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ & - \beta (B_{66}^s d_{11222} w_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s) d_{11112} w_0 + B_{22}^s d_{22222} w_0) + L d_2 \varphi \\ & = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + \beta J_1 d_{222} \ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV 23b})$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 : & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 \\
 & - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 \\
 & + \beta [B_{11}^s d_{11111}u_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{1222}u_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{11112}v_0 \\
 & + B_{22}^s d_{22222}v_0 + B_{66}^s (d_{11122}u_0 + d_{11222}v_0) - 2D_{11}^s d_{111111}w_0 \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{11222}w_0 - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{111122}w_0 - 2D_{22}^s d_{222222}w_0] \\
 & - \beta^2 [H_{11}^s d_{1111111}w_0 + 2(H_{12}^s + H_{66}^s)d_{1111222}w_0 + H_{66}^s (d_{11111122}w_0 + d_{1122222}w_0) \\
 & + H_{22}^s d_{2222222}w_0 - A_{44}^s d_{222222}w_0 - A_{55}^s d_{111111}w_0] + \beta [R(d_{1111}\varphi + d_{2222}\varphi)] \quad (\text{IV 23c}) \\
 & - A_{44}^s d_{2222}\varphi - A_{55}^s d_{1111}\varphi + L^a (d_{11}\varphi + d_{22}\varphi) + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) \\
 & - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + \beta J_1 (d_{111} \ddot{u}_0 + d_{222} \ddot{v}_0) - 2\beta J_2 [d_{1111} \ddot{w}_0 + d_{2222} \ddot{w}_0] \\
 & - \beta^2 K_2 [d_{111111} \ddot{w}_0 + d_{222222} \ddot{w}_0] + J_1^s \ddot{\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi : & -\beta L (d_1 u_0 + d_2 v_0) + L^a \beta (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) + \beta^2 (R - A_{55}^s) d_{1111} w_0 \\
 & + \beta^2 (R - A_{44}^s) d_{2222} w_0 + \beta^2 (A_{55}^s d_{11} \varphi - R^a \varphi + A_{44}^s d_{22} \varphi) + q g(h/2) \quad (\text{IV 23d}) \\
 & = J_1^s \ddot{w}_0 + K_2^s \ddot{\varphi}
 \end{aligned}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, & d_{ijl} &= \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, & d_{ijlm} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \\
 d_i &= \frac{\partial^2}{\partial x_i}, & (i, j, l, m &= 1, 2)
 \end{aligned} \quad (\text{IV 24})$$

#### IV.5 Solution exacte pour la plaque FG supportée simplement :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type de support utilisé. Nous nous intéressons ici aux solutions exactes des équations (IV 23a) à (IV 23d) pour une plaque EG supportée simplement. Les conditions limites suivantes sont imposées sur les bords latéraux.

$$N_x = v_0 = w_0 = \varphi = M_x = S_x = Q_{yz} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{IV 25a})$$

$$N_y = u_0 = w_0 = \varphi = M_y = S_y = Q_{xz} = 0 \quad \text{at } x = 0, b \quad (\text{IV 25b})$$

Suivant la procédure de la solution de Navier, nous adoptons la forme de solution suivante pour  $u_0, v_0, w_0$  et  $\varphi$  qui satisfait aux conditions limites données dans les équations (IV 25a), (IV 25b).

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV } 26)$$

Où  $\lambda = m\pi/a$ ,  $\mu = n\pi/b$  et  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  fréquence propre associée au (m, n) mode propre.

La charge transversale  $q$  est également augmentée dans la série sinusoïdale double-Fourier en tant que :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(\mu_n y) \quad (\text{IV } 27)$$

Dans le cas d'une charge répartie sinusoïdale, c'est le cas

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad q_{11} = q_0 \quad (\text{IV } 28)$$

où  $q_0$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie (UDL), c'est le cas.

$$q_{11} = \frac{16q_0 ab}{\lambda \mu}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (\text{IV } 29)$$

En substituant les équations (IV 26) et (IV 27) dans l'équation (IV 23), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV } 30)$$

Dans laquelle :

$$a_{11} = A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2$$

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= (A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\
 a_{13} &= \beta \left[ \lambda^3 (B_{11}^s \lambda^2 + B_{66}^s \mu^2) + \lambda\mu^4 (B_{12}^s + B_{66}^s) \right] - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 - B_{11}\lambda^3 \\
 a_{14} &= -\beta L \lambda \\
 a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\
 a_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (2B_{66} + B_{12})\lambda^2\mu + \beta (B_{12}^s + B_{66}^s)\lambda^4\mu + \beta (B_{66}^s\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2)\mu^3 \\
 a_{24} &= -\beta L \mu \\
 a_{33} &= \lambda^2 (D_{11}\lambda^2 + 4D_{66}\mu^2) + \mu^2 (2D_{12}\lambda^2 + D_{22}\mu^2) + \beta^2 \mu^6 (H_{66}^s\lambda^2 + H_{22}^s\mu^2) \\
 &\quad + \beta^2 \lambda^4 \mu^4 (H_{12}^s + 2H_{66}^s + H_{12}^s) + \beta^2 (A_{55}^s\lambda^6 + A_{44}^s\mu^6) + \beta^2 \lambda^6 (H_{11}^s\lambda^2 + H_{66}^s\mu^2) \quad (\text{IV } 31)27 \\
 &\quad - 4\beta \lambda^2 \mu^2 (D_{66}^s\lambda^2 + D_{66}^s\mu^2) - 2\beta\lambda^2 (D_{11}^s\lambda^4 + D_{12}^s\mu^4) - 2\beta \mu^2 (D_{12}^s\lambda^4 + D_{22}^s\mu^4) \\
 a_{34} &= \beta L^a (\lambda^2 + \mu^2) - \beta^2 R (\lambda^4 + \mu^4) + \beta^2 (A_{55}^s\lambda^4 + A_{44}^s\mu^4) \\
 a_{44} &= \beta^2 (R^a + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \\
 m_{11} = m_{22} &= I_0, m_{13} = -\lambda (I_1 + \beta J_1 \lambda^2), m_{23} = -\mu (I_1 + \beta J_1 \mu^2), \\
 m_{33} &= I_0 + \beta^2 K_2 \lambda^6 + \beta^2 K_2 \mu^6 - 2\beta J_2 \lambda^4 - 2\beta J_2 \mu^4 + I_2 \lambda^2 + I_2 \mu^2, m_{34} = \beta J_1^s, \\
 m_{44} &= \beta^2 K_2^s
 \end{aligned}$$

On peut facilement obtenir la valeur du coefficient  $\beta$  de la même manière que celle décrite par Hachemi et al [41].

#### IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la nouvelle théorie des plaques ainsi que leurs hypothèses de base. Le champ de déplacement pour la théorie actuelle est présenté même concernant le tenseur de déformation. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient de propriétés est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée. Le principe des travaux virtuels est appliqué pour obtenir les équations du mouvement.

***CHAPITRE V***

***RESULTATS ET  
DISCUSSION***

Chapitre V : Résultats et discussion

V.1 Résultats numériques

Pour vérifier l'exactitude de la théorie des plaques hyperboliques quasi-3D proposée pour prédire les réponses en flexion et en vibration libre d'une plaque isotrope et en matériaux à gradient de propriétés FGM simplement appuyées , divers exemples numériques sont présentés et comparés aux résultats des théories 3D et quasi-3D de déformation en cisaillement.

Deux types de plaque FGM sont considérés : (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) et (Al/ZrO<sub>2</sub>) . Les caractéristiques mécaniques des métaux et des céramiques utilisés dans les plaques FG sont énumérées dans le tableau V.1.

Pour l'analyse en flexion, la plaque est soumise à une charge uniformément répartie et par la suite une charge sinusoïdale. Pour plus de commodité, les formes sans dimension suivantes sont utilisées :

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, S = a/h, \bar{w} = \frac{10E_c}{q_0aS^3} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \hat{w} = \frac{100E}{q_0hS^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\sigma}_x = \frac{1}{q_0S} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right),$$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{q_0S^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\sigma}_y = \frac{1}{q_0S} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \hat{\sigma}_y = \frac{1}{q_0S^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{q_0S} \tau_{xy}\left(0,0, \bar{z}\right),$$

$$\hat{\tau}_{xy} = \frac{1}{q_0S^2} \tau_{xy}\left(0,0, \bar{z}\right), \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{q_0S} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \bar{z}\right), \hat{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0S} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$$

Tableau V.1 Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.

Propriétés	Metal	Ceramic	Ceramic
	Al	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ZrO <sub>2</sub>
E (GPa)	70	380	211
ν	0.3	0.3	0.3
ρ (kg/m <sup>3</sup> )	2702	3800	4500

V.2 Analyse de flexion

Dans cette partie de l'étude, des plaques carrées isotropes homogènes (a/h = 10) simplement appuyées et soumises à une charge uniformément répartie sont choisies pour étudier l'efficacité du modèle actuel. Les matériaux utilisés pour cet exemple sont : le module de Young est E = 210 GPa et le rapport de Poisson est ν = 0.3 .

**Tableau V.2** Effet d'une déformation normale  $\varepsilon_z \neq 0$  sur les contraintes sans dimension et le déplacement transversal pour une plaque carrée isotrope ( $a/h=10$ ) soumise à un UDL.

Theory	$\hat{w}(a/2, b/2, 0)$	$\hat{\sigma}_x(h/2)$	$\hat{\sigma}_y(h/2)$	$\hat{\tau}_{xy}(h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$	$\bar{\tau}_{yz}(a/2, 0, 0)$
<b>Present</b> $\varepsilon_z \neq 0$	4.625	0.273	0.273	0.191	0.482	0.482
<b>Hebali et al. [44]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	4.631	0.276	0.276	0.197	0.481	0.481
<b>Shimpi et al. [43]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	4.625	0.307	0.307	0.195	0.505	0.505
<b>Srinivas et al. [42]</b> <b>(Exact 3D)</b>	4.639	0.290	0.290	—	0.488	—

Dans cet exemple (Tableau V.2), une comparaison du déplacement transversal sans dimension et des contraintes est réalisée pour une plaque rectangulaire isotrope, avec la solution de Srinivas et al [42] basée sur des solutions d'élasticité tridimensionnelle, Shimpi et al [43] basée sur la théorie Quasi-3D de la déformation trigonométrique par cisaillement et Hebali et al [44] basée sur la théorie hyperbolique Quasi-3D de déformation en cisaillement. Le tableau V.2 montre que les prédictions obtenues pour le déplacement et les contraintes sont en accord étroit avec la solution trigonométrique Quasi-3D obtenue par Shimpi et al [43], la solution 3D exacte de Srinivas et al [42]. En outre, le déplacement sans dimension et les contraintes prévues par la nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D actuelle sont particulièrement en excellent accord avec les solutions hyperboliques quasi-3D rapportées par Hebali et al [44].

Le deuxième exemple est réalisé pour des plaques carrées minces et épaisses ( $Al/Al_2O_3$ ) soumises à une charge sinusoïdale.



**Tableau V.3** Effet d'une contrainte normale  $\varepsilon_z$  sur la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  sans dimension et le déplacement  $\bar{w}$  pour une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale.

k	Theory	$\bar{\sigma}_x(h/3)$			$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$		
		a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
<b>1</b>	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z = 0$	0.7856	2.0068	20.149	0.7289	0.5890	0.5625
	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.6221	1.5064	14.969	0.7171	0.5875	0.5625
	<b>Neves et al. [45]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.5925	1.4945	14.969	0.6997	0.5845	0.5624
	<b>Hebali et al. [44]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.5952	1.4954	14.963	0.6910	0.5686	0.5452
	<b>Present</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.5952	1.4955	14.965	0.6910	0.5686	0.5452
<b>4</b>	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z = 0$	0.5986	1.5874	16.047	1.1673	0.8828	0.8286
	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.4877	1.1971	11.923	1.1585	0.8821	0.8286
	<b>Neves et al. [45]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.4404	1.1783	11.932	1.1178	0.8750	0.8286
	<b>Hebali et al. [44]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.4507	1.1779	11.871	1.0964	0.8413	0.7926
	<b>Present</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.4506	1.1778	11.872	1.0964	0.8413	0.7926
<b>10</b>	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z = 0$	0.4345	1.1807	11.989	1.3925	1.0090	0.9361
	<b>Carrera et al. [74]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.1478	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	<b>Neves et al. [45]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.3227	1.1783	11.932	1.3490	0.8750	0.8286
	<b>Hebali et al. [44]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.3325	0.8889	8.9977	1.3333	0.9791	0.9114
	<b>Present</b> $\varepsilon_z \neq 0$	0.3325	0.8891	8.9973	1.3333	0.9791	0.91144

Les résultats présentés dans le tableau V.3 sont établis pour des plaques ( $Al/Al_2O_3$ ) fonctionnellement graduées avec des bords simplement appuyés. Dans le tableau V.3, le déplacement transversal sans dimension  $\bar{w}$  et la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  pour différentes valeurs, l'indice de loi de puissance  $k$  et le rapport d'épaisseur (a/h) sont calculés et comparés aux solutions quasi-3D données par Neves et al[45] et à celles obtenues par approximation par éléments finis par Carrera et al[74]. Un bon accord est trouvé pour tous les cas allant des

plaques minces à épaisses à celles prédites à l'aide de théories qui considèrent l'étirement de l'épaisseur, et en particulier à la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdale quasi-3D donnée par Neves et al (45). Cependant, les résultats s'écartent clairement de ces théories qui négligent  $\varepsilon_z$ , en particulier pour les plaques plus épaisses.

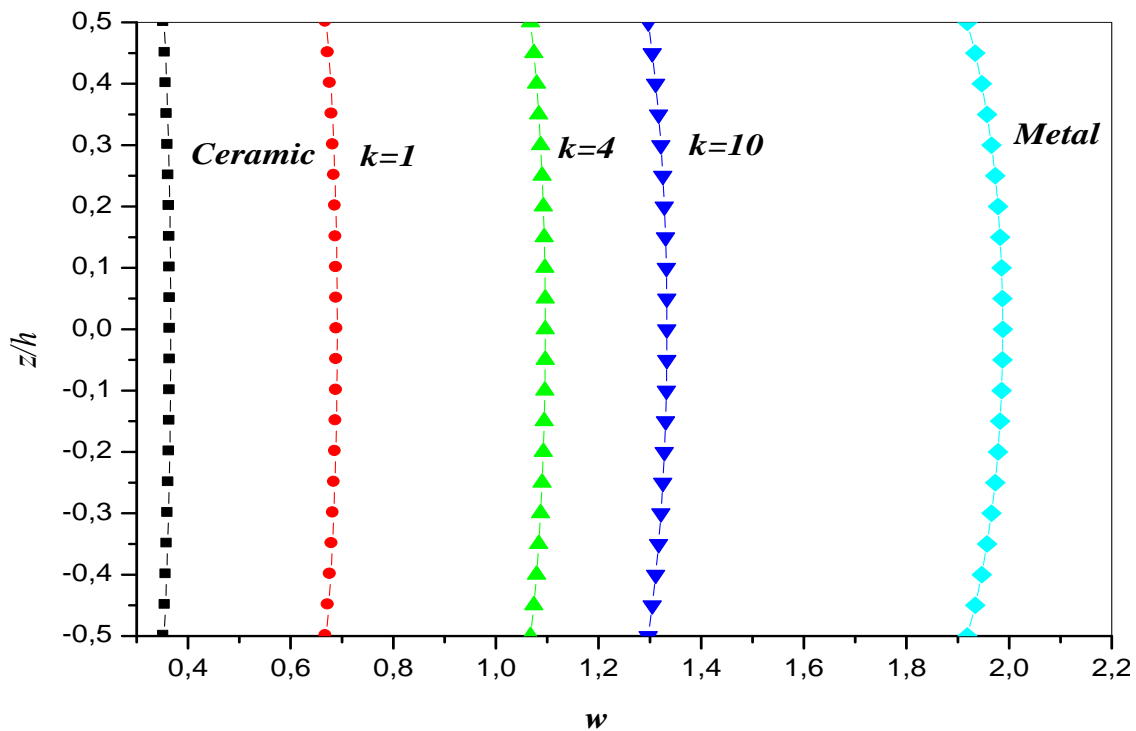
Une autre comparaison pour évaluer l'efficacité des résultats actuels est donnée dans le tableau V.4 pour une plaque carrée ( $Al/Al_2O_3$ ) d'épaisseur moyenne ( $a/h=10$ ) soumise à une charge sinusoïdale.

**Tableau V.4.** Effets de l'exposant de fraction volumique sur les contraintes et les déplacements adimensionnels pour une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale.

$k$	$\bar{w}(0)$		$\bar{\sigma}_x(1/2)$		$\bar{\sigma}_y(1/3)$		$\bar{\tau}_{yz}(1/6)$		$\bar{\tau}_{xz}(0)$		$\bar{\tau}_{xy}(-1/3)$	
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Hebali et al. [44] $\varepsilon_z \neq 0$
<b>Ceramic</b>	0.2937	0.2937	1.9076	1.9076	1.3451	1.3451	0.2110	0.2112	0.2326	0.2327	0.6998	0.7003
<b>1</b>	0.5686	0.5689	2.9105	2.9105	1.4955	1.4954	0.2595	0.2596	0.2326	0.2326	0.5654	0.5657
<b>2</b>	0.7219	0.7220	3.4195	3.4198	1.3952	1.3953	0.2713	0.2714	0.2123	0.2122	0.4948	0.4949
<b>3</b>	0.7974	0.7972	3.6728	3.6729	1.2729	1.2729	0.2643	0.2645	0.1958	0.1958	0.5010	0.5009
<b>4</b>	0.8413	0.8413	3.8570	3.8569	1.1778	1.1779	0.2499	0.2502	0.1876	0.1877	0.5148	0.5149
<b>5</b>	0.8726	0.8729	4.0274	4.0273	1.1049	1.1049	0.2347	0.2349	0.1861	0.1861	0.5244	0.5245
<b>6</b>	0.8983	0.8983	4.1954	4.1954	1.0462	1.0462	0.2220	0.2221	0.1884	0.1884	0.5307	0.5309
<b>7</b>	0.9209	0.9211	4.3618	4.3619	0.9971	0.9976	0.2124	0.2125	0.1924	0.1923	0.5353	0.5355
<b>8</b>	0.9416	0.9416	4.5253	4.5251	0.9553	0.9546	0.2058	0.2059	0.1968	0.1968	0.5392	0.5392
<b>9</b>	0.9609	0.9606	4.6846	4.6846	0.9195	0.9203	0.2015	0.2016	0.2009	0.2009	0.5428	0.5427
<b>10</b>	0.9791	0.9793	4.8389	4.8388	0.8891	0.8908	0.1990	0.1990	0.2046	0.2046	0.5461	0.5464
<b>Metal</b>	1.5942	1.5942	1.9076	1.9076	1.3451	1.3451	0.2110	0.2112	0.2326	0.2327	0.6998	0.7003

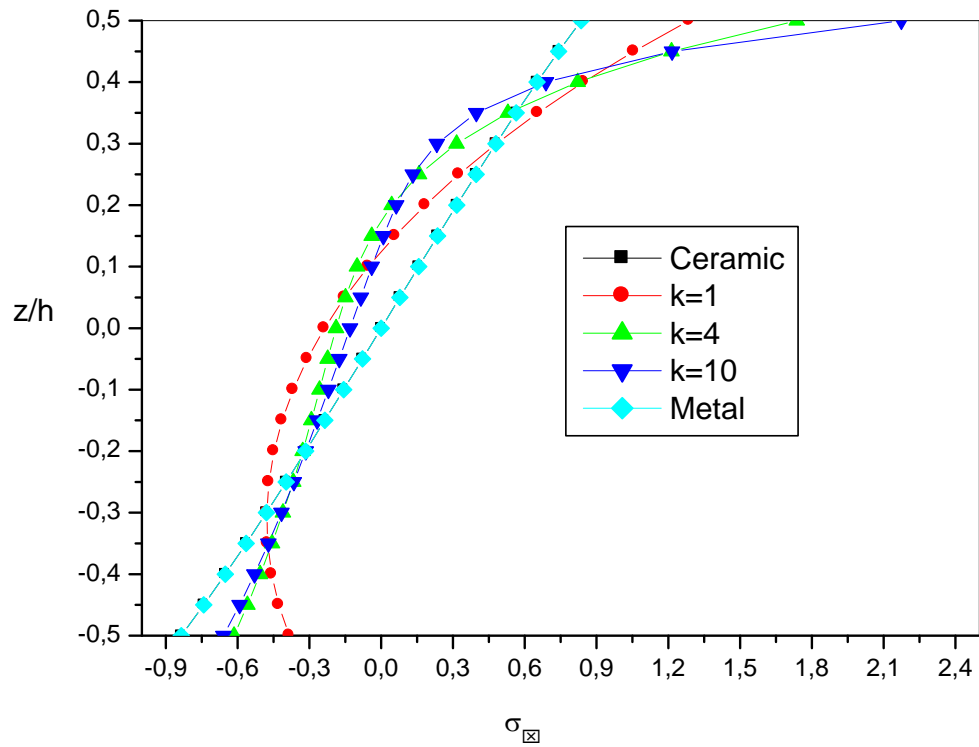
Les déplacements et les contraintes d'une plaque carrée sur différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $k$  sont calculés et comparés aux résultats de la théorie des plaques hyperboliques quasi-3D pour les plaques à gradient fonctionnel obtenu par Hebali et al[44] où l'effet d'étirement d'épaisseur n'est pas négligé ( $\varepsilon_z \neq 0$ ). Pour les résultats de la théorie quasi-3D actuelle, ils sont très proches des résultats donnés par Hebali et al [44] basés sur une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique quasi-3D.

En général, on peut conclure que l'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend une plaque plus rigide et, par conséquent, entraîne une réduction de la flexion. En outre, on peut conclure que la théorie actuelle, qui ne comporte que quatre inconnues, est non seulement exacte, mais aussi efficace pour prédire les réactions de flexion des plaques à gradient fonctionnel.



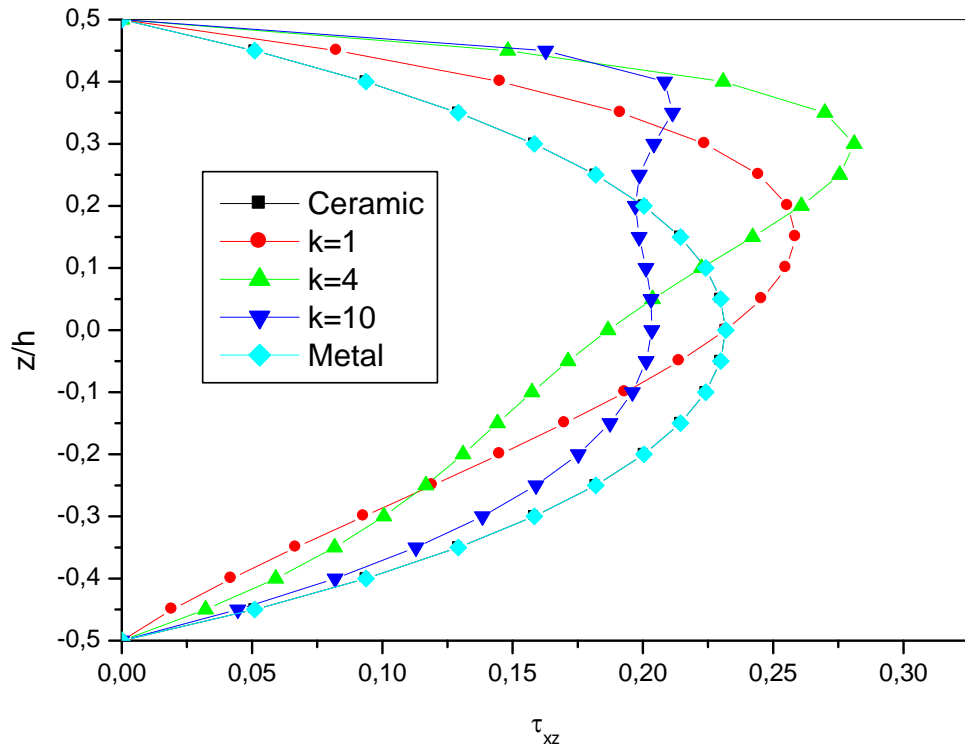
**Figure V.1:** Le déplacement transversal,  $\bar{w}$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).

La figure 1 montre l'influence de l'indice de loi de puissance sur la variation du déplacement hors plan ( $w$ ) à travers la direction de l'épaisseur pour les deux plaques carrées FG avec rapport côté/épaisseur ( $a/h = 10$ ). On peut voir que le déplacement transversal  $\bar{w}$  des plaques métalliques est plus grand que celui des plaques céramiques et en général, le déplacement transversal augmente au fur et à mesure que l'indice de loi de puissance  $k$  augmente.



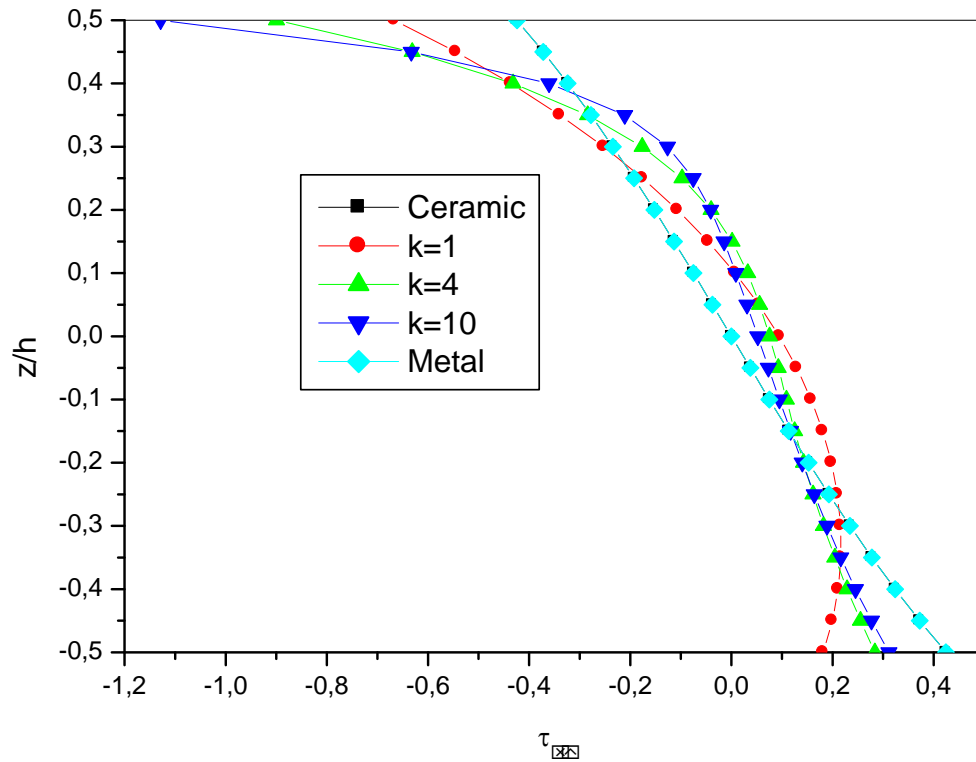
**Figure V.2:** Variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).

Dans la Fig V.2, la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  est la traction à la surface supérieure et la compression à la surface inférieure. La plaque céramique homogène ( $k=0$ ) ou la plaque métallique ( $k \rightarrow \infty$ ) donne les contraintes de compression maximales à la surface inférieure et les contraintes de traction minimales à la surface supérieure de la plaque.



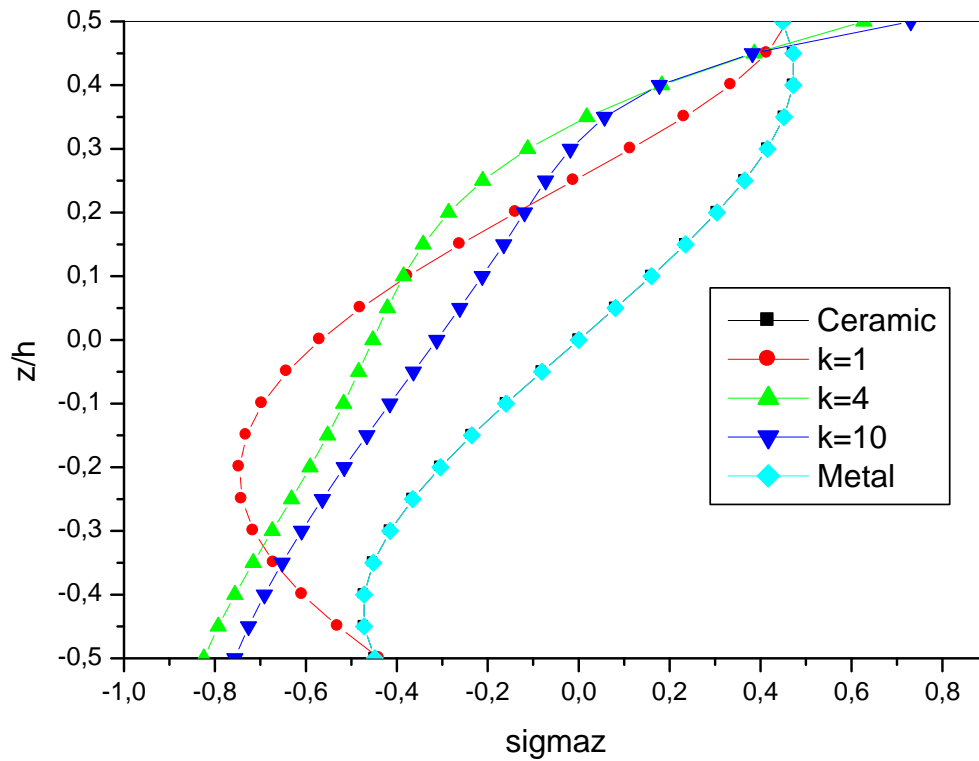
**Figure V.3:** La variation de la contrainte transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).

Dans la Fig V.3, nous avons tracé les distributions à travers l'épaisseur de la contrainte de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}$ . Les répartitions en épaisseur des contraintes transversales de cisaillement pour les plaques fonctionnelles ne sont pas paraboliques comme c'est le cas pour les plaques métalliques ou céramiques homogènes.



**Figure V.4:** La variation de la contrainte tangentielle  $\bar{\tau}_{xy}$  dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).

La figure V.4 montre que la contrainte tangentielle  $\bar{\tau}_{xy}$  dans le plan est une contrainte de traction à la surface inférieure et une contrainte de compression à la surface supérieure des plaques FG. La plaque céramique homogène ( $k=0$ ) ou la plaque métallique ( $k \rightarrow \infty$ ) donne la contrainte tangentielle de traction maximale à la surface inférieure et la contrainte tangentielle de compression minimale à la surface supérieure de la plaque FG.



**Figure V.5:** Variation de la contrainte transversale normale  $\bar{\sigma}_z$  dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $a/h = 4$ ).

Dans la Fig V.5, nous présentons l'évolution de la contrainte transversale normale  $\bar{\sigma}_z$  dans la direction de l'épaisseur pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance  $k$ . Comme on peut le voir sur la Fig V.5, la composante transversale normale  $\bar{\sigma}_z$  ne peut être négligée pour le problème actuel.

### V.3 Analyse des vibrations libres

Les fréquences naturelles non dimensionnées des plaques isotropes rectangulaires générales et des plaques FG Al/ZrO<sub>2</sub> sont prises en compte pour la comparaison.

**Tableau V.5** Fréquences naturelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque isotrope avec  $\nu = 0.3$ ,

$a/h = 10$  et  $a/b = 1$ .

$m$	$n$	<b>Present.</b> $\varepsilon_z \neq 0$	<b>Abualnour et al. [47]</b> $\varepsilon_z \neq 0$	<b>Srinivas et al. [48] (3D)</b>	<b>Reddy and Phan [49]</b> $\varepsilon_z = 0$
<b>1</b>	<b>1</b>	0.0932	0.0933	0.0932	0.0931
<b>1</b>	<b>2</b>	0.2239	0.2228	0.2226	0.2222
<b>2</b>	<b>2</b>	0.3425	0.3422	0.3421	0.3411
<b>1</b>	<b>3</b>	0.4203	0.4173	0.4171	0.4158
<b>2</b>	<b>3</b>	0.5295	0.5240	0.5239	0.5221
<b>3</b>	<b>3</b>	0.6920	0.6890	0.6889	0.6862
<b>2</b>	<b>4</b>	0.7657	0.7512	0.7511	0.7481
<b>1</b>	<b>5</b>	0.9399	0.9268	0.9268	0.9230
<b>4</b>	<b>4</b>	1.1026	1.0890	1.0889	1.0847

Dans le tableau V.5, les fréquences naturelles obtenues par la théorie actuelle pour une plaque isotrope carrée épaisse sont comparées à celles données par Srinivas et al [48] basées sur des solutions d'élasticité tridimensionnelle, Reddy et Phan [49] basées sur la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur et par Abualnour et al[47] basées sur la théorie trigonométrique quasi 3D. La comparaison des résultats montre que la théorie actuelle, qui prend en compte à la fois le cisaillement transversal et la déformation normale transversale, prédit les fréquences naturelles avec le même degré de précision que celle des solutions d'élasticité tridimensionnelle (3D), aussi bien dans les modes inférieurs que supérieurs. Cependant, la seule autre théorie obtenue par Reddy et Phan[49] qui néglige l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\varepsilon_z = 0$ ), elle sous-estime légèrement la fréquence par rapport à la théorie actuelle et la 3D.

Les fréquences non dimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG Al/ZrO<sub>2</sub> prédites par Jha et al[50] à l'aide de la théorie du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale (HOSNT12), Hebali et al[44] basées sur la théorie de la déformation hyperbolique en cisaillement quasi 3D, et la théorie actuelle sont comparées dans le Tableau V.6 .

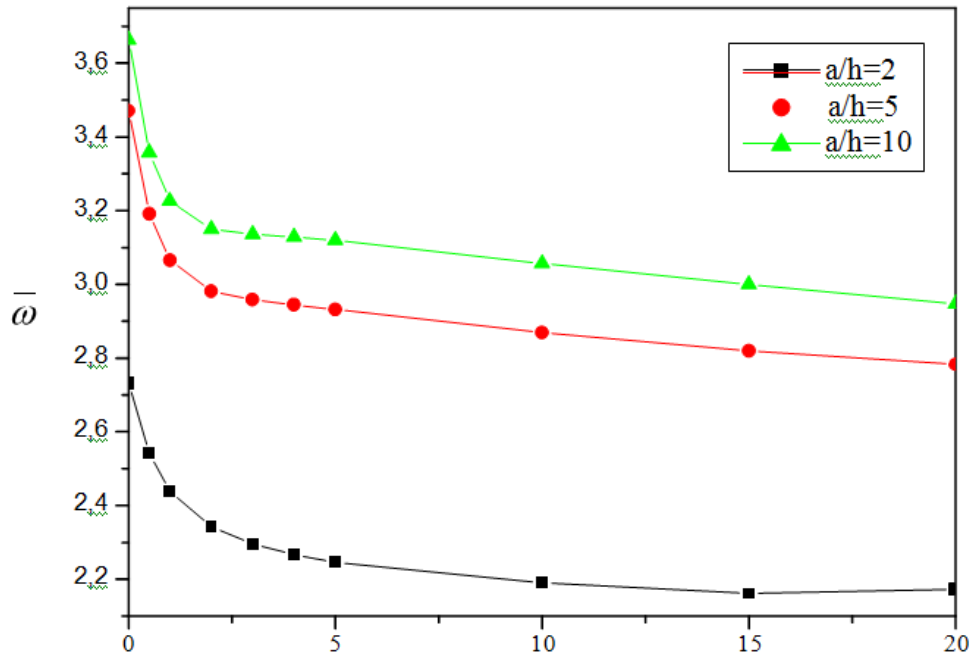


**Tableau V.6** Fréquences propres de la plaque rectangulaire FG ( $a/b = 0.5, a/h = 10$ )

$\bar{\omega} = (a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$												
Mode	$k = 0$			$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 2$		
	Present	Hebali	HOSNT	Present	Hebali	HOSNT	Present	Hebali	HOSNT	Present	Hebali	HOSNT
		[44]	[50]		[44]	[50]		[44]	[50]		[44]	[50]
<b>1(1,1)</b>	3.6632	3.6959	3.6911	3.3582	3.3877	3.3664	3.2265	3.2550	3.2179	3.1497	3.1757	3.1291
<b>2(1,2)</b>	5.7819	5.8392	5.8323	5.3052	5.3564	5.3238	5.0964	5.1460	5.0886	4.9698	5.0157	4.9434
<b>3(2,1)</b>	11.8944	11.9752	11.965	10.9343	11.0079	10.946	10.5017	10.5720	10.461	10.2186	10.2776	10.137
<b>4(2,2)</b>	13.8836	13.9324	13.921	12.7675	12.8149	12.745	12.2623	12.3062	12.180	11.9274	11.9543	11.794

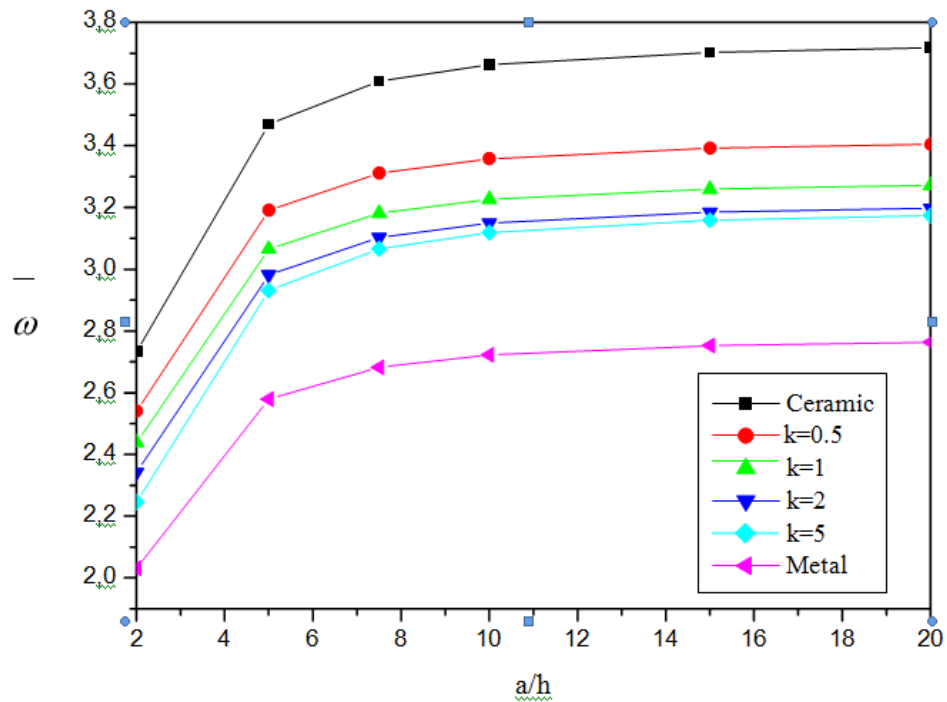
Une excellente concordance entre les résultats prédits par Jha et al[50], le résultat de Hebali et al[44] et la théorie actuelle est observée pour tous les modes de vibration et l'indice de puissance. Il est à noter que la présente théorie contient quatre inconnues contre cinq dans le cas de la théorie des plaques de cisaillement hyperbolique quasi 3D (Hebali et al.[44]) et douze dans le cas de HOSNT12 (Jha et al.[50]). On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace et simple pour prédire la réponse aux vibrations libres des plaques FG.

La fréquence propre fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG simplement appuyées avec ( $b/a = 2$ ) en fonction de l'index de loi de puissance  $k$  pour diverses valeurs des rapports côté-épaisseur  $a/h$  est représentée sur la Fig V.6 sur la base de la nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D actuelle.



**Figure V.6:** Fréquence propre fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG simplement appuyées ( $b = 2a$ ) en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  pour les différents  $a/h$ .

Le même paramètre est représenté par rapport au rapport côté/épaisseur  $a/h$  pour différents indices de loi de puissance dans la Fig V.7 .



**Figure V.7:** Fréquence propre fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  des plaques rectangulaires FG simplement appuyées ( $b = 2a$ ) en fonction du rapport côté sur épaisseur  $a/h$  pour différents indices de loi de puissance  $k$ .

Comme on peut le constater, la fréquence diminue de manière significative avec l'augmentation du module d'Young de la céramique, ce qui est essentiellement dû au fait que ce module est plus élevé que celui du métal.

#### V.4 Conclusion

Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D pour la flexion et la vibration libre des plaques FG est présentée. La théorie tient compte des effets d'étirement et de déformation par cisaillement sans qu'un facteur de correction de cisaillement soit nécessaire. En divisant le déplacement transversal en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement, le nombre d'inconnues et d'équations gouvernementales de la présente théorie est réduit à quatre contre cinq ou plus inconnues dans les équations correspondantes et on obtient ainsi un effort de calcul considérablement moindre. L'exactitude du présent travail est vérifiée en le comparant aux solutions existantes et un excellent accord a été observé dans tous les cas. Il est important de noter le fort effet de la prise en compte de la déformation transversale normale non nulle  $\varepsilon_z$ . en effet, l'inclusion de l'effet d'étirement de

l'épaisseur rend une plaque plus rigide, et donc, conduit à une réduction de la flexion et à une augmentation de la fréquence. En conclusion, on peut dire que la théorie actuelle est non seulement exacte mais aussi efficace pour prédire les déplacements, les contraintes et la fréquence naturelle des plaques homogènes et des plaques FG. Les résultats présentés dans ce document peuvent servir de points de repère pour l'analyse future de la flexion et de l'absence de plaques épaisses fonctionnellement calibrées. Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés à la flexion, aux vibrations et au comportement dynamique des macro nanostructures composites isotropes et avancées .

# ***CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES***

## *Conclusion générale et perspectives*

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des structures.

Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) dans les domaines de l'ingénierie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie simple et adéquate permettant d'analyser les plaques en FGMs avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Le travail de cette thèse présente l'étude de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D.

Les solutions exactes pour les problèmes des plaques qui dépendent de la fonction de cisaillement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacement.

L'avantage principal de la théorie proposée par rapport aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé existant est que, la présente théorie tient en compte l'effet de la déformation normale et la déformation de cisaillement transverse sans nécessiter d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, elle satisfait la condition de la contrainte de cisaillement nulle dans les bords libres de la plaque.

Le déplacement transversal est divisé en trois composantes à savoir: composante en flexion, composante en cisaillement et composante due à l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur.

Les équations du mouvement du modèle sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la procédure de Navier.

## Généralités sur le comportement élastique du matériau

---

Les résultats sont comparés avec des solutions de plusieurs théories telles que (FSDT) et (HSDT).

le déplacement transversal sans dimension  $\bar{w}$  et la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  pour différentes valeurs, l'indice de loi de puissance  $k$  et le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sont calculés et comparés aux solutions quasi-3D, Un bon accord est trouvé pour tous les cas allant des tôles minces à épaisses à celles prédites à l'aide de théories qui considèrent l'étirement de l'épaisseur, et en particulier à la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdale quasi-3D .

Le coût de calcul est donc réduit grâce au nombre réduit d'inconnues et aux relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque FG.

La validation de l'exactitude de la présente théorie est déterminée par des comparaisons avec les solutions existantes des différentes théories proposées dans la littérature et donne un excellent accord pour tous les cas étudiés.

L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend une plaque plus rigide et, par conséquent, entraîne une réduction de la flexion.

On peut conclure que la théorie actuelle ne comporte que quatre inconnues, est non seulement précise, mais aussi efficace et simple pour prédire les réactions de flexion et la réponse aux vibrations libres des plaques à gradient fonctionnel FG.

# ***RÉFÉRENCES***



---

## *Références*

- [1] Reinhart, T.J. and Clements, L.L. (1993), Introduction to composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites, Ohio, USA: ASM International, p. 2734. ISBN 0871702797 (v.1).
- [2] Gurdal, Z., Haftka, R.T., and Hajela, P. (1999), Design and optimization of laminated composite materials, Canada: Wiley-Interscience Publication, 352 p. ISBN 047125276X.
- [3] Kim, J.K. and Mai, Y.W. (1998), Engineered interfaces in fiber reinforced composites, Pays-Bas: Elsevier Science Ltd.416 p. ISBN 0080426956.
- [4] Cours de matériaux composite, l'université des matériaux composites sur le site internet [www.composites.free.fr](http://www.composites.free.fr)
- [5] E. Mäder, H.-J. Jacobasch, K. Grundke, and T. Gietzelt, "Influence of an optimized interphase on the properties of polypropylene/glass fibre composites," Compos. Part Appl. Sci. Manuf., vol. 27, no. 9, pp. 907–912, Jan. 1996.
- [6] F. M. Zhao and N. Takeda, "Effect of interfacial adhesion and statistical fiber strength on tensile strength of unidirectional glass fiber/epoxy composites. Part I: experiment results," Compos. Part Appl. Sci. Manuf., vol. 31, no. 11, pp. 1203–1214, 2000.
- [7] J. L. Thomason, "The interface region in glass fibre-reinforced epoxy resin composites: 3. Characterization of fibre surface coatings and the interphase," Composites, vol. 26, no. 7, pp. 487–498, Jul. 1995.
- [8] E. Mäder, K. Grundke, H.-J. Jacobasch, and G. Wachinger, "Surface, interphase and composite property relations in fibre-reinforced polymers," Composites, vol. 25, no. 7, pp. 739–744, Jan. 1994.

- [9] J. Berg and F. R. Jones, “The role of sizing resins, coupling agents and their blends on the formation of the interphase in glass fibre composites,” *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.*, vol. 29, no. 9, pp. 1261–1272, 1998.
- [10] F. Hoecker and J. Karger-Kocsis, “Effects of the interface on the mechanical response of CF/EP microcomposites and macrocomposites,” *Composites*, vol. 25, no. 7, pp. 729–738, Jan. 1994.
- [11] M. E. Foley, A. A. Obaid, X. Huang, M. Tanoglu, T. A. Bogetti, S. H. McKnight, and J. W. Gillespie, “Fiber/matrix interphase characterization using the dynamic interphase loading apparatus,” *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.*, vol. 33, no. 10, pp. 1345–1348, 2002.
- [12] M. Tanoglu, S. H. McKnight, G. R. Palmese, and J. W. Gillespie Jr, “The effects of glass-fiber sizings on the strength and energy absorption of the fiber/matrix interphase under high loading rates,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 61, no. 2, pp. 205–220, 2001.
- [13] A. T. DiBenedetto, “Tailoring of interfaces in glass fiber reinforced polymer composites: a review,” *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 302, no. 1, pp. 74–82, 2001.
- [14] O. Konur and F. L. Matthews, “Effect of the properties of the constituents on the fatigue performance of composites: a review,” *Composites*, vol. 20, no. 4, pp. 317–328, juillet 1989.
- [15] G. Shih and L. Ebert, “The effect of the fiber/matrix interface on the flexural fatigue performance of unidirectional fiberglass composites,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 28, no. 2, pp. 137–161, 1987.
- [16] E. Mader, S. Gao, and R. Plonka, “Static and dynamic properties of single and multi-fiber/epoxy composites modified by sizings,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 67, no. 6, pp. 1105–1115, May 2007.

- [17] J. Gassan, “A study of fibre and interface parameters affecting the fatigue behaviour of natural fibre composites,” *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.*, vol. 33, no. 3, pp. 369–374, Mar. 2002.
- [18] E. K. Gamstedt, L. A. Berglund, and T. Peijs, “Fatigue mechanisms in unidirectional glass-fibre-reinforced polypropylene,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 59, no. 5, pp. 759–768, 1999.
- [19] Dubois, T. (2005), *Boeing 787 : Les belles promesses de la légèreté*. Science & vie, hors-série N° 231, p. 22-29.
- [20] Jones, R.M. (1975), *Mechanics of composite materials*, Washington D.C., USA: Scripta Book Company, 355 p. ISBN 0070327904.
- [21] Horton, R.E. and Mccarty, J.E. (1993), *Damage tolerance of composites*. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites. Ohio, USA: ASM International, p. 259267. ISBN 0871702797 (v.1).
- [22] D. Gay, *Matériaux composites*. 3e édition revue et augmentée, Hermès, Paris (1991).
- [23] Koizumi M. (1992), The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* 34, 3-10.
- [24] Kieback, B., Neubrand, Riedel, A. H. (2003), Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering A362* 81–105.
- [25] Moya, J. S., Sanchez-Herencia, A. J., Requena, J. & moreno, R, (1992), Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, Vol. 14, p.333-35.
- [26] Yin, H. and Sun, L. and Paulino, G., (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materiala* , vol.52,p.3535-3543.

- [27] K.Morinaga and K.U.Toto, « Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using Slip Cast Method », *Sci.Technol*, p.4, December 1993.
- [28] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [29] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [30] Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan.
- [31] [S. Hachemi, M. Mourad.2017] Senouci Hachemi, Maghrar Mourad « Etude analytique du Flambement et de la vibration libre de plaque FGM sandwich reposons sur fondation élastique ». Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil.2017.
- [32] Hao D, Wei C 2016 Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams *Composite structures (Sciencedirect)*, 141, (2016), 253263.
- [33] Simsek M 2015 Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions *Composite structures (Sciencedirect)*, 133, (2015), 968-978.
- [34] Qian LF, Batra RC 2005 Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies. *J Sound Vib* 2005;280:415–24.
- [35] Enab T Performance improvement of total knee replacement joint through bidirectional functionally graded material *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering IJMME-IJENS Vol:14 No:02*.
- [36] Udupa G, Rao S, Gangadharan K 2014 Functionally graded composite materials: An overview”, *International conference on advances in manufacturing and material engineering, AMME 2014*.

- [37] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S. R. (2016), “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures.*, 22(2), 257-276.
- [38] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia E A. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 2010; 6(2):113-121.
- [39] Hosseini-Hashemi S, Taher HRD, Akhavan H, Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 2010 ;34:1276-1291.
- [40] Reddy JN. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons; 2002.
- [41] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel. Compos. Struct.*, 18 (2), 425-442.
- [42] Srinivas, S., & Rao, A. K. (1970). Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 6(11), 1463-1481.
- [43] Shimpi, R. P., Arya, H., & Naik, N. K. (2003). A higher order displacement model for the plate analysis. *Journal of reinforced plastics and composites*, 22(18), 1667-1688.
- [44] Hejali H, Tounsi A, Houari MSA, Bessaim A, Adda Bedia EA. New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *J Eng Mech (ASCE)* 2014;140(2):374-383.

- [45] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos B Eng* 2012;43(2):711-725.
- [46] Ferreira AJM, Castro LM, Bertoluzza S. A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory. *Compos Struct* 2009;89:424-432.
- [47] Abualnour M, Houari MSA, Tounsi A, Adda Bedia EA, Mahmoud SR. A novel quasi 3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Compos Struct* 2018; 184:688-697.
- [48] Srinivas S, Joga CV, Rao AK. An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 1970;12(2):187-99.
- [49] Reddy JN, Phan ND. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a shear deformation higher-order theory. *J Sound Vib* 1985; 98(2):157-70.
- [50] Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nucl Eng Des* 2012;250:8-13.
- [51] Kolahchi R, Zarei MS, Hajmohammad MH, Nouri A. Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *Int J Mech Sci* 2017; 130:534-545.
- [52] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51(4):745-752.
- [53] Pai PF. A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *Int J Solids Struct* 1995;32(16):2295-2313.

- [54] Bounouara F, Benrahou KH, Belkorissat I, Tounsi A. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel Compos Struct* 2016;20(2):227-249.
- [55] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991;29(8):901-916.
- [56] Woo J, Meguid SA, Ong LS. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib* 2006;289(3):595-611.
- [57] Chakraverty S, Pradhan KK. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *Int J Appl Mech* 2014;6(4):1450043.
- [58] Feldman E, Aboudi J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos Struct* 1997;38(1):29–36.
- [59] Chi S-H, Chung Y-L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43:3657-3674.
- [60] Chi S-H, Chung Y-L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part II: numerical results. *Int J Solids Struct* 2006;43:3675-3691.
- [61] Joshi PV, Gupta A, Jain NK, Salhotra R, Rawani AM, Ramtekkar GD. Effect of thermal environment on free vibration and buckling of partially cracked isotropic and FGM micro plates based on a non classical Kirchhoff's plate theory: An analytical approach. *International Journal of Mechanical Sciences* 2017; 131, 155-170.
- [62] Xiao JR, Batra RC, Gilhooley DF, Gillespie JrJW, McCarthy M A. Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2007, 196 (4-6), 979-987.

- [63] Praveen GV, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures* 1998; 35:4457-4476.
- [64] Park JS, Kim JH. Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *J Sound Vib* 2006;289(1–2):77-93.
- [65] Meksi A, Benyoucef S, Houari MSA, Tounsi A. A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Struct Eng Mech* 2015;53(6):1215-1240.
- [66] Murthy MV. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. NASA Technical Paper 1981; 1903.
- [67] Sahoo SS, Panda SK, Mahapatra TR. Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel – an experimental approach. *Eur J Mech A/Solids* 2016;59:95-113.
- [68] Mahapatra TR, Kar VR, Panda SK. Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment. *Int J Struct Stab Dyn* 2016;16(3):1450105.
- [69] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012;94(5):1814-1825.
- [70] Fourn H, Ait Atmane H, Bourada M, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud SR. A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates. *Steel and Composite Structures* 2018. 27(1): 109-122.
- [71] Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), “A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate”, *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115.



[72] Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, 25(6), 717-726.

[73] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018), "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, 129, 251-264.

[74] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M (2011) Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos Part B* 42(2):123–133

## RESUME

Ce travail présente une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé qui est originale par le fait qu'elle inclue l'effet d'étirement d'épaisseur (stretching effect) et cela pour l'analyse statiques et la vibrations libres des plaques à gradient de propriétés. Le principe de Hamilton est utilisé pour obtenir les équations du mouvement. Le nombre d'inconnues pour la formulation proposée est de seulement quatre contrairement à d'autres théories d'ordre élevé proposées dans la littérature, ce qui la rend plus efficace et simple à prédire le comportement statique et dynamique des plaques , les résultats obtenus par l'analyse mathématique sont analysés et comparés à ceux de la littérature ce qui conduit à démontrer l'exactitude du modèle proposé. L'approche théorique actuelle de la plaque tient compte à la fois des déformations transversales en cisaillement et des déformations normales et satisfait aux conditions aux limites de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque sans l'aide de facteur de correction de cisaillement.

L'exactitude des solutions proposées est vérifiée par la comparaison avec d'autres résultats trouvés dans la littérature.

**Mots-clés :** Plaques à gradient fonctionnel (FG) ; flexion ; vibration ; nouvelle théorie des plaques ; déformation normale.

## ABSTRACT

This work presents a new theory of high order shear deformation which is original in that it includes the effect of thickness stretching for static analysis and free vibration of gradient property plates. The Hamilton principle is used to obtain the equations of motion. The number of unknowns for the proposed formulation is only four, unlike other high order theories proposed in the literature, which makes it more effective and simple to predict the static and dynamic behaviour of the plates, the results obtained by the mathematical analysis are analyzed and compared with those of the literature, which leads to demonstrating the accuracy of the proposed model. The current theoretical approach to the plate takes into account both transverse shear deformations and normal deformations and satisfies the conditions at the zero shear stress limits on the plate surfaces without the use of shear correction factors.

The accuracy of the proposed solutions is verified by comparison with other results found in the literature.

**Keywords :** Functionally graded (FG) plates · Bending · Vibration · New plate theory · Normal deformation

## ملخص

يقدم هذا العمل نظرية فعالة و مبتكرة عن القص ذو الترتيب العالي و التشوه الطبيعي لتحليل الاهتزازات الساكنة و الحرة للوحات التدرج الوظيفية. يستخدم مبدأ هاملتون هنا لاشتقاق معادلات الحركة . يتم تقليل عدد المجاهيل والمعادلات للنظرية الحالية ، مما يجعلها سهلة الاستخدام. يأخذ النهج النظري الحالي للوحة في الاعتبار كل من تشوهات القص العرضي و التشوه العمودي و يلي شروط إجهادات القص العرضي و التي تنعدم على حواف الصفيحة دون استخدام عامل تصحيح القص. على عكس أي نظرية أخرى، فإن عدد الدوال غير المعروفة في النظرية المقترحة هي أربعة فقط ، مقارنة بخمسة أو أكثر في حالات أخرى لنظريات تشوه القص العرضي والتي تأخذ بعين الاعتبار التشوه العمودي.

يتم التحقق من دقة الحل المقترح من خلال مقارنته مع النظريات الأخرى.  
**كلمات البحث :** لوحات التدرج الوظيفي . انثناء . الاهتزاز . نظرية جديدة للوحات . تشوه طبيعي

