

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : AYACHE Belqassim

Intitulé de la thèse

Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Soutenu le : 19/02/2019 Composition du jury :

BOURADA Mohamed	MCA	UDL SBA	Président
AIT ATMANE Hassen	Pr	UHBC Chlef	Directeur de thèse
TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Co-Directeur de thèse
BENYOUCEF Samir	Pr	UDL SBA	Examineur
YEGHNEM Redha	Pr	U. Saida	Examineur
BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	C.U. Relizane	Examineur

Année universitaire 2018-2019

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Ma très chère mère, Mon très cher père,

Mes frères, Mes sœurs, et toute Ma famille,

Ainsi qu'à tous mes amis sans exception.

Belqassim

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier et en premier lieu **ELLAH**, le Tout Puissant et Miséricordieux qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour mener à bonne fin ce travail.

Je remercie **mes très chers parents** pour toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont offerts tout au long de mes études. Ainsi que je remercie **mes frères, mes sœurs**, et toute **ma famille**.

Ces recherches ont été réalisées sous l'excellente direction de Monsieur **Mr. Hassen AIT ATMANE**, Professeur à l'Université de Chlef. Je tiens à lui exprimer toute mes immenses gratitude pour avoir encadré, orienté et suivi le travail pendant la durée de l'élaboration et de la rédaction de cette thèse, aussi pour m'avoir accordé sa confiance. Je tiens à lui remercier très chaleureusement pour m'avoir donné l'occasion de travailler sur un sujet d'un tel intérêt.

Je tiens à remercier également Monsieur **Abdelouahed TOUNSI**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Je tiens à remercier :

Monsieur **Mohamed BOURADA**, Maître de conférences A à Université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abbés, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Monsieur **Samir BENYOUCHEF**, Professeur à Université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abbés, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Monsieur **Redha YEGHNEM**, Professeur à Université de Saida, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Monsieur **Anis BOUSAHLA Abdelmoumen**, Maître de conférences A au centre universitaire de Relizane, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur

Riadh BENNAI, pour toute l'aide qu'il m'a apportée et sa disponibilité tout au long de ce travail.

Je ne pourrai oublier de remercier tous **les enseignants** qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation depuis mes classes de primaire à ce jour.

Un grand merci à tout l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie pour leurs aides morales et leurs encouragements.

Finalement, Je remercie tous mes amis, et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

RESUMES

Résumé et mots clés

Le cadre général de cette thèse de doctorat est l'analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

Le but de ce travail de recherche se fixe deux objectifs principaux, le premier consiste à une étude de la flexion et de la vibration libre de plaques fonctionnellement gradués en tenant compte de l'effet de la déformation normale (effet de stretching). Nous avons proposé un nouveau modèle analytique basé sur une théorie d'ordre élevé et un nouveau champ de déplacement à cinq inconnues introduisant des variables intégrales indéterminées.

Le second objectif qui est relatif à une étude de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes d'une poutre FGM poreux avec une nouvelle forme de distribution de la porosité.

Les équations gouvernantes dans la poutre et la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Les solutions analytiques et les relations de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

Une étude paramétrique a été faite afin de quantifier les facteurs régissant le comportement vibratoire de ce type de structures FGM, et de comparer les résultats obtenues à ceux disponibles dans la littérature.

Mots clés: Matériaux fonctionnellement gradués, Vibrations libre, propagation des ondes, porosité, effet de stretching.

ملخص و الكلمات المفتاحية

الإيطار العام لأطروحة الدكتوراه هذه هو إجراء تحليل للخصائص السنتيكية و الديناميكية للهياكل السميكة و المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيا باستخدام نماذج تشوه القص ذات الترتيب العالي.

الهدف من هذه الأطروحة يمكن حصره في هدفين رئيسيين، الأول يتمثل في دراسة الإنحاء و الاهتزازات الحرة للصفائح المتدرجة وظيفيا، مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير التشوه الناظمي. قمنا باقتراح نموذج تحليلي جديد مبني على نظرية الترتيب العالي، بحقل إزاحة جديد ذو خمسة مجاهيل و ذلك بإدخال المتغيرات التكاملية الغير محددة.

الهدف الثاني من هذه الأطروحة متعلق بدراسة تأثير المسامية على إنتشار الموجات لرافدة متدرجة وظيفيا، و ذلك باستعمال شكل جديد لتوزيع المسامية. استعمال نظرية قص ذات ثلاث متغيرات.

يتم الحصول على معادلات الحركة للروافد و الصفائح المتدرجة السميكة ضمن مبدأ هاميلتون. العلاقات التحليلية للانتشار نتحصل عليها عن طريق الحل التحليلي المتحصل عليه باستعمال طريقة نافيي.

تم إجراء دراسة معيارية لتحديد العوامل التي تحكم السلوك الاهتزازي لهذا النوع من الهياكل ، و مقارنة النتائج المتحصل عليها مع النظريات المدروسة سابقا.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا، الإهتزازات الحرة، انتشار الأمواج، المسامية ، التشوه

الناظمي

Abstract and keywords

The general framework of this doctoral thesis is the analysis of the static and dynamic properties of thick FGM structures using high order shear deformation models.

This research work has two main objectives; the first is a study of the bending and free vibration of functionally graduated porous plates taking into account the effect of normal deformation (stretching effect). We have proposed a new analytical model based on a high order theory and a new five-unknown displacement field introducing indeterminate integral variables.

The second objective relates to study of the effect of porosity on wave propagation of a porous FGM beam with a new form of porosity distribution.

The governing equations in the beam and the FG plate are derived using the Hamilton principle. Analytical dispersion relations are obtained using the Navier solution.

A parametric study was conducted to quantify the factors governing the vibration behavior of this type of FGM structures, and to compare the results obtained with those available in the literature.

Keywords: Functionally graduated materials, free vibrations, wave propagation, porosity, stretching effect.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Dédicace	ii
Remerciement	iii
Résumé et mots clés	vi
ملخص و الكلمات المفتاحية	vii
Abstract and keywords	viii
Sommaire	ix
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	x
Liste des notations	x
INTRODUCTION GENERALE	1
I GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES	8
I.1 Introduction	9
I.2 Définition d'un matériau composite	9
I.3 Les éléments constituant d'un matériau composite	10
I.3.1 Les renforts	10
I.3.2 La matrice	13
I.3.3 Interfaces	15
I.3.4 Charges- additifs	15
I.4 Matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	15
I.5 Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués	16
I.6 Types de matériaux fonctionnellement gradués	18
I.6.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM	19
I.6.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM	20
I.6.3 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM	21
I.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM	21
I.7.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	21
I.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	22
I.7.3 Propriétés matérielles de plaque E-FGM	24
I.8 Loi de mélange	25
I.9 Conclusion	26
II LES THEORIES REGISSANT LE COMPORTEMENT DES STRUCTURES EN MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES	27
II.1 Introduction	28

II.2	Comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués	28
II.2.1	Loi de comportement des matériaux isotropes	28
II.3	Les théories des structures FGM	28
II.3.1	Introduction	28
II.3.2	Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués	29
II.3.2.1	Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory-CBT)	30
II.3.2.2	Modèle de Timoshenko (FSDBT)	31
II.3.2.3	Modèle d'Ordre Elevé	33
II.3.3	Les modèles des plaques pour les matériaux fonctionnellement gradués	34
II.3.3.1	Le modèle classique des plaques de Kirchhoff-Love (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)	35
II.3.3.2	Le modèle de Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	36
II.3.3.3	Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur	38
II.3.3.4	Modèles d'ordre élevé pour les plaques Raffinée RPT	43
II.4	Effet de la déformation normale (effet de stretching)	44
II.5	Généralités sur les phénomènes de propagation des ondes un milieu matériel élastique	45
II.5.1	Types des ondes élastiques	45
II.5.1.1	Ondes longitudinales et transversales	45
II.5.1.2	Ondes de Surface	46
II.5.1.3	Ondes de Rayleigh	46
II.5.1.4	Ondes progressives et ondes stationnaires	47
II.5.2	Eléments de propagation des ondes	48
II.5.2.1	Equation de propagation	48
II.5.2.2	Vitesse de phase	49
II.5.2.3	Vitesse de groupe	50
II.6	Conclusion	51
III	ANALYSE THEORIQUE DU COMPORTEMENT STATIQUE ET VIBRATOIRE DES STRUCTURES FGM	52
III.1	Introduction	53
III.2	Analyse théorique du comportement mécanique des plaques FGM	53
III.2.1	Formulations du problème	53
III.2.2	Équations constitutives	55
III.2.3	Équations de mouvement	57
III.2.4	Solution analytique pour une plaque rectangulaire sur appuis simples	62

III.3	Analyse théorique de la vibration dans les poutres FGM–Test porosité-	64
III.3.1	Formulations du problème	64
III.3.2	Propriétés des matériaux	65
III.3.3	Relations cinématiques	66
III.3.4	Equations de mouvement	68
III.3.5	Relations de dispersion	71
III.4	Conclusion	73
IV	VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS	74
IV.1	Introduction	75
IV.2	Analyse des résultats du comportement mécanique les plaques FGM	75
IV.2.1	Analyse des résultats du comportement mécanique les plaques FGM	75
IV.2.2	Analyse de la vibration libre des plaques FGM	80
IV.3	Discussion des résultats de l'étude de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les poutres FGM	95
IV.4	Conclusion	113
	CONCLUSION GENERALE	114
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	117

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Figure I.1 :	Présentation d'un matériau composite	10
Figure I.2 :	Fibre de verre	11
Figure I.3 :	Structure cristalline du graphite [BERTHELOT ,2012]	12
Figure I.4 :	Fibre d'aramide	13
Figure I.5 :	Matériaux FGM poreux	20
Figure I.6 :	La variation du module de Young dans une structure P-FGM.	22
Figure I.7 :	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM	24
Figure I.8 :	La variation du module de Young de la poutre E-FGM	25
Figure I.9 :	Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel (a) FGM continue ; (b) FGM discontinue	26

Chapitre II

Figure II.1 :	Schéma d'un élément de poutre [Berthelot 2012]	30
Figure II.2 :	Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli	31
Figure II.3 :	Cinématique de la poutre de Timoshenko	32
Figure II.4 :	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé d'une poutre	33
Figure II.5 :	Schéma d'un élément de plaque	35
Figure II.6 :	Cinématique de la plaque de Love-Kirchhoff [Reddy 1997]	35
Figure II.7 :	Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy 1997]	37
Figure II.8 :	Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.	38
Figure II.9 :	Cinématique des plaques de la théorie d'ordre supérieur.	39
Figure II.10 :	Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	42
Figure II.11:	Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	42
Figure II.12:	Phénomène d'onde : -a) longitudinale et -b) transversale	46

Figure II.13:	Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface. [O. Xeridat 2011]	47
Figure II.14:	propagation d'onde stationnaire	47
Figure II.15:	Onde progressive sinusoïdale Trajectoire de deux points x et $x + \Delta x$ entre les instants t et $t + \Delta t$	50
Figure II.16:	Propagation d'un paquet d'ondes.	51

Chapitre III

Figure III.1 :	Géométrie de la plaque FGM	55
Figure III.2 :	Coordonnées et géométrie de la poutre en FGM	64

Chapitre IV

Figure IV.1 :	Variation de la flèche adimensionnelle au centre w^* en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ .	77
Figure IV.2 :	Variation de la déflexion adimensionnelle w^* à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p = 2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.	78
Figure IV.3 :	Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p = 2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.	79
Figure IV.4 :	Variation de la contrainte normale σ_{zz} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p = 2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.	79
Figure IV.5 :	Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p = 2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.	80
Figure IV.6 :	Variation de la fréquence fondamentale \bar{w} en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfait ($a/h=2$).	84
Figure IV.7 :	Variation de la fréquence fondamentale \bar{w} en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfait	86

	(a/h=5)	
	Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction du	
Figure IV.8 :	paramètre de matériau ρ d'une plaque FGM carrée et parfait	88
	(a/h=10).	
	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle	
Figure IV.9 :	de différentes plaques FGM carrées parfaites en fonction du	89
	rapport longueur / épaisseur (a / h).	
	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle	
Figure IV.10 :	de différentes plaques de FGM parfaites rectangulaires en	89
	fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).	
	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle	
Figure IV.11 :	de différentes plaques FGM carrées parfaites en fonction du	90
	rapport longueur / épaisseur (a / h).	
	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle	
Figure IV.12 :	de différentes plaques de FGM parfaites rectangulaires en	90
	fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).	
	Variation Fréquence fondamentale non dimensionnelle des	
Figure IV.13 :	plaques FGM rectangulaires parfaites (b = 2a) en fonction du	92
	rapport a / h. (a) $\varepsilon_z \neq 0$ (b) $\varepsilon_z = 0$.	
	Variation Fréquence fondamentale non dimensionnelle de la	
Figure IV.14 :	plaque FGM parfaite carrée en fonction de paramètre du	93
	matériau. (a) $\varepsilon_z \neq 0$ (b) $\varepsilon_z = 0$.	
Figure IV.15 :	L'effet de la porosité sur la fréquence fondamentale non	94
	dimensionnelle des plaques de FGM. ($\varepsilon_z \neq 0$, a/h=2) .	
	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle	
Figure IV.16 :	des plaques FGM en fonction de l'indice de porosité ($\varepsilon_z \neq 0$).	95
	(a) a/h=2, (b) a/h=10.	
Figure IV.17 :	Variation de la fréquence propre d'une poutre FGM en	99
	fonction de paramètre de matériau ($\kappa=10$ and L/h=10).	
Figure IV.18 :	Variation de la vitesse de phase d'une poutre FGM en	101
	fonction de paramètre de matériau ($\kappa=10$ and L/h=10).	

Figure IV.19 :	Les courbes de fréquence naturelle de différentes poutres FG en fonction du nombre d'ondes ($p=2$ and $L/h=10$).	103
Figure IV. 20:	Les courbes de vitesse de phase de différentes poutres FG en fonction du nombre d'ondes ($p=2$ and $L/h=10$).	105
Figure IV. 21:	Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence propre d'une poutre FG ($k_p=10$ and $L/h=10$).	107
Figure IV. 22:	Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse de phase d'une poutre FG ($k_p=10$ et $L/h=10$).	110
Figure IV. 23:	Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence propre et la vitesse de phase ($k_p=10$ et $p=2$).	111
Figure IV. 24:	Influence du paramètre du matériau sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k_p=10$ et $L/h=10$).	112

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
w	Déplacement transversale
W_b	Déplacement dû à la flexion
w_s	Déplacement dû au cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
P	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} .
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
θ_i	rotations autour de l'axe i
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	les éléments de déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	les éléments de déformations de cisaillement
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	les coordonnées cartésiennes rectangulaires
δU	l'énergie de déformation virtuelle
δV	le travail virtuel externe
δK	la variation de l'énergie cinétique
$q, N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	Les charges transversales appliquées
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et	Champ virtuel de déplacement
$\delta \phi_z$	
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement

∂	Dérivée partielle
C_{ij}	Coefficient de rigidité
P_m, P_c	les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
λ	fraction de volume de porosité
ρ	densité matérielle de la structure FGM
$\{..\}$	Vecteur colonne
$[..]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et ϕ_{mn}	les coefficients de déplacement maximum inconnus
ω	fréquence naturelle
<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement graduée
<i>Al</i>	L'aluminium
Al_2O_3	Oxyde d'aluminium
<i>Si3N4</i>	Nitride de silicium
<i>SUS304</i>	Acier inoxydable
<i>CLPT</i>	La théorie classique de la plaque laminée
<i>FSDT</i>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
<i>ESDPT</i>	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.
<i>TSDT</i>	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre
<i>HSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre II

Tableau II.1:	Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres isotropes et FGM	34
----------------------	---	----

Chapitre III

Tableau III.1:	Facteur de la distribution de la porosité ξ .	66
-----------------------	---	----

Chapitre IV

Tableau IV.1:	Les propriétés des matériaux utilisés	75
Tableau IV.2:	Etude comparative de la flèche w^* et la contrainte longitudinale d'une plaque FGM carrée.	76
Tableau IV.3:	Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale w pour les plaques FGM carrées.	81
Tableau IV.4:	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour différentes plaques rectangulaires.	82
Tableau IV.5:	Les propriétés des matériaux utilisés	94
Tableau IV.6:	Fréquences naturelles des poutres FG poreux pour différents rapports d'épaisseur, paramètres de porosité, paramètre de matériau et les distributions de porosité.	96
Tableau IV.7:	Les vitesses de phase des poutres FG poreux pour différents rapports d'épaisseur, paramètres de porosité, paramètre de matériau et les distributions de porosité.	97

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont tous temps été utilisé par l'homme, par exemple le bois, le torchis sont également des matériaux composites de la vie quotidienne. Encore on utilise des matériaux composites pour optimiser les performances de certaines armes par exemple, les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues en bois, soies collées et tendons de bœuf ; béton et le béton armé. Aussi les épées damassées ou sabres japonais dont la lame est en acier sont en fer doux. Plus tard et avec les révolutions scientifiques, les matériaux composites ont été utilisés avec succès dans les industries du génie civil, de la mécanique, de l'aéronautique et d'autres applications technologiques. Dans les structures composites stratifiées classiques, des lames élastiques homogènes sont assemblées les unes aux autres pour obtenir des propriétés mécaniques et thermiques améliorées. L'inconvénient majeur d'un tel assemblage est la discontinuité de propriétés des couches qui peut décollés par des concentrations de contraintes le long des interfaces, en particulier lorsque des températures élevées sont impliquées. Cela peut entraîner des délaminages, des fissures et d'autres mécanismes d'endommagement résultant du changement brusque et soudain des propriétés mécaniques à l'interface des couches.

2. Quelques travaux antérieurs

Une façon de résoudre ce problème consiste à utiliser des matériaux de modèle fonctionnel dans lesquels les propriétés des matériaux varient de manière continue. Le concept de matériau fonctionnellement graduée (FGM) a été proposé en 1984 par les scientifiques spécialistes des matériaux dans la région de Sendai au Japon. Cette nouvelle génération de composites à hétérogénéité microscopique proposés, est obtenu en examinant les fractions volumiques, la microstructure, la porosité, etc. Ils sont souvent fabriqués à partir d'un mélange de céramiques et de métaux pour atteindre l'exigence importante des caractéristiques matérielles. En conséquence, les FGM possèdent divers avantages par rapport aux stratifiés composites classiques, tels que l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique, en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales. Elles ont donc reçu de nombreuses applications dans les industries modernes telles que l'aérospatiale, la mécanique, l'électronique et l'optique,

génie chimique, biomédical, nucléaire et génie civil pour en nommer quelques-uns au cours des deux dernières décennies. Ces applications dans plusieurs domaines des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont été étudiées à l'aide de méthodes analytiques et numériques. Plusieurs études ont été menées pour analyser le comportement des plaques et des poutres dans un matériau de FGM. Par exemple, Reddy (2000) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaires FGM, en se basant sur sa théorie des plaques de déformation au troisième ordre. Reddy et Cheng (2001) ont présenté un modèle tridimensionnel pour une plaque de FGM soumise à des charges mécaniques et thermiques, toutes deux appliquées au sommet de la plaque. Vel et Batra (2004) se sont rapprochés du comportement réel de la structure en étudiant la vibration libre des plaques rectangulaires de FGM avec une solution tridimensionnelle. Zenkour (2005) a présenté la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdal afin d'étudier le flambement et la vibration libre de plaques FG simplement supportées. Zenkour (2006) a présenté une théorie de la déformation en cisaillement généralisée dans laquelle les déplacements de la membrane sont étendus sous forme de fonction trigonométrique à travers l'épaisseur. Kadoli et al. (2008) ont étudié la réponse en flexion des poutres FG en utilisant une déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une méthode numérique. Malek zadeh (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres de plaques épaisses dans les FGM sur des bases élastiques à deux paramètres. Par la suite, de nouvelles fonctions de forme ont été proposées par Ait Atmane et al (2010) et Benachour et al. (2011). Shahrjerdi et al. (2011) ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement du second ordre pour analyser la vibration de plaques à gradation fonctionnelle solaires dépendantes de la température.

Ould Larbi et al. (2013) ont présenté une théorie efficace de la déformation par cisaillement pour les poutres basée sur la position de la surface neutre pour la flexion et la vibration libre des poutres FG. De la même manière, Sobhy (2013) a étudié le comportement en vibration et en flambement d'une plaque sandwich de matériau à gradient exponentiel reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Yaghoobi et Torabi (2013a) ont étudié la vibration post-flambement et non linéaire des poutres de FG imparfaits. Yaghoobi et Torabi (2013b) ont examiné de manière analytique les vibrations de grande amplitude et le post-flambement des poutres de FG reposant sur des fondations élastiques non linéaires. Belabed et al. (2014) ont proposé une théorie efficace et simple du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les plaques FG. Yaghoobi et al. (2014) ont étudié la réponse en vibration libre non-linéaire et post-flambement de poutres FG reposant sur un socle élastique non linéaire soumis à une charge thermomécanique à l'aide de la méthode

d'itération par variation (VIM). Ait Atmane et al. (2015) ont utilisé une théorie de la déformation par cisaillement à variation constante pour le comportement dynamique des poutres FG épaisses avec des porosités.

Bourada et al. (2015) ont utilisé le concept de position de surface neutre pour développer une théorie de poutre d'ordre trigonométrique simple et raffinée pour le comportement en flexion et en vibration des poutres FG. Attia et al. (2015) ont examiné la réponse dynamique des plaques FG ayant des propriétés dépendant de la température en utilisant divers modèles de plaques raffinées variables. Bouguenina et al. (2015) ont présenté une analyse numérique de plaques FGM d'épaisseur variable soumise à un flambage thermique. Beldjelili et al. (2015) ont analysé la réponse en flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. Larbi Chaht et al. (2015) ont étudié les comportements de flexion et de flambement des poutres nanométriques FG dépendant de la taille, y compris l'effet d'étirement en épaisseur. Tagrara et al. (2015) ont étudié les réponses en flexion, en flambement et en vibration de poutres composites renforcées par des nanotubes de carbone et de calibre fonctionnel. Dans une autre étude, Bennai et al. (2015) ont proposé une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les poutres sandwich FG. Draiche et al. (2016) ont utilisé une théorie raffinée à effet d'étirement pour l'analyse de la flexion de plaques composites stratifiées. Bennoun et al. (2016) ont étudié la réponse en vibration de plaques sandwich FG en utilisant une nouvelle théorie des plaques à cinq variables raffinées. Tounsi et al. (2016) ont proposé une nouvelle théorie des plaques non polynomiales à 3 inconnues pour le flambement et la vibration de la plaque sandwich FG. Bellifa et al. (2017) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement d'ordre zéro non locale pour le flambement non linéaire après le nano-poutre.

L'étude de la propagation des ondes dans les structures de FG a également suscité beaucoup d'attention de la part de plusieurs chercheurs. Han et Liu (2002) ont étudié les ondes SH dans des plaques FG, dans lesquelles la variation de la propriété du matériau était supposée être une fonction quadratique par morceaux dans le sens de l'épaisseur. Chen et al. (2007) ont étudié le comportement de dispersion des ondes dans des plaques de niveaux fonctionnels présentant des propriétés de matériau variant dans la direction de l'épaisseur. Sun et Luo (2011a) ont également étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique de plaques de matériau rectangulaires de calibre fonctionnel avec des supports serrés terminés

soumis à une charge impulsive. En prenant en compte les effets thermiques et les propriétés du matériau dépendant de la température, Sun et Luo (2011b) ont étudié la propagation des ondes d'une plaque infiniment calibrée sur le plan fonctionnel en utilisant la théorie de la plaque de déformation au cisaillement d'ordre supérieur. Récemment, Benadouda et al (2017) ont utilisé une théorie de la déformation par cisaillement pour étudier la propagation des ondes dans des poutres fonctionnellement graduées afin de prendre en compte progressivement l'effet de la porosité.

Des porosités peuvent apparaître dans les matériaux fonctionnalisés (FGM) pendant la fabrication en raison de problèmes techniques conduisant à la création de micro-vides dans ces matériaux. Les structures poreuses FG présentent de nombreuses combinaisons intéressantes de propriétés mécaniques. Afin de traiter ce type de problème, certaines études sur l'effet de la porosité dans les structures de FG ont été publiées dans la littérature; Wattanakulpong et al. (2012) donnent la discussion sur les porosités se produisant dans les échantillons de FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Şimşek et Aydın (2012) ont examiné la vibration forcée de microplaques FG avec des effets de porosité sur la base de la théorie modifiée de la contrainte de couple. Wattanakulpong et al. (2014) abordent également les porosités se produisant à l'intérieur des FGM produites par la technique d'infiltration séquentielle. Ebrahimi et Mokhtari (2015) ont fourni la méthode DT pour la vibration des poutres Timoshenko FG en rotation avec des porosités. De plus, Ait Yahia et al. (2000) ont étudié la propagation des ondes d'une plaque poreuse FG infinie sur la base de diverses théories simples de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. (2015). Jahwari et Naguib (2016) ont étudié les plaques poreuses viscoélastiques FG avec une théorie des plaques d'ordre supérieur et un modèle statistique de distribution cellulaire. Boutahar et al. (2016) ont présenté une analyse par vibrations libres non linéaires de plaques annulaires poreuses FG reposant sur des fondations élastiques. Ils ont conclu que la fraction volumique de porosité et le type de distribution de porosité ont une influence significative sur la réponse en vibration libre géométriquement non linéaire des plaques annulaires FG à grande amplitude. De plus, Mouaici et al. (2016) ont proposé une solution analytique pour la vibration des plaques de FGM présentant des porosités. L'analyse était basée sur la théorie de la déformation du cisaillement avec prise en compte de la position exacte de la surface neutre. Boukhari et al. (2016) ont introduit une théorie efficace de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes de plaques de matériau fonctionnellement graduée. Récemment, Ait Atmane et al. (2016) étudient l'effet de

l'étirement de l'épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique d'une poutre de FG reposant sur des fondations élastiques. Akbas SD (2017) a étudié les effets thermiques sur le comportement vibratoire de poutres FG avec porosité.

3. Objectifs Principaux

Dans ce travail de recherche, une Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé sera apportée. Deux objectifs seront visés à travers cette thèse.

Le premier consiste au une étude de la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées (FGM). Cette étude prend en compte l'effet de la déformation normale (effet de stretching).

Le second objectif de cette thèse est une étude analytique de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les poutres FG poreux en utilisant un nouveau modèle de déplacement basé sur la théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre élevé. Contrairement aux théories classiques sur la déformation par cisaillement, un nouveau champ de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées a été utilisé pour minimiser le nombre d'inconnues. Les matériaux constitutifs de la poutre sont supposés graduellement variables dans le sens de la hauteur de la poutre selon une distribution simple en loi de puissance exprimée en fractions volumiques des constituants. La variation des pores dans le sens de l'épaisseur a une influence sur les propriétés mécaniques. Il est donc nécessaire de prévoir l'effet de la porosité sur le comportement vibratoire et la vitesse de propagation des ondes pour les poutres FG dans cette étude. Une nouvelle une nouvelle forme de distribution de la porosité a été proposée. Le principe de Hamilton est utilisé pour le développement des équations de propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduée. La relation de dispersion analytique de la poutre FG est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. Des exemples numériques illustratifs seront donnés pour montrer les effets de la distribution des fractions volumiques, de la hauteur de la poutre, du nombre d'ondes et de la porosité sur la propagation des ondes dans une poutre fonctionnellement graduée.

4. Structure de la thèse

Le présent travail de thèse est organisé en quatre chapitres:

Après une introduction générale sur le thème des structures FGM (matériaux fonctionnellement gradués, Le premier chapitre est consacré à décrire le cadre général des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs), en donnant des brefs généralités sur les matériaux composites, l'histoire de développement des FGMs, leur applications ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives et une comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.

Le deuxième chapitre consiste à une présentation des théories régissant le comportement des structures en matériaux fonctionnellement gradués. Différentes modèles théoriques des plaques et des poutres ont été étudiées. Quelques généralités sur la propagation d'ondes sont présentées à la fin de ce chapitre.

Le troisième chapitre, présente une formulation d'un modèle analytique de la flexion et la vibration libre des plaques FGM en tenant compte l'effet de la déformation normale (effet de stretching), suivi par une formulation d'autre modèle analytique qui présente l'effet de la porosité sur la propagation des ondes d'une poutre FG poreux. Ces modèles analytiques basés sur une théorie d'ordre élevé avec une nouvelle forme de distribution de la porosité, et un nouveau champ de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées.

Le chapitre quatre est consacré à la validation numérique des résultats du modèle proposé ainsi que la discussion de ces résultats.

Enfin, une conclusion générale est proposée permettant de mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans ce travail de thèse qui concernent le comportement des structures FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

I.1.Introduction

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie civile, mécanique et spatiale grâce à leur grande rigidité et résistance. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métalliques), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit une concentration des contraintes dans cette interface, ce qui peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface. Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux FGM, une nouvelle génération de composites à hétérogénéité microscopique proposée au début des années 1980

Une revue bibliographique sur les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est présentée dans ce chapitre. Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure en matériau composites (définition et différents constituants). Dans un deuxième temps, l'accent sera mis sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) tel que leur historique, les type des FGM, les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et la loi de mélange.

I.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini comme une association de plusieurs matériaux de natures différentes à l'échelle microstructurale. Cet assemblage conduit à un matériau dont les performances sont supérieures à celles d'un matériau à un seul constituant. [BERTHELOT, 2012]. Un matériau composite est constitué généralement d'une matrice et d'un renfort. La matrice est caractérisée par une résistance mécanique plus faible, et elle sert à maintenir les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées (modules et limite d'élasticité, résistance mécanique, etc.) [d.GAY, 1991].

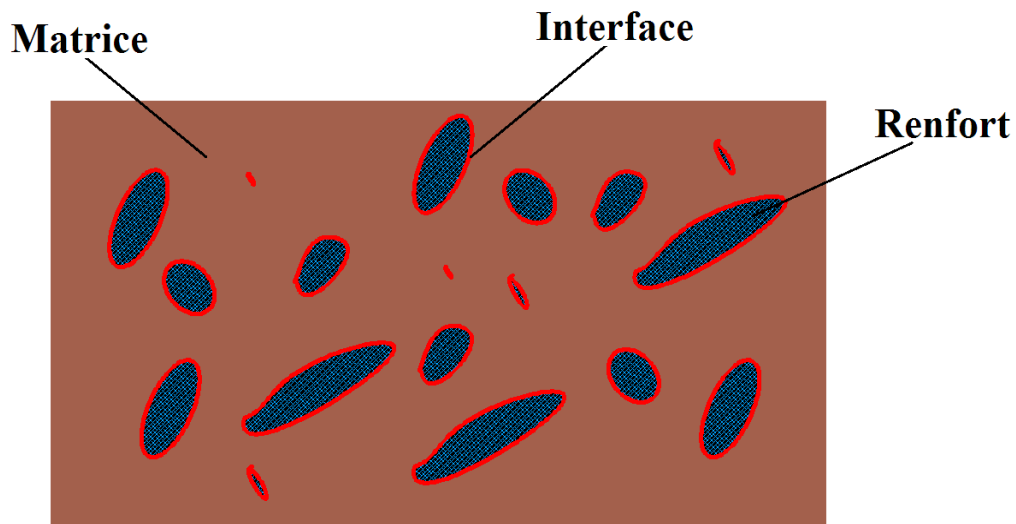


Figure I.1. Présentation d'un matériau composite.

I.3. Les éléments constitutants d'un matériau composite

I.3.1. Les renforts

Les composites sont souvent désignés selon le type de renfort. Ainsi, il existe des composites à particules, des composites sandwichs, des composites à phases dispersées ou encore des composites fibreux (figure I.2).

Les renforts forment les armatures du matériau composite, ils aident à améliorer la résistance mécanique et la rigidité et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue. Ainsi les fibres sont constituées par plusieurs milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 25 μm .

Les renforts sont présents sous plusieurs formes : simple linéique, tissu surfacique simple, tissu complexe.

Les renforts sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,
- L'architecture du renfort.

Nature de la fibre

La nature de la fibre importe beaucoup sur le produit final escompté, elle permet d'obtenir un matériau anisotrope avec un renforcement dans des directions préférentielles. Et selon la nature de fibre il existe plusieurs types de fibres parmi

lesquelles les fibres synthétiques les plus utilisées sont les fibres de verre, de carbone et d'aramide.

❖ **Fibre de verre :**

Sont les plus utilisés depuis les années quarante dans la construction de structures composites grâce à leur excellent rapport performance/prix [Dorlot et al. 1999]. Les filaments de fibre sont obtenus par filage de verre en fusion à travers des filières en alliage de platine. Le module d'Young de ces fibres, voisin de celui de l'aluminium, rend l'utilisation des fibres de verre intéressante lorsqu'elles sont associées à une matrice de faible rigidité telle que les polymères. En général, le plus grand problème associé à ces fibres est leur haute sensibilité aux endommagements superficiels, en particulier les rayures qui limitent leur résistance mécanique et créent des zones de concentration de contraintes. Cela est évité lors de la fabrication en empêchant tout contact entre les fibres elles mêmes et avec tout autre objet, en recouvrant les fibres d'un enduit qui a pour second rôle de favoriser l'adhésion entre les fibres et la matrice [Hammami, 2018]. Malgré cela, il faut faire très attention lors de la manipulation des fibres afin d'éviter les éventuels endommagements superficiels.

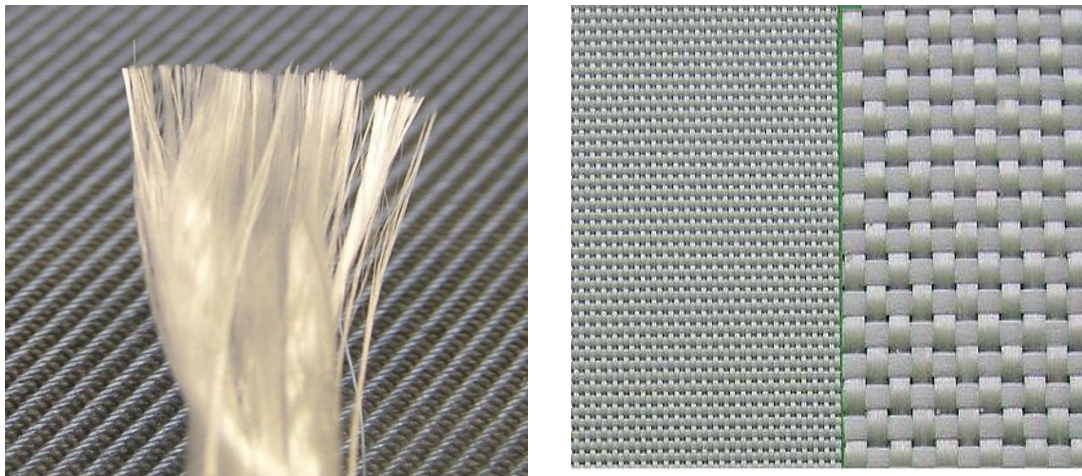


Figure I.2 : Fibre de verre.

❖ **Fibre de carbone**

Sont des filaments à base de fibre acrylique de rayonne obtenus à partir de la distillation de pétrole ou de houille. Elles sont oxydées à chaud puis chauffées à 1500°C dans une atmosphère d'azote. Il ne subsiste alors que la chaîne hexagonale des atomes de carbone (Figure I.3). On obtient des filaments noirs et brillants. Les fibres de carbone ont de très bonnes propriétés mécaniques. Les fibres de carbone ont

des modules qui varient de 150 à 800 GPa et une masse volumique en général inférieure à 2000 kg/m^3 . Leur résistance à l'impact est mauvaise, d'autre part elles sont anti-oxydantes, résistantes à la chaleur et conduisent l'électricité.

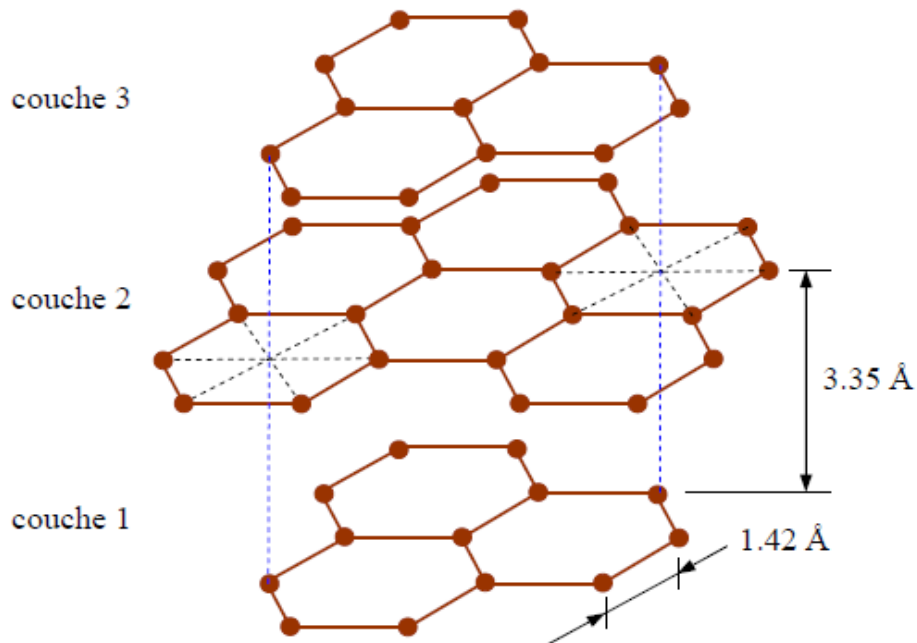


Figure I.3 : Structure cristalline du graphite [BERTHELOT ,2012].

❖ Fibre d'aramide (Kevlar)

Sont des fibres aramides, de couleur jaune paille, qui ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les fibres de carbone mais leur résistance à la compression est faible (Figure I.4). Ce sont des polyamides aromatisés obtenus par synthèse à basse température, puis filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé. Ces fibres ont des modules allant de 60 à 180 GPa et une masse volumique d'environ 140 kg/m^3 . Ces fibres ont deux avantages particuliers, elles ont une faible densité et une résistance importante à l'impact. Cependant, les composites de kevlar ont une faible tenue mécanique en compression, généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite.

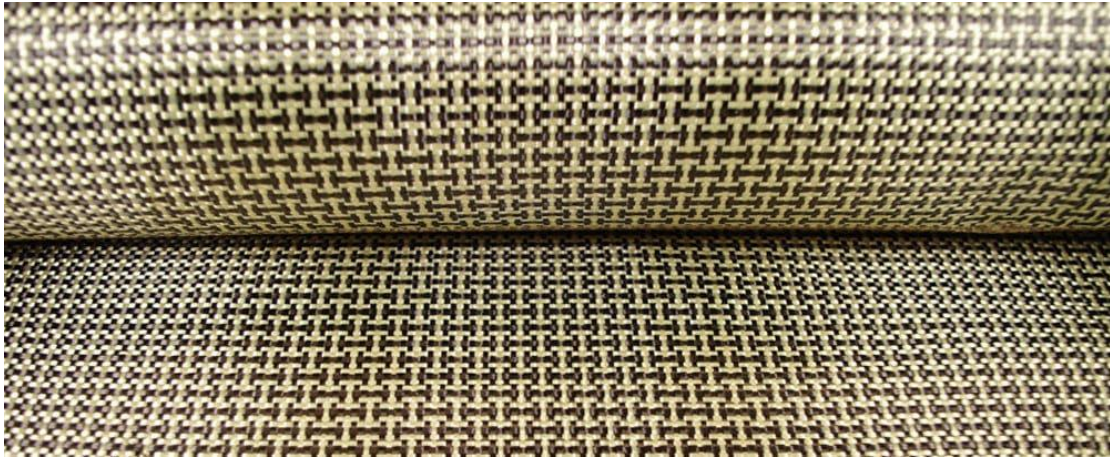


Figure I.4 : Fibre d'aramide.

I.3.2. La matrice

Les matrices utilisées dans les matériaux composites désignent la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte, et ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Le solide formant la matrice peut être d'origine métallique, céramique ou polymère. A partir de la nature de la matrice les matériaux composites sont classés en trois catégories : Les composites à matrice polymère ou organique (CMO), Les composites à matrice métallique et Les composites à matrice céramique.

❖ **Les composites à matrice polymère ou organique (CMO)** : sont utilisés dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les avantages potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc.

La fabrication des CMO emploie deux types de matrices: les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage) (Draiche K., 2015).

➤ **les résines thermoplastiques** : dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées.

➤ **les résines thermodurcissables** : contrairement aux résines thermoplastiques, ce type ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après polymérisation par apport de chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. Ainsi, les résines thermodurcissables possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques.

Du fait de ces caractéristiques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites. Cependant, l'amélioration des caractéristiques des résines thermoplastiques conduit à une utilisation qui ne cesse de croître [BERTHELOT, 2012].

❖ **Les composites à matrice métallique** : On parle de composite à matrice métallique, Lorsqu'il s'agit d'une matrice métallique dans lequel on insère des fibres, des particules ou également des filaments qu'on appelle trichite. il y a des fibres courtes et des fibres continues mono filament ou multi filaments. La composition des fibres et des matrices varie d'un composite à l'autre et dépend surtout de l'application et du budget. Les composites CMM les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique.

❖ **Les composites à matrice céramique** : Les céramiques sont utilisées principalement pour des applications demandant une résistance thermique extrême, lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux

composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

I.3.3. Interfaces

Afin d'assurer une compatibilité entre le renfort et la matrice l'utilisation d'une couche d'interface est indispensable. Un apprêt spécifique comportant un agent collant est administré aux fibres destinées à la fabrication des composites reçoivent il permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure une fonction de lubrification afin de les protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres. .

I.3.4. Charges- additifs

Dans le domaine des matériaux composites on appelle communément une charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui est ajoutée à un polymère de base qui permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et d'améliorer l'aspect de surface ou bien simplement de réduire le prix de revient du matériau modifié. Au contraire des matériaux thermoplastiques, les matériaux thermodurcissables ont toujours renfermé des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Le choix d'une charge pour un polymère donné est caractérisé en fonction des modifications recherchées pour l'objet terminé. Mais d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matériaux plastiques devront avant tout satisfaire un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient.

I.4. Matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux à gradient de composition, appelés aussi FGMs par référence à leur nomination anglaise (Functional Gradient Materials), représentent un nouveau concept de fabrication de pièces avec des propriétés et/ou fonctions qui ne peuvent pas être remplies par les matériaux classiques homogènes. Leur simple structure consiste en une évolution graduelle d'une surface à l'autre par un changement continu de la composition. Leur profil de transition doit être prédéfini et introduit afin

d'obtenir la fonction désirée [Cherradi, 1996]. Dans ce sens, les matériaux à gradients peuvent sans aucun doute être classés dans une catégorie distincte de celle des composites classiques.

1.5. Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués

L'idée de matériaux fonctionnellement gradués ou FGM a été lancée au début des années 1980 au Japon, où ce concept de matériau a été proposé pour la première fois. Le concept de ce type de matériau composite a été proposé afin de réduire les contraintes thermiques dans les matériaux composites stratifiés classiques développés pour les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi 1992), (Shanmugavel,P. Et al., 2012). Les matériaux à classification fonctionnelle sont caractérisés par un changement progressif de la composition ou de la structure du matériau, avec l'intention de modifier les propriétés du matériau, ainsi que par le changement de composition et le changement de direction structurelle. Les matériaux fonctionnellement gradués avec microstructures graduées peuvent être obtenus dans des matériaux monolithiques en faisant varier la composition de la microstructure du matériau.

Les matériaux FGM peuvent également être conçus de telle sorte que le matériau est sélectivement renforcé dans les régions qui doivent avoir des propriétés particulières. La composition et la microstructure comprenant la composition chimique, l'état physique et la configuration géométrique peuvent être modifiées progressivement sur l'ensemble du volume dans les matériaux composites. Cela entraînerait une modification correspondante des propriétés du matériau dans ce volume [Atai, A.A et al., 2012].

La FGM a été conçue pour la première fois lors du projet d'avion spatial au Japon en 1987 pour l'application de barrière thermique. Le matériau composite requis doit pouvoir résister à une température de surface de 2000K et à un gradient de température de 1000K, sur une section transversale de moins de 10mm de ce matériau composite. La défaillance constante des matériaux composites stratifiés traditionnels testés au moment de cette recherche s'est avérée être due à l'adhérence inadéquate des deux matériaux et à l'interface nette qui comprenait les propriétés incompatibles des deux matériaux. Le problème a été résolu en remplaçant cette interface nette avec une

interface changeant progressivement qui a permis d'éliminer le problème de concentration des contraintes élevés aux interfaces.

Le changement progressif de la composition d'un matériau à l'autre a été à l'origine du développement d'un matériau à gradient fonctionnel. Bien que les FGM aient été initialement conçues comme un matériau de barrière thermique pour les applications structurelles de l'aérospatiale et les réacteurs de fusion, les applications de matériaux à gradation fonctionnelle ont été étendues à d'autres utilisations, telles que les applications dans un environnement extrêmement résistantes à l'usure.

Les FGM à base de métal et de céramique résistent aux environnements à haute température en combinant les meilleures propriétés des deux matériaux. Les matériaux céramiques peuvent supporter des températures élevées, tandis que la partie métallique est en mesure de fournir les propriétés mécaniques nécessaires pour supporter la partie en céramique. Cela contribue à améliorer les performances et à réduire les risques de délamination.

Cela n'entraîne pas de frontière nette entre la matrice et le renforcement, en raison de l'incrémentation progressive du matériau de renforcement. Par conséquent, l'interface nette est éliminée et les concentrations de contraintes thermiques sont ainsi considérablement réduites. Le concept de la FGM a conduit au développement de matériaux présentant des caractéristiques spéciales, telles que l'amélioration du module de Young, la résistance à la traction et la résistance à l'usure [Niino et al., 1987].

Les matériaux FGM, avec leur ensemble de propriétés mécaniques uniques, offrent un certain nombre d'avantages aux matériaux exposés à un environnement extrême de travail par rapport aux matériaux composites conventionnels. Le matériau fonctionnellement gradué est un domaine important de la recherche, et il a attiré l'attention des chercheurs au cours des dernières décennies avec le domaine d'application de ce nouveau matériau en constante expansion. Le contrôle continu de la microstructure dans un matériau afin de modifier ses propriétés, ainsi que la fonctionnalité du matériau, est également constamment recherché par la communauté des chercheurs.

L'idée issue de la nature des matériaux fonctionnellement gradués naturels a constamment été le facteur déterminant pour le développement de ces matériaux FGM artificiels. Le bois est une FGM naturelle de la nature constituée de cellulose dans une matrice de lignine

Os et les dents sont d'autres formes de matériaux fonctionnellement gradués de la nature [Knoppers, J.W., 2003]. Ces matériaux ont été conçus par nature pour répondre aux exigences de service attendues. Ces grandes idées de la nature ont été imitées afin de concevoir des matériaux utilisés pour résoudre des problèmes d'ingénierie. Les caractéristiques uniques des matériaux fonctionnellement gradués sont la possibilité d'adapter les propriétés d'un matériau à une application spécialisée. Ces matériaux adaptés possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent appropriés pour des applications destinées. Un FGM bien conçu au niveau de la microstructure peut améliorer les propriétés du matériau.

La première description systématique des MGF est apparue en 1995 à partir des travaux de recherche rapportés par Koizumi et Niino [Koizumi, M., Niino, M. 1995].

1.6. Types de matériaux fonctionnellement gradués

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était de éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui se expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface.

L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit en détail dans les sections suivantes.

1.6.1. Gradient de composition chimique des Matériaux FGM

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Une FGM monophasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage [Bharti, I. et al. 2013]. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel.

Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphase [Mahamood, R.M. et al. 2012, 2015]. Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

1.6.2. Gradient de porosité des Matériaux FGM

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite.

Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la Figure I.5.

Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores.

Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

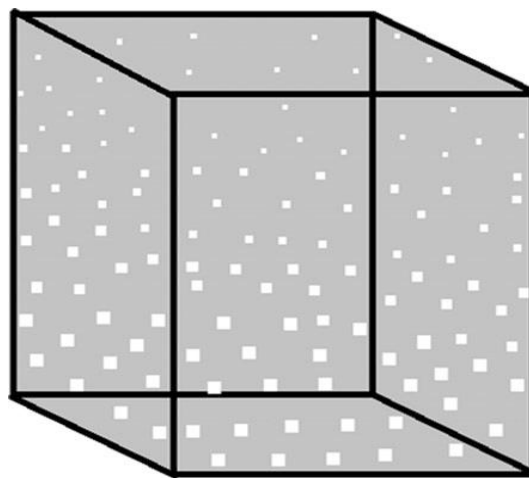


Figure I.5 : Matériaux FGM poreux

1.6. 3. Gradient de la microstructure des Matériaux FGM

Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

1.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués sont avant tout des matériaux que l'on peut définir comme des systèmes multiphasiques multi-composants, présentant des interpénétrations moléculaires effectives entre eux, mais en rajoutant la notion de variation d'un des réseaux, chimiquement ou physiquement différent des autres, selon la section de l'échantillon. Ainsi, ces matériaux fonctionnellement gradués peuvent être schématisés par un empilement d'un nombre infini de couches, chacune étant une sous-couche à part entière avec sa propre composition, sa propre séparation de phase, et donc sa propre morphologie et ses propres propriétés. Un FGM peut être définie par une fonction qui représente la variation des fractions de volume. Cette fraction est décrite par des fonctions de puissance, exponentielle ou sigmoïde suivant l'application recherchée et la méthode de synthèse utilisée.

1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les structures P-FGM obéit à une fonction définie par une loi de puissance sous la forme [Ait Atmane, 2010]:

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la structure (plaque ou poutre). Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ été définie, les propriétés matérielles d'une structure P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang, 1995].

$$E(z) = V(z) \cdot E_1 + [1 - V(z)] E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la structure FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la structure P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$

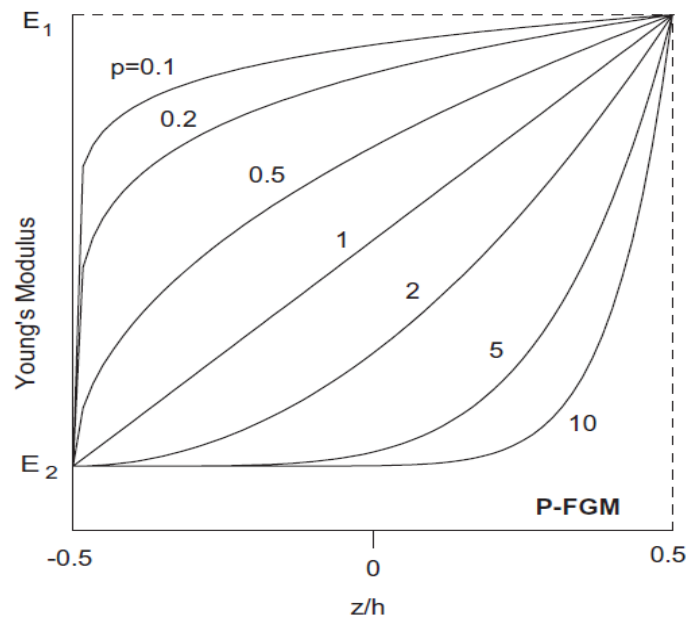


figure I.6 : La variation du module de Young dans une structure P-FGM.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une structure (plaque ou poutre) P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes

apparaissent sur l'interface des deux matériaux (Lee et Erdogan, 1995; Bao et Wang, 1995). Par conséquent, Chung et chi en 2001 ont défini la fraction de volume de la structure FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.3})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.2})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

La variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes est présentée dans la figure I.7, et par conséquent la structure FGM appelée (S-FGM).

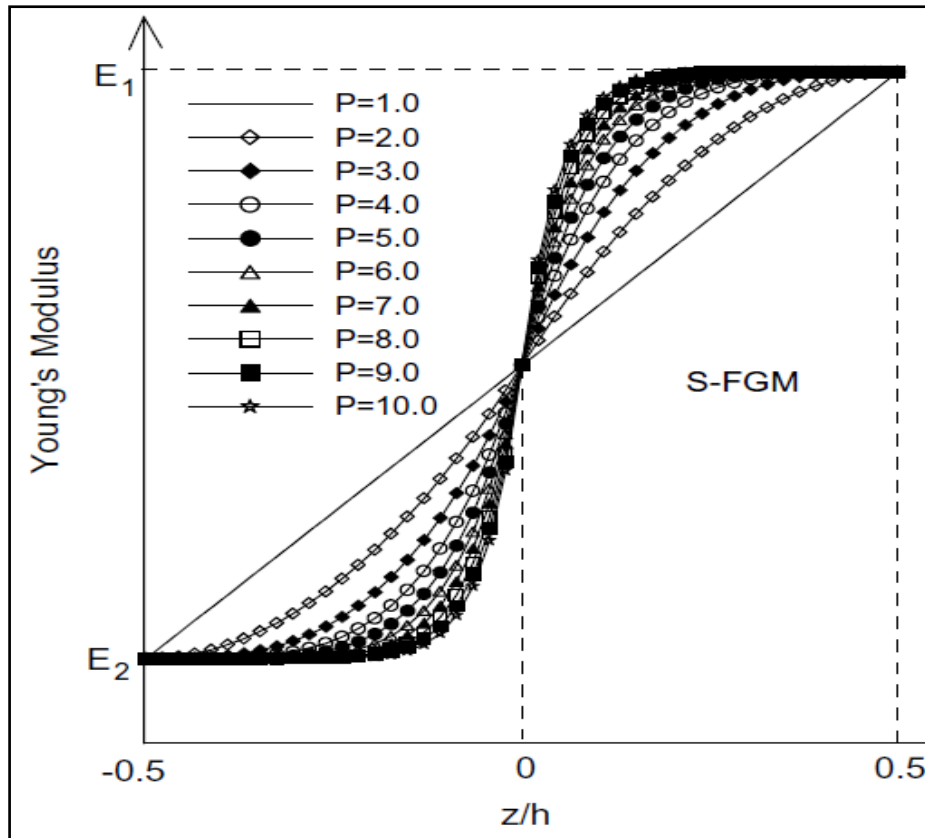


Figure I.7 : La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

I.7.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM

Plusieurs chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM comme suit (Delale and Erdogan, 1983) :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \tag{I.2}$$

Avec

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.2}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

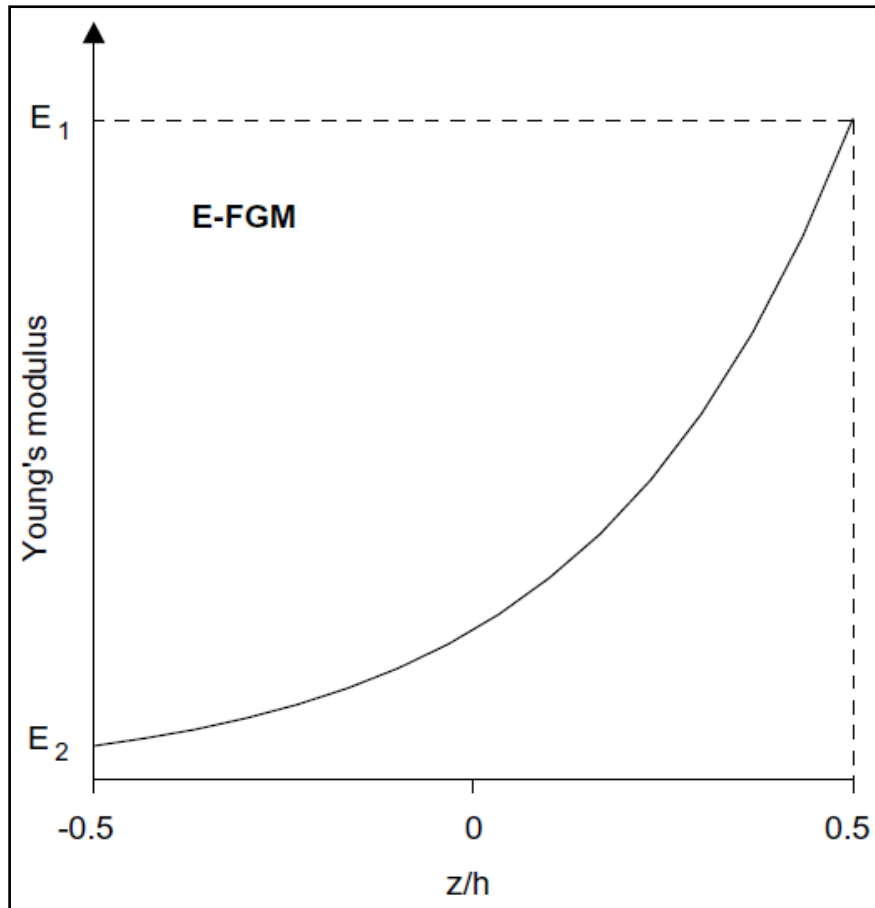


Figure I.8 : La variation du module de Young de la poutre E-FGM

1.8. Loi de mélange

Nombreuses approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles [Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009]. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants (figure I.9) :

- ❖ Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.5.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) (Figure I.9a).
- ❖ Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d une couche quasi-homogène de céramique-métal (Figure I.9b).

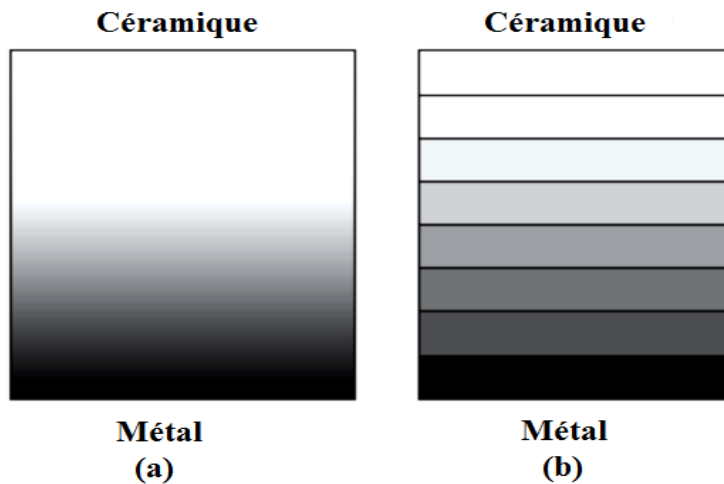


Figure I.9 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel
(a) FGM continue ; (b) FGM discontinue.

I.9. Conclusion

Cette revue de la littérature nous a permis d'avoir une vision d'ensemble sur les travaux existants concernant les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Et par conséquent on peut dire que les matériaux FGM sont non homogènes à l'échelle microscopique, d'où les propriétés mécaniques varient graduellement et continuellement d'une surface à l'autre à travers toute l'épaisseur et peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (EFGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

CHAPITRE II

**LES THEORIES REGISSANT LE
COMPORTEMENT DES
STRUCTURES EN MATERIAUX
FONCTIONNELLEMENT GRADUEES**

Chapitre II : LES THEORIES REGISSANT LE COMPORTEMENT DES STRUCTURES EN MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES

II.1.Introduction

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécanique de base. Et pour simplifier cette complexité de ces matériaux dans les structures (poutres et plaques) d'ingénierie, des nombreuses théories ont été développés. Dans ces dernières pour répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures avec une forte anisotropie. Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites et les théories applicables aux structures FGM. Un résumé sur le phénomène de la propagation des ondes est présenté à la fin de ce chapitre.

II.2. Comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués

II.2.1 Loi de comportement des matériaux isotropes

Un matériau est dit matériau isotrope lorsque, en un point quelconque, les composantes du tenseur C_{ijkl} sont identiques dans toutes les directions. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, un tel matériau est fonction uniquement de deux paramètres caractéristiques indépendants. On peut démontrer qu'un matériau isotrope correspond en fait à un matériau orthotrope possédant de plus une symétrie de révolution autour de chacun de ces axes d'orthotropie.

II.3. Les théories des structures FGM

II.3.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. Une plaque est un solide caractérisé par une faible épaisseur en comparaison des deux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne

Chapitre II : les théories régissant le comportement des structures en matériaux fonctionnellement gradués

description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 1989, Kapania 1989, Kant 2000, Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- ❖ Approche monocouche équivalente
- ❖ Approche par couche
- ❖ Approche développement asymptotique

II.3.2. Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués

Le terme «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) (figure II.1). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [SALLAI, 2011].

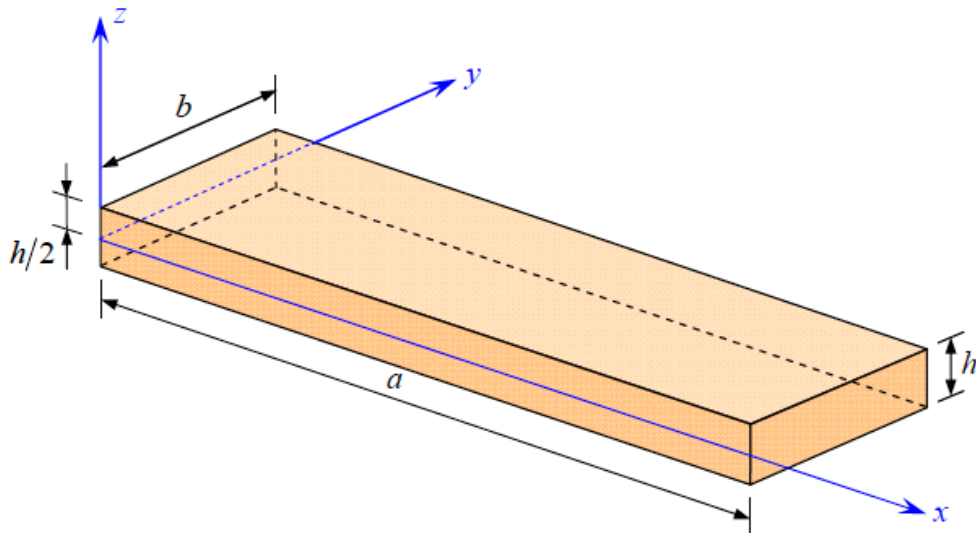


Figure II.1: Schéma d'un élément de poutre [Berthelot 2012].

II.3.2.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane (figure II.2).

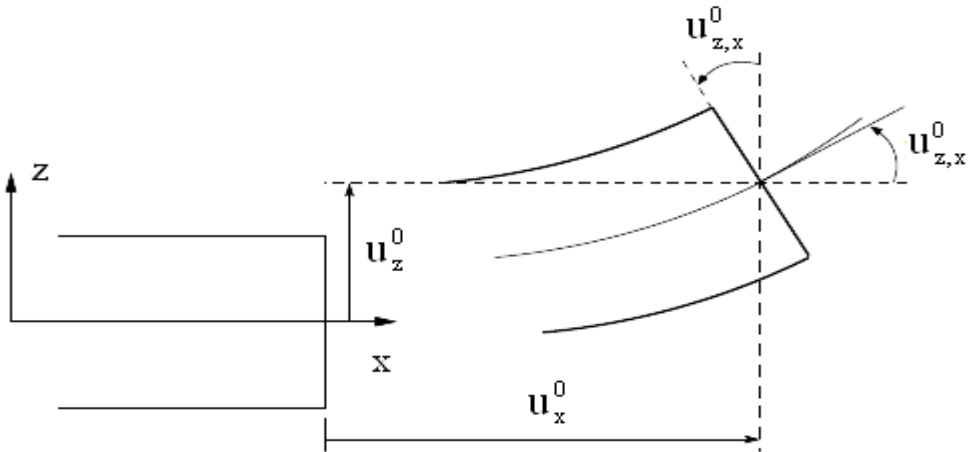


Figure II.2: Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \tag{II.1}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \tag{II.2}$$

Avec,

u_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

II.3.2.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Chapitre II : les théories régissant le comportement des structures en matériaux fonctionnellement gradués

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.3). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko, 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit

$f(z) = z$. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \gamma_{xz}^0(x, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec,

γ_{xz}^0 est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Tel que :

$$z \gamma_{xz}^0(x, t) = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_0(x, t) \quad (\text{II.4})$$

Et

$\phi_0(x, t)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

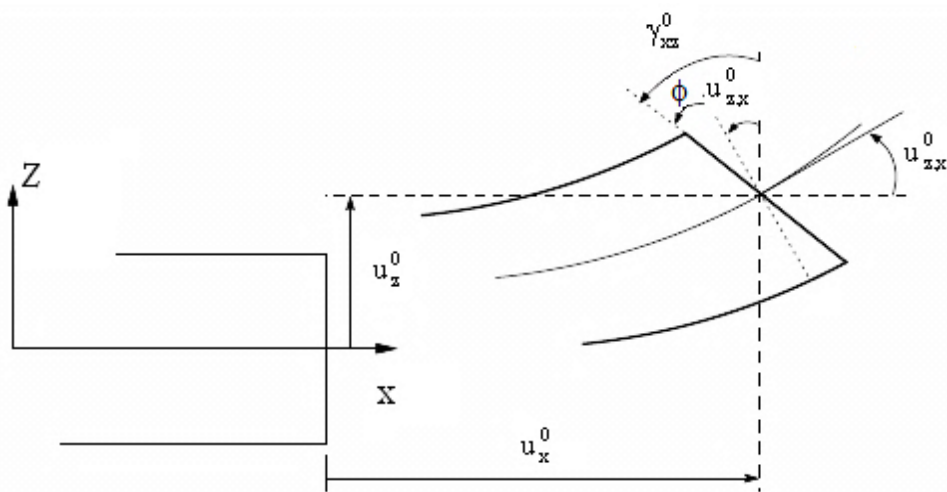


Figure II.3: Cinématique de la poutre de Timoshenko

II.3.2.3. Modèle d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de «gauchissement». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.4). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ représente le cisaillement.

Le champ de déplacement devient:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \gamma_{xz}^0(x, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f(z = \pm h/2) = 0
 \tag{II.6}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.5).

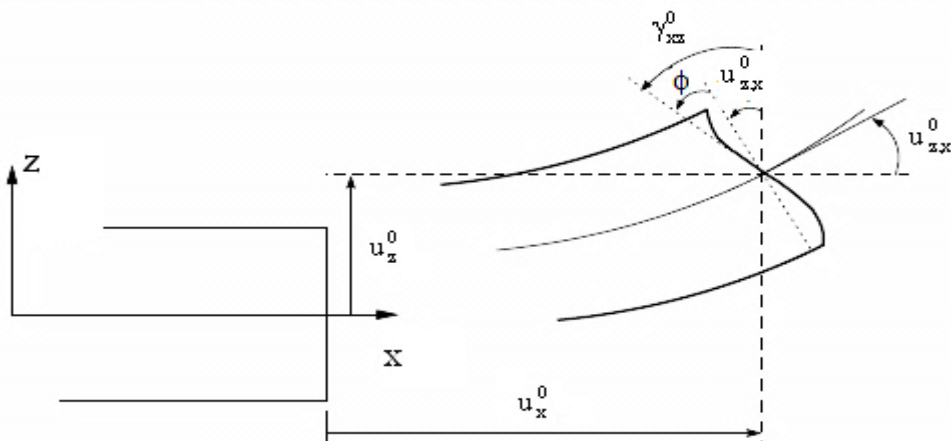


Figure II.4: Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre

Chapitre II : les théories régissant le comportement des structures en matériaux fonctionnellement gradués

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $f(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

Tableau II.1 : Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres isotropes et FGM

Théorie	fonction de gauchissement $f(z)$
Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT)	$f(z) = 0$
Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT)	$f(z) = z$
Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984]	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [Karama et al, 2003]	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Le modèle trigonométrique [Touratier 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$
Le modèle de Mechab (2009) , utilisé aussi [par Ait Atmane et al, 2010, et El Meiche et al,2011]	$f(z) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \left[z \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{2} \sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right]$
modèle de Panc (1975), utilisé aussi par [Kaczkowski (1968), Reissner (1975), Voyiadjis et Shi (1991), Shi et Voyiadjis (2011)]	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

II.3.3. Les modèles des plaques pour les matériaux fonctionnellement gradués

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles, avec des dimensions en plan qui sont grandes par rapport à son épaisseur. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan Oxy , et L'axe Oz correspond à la direction suivant l'épaisseur (figure II.5).

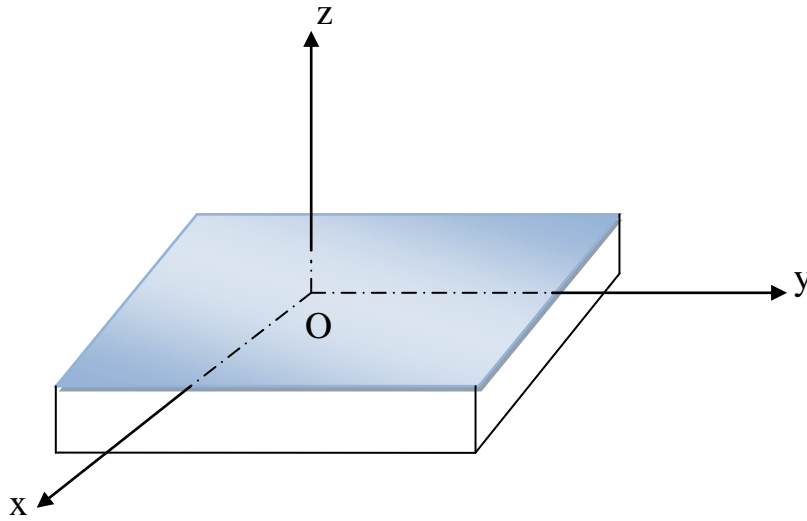


Figure II.5:Schéma d'un élément de plaque

II.3.3.1. Le modèle classique des plaques de Kirchhoff-Love (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff.Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner 1961]. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation figure II.6.

Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse

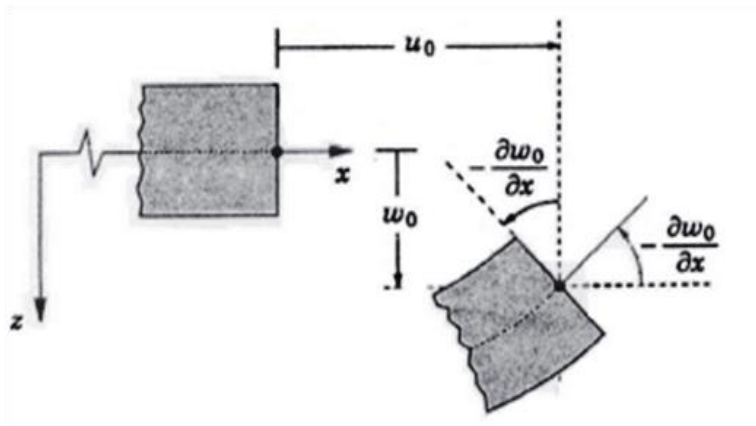


Figure II.6: Cinématique de la plaque de Love-Kirchhoff [Reddy 1997]

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

Avec,

Avec u_0, v_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

II.3.3.2. Le modèle de Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (figure II.7). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

Avec,

Avec u_0, v_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

ϕ_x, ϕ_y La rotation normale au plan moyen autour des axes y et x respectivement.

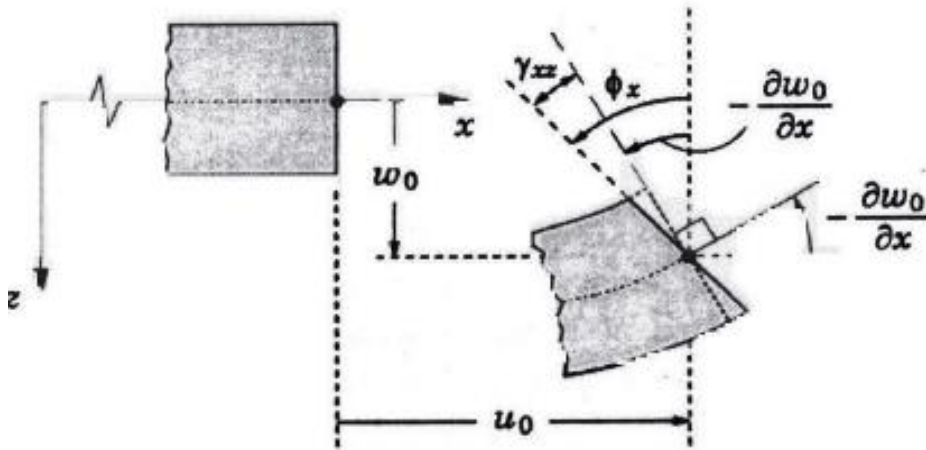


Figure II.7 : Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy 1997]

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_{α}^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

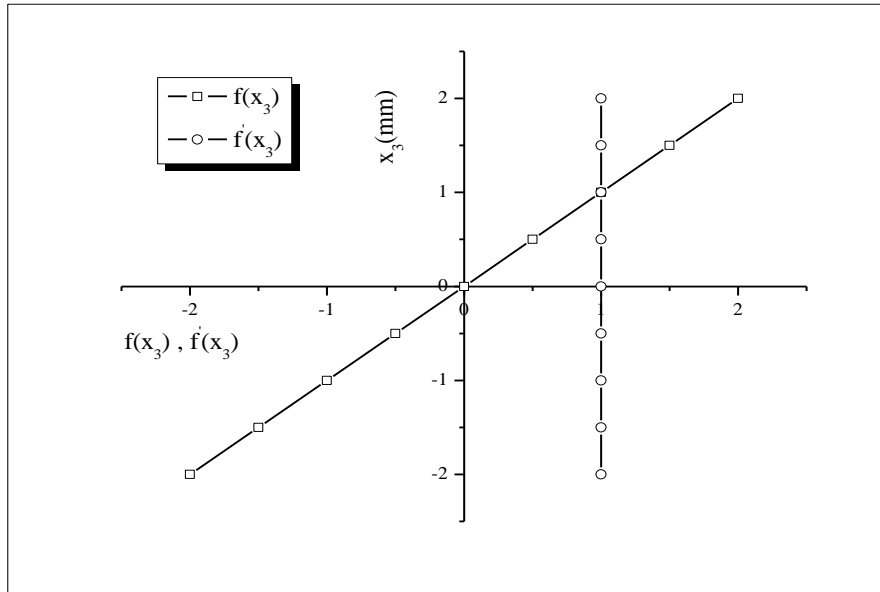


Figure II.8: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.3.3. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure II.9) [Liberescu 1967, Whitney 1973, Touratier 1991, Nguyen 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3) = & u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) \\
 & + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

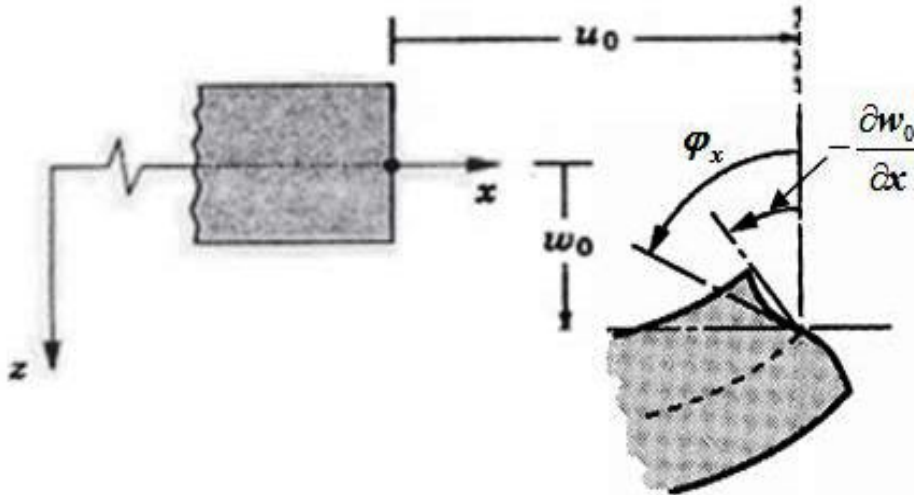


Figure II.9 : Cinématique des plaques de la théorie d'ordre supérieur

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{o(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{o(i)} = 0$ pour $j= 2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(3)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1, 2\}$. Le champ de déplacement devient :

Chapitre II : les théories régissant le comportement des structures en matériaux fonctionnellement gradués

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

❖ L'approche d' [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)
 \tag{II.10}$$

❖ L'approche de [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)
 \tag{II.11}$$

❖ L'approche de [Reddy 1987] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)
 \tag{II.12}$$

Dans le modèle de [Reddy 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.13})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984].

Récemment, [Afaq et al.2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.15})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu 2005] avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.16})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

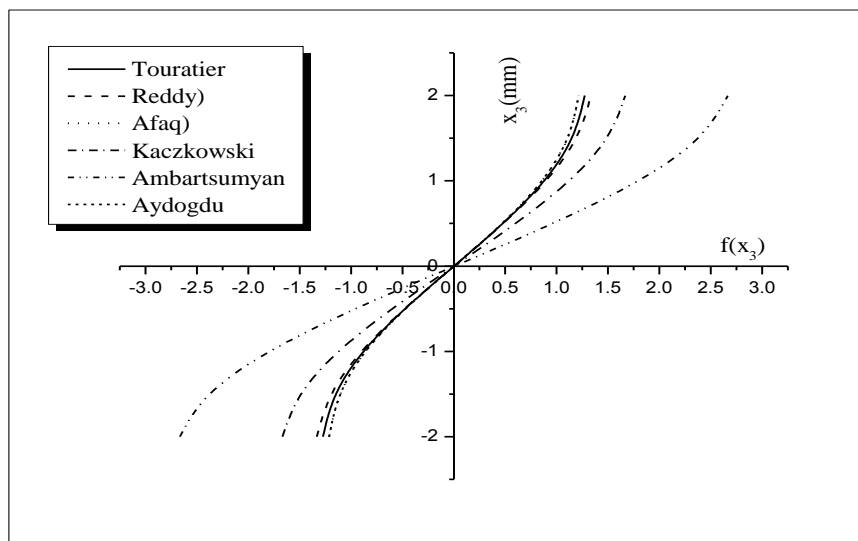


Figure II.10: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

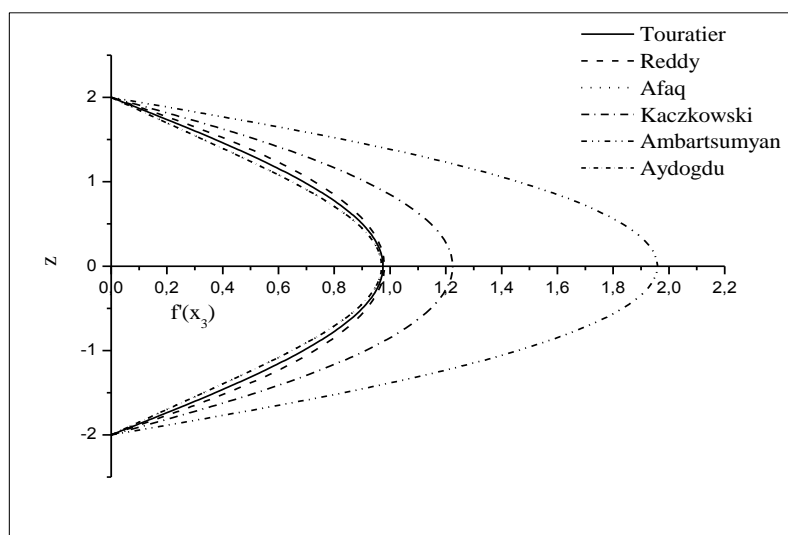


Figure II.11: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des figures II.10 et II.11 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de

forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.3.3.4. Modèles d'ordre élevé pour les plaques Raffinée RPT

Une théorie de la plaque raffinée (RPT) efficace et simple a été initialement introduit et mis en œuvre par Shimpi et Patel (Shimpi et Patel, 2006a, Shimpi et Patel, 2006b) afin de traiter les problèmes de l'analyse statique et dynamique des plaques orthotropes. La théorie raffinée peut être classé parmi les théories de déformation de cisaillement de troisième ordre. Le développement de la théorie de la plaque raffinée est basé sur l'hypothèse que la théorie représente variations paraboliques de contraintes de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz} et les contraintes de cisaillement σ_{xz}, σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque et elle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. En outre, la théorie peut fournir une grande précision dans le comportement de la plaque de prédiction soumis à des sollicitations mécaniques sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Contrairement aux autres théories d'ordre élevée, le nombre de variables inconnues impliqués dans la théorie raffiné de déformation de cisaillement hyperbolique (RHSDT) est seulement quatre , ou a deux inconnues tels que le modèle de [Mechab 2010] ; [Ameur 2012] [Tai Thai 2012], [Bourada 2012].. contrairement au cinq variables pour les autres théories de déformation de cisaillement [Reddy, 1984; Touratier, 1991; Karama et al., 2003]. La nouveauté de cette théorie est qu'elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement parabolique. Elle a une grande similarité avec la CPT dans certains aspects tels que les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

En raison de nombreux avantages de l'utilisation du RPT, la théorie a récemment suscité beaucoup d'intérêt de la part des chercheurs. Kim et al. (Kim et al., 2009a) a utilisé le RPT pour résoudre le problème de flambement de plaques isotropes et orthotropes sous diverses charges telles que la compression uniaxiale, de compression biaxiale et combinaison de traction-compression dans des directions différentes. [Benachour et al. 2011], [El Meiche et al. 2011], [Tounsi et al. 2013c], ont étendu leur travail à l'aide du RPT pour faire face à l'analyse de la plaque dans différents problèmes. Le RPT a été appliquée pour résoudre la réponse à la flexion et la vibration des plaques composites FGM.

D'une manière générale on présente la fonction de cisaillement transversal par $f(z)$, qui représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et les déformations transversales suivant l'épaisseur.

II.4. Effet de la déformation normale (effet de stretching)

Dans les différentes théories d'ordre élevé qui comprennent les contraintes normales transversales, les termes d'ordre supérieur sont introduits dans les hypothèses cinématiques pour les deux composantes de déplacement. Nombreux modèles HSDT ont été proposés ces dernières années pour l'étude des structures FG. Parmi ces modèles, il existe des modèles qui prennent en considération l'influence de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur. Lorsqu'un modèle introduit l'effet de la déformation normale, le déplacement transversal est supposé dépendant des coordonnées d'épaisseur obéissant à la recommandation de Koiter (1959), c'est-à-dire $\varepsilon_z \neq 0$. Récemment, l'effet de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur sur la réponse mécanique des structures FGM est montrée par Bousahla et al [Bousahla, 2014], Fekrar et al [Fekrar, 2014], Belabed et al [Belabed, 2014], Hebali et al [Hebali, 2014], Houari et al [Houari, 2013], Bessaim et al [Bessaim, 2013], Saidi et al [Saidi, 2013], Hamidi et al. [Hamidi, 2015], Bourada et al. [Bourada, 2015], Larbi Chaht et al. [Larbi Chaht, 2015], [Benbakhti, 2016].

Et par conséquent, Le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, t) \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z)\varphi_z\end{aligned}\tag{II.17}$$

Avec :

φ_z : représente la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur.

II.5. Généralités sur les phénomènes de propagation des ondes un milieu matériel élastique

La propagation des ondes est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel élastique, homogène et isotrope sans transport de matière. Cette onde mécanique se propage avec le transport d'énergie sans transport de matière.

II.5.1. Types des ondes élastiques

II.5.1.1. Ondes longitudinales et transversales

Les ondes longitudinales encore appelées ondes de compression, sont obtenus Lorsque, au contraire, la vibration s'effectue suivant la direction de propagation de l'onde, par exemple le Cas des ondes acoustiques ou celles qui courent le long d'un ressort comprimé localement (figure II.12a),

Les ondes transversales appelées aussi ondes de cisaillement sont obtenues lorsque la vibration s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Ce cas concerne évidemment les rides à la surface de l'eau, les vibrations d'une corde ou d'une membrane ((figure II.12b), mais aussi les ondes électromagnétiques (dans ce dernier cas, l'aspect transversal de la vibration est à l'origine d'une propriété importante de la lumière, la polarisation).

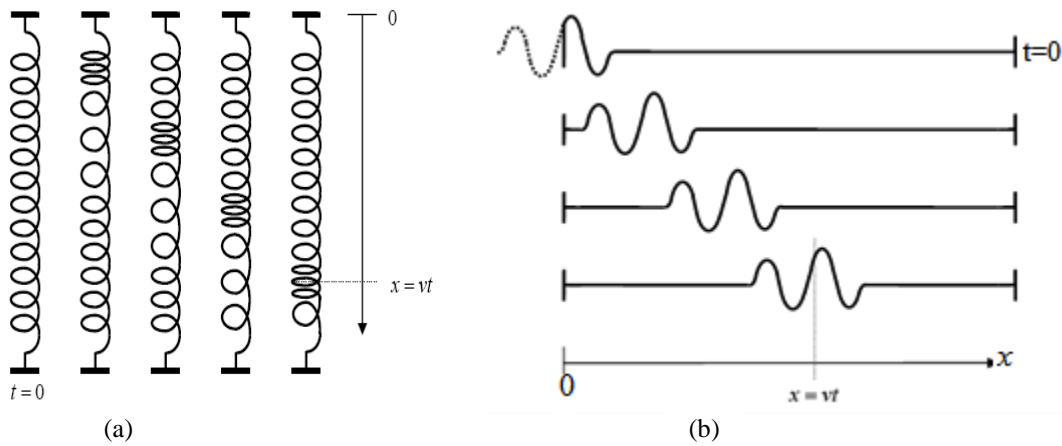


Figure II.12: Phénomène d'onde : -a) longitudinale et -b) transversale

II.5.1.2. Ondes de Surface

A la frontière plane d'un milieu semi-infini, on trouve des ondes de surface dont l'amplitude varie exponentiellement avec la distance normale à partir de la surface (ou l'interface) le long de laquelle leur propagation se fait. Les ondes de surface n'affectent que les particules d'un matériau qui se trouve à proximité immédiate de sa surface de séparation avec l'air ou avec un autre milieu. Elles se propagent, généralement, sur une épaisseur correspondante à une longueur d'onde [W.L.Bond 1975]. Dans un matériau donné, les vitesses de propagation des ondes de surface sont toujours inférieures à celles des ondes de volume. Cela est dû au fait que les particules qui se trouvent à la surface libre ne subissent les forces de cohésion élastiques que d'un seul côté, alors que les ondes de volume affectent des particules qui sont entourées de tous les côtés dans le milieu. Ces ondes de surface sont très complexes et les vibrations des particules peuvent être diverses.

II.5.1.3. Ondes de Rayleigh

L'existence d'une onde sur la surface libre plane d'un milieu semi-infini a été découverte par Lord Rayleigh [D. A. Davids 1989] en 1885, ce type d'onde est connu sous le nom d'onde de Rayleigh. Ce mode d'ondes acoustiques de surface est constitué par la superposition des ondes longitudinale et transversale se propageant le long de la surface libre avec une vitesse de phase commune figure II.13. Selon la nature de l'interface, vide/solide ou liquide/solide, les ondes qui s'y propagent sont appelées ondes de Rayleigh ou ondes de Rayleigh généralisées.

Les ondes de Rayleigh ont reçu un intérêt considérable grâce à leur utilité pour la détection des défauts de surface dans le testing ultrasonique non destructif des matériaux. En plus, elles ont été employées dans la construction des lignes à retard électromécaniques utilisées pour les radars et les systèmes de télécommunication.

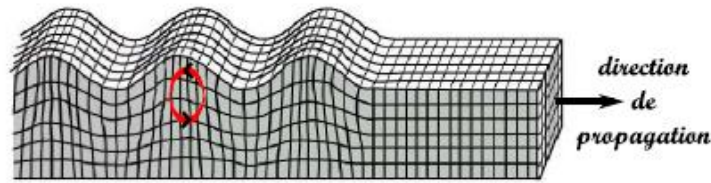


Figure II.13: Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface. [O. Xeridat 2011]

II.5.1.4. Ondes progressives et ondes stationnaires

Une onde progressive est le phénomène de propagation de proche en proche d'une perturbation locale dans un milieu matériel, sans transport de matière. La caractéristique principale de l'onde progressive étant que la perturbation se retrouve identique à elle-même un peu plus loin un peu plus tard. Il faut pour cela que le milieu de propagation soit de dimension infinie ou au moins très grande.

Lorsque, au contraire, les points de vibration maximale restent immobiles, on parle d'onde stationnaire. Une onde stationnaire s'obtient en général en faisant interférer deux ondes progressives de même fréquence, se propageant suivant des directions distinctes. Elle peut également s'obtenir en limitant l'extension spatiale d'une onde progressive, par exemple en intercalant un obstacle dans le cas d'une onde acoustique, ou en fixant l'une des extrémités dans le cas d'une corde vibrante. Il s'agit d'ailleurs dans les deux cas du même phénomène, car la limitation de la progression de l'onde donne naissance à une onde réfléchie qui interfère avec l'onde initiale. la figure II.14. Exemple typique d'une corde tendue qui peut aussi bien vibrer à sa fréquence fondamentale

Les ondes stationnaires se produisent par exemple par la superposition d'une onde incidente et de son onde réfléchie par un obstacle.

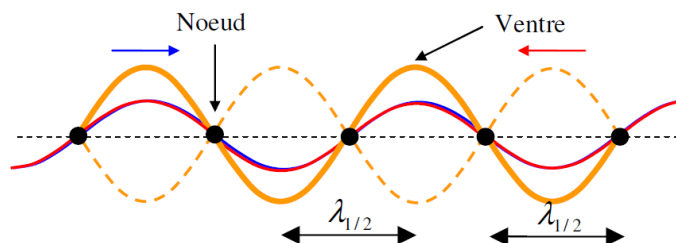


Figure II.14: propagation d'onde stationnaire

À un temps t fixé, une onde stationnaire ressemble à une onde progressive. En revanche, son évolution temporelle est totalement différente. Une onde stationnaire possède des minima (nœuds) et des maxima (ventres) d'amplitude fixes dans l'espace. Ainsi, si on se place aux nœuds de cette onde, l'amplitude est nulle quel que soit le temps. Avec une onde progressive, nous aurions vu l'amplitude évoluer, de façon sinusoïdale avec le temps dans le cas d'une onde harmonique.

Une façon simple de construire une onde stationnaire est de superposer deux ondes progressives se propageant en sens inverse. C'est d'ailleurs ce qui se passe lorsqu'une onde se réfléchit sur un miroir parfait.

Les ondes stationnaires sont des objets physiques très courants et se rencontrent notamment dans les cavités laser ou les lignes hyperfréquence.

II.5.2. Éléments de propagation des ondes

II.5.2.1. Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires on s'intéresse généralement à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Contrairement, dans les phénomènes de propagation des ondes, on examine toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace, x par exemple. Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation de d'Alembert ou équation d'onde ou encore équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (\text{II.18})$$

Avec C est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et appelée la vitesse de propagation

Et

$$C = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{II.19})$$

Avec

λ : La longueur d'onde qui constitue la période spatiale en (m).

T : La période temporelle en (s)

f : La fréquence temporelle (en Hz).

II.5.2.2. Vitesse de phase

Considérons une onde progressive sinusoïdale qui se propage dans le sens des x croissants. Un point d'abscisse x possède, à l'instant t , l'élongation :

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) \quad (\text{II.20})$$

Avec

$S(x, t)$: La solution générale de l'équation des ondes à une dimension

kx : représente le déphasage dû à la propagation.

Entre l'instant t et $t + \Delta t$ l'onde progresse d'une quantité Δx . A l'instant $t + \Delta t$, le point d'abscisse $x + \Delta x$ possède la même élongation que celle que possédait le point d'abscisse x à l'instant antérieur t . Ceci se traduit par l'égalité :

$$S(x, t) = S(x + \Delta x, t + \Delta t)$$

$$S_0 \cos(\omega t - kx) = S_0 \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)]$$

Cette égalité est satisfaite si les phases instantanées sont égales :

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)$$

Soit encore

$$\omega \Delta t = k \Delta x$$

On définit la vitesse de phase $C_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ qui s'exprime en fonction de ω et k par :

$$C_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (\text{II.21})$$

La figure ci-dessous permet d'illustrer la notion de vitesse de phase en considérant deux représentations à des instants différents d'un solide parcourue par une onde. La courbe continue représente l'ensemble des points du solide à l'instant t . Le point de la corde d'abscisse x est représenté par le point blanc, tandis que le point d'abscisse $x + \Delta x$ est représenté par le point noir. On constate qu'entre les instants t et $t + \Delta t$ chacun de ces points suit une trajectoire rectiligne et le déplacement du point noir à l'instant $t + \Delta t$ est égal au déplacement du point blanc à l'instant t . En particulier la crête de la corde, correspondant à une valeur particulière de la phase instantanée, semble se déplacer dans le sens de propagation de l'onde avec la vitesse de C_ϕ mais la trajectoire de chaque point matériel est une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la direction de propagation.

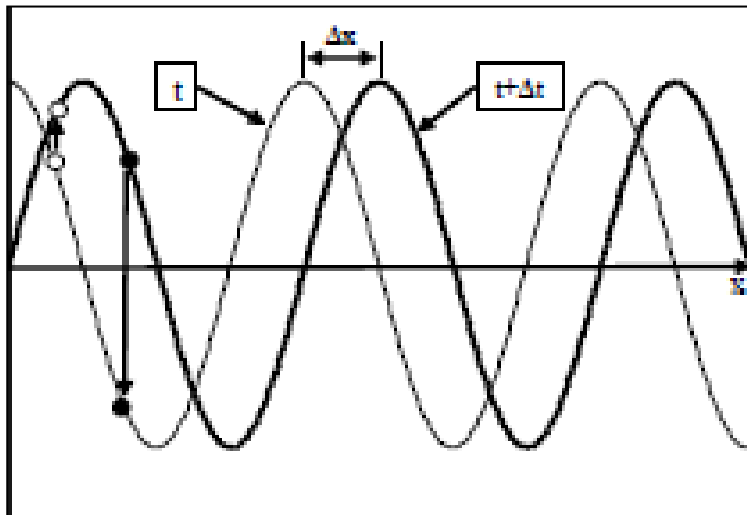


Figure II.15: Onde progressive sinusoïdale Trajectoire de deux points x et $x + \Delta x$ entre les instants t et $t + \Delta t$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de λ , le milieu est dit non dispersif. Dans le cas contraire il est dit dispersif.

II.5.2.3. Vitesse de groupe

La vitesse de phase C_ϕ n'est pas nécessairement la vitesse que l'on observe lorsqu'on analyse un mouvement ondulatoire. En général une onde n'est pas parfaitement sinusoïdale mais a une durée limitée et se présente sous la forme d'un train d'onde appelé communément "pulse" ou "groupe" qui se propage avec une vitesse C_g appelée vitesse de groupe. Cette onde sous la forme d'un pulse contient plusieurs fréquences. Si la vitesse de phase est indépendante de la fréquence (Milieu non dispersif) alors toutes les fréquences qui constituent le pulse se propagent à la même vitesse et le pulse se propage avec une vitesse de groupe égale à la vitesse de phase. Mais si le milieu est dispersif (i.e. la vitesse de phase dépend de la fréquence), alors le pulse se propage avec une vitesse de groupe différente de la vitesse de phase. Pour illustrer ce phénomène, considérons une onde constituée de deux ondes de fréquences différentes et de même amplitude.

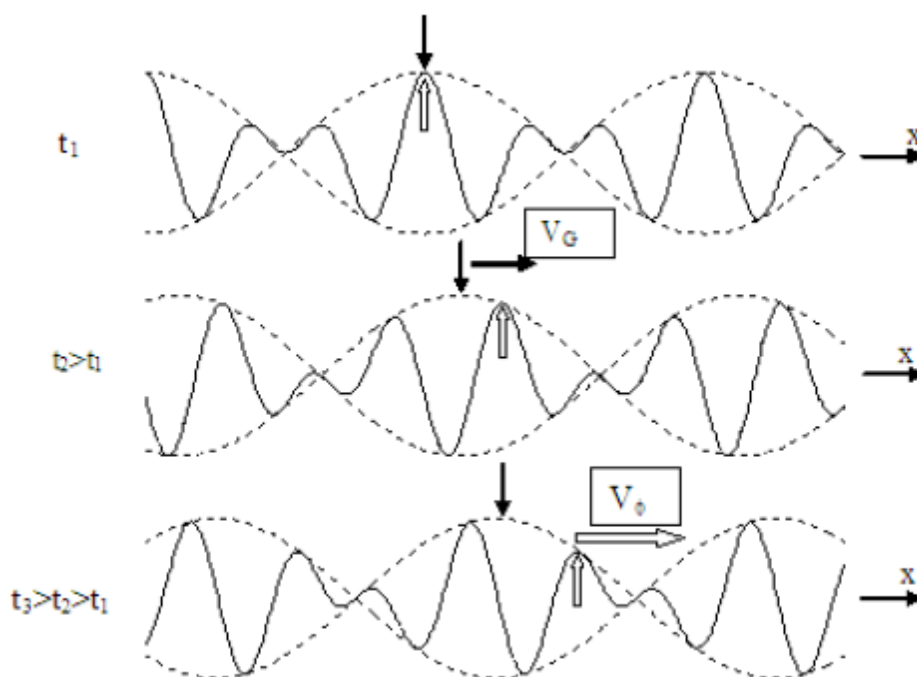


Figure II.16: Propagation d'un paquet d'ondes.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les différentes modèles théoriques des poutres et des plaques à savoir la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT) pour les poutres, et pour les plaques on a présenté la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (FSDT) qui prenne en considération l'effet de cisaillement transverse, pour avoir des résultats précises par cette théorie le plus souvent un coefficient de correction est utilisé.

CHAPITRE III

**ANALYSE THEORIQUE DU
COMPORTEMENT STATIQUE ET
VIBRATOIRE DES STRUCTURES FGM**

Chapitre III : ANALYSE THEORIQUE DU COMPORTEMENT STATIQUE ET VIBRATOIRE DES STRUCTURES FGM

III.1. Introduction

Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement statique et vibratoire des structures FGM a été présentée. D'abord une nouvelle approche analytique utilisant une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre élevé (HSDT) pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques de matériau fonctionnellement gradué (FGM). Cette théorie prend en compte l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching). Contrairement aux autres théories conventionnelles sur la déformation par cisaillement, le présent travail inclut un nouveau champ de déplacement en introduisant des variables intégrales indéterminées. Ensuite, une étude analytique de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les poutres FGM poreux en utilisant une nouvelle forme de distribution de la porosité.

La formulation des équations d'équilibre est obtenue par l'utilisation du principe de Hamilton. Les solutions analytiques et les relations de dispersion analytiques sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

III.2. Analyse théorique du comportement mécanique des plaques FGM

III.2.1. Formulations du problème

La plaque FG est composée d'un mélange de composants céramique et métal, dont les propriétés des matériaux sont considérées comme variant selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III. 1})$$

Ou p est le paramètre du matériau, et les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques. La plaque est entièrement céramique lorsque La valeur de p égale à zéro, et lorsque p prendre la valeur

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

infini, La plaque est entièrement métallique. De même dans cette partie d'étude, le coefficient de Poisson (ν) est considéré comme constant (Yang et al., 2005; Kitipornchai et al., 2006, Tounsi et al., 2013). La fraction volumique totale du métal et céramique est $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme suit:

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III. 2})$$

Dans la présente partie d'étude on utilise une nouvelle expression décrite comme suit :

$$P = P_c \left(V_c - \log \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right) + P_m \left(V_m - \log \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \quad (\text{III. 3})$$

λ est nommé comme fraction de volume de porosité ($\lambda < 1$). $\lambda = 0$ indique que la poutre FG non poreuse. Ainsi, les équations du module de Young E et de la densité matérielle ρ de la plaque FGM imparfaite peuvent être exprimées comme suit:

$$E(z) = [E_c - E_m] \left(\frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [E_c + E_m] \left[1 - \frac{2|z|}{h} \right] + E_m \quad (\text{III. 4})$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left(\frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [\rho_c + \rho_m] \left[1 - \frac{2|z|}{h} \right] + \rho_m \quad (\text{III. 5})$$

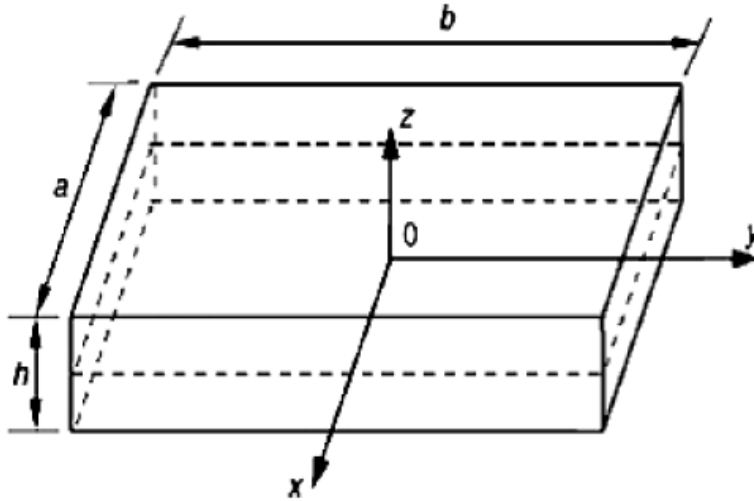


Figure III.1 : Géométrie de la plaque FGM

III.2.2. Équations constitutives

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 6})$$

où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III. 1), les coefficients de rigidité C_{ij} peuvent être écrits de la manière suivante :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}; C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{III. 7})$$

Si $\varepsilon_z \neq 0$ (effet de stretching), alors C_{ij} sont des constantes élastiques 3D, donnée par :

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$\begin{aligned}
 C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} ; & C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} ; \\
 C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & &
 \end{aligned}
 \tag{III. 8}$$

Sur la base de la théorie des plaques épaisses avec la prise en compte de la déformation normale (effet de stretching), Le champ de déplacement du modèle proposé par (Bourada et al., 2016): s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) d_x \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) d_y \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z
 \end{aligned}
 \tag{III. 9}$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Dans cette étude, la fonction de forme est donnée par Reissner (1975) en tant que:

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right)
 \tag{III.10}$$

On peut observer que l'équation de la cinématique (III. 9) utilise seulement cinq inconnues ($u_0; v_0; w_0; \theta$ et φ_z) . Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (III. 9) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0
 \tag{III.11}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (III.12)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}; \varepsilon_z^0 = \varphi_z$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (III.13)$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de Navier et peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (III.14)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisée, dans ce cas via Navier. Par conséquent A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (III.15)$$

Où α et β sont définis dans l'expression (III.28).

III.2.3. Equations de mouvement

Les équations de mouvement de la plaque peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie de Hamilton, Le principe sous la forme analytique suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (III.16)$$

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

Où δU est l'énergie de déformation, δV est le travail virtuel externe sous l'effet de la charge externe appliquée à la plaque et δK est la variation de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée comme suite :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b \right. \\ &\quad \left. + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Où N , M , et S sont les efforts résultants définies comme :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \text{ avec } (i = x, y, xy), N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{III.18})$$

$$\text{et } (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz$$

Le travail virtuel externe sous l'effet de la charge externe appliquée à la plaque est donnée par :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA + \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} (w_0 + g_0 \varphi_z) \frac{\partial \delta (w_0 + g_0 \varphi_z)}{\partial x} \right) dA \quad (\text{III.19})$$

Où

q et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des charges transversal appliqué.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\
 &= \int_A \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + J_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z) \right. \\
 &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad + J_1 \left((k_1 A) \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B) \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\
 &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A)^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B)^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\
 &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A) \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B) \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \\
 &\quad + K_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z)
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

où le point « . » indique la dérivation par rapport à la variable de temps t ;

$\rho(z)$ est la densité de masse de la plaque; et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \tag{III.21a}$$

$$(J_0, J_1, J_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (g, f, z f) \rho(z) dz \tag{III.21b}$$

$$(K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (g^2, f^2) \rho(z) dz \tag{III.21c}$$

En substituant les expressions δU , δV et δK par les équations (III.17) (III.19) et (III.20) dans l'équation (III.16) et en intégrant par parties, puis en recueillant des coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$ on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes :

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q + \bar{N} \frac{\partial^2 (w_0 + g_0 \varphi_z)}{\partial x^2} = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi}_z \\
 & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = \\
 & -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \varphi_z : \quad & -N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} g_0 \frac{\partial^2 (w_0 + g_0 \varphi_z)}{\partial x^2} = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

En substituant l'équation (III.12) dans l'équation (III.6), et les résultantes dans l'équation (III.18), les contraintes obtenues sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{11} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{12}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{array} \right\} \tag{III.23a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23b})$$

Ou

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (\text{III.24a})$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad (\text{III.24b})$$

En substituant l'équation. (III.23) dans l'équation. (III.22), les équations régissantes peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0, w_0, θ et φ_z) :

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 + X_{13} d_1 \varphi_z - B_{11} d_{111} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 \theta \\ & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.25a})$$

$$\begin{aligned} & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + X_{23} d_2 \varphi_z - B_{22} d_{222} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_2 \theta \\ & = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.25b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z \\ & - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta \\ & + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + q + \bar{N} d_{11} (w_0 + g_0 \varphi_z) = \\ & I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi}_z + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III.25c})$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2\right) d_1 u_0 - \left(B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{122} u_0 - \left(B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{112} v_0 \\
 & -\left(B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2\right) d_2 v_0 - k_1 Y_{13}^s \varphi_z - k_2 Y_{23}^s \varphi_z + \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2\right) d_{11} w_0 \\
 & + 2 \left(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{1122} w_0 + \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2\right) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta \\
 & - 2 H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left(\left(k_1 A' + k_2 B'\right)^2 H_{66}^s\right) d_{1122} \theta + A_{44}^s \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \theta + A_{55}^s \left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \theta \\
 & + A_{44}^s \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \varphi_z + A_{55}^s \left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \varphi_z = -J_1 \left(k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0\right) \\
 & + J_2 \left(k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0\right) - K_2 \left(\left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \ddot{\theta} + \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \ddot{\theta}\right)
 \end{aligned} \tag{III.25d}$$

$$\begin{aligned}
 & -X_{13} d_1 u_0 - X_{23} d_2 v_0 - Z_{33} \varphi_z + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 + \left(A_{44}^s - Y_{23}^s\right) \left(k_2 B'\right) d_{22} \theta \\
 & + \left(A_{55}^s - Y_{13}^s\right) \left(k_1 A'\right) d_{11} \theta + A_{44}^s d_{22} \varphi_z + A_{55}^s d_{11} \varphi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z
 \end{aligned} \tag{III.25e}$$

Ou

d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{III.26}$$

III.2.4. Solution analytique pour une plaque rectangulaire sur appuis simples

Les équations de mouvement admettent les solutions Navier pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées en tant que produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations gouvernantes et les conditions limites.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{array} \right\} \tag{III.27}$$

Où $\sqrt{i} = -1$, ω est la fréquence naturelle et $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et $\phi_{mn})$ sont les coefficients de déplacement maximum inconnus.

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

Avec

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (\text{III.28})$$

La charge transversale q est également étendue dans la série sinus de Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.29})$$

Où,

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy = \begin{cases} q_0 & \text{pour la distribution} \\ & \text{sinusoïdale de la charge} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour la distribution} \\ & \text{uniforme de la charge} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

En substituant l'équation. (III.27) dans les équations (III.25), on obtient

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{12} & S_{12} & S_{12} & S_{12} \\ S_{14} & S_{12} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{12} & m_{12} & m_{12} & m_{12} \\ m_{14} & m_{12} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \phi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Dans lequel

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \\ S_{12} &= -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \\ S_{13} &= \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ S_{14} &= \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), \\ S_{15} &= \alpha X_{13}, \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\ S_{23} &= \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

$$S_{24} = \beta \left(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2 \right)$$

$$S_{25} = \beta X_{23},$$

$$S_{33} = - \left(D_{11} \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4 \right),$$

$$S_{34} = -k_1 \left(D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2 \right) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 \left(D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2 \right),$$

$$S_{35} = -\alpha^2 Y_{13} - \beta^2 Y_{23}$$

$$S_{44} = -k_1 \left(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2 \right) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 \left(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2 \right) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2$$

$$S_{45} = -k_1 Y_{13}^s - k_2 Y_{23}^s - \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s - \beta^2 k_2 B' A_{44}^s$$

$$S_{55} = -\alpha^2 A_{55}^s - \beta^2 A_{44}^s - Z_{33}$$

et

$$m_{11} = -I_0, \quad m_{13} = \alpha I_1, \quad m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, \quad m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = \beta I_1, \quad m_{24} = -k_2 B' \beta J_1$$

$$, m_{33} = -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \quad m_{34} = J_2 \left(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2 \right), \quad \text{(III.33)}$$

$$m_{44} = -K_2 \left((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 \right), \quad m_{35} = -J_0, \quad m_{55} = -K_0$$

III.3. Analyse théorique de la vibration dans les poutres FGM – Test porosité -

III.3.1. Formulations du problème

Considérons une poutre poreuse en FGM d'une hauteur total (h), longueur (L) et de largeur (b). Les coordonnées cartésiennes x et z sont prises selon la longueur et la hauteur, respectivement, comme il est montré dans la figure III.2. Les faces (supérieure et inférieure) de la poutre sont à $z = \pm h/2$, et les bords horizontale de la poutre sont parallèles à l'axe x . La poutre est soumise à une charge transversale d'intensité $q(x)$ par unité de longueur.

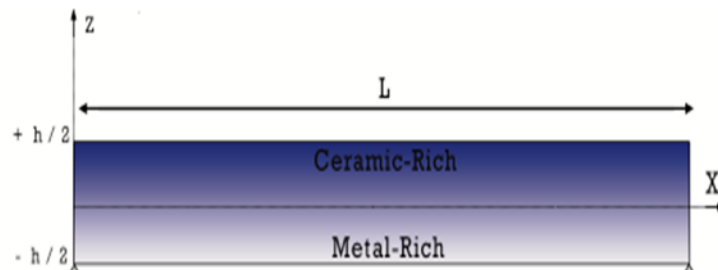


Figure III.2 : Coordonnées et géométrie de la poutre en FGM

III.3.2. Propriétés des matériaux

Dans cette partie d'étude, La poutre FG est composée d'un mélange de deux types de matériaux, par exemple un métal et une céramique. Les propriétés des matériaux de la poutre FG sont supposées varier de façon continue à travers la hauteur de la poutre. La poutre est supposée avoir des porosités s'étendant en épaisseur en raison d'un défaut pendant la production. Considérons une poutre imparfaite avec une fraction volumique de porosité, $\lambda (\lambda < 1)$, répartie également entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposée par Ankit Gupta et Mohammad Talha (2017) est utilisée:

$$P = P_c \left(V_c - \log \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right) + P_m \left(V_m - \log \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \quad (\text{III.34})$$

λ est nommé comme la fraction de volume de porosité ($\lambda < 1$). $\lambda = 0$ indique que la poutre FG non poreuse.

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et céramique est $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme suit:

$$V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.35})$$

Où p est le paramètre de matériau. La propriété matérielle effective de la poutre poreuse en FGM est donnée comme suit:

$$E(z) = [E_c - E_m] \left(\frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [E_c + E_m] \left[1 - \frac{2|z|}{h} \right] + E_m \quad (\text{III.36a})$$

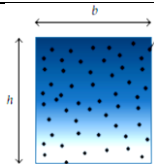
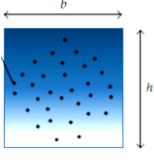
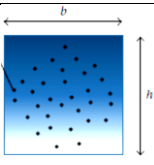
$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left(\frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [\rho_c + \rho_m] \left[1 - \frac{2|z|}{h} \right] + \rho_m \quad (\text{III.36b})$$

Où p est le paramètre du matériau, le module de Young E et la densité de masse ρ tel que les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques. ξ c'est le facteur de la distribution de la porosité en fonction de

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

l'épaisseur de la poutre (tableau III.1). Il est à noter que le nombre réel positif p ($0 \leq p < \infty$) lorsque p est mis à zéro la poutre est devient entièrement en céramique et une poutre entièrement en métal pour une valeur de p égal à l'infini. Dans cette étude, le coefficient de Poisson (ν) est considéré comme constant (Yang et al., 2005; Kitipornchai et al., 2006, Tounsi et al., 2013). Les propriétés matérielles d'une poutre FG parfait peuvent être évaluées en considérant ξ égale à zéro.

Tableau III.1.Facteur de la distribution de la porosité ξ .

	ξ	Forme géométrique
Wattanasakulpong <i>et al.</i> , 2014	$\frac{\lambda}{2}$	
Ankit Gupta <i>et al.</i> , 2017	$\log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$	
présent	$1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$	

III.3.3. Relations cinématiques

Un nouveau champ de déplacement a été utilisé dans cette étude pour réduire le nombre d'inconnues dans la théorie HSDT (Bouchafa et al, 2015).

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi(x, t) \quad (\text{III.37a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{III.37b})$$

Où u_0 et v_0 est le déplacement du plan médian de la poutre dans la direction x , w_0 est la composante de flexion, et de cisaillement transversal, respectivement; et $f(z)$ est une fonction de forme déterminant la distribution des contraintes de cisaillement

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

transversal à travers l'épaisseur de la poutre. Les fonctions de forme $f(z)$ sont choisies pour satisfaire aux conditions limites, sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, donc le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. En considérant que $\varphi = \int \theta(x) dx$, le champ de déplacement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple (Bourada et al., 2016):

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + K f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (\text{III.38a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{III.38b})$$

Où

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} - \frac{\cosh((\pi/h) * z)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$$

On peut voir que le champ de déplacement dans l'Eq. (III.38) n'introduit que trois inconnues (u_0 , w_0 et θ). Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'Eq. (III.38) sont données comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad , \quad \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{III.39})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad , \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.40a})$$

$$k_x^s = k \theta \quad , \quad \gamma_{xz}^0 = k \int \theta dx$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.40b})$$

et Les intégrales apparaissant dans les expressions ci-dessus doivent être résolues par une solution de Navier et peuvent être exprimées comme suites:

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.41})$$

Où le coefficient A' est défini selon le type de solution adoptée, dans ce cas par Navier. Par conséquent, A' , k sont exprimés:

$$A' = -\frac{1}{\kappa^2}, K = \kappa^2 \quad (\text{III.42})$$

Où κ est le nombre d'ondes de propagation des ondes le long de l'axe x . En supposant que le matériau de la poutre FG obéit à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent:

$$\sigma_x = C_{11}(z)\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = C_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (\text{III.43})$$

Où (σ_x, τ_{xz}) et $(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$ sont les contraintes et les déformations des composants, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III.33), les coefficients de rigidité, C_{ij} , peuvent être exprimées par :

$$C_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.44})$$

III.3.4. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et aux équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique:

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.45})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δV est la variation du travail externe effectuée par une charge externe appliquée à la poutre; et δK est la variation d'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par:

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0\end{aligned}\quad (\text{III.46})$$

Où A est la surface supérieure. Les efforts et les moments résultants N , M et S sont définies par:

$$\left(N_x, M_x^b, M_x^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad S_{xz}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.47})$$

La variation du travail externe peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dA \quad (\text{III.48})$$

Où q et N_x^0 sont des charges appliquées transversalement dans le plan, respectivement.

Pour les problèmes de vibration libre et de propagation des ondes, le travail externe est nul. La variation de l'énergie cinétique de la poutre peut être exprimée comme

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right) \right\} dA\end{aligned}\quad (\text{III.49})$$

Où le point «.» indique la dérivation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse donnée par l'équation (III.33); et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties de masse défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.50})$$

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz$$

En substituant les équations (III.46), (III.48) et (III.49) dans l'équation (III.45), et en intégrant par parties, puis en recueillant des coefficients de δu_0 , δw_0 et $\delta \theta$, on obtient les équations de mouvement de la poutre suivantes

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s + k A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} &= -J_1 \left(k A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (III.51)$$

En substituant l'équation (III.39) dans l'équation (III.43), et les résultantes dans l'équation (III.47), les contraintes résultantes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix}, S_{xz}^s = A^s \gamma_{xz} \quad (III.52)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \quad (III.53a)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \quad (III.53b)$$

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.53c})$$

Et les composants de rigidité sont donnés comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.54a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III.54b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.54c})$$

En substituant l'équation. (III.52) dans l'équation. (III.51), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0 , w_0 et θ) et les équations appropriées prennent la forme :

$$A_{11} d_{11} u_{00} - B_{11} d_{111} w_0 + (B_{11}^s k) d_{11} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + J_1 A' k d_{11} \ddot{\theta}, \quad (\text{III.55a})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 - D_{11} d_{1111} w_0 + (D_{11}^s k) d_{11} \theta = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0) + J_2 (k A' d_{11} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.55b})$$

$$\begin{aligned} & - (B_{11}^s k) d_{11} u_0 + (D_{11}^s k) d_{11} w_0 - H_{11}^s k^2 \theta + A_{55}^s (k A')^2 d_{11} \theta = -J_1 (k A' d_{11} \ddot{u}_0) + J_2 (k A' d_{11} \ddot{w}_0) \\ & - K_2 ((k A')^2 d_{11} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III.55c})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \\ d_{ijlm} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

III.3.5. Relations de dispersion

Nous supposons que u_0 , w_0 et θ sont les solutions de la propagation d'ondes dans le plan x , formulées comme suit :

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

$$\begin{cases} u_0(x,t) \\ w_0(x,t) \\ \theta_0(x,t) \end{cases} = \begin{cases} U \exp[i(\kappa x - \omega t)] \\ W \exp[i(\kappa x - \omega t)] \\ X \exp[i(\kappa x - \omega t)] \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

Où U ; W et X sont les coefficients d'amplitude d'onde, κ est le nombre d'onde de propagation le long de l'axe x , ω est la fréquence de propagation, $\sqrt{-1}$ l'unité imaginaire

En substituant l'équation (III.57) dans les équations (III.55), le problème suivant est obtenu

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{cases} U \\ W \\ X \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

Où

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\kappa^2), \quad S_{12} = i \cdot (B_{11}\kappa^3), \quad S_{13} = i \cdot \kappa (kB_{11}^s), \\ S_{21} &= -i \cdot (B_{11}\kappa^3), \quad S_{22} = -(D_{11}\kappa^4), \quad S_{23} = -k_1 (D_{11}^s \kappa_1^2), \\ S_{31} &= -i \cdot \kappa (kB_{11}^s), \quad S_{32} = -k_1 (D_{11}^s \kappa_1^2), \quad S_{33} = -(H_{11}^s \kappa^2) - (kA')^2 A_{55}^s \kappa^2 \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

$$m_{11} = -I_0, \quad m_{12} = i \cdot \kappa I_1, \quad m_{13} = -i \cdot J_1 k A' \kappa, \quad m_{21} = -i \cdot \kappa I_1, \quad m_{22} = -I_0 - (I_2 \kappa^2)$$

$$m_{23} = J_2 (k A' \kappa^2), \quad m_{31} = i \cdot J_1 k A' \kappa, \quad m_{32} = J_2 (k_1 A' \kappa^2), \quad m_{33} = -K_2 (k A')^2 \kappa^2$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduée sont donnés par :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.60})$$

Les racines de l'équation (III.60), peut être exprimé en tant que :

$$\omega_1 = W_1(\kappa), \quad \omega_2 = W_2(\kappa) \quad (\text{III.61})$$

$$\text{et } \omega_3 = W_3(\kappa) \quad (\text{III.32})$$

Chapitre III : Analyse théorique du comportement statique et vibratoire des structures FGM

Elles correspondent aux modes d'ondes M_1 , M_2 et M_3 , respectivement. Le mode d'onde M_1 correspondent à l'onde de flexion, les modes d'ondes M_2 et M_3 correspondent à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduée peut être exprimée par :

$$C_i = \frac{W_i(\kappa)}{\kappa}, \quad (i = 1,2,3) \quad \text{(III.63)}$$

III. 4. Conclusion

Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement statique et vibratoire des structures FGM a été présentée.

Deux types des structures FGM sont considérés, un premier type est une plaque dont les propriétés des matériaux sont considérées comme variant selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance et une poutre qui supposée avoir des porosités s'étendant en épaisseur en raison d'un défaut pendant la production.

Un nouveau modèle de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées et une nouvelle forme de distribution de la porosité a été utilisé. la déformation normale ou l'effet de stretching a été pris en considération dans l'analyse les plaques FGM. Les équations gouvernantes dans la poutre et la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton, qui prend en compte les effets de déformation par cisaillement et la rotation de l'inertie. Les solutions analytiques et les relations analytiques de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

CHAPITRE IV

VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS

Chapitre IV : VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS

IV.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter et de discuter d'une part les résultats de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaque FGM avec la pris en compte de l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching), et d'autre part l'analyse des résultats de l'effet de la porosité sur la propagation d'ondes des poutres FGM poreuses.

Plusieurs exemples illustratifs sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de cette analyse. Les résultats numériques dans les présentes théories sont comparés à ceux prédits par la théorie utilisée par Carrera et al. (2008), Belabed et al. (2008), Mouaici et al. (2016) et Belabed et al. (2014), Zenkour, (2000), pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques FGM, et les théories utilisées par Nuttawit et al. (2013) et Gupta et al. (2017) pour étudier l'effet de la porosité sur la propagation d'onde des poutres.

Toutes les analyses basées sur le présent modèle sont effectuées en utilisant le programme MAPLE.

IV.2. Analyse des résultats du comportement mécanique des plaques FGM

IV.2.1 Analyse en flexion d'une plaque FGM soumis à un chargement extérieur

Dans cette partie d'étude, nous présentons le comportement statique d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à une charge q sinusoïdale. La surface inférieure de la plaque FGM est riche en aluminium (métal), tandis que la surface supérieure de la plaque est riche en alumine ou en zircone (céramique).

On suppose une plaque Al /Al₂O₃ en aluminium (comme métal) et en alumine (comme céramique) ; dont les propriétés sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau IV.1 : Les propriétés des matériaux utilisés

<i>Matériaux</i>	<i>E (GPa)</i>	<i>ρ (kg/m³)</i>	<i>ν</i>
Métal (Aluminium, Al)	70	2702	0.3
Céramique (Alumine, Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3

Pour des raisons de simplicité, Les résultats numériques sont présentés en termes des grandeurs adimensionnelles.

Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont :

$$w^* = \frac{10 E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0 a} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right) \quad (IV.1)$$

$$\bar{w} = wh \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (IV.2)$$

Tableau IV.2 : Etude comparative de la flèche w^* et la contrainte longitudinale d'une plaque FGM carrée.

P	Théorie ($\varepsilon_z \neq 0$)	$\bar{\sigma}_x = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right)$			$w^* = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$		
		a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h =100
P=1	Carrera et al. [2008]	0.622	1.506	14.969	0.717	0.588	0.563
	belabed et al. [2014]	0.5865	1.4677	14.6762	0.6916	0.5695	0.5461
	zenkour. [2014]	0.5706	1.4159	14.1343	0.6896	0.568	0.5446
	Present	0.5827	1.4554	14.5477	0.6916	0.5696	0.5462
P=4	Carrera et al. [2008]	0.488	1.1970	11.923	1.159	0.882	0.829
	belabed et al. [2014]	0.4396	1.1460	11.5443	1.0981	0.8423	0.7934
	zenkour. [2014]	0.4181	1.0802	10.863	1.097	0.8403	0.791
	Present	0.4348	1.1313	11.3927	1.0984	0.8424	0.7934
P=10	Carrera et al. [2008]	0.370	0.897	8.908	1.375	1.007	0.936
	belabed et al. [2014]	0.3231	0.8622	8.7215	1.3353	1.0072	0.9361
	zenkour. [2014]	0.3033	0.8031	8.1112	1.3333	0.9807	0.9130
	Present	0.3187	0.8494	8.5905	1.3357	0.9817	0.9140

Le tableau IV.2 présente la déflexion adimensionnelle $w^*(0)$ et la contrainte longitudinale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right)$ des plaques carrées FG soumises à des charges sinusoïdales. Les résultats sont comparés à ceux de Carrera et al. (2008), Belabed et al. (2008), et Zenkour, (2000). On peut voir qu'il existe un bon accord entre les résultats.

La Figure IV.1 montre la déflexion adimensionnelle w^* au centre de la plaque en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour différentes valeurs du paramètre de matériau p d'une plaque carrée en FGM ($a=b$). On remarque que l'augmentation du rapport de l'épaisseur a/h conduit à une augmentation de la contrainte longitudinale de la plaque FG.

On constate également que la déflexion augmente lorsque le paramètre de matériau p augmente. Ceci est dû au fait que la rigidité à la flexion est maximale pour une plaque entièrement en céramique, c'est-à-dire ($p=0$) et se dégrade progressivement à fur et à mesure que p augmente.

La variation de la déflexion adimensionnelle w^* à travers l'épaisseur pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur est présenté dans la figure IV.2. Il est clair que la déflexion adimensionnelle w^* diminue lorsque le rapport d'épaisseur a/h augmente. Et par conséquent, la déflexion adimensionnelle au centre devienne plus grande lorsque la plaque est considéré comme épaisse.

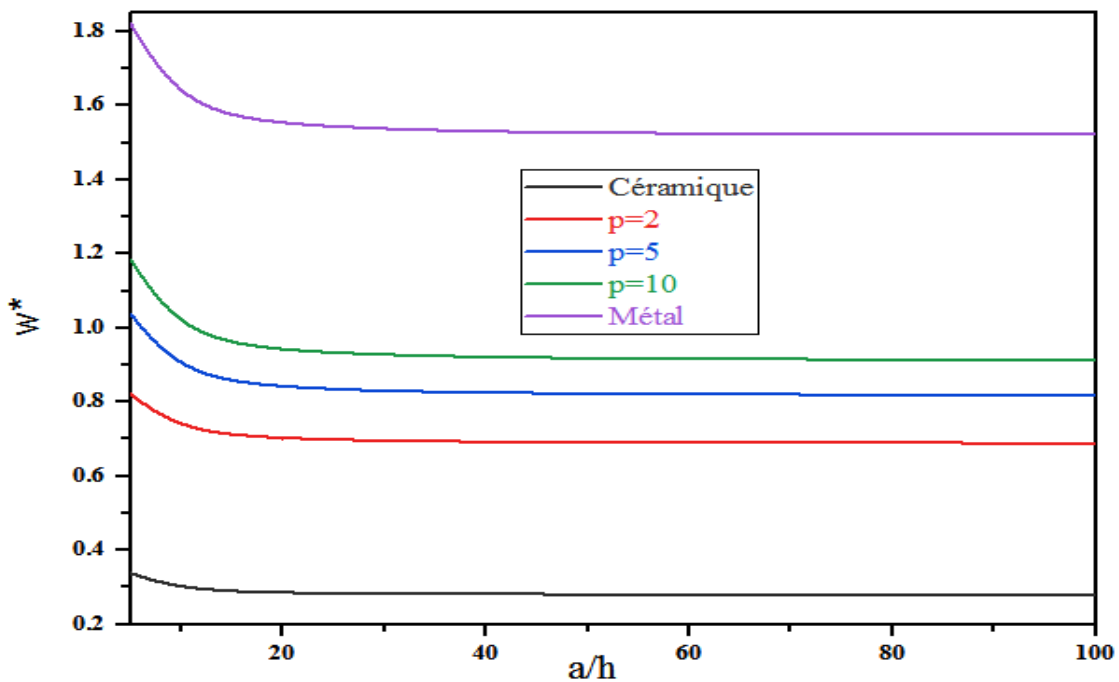


Figure IV. 1: Variation de la flèche adimensionnelle au centre w^* en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃.

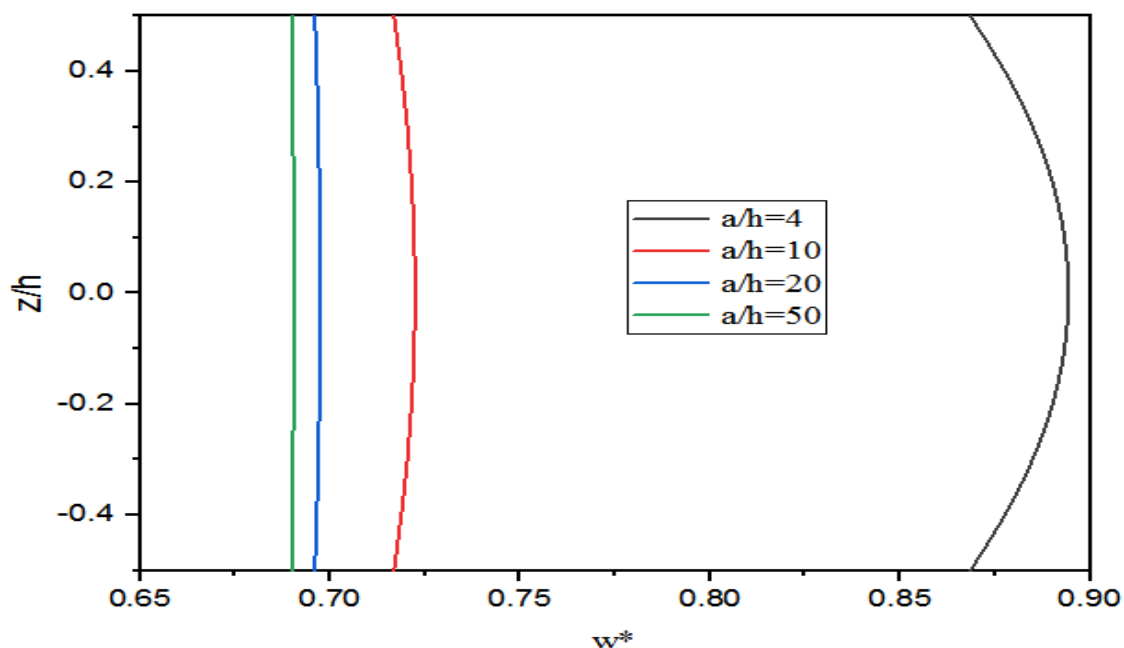


Figure IV. 2: Variation de la déflexion adimensionnelle w^* à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p=2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

Les figures IV.3 et IV.4 montrent les distributions des contraintes longitudinale (σ_{xx}) et normale (σ_{zz}) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FG (avec $p=2$) pour différents rapports de l'épaisseur a/h . Les contraintes longitudinales sont compressives jusqu'à l'épaisseur $z/h=0.160$, puis deviennent des contraintes de traction.

On observe aussi que la contrainte longitudinale augmente avec l'augmentation de rapport de l'épaisseur a/h .

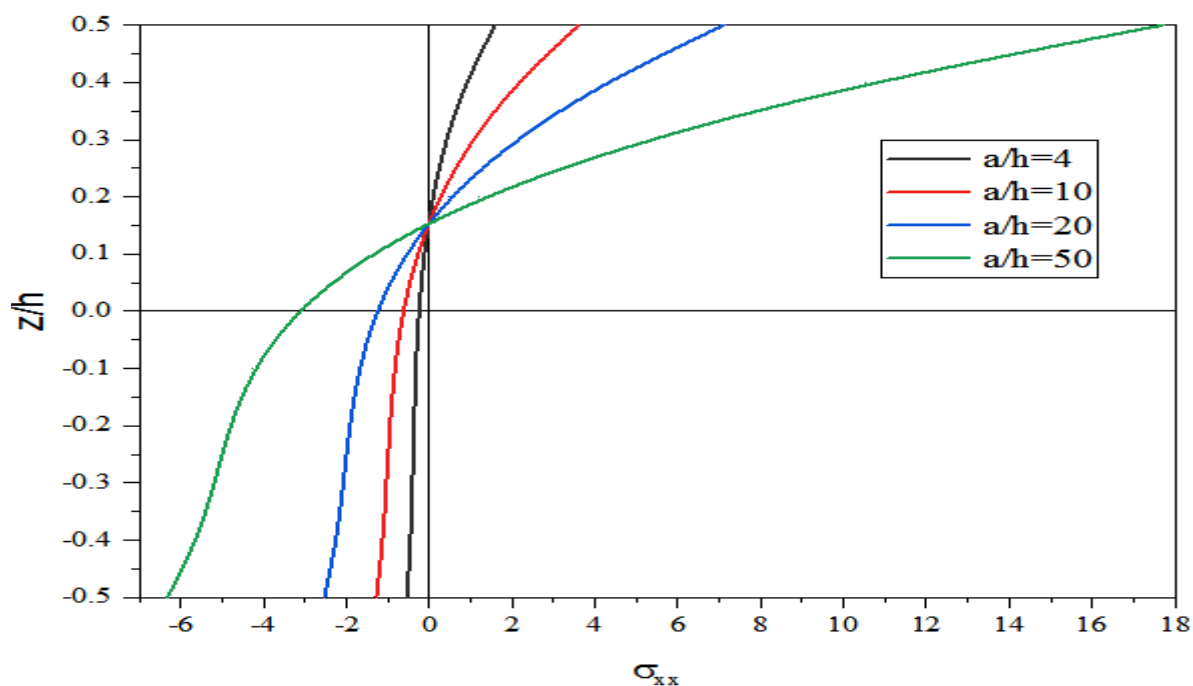


Figure IV. 3: Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p=2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

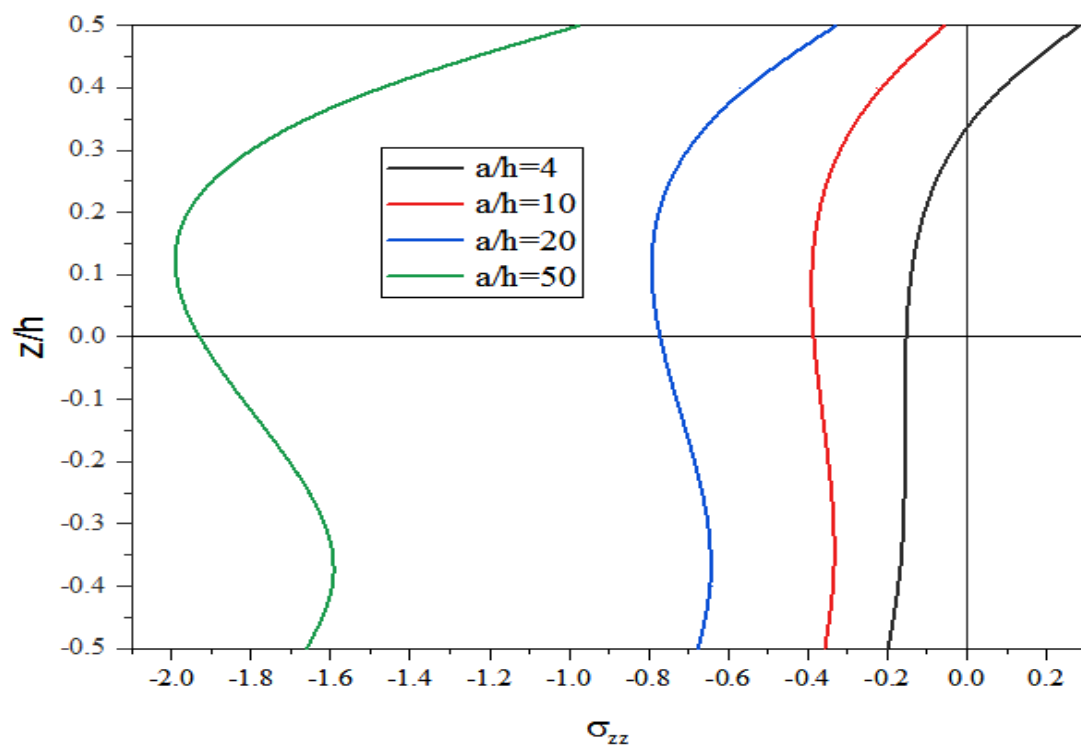


Figure IV. 4: Variation de la contrainte normale σ_{zz} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p=2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

On peut constater à partir de la figure IV. 5 que la valeur maximale de τ_{xz} se situe à un point au-dessus du plan médian de la plaque. On remarque également que les valeurs de la contrainte de cisaillement dans les deux cas purement céramique et purement métallique sont égales.

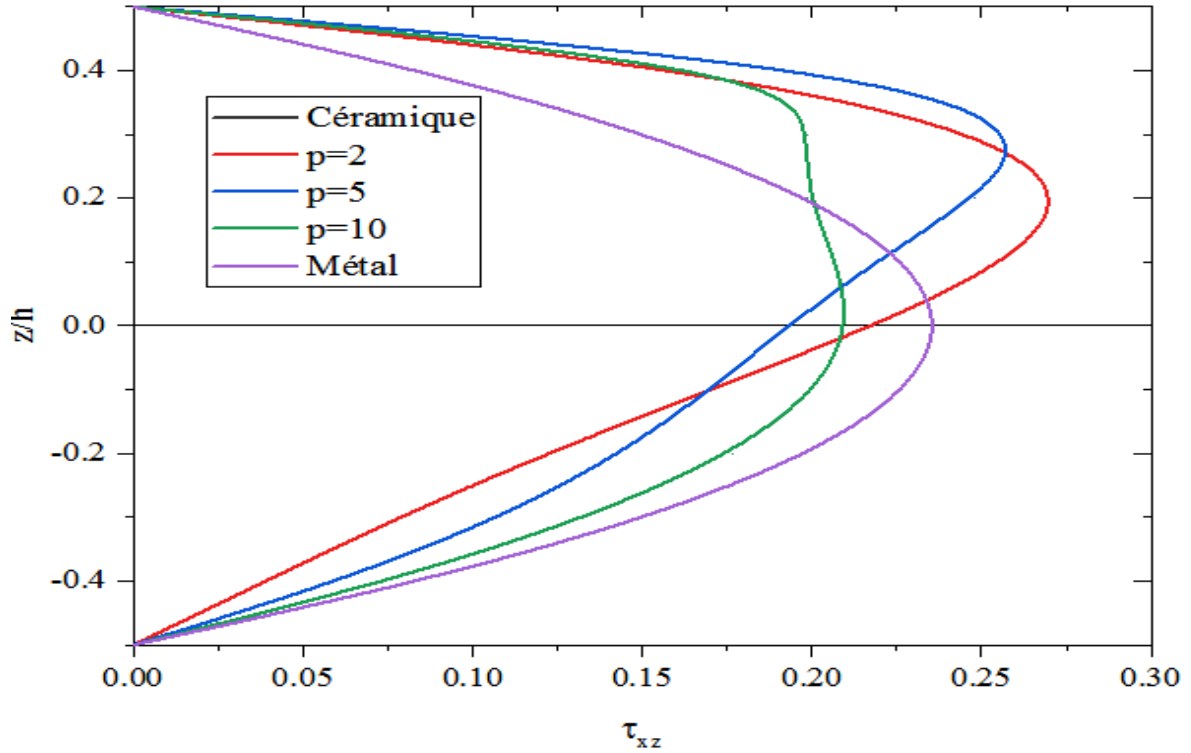


Figure IV. 5: Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée (avec $p=2$ et $a=b$) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

IV.2.2 Analyse de la vibration libre des plaques FGM

Dans cette vérification, nous essayons de voir l'exactitude de la théorie présente en comparant les résultats des fréquences adimensionnelles obtenues avec ceux de la littérature. Pour cela, plusieurs exemples numériques sont décrits, discutés et comparés à d'autres théories existantes telles que la théorie de la déformation hyperbolique du cisaillement présentée par Mouaici et al. (2016) et la théorie proposée par Belabed et al. (2014).

Les fréquences fondamentales adimensionnelles pour les plaques carrées simplement appuyées avec différentes valeurs d'épaisseur (5; 10 et 20) et pour un

paramètre de matériau p variant de 0 à 10 sont présentées dans le tableau IV.3. Les résultats obtenus par le modèle objet de cette partie d'étude sont comparés par ceux prédits par Belabed et al. (2014) et par Mouaici et al. (2016) pour les deux cas $\varepsilon_z \neq 0$ (avec l'effet stretching) et $\varepsilon_z = 0$ (sans l'effet stretching).

On peut constater en général que les résultats du présent modèle sont en excellent accord avec les autres modèles. On peut également observer l'influence de l'effet de la déformation normale sur la fréquence fondamentale (l'effet de stretching ε_z augmente la fréquence; cette augmentation devient plus remarquable dans le cas d'un rapport d'épaisseur égal à 5). C'est-à-dire que l'effet de la déformation normale " ε_z " devient plus sensible dans le cas de plaques épaisses.

Dans le tableau IV.4, les résultats de la fréquence fondamentale adimensionnelle obtenus pour des plaques FGM rectangulaires dans les deux cas: avec ou sans l'effet de stretching, ont été présenté. De même l'influence de cet effet est constatée à partir de ces résultats, et cet effet devient plus remarquable dans le cas d'un rapport d'épaisseur égal à 2.

Tableau IV.3 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale ω pour les plaques FGM carrées.

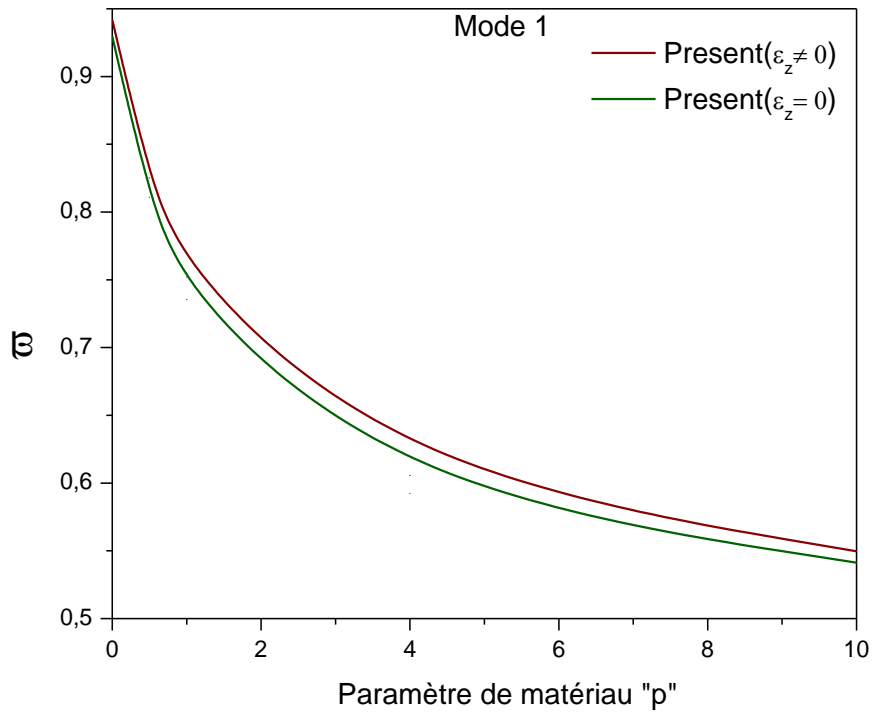
a/h	Mode (m,n)	Théorie	effet de stretching	P				
				0	0.5	1	4	10
5	(1, 1)	Belabed et al. (2014)	$\varepsilon_z \neq 0$	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.2122	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Mouaici et al. (2016)	$\varepsilon_z = 0$	/	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301
		Présent	$\varepsilon_z = 0$	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	(1, 2)	Belabed et al. (2014)	$\varepsilon_z \neq 0$	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.4661	0.4042	0.3677	0.3047	0.2812
		Mouaici et al. (2016)	$\varepsilon_z = 0$	/	0.3988	0.3606	0.2982	0.2772
		Présent	$\varepsilon_z = 0$	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
	(2, 2)	Belabed et al. (2014)	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6760	0.5893	0.5365	0.4381	0.4009
		Mouaici et al. (2016)	$\varepsilon_z = 0$	/	0.5801	0.5253	0.4288	0.3950
		Présent	$\varepsilon_z = 0$	0.6688	0.5803	0.5252	0.4284	0.3948
10	(1, 1)	Belabed et al. (2014)	$\varepsilon_z \neq 0$	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Mouaici et al. (2016)	$\varepsilon_z = 0$	/	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
		Présent	$\varepsilon_z = 0$	0.0577	0.0490	0.0422	0.0381	0.0364

	(1, 2)	Belabed et al. (2014)	$\epsilon_z \neq 0$	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Mouaici et al. (2016)	$\epsilon_z = 0$	/	0.1173	0.1059	0.0902	0.0856
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0.1376	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
	(2, 2)	Belabed et al. (2014)	$\epsilon_z \neq 0$	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0.2122	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Mouaici et al. (2016)	$\epsilon_z = 0$	/	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
20	(1, 1)	Belabed et al. (2014)	$\epsilon_z \neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

Tableau IV.4 : Fréquence fondamentale adimensionnelle pour différentes plaques rectangulaires.

a/h	Mode (m,n)	Théorie	effet de stretching	P				
				0	0.5	1	4	10
2	(1, 1)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,6638	0,5785	0,5266	0,4304	0,3940
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,6568	0,5697	0,5158	0,4208	0,3880
	(1, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,9420	0,8253	0,7521	0,6057	0,5497
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,9297	0,8110	0,7356	0,5924	0,5412
	2, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	1,7534	1,5515	1,4180	1,1156	0,9970
		Présent	$\epsilon_z = 0$	1,7233	1,5192	1,3844	1,0919	0,9807
5	(1, 1)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,1381	0,1184	0,1077	0,0923	0,0868
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,1376	0,1174	0,1059	0,0903	0,0856
	(1, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,2122	0,1825	0,1659	0,1409	0,1318
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,2113	0,1807	0,1631	0,1378	0,1301
	2, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,4661	0,4042	0,3677	0,3047	0,2812
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,4623	0,3989	0,3607	0,2980	0,2771
10	(1, 1)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,0365	0,0312	0,0284	0,0247	0,0234
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,0365	0,0310	0,0279	0,0241	0,0231
	(1, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,0578	0,0494	0,0449	0,0389	0,0368
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,0577	0,0490	0,0442	0,0381	0,0364
	2, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,1381	0,1184	0,1077	0,0923	0,0868
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,1376	0,1174	0,1059	0,0903	0,0856
20	(1, 1)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,0093	0,0079	0,0072	0,0063	0,0060
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,0093	0,0079	0,0071	0,0062	0,0059
	(1, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,0148	0,0126	0,0115	0,0100	0,0095
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,0148	0,0125	0,0113	0,0098	0,0094
	2, 2)	Présent	$\epsilon_z \neq 0$	0,0365	0,0312	0,0284	0,0247	0,0234
		Présent	$\epsilon_z = 0$	0,0365	0,0310	0,0279	0,0241	0,0231

Les figures IV.6, IV.7 et IV.8 montrent la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une plaque de FGM carrée parfaite en fonction du paramètre de matériau pour un rapport d'épaisseur a/h égal à 2, 5 et 10, respectivement, et pour les trois modes. De plus, l'effet de la déformation normale est présenté sur cette figure. Ces courbes permettent de constater que l'augmentation des valeurs de l'indice de puissance entraîne une diminution de la fréquence. Cette diminution est assez significative pour des valeurs du paramètre de matériaux inférieures à 6 pour les trois modes; à partir de cette valeur, l'écarte devient pratiquement constante.



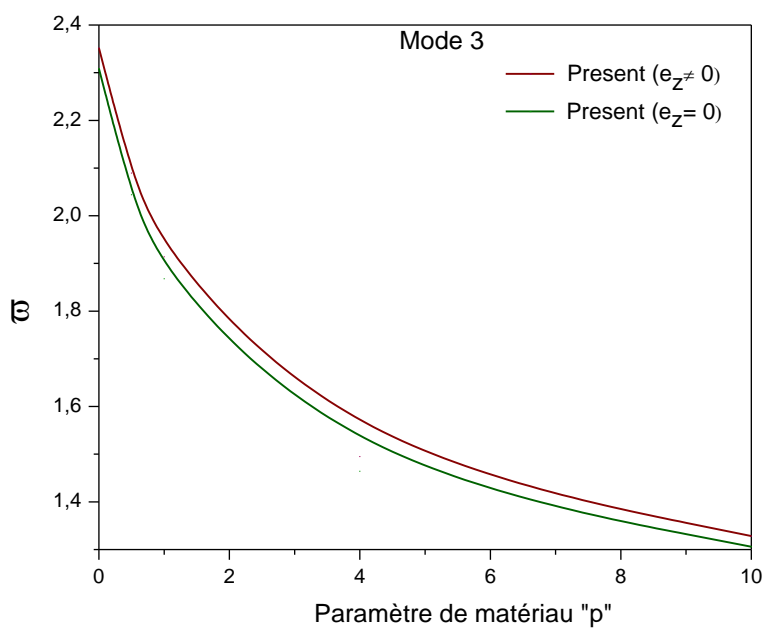
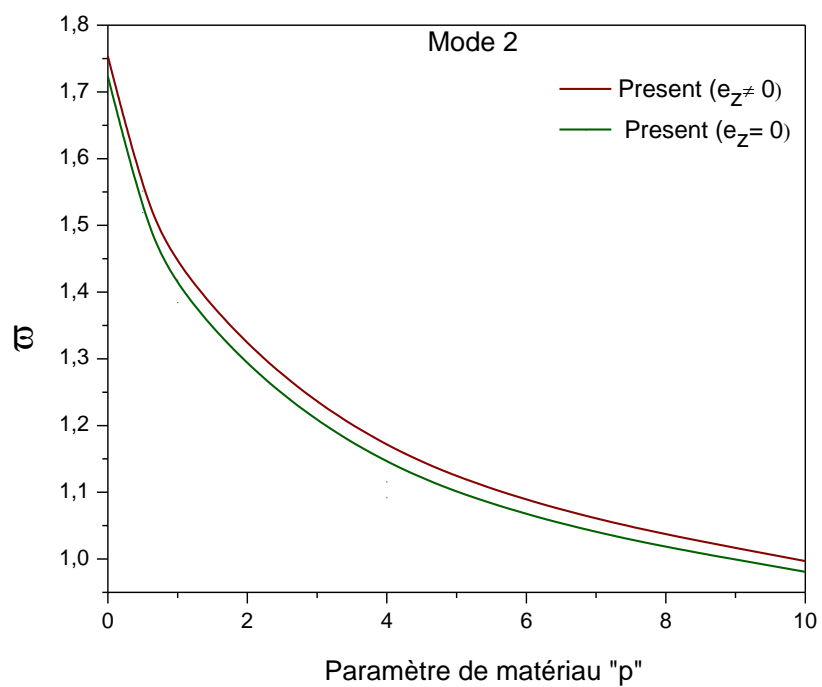
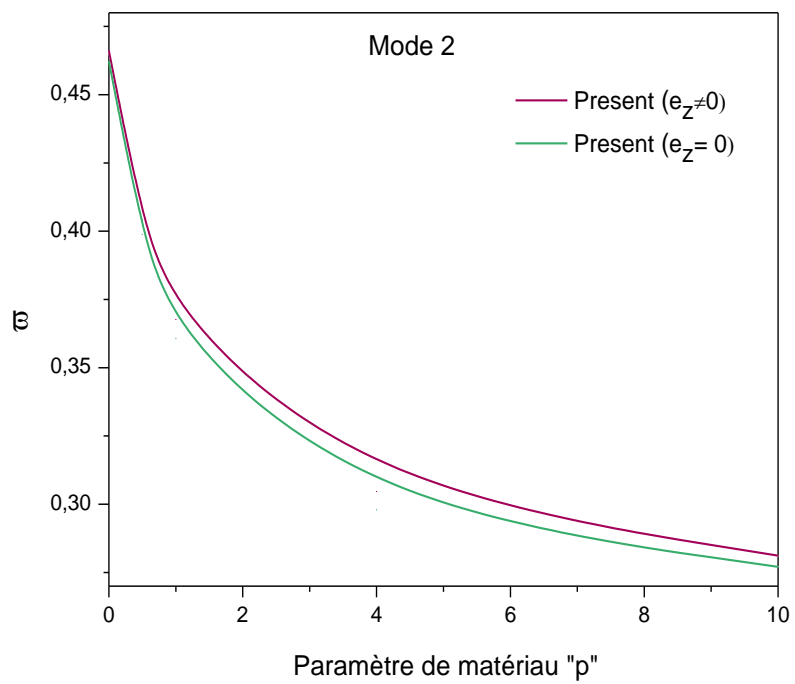
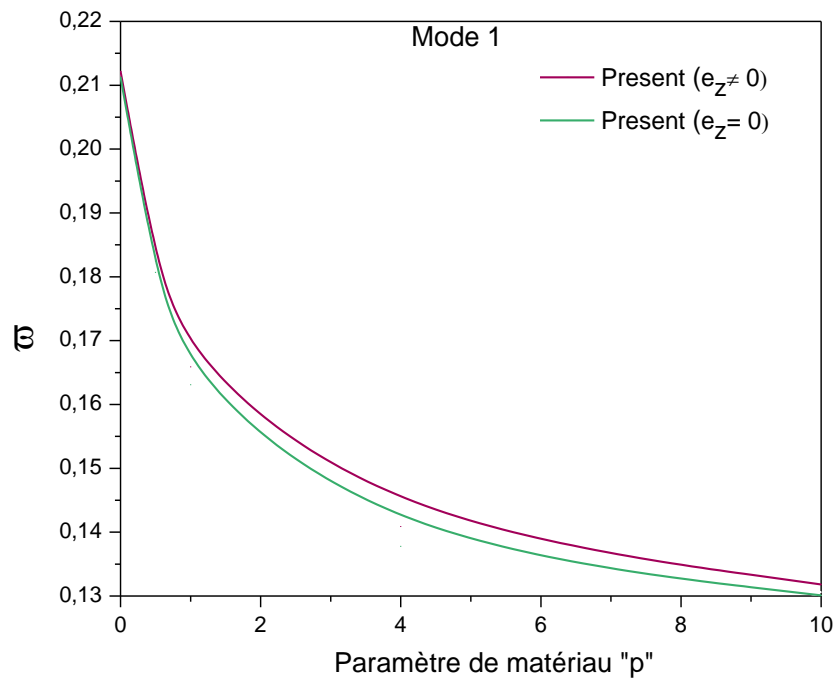


Figure IV. 6: Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfaite ($a/h=2$).



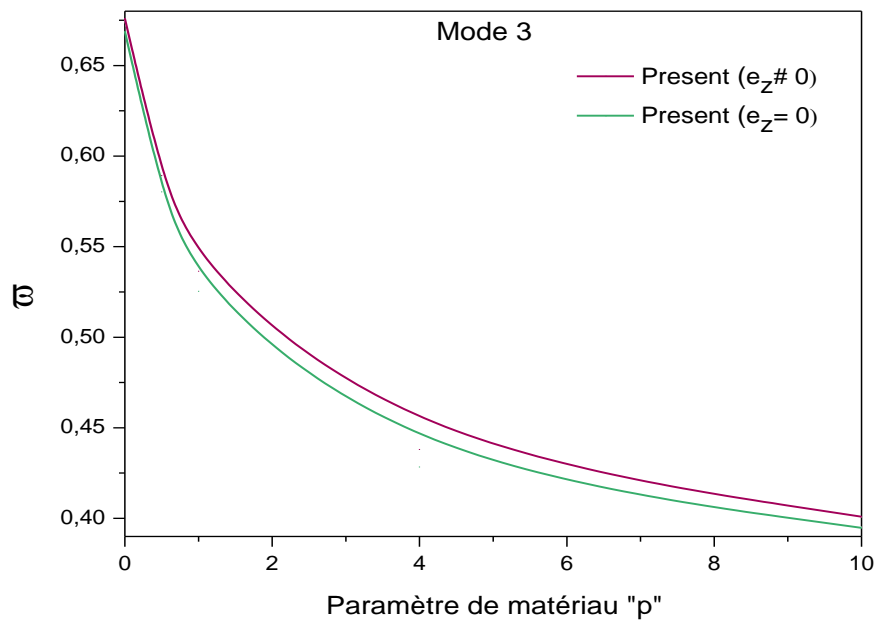
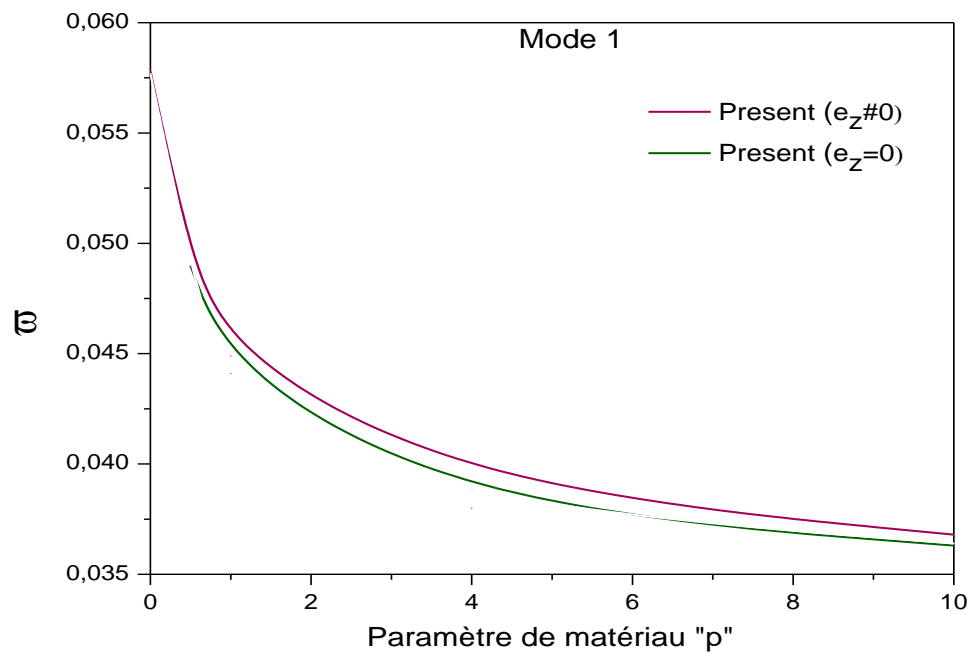


Figure IV. 7: Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfaite ($a/h=5$)

On constate également que les fréquences fondamentales d'une plaque sans l'effet de la déformation normale ($\epsilon_z=0$) sont sous-estimées par rapport à celles d'une plaque avec l'effet de la déformation normale ($\epsilon_z \neq 0$), et particulièrement pour les fréquences du mode 3.



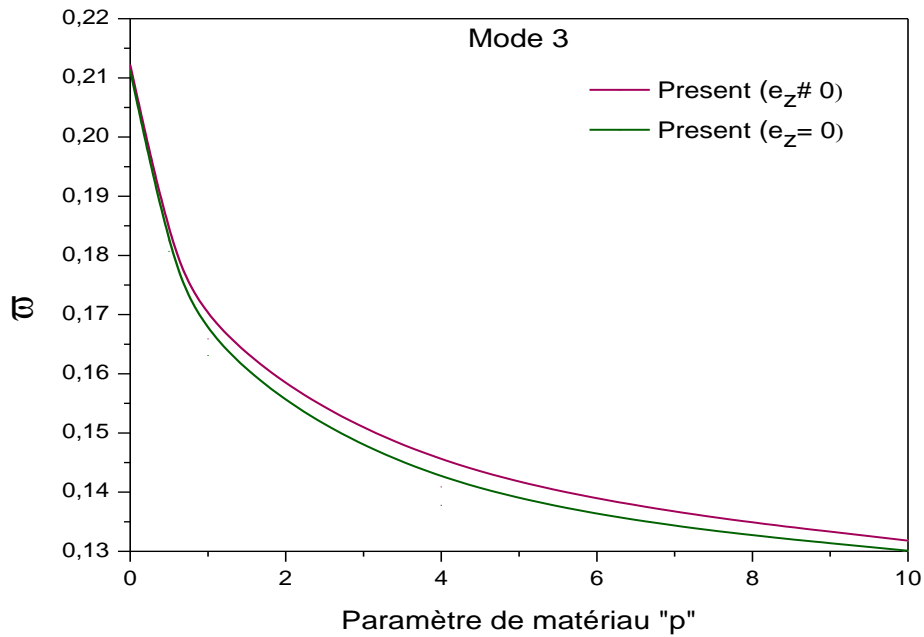


Figure IV. 8: Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfaite ($a/h=10$).

Les courbes illustrées dans les figures IV.9 et IV.10, montrent la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle pour différentes plaques de FGM parfaites carrées et rectangulaires, respectivement, en fonction du rapport longueur / épaisseur (a/h).

Les courbes présentées dans ces deux figures montrent que la fréquence décroît avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h). On peut également observer que plus le paramètre de matériau diminue (augmentation de la rigidité), plus la fréquence augmente. Tandis que lorsque le paramètre de matériau augmente (diminution de la rigidité), les fréquences diminuent.

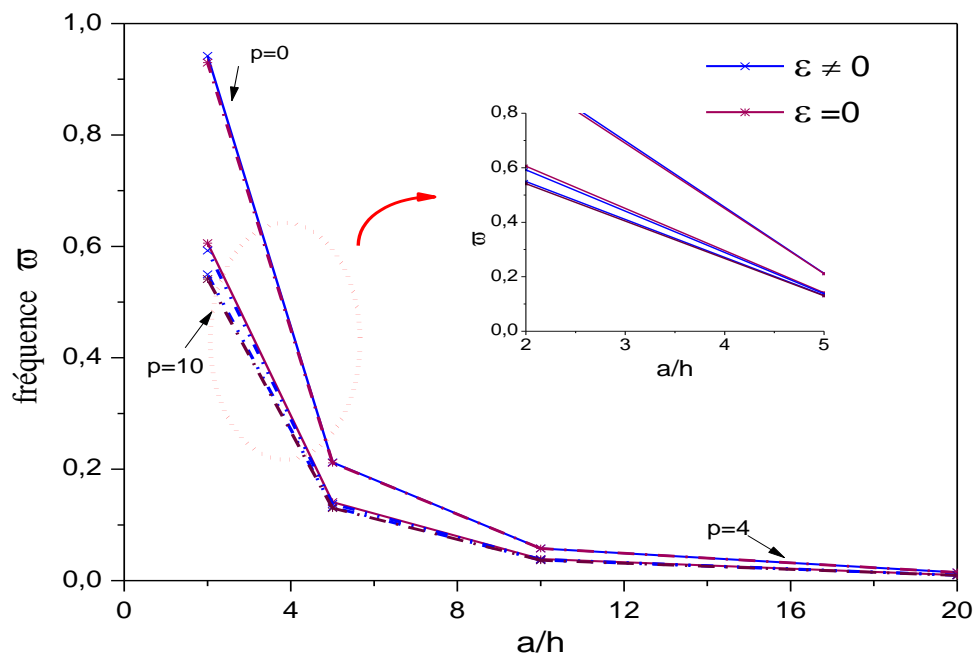


Figure IV. 9: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques FGM carrées parfaites en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).

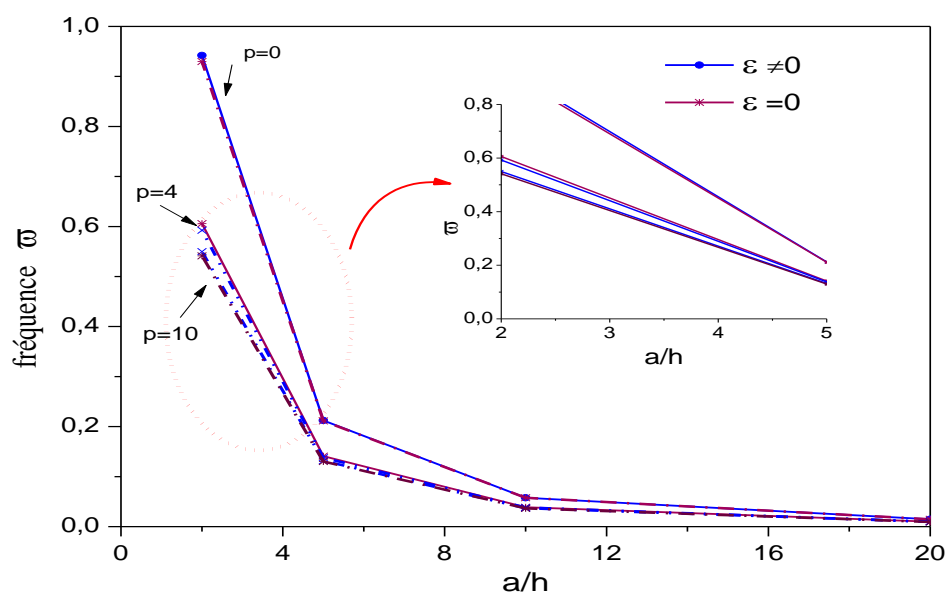


Figure IV. 10: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques de FGM parfaites rectangulaires en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).

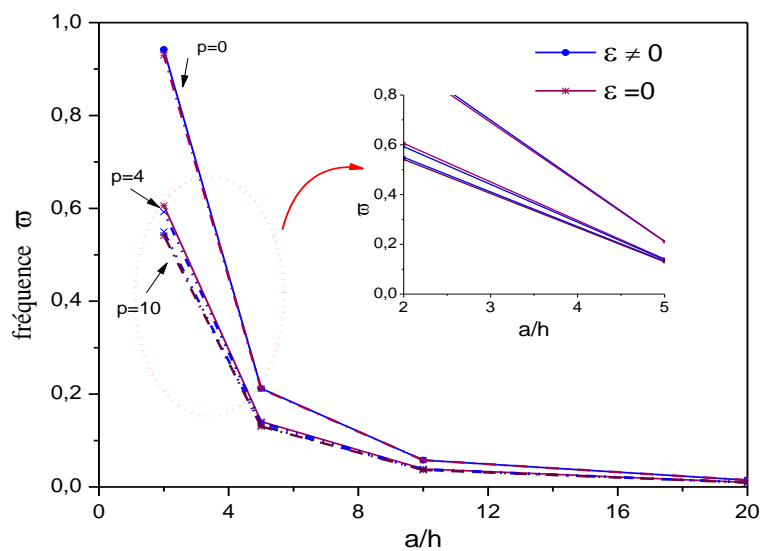


Figure IV. 11: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques FGM carrées parfaites en fonction du rapport longueur / épaisseur (a/h).

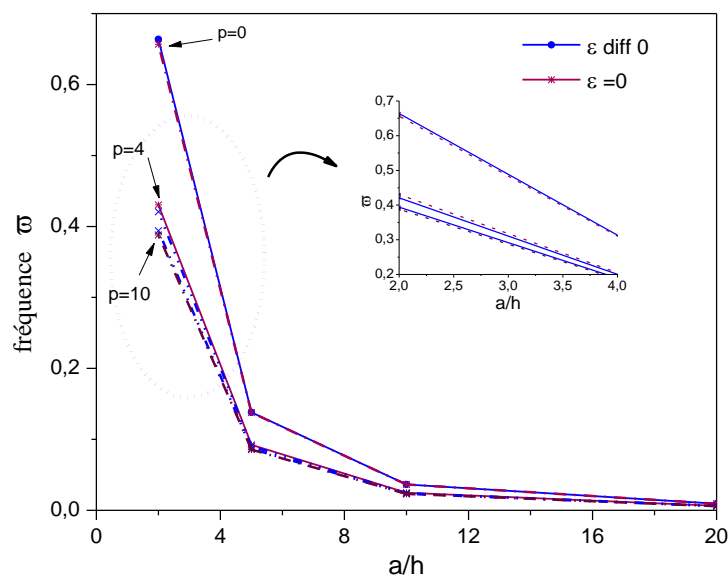
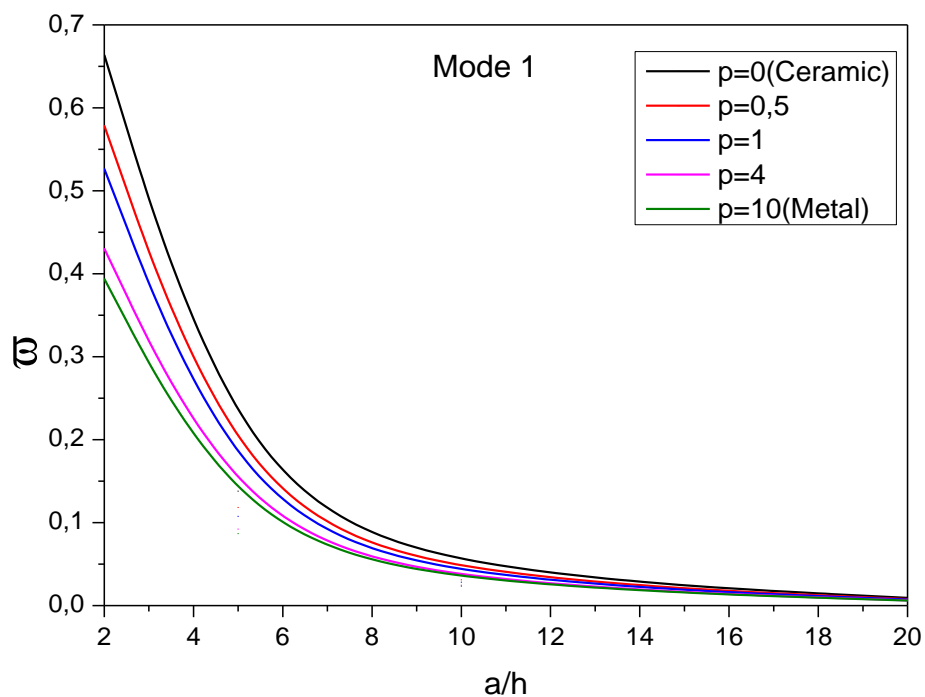
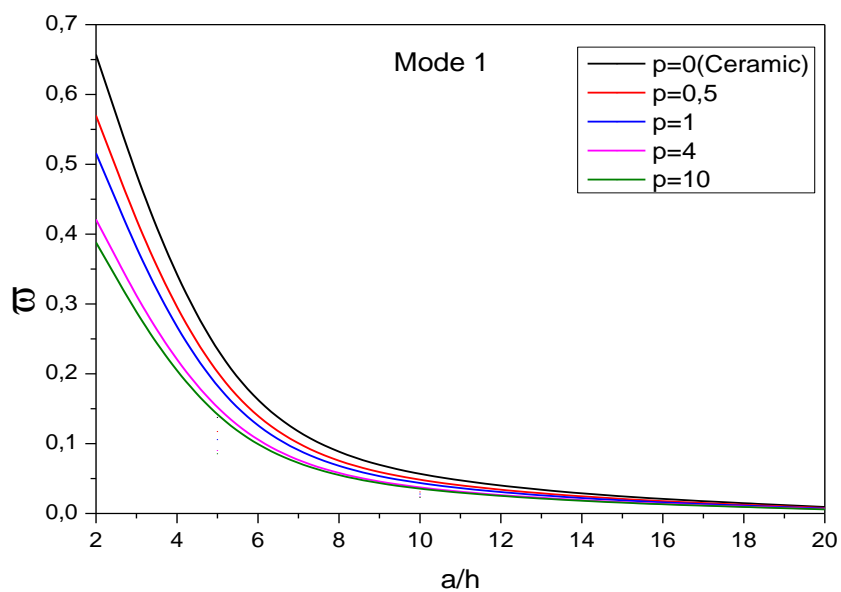


Figure IV. 12: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques de FGM parfaites rectangulaires en fonction du rapport longueur / épaisseur (a/h).

Les figures IV.13 et IV. 14 montrent la variation de la fréquence fondamentale d'une plaque de FGM carrée et rectangulaire, respectivement, en fonction du rapport a/h . En outre, l'effet de la déformation normale est illustré aux figures (a) et (b). A partir de ces figures, on peut voir que l'augmentation des valeurs du rapport a/h conduit à une diminution de la fréquence fondamentale. Cette diminution est assez significative pour des valeurs du rapport a/h inférieures à 10. À partir de cette valeur, la fréquence fondamentale devient pratiquement constante.

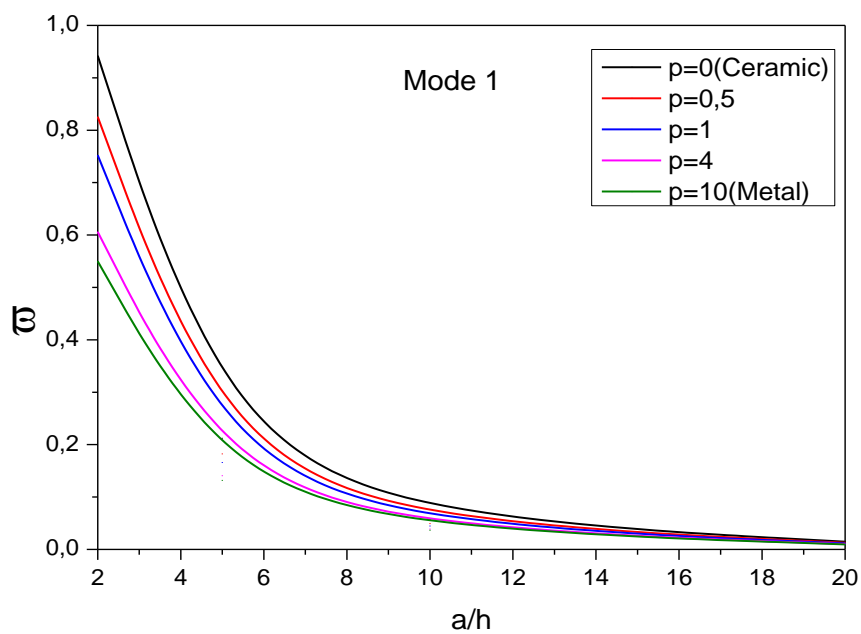


(a)

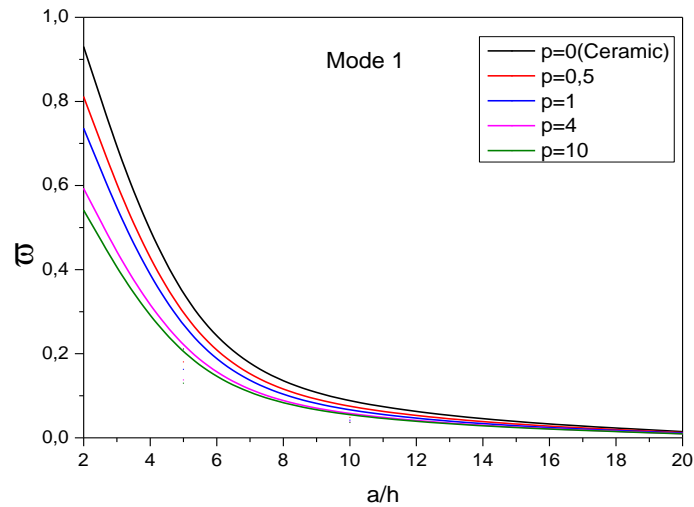


(b)

Figure IV. 13: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques FGM rectangulaires parfaites ($b = 2a$) en fonction du rapport a / h . (a) $\epsilon z \neq 0$ (b) $\epsilon z = 0$.



(a)



(b)

Figure IV. 14: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de la plaque FGM parfaite carrée en fonction de paramètre du matériau. (a) $\varepsilon z \neq 0$ (b) $\varepsilon z = 0$.

La figure IV. 15 représente la variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction du paramètre de matériau pour un rapport d'épaisseur $a/h=2$ et pour différentes valeurs de porosité. A partir des courbes présentées dans cette figure, on peut voir que le paramètre de la fréquence naturelle des plaques de FGM a une relation inverse avec la porosité, et que ce paramètre diminue avec l'augmentation de la porosité.

Sur la figure IV.16, nous avons travaillé à définir l'influence de l'indice de porosité de la fréquence fondamentale adimensionnelle des différentes plaques FGM avec un rapport épaisseur égale à 2 et 10, respectivement. Le paramètre de matériau est pris égal à 0, 1, 2, 4 et 10. A partir de ces courbes, on constate qu'il existe une divergence d'influence de la porosité sur la fréquence fondamentale des plaques FG pour chaque cas de paramètre de matériau.

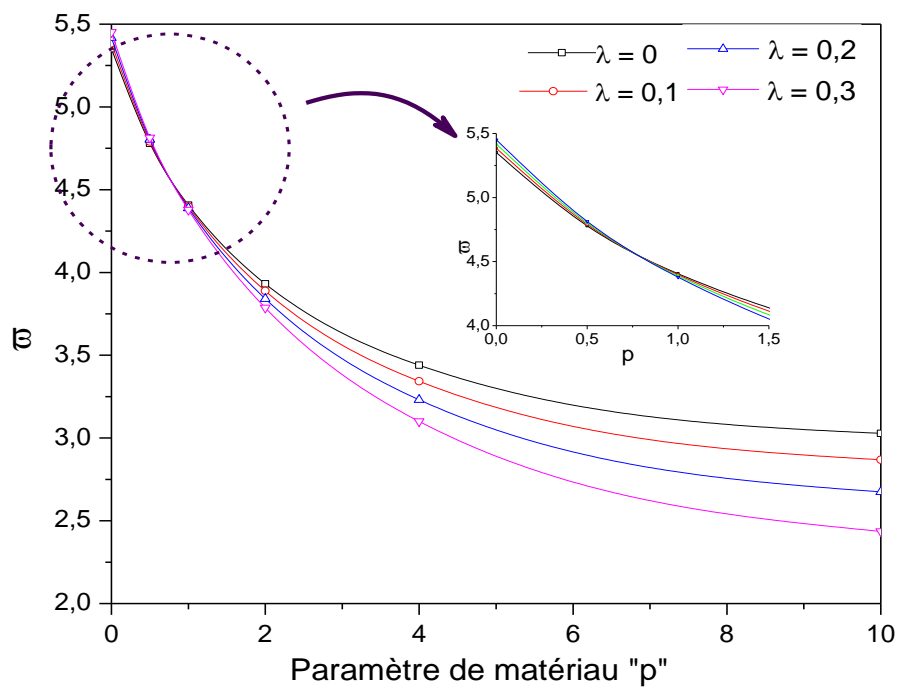
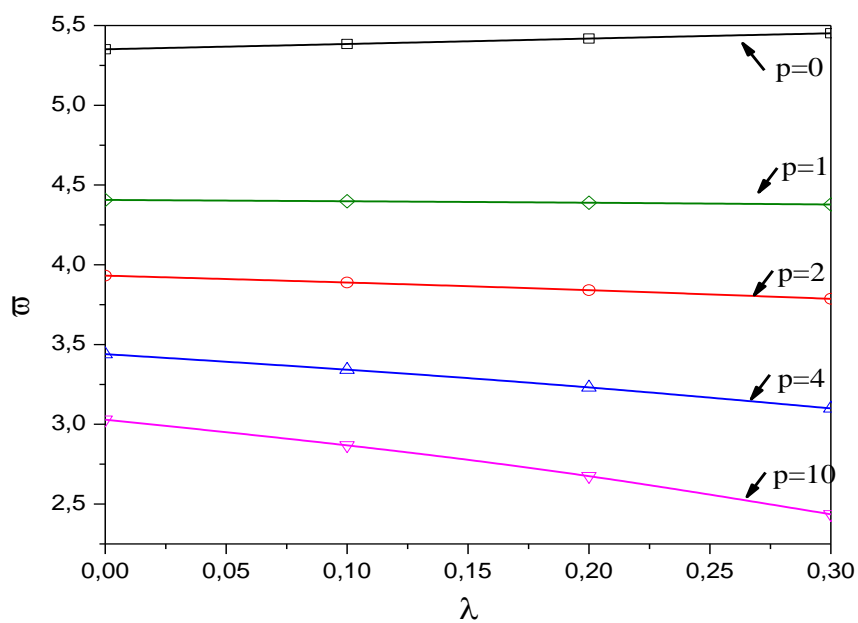
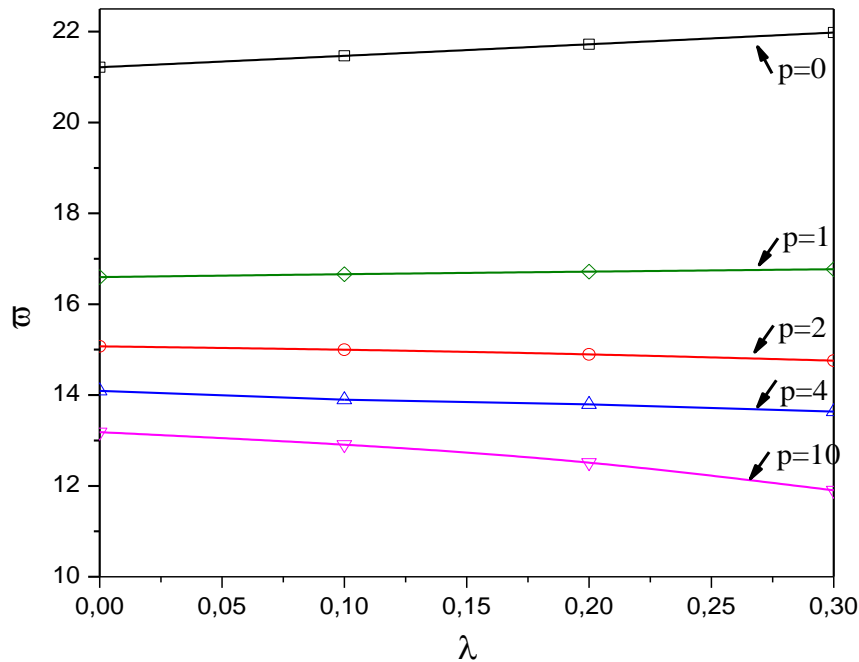


Figure IV. 15: L'effet de la porosité sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques de FGM. ($\varepsilon z \neq 0$, $a/h=2$).



(a)



(b)

Figure IV. 16: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques FGM en fonction de l'indice de porosité ($\varepsilon_z \neq 0$). (a) $a/h=2$, (b) $a/h=10$.

Pour un p égal à 10, 4 et 2, l'augmentation de la porosité pour les deux cas de rapport longueur / épaisseur ($a/h = 2$ et 10) conduit également à une diminution de la fréquence et qui est plus visible dans la plaque FG avec un p égal à 10.

Pour un p égal à 1, l'augmentation de la porosité dans les deux cas du rapport longueur / épaisseur ($a/h = 2$ et 10) n'a pas d'influence sur la fréquence fondamentale de la plaque FG.

Contrairement, pour un p égal à 0, l'augmentation de la porosité pour les deux cas du rapport longueur/épaisseur ($a/h = 2$ et 10) entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale de la plaque FG.

IV.3. Discussion des résultats de l'étude de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les poutres FGM

Afin d'analyser l'effet de la porosité sur la vibration et le comportement et la vitesse de phase des poutres FGM, des exemples illustratifs sont présentés dans cette

partie d'étude. Une poutre en FGM est constituée de deux matériaux Si3N4 / SUS304; dont les propriétés sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau IV.5 : Les propriétés des matériaux utilisés.

<i>Matériaux</i>	<i>E (GPa)</i>	<i>ρ (kg/m3)</i>	<i>N</i>
Si3N4	2370	2370	0.3
SUS304	201.04	8166	0.3

Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance. La surface supérieure de la poutre FGM est riche en céramique Si₃N₄, tandis que la surface inférieure de la poutre FGM est riche en métal SUS304. L'épaisseur de la poutre FGM est 0,02 m. plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision de la présente théorie en étudiant la propagation des ondes et de faire un test de porosité des poutres FG.

Les tableaux IV.6 et IV.7 présentent les fréquences et les vitesses de phase d'une poutre FGM pour les trois formules du facteur de distribution de la porosité. A partir des résultats présentés dans ces deux tableaux, nous pouvons observer que les valeurs des fréquences et de la vitesse obtenues par le modèle Présent sont en bon accord avec celles du modèle de Gupta (Ankit Gupta et al., 2017) et de (Nuttawit 2013 et al., 2017) pour les deux cas $\lambda = 0,1$ et $\lambda = 0,2$ quelle que soit la valeur du rapport L / h .

Tableau IV.6 : Fréquences naturelles des poutres FG poreuses pour différents rapports d'épaisseur, paramètres de porosité, paramètre de matériau et les distributions de porosité.

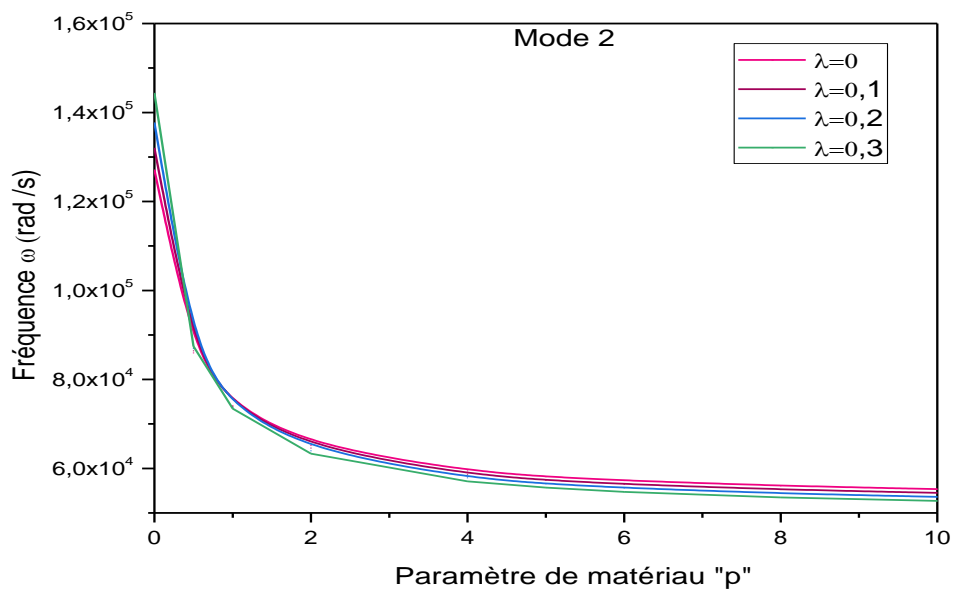
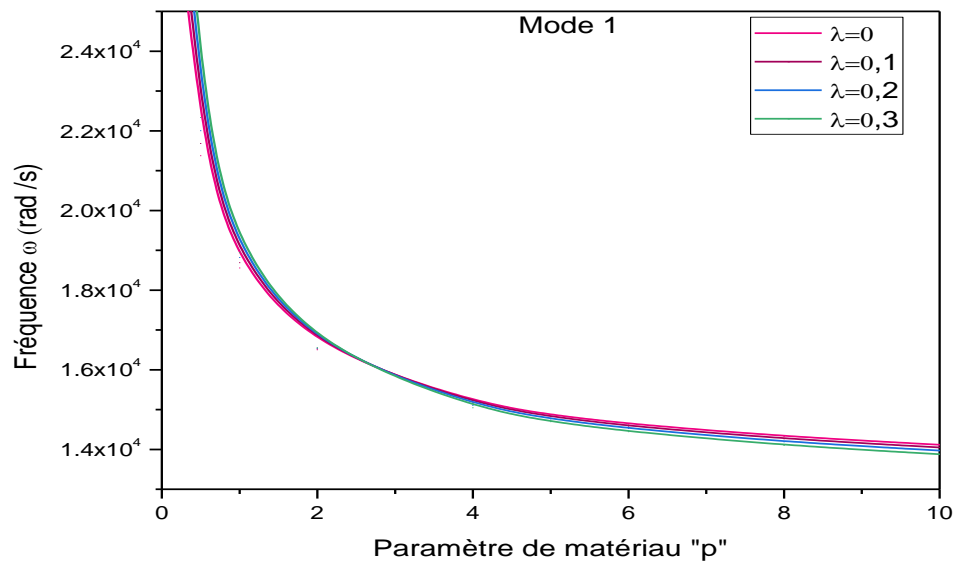
<i>L/h</i>	<i>p</i>	<i>λ=0</i>			<i>λ =0,1</i>			<i>λ =0,2</i>		
		<i>Nuttawit 2013</i>	<i>Gupta 2017</i>	<i>présent</i>	<i>Nuttawit 2013</i>	<i>Gupta 2017</i>	<i>présent</i>	<i>Nuttawit 2013</i>	<i>Gupta 2017</i>	<i>présent</i>
5	0	48384,74	48384,74	48384,74	52657,67	50263,29	50262,47	59582,99	52412,18	52404,69
	0,5	32793,32	32793,32	32793,32	33266,79	33104,72	33104,59	33869,00	33424,90	33423,85
	1	28440,78	28440,78	28440,78	28350,97	28494,03	28494,01	28224,53	28537,72	28537,59
	5	22531,39	22531,39	22531,39	21925,12	22298,80	22298,90	21183,54	22037,26	22038,16
	10	21419,08	21419,08	21419,08	20744,85	21154,25	21154,36	19927,92	20858,52	20859,54

10	0	31574,16	31574,16	31574,16	34362,53	32962,52	32961,91	38881,75	34552,15	34546,61
	0,5	21375,69	21375,69	21375,69	21687,89	21684,49	21684,36	22087,94	22006,50	22005,43
	1	18560,14	18560,14	18560,14	18502,21	18691,14	18691,09	18420,97	18821,75	18821,33
	5	14868,36	14868,36	14868,36	14490,04	14822,66	14822,68	14026,84	14765,81	14766,02
	10	14117,28	14117,28	14117,28	13694,34	14050,12	14050,15	13182,73	13971,24	13971,52

Tableau IV.7 : Les vitesses de phase des poutres FG poreuses pour différents rapports d'épaisseur, paramètres de porosité, paramètre de matériau et les distributions de porosité.

<i>L/h</i>	<i>p</i>	$\lambda=0$			$\lambda=0,1$			$\lambda=0,2$		
		<i>Nuttawit</i> 2013	<i>Gupta</i> 2017	<i>présent</i>	<i>Nuttawit</i> 2013	<i>Gupta</i> 2017	<i>présent</i>	<i>Nuttawit</i> 2013	<i>Gupta</i> 2017	<i>présent</i>
5	0	4838,47	4838,47	4838,47	5265,77	5026,33	5026,25	5958,30	5241,22	5240,47
	0,5	3279,33	3279,33	3279,33	3326,68	3310,47	3310,46	3386,90	3342,49	3342,38
	1	2844,08	2844,08	2844,08	2835,10	2849,40	2849,40	2822,45	2853,77	2853,76
	5	2253,14	2253,14	2253,14	2192,51	2229,88	2229,89	2118,35	2203,73	2203,82
	10	2141,91	2141,91	2141,91	2074,48	2115,42	2115,44	1992,79	2085,85	2085,95
10	0	3157,42	3157,42	3157,42	3436,25	3296,25	3296,19	3888,17	3455,22	3454,66
	0,5	2137,57	2137,57	2137,57	2168,79	2168,45	2168,44	2208,79	2200,65	2200,54
	1	1856,01	1856,01	1856,01	1850,22	1869,11	1869,11	1842,10	1882,17	1882,13
	5	1486,84	1486,84	1486,84	1449,00	1482,27	1482,27	1402,68	1476,58	1476,60
	10	1411,73	1411,73	1411,73	1369,43	1405,01	1405,01	1318,27	1397,12	1397,15

La variation des courbes de la fréquence naturelle (ω) et de la vitesse de phase des trois premiers modes pour des poutres en FGM en fonction de paramètre de matériau (p) pour les différentes valeurs de porosité sont présentées dans les figures IV. 17 et IV. 18 respectivement.



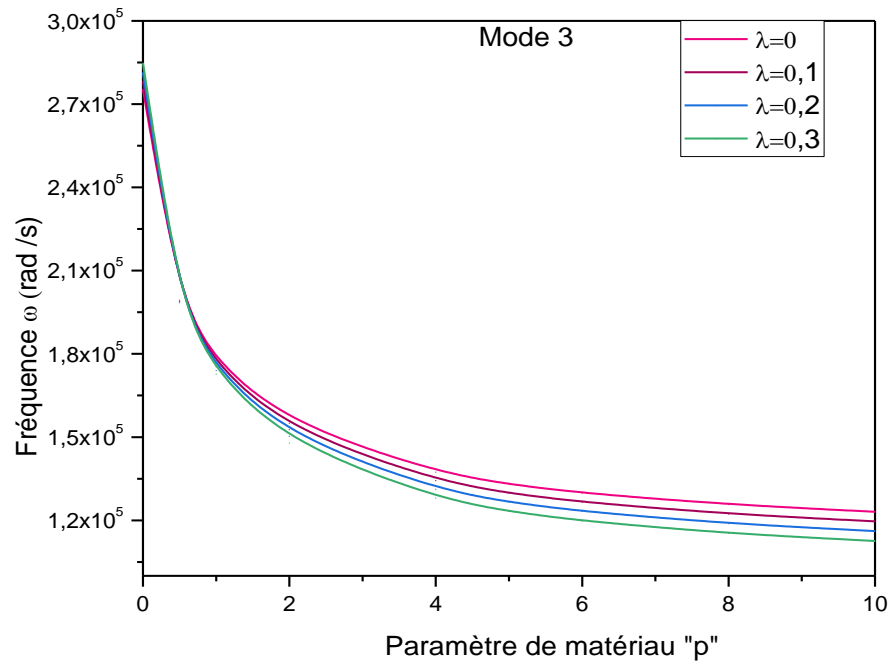
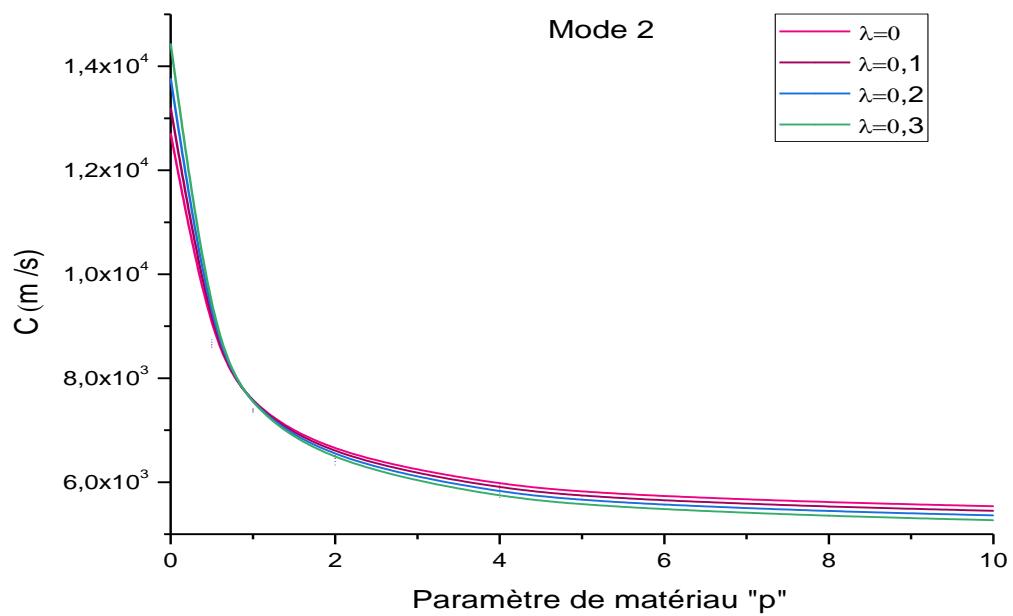
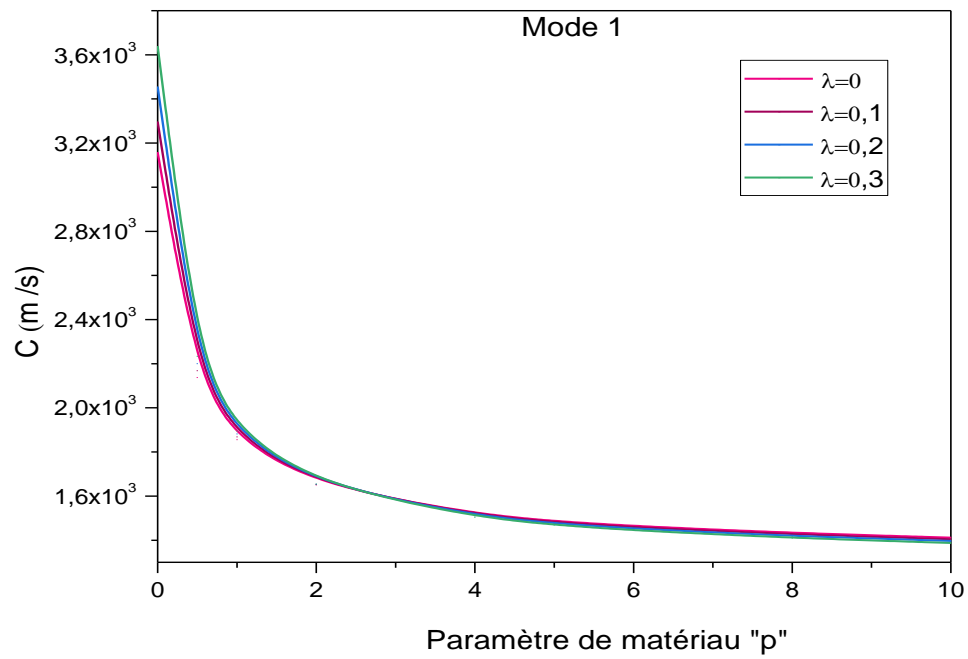


Figure IV. 17: Variation de la fréquence propre d'une poutre FGM en fonction de paramètre de matériau ($\kappa=10$ et $L/h=10$).

D'après les figures IV .17 et IV.18, on peut noter que plus le paramètre de matériau est élevée, plus la fréquence naturelle et la vitesse de phase pour une poutre FGM sont diminués, quel que soit le nombre d'ondes. Cependant, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la fréquence pour les deux premiers modes et inversement pour le troisième mode. Par conséquent, la fréquence maximale est obtenue pour une poutre de céramique ($p = 0$) et un facteur de porosité $\lambda = 0, 3$.



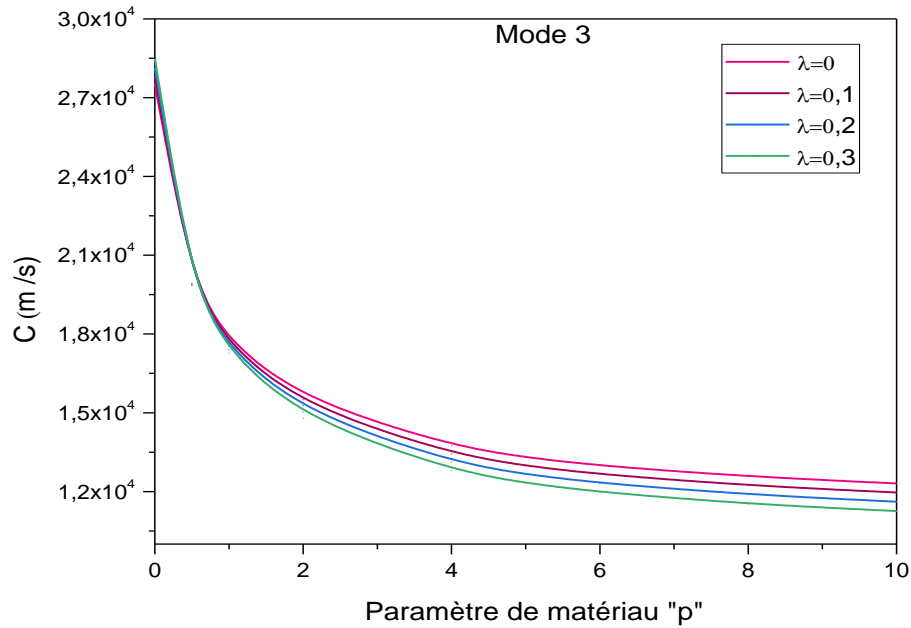
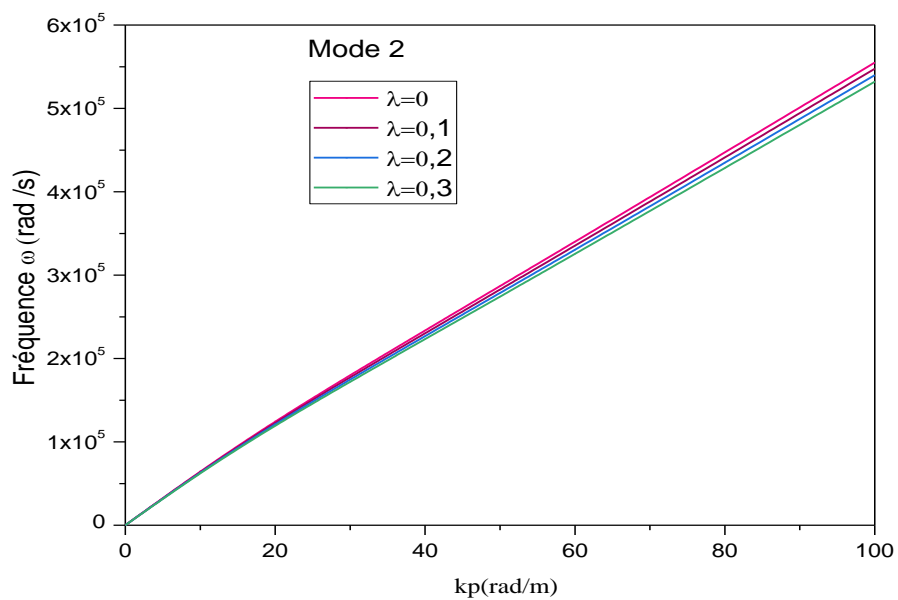
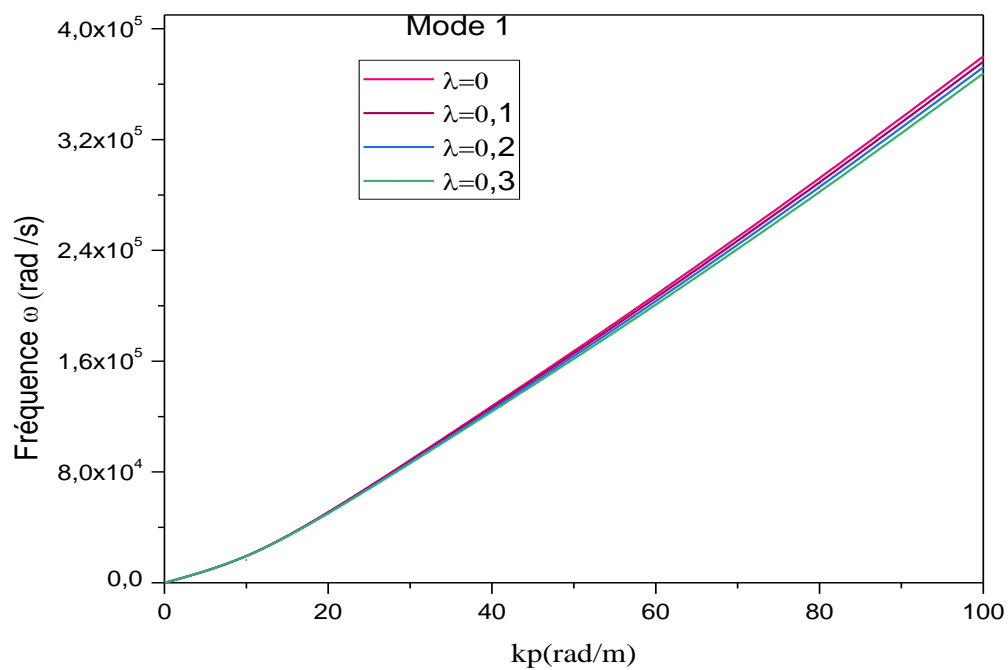


Figure IV. 18: Variation de la vitesse de phase d'une poutre FGM en fonction de paramètre de matériau ($\kappa=10$ et $L/h=10$).

La vitesse de phase et la fréquence propre dans une poutre FG homogène sont les plus élevées par rapport aux autres poutres FG. Ceci est dû à la grande rigidité des poutres en céramique. Par conséquent, il est clair que l'hétérogénéité des poutres FG a une grande influence sur la vitesse de phase de la propagation d'onde et sur la fréquence propre dans les poutres FG parfaites.

La figure IV .19 représente les courbes de fréquence des différentes poutres FG respectivement obtenues en utilisant la formule proposée du facteur de distribution de la porosité pour les différentes valeurs de ce dernier en fonction du nombre d'ondes k_p . A partir de ces courbes, on remarque que la fréquence augmente avec l'augmentation du nombre d'ondes pour le même indice de puissance. On peut aussi observer que la fréquence devienne maximale pour une poutre parfaite ($\lambda = 0$).



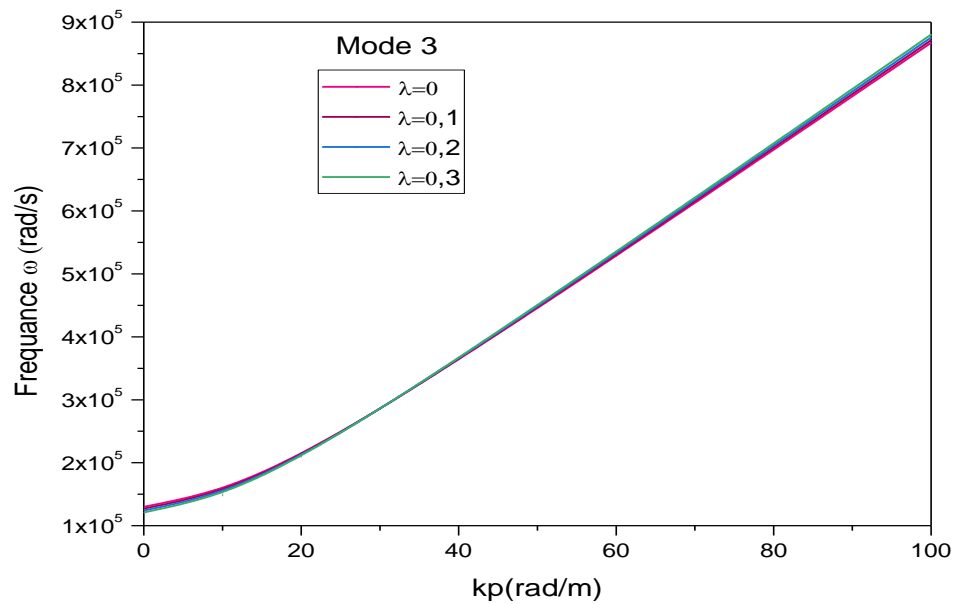
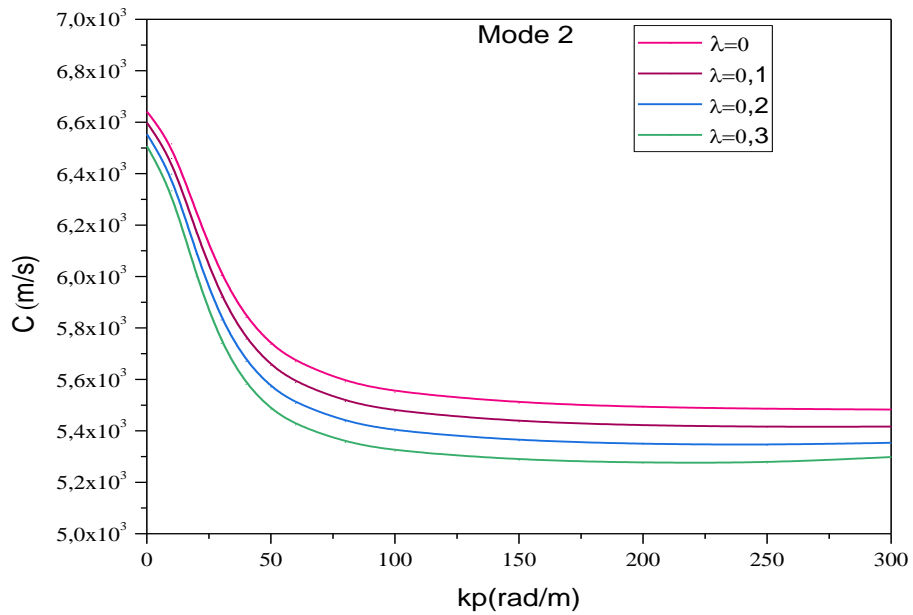
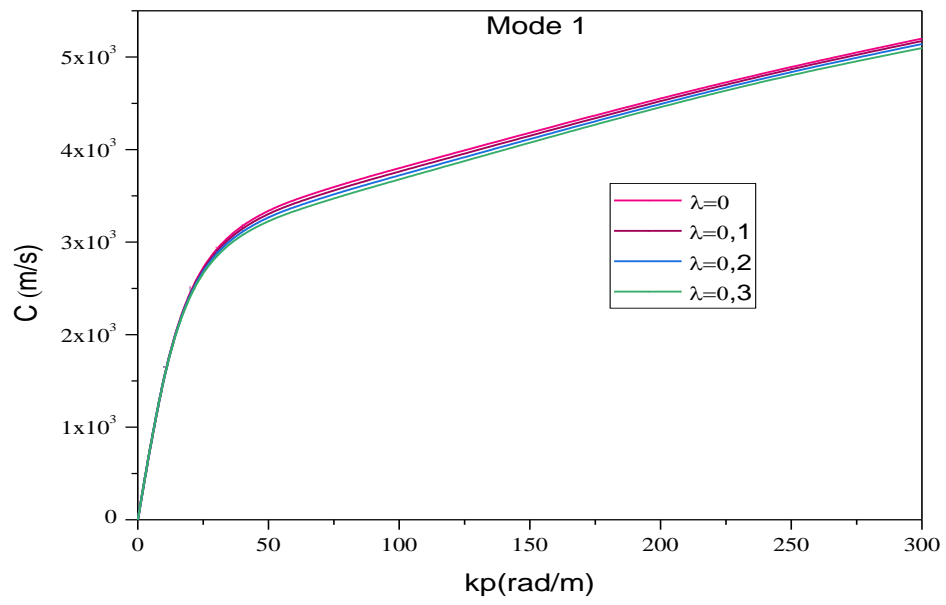


Figure IV. 19: Les courbes de fréquence naturelle de différentes poutres FG en fonction du nombre d'ondes ($p=2$ et $L/h=10$).

La figure IV .20 montre la variation de la vitesse de phase d'une poutre FG en fonction du nombre d'ondes pour différentes valeurs de la porosité. Le paramètre de matériau pris est égal à $p = 2$ et le rapport d'épaisseur $L / h = 10$.



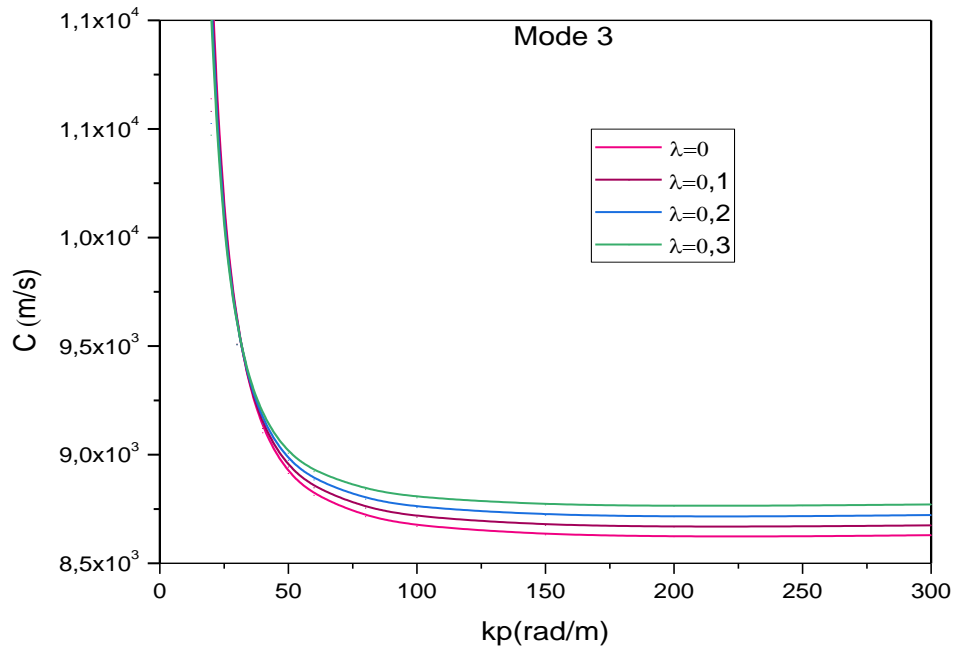


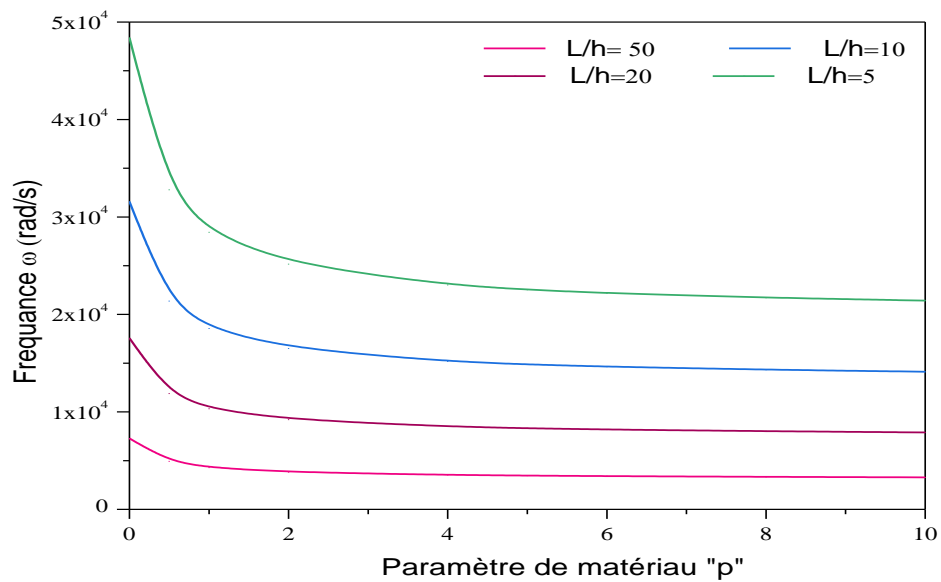
Figure IV. 20: Les courbes de vitesse de phase de différentes poutres FG en fonction du nombre d'ondes ($p=2$ et $L/h=10$).

A partir des courbes illustrées dans la figure IV.20, on peut constater que:

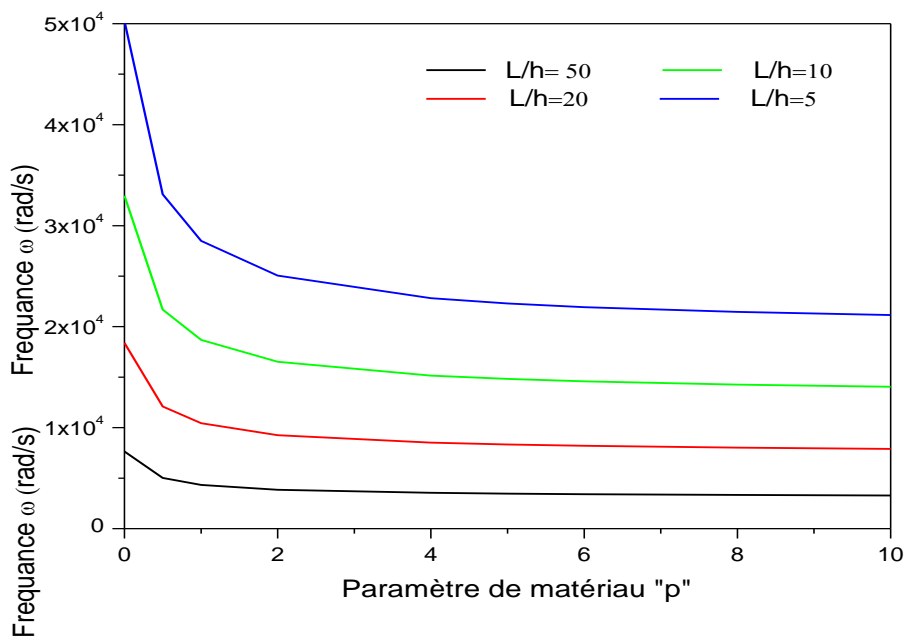
Pour le mode 1, l'augmentation du nombre d'ondes de la poutre FG entraîne une augmentation de la vitesse de phase.

Pour le mode 2, l'augmentation du nombre d'ondes de la poutre se traduit par une diminution de la vitesse de phase, on peut également noter qu'il existe une relation inverse entre le facteur de porosité et la vitesse de phase de celui-ci. Contrairement, pour le mode 3, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la vitesse de phase.

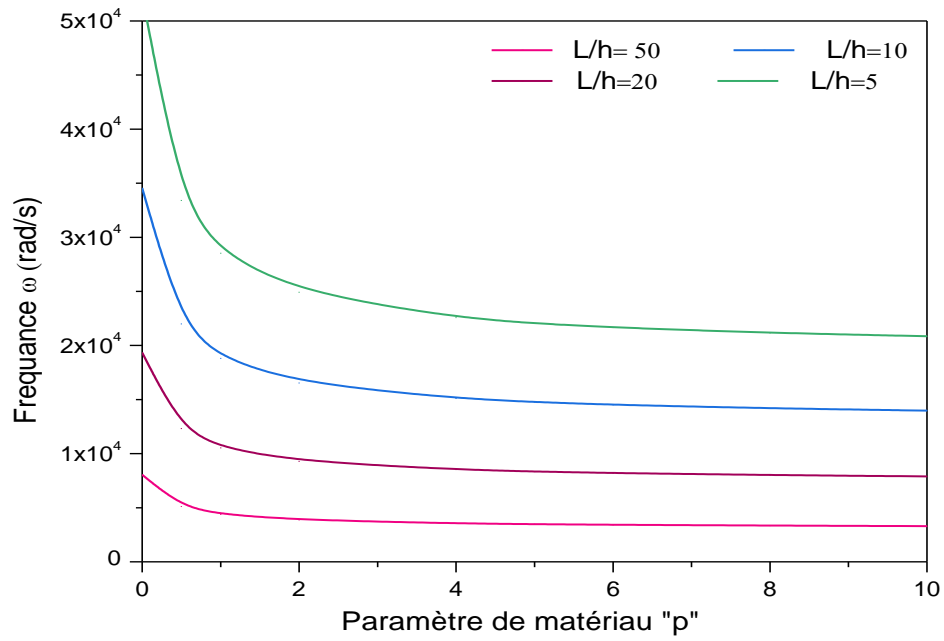
(a) $\lambda=0$



(b) $\lambda=0,1$



(c) $\lambda = 0.2$



(d) $\lambda = 0.3$

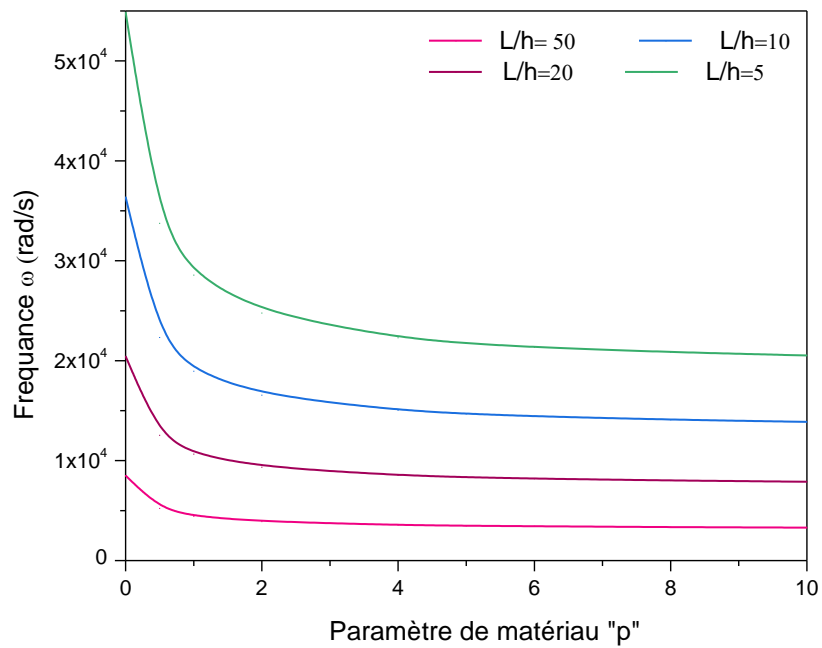
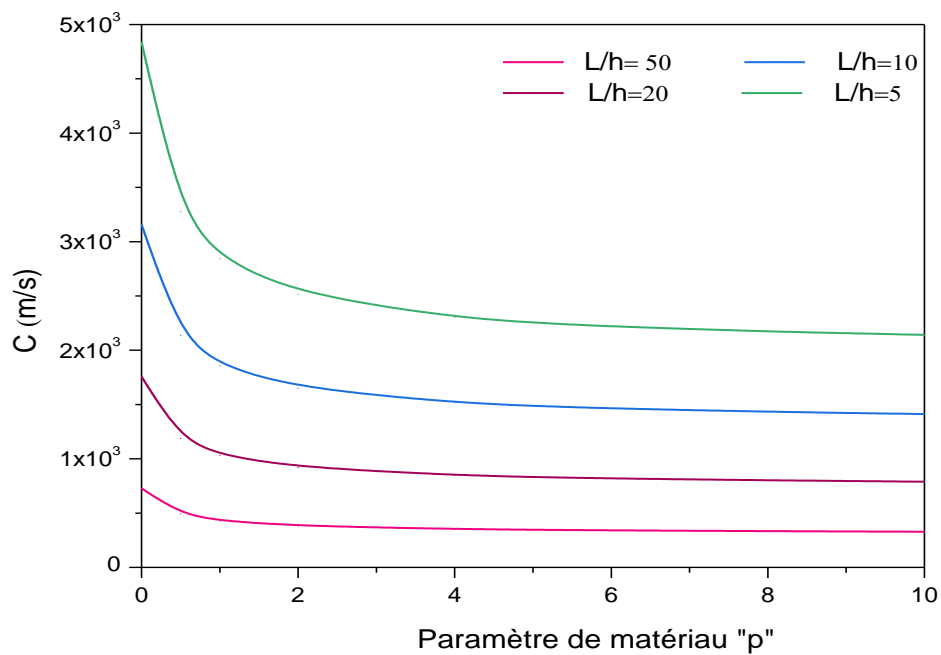


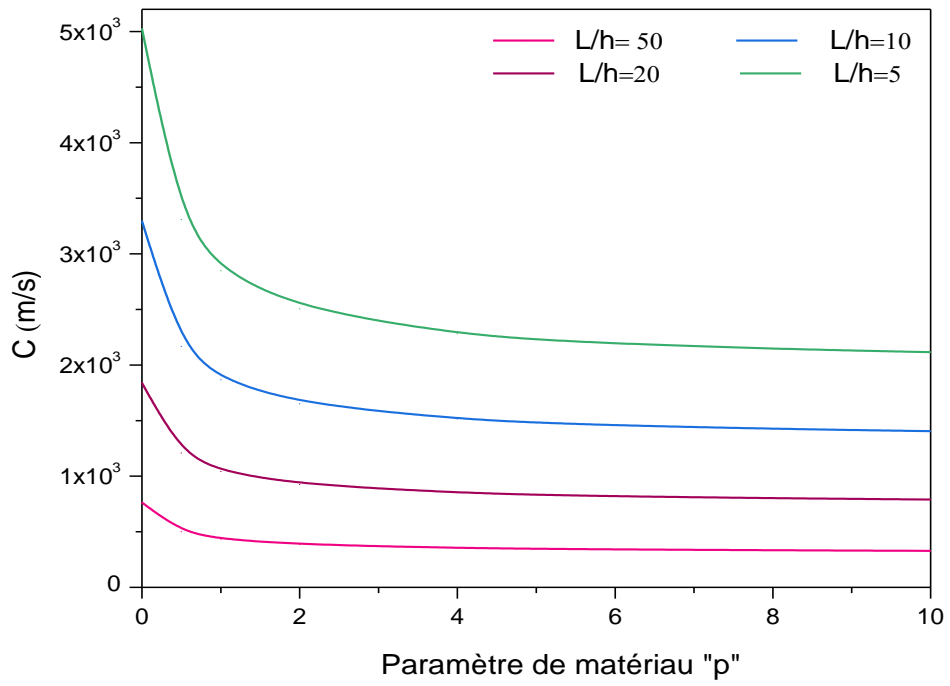
Figure IV. 21: Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence propre d'une poutre FG ($k_p=10$ et $L/h=10$).

Les deux figures IV.21 et IV.22, montrent l'influence du rapport d'épaisseur de la poutre FG sur la fréquence propre et la vitesse de phase de ce dernier. Plusieurs valeurs du paramètre de porosité sont considérées ($\lambda = 0$; $\lambda = 0,1$; $\lambda = 0,2$ et $\lambda = 0,3$) dont la valeur du nombre d'onde k_p prise est égale à 10.

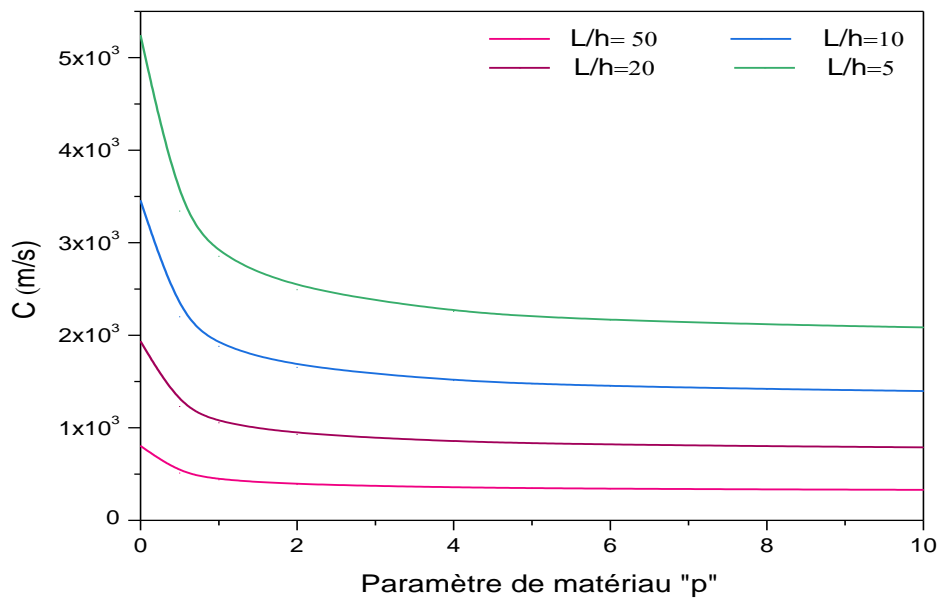
(a) $\lambda = 0$



(b) $\lambda = 0,1$



(c) $\lambda = 0,2$



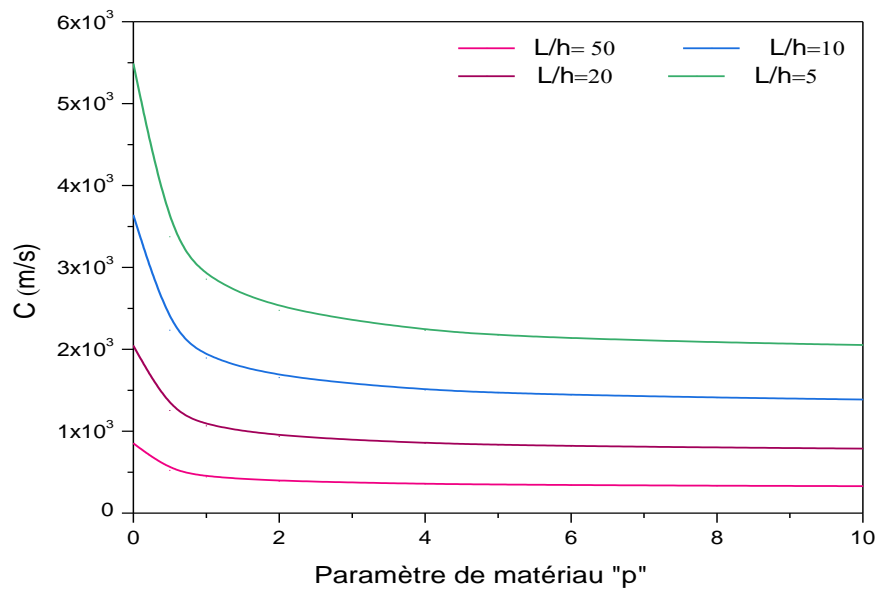
(d) $\lambda = 0.3$ 

Figure IV. 22: Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse de phase d'une poutre FG ($k_p=10$ et $L/h=10$).

Sur ces deux figures (IV.21 et IV.22), on peut constater que le rapport d'épaisseur (L/h) a un effet considérable sur la fréquence de propagation des ondes dans la poutre FG (l'augmentation de ce rapport entraîne une diminution de la fréquence et de la vitesse de phase).

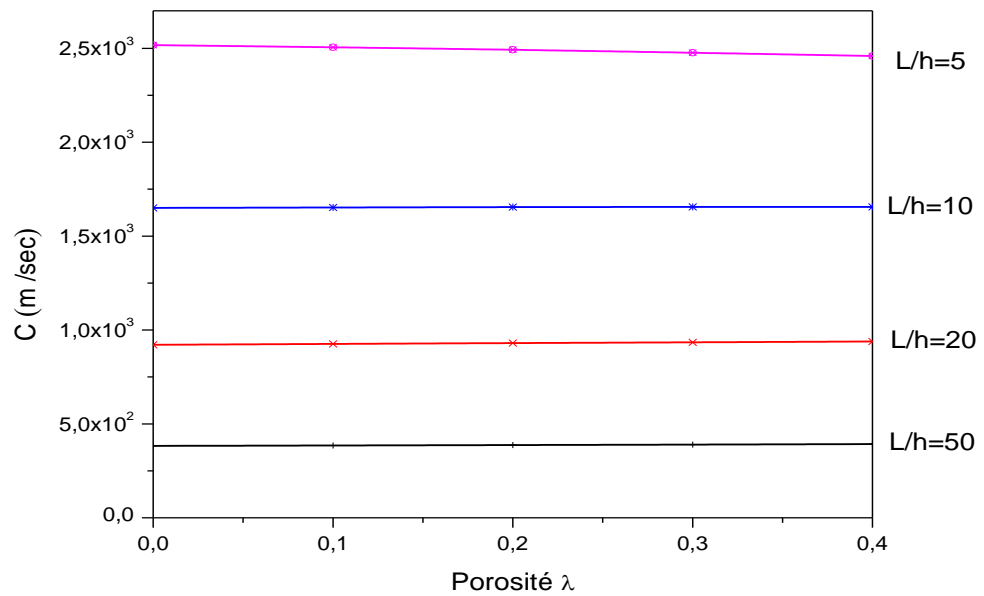
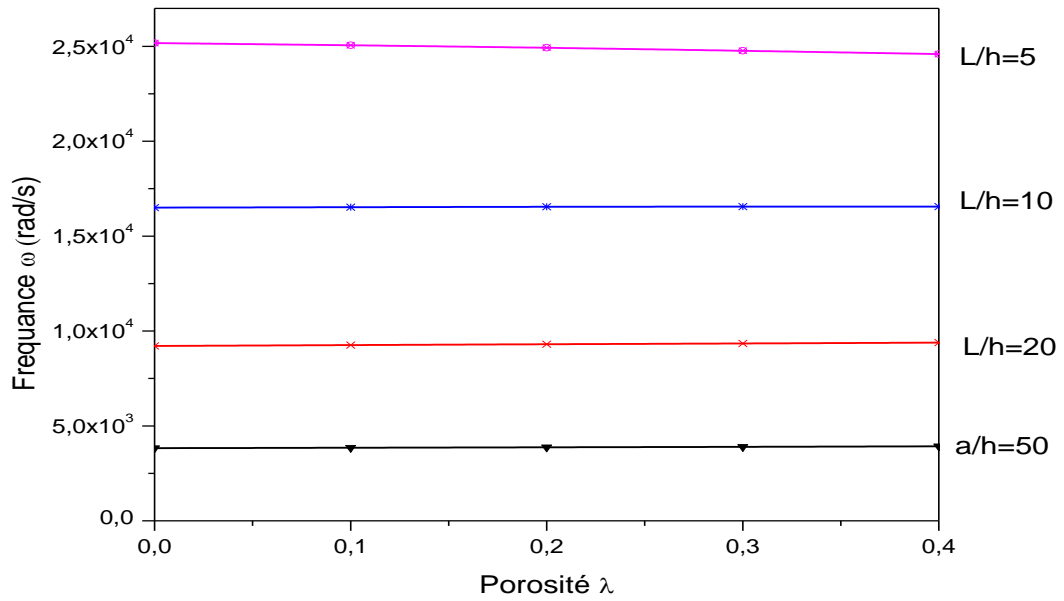


Figure IV. 23: Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence propre et la vitesse de phase ($k_p=10$ et $p=2$).

Les figures IV.23 et IV.24 présentent l'influence du rapport d'épaisseur et le paramètre de matériau sur le comportement vibratoire et la vitesse de phase des poutres FG. A partir des courbes présentées, on constate qu'il y a une influence de

l'effet de l'épaisseur de la poutre sur la fréquence propre et la propagation des ondes.

On peut également observer que plus la poutre rigide, plus la fréquence augmente.

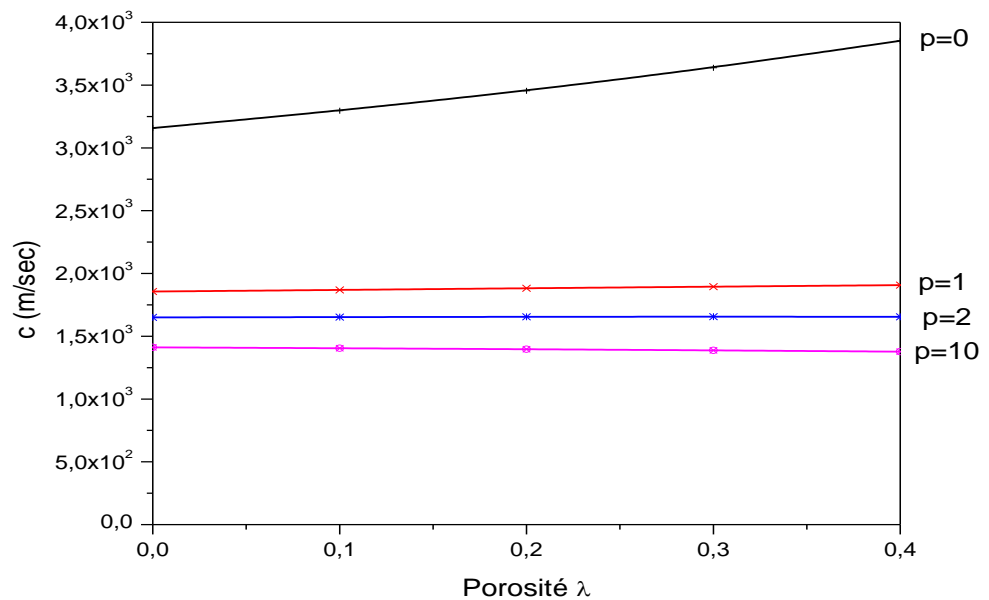
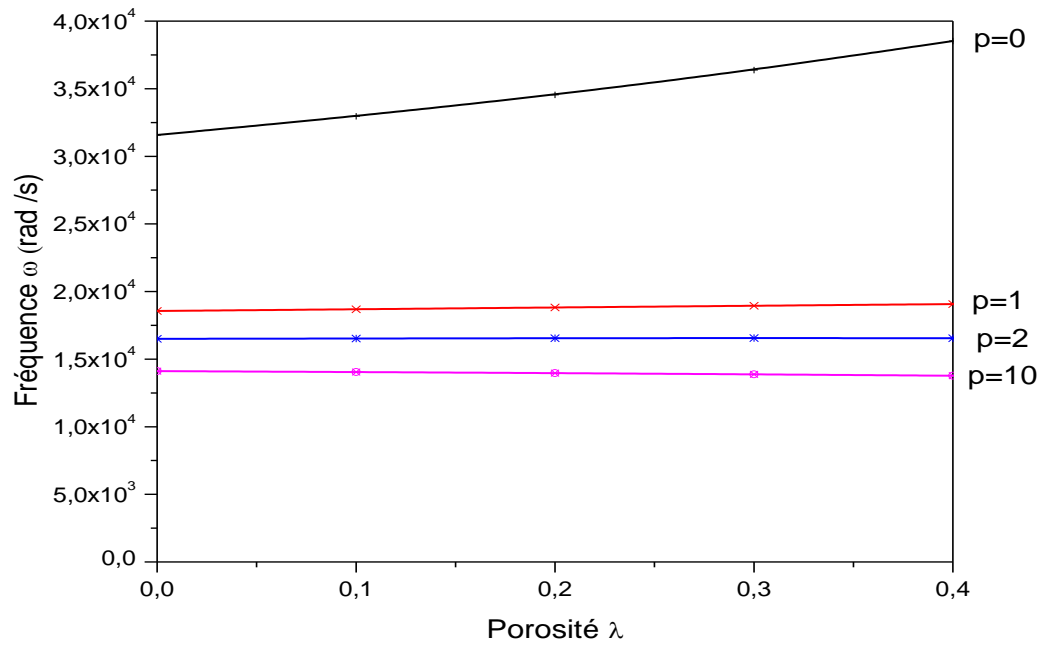


Figure IV. 24: Influence du paramètre du matériau sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k_p=10$ et $L/h=10$).

IV. 4. Conclusion

Les résultats et les discussions de l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM a été présentée dans la première partie de ce chapitre avec la prise en compte de l'effet de la déformation normale (effet de stretching). Un nouveau modèle analytique basé sur une théorie d'ordre élevé à cinq variables et un champ de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées sont considérés dans cette partie d'étude.

Dans la deuxième partie du chapitre, l'étude de l'effet de la porosité sur les caractéristiques vibratoires et de la propagation des ondes d'une poutre poreuse fonctionnellement gradué a été présentée. Divers facteurs tels que la distribution de la porosité, le rapport d'épaisseur et le paramètre de matériau,... etc, ont un effet significatif sur le comportement mécanique des structures FGM.

Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon la règle du mélange. Pour valider ce modèle, nous avons comparés les résultats obtenus avec les résultats des autres théories existant dans la littérature. Toutes les études comparatives ont démontré que les fréquences fondamentales obtenues en utilisant cette étude et celles proposées par Carrera et al. (2008), Belabed et al. (2008), zenkour, (2000), Mouaici et al. (2016), Belabed et al. (2014), Nuttawit et al. (2013) et Gupta et al. (2017) sont presque identiques. Et par conséquent, on peut dire que la théorie proposée pour cette partie de chapitre est précise et simple pour résoudre les problèmes de la flexion et la vibration des structures FGM.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse Nous avons présenté un travail de recherche analytique et numérique pour l'analyse des structures fonctionnellement graduées FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Deux objectifs ont été visés à travers cette thèse. Le premier consiste à une analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en tenant compte l'effet de la déformation normale (effet de stretching). Le second objectif de cette thèse consiste à une étude de l'effet de la porosité sur les caractéristiques vibratoires et de la propagation des ondes d'une poutre poreuse fonctionnellement graduée avec une nouvelle forme de distribution de la porosité. Une théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique (HSDT) a été utilisée pour cette étude.

A travers une synthèse bibliographique, nous avons décrit le comportement des matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure en matériau composites. Dans un deuxième temps, l'accent a été mis sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) tel que leur historique, les type des FGM, les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et la loi de mélange. Ensuite une présentation de la cinématique générale des solides tel que le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre et nous avons démontré les relations nécessaires d'une structure ainsi que les différentes théories des plaques et des poutres ont été étudiées. Un modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à cinq variables pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre de plaques poreuses fonctionnellement graduées en tenant compte de l'effet de la déformation normale (effet de stretching) a été développé, et une nouvelle forme de distribution de la porosité, et un champ de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées ont été utilisé pour proposer un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à trois variables pour étudier l'effet de la porosité sur la propagation des ondes d'une poutre poreuse fonctionnellement graduée,

Les résultats obtenus de cette étude sont validés et clairement discutés à travers une étude paramétrique qui nous ont permis de dégager les points suivants:

- ❖ La déflexion au centre de la plaque augmente lorsque le paramètre de matériau p augmente ou lorsque le rapport d'épaisseur a/h diminue, et par conséquent la déflexion au centre devient plus grande lorsque la plaque est considérée comme épaisse.

- ❖ Les résultats des fréquences adimensionnelles obtenues pour la prédiction des réponses en vibration libre des plaques FGM simplement appuyées sont en excellent accord avec la théorie présentée par Mouaici et al. (2016) et la théorie proposée par Belabed et al. (2014).
- ❖ On peut également observer l'influence de l'effet de la déformation normale sur la fréquence fondamentale (l'effet de stretching ε_z augmente la fréquence; cette augmentation devient plus remarquable dans le cas d'un rapport d'épaisseur égal ou inférieur à 5). C'est-à-dire que l'effet de la déformation normale " ε_z " devient plus sensible dans le cas de plaques épaisses, ce cisaillement affecte les structures épaisses et amplifie l'effet de la déformation normale.
- ❖ L'augmentation du rapport de l'épaisseur a/h conduit à une augmentation de la contrainte longitudinale de la plaque FG.
- ❖ A partir des résultats qui présentent les fréquences et les vitesses de phase d'une poutre FG pour les trois formules du facteur de distribution de la porosité, nous pouvons observer que les valeurs des fréquences et de la vitesse obtenues par le modèle présent sont en bon accord avec celles du modèle de Gupta (Ankit Gupta et al., 2017) pour les deux cas $\lambda = 0,1$ et $\lambda = 0,2$ quelle que soit la valeur du rapport L/h .
- ❖ Tous les résultats obtenus dans cette étude soulignent l'importance considérable de l'effet de la porosité, et par conséquent, cet effet doit être pris en compte dans l'analyse du comportement vibratoire des structures FG.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

Un travail expérimental pour le but de bien comprendre le comportement des structures fonctionnellement graduées FGM, et pour éclairer les pratiques de dimensionnement de ce type de structures.

Il serait intéressant d'élargir les modèles numériques élaborés par des modèles numériques basées sur les éléments finis permettant de résoudre des formes de structure FGM plus complexes.

L'amélioration du modèle analytique afin qu'il permette de déterminer le comportement des poutres FG en tenant compte l'effet de la déformation normale.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ait Atmane, 2016] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2016), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *Int. J. Mech.Mater.Des.*, (In press).
- [Ait ATMANE, 2011] Ait ATMANE,H. « Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABÈS de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-121.
- [Ait Atmane, 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos.Struct.*, 19(2), 369-384.
- [Ait Atmane, 2017] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response functionally graded beams resting on elastic foundations”, *J.Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71-84.
- [Ait Yahia, 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, 53(6),1143-1165.
- [Akbas, 2015] Akbaş, Ş.D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(6), 1421-1447.
- [Akbas, 2017] Akbas SD. Thermal Effects on the Vibration of Functionally Graded Deep Beams with Porosity. *International Journal of Applied Mechanics* 2017;9(5): 1750076.
- [Akbas, 2017] Akbas SD. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2017;3(3): 199-207.
- [Arefi, 2011] Arefi, M. and Rahimi, G.H. (2011), “Non linear analysis of a functionally graded square plate with two smart layers as sensor and actuator under normal pressure”, *Smart Struct. Syst.*, 8(5), 433-446.
- [Arefi, 2013] Arefi, M. (2013), “Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder”, *Acta. Mech.*, 224, 2771-2783.
- [Arefi, 2015] Arefi, M. (2015), “Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 659-672.
- [Atai, 2012] Atai, A.A., Nikranjbar, A., Kasiri, R.: Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607– 614 (2012)
- [Attia, 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 187-212.
- [Ayache, 2018] Ayache, B., Bennai, R., Fahsi, B., Fourn, H., Atmane, H. A., & Tounsi, A. (2018). Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *Earthquakes And Structures*, 15(4), 369-382.
- [Baccouche, 2013] Yousra Baccouche «Caractérisation non linéaire de l’endommagement des matériaux composites par ondes guidées» Thèse de Doctorat de l’université du Maine, Académie de Nantes, 2013
- [Bachir Bouiadjra, 2015] [Bachir Bouiadjra,R. 2015] Bachir Bouiadjra Rabbab, Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaisses en Composite sur fondations Elastiques, Thèse de doctorat, Université de des sciences et de la technologie d’ORAN MOHAMED BOUDIAF, 2015.
- [Belabed, 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, 60, 274-283.

- [Beldjelili, 2016]** Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4). 755 - 786.
- [Bellifa, 2017]** Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech.*, 62(6), 695-702.
- [Benachour, 2011]** Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- [Benadouda, 2017]** Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Fabrice Bernard and , S.R. (2017), “An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities”, *Eartquakes and Structures.*, 13(3), 255-265..
- [BENAHMED, 2017]** BENAHMED Abdelkrim «Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable» Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [BENFERHAT, 2017]** Benferhat Rabia «Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés» Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [Bennai, R, 2015]** Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.
- [Bennoun, 2016]** Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423 - 431.
- [Berthelot, 2012]** Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5^{ème} Edition, Lavoisier ,2012
- [Bouguenina, 2015]** Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679-695.
- [Boukhari, 2016]** Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.
- [Bourada, 2015]** Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409-423.
- [Boutahar, 2016]** Boutahar, L. and R. Benamar, A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations. *Ain Shams Engineering Journal*, 2016. 7(1): p. 313-333.
- [Bresse, 1859]** Bresse, J. A. C. (1859), “ Cours de Mécanique Applique ” (Mallet-Bachelier, Paris).
- [Chakraborty, 2003]** Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S.A. (2003), “Spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams ”, *Int J Solids Struct*, 40, 2421–2448.
- [Chakraverty, 2014]** Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerospace Science and Technology*, 36, 132-156.
- [Chapuis, 2010]** Chapuis, B. .Contrôle Santé Intégré par méthode ultrasonore des réparations composites collées sur des structures métalliques Thèse de doctorat, 2010, Université de Paris 7.
- [Chen, 2007]** Chen, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. (2007), “On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate”, *Compos. Struct.*, 81, 233-242.

- [Cheng, 2000] Cheng, Z.Q. and Batra, B.C. (2000), "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate", *J. Sound Vib.*, 229(4), 879- 895.
- [Chikh, 2017] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Struct. Syst.*, 19(3), 289-297.
- [Cranch, 1956] Cranch, E.T. and Adler, A.A. (1956), "Bending vibration of variable section beams", *J. Appl. Mech.*, 23(1), 103-108.
- [Darilmaz, 2015] Darilmaz, K. (2015), "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 395-408.
- [Draiche, 2014] Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", *Steel Compos. Struct.*, 17(1), 69-81.
- [Ebrahimi, 2015] Ebrahimi, F. and Dashti, S. (2015), "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel Compos. Struct.*, 19(5), 1279-1298.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and A. Jafari, Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*, 2016. 59(2): p. 343-371.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and Habibi, S. (2016), "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 20(1), 205-225.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and Salari, E. (2016), "Thermal loading effects on electro-mechanical vibration behavior of piezoelectrically actuated inhomogeneous size-dependent Timoshenko nanobeams", *Adv. Nano Res., Int. J.*, 4(3), 197-228.
- [Ebrahimi, 2017] Ebrahimi, F. and A. Jafari, A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2017. 25(3): p. 212-224.
- [Fahsi 2017] Asmaa Fahsi «Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Differents Chargements» Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [Gupta, 2017] Gupta, A., Talha, M., Seemann, W.: Free vibration and flexural response of functionally graded beam resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using non-polynomial higher order shear and normal deformation theory. *Mech. Adv. Mater. Struct.* (2017). doi:10.1080/15376494.2017.1285459
- [HADJI LAZREG, 2013] HADJI LAZREG « Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Hamidi, 2015] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5- unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [Han, 2002] Han, X. and Liu, G.R. (2002), "Effects of SH waves in a functionally graded plate", *Mech. Res. Commun.*, 29, 327-338.
- [Han, 2002] Han, X., Liu, G.R. and Lam, K.Y. (2002), "Transient waves in plates of functionally graded materials", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 52, 851-865.
- [HOUARI M , 2011] HOUARI MOHAMMED SID AHMED « Analyse des contraintes thermoélastiques : lois des puissances. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Houari, 2016] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, 22(2), 257-276.
- [Jahwari, 2016] Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular

- distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190- 2205.
- [Kaci, 2012] [Kaci Abdelhakim 2012] Kaci Abdelhakim, Étude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique, Thèse de doctorat, Université de Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès, Algérie, 2012.
- [Kadoli, 2008] Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. (2008), “ Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory”, *Applied Mathematical Modelling*, 32(12), 2509–2525.
- [Kar, 2015] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709.
- [KESKAS, 2010] KESKAS « Etude de l’effet de cisaillement transverse sur le comportement des poutres composites. » Thèse Magister en génie civil de l’université Mentouri, Constantine, 2010.
- [Kim, 2005] Kim, Y.W. (2005), “Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 284(3-5), 531-549.
- [Koizumi, 1993] Koizumi M. The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials* 1993;34(1):3–10.
- [Koizumi, 1995] Koizumi, M., Niino, M.: Overview of FGM research in Japan. *MRS Bull.* 20(1995), 19–24 (1995)
- [Koizumi, 1997] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B*, 1997, Vol.28, pp. 1–4.
- [Laoufi, 2016] Laoufi, I., Ameer, A., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. and Bousahla, A.A. (2016), “Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct.,Int. J.*, 20(4), 889-912.
- [Larbi Chaht, 2015] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 425-442.
- [Mahi, 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39, 2489-2508.
- [MEFTAH, 2017] MEFTAH ALI «Construction d'un nouveau champ de Déplacement pour l'analyse de la réponse Mécanique des structures composites» Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [Meradjah, 2015] Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, 18(3), 793-809.
- [Moradi, 2016] Moradi-Dastjerdi, R. (2016), “Wave propagation in functionally graded composite cylinders reinforced by aggregated carbon nanotube”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(3), 441-456.
- [Mouaici, 2016] Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22(4), 429-454.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi Latifa « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421–433.
- [Qian, 2005] Qian, L.F. and Batra, R.C. (2005), “Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin Method”, *Computat. Mech.*, 35(3), 214-226.

- [Reddy, 2000] Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 47(1-3), 663-684.
- [Reddy, 2001] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), “Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates”, *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 20, 841-855.
- [Reddy, 2002] Reddy, J.N. (2002), “Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics”, Wiley, New York.
- [Reissner, 1945] Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- [SALLAI, 2011] SALLAI BEN-OURANE « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Sankar, 2001] Sankar, B.V. (2001), “An elasticity solution for functionally graded beams”, *Composites Sciences and Technology*, 61(5), 689–696.
- [Shahrjerdi, 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. (2011), “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *J. Mech. Sci. Tech.*, 25(9), 2195~2209.
- [Shanmugavel, 2012] Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S., Srinivasan, S.P.: An overview of fracture analysis in functionally graded materials. *Eur. J. Sci. Res.* 68(3), 412-439 (2012).
- [Şimşek, 2009] Şimşek, M. and T. Kocatürk, Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 2009. 90(4): p. 465-473.
- [Simsek, 2012] Simsek M, Kocatürk T and Akbas SD. Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures* 2012;94(8) :2358-2364
- [Sobhy, 2013] Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos. Struct.*, 99,76-87.
- [Sun, 2011a] Sun, D. and Luo, S.N. (2011a), “The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completely clamped supports under impulse load”, *Eur. J. Mech., A/Solid.*, 30, 396-408.
- [Sun, 2011b] Sun, D. and Luo, S.N. (2011b), “Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments”, *Ultrasonics*, 51, 940-952.
- [Tagrara, 2015] Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A. (2015), “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(5), 1259-1277.
- [Timoshenko, 1921] Timoshenko, S. P. (1921), “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”, *Philosophical Magazine, Series 6*, pp. 742–746.
- [Tounsi, 2016] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Structural Engineering and Mechanics*, J., 60 (4), 547-565.
- [Vel, 2004] Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 272, 703-730.
- [Wattanasakulpong, 2012] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), “Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation”, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- [Wattanasakulpong, 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), “Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, *Aerosp. Sci. Tech.*, 32(1), 111-120.
- [Woo, 2006] Woo, J., Meguid, S.A. and Ong, L.S. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of

- functionally graded plates”, *J. Sound Vib.*, 289, 595-611.
- [Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica*, 48, 2019-2035.
- [Yaghoobi, 2013a] Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2013a), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Appl Math Model*, 37, 8324–8340.
- [Yaghoobi, 2013b] Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2013b), “An analytical approach to large amplitude vibration and post-buckling of functionally graded beams rest on non-linear elastic foundation”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(1), 39-52.
- [Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H. and Fereidoon, A. (2014), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Composites part B*, 62, 54-64.
- [Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), “Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM”, *Steel and Composite Structures*, 17(5), 753–776.
- [Yousfi, 2018] Yousfi, M., Ait Atmane, H., Meradjah, M., Tounsi, A. and Bennai, R. (2018), “Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables”, *Structural Engineering and Mechanics.*, 66 (3), 353-368.
- [Zenkour, 2005] Zenkour, A.M.A.: Comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2. Buckling and free vibration. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5243–5258 (2005)
- [Zenkour, 2006] Zenkour, AM. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.
- [Zhong, 2007] Zhong, Z. and Yu, T. (2007), “Analytical solution of a cantilever functionally graded beam”, *Composites Sciences and Technology*, 67(3–4), 481–488.
- [Zhu, 2001] Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S. (2001), “Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy”, *Mater. Chem. Phys.*, 68, 130-135.
- [Zidi, 2014] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bég, O.A. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Sci. Tech.*, 34, 24-34.
- [Ait Atmane, 2016] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2016), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *Int. J. Mech.Mater.Des.*, (In press).
- [Ait ATMANE, 2011] Ait ATMANE, H. « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-121.
- [Ait Atmane, 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos.Struct.*, 19(2), 369-384.
- [Ait Atmane, 2017] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response functionally graded beams resting on elastic foundations”, *J.Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71-84.
- [Ait Yahia, 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165.
- [Akbaş, 2015] Akbaş, Ş.D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(6), 1421-1447.

- [Akbas, 2017] Akbas SD. Thermal Effects on the Vibration of Functionally Graded Deep Beams with Porosity. *International Journal of Applied Mechanics* 2017;9(5): 1750076.
- [Akbas, 2017] Akbas SD. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2017;3(3): 199-207.
- [Arefi, 2011] Arefi, M. and Rahimi, G.H. (2011), “Non linear analysis of a functionally graded square plate with two smart layers as sensor and actuator under normal pressure”, *Smart Struct. Syst.*, 8(5), 433-446.
- [Arefi, 2013] Arefi, M. (2013), “Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder”, *Acta. Mech.*, 224, 2771-2783.
- [Arefi, 2015] Arefi, M. (2015), “Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 659-672.
- [Atai, 2012] Atai, A.A., Nikranjbar, A., Kasiri, R.: Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607– 614 (2012)
- [Attia, 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 187-212.
- [Ayache, 2018] Ayache, B., Bennai, R., Fahsi, B., Fourn, H., Atmane, H. A., & Tounsi, A. (2018). Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *Earthquakes And Structures*, 15(4), 369-382.
- [Baccouche, 2013] Yousra Baccouche «Caractérisation non linéaire de l’endommagement des matériaux composites par ondes guidées» Thèse de Doctorat de l’université du Maine, Académie de Nantes, 2013
- [Bachir Bouiadjra, 2015] [Bachir Bouiadjra,R. 2015] Bachir Bouiadjra Rabbab, Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaisses en Composite sur fondations Elastiques, Thèse de doctorat, Université de des sciences et de la technologie d’ORAN MOHAMED BOUDIAF, 2015.
- [Belabed, 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, 60, 274-283.
- [Beldjelili, 2016] Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4). 755 - 786.
- [Bellifa, 2017] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech.*, 62(6), 695-702.
- [Benachour, 2011] Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- [Benadouda, 2017] Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Fabrice Bernard and , S.R. (2017), “An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities”, *Earthquakes and Structures.*, 13(3), 255-265..
- [BENAHMED, 2017] BENAHMED Abdelkrim «Contribution à l’étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d’ordre élevé avec un nombre réduit de variable» Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [BENFERHAT, 2017] Benferhat Rabia «Analyse et modélisation de l’influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés» Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017.
- [Bennai, R, 2015] Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.

- [Bennoun, 2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423 - 431.
- [Berthelot, 2012] Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5^{ème} Edition, Lavoisier ,2012
- [Bouguenina, 2015] Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling", *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679-695.
- [Boukhari, 2016] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.
- [Bourada, 2015] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409-423.
- [Boutahar, 2016] Boutahar, L. and R. Benamar, A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations. *Ain Shams Engineering Journal*, 2016. 7(1): p. 313-333.
- [Bresse, 1859] Bresse, J. A. C. (1859), "Cours de Mécanique Appliquée" (Mallet-Bachelier, Paris).
- [Chakraborty, 2003] Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S.A. (2003), "Spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams", *Int J Solids Struct*, 40, 2421–2448.
- [Chakraverty, 2014] Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerospace Science and Technology*, 36, 132-156.
- [Chapuis, 2010] Chapuis, B. .Contrôle Santé Intégré par méthode ultrasonore des réparations composites collées sur des structures métalliques Thèse de doctorat, 2010, Université de Paris 7.
- [Chen, 2007] Chen, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. (2007), "On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate", *Compos. Struct.*, 81, 233-242.
- [Cheng, 2000] Cheng, Z.Q. and Batra, B.C. (2000), "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate", *J. Sound Vib.*, 229(4), 879- 895.
- [Chikh, 2017] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Struct. Syst.*, 19(3), 289-297.
- [Cranch, 1956] Cranch, E.T. and Adler, A.A. (1956), "Bending vibration of variable section beams", *J. Appl. Mech.*, 23(1), 103-108.
- [Darilmaz, 2015] Darilmaz, K. (2015), "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 395-408.
- [Draiche, 2014] Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", *Steel Compos. Struct.*, 17(1), 69-81.
- [Ebrahimi, 2015] Ebrahimi, F. and Dashti, S. (2015), "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel Compos. Struct.*, 19(5), 1279-1298.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and A. Jafari, Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*, 2016. 59(2): p. 343-371.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and Habibi, S. (2016), "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate", *Steel Compos. Struct.*, Int. J., 20(1), 205-225.
- [Ebrahimi, 2016] Ebrahimi, F. and Salari, E. (2016), "Thermal loading effects on electro-mechanical

- vibration behavior of piezoelectrically actuated inhomogeneous size-dependent Timoshenko nanobeams”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, 4(3), 197-228.
- [Ebrahimi, 2017]** Ebrahimi, F. and A. Jafari, A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2017. 25(3): p. 212-224.
- [Fahsi 2017]** Asmaa Fahsi «Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Différents Chargements» Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [Gupta, 2017]** Gupta, A., Talha, M., Seemann, W.: Free vibration and flexural response of functionally graded beam resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using non-polynomial higher order shear and normal deformation theory. *Mech. Adv. Mater. Struct.* (2017). doi:10.1080/15376494.2017.1285459
- [HADJI LAZREG, 2013]** HADJI LAZREG « Contribution à l’étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Hamidi, 2015]** Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5- unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [Han, 2002]** Han, X. and Liu, G.R. (2002), “Effects of SH waves in a functionally graded plate”, *Mech. Res. Commun.*, 29, 327-338.
- [Han, 2002]** Han, X., Liu, G.R. and Lam, K.Y. (2002), “Transient waves in plates of functionally graded materials”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 52, 851-865.
- [HOUARI M, 2011]** HOUARI MOHAMMED SID AHMED « Analyse des contraintes thermoélastiques : lois des puissances. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Houari, 2016]** Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, 22(2), 257-276.
- [Jahwari, 2016]** Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190- 2205.
- [Kaci Abdelhakim, 2012]** [Kaci Abdelhakim 2012] Kaci Abdelhakim, Étude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique, Thèse de doctorat, Université de Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès, Algérie, 2012.
- [Kadoli, 2008]** Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. (2008), “ Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory”, *Applied Mathematical Modelling*, 32(12), 2509–2525.
- [Kar, 2015]** Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709.
- [KESKAS, 2010]** KESKAS « Etude de l’effet de cisaillement transverse sur le comportement des poutres composites. » Thèse Magister en génie civil de l’université Mentouri, Constantine, 2010.
- [Kim, 2005]** Kim, Y.W. (2005), “Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 284(3-5), 531-549.
- [Koizumi, 1993]** Koizumi M. The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials* 1993;34(1):3–10.
- [Koizumi, 1995]** Koizumi, M., Niino, M.: Overview of FGM research in Japan. *MRS Bull.* 20(1995), 19–24 (1995)
- [Koizumi, 1997]** Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B*, 1997, Vol.28, pp. 1–4.
- [Laoufi, 2016]** Laoufi, I., Ameer, A., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. and Bousahla, A.A. (2016), “Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct.,Int. J.*, 20(4), 889-912.

- [Larbi Chaht, 2015] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 425-442.
- [Mahi, 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Model.*, 39, 2489-2508.
- [MEFTAH, 2017] MEFTAH ALI «Construction d'un nouveau champ de Déplacement pour l'analyse de la réponse Mécanique des structures composites» Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2017
- [Meradjah, 2015] Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, 18(3), 793-809.
- [Moradi, 2016] Moradi-Dastjerdi, R. (2016), "Wave propagation in functionally graded composite cylinders reinforced by aggregated carbon nanotube", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(3), 441-456.
- [Mouaici, 2016] Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22(4), 429-454.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi Latifa « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421-433.
- [Qian, 2005] Qian, L.F. and Batra, R.C. (2005), "Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin Method", *Computat. Mech.*, 35(3), 214-226.
- [Reddy, 2000] Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 47(1-3), 663-684.
- [Reddy, 2001] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 20, 841-855.
- [Reddy, 2002] Reddy, J.N. (2002), "Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics", Wiley, New York.
- [Reissner, 1945] Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- [SALLAI, 2011] SALLAI BEN-OUMRANE « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Sankar, 2001] Sankar, B.V. (2001), "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites Sciences and Technology*, 61(5), 689-696.
- [Shahrjerdi, 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. (2011), "Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory", *J. Mech. Sci. Tech.*, 25(9), 2195-2209.
- [Shanmugavel, 2012] Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S., Srinivasan, S.P.: An overview of fracture analysis in functionally graded materials. *Eur. J. Sci. Res.* 68(3), 412-439 (2012).
- [Şimşek, 2009] Şimşek, M. and T. Kocatürk, Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 2009. 90(4): p. 465-473.

- [Simsek, 2012] Simsek M, Kocatürk T and Akbas SD. Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures* 2012;94(8) :2358-2364
- [Sobhy, 2013] Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos. Struct.*, 99, 76-87.
- [Sun, 2011a] Sun, D. and Luo, S.N. (2011a), “The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load”, *Eur. J. Mech., A/Solid.*, 30, 396-408.
- [Sun, 2011b] Sun, D. and Luo, S.N. (2011b), “Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments”, *Ultrasonics*, 51, 940-952.
- [Tagrara, 2015] Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A. (2015), “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(5), 1259-1277.
- [Timoshenko, 1921] Timoshenko, S. P. (1921), “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars ”, *Philosophical Magazine, Series 6*, pp. 742–746.
- [Tounsi, 2016] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Structural Engineering and Mechanics, J.*, 60 (4), 547-565.
- [Vel, 2004] Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 272, 703-730.
- [Wattanasakulpong, 2012] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), “Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation”, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- [Wattanasakulpong, 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), “Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, *Aerosp. Sci. Tech.*, 32(1), 111-120.
- [Woo, 2006] Woo, J., Meguid, S.A. and Ong, L.S. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, *J. Sound Vib.*, 289, 595-611.
- [Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica*, 48, 2019-2035.
- [Yaghoobi, 2013a] Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2013a), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Appl Math Model*, 37, 8324–8340.
- [Yaghoobi, 2013b] Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2013b), “An analytical approach to large amplitude vibration and post-buckling of functionally graded beams rest on non-linear elastic foundation”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(1), 39-52.
- [Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H. and Fereidoon, A. (2014), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Composites part B*, 62, 54-64.
- [Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), “Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM”, *Steel and Composite Structures*, 17(5), 753–776.
- [Yousfi, 2018] Yousfi, M., Ait Atmane, H., Meradjah, M., Tounsi, A. and Bennai, R. (2018), “Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables”, *Structural Engineering and Mechanics.*, 66 (3), 353-368.
- [Zenkour, 2005] Zenkour, A.M.A.: Comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2. Buckling and free vibration. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5243–5258 (2005)