

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES**

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

**Mr : FOURN Hocine**

Intitulé de la thèse

**Analyse de la vibration libre et de la propagation des ondes dans les structures FGM**

Soutenu le :28/02 /2019 Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Président
AIT ATMANE Hassen	Pr	UHBC Chlef	Directeur de thèse
BOURADA Mohamed	MCA	UDL SBA	Co-Directeur de thèse
FAHSI Bouazza	MCA	UDL SBA	Examineur
HEBALI Habib	MCA	UIK Tiaret	Examineur
CHIKH Abdelbaki	MCA	UIK Tiaret	Examineur

**Année universitaire 2018-2019**

# REMERCIEMENTS

Je remercie en premier et en dernier lieu, **DIEU** tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **AIT ATMANE Hassen**, Professeur à l'UHB de Chlef, encadreur de cette thèse, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je désire exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse Monsieur **BOURADA Mohamed** Maître de conférences à l'UDL de Sidi Bel Abbès.

Je tiens aussi à rendre hommage au Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbès pour son intérêt à mon travail et je lui exprime mon honneur ainsi que mes gratitudes d'être président de jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : **FAHSI Bouazza** maître de conférences de l'UDL de Sidi Bel Abbès, **HEBALI Habib** et **CHIKH Abdelbaki** maîtres de conférences de l'UIK de TIARET, qui ont voulu examiner ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur **BENNAI Riadh** Maître de conférences à l'Université de Chlef pour toute l'aide qu'il m'a apportée et sa disponibilité tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier ma famille et mes amis, pour le soutien continu qu'ils m'ont apporté tout au long de ces années d'études.

## ***Résumé***

Dans cette thèse, une analyse de la vibration et de la propagation des ondes des plaques fonctionnellement gradué est présentée en utilisant une théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé. Cette théorie ne comporte que quatre variable, ce qui est inférieur à la théorie de la déformation par cisaillement au premier ordre (FSDT). Par conséquent, un coefficient de correction de cisaillement n'est pas requis. Contrairement aux autres théories classiques sur la déformation par cisaillement, le travail inclut un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées et un nouveau modèle mathématique est développé par la reformulation de la règle de mélange pour incorporer la phase de porosité dans les propriétés du matériau, éventuellement survenant à l'intérieur des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) lors de la fabrication.

Les propriétés des matériaux sont supposées graduellement variables suivant le sens de la hauteur selon deux distributions simples d'une loi de puissance en termes de fractions volumiques de constituants. Les équations qui régissent la propagation des ondes dans la plaque à gradation fonctionnelle reposant sur des appuis simples sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. La relation de dispersion analytique de la plaque à gradation fonctionnelle est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. La convergence et la validation du modèle proposé sont discutées en détail pour démontrer l'efficacité des modèles proposés.

Des études paramétriques seront présentées pour souligner l'influence des différents paramètres (indice de puissance matériel, rapport d'épaisseur longueur, indice de porosité) sur la propagation des ondes.

**Mots clés :** propagation des ondes; plaques fonctionnellement gradués; vibration libre ; porosité; déformation de cisaillement d'ordre élevées.

## *Abstract*

In this thesis, an analysis of the vibration and wave propagation in functionally graded plates is presented using a higher-order shear deformation theory. This theory has only four variables, which is less than the theory of first order shear deformation (FSDT). Therefore, a shear correction coefficient is not required. Unlike other conventional shear deformation theories, the present work includes a new field of displacement which introduces indeterminate integral variables and a new mathematical model is developed through the reformulation of the rule of mixture to incorporate the porosity phase in the material properties, possibly occurring inside functionally graded materials (FGMs) during fabrication.

The materials properties are supposed classified in the direction of the thickness according to two simple distributions of a power law in terms of volume fractions of constituents. The governing equations of the wave propagation in the functionally graded plate are derived by employing the Hamilton's principle. The analytical dispersion relationship of the functionally graded plate is obtained by solving an eigenvalue problem. Convergence and validation of the proposed model are discussed in detail to demonstrate the effectiveness of the proposed models.

Parametric studies will be presented to underline the influence of the various parameters (material power index, length thickness ratio, porosity index) on wave propagation.

**Keywords:** Wave propagation; Functionally graded plate; Free vibration; Porosity; Higher-order shear deformation.

## ملخص

في هذه الأطروحة، يتم تقديم تحليل للاهتزاز الحر وانتشار الموجات في الصفائح المتدرجة وظيفيا باستخدام نظرية تشوه القص ذات رتبة عليا. هذه النظرية لديها أربعة متغيرات فقط، وهي أقل من نظرية تشوه القص العرضي من الدرجة الاولى ولذلك، فإن عوامل تصحيح القص غير مطلوبة. بخلاف نظريات التشوه الكلاسيكية الأخرى، تتضمن النظرية معادلات حركة جديدة بأربع متغيرات تكاملية غير محددة وتم تطوير نموذج رياضي جديد من خلال إعادة صياغة مبدأ الخلط لأخذ بعين الاعتبار طور المسامية في خصائص المواد ، التي قد تحدث داخل المواد المتدرجة وظيفيا أثناء التصنيع.

المواد المكونة لهذه الهياكل تعتبر مدرجة بانتظام في اتجاه السمك تحت قانونين أسيين بسيطين من حيث كسور حجم المكونات. يتم استنتاج المعادلات التي تحكم انتشار الموجات في صفيحة التدرج الوظيفي مسندة على دعائم بسيطة باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على معادلات الانتشار التحليلية للوحة المتدرجة وظيفيا من خلال حل إشكالية القيم الذاتية، تم التحقق من دقة النماذج الحالية المقترحة من خلال مقارنتها بالتفصيل لإثبات فعاليتها.

سيتم عرض دراسات لتأثير مختلف العوامل على انتشار الموجات في الصفائح المتدرجة وظيفيا (مؤشر قوة المواد ، ونسبة سمك/ الطول ، ومؤشر المسامية).

**كلمات البحث:** انتشار الموجات، الصفائح المتدرجة وظيفيا، الاهتزاز الحر، المسامية، تشوه القص ذات رتبة عليا.

## TABLE DES MATIERES

Résumé	
Abstract	
Table des Matières	
Liste des Figures	
Liste des Tableaux	
Liste des Notations	
Introduction générale	1
Chapitre I : Propagation des ondes élastiques dans les matériaux	6
I.1. Introduction	6
I.2. Quelques phénomènes ondulatoires dans la Nature	7
I.3. Le phénomène de propagation des ondes	8
I.4. Les divers types d'ondes élastiques	9
I.4.1. Ondes longitudinales et transversales	9
I.4.2. Ondes de Surface	10
I.4.3. Ondes de Rayleigh	10
I.4.4. Ondes progressives et ondes stationnaires	11
I.5. Eléments de propagation des ondes	11
I.5.1. Equation de propagation	12
I.5.2. Vitesse de phase	13
I.5.3. Vitesse de groupe	14
I.5.4. Types de milieux de propagation	17
I.6. Les équations générales de la propagation d'onde	18
I.6.1. Équation d'Alembert	18
I.6.2. Manifestations et résolution	18
I.6.2.1. Solution générale de la propagation d'onde	19
I.6.2.2. Solutions harmoniques	19
I.7. Conclusion	20
Chapitre II : Notions de mécanique des solides	21
II.1. Introduction	21
II.2. Principe général d'équilibre - équations d'équilibre	22
II.3. Relations contraintes-efforts	22
II.4. Le potentiel interne et ses applications	24
II.4.1. Travail des forces extérieures et énergie de déformation	24
II.4.1.1 Notions de travail et de travail complémentaire	24
II.4.1.2. Énergie et énergie complémentaire de déformation	26
II.4.2. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire	27
a) Travail d'une force	27
b) Généralisation	28
c) Travail des réactions	28
d) Énergie potentielle de déformation	28
II.4.3. Principe de la conservation de l'énergie	29
II.4.4. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres	30
a) Effort normal	31
b) Moment fléchissant	32

c) Effort tranchant .....	33
d) Moment de torsion .....	33
II.4.5. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation .....	34
II.4.6. L'énergie des quantités d'accélération .....	35
II.4.7. Travail Virtuel .....	36
II.5. Les différentes approches appliquées aux matériaux fonctionnels .....	38
II.6. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles: .....	38
II.6.1. Approches monocouche équivalente: .....	38
II.6.1.1. La théorie classique des plaques minces de love- kirchhoff (CPT): .....	38
II.6.1.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT: .....	40
II.6.1.3. La théorie de déformation en cisaillement ordre élevé HSDT: .....	41
II.6.2. Approche par couche .....	43
II.6.2.1. Les modèles zig-zag: .....	45
II.6.2.2. Les modèles couches discrètes: .....	45
II.6.3. Modèle éléments finis de structure multicouche: .....	46
II.6.3.1 Modèles éléments finis 2D .....	46
II.6.3.2. Modèles éléments finis 3D .....	48
II.7. Accommodation de l'approche monocouche avec les matériaux FGM .....	49
II.8. Conclusion .....	50
Chapitre III Présentation du matériau d'étude -matériaux FGM- .....	51
III.1. Introduction .....	51
III.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués .....	52
III.3. Propriétés physiques et mécaniques des FGM .....	55
III.3.1. Propriétés physiques de l'aluminium .....	55
III.3.2. Propriétés physiques de la céramique .....	56
III.4. Exemples de secteurs d'application des composites .....	56
III.4.1. Secteur de la construction civile .....	57
III.4.2. Secteur de la médecine .....	57
III.4.3. Secteur de l'aérospatiale et l'automobile .....	58
III.4.4. Secteur de l'industrie .....	58
III.4.5. Articles de sports .....	58
III.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	59
III.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	60
III.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	61
III.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	62
III.6. Les matériaux impropres (poreux) .....	63
III.6.1.1. Définition de la porosité .....	63
III.6.1.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau .....	65
III.6.2. Causes possibles d'apparition de la porosité .....	67
III.6.2.1. Les causes mécaniques .....	67
III.6.2.2. Les cause thermodynamiques .....	70
III.6.3. Les Matériaux fonctionnellement gradués avec gradient de porosité .....	73
III.7. Conclusion .....	74
Chapitre IV: Analyse mathématique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM .....	75
IV.1. Introduction .....	75

IV.2.1. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque P-FGM avec porosité.....	76
IV.2.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque S-FGM .....	77
IV.3. Equations fondamentales .....	78
IV.3.1. Hypothèses de base et équations constitutives .....	78
IV.3.2. Équations de mouvement.....	80
IV.3.3. Les relations de la dispersion d'onde.....	84
IV.4. Conclusion .....	86
Chapitre V : Validation des résultats et discussion .....	87
V.1. Introduction.....	87
V.2. Les résultats numériques et discussion.....	87
V.2.1. Propagation des ondes dans les plaques P- FGM parfait .....	88
V.2.2. Etude paramétrique de la plaque P-fgm: .....	91
V.2.3. Propagation des ondes dans les plaques S- FGM parfait .....	99
V.2.4. Etude paramétrique de la plaque S-fgm .....	104
V.2.5 Comparaison étude paramétrique de plaques P-FGM et S-FGM.....	112
V.3.1. Plaque en FGM imparfaite (poreuse).....	114
V.4. Conclusions.....	128
Conclusion générale et perspectives .....	129



### *Liste des figures*

Figure I.1: Représentation schématique d'ondes transversales vues de profil. ....	9
Figure I.2: Phénomène d'onde .....	9
Figure I.3: Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface. ....	10
Figure I. 4: propagation d'onde stationnaire .....	11
Figure I.5: Vitesse de propagation d'une onde monochromatique.....	13
Figure I.6 : propagation d'une onde dans une corde. ....	14
Figure I.7: a)Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe (M. Nicolas 2010).....	16
Figure I.8 : Courbes de dispersion. ....	17
Figure.II.1: Efforts agissant dans le plan.....	23
Figure.II.2: Moments agissant sur un élément. ....	23
Figure.II.3: Efforts tranchants dans un élément .....	24
Figure.II.4: Diagramme F- $\delta$ d'une barre prismatique. ....	25
Figure.II.5 : Energie de déformation d'un corps élémentaire. ....	26
Figure II.6: Relation linéaire de contrainte-déformation ( $\sigma_{ij}$ - $\epsilon_{ij}$ ).....	29
Figure II.7: Relation des contraintes-effort normal.....	31
Figure II. 8 : Relation de moment de flexion. ....	32
Figure.II.9. Relation de moment de torsion. ....	33
Figure.II.10: Relation d'énergie potentielle de déformation. ....	34
Figure.II.11. Système élastique force-déplacement F- $\delta$ .....	36
Figure.II.12: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 2004) .....	37
Figure.II.13: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	39
Figure.II.14: Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner (Reddy 1997) .....	40
Figure.II.15: Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy 1997).....	42
Figure.II.16: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique (Nguyen 2004) ...	44
Figure.II.17: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique (Nguyen 2004) ...	44
Figure.II.18: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur .....	45
Figure.II.19: Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds .....	47
Figure.II.20: Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds .....	47
Figure.II.21: Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds. ....	48
Figure .II.22: Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires (Nguyen 2004) ...	48
Figure.II.23: Élément d'interface. (Bui 1999).....	49
Figure.III.1 : Variation continue propriétés .....	53
Figure.III.2 : Variation discrète des propriétés .....	53
Figure III.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	54
Figure III.4: Variation continue de la microstructure.....	54
Figure III.5: La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.....	60
Figure.III.6: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM .....	61
Figure III.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM .....	62

Figure III.8: Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM .....	63
Figure.III.9: (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Ait yahia, 2015].....	64
Figure.III.10: Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom et al., 1996] .....	65
Figure.III.11: Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante (Ledru, 2009). .....	67
Figure.III.12: Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope (Ledru, 2009).. .....	68
Figure. III.13 : (a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres. .	69
Figure.III.14: Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction.....	71
du rayon du germe (Veesler et al.) .....	71
Figure.III.15 : FGM avec porosité gradué.....	73
Figure. IV.1: La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.....	75
Figure.V.1 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm.....	89
Figure.V.2: Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement gradués P-fgm .....	91
Figure.V.3 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent rapport épaisseur (ait ; p=2) .....	93
Figure.V.4: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent rapport épaisseur (ait ; p=2).....	95
Figure.V.5: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent indice de puissance matériel (ait ; $\kappa=10$ ) .....	97
Figures.V.6: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent indice de puissance matériel (ait ; $\kappa=10$ .....	99
Figure.V.7 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel S-fgm.....	102
Figure.V.8: Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement gradués S-fgm .....	104
Figure.V.9: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent rapport épaisseur (ait ; p=2).....	106
Figure.V.10: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent rapport épaisseur (ait ; p=2).....	108
Figures.V.11: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent indice de puissance matériel (ait ; $\kappa=10$ ) .....	110
Figures.V.12: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent indice de puissance matériel (ait ; $\kappa=10$ ) .....	112
Figure.V.13: Comparaisons des fréquences Pfgm–Sfgm (a/h=10, p=2) (ait).....	113
Figure.V.14: Comparaisons des vitesse de phase Pfgm– Sfgm (a/h=10 , p=2) (ait).....	113
Figure.V.15: Comparaisons des fréquences Pfgm–Sfgm ( $\kappa=10$ p=2) (ait).....	114
Figure.V.16: Comparaisons des vitesses de phase Pfgm– Sfgm ( $\kappa=10$ , p=2) (ait) .....	114
Figure.V.17: variation des fréquences naturelles d'une plaque FG en fonction indice de puissance matériel avec différent indice de porosité.....	118
Figure.V.18: variation des vitesses de phases d'une plaque FG en fonction indice de puissance matériel avec différent indice de porosité.....	120
Figure.V.19: les courbes des fréquences naturelles d'une plaque FG en fonction du nombre d'onde avec différent indice de porosité .....	122
Figure.V.20: les courbes des vitesses de phase d'une plaque FG en fonction du nombre d'onde avec différent indice de porosité .....	124
Figure.V.21 : Influence du rapport d'épaisseur sur les fréquences naturel d'une plaque FG.....	125

Figure.V.22 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque FG .....	126
Figure.V.23: influence de la porosité sur les fréquences naturelles et les vitesses de phase des plaques FGM avec défèrent rapport d'épaisseur .....	127

*Liste des tableaux*

Tableau.IV.1. Facteur de la distribution de la porosité $\xi$ .....	76
Tableau IV.2. Les fonctions de formes des différents modèles. ....	79
Tableau .V. 1. Fréquences naturel d'une plaque FG pour différent rapport d'épaisseur paramètre de porosité, indices de puissance matériel et distributions de porosité.....	115
Tableau .V. 2. Vitesse de phase d'une plaque FG pour différent rapport d'épaisseur paramètre de porosité, indices de puissance matériel et distributions de porosité.....	115

## Liste des notations

$FGM$	Matériau fonctionnellement gradués.
$\zeta$	Facteur de la distribution de la porosité.
$\lambda$	Coefficient de porosité.
$E$	Le module de Young.
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z ».
$E_c$	Module de Young de la céramique.
$E_m$	Module de Young du métal.
$\nu$	Le coefficient de Poisson.
$\rho$	La masse volumique.
$\rho_c$	La masse volumique de la céramique.
$\rho_m$	La masse volumique du métal.
$p$	Coefficient de puissance matériel.
$a$	Longueur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{x}$ .
$b$	Largeur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{y}$ .
$h$	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{z}$ .
$\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	Les déplacements dans les directions $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ .
$f(x)$	Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque.
$\bar{P}$	Propriété matériel.
$\bar{P}_c$	Propriété matériel de la céramique.
$\bar{P}_m$	Propriété matériel du métal.
$V_c$	Fraction volumique de la céramique.
$V_m$	Fraction volumique du métal.
$\kappa_1$	Le nombre d'onde de propagation le long de la direction d'axe des « x ».
$\kappa_2$	Le nombre d'onde de propagation le long de la direction d'axe des « y ».
$\delta U$	La variation de l'énergie de déformation.
$\delta V$	La variation de l'énergie potentielle de la base élastique.
$\delta K$	La variation de l'énergie cinétique.
$A$	La surface supérieure.
$\sigma_x, \sigma_y$	Contrainte normale.

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation normal.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformation de cisaillement.
$I_l, J_l, K_l$	Des inerties de masse.
$\omega$	La fréquence de propagation.
$[K]$	Matrice de rigidité.
$[M]$	Matrice de masse.
$\{\Delta\}$	Vecteur déplacement.
$C_i$	Vitesse de phase du mode $i$ .
$\beta$	Vecteur.
$[I]$	Matrice.

## ***Introduction générale***

Les matériaux composites sont obtenus par la combinaison artificielle de différents matériaux afin d'obtenir des propriétés que les composants individuels en eux-mêmes ne peuvent pas atteindre. Avec leurs hautes résistances et une rigidité combinée à une faible densité et leur capacité d'adaptation à des applications spécifique, ces matériaux offrent des avantages par rapport aux matériaux traditionnels. Cependant, leur comportement sous des applications pratiques à haute température est une préoccupation; ces matériaux composites stratifiés présentent une disparité entre les propriétés mécaniques à travers une interface en raison de la liaison de deux matériaux distincts. En conséquence, les constituants des composites matrice-fibres sont susceptibles de se désagréger à des charges thermiques extrêmement élevées. De plus, des fissures sont susceptibles de s'initier aux interfaces et de se transformer en sections de matériau plus faibles. Des problèmes supplémentaires incluent la présence de contraintes résiduelles dues à la différence entre les coefficients de dilatation thermique de la fibre et de la matrice dans les matériaux composites. Ces problèmes sont évités ou réduits par Un concept de couche intermédiaire graduée dans lequel la contrainte thermique a effectivement été éliminée par une couche intermédiaire à gradient de composition. Ce concept, on lui a donné le nom de matériaux à gradient de propriétés FGM dans les structures en matériaux fonctionnellement gradué en faisant varier progressivement la fraction volumique des constituants plutôt qu'en les modifiant brusquement à travers une interface.

Les structures fonctionnellement graduées sont celles dans lesquelles les fractions volumiques de deux matériaux ou plus varient continuellement en fonction de la position le long de certaines dimensions de la structure afin de remplir les fonctions souhaitables pour des applications spécifiques en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, (Koizumi 1993, Ait Atmane 2011, Ould Larbi 2013, Tounsi 2013, Hebali et al, 2014 Al-Basyouni 2015 Bennai 2015, Ait Yahia. 2015, Larbi Chaht 2015, Boukhari 2016)Par exemple, des structures de plaque de barrière thermique pour des applications à haute température peuvent être formées à partir d'un mélange de céramique et du métal. La composition varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal, avec une variation souhaitée des fractions volumiques des deux matériaux entre les deux surfaces. La céramique constituant le matériau assure la résistance aux températures élevées en raison de sa faible conductivité thermique. Le changement progressif des propriétés des matériaux peut être adapté à différentes applications et environnements de travail.

Les matériaux fonctionnellement gradués ont principalement été utilisés dans des environnements soumis à des températures élevées, notamment des chocs thermiques, une situation qui se produit lorsqu'un corps est soumis à un échauffement ou à un refroidissement transitoire élevé dans un court intervalle de temps.

Le développement de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs.

Actuellement, plusieurs travaux concernant l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sont annoncés sur l'analyse de la vibration libre, le flambement et la flexion des plaques et sur l'étude de l'effet thermique sur le comportement non linéaire des plaques FGM. Reissner (1945), Cranch (1956), Ambartsumyan (1969) et Bresse (1859) ont été les innovateurs de la recherche dans l'étude du différent comportement des structures en matériaux isotropes sous différentes contraintes. Avec le développement du concept de FGM, de nombreux travaux ont été étudiés et publiés dans la littérature.

Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. Sur la base de la théorie des plaques de Reddy, Cheng et Batra (2000) présente les résultats de flambement et les vibrations d'une plaque FGM simplement appuyée polygonale. Ensuite la même analogie membranaire a été appliquée à l'analyse des plaques FGM et des coques sur la base d'une théorie de troisième ordre des plaques par Reedy (2002).

Vel et Batra (2004) ont proposé une solution exacte tridimensionnelle des vibrations libres et forcées, pour des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées. Zenkour (2006) a présenté une théorie généralisée de la déformation par cisaillement dans laquelle les déplacements de la membrane sont étendus sous forme de fonction trigonométrique sur toute l'épaisseur. Malek zadeh (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres de plaques épaisses dans les FGM sur des fondations élastiques à deux paramètres. Par la suite, de nouvelles fonctions de forme ont été proposées par Ait Atmane et al. (2010) Benachour et al. (2011) et Ait Amar Meziane et al. (2014). Ait Atmane et al. (2015) ont présenté un modèle de déplacement en cisaillement calculé pour l'analyse vibratoire des plaques FG avec des porosités. Beldjelili et al. (2015) ont analysé la réponse en flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. Tounsi et al (2016) ont développé une nouvelle théorie non polynomiale à trois inconnus pour le flambement et les vibrations des plaques sandwich FG.

La propagation des ondes d'éléments structurels tels que les plaques ou les poutres a été étudiée dans différents secteurs tels que l'aéronautique, la médecine, l'acoustique des bâtiments, etc. Ait Yahia et al. (2015) ont discuté sur la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées avec des porosités, en employant diverses théories des



plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Boukhari et al. (2016) ont introduit une théorie de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes de plaques FG. Ebrahimi (2016a) a étudié l'analyse de la propagation des ondes d'une quasi-3D nano poutre FG dans un environnement thermique en se basant sur la théorie du contrainte gradué non locale. Ebrahimi (2016b) a introduit une théorie de contrainte gradué non locale pour l'analyse de la propagation des ondes dans des nano plaques non homogènes. Han et al. (2001) ont proposé une méthode analytique-numérique pour analyser les caractéristiques des ondes dans les cylindres en FGM. Sun et Luo (2011a) ont également étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique des plaques FG, de forme rectangulaire encadrée, soumis à une charge impulsive.

Pour tenir Compte les effets thermiques et les propriétés du matériau dépendant de la température, Sun et Luo (2011b) ont étudié la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement gradué en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur.

Lors de la fabrication des pièces FGM, des porosités peuvent apparaître dans ces éléments lors du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification; Ces dernières années, certaines études sur l'effet de porosité dans les structures FG ont été publiées dans la littérature; Wattanasakulpong et al. (2012) ont également donné une discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Wattanasakulpong et al. (2014) ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres FGM

ayant des porosités. Şimşek et Aydın (2012) ont examiné la vibration forcée des microplaques FG avec des effets de porosité sur la base de la théorie de couple de contrainte modifiée. Jahwari et Naguib (2016) ont étudié les plaques poreuses FG viscoélastiques avec une théorie des plaques d'ordre supérieur et un modèle statistique de distribution cellulaire. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FG en prenant en compte l'effet de porosité. Mouaici et al. (2016) ont proposé une solution analytique pour la vibration des plaques FG présentant des porosités. L'analyse était basée sur la théorie de la déformation par cisaillement avec prise en compte de la position exacte de la surface neutre. Récemment, Ait Atmane et al. (2016) étudient l'effet de stretching et de la porosité sur la réponse mécanique d'une poutre FG reposant sur des fondations élastiques. Akbas SD (2017) a étudié les effets thermiques sur le comportement vibratoire des poutres FG avec porosité. Benadouda et al. (2017) ont présenté une théorie efficace de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes dans les poutres de matériaux FG avec des porosités.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement vibratoire et la propagation des ondes dans des plaques FGM reposant sur des appuis simples en utilisant une nouvelle théorie

déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Employant un nouveau champ de déplacement de variable intégrale à travers l'épaisseur de la plaque, l'addition du terme d'intégral dans le champ de déplacement mène à une réduction des nombres d'inconnus; pour tenir en compte effet de la porosité qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication, on a développé un nouveau modèle qui donne une nouvelle forme de répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque ; ce modèle a été validé et comparé avec d'autres modèles de distribution de porosité. Les équations régissant la propagation des ondes dans la plaque FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les relations de dispersion analytiques des plaques FGM sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

Le présent travail de thèse est organisé en cinq chapitres:

Dans le chapitre I, est consacré aux phénomènes physiques de propagation des ondes dans les milieux avec Les divers types d'ondes élastiques et présentant quelques phénomènes ondulatoires dans la Nature, les types des milieux de propagation dispersifs et non dispersifs ; nous citons quelques éléments de la propagation des ondes telles que la fréquence, la vitesse de phase, vitesse de groupe et les équations générales de la propagation d'onde dans le milieu élastique ;

Le chapitre II, a été consacré à la présentation de la cinématique générale des solides les méthodes de résolution des problèmes structuraux, on commençant par le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre et les différentes approches des plaques multicouches sont aussi exposés.

Dans le chapitre III, un aperçu sur le matériau à gradient de propriété FGM, les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque, leur domaine d'application, les causes faisables d'apparition de la porosité dans les matériaux composite.

Ensuite dans le chapitre IV, on va procéder au développement de la solution analytique des plaques en FGM qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques FG simplement appuyées en tenant compte l'effet de la porosité utilisant un champs de déplacement à quatre variable intégrale.

Dans le cinquième (V) chapitre , une application numérique et une étude comparative des résultats de la propagation des ondes et du comportement vibratoire des plaques fonctionnellement graduées a été illustré afin de vérifier l'efficacité de la théorie utilisée , qui prend en considération l'effet de déformation par cisaillement transverse ainsi une étude

paramétrique sera faite pour étudier L'effet de l'exposant de la fraction volumique et les autres paramètres sur les plaques FGM simplement appuyé, les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la structure FGM seulement selon une distribution de puissance (P-FGM) et sigmoïde (S-FGM); une validation du modèle de porosité proposé, tout en le comparant avec ceux trouvés dans la littérature, L'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques FGM est présenté sous forme graphique.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où l'on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution des problèmes de la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques FGM ainsi par les perspectives envisagées pour des travaux futurs.

## ***Chapitre I***

### ***Propagation des ondes élastiques dans les matériaux***

#### **I.1. Introduction**

Des nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. On peut citer les ondes se propageant à la surface de l'eau à la suite de la chute d'un objet, les vagues se déplaçant à la surface de la mer, les ondes produites sur les cordes vibrantes, les ondes sonores, les ondes radio, les ondes optiques, etc. Du point de vue mathématique, le mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, dans une bonne approximation, par une même équation, l'équation de d'Alembert (à une ou à plusieurs dimensions d'espace, suivant le cas), ce qui place l'étude des ondes sur un plan très général.

On peut distinguer deux catégories d'ondes. La première correspond aux ondes d'origine mécaniques, élastique, thermodynamique, ou hydrodynamique, qui, pour se manifester ont besoin d'un support matériel préexistant, tel que système de ressorts couplés, corde, gaz, liquide, etc. La seconde correspond aux ondes électromagnétiques (ondes radio, ondes optiques, rayons X, etc.) dues à la propagation de quantas d'énergie appelés photons, pouvant se déplacer dans le vide, indépendamment de tout milieu matériel préexistant. C'est la théorie de la relativité qui a mis en évidence, au début du vingtième siècle, ce dernier aspect. Auparavant, on supposait que les ondes électromagnétiques se propageaient, par analogie avec les autres types d'onde, dans un milieu ambiant inobservé, appelé éther. Les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, appelées équations de Maxwell, peuvent être considérées comme des équations fondamentales de la Physique Classique (dans la mesure où les forces gravitationnelles des échelles de l'Astronomie ou de l'Astrophysique ne sont pas considérées), alors que les équations des ondes de la première catégorie sont en général obtenues à partir d'approximations concernant le milieu considéré et l'amplitude des oscillations correspondantes (approximations des petits mouvements ou des petites oscillations) (H. Sazdjian, 2013).

## I.2. Quelques phénomènes ondulatoires dans la Nature

Il est possible d'emblée de séparer les phénomènes ondulatoires en deux catégories distinctes suivant leur nature physique. La première d'entre elles est constituée d'ondes mécaniques générées par des petites perturbations d'un milieu matériel. Ces ondes sont naturellement conditionnées par la nature physique de celui-ci, et se décrivent le plus simplement dans le référentiel attaché à ce milieu. Donnons quelques exemples d'ondes mécaniques (Dan Israel) :

- a) **les ondes acoustiques ou ondes sonores** dans les fluides, dont nous avons l'expérience quotidienne, sont générées par de petits déplacements des molécules du fluide autour de leur position statistique d'équilibre, ou de manière équivalente par de petites variations de pression. Ces perturbations peuvent se propager dans les trois dimensions du fluide ;
- b) **les ondes acoustiques dans les solides** sont de nature assez voisine. La structure du solide est formée de manière schématique de noyaux atomiques (ou d'ions) ordonnées suivant un réseau de manière rigide (contrairement aux molécules de fluide, libres de se déplacer). Un déplacement de ces noyaux par rapport à leur position d'équilibre dans le réseau engendrera la production d'une onde. Leur étude peut être plus complexe que celle des ondes dans les fluides car un solide possède souvent des directions ou axes privilégiés spécialement dans le cas d'un cristal qui influenceront la propagation des ondes ;
- c) **les ondes sismiques** correspondent à un cas particulier d'ondes acoustiques, à la fois dans les solides (dans les roches) et les fluides (le manteau qui est assimilable à un fluide très visqueux), dont l'analyse permet de sonder la composition interne de la Terre ; en biologie et médecine, la propagation des ondes ultrasonores dans les tissus biologiques est impliquée par exemple dans les échographies. Les tissus biologiques étant majoritairement constitués d'eau elles sont assimilables à des ondes se propageant dans les fluides (mais néanmoins non homogènes) ;
- d) **les ondes sur les cordes vibrantes** sont dues au déplacement transversal d'une corde tendue par rapport à sa position d'équilibre ;
- e) **les ondes de gravité ou ondes de surface** : sont des ondes à deux dimensions se propageant à l'interface de deux fluides, en présence de la gravité. L'exemple le plus commun de telles ondes est donné par les vagues à la surface de la mer, ou à une échelle plus réduite les rides émises par le jet d'un objet dans l'eau. Dans ce cas l'onde est évidemment confinée à deux dimensions car elle est liée au déplacement de la position de l'interface. La force responsable du retour à l'équilibre de l'interface est la poussée d'Archimède, générée en la présence du champ de pesanteur ;

f) **les ondes océaniques et atmosphériques** : Ces ondes ne sont pas de natures fondamentalement différentes de celles évoquées plus haut mais ont lieu à des très grandes échelles, telles que la rotondité de la terre et son mouvement de révolution agissent de manière significative. Les exemples les plus connus sont les ondes de Rossby, qui influencent grandement la circulation de l'atmosphère aux latitudes tempérées, et les ondes de Kelvin qui sont des ondes de gravité sur l'océan parallèles aux côtes.

Il est courant de devoir tenir compte de plusieurs types d'ondes mécaniques pour décrire complètement un phénomène. Prenons l'exemple d'une guitare. En pinçant la corde le joueur produit une onde sur la corde vibrante. Ces vibrations seront transmises à la table de la guitare par le chevalet. Il faut alors considérer des ondes mécaniques dans le bois de la table. Les vibrations de la table mettront alors l'air en mouvement, générant des ondes sonores dans l'air.

Les phénomènes ondulatoires de la deuxième catégorie ne nécessitent pas de milieu matériel pour se propager. Elles diffèrent donc des ondes précédentes dans le sens où elles ne correspondent pas aux perturbations d'un système matériel. Il existe essentiellement deux sortes d'ondes de ce type.

a) **les ondes électromagnétiques** correspondent aux variations locales, conjointes, des champs électriques et magnétiques. Ces ondes peuvent parfaitement se propager dans le vide, mais également dans les milieux matériels pourvu que ceux-ci soient suffisamment transparents. Lorsque ces ondes sont détectables par l'œil, c.-à-d dans le domaine de longueur d'onde visible, elles sont communément appelées ondes lumineuses. Il s'agit d'un des domaines principaux d'application de la physique ondulatoire ;

b) **les ondes gravitationnelles** sont de nature nettement plus exotique. Elles sont prédites par la théorie de la relativité générale d'Einstein et correspondent à la propagation de déformations de l'espace-temps, générées par des objets massifs sous certaines conditions. Bien que non encore détectées directement, leur existence est confirmée par plusieurs phénomènes astrophysiques.

### **I.3. Le phénomène de propagation des ondes**

Une onde est généralement produite par la déformation localisée d'un milieu continu ; celle-ci, après sa création, se déplace dans le milieu. Ce phénomène de déplacement est appelé propagation. Les exemples les plus visibles d'ondes sont les vagues à la surface de la mer et les excitations créées sur une corde tendue. On peut caractériser une onde par son amplitude, qui représente la "hauteur" de la déformation par rapport au milieu, par

sa position moyenne à l'instant d'observation, par sa taille autour de sa position moyenne, et par sa vitesse de propagation ou « célérité » (H. Sazdjian, 2013). La figure 1.1 représente schématiquement des ondes unidimensionnelles transversales (corde vibrante, vague à la surface de l'eau, etc.).



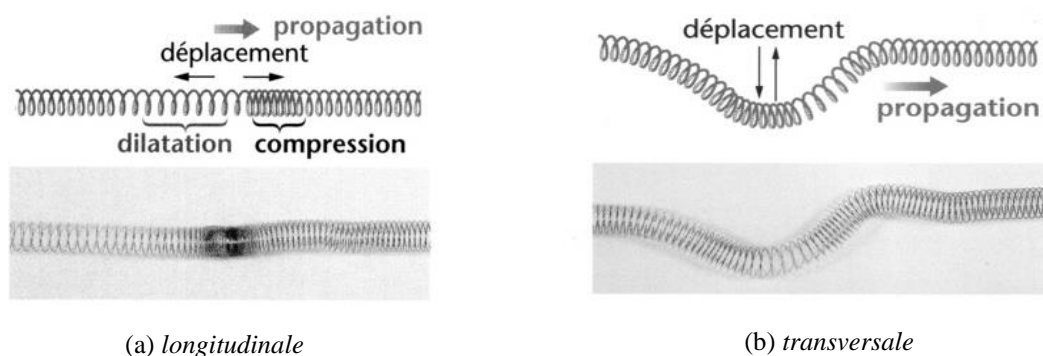
**Figure I.1:** Représentation schématique d'ondes transversales vues de profil (H. Sazdjian, 2013).

## I.4. Les divers types d'ondes élastiques

### I.4.1. Ondes longitudinales et transversales

Les ondes longitudinales encore appelées ondes de compression, sont caractérisées par un déplacement des particules parallèle à la direction de propagation par exemple les ondes acoustiques, un système de ressort (figure I.2.a), les ondes longitudinales ne se propagent réellement que dans les solides et les liquides.

Les ondes transversales appelées aussi ondes de cisaillement sont obtenues lorsque les vibrations des particules se font dans un plan normal à la direction de propagation de l'onde (figure.1.2.b). Par conséquent le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume puisque les distances entre les plans sont conservées. Si ces vibrations se font infiniment dans toutes les directions contenues dans ce plan, l'onde transversale est dite polarisée. Autrement dit, elles sont caractérisées par une polarisation perpendiculaire au vecteur d'onde ou tout simplement, les particules oscillent de part et d'autre de la droite de leur position initiale. Les ondes transversales ne se propagent que dans les solides ou dans les liquides visqueux (S. Bouhedja.2007).



**Figure I.2:** Phénomène d'onde

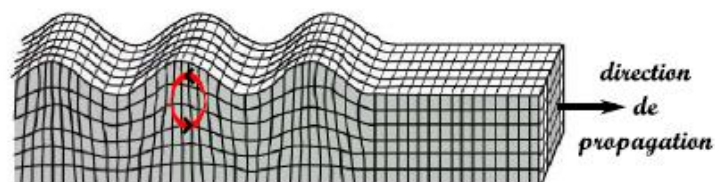
### I.4.2. Ondes de Surface

A la frontière plane d'un milieu semi-infini, on trouve des ondes de surface dont l'amplitude varie exponentiellement avec la distance normale à partir de la surface (ou l'interface) le long de laquelle leur propagation se fait. Les ondes de surface n'affectent que les particules d'un matériau qui se trouve à proximité immédiate de sa surface de séparation avec l'air ou avec un autre milieu. Elles se propagent, généralement, sur une épaisseur correspondante à une longueur d'onde (W.L.Bond 1975). Dans un matériau donné, les vitesses de propagation des ondes de surface sont toujours inférieures à celles des ondes de volume. Cela est dû au fait que les particules qui se trouvent à la surface libre ne subissent les forces de cohésion élastiques que d'un seul côté, alors que les ondes de volume affectent des particules qui sont entourées de tous les côtés dans le milieu. Ces ondes de surface sont très complexes et les vibrations des particules peuvent être diverses.

### I.4.3. Ondes de Rayleigh

L'existence d'une onde sur la surface libre plane d'un milieu semi-infini a été découverte par Lord Rayleigh en 1885, ce type d'onde est connu sous le nom d'onde de Rayleigh. Ce mode d'ondes acoustiques de surface est constitué par la superposition des ondes longitudinale et transversale se propageant le long de la surface libre avec une vitesse de phase commune figure.II.6. Selon la nature de l'interface, vide/solide ou liquide/solide, les ondes qui s'y propagent sont appelées ondes de Rayleigh ou ondes de Rayleigh généralisées (D. A. Davids 1989).

Les ondes de Rayleigh ont reçu un intérêt considérable grâce à leur utilité pour la détection des défauts de surface dans le test non destructif ultrasonique des matériaux. En plus, elles ont été employées dans la construction des lignes à retard électromécaniques utilisées pour les radars et les systèmes de télécommunication.



**Figure I.3:** Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface.  
(O. Xeridat 2011)



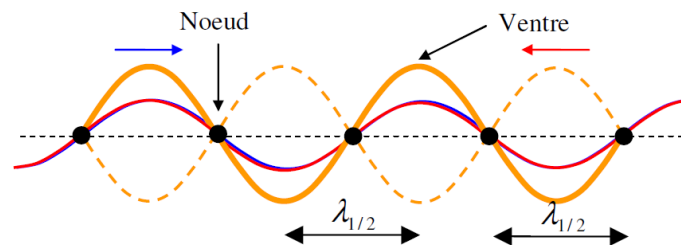
#### I.4.4. Ondes progressives et ondes stationnaires

Il est d'usage dans la communauté scientifique de distinguer les ondes progressives des ondes stationnaires. Les ondes progressives, avancent dans l'espace.

Une onde progressive est une perturbation périodique (qui se répète dans le temps) et qui se déplace dans l'espace, tels les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores, ou les ondes électromagnétiques.

On appelle onde stationnaire le phénomène vibratoire résultant de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  se propageant en sens contraire figure I.4. Exemple typique d'une corde tendue qui peut aussi bien vibrer à sa fréquence fondamentale

Les ondes stationnaires se produisent par exemple par la superposition d'une onde incidente et de son onde réfléchiée par un obstacle.



**Figure I. 4:** propagation d'onde stationnaire (P. Puzo.2012)

À un temps  $t$  fixé, une onde stationnaire ressemble à une onde progressive. En revanche, son évolution temporelle est totalement différente. Une onde stationnaire possède des minima (nœuds) et des maxima (ventres) d'amplitude fixes dans l'espace. Ainsi, si on se place aux nœuds de cette onde, l'amplitude est nulle quel que soit le temps. Avec une onde progressive, nous aurions vu l'amplitude évoluer, de façon sinusoïdale avec le temps dans le cas d'une onde harmonique.

Une façon simple de construire une onde stationnaire est de superposer deux ondes progressives se propageant en sens inverse. C'est d'ailleurs ce qui se passe lorsqu'une onde se réfléchit sur un miroir parfait.

Les ondes stationnaires sont des objets physiques très courants et se rencontrent notamment dans les cavités laser ou les lignes hyperfréquence.

#### I.5. Éléments de propagation des ondes

Pour décrire avec précision les propriétés physiques d'une onde, il est nécessaire de la représenter par une fonction  $S$  décrivant la déformation du milieu en chacun de ses

points ; dans les exemples les plus simples vus plus haut,  $S$  représentera la hauteur de la déformation d'une corde ou celle d'une vague à la surface de l'eau.  $S$  sera une fonction de plusieurs variables et paramètres utilisés pour avoir la description la plus complète. Ainsi, comme l'onde évolue au cours du temps,  $S$  sera une fonction de la variable temps, représentée par le symbole  $t$ . Pour préciser la position de l'onde dans l'espace,  $S$  sera aussi une fonction des coordonnées  $x, y, z$ . néanmoins, dans un mouvement unidimensionnel, une seule coordonnée,  $x$  par exemple, sera suffisante. Si la propagation de l'onde se fait avec une **célérité constante**  $C$  (cas des milieux non-résistants ou non-visqueux),  $S$  dépendra du paramètre  $C$ . Dans le cas d'un milieu non-dissipatif et en l'absence des forces extérieures, l'onde se propage en conservant sa forme ; dans ce cas, un paramètre  $h$  ou  $A$  peut représenter la hauteur maximale de l'onde ou son amplitude (mais celle-ci peut être une quantité algébrique, positive ou négative, ou même complexe). Si l'onde possède des propriétés de périodicité, des paramètres correspondants, tels que pulsation, longueur d'onde ou période, peuvent aussi apparaître.

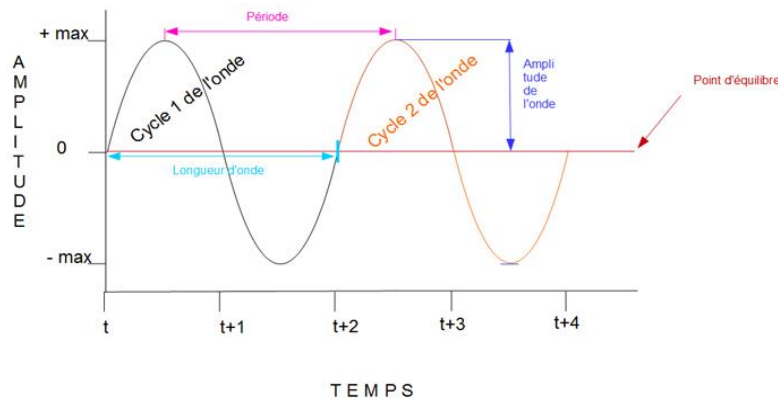
### I.5.1. Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires présentés précédemment, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps  $t$  et d'une variable d'espace,  $x$  par exemple. Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation d'onde ou équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.1})$$

dans laquelle  $V$  est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appelée dans la suite vitesse de propagation, elle est liée à sa longueur d'onde  $\lambda$ , à sa fréquence  $f$  et à sa période  $T$  par les égalités suivantes :

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{I.2})$$



**Figure I.5:** Vitesse de propagation d'une onde monochromatique

Avec :

$\lambda$  : la longueur d'onde (en m)

$T$  : la période temporelle (en s)

$v$  : la célérité de l'onde (en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

$f$  : la fréquence temporelle (en Hz)

### I.5.2. Vitesse de phase

Considérons une onde progressive sinusoïdale qui se propage dans le sens des  $x$  croissant.

Un point d'abscisse  $x$  possède, à l'instant  $t$ , l'élongation :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx) \quad (\text{I.3})$$

Entre l'instant  $t$  et  $t + \Delta t$  l'onde progresse d'une quantité  $\Delta x$ . A l'instant  $t + \Delta t$ , le point d'abscisse  $x + \Delta x$  possède la même élongation que celle que possédait le point d'abscisse  $x$  à l'instant antérieur  $t$ . Ceci se traduit par l'égalité :

$$s(x,t) = s(x + \Delta x, t + \Delta t) \quad (\text{I.4})$$

$$S_0 \cos(\omega t - kx) = S_0 \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)] \quad (\text{I.5})$$

Cette égalité est satisfaite si les phases instantanées sont égales :

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) \quad (\text{I.6})$$

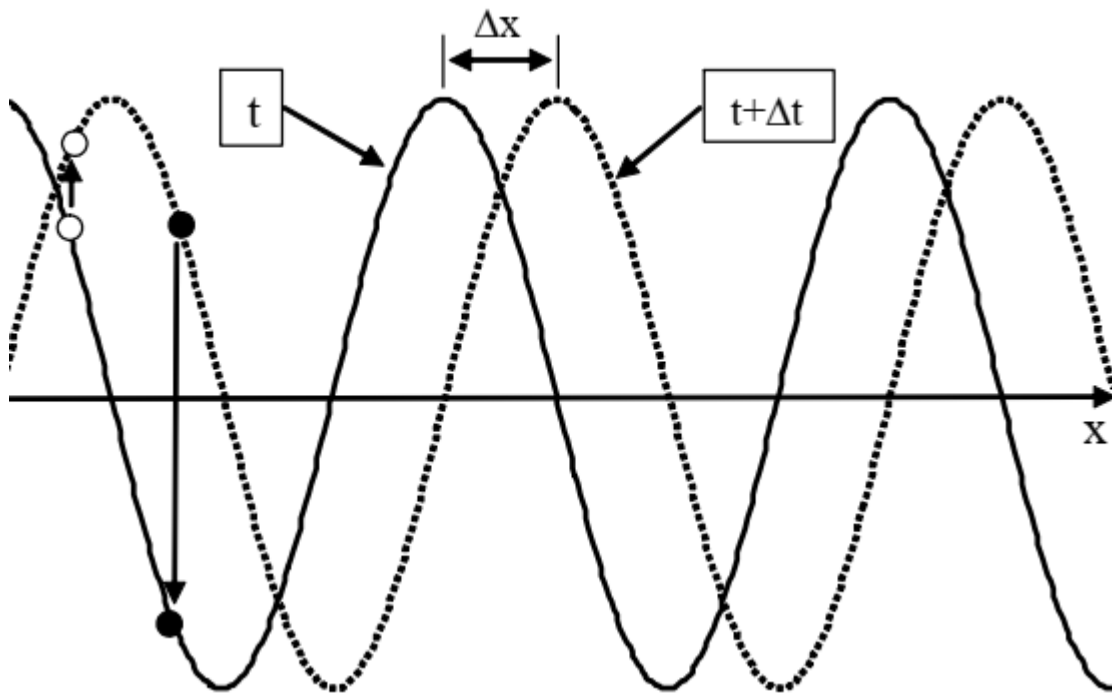
Soit encore

$$\omega \Delta t = k \Delta x \quad (\text{I.7})$$

On définit la vitesse de phase  $V_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  qui s'exprime en fonction de  $\omega$  et  $k$  par :

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} \quad (I.8)$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de  $\omega$ , le milieu est dit non dispersif. Dans le cas contraire il est dit dispersif. La figure ci-dessous permet d'illustrer la notion de vitesse de phase en considérant deux représentations à des instants différents d'une corde parcourue par une onde. La courbe continue représente l'ensemble des points de la corde à l'instant  $t$ . Le point de la corde d'abscisse  $x$  est représenté par le point blanc, tandis que le point d'abscisse  $x+\Delta x$  est représenté par le point noir. On constate qu'entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$  chacun de ces points suit une trajectoire rectiligne et le déplacement du point noir à l'instant  $t + \Delta t$  est égal au déplacement du point blanc à l'instant  $t$ . En particulier la crête de la corde, correspondant à une valeur particulière de la phase instantanée, semble se déplacer dans le sens de propagation de l'onde avec la vitesse de  $V_{\phi}$  mais la trajectoire de chaque point matériel est une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la direction de propagation ( Djelouah.h,2007).



*Figure I.6 : propagation d'une onde dans une corde ( Djelouah.h,2007).*

### I.5.3. Vitesse de groupe

La vitesse de phase  $V_{\phi}$  n'est pas nécessairement la vitesse que l'on observe lorsqu'on analyse un mouvement ondulatoire. En général une onde n'est pas parfaitement sinusoïdale mais a une durée limitée et se présente sous la forme d'un train d'onde appelé communément « pulse » ou « groupe » qui se propage avec une vitesse  $V_g$  appelée vitesse de groupe. Cette

onde sous la forme d'un pulse contient plusieurs fréquences. Si la vitesse de phase est indépendante de la fréquence (Milieu non dispersif) alors toutes les fréquences qui constituent le pulse se propagent à la même vitesse et le pulse se propage avec une vitesse de groupe égale à la vitesse de phase. Mais si le milieu est dispersif (la vitesse de phase dépend de la fréquence), alors le pulse se propage avec une vitesse de groupe différente de la vitesse de phase. Pour illustrer ce phénomène, considérons une onde constituée de deux ondes de fréquence différente et de même amplitude. En  $x = 0$ , cette onde s'écrit par exemple sous la forme :

$$S(0,t) = S_0 \cos(\omega_1 t) + S_0 \cos(\omega_2 t) \quad (\text{I.9})$$

Cette onde peut s'écrire encore

$$S(0,t) = 2S_0 \cos(\omega_B t) \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{I.10})$$

Où :

$$\omega_B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad (\text{I.11})$$

Si  $\omega_1$  est voisine de  $\omega_2$ , la vibration résultante se présente sous la forme d'une sinusoïde de pulsation  $\omega$  dont l'amplitude est modulée par un battement de pulsation  $\omega_B$  (Modulation d'amplitude).

En un point  $x > 0$ , l'onde obtenue résulte de la superposition de ces deux ondes qui se sont propagées à des vitesses différentes car le milieu de propagation est supposé dispersif :

$$S(x,t) = S_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + S_0 \cos(\omega_2 t + k_2 x) \quad (\text{I.12})$$

$S(x, t)$  peut s'écrire :

$$S(x,t) = 2S_0 (\cos(\omega_B t - k_B x) + \cos(\omega t - kx)) \quad (\text{I.13})$$

Dans cette expression :

$$k_B = \frac{k_2 - k_1}{2} \quad \text{et} \quad k = \frac{k_2 + k_1}{2} \quad (\text{I.14})$$

L'amplitude du battement se propage à une vitesse qui est la vitesse de groupe définie par la relation :

$$V_g = \frac{\omega_B}{k_B} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{I.15})$$

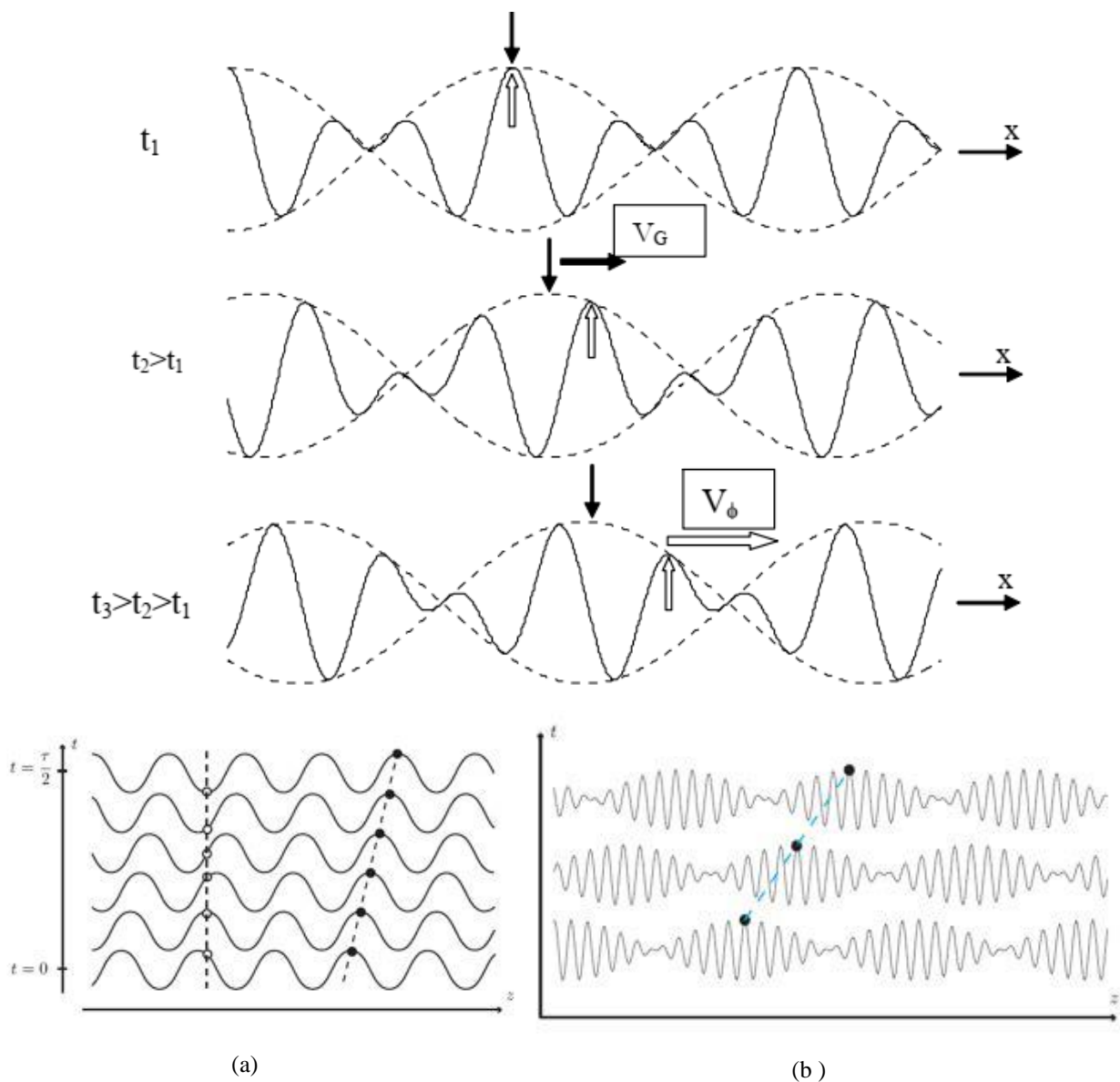
Comme  $\omega_2$  est peu différente de  $\omega_1$ , la vitesse de groupe est définie par :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{I.16})$$

Tandis que la sinusoïde contenue à l'intérieur du battement se propage à la vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (\text{I.17})$$

Les flèches verticales noires correspondent au maximum des battements qui se propagent à la vitesse de groupe. Les flèches verticales blanches correspondent au maximum des vibrations qui se propagent à la vitesse de phase (Djelouah.h, 2007).



**Figure I.7:** a) Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe (M. Nicolas 2010).

### I.5.4. Types de milieux de propagation

Il existe deux types de milieux (Boukli. H, 2015) :

#### a- Milieu dispersif :

La célérité de l'onde dépend des caractéristiques du milieu et de la longueur d'onde, telle que

$V_g = \frac{dw}{dk}$  Les composantes se propagent avec des vitesses de phase différentes. Toute fois si le

signal de l'onde n'est pas déformé il se compose d'un groupe d'ondes dont les fréquences se situent dans une bande très étroite. Nous avons dans ce cas, la vitesse du groupe  $V_g$  avec laquelle se déplace le groupe d'onde.

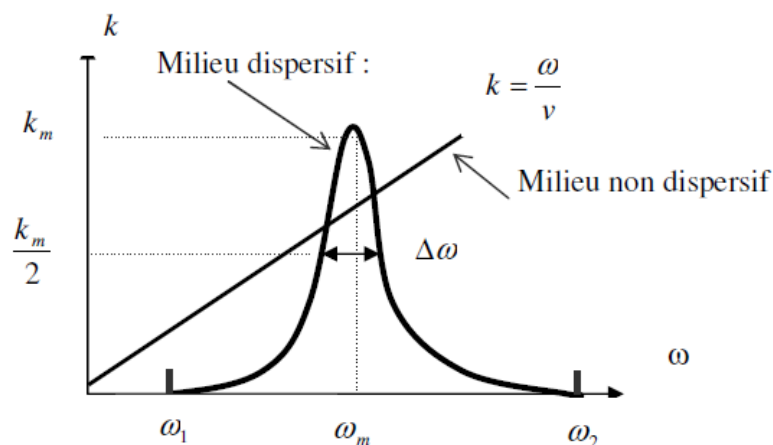
**Exemple:** ce phénomène se perçoit par exemple dans l'air lorsque l'amplitude est importante (dans le cas du tonnerre, les ondes de haute fréquences se propagent plus rapidement que les ondes de basse fréquence, l'air est dispersif)

#### b- Milieu non dispersif :

La célérité dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation, telle que

$k(\omega) = \frac{\omega}{V} = \text{constante}$ . Elle ne dépend pas de la fréquence, c'est le cas de la propagation des

ondes sonores dans l'air, toutes les composantes d'un son, quelque soient leurs fréquences, se déplacent à la même vitesse. C'est ainsi qu'on peut écouter de la musique sans déformation exécutée par un orchestre.



**Figure I.8 :** Courbes de dispersion (Boukli. H, 2015).

## I.6. Les équations générales de la propagation d'onde

### I.6.1. Équation d'Alembert

En physique, dans l'étude des ondes et de leur propagation, l'équation de d'Alembert décrit la variation dans le temps et dans l'espace d'une quantité ondulante. Elle est nommée d'après Jean le Rond d'Alembert qui l'énonça dans ses recherches sur les cordes vibrantes en 1747, comme solution du problème de la corde vibrante. C'est historiquement la première équation d'onde.

Soit  $\phi$  une quantité, scalaire ou vectorielle, dépendant de la position et du temps. Alors elle vérifie l'équation de d'Alembert lorsque :

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.19})$$

Avec  $\Delta$  l'opérateur Laplacien (vectoriel ou non) et  $v$  une quantité scalaire positive, appelée vitesse ou célérité de l'onde. On peut encore l'écrire, en introduisant l'opérateur d'Alembertien  $\square$ :

$$\square S = 0 \quad (\text{I.20})$$

Il s'agit d'une équation de conservation dans l'espace-temps : toute variation dans le temps est compensée par une variation dans l'espace. Elle néglige de fait tout effet diffusif et toute anisotropie. Cette relation étant linéaire, on peut montrer de plus qu'une onde vérifiant l'équation de d'Alembert n'est pas déformée au cours de sa propagation. C'est la plus simple des équations d'onde.

Les cas plus complexes ne peuvent plus être traités par l'équation de d'Alembert, mais par d'autres modèles comme les équations des télégraphistes par exemple. Leurs solutions ne sont toutefois pas triviales.

### I.6.2. Manifestations et résolution

Cette équation différentielle, linéaire, apparaît dans de nombreux phénomènes ondulatoires comme approximation au premier ordre. En particulier, d'Alembert l'appliqua aux mouvements de la corde vibrante.

On peut l'appliquer, moyennant certaines approximations, à l'étude des ondes dans les fluides. Pour la dérivation de l'équation des ondes acoustiques à partir de l'équation d'Euler des fluides parfaits, on pourra consulter le schéma très complet : équation d'Euler / équation des ondes,



### I.6.2.1. Solution générale de la propagation d'onde

Les solutions de l'équation de d'Alembert sont exactement les fonctions  $\phi$ , dont la projection sur chacun des axes de coordonnées est de la forme :

$$S_i(x_i, t) = f_+ \left( t - \frac{x_i}{v} \right) + f_- \left( t + \frac{x_i}{v} \right) \quad (\text{I.21})$$

avec  $x_i$  chacune des coordonnées,  $t$  le temps et  $v$  la vitesse de l'onde. Les deux fonctions  $f_+$  et  $f_-$  ne dépendent que d'une variable et sont définies à partir des conditions initiales.

Elles représentent respectivement une onde se propageant sans se déformer vers  $+\infty$  et une onde se propageant sans se déformer vers  $-\infty$ . La grandeur  $f_+(t - x/v)$  s'est donc propagée dans la direction des  $x$  croissants, appelée direction de propagation, sans déformation et à une vitesse  $v$ . La fonction  $f_-(t + x/v)$  correspond à une propagation vers les  $x$  négatifs. On parle pour  $f_+$  d'onde progressive et pour  $f_-$  d'onde régressive.

### I.6.2.2. Solutions harmoniques

L'équation d'Alembert étant par ailleurs linéaire, on peut sans restriction considérer uniquement les solutions sinusoïdales, dites harmoniques ou monochromatiques. En effet, toute configuration peut être ramenée à une somme de sinusoïdes par la transformée de Fourier.

Supposons l'onde unidimensionnelle, selon  $x$ , se propageant vers  $+\infty$ . On peut l'écrire :

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) \quad (\text{I.22})$$

Avec  $k$  le nombre d'onde,  $S_0$  l'amplitude et  $\omega$  la pulsation.

En dérivant deux fois par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\partial_x^2 S = -S_0 k^2 \cos(\omega t - kx) = -k^2 S \quad (\text{I.23})$$

En dérivant deux fois par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\partial_t^2 S = -S_0 \omega^2 \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 S \quad (\text{I.24})$$

Elle vérifie donc l'équation d'Alembert à la seule condition que :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (\text{I.25})$$

Avec :  $v$  et  $\omega$  sont des quantités positives, donc cela équivaut à :

$$k = \pm \frac{\omega}{v} \quad (\text{I.26})$$

Cette dernière relation est appelée relation de dispersion.

Appliquée aux conditions initiales, cette décomposition en sinusoides permet notamment l'étude analytique de la propagation des ondes, ou la simulation informatique de tels phénomènes.

## **I.7. Conclusion**

Nous avons défini, dans ce chapitre, le phénomène de propagation des ondes élastiques dans les milieux dispersif et non dispersif ; ensuite nous avons citée quelques éléments de la propagation des ondes telles que la fréquence, la vitesse de phase et vitesse de groupe ; ainsi les équations différentielle modélisant l'onde de propagation ; puis nous avons présentés les courbes de dispersion et les équations générales de la propagation des ondes.

**Chapitre II :****Notions de mécanique des solides****II.1. Introduction**

Ce chapitre expose les principales méthodes qui permettent d'obtenir les équations générales d'équilibre ou de mouvement d'une structure ainsi que les différentes approches et théories des plaques.

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait, également, des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants.

D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

Par ailleurs, la résolution des problèmes hyperstatiques, qui constituent l'essentiel des structures habituelles, fait appel aux calculs de déplacements.

Le déplacement de la section d'un élément de structure tel que plaque poutre peut être :

- une translation
- une rotation

Prenant l'exemple d'une poutre, dans le cas d'une telle structure horizontale fléchie dans le plan  $xy$ , l'axe des  $x$  étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe  $x$ , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe  $z$  (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

## II.2. Principe général d'équilibre - équations d'équilibre

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit en équilibre sont :

- a) les sommes des projections de toutes les forces sur 3 axes passant par un point quelconque et non situés dans un même plan doivent être nulles,
- b) les sommes des moments par rapport à chacun des trois axes doivent être nulles.

Pour une construction (structure), la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer comme un tout (corps rigide), autrement dit elle est en équilibre.

Soient  $oxyz$  un repère trirectangle et  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  les projections sur les axes  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$  d'une force quelconque. Les conditions d'équilibre (a) et (b) s'écrivent (cas général) :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M / x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M / y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M / z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Les équations (II.1) sont appelées équations d'équilibre de la statique ou six équations universelles d'équilibre.

Dans le cas d'un système plan,  $xy$  par exemple, le système d'équations (II.1) se réduit à :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M / \Delta = 0 \quad (\text{II.2})$$

où  $\Delta$  est un axe quelconque perpendiculaire au plan  $xy$ .

Notons que les équations d'équilibre de la statique sont écrites en travaillant sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire non déformée ; autrement dit les déformations sont négligées.

## II.3. Relations contraintes-efforts

Les efforts résultants et les moments agissant sur un élément de plaque (Figure II.1, II.2 et II.3) (Ait yahia, 2015).

$$\{N\} \equiv \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y) \\ N_y(x, y) \\ N_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.3})$$

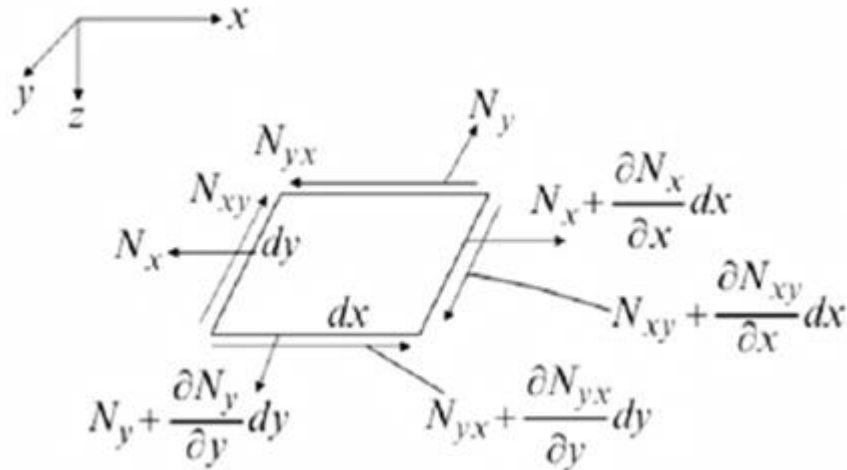


Figure.II.1: Efforts agissant dans le plan.

$$\{M\} \equiv \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} z dz \quad (II.4)$$

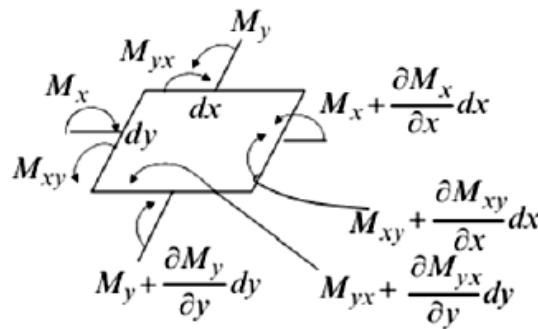
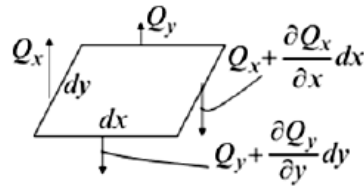


Figure.II.2: Moments agissant sur un élément.

$$\{Q\} \equiv \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, t) \\ \tau_{yz}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (II.5)$$



**Figure.II.3:** Efforts tranchants dans un élément

## II.4. Le potentiel interne et ses applications

Dans ce chapitre seront examinées les relations qui existent entre les sollicitations agissant sur un système et les déplacements qu'elles produisent.

Les systèmes considérés sont généralement plans (géométrie et chargement) mais les développements théoriques s'appliquent à tous les systèmes, sauf précision contraire (Ait yahia, 2015).

Pour garder à la théorie toute sa généralité, tout en simplifiant autant que possible les notations, nous désignerons une sollicitation par  $F$  (sollicitation généralisée), que ce soit une force  $P$ , un couple  $C$  ou une sollicitation globale  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ) et un déplacement par  $\delta$  (déplacement généralisé), que ce soit une translation  $\lambda$  (déplacement linéaire) ou une rotation  $\gamma$  (déplacement angulaire).

### II.4.1. Travail des forces extérieures et énergie de déformation

#### II.4.1.1 Notions de travail et de travail complémentaire

Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale  $F_1$  qui produit un allongement  $\delta_1$  (Figure.II.4a).

Nous supposons que la force  $F_1$  est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force  $F_1$  ici) est appliqué statiquement et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme " $F$ - $\delta$ " de la figure.II.4b.

Soit  $F$  une valeur intermédiaire et  $\delta$  l'allongement correspondant. A un accroissement  $dF$  de la charge correspond un allongement supplémentaire  $d\delta$ . Le travail élémentaire produit par  $F$  au cours de l'accroissement  $d\delta$  est défini par :

$$d\tau_e = Fd\delta \quad (\text{II.6})$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme  $F-\delta$  (Figure.II.4b).

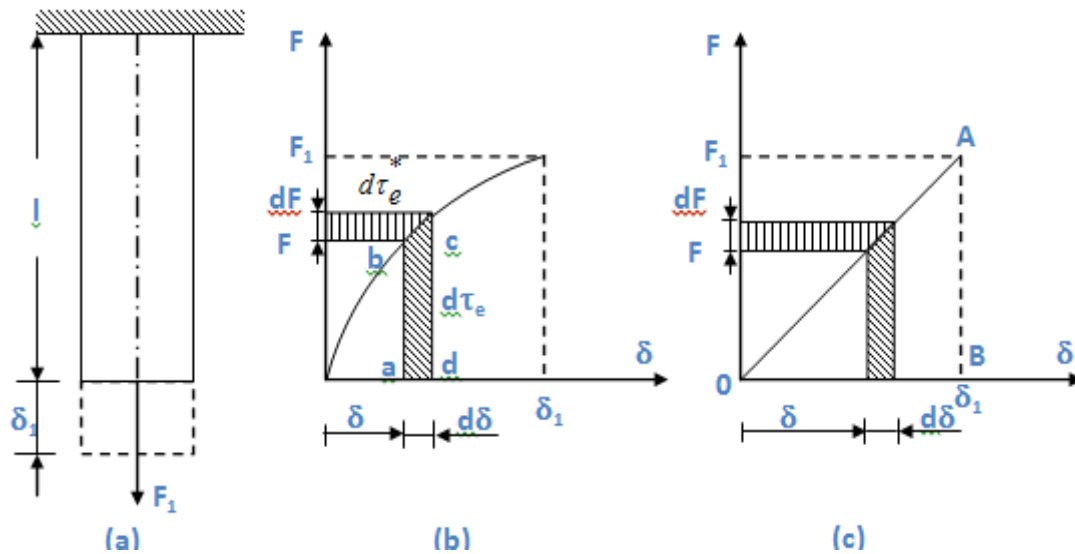


Figure.II.4: Diagramme  $F-\delta$  d'une barre prismatique.

Avec  $Fd\delta$ : représente plus exactement le rectangle "abcd". Autrement dit, le travail effectué par  $dF$  au cours du déplacement  $d\delta$ , qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, est négligé.

Le travail total effectué par la force  $F_1$  au cours du déplacement  $\delta_1$  est obtenu par sommation des travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} F d\delta \tag{II.7}$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe  $F-\delta$  et l'axe des  $\delta$  jusqu'à  $\delta_1$ .

De même, on appelle travail complémentaire élémentaire du déplacement  $\delta$  au cours de l'accroissement de charge  $dF$  la quantité :

$$d\tau_e^* = \delta dF \tag{II.8}$$

Le travail complémentaire total effectué par  $F_1$ , appliquée graduellement de 0 à  $F_1$ , au cours du déplacement  $\delta_1$  est donné par :

$$\tau_e^* = \int_0^{F_1} \delta dF \tag{II.9}$$

C'est l'aire à gauche de la courbe  $F-\delta$ .

### II.4.1.2. Énergie et énergie complémentaire de déformation

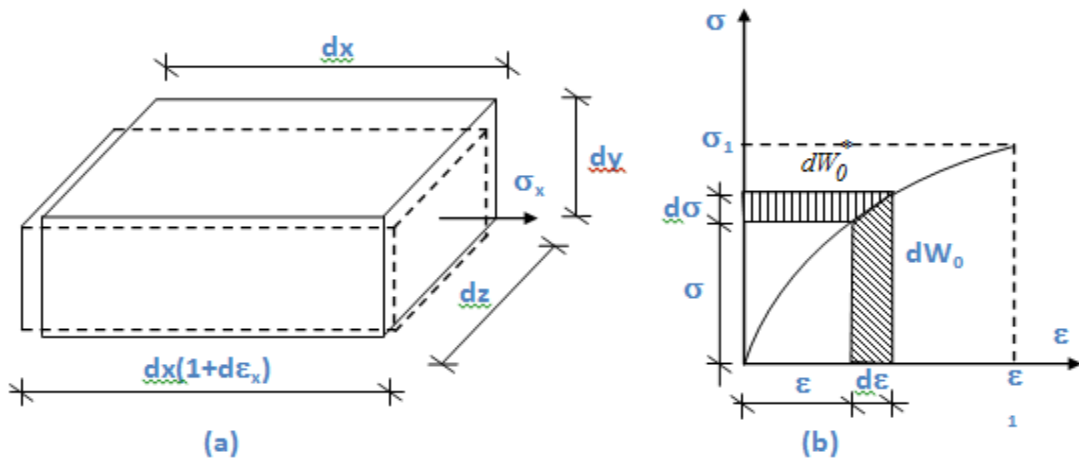
Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures (Ait yahia, 2015).

Ce travail interne, changé de signe, est désigné par énergie potentielle de déformation ( $W$ )

$$(-\bar{\pi} = W).$$

Isolons un élément  $dv = dx dy dz$  du corps considéré. L'énergie élémentaire emmagasinée dans  $dv$  se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément  $dv$ . Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire  $\sigma_x dy dz$  au cours de la variation  $d\varepsilon_x$  de la déformation  $\varepsilon_x$ , qui produit le déplacement  $\Delta dx = d\varepsilon_x dx$ , vaut :

$$dW = \sigma_x dy dz d\varepsilon_x dx = \sigma_x d\varepsilon_x dv \quad (\text{II.10})$$



**Figure.II.5 :** Énergie de déformation d'un corps élémentaire.

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément  $dv$  :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.11})$$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps ( $v$ ) vaut :

$$W = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.12})$$



Considérons un diagramme contrainte-déformation unidirectionnel (unidimensionnel) (Figure.II.5.b). On a :

$$dW_0 = \sigma d\varepsilon \quad (\text{II.13})$$

Cette quantité a l'unité d'une énergie par unité de volume. L'intégrale :

$$W_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (\text{II.14})$$

est appelée densité de l'énergie de déformation et est représentée par l'aire comprise entre la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  et l'axe des  $\varepsilon$ . Remarquons qu'on a :

$$W = \int_v dW_0 dv \quad (\text{II.15})$$

De même, l'énergie complémentaire élémentaire produite par un accroissement  $d\sigma_{ij}$  des contraintes au cours des déplacements produits par les déformations  $\varepsilon_{ij}$  correspondantes vaut :

$$dW^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (\text{II.16})$$

Et pour la totalité du volume du corps :

$$W^* = \int_v \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (\text{II.17})$$

On a aussi :

$$dW_0^* = \varepsilon d\sigma \quad \text{et} \quad W_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (\text{II.18})$$

## II.4.2. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire

### a) Travail d'une force

Revenons au cas de la traction d'une barre prismatique du paragraphe II.4.1.1. Si la relation entre  $F$  et  $\delta$  est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (petits déplacements), c'est-à-dire quand on a à tout moment du chargement la relation (Figure II.4c)

$$F = k\delta \quad (k = \text{constante}) \quad (\text{II.19})$$

le travail total devient :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} k\delta d\delta = \frac{1}{2} k\delta_1^2 \quad (\text{II.20})$$

et comme :  $F_l = k\delta_l$ , il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \quad (\text{II.21})$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle  $OAB$  (Figure II.4c).

Remarquons que dans le cas de l'élasticité linéaire, on a :  $\tau_e = \tau_e^*$ .

### **b) Généralisation**

Si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ ) et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{II.22})$$

Il faut rappeler qu'on suppose que :

- le chargement est statique (les mises en charge sont lentes),
- le matériau a un comportement élastique linéaire (loi de Hooke vérifiée),
- les déplacements n'affectent pas l'action des charges (hypothèse des petits déplacements, pas d'effets du second ordre).

### **c) Travail des réactions**

Si les appuis sont indéformables, le travail fourni par les réactions au cours de la déformation du système est nul puisque le déplacement d'un appui double ou d'un encastrement dans le sens de la réaction est nul et que le déplacement d'un appui simple est perpendiculaire à la réaction. Dans le cas d'appuis élastiques, les relations (II.21) et (II.22) restent valables pour les réactions.

### **d) Énergie potentielle de déformation**

Dans le domaine élastique linéaire, la relation contrainte-déformation ( $\sigma_{ij}-\varepsilon_{ij}$ ) est linéaire et comme dans le travail, le facteur 1/2 apparaît dans l'expression de l'énergie (Figure II.7).

Ainsi, le travail fait par la force  $\sigma_x dydz$  au cours de la déformation  $\varepsilon_x$  qui provoque une variation de longueur  $\Delta dx = \varepsilon_x dx$  est :

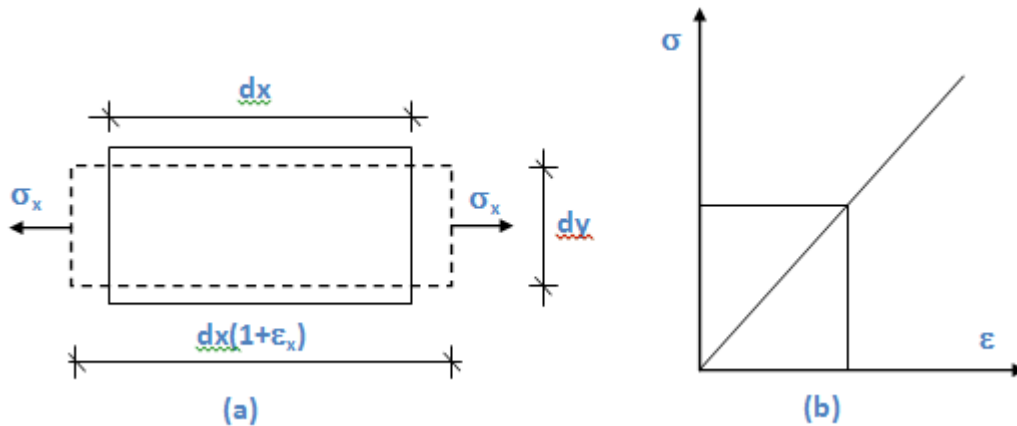
$$dW = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv \quad (\text{II.23})$$

Pour toutes les contraintes agissant sur  $dv$  en aura (en notation indicielle)

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.24})$$

Et

$$W = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.25})$$



**Figure II.6:** Relation linéaire de contrainte-déformation ( $\sigma_{ij}$ - $\varepsilon_{ij}$ ).

Dans le cadre de l'élasticité linéaire on a :  $W = W^*$ .

#### II.4.3. Principe de la conservation de l'énergie

De manière générale, quand un corps est soumis à des charges extérieures, ces charges effectuent un travail extérieur qui se transforme en énergie potentielle interne (qui déforme le corps), en énergie cinétique et en chaleur qui se dissipe lors des frottements.

Supposons maintenant que :

- a) les charges extérieures sont appliquées statiquement (pas d'énergie cinétique),
- b) les frottements dans le corps sont nuls (pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur) c'est-à-dire que le corps considéré est parfaitement élastique,
- c) les frottements dans les appuis sont nuls (pas de dissipation d'énergie), alors tout le travail extérieur se transforme en énergie potentielle de déformation, c'est-à-dire qu'on a :

$$\tau_e = W \quad (\text{II.26a})$$

Dans ce cas, on dit que le système (corps + appuis + charges) est conservatif et le travail, ou l'énergie de déformation, puisque  $\tau_e = W$ , ne dépend pas de l'ordre dans lequel les forces sont

appliquées mais uniquement de leur intensité finale. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le travail dépendait de l'ordre d'application des forces, on pourrait le charger d'une certaine manière et le décharger d'une autre manière de façon à réaliser un gain. Après plusieurs cycles, l'énergie ainsi gagnée ferait exploser le corps, ce qui est absurde.

Si les charges cessent d'agir, l'énergie emmagasinée dans le corps lors du chargement sera restituée sous forme de travail qui va ramener le corps à son état initial (Ait yahia, 2015).

En plus des hypothèses -a- b- et -c- ci-dessus nous admettrons dans ce qui suit que :

d) le matériau vérifie la loi de Hooke (matériau élastique linéaire),

e) les déplacements sont suffisamment petits et n'affectent pas l'action des charges (pas d'effets du second ordre).

Il arrive quelquefois que le système, dans son état initial, c'est-à-dire avant toute application de charges, soit déjà assujéti à des efforts internes et des déformations élastiques. C'est le cas notamment des systèmes hyperstatiques dont les appuis subissent des déplacements (appuis non concordants), des systèmes hyperstatiques soumis à des effets thermiques, au phénomène de retrait dans les structures en béton, des effets des défauts de montage, etc.

Dans un cas pareil, le système possède déjà à l'état initial une énergie élastique ( $W_i$ ) emprisonnée dans le corps et qui ne peut se libérer que dans des conditions particulières. Les efforts et les déformations qui seront produits par les forces extérieures vont s'ajouter aux efforts et à déformations existantes. Dans ce cas, l'énergie de déformation est égale au travail des forces extérieures qui se transforme en énergie élastique interne plus l'énergie élastique initiale, d'où :

$$\tau_e + W_i = W \quad (\text{II.26b})$$

Les résultats (II.26) sont parfois désignés par théorème de Clapeyron.

#### II.4.4. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie de déformation) en fonction des efforts  $N$ ,  $M$ ,  $T$  et  $Mt$  dans une poutre (droite ou courbe) de longueur  $l$ . Considérons un tronçon de poutre  $dx$  ( $ds$ ) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur  $dx$ .

## a) Effort normal

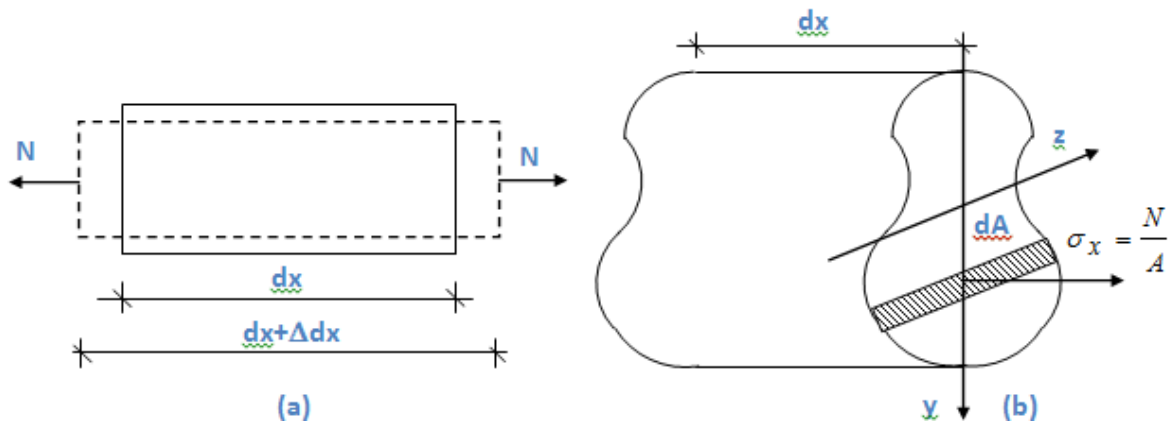


Figure II.7: Relation des contraintes-effort normal.

Sous l'effet des contraintes d'effort normal, le tronçon  $dx$  subit une variation de longueur  $\Delta dx$  définie par :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx \quad (\text{II.27a})$$

Comme dans le cas de l'effort normal on a  $\sigma_x = N/A$ , il vient :

$$\Delta dx = (N/EA)dx \quad (\text{II.27b})$$

L'énergie emmagasinée dans le couche  $dA \cdot dx$  se calcule comme le travail effectué par la force  $\sigma_x \cdot dA$  au cours du déplacement  $\Delta dx$ , d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{A} dA \right) \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} dA dx \quad (\text{II.28})$$

La notation  $d^2W$  est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire.

L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon  $dx$  s'obtient par intégration sur l'aire  $A$  de la section :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA^2} \int_A dA = \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{II.29})$$

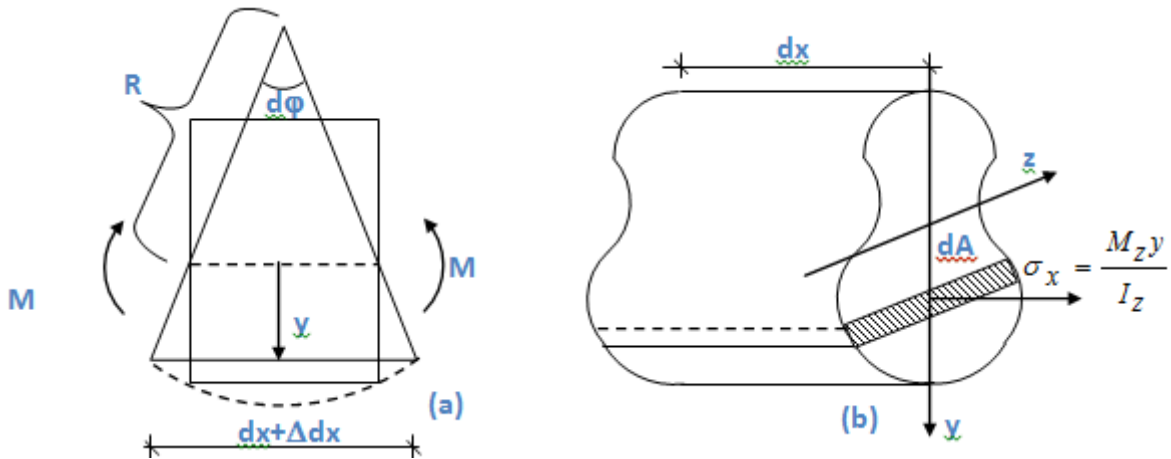
Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx \quad (\text{II.30})$$

### b) Moment fléchissant

Considérons la couche  $dAdx$ . Sous l'effet des contraintes de flexion, la couche subit une variation de longueur :  $\Delta dx = \varepsilon_x dx = (\sigma_x/E) dx$ . Compte tenu de la relation de Navier, il vient :

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \Delta dx = \frac{M_z y}{EI_z} dx \quad (\text{II.31})$$



**Figure.II.8 :** Relation de moment de flexion

L'énergie emmagasinée dans la couche  $dAdx$  vaut :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M_z y}{I_z} dA \right) \frac{M_z y}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dAdx \quad (\text{II.32})$$

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon  $dx$  :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 dx}{EI_z^2} \int_A y^2 dA = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (\text{II.33a})$$

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur  $l$  :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad (\text{II.33b})$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (II.33a) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx \quad (\text{II.33c})$$

**c) Effort tranchant**

L'énergie emmagasinée dans un tronçon  $dx$  soumis à un effort tranchant  $T_y$  vaut :

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx \quad (\text{II.34a})$$

Et pour toute la poutre :

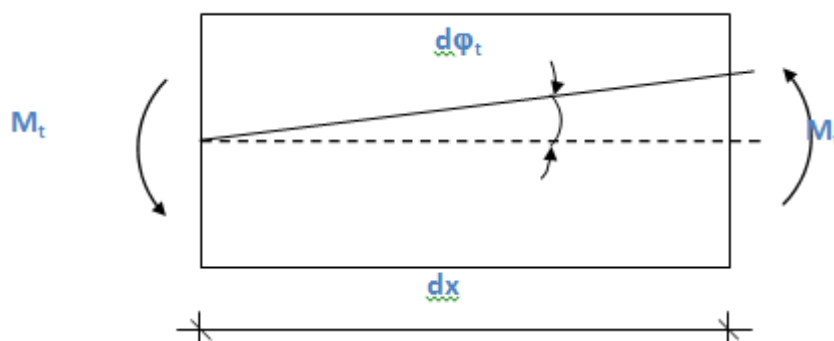
$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx \quad (\text{II.34b})$$

Si la poutre est soumise à  $T_y$  et  $T_z$  on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \quad (\text{II.34c})$$

**d) Moment de torsion**

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon  $dx$  soumis à un moment de torsion  $M_t$  est donné par (figure. II. 9) :



**Figure.II.9** : Relation de moment de torsion.

$$d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_p} dx \quad (\text{II.35})$$

Où :

- $q$  est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ( $q \approx 40I_p^2/A^4$ ). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.
- la quantité  $C = GI_p/q$  est désignée par rigidité à la torsion (ou rigidité torsionnelle).

L'énergie emmagasinée dans le tronçon  $dx$  se calcule comme le travail effectué par  $M_t$  lors du déplacement  $\varphi dt$  :

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx \quad (\text{II.36})$$

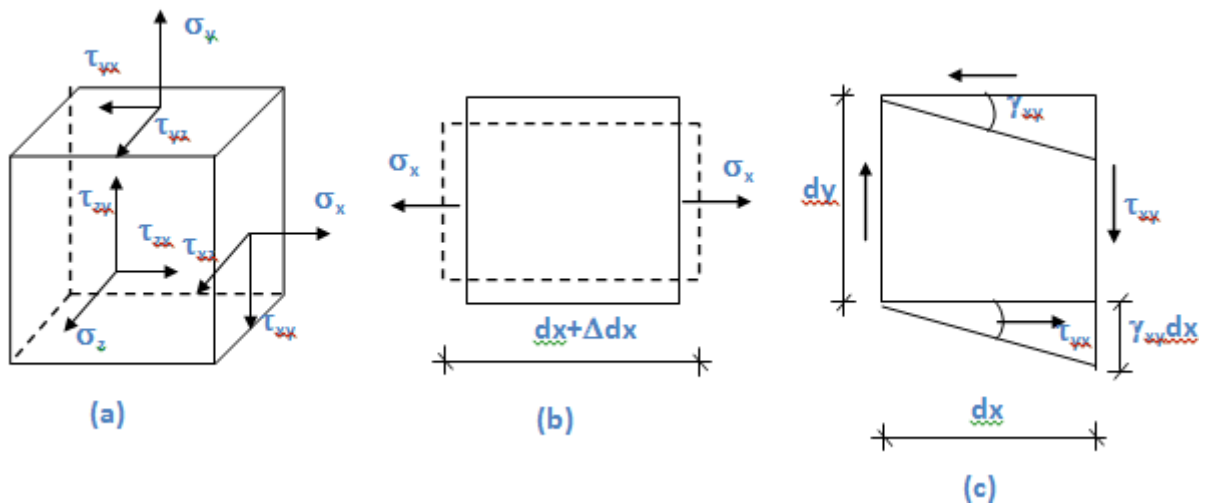
Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{II.37})$$

#### II.4.5. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation

Isolons à l'intérieur d'un corps élastique un élément  $dv = dxdydz$  suffisamment petit pour pouvoir admettre que les contraintes ne varient pas sur les facettes de l'élément.

Calculons l'énergie emmagasinée dans l'élément  $dv$  lorsqu'il est soumis à l'ensemble des contraintes (Figure.II.10a).



*Figure.II.10b: Relation d'énergie potentielle de déformation.*

Le travail de déformation de la force  $\sigma_x dydz$  au cours du déplacement  $\Delta dx = \varepsilon_x dx$  (Figure.II.10b) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x dydz) \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dxdydz \quad (\text{II.38})$$

Pour l'ensemble des trois contraintes normales, on applique le résultat (II.22), d'où :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dxdydz \quad (\text{II.39})$$

où  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  sont les déformations longitudinales et peuvent être exprimées en fonction des contraintes normales à partir de la loi de Hooke généralisée.



Les déformations provoquées par les contraintes normales et tangentielles étant indépendantes, si outre les contraintes normales il y a des contraintes tangentielles, il suffit d'ajouter leur effet.

Le travail de la force  $\tau_{xy}d_yd_z$  lors du déplacement  $\gamma_{xy}dx$  (Figure.II.10.c) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy}d_yd_z)\gamma_{xy}dx = \frac{1}{2} \tau_{xy}\gamma_{xy}dxdydz \quad (\text{II.40})$$

En présence de toutes les contraintes, il vient :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz \quad (\text{II.41})$$

L'énergie potentielle de déformation de tout le corps s'obtient par sommation sur le volume entier :

$$W = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dv \quad (\text{II.42})$$

L'expression de  $W$  peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée.

Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations  $N$ ,  $M$ ,  $T$  et  $M_t$ , l'expression de  $W$  s'obtient en ajoutant les expressions (II.30), (II.33), (II.34) et (II.37) :

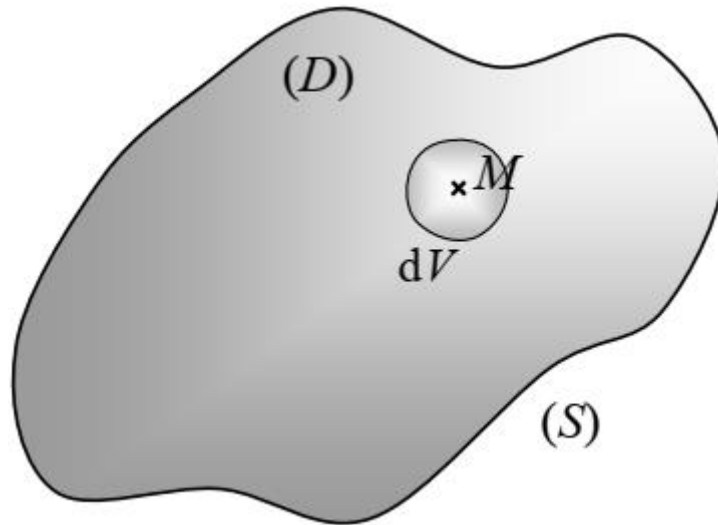
$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{II.43})$$

Notons que cette dernière expression ne découle pas de l'application du principe de superposition, qui n'est pas applicable puisque l'énergie n'est pas reliée linéairement aux sollicitations. La relation (II.43) s'obtient par sommation des contributions de chaque sollicitation du fait que le déplacement provoqué par une des sollicitations ne provoque pas de travail de la part des autres sollicitations (déplacements indépendants).

Si le système comporte "n" barres, la relation (II.43) s'applique à chacune d'elles.

#### II.4.6. L'énergie des quantités d'accélération

Soit ( $D$ ) un domaine d'un milieu continu, de frontière ( $S$ ) (figure II.11), dans le cas d'un ensemble déformable en mouvement.



**Figure II.11 :** Domaine d'un milieu continu.

Les forces volumiques (par exemple forces de pesanteur, d'inertie, etc.) qui s'exercent dans tout le volume, caractérisées par la densité de force  $f$  par unité de volume ; Le travail des forces volumiques s'écrit

$$\delta W_V = \int_V \vec{f} \delta \vec{u} dV = \int_V f_i \delta u_i dV \quad (\text{II.44})$$

Et l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{II.45})$$

L'énergie cinétique d'un solide (II.45) s'écrit :

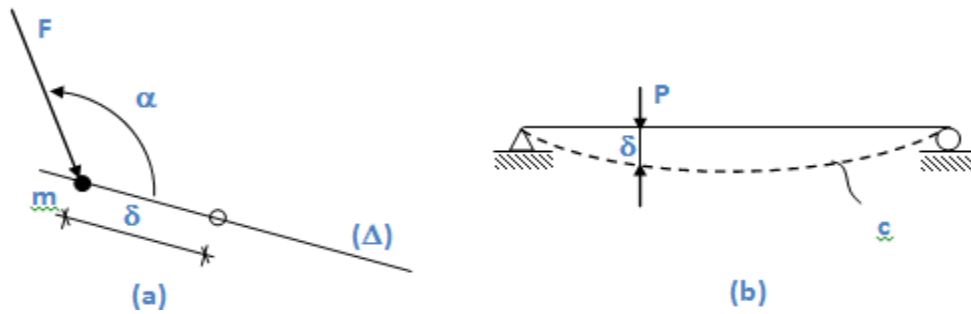
$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (\text{II.46})$$

Les composantes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  du vecteur accélération s'exprime en fonction de la

composante  $(u, v, w)$  du vecteur déplacement respectivement et  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide.

#### II.4.7. Travail Virtuel

Considérons une particule  $m$  soumise à une force  $F$  (Figure.II.12). Donnons à  $m$  un déplacement  $\delta$  suivant la direction  $\Delta$ .



**Figure.II.12** : Système élastique force-déplacement  $F$ - $\delta$ .

Au cours du déplacement de la particule  $m$ , la force  $F$  effectue un travail égal, en valeur absolue, au produit de la composante de  $F$  agissant dans la direction  $\Delta$  par le déplacement  $\delta$ .

$$\tau_v = F \cos \alpha \cdot \delta \quad (\text{II.47a})$$

Ce travail, d'où le  $1/2$  a naturellement disparu car la force  $F$  avait déjà atteint sa valeur finale au moment de l'application du déplacement  $\delta$ , est appelé travail virtuel de  $F$  dans le déplacement virtuel  $\delta$ . Si les sens du déplacement  $\delta$  et de la composante de  $F$  suivant la direction de  $\delta$  sont concordants, le signe du travail est positif, dans le cas contraire il est négatif.

Considérons maintenant le système élastique simple de la figure.II.12.b et imposons lui une déformation représentée par la courbe  $c$ . Au cours de la déformation, la force  $P$ , dont le point d'application se déplace de  $\delta$ , effectue un travail virtuel de la forme (eq.II.47), avec  $\alpha = 0$  dans le cas présent.

$$\tau_v = P \cdot \delta \quad (\text{II.47b})$$

Précisons qu'on entend par déplacement virtuel tout petit déplacement possible. Petit par rapport aux dimensions du système, donc comparable aux déplacements réels. Possible, c'est-à-dire compatible avec les liaisons extérieures (appuis) et intérieures du corps. Peu importe la manière utilisée pour produire le déplacement virtuel (Ait yahia, 2015).

De manière plus générale, si un système supportant la sollicitation  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ), subit un déplacement virtuel qui impose à chaque force ( $F_i$ ) un déplacement ( $\delta_i$ ) suivant sa direction, le travail virtuel total effectué au cours du déplacement virtuel s'écrit :

$$\tau_v = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{II.47c})$$

## **II.5. Les différentes approches appliquées aux matériaux fonctionnels**

Les matériaux composites multicouches possèdent un comportement complexe et difficile à comprendre liés aux problèmes de modélisation des structures avec une forte anisotropie. Donc, la modélisation des structures composites multicouches est toujours un sujet à discuter qui sollicite des théories capables de décrire leurs comportements statique et dynamique complexes avec précision. En effet, les structures composites multicouches (épaisses,) requièrent des théories raffinées capable de donner une bonne description de la distribution de la déformation et contrainte du cisaillement à travers leurs épaisseurs et notamment aux interfaces. De plus, le cisaillement transversal joue un rôle primordial lors de la conception de la structure multicouche car il est la cause des différents types de rupture, comme le délaminage. Des modèles tridimensionnels sont souvent utilisés pour bien tenir en compte de l'effet de l'interface des structures en matériaux composites multicouches, cependant ces derniers sont très coûteux en termes de temps de calcul, en plus, ils sont aussi limités à certains cas simples.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches. Ces modèles permettent de réduire le problème d'élasticité 3D en 2D; en considérant un champ de déplacement continu suivant l'épaisseur avec également une continuité de déformation entre les différentes couches.

## **II.6. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles:**

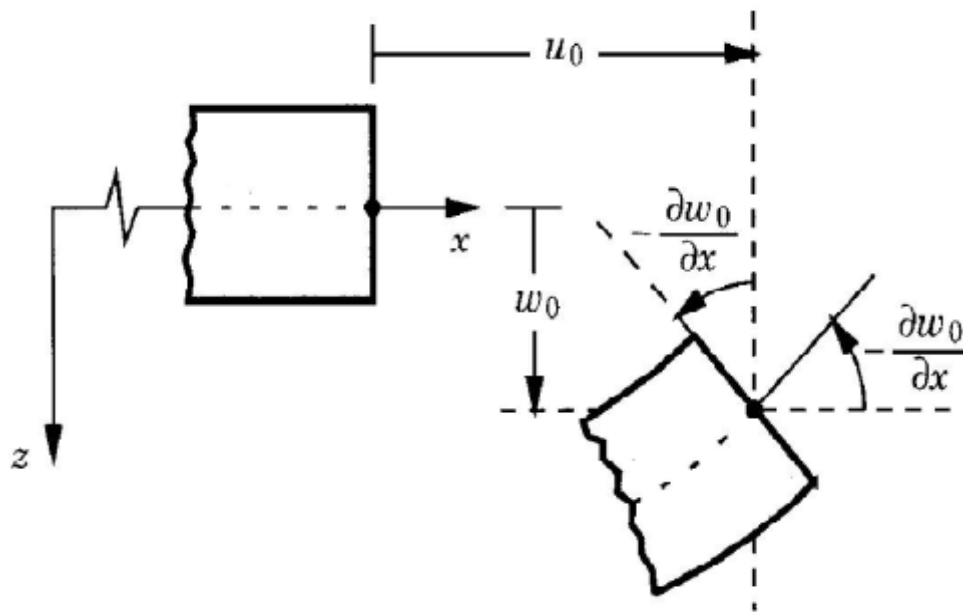
### **II.6.1.Approches monocouche équivalente:**

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, dans cette approche, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme une seule couche statiquement équivalente. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir des cinématiques où les champs de contraintes plus raffinés.

#### **II.6.1.1.La théorie classique des plaques minces de love- kirchhoff (CPT):**

Le développement de la théorie des poutres d'Euler -Bernoulli aux plaques est connu comme la théorie des plaques de (Kirchhoff 1950) Figure.II.13 ou de la théorie classique de la plaque (CPT). La théorie classique de la plaque est celle dans laquelle le champ de déplacement est basé sur l'hypothèse Kirchhoff, qui se compose des trois parties suivantes:

- 1- Les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane (les normales transversales) avant déformation restent droites après déformation.
- 2- Les normales transversales ne subissent pas élongation (ils sont inextensibles).
- 3- Les normales transversales tournent de telle sorte qu'ils restent perpendiculaires à la surface du milieu après déformation. Ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse (Cugnoni 2004).



**Figure.II.13:** Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 2004)

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit alors:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.48.a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.48.b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.48.c})$$

Avec:

$u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  le déplacement de membrane dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sur le plan moyen de la plaque ( $z=0$ )

$w_0$  : la flèche de la plaque,

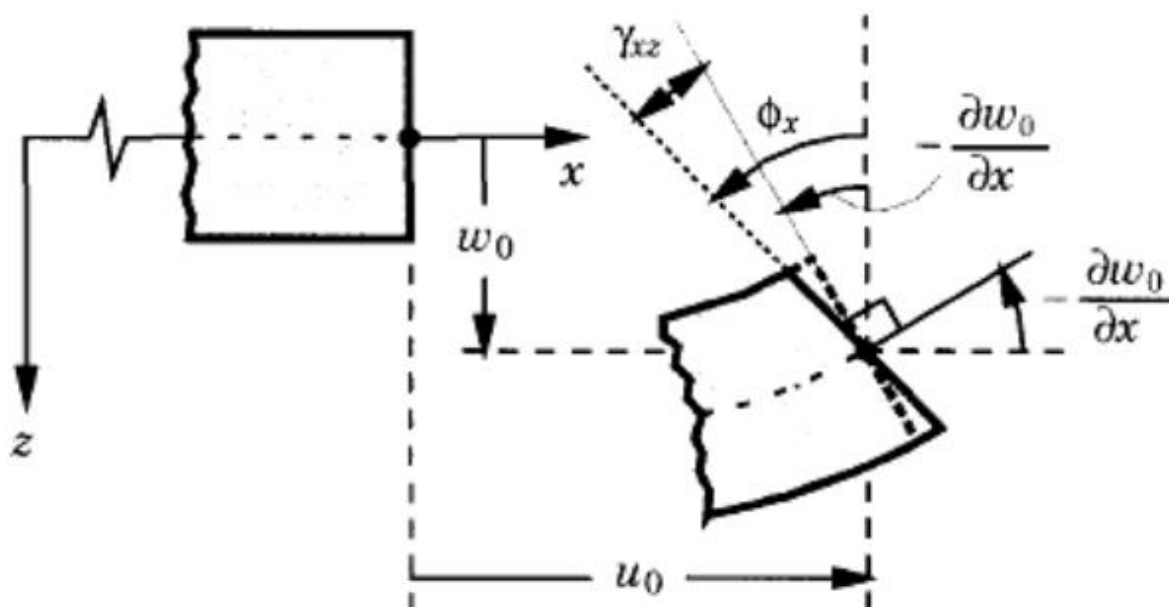
$\frac{\partial w_0}{\partial x}$  : la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan  $x, y$ , et l'épaisseur  $h$  est orienté selon l'axe

$z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$  Puisque l'effet de cisaillement transverse ne tient pas en compte dans ce modèle, la précision de la théorie CLPT n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces.

### II.6.1.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT:

Les modèles élaborés selon la théorie FSDT, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement, les études sur la théorie FSDT peuvent être référées dans (Reissner 1945, Henky 1947, Mindlin 1951) ainsi que (Timoshenko et WoinowskyKrieger 1959, Reddy1997, Reddy 1999)



**Figure. II .14:** Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner (Reddy 2004)

Le champ du déplacement de la théorie FSDT est défini par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \quad (\text{II.49.a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \quad (\text{II.49.b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.49.c})$$

La théorie de FSDT donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige d'introduire des facteurs de correction de

cisaillement , ces facteurs dépendent des propriétés constitutives de la couche, le dispositif de stratification et le type de structure " comme les conditions aux limites et la géométrie"(Ochoa1992); pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

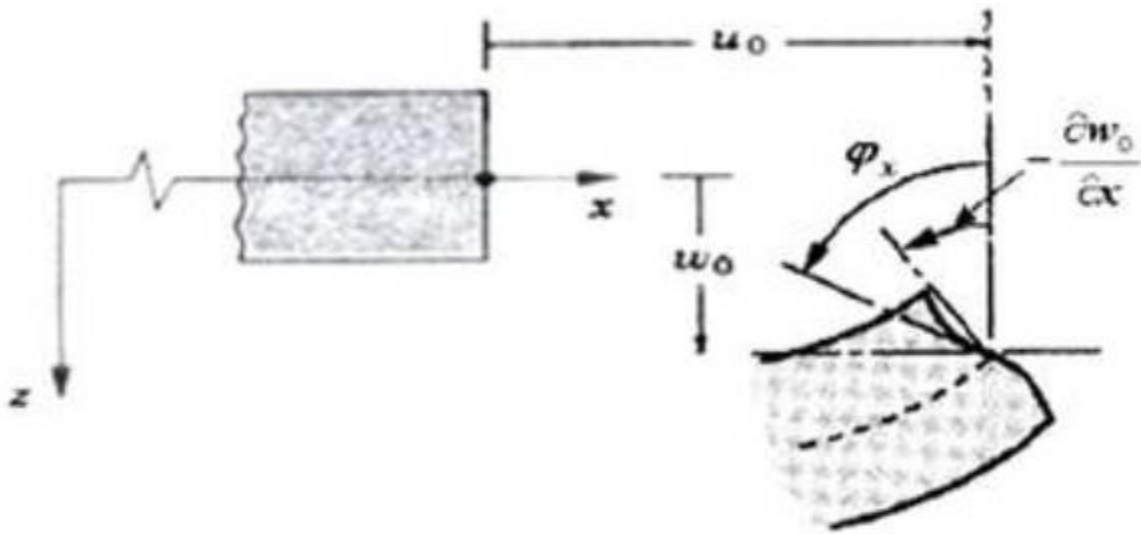
### II.6.1.3. La théorie de déformation en cisaillement ordre élevé HSDT:

Pour passer les limites des théories de CPT et FSDT et pour assurer la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur, la plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor. Des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme. (Nguyen *et al*,2004);

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)} + z^3\phi_i^{0(3)} + z^4\phi_i^{0(4)} + \dots \quad (\text{II.50})$$

A Partir de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur  $\phi_i^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j=2,3,4\dots$

Les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre de développement c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand 1949; Naghdi 1957 ; Reissner 1975; Reddy 1984 ; Kant et Swaninathan 2002).



**Figure.II.15:** Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy 1997)

La forme du champ de déplacement proposée à travers l'épaisseur est la suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{II.51.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{II.51.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.51.c})$$

Avec:  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement,  $\left( \phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$  et  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z)=z$ . Le modèle de HSDT a été développé par (Ambartsumyan 1969) dans lequel il donne une fonction de cisaillement transversal sous la forme:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.52})$$

Selon la fonction de cisaillement  $f(z)$ , nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont décrites comme suit:

- L'approche de Reissner (1945), avec:



$$f(z) = \left( \frac{5}{4}z - \frac{5z^3}{3h^2} \right) \quad (\text{II.53})$$

L'approche de Levinson, (Murthy 1981 ; Reddy 1997 ; Reddy 1999) avec ;

$$f(z) = \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \quad (\text{II.54})$$

Dans le modèle de Reddy (1984), le champ de déplacement membranaire est cubique, ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Duong 2008), la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur, les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (1991) propose le modèle "sinus", il utilise une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur, cette fonction s'écrit comme ci-dessous:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \quad (\text{II.55})$$

Les contraintes de cisaillement transverse prennent une forme cosinus à travers l'épaisseur de la plaque. La version exponentielle de la théorie de déformation d'ordre élevé a été proposée par Afaq et al(2003), où la fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.56})$$

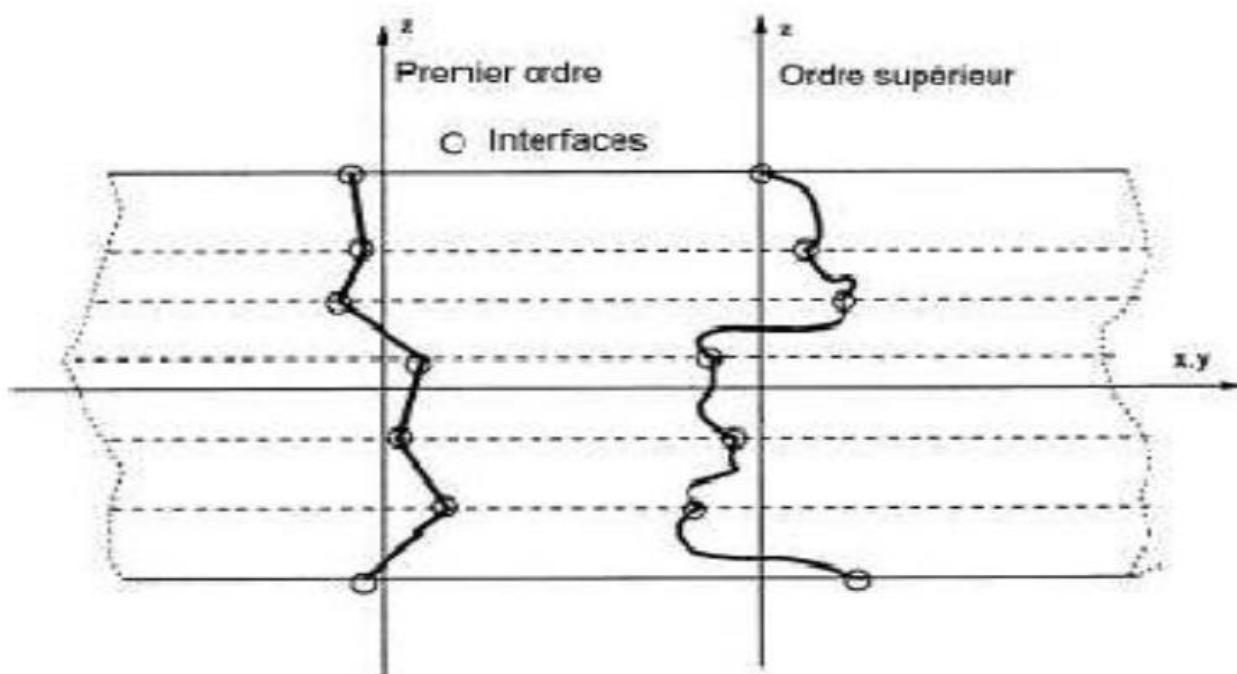
L'approche d'Ait Atmane (2010)

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) * z - \left(\frac{h}{\pi}\right) * \sinh\left(\left(\frac{\pi}{h}\right) * z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \quad (\text{II.57})$$

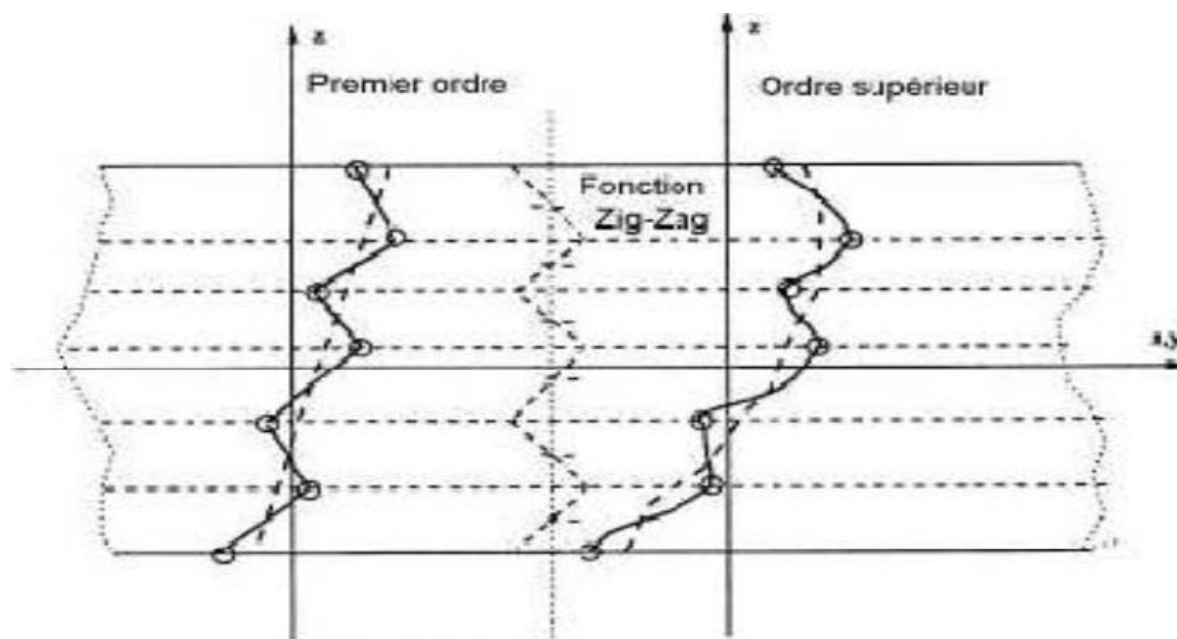
### II.6.2. Approche par couche

L'approche par couche est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Chabot 1997 ; Carrera 2000 ; Afaq 2003 ; Reddy 1984 ; Di Sciuva 1987). D'une façon générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux catégories: les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact

est indépendante du nombre de couches, et les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces. (figures.II.16 et II.17).



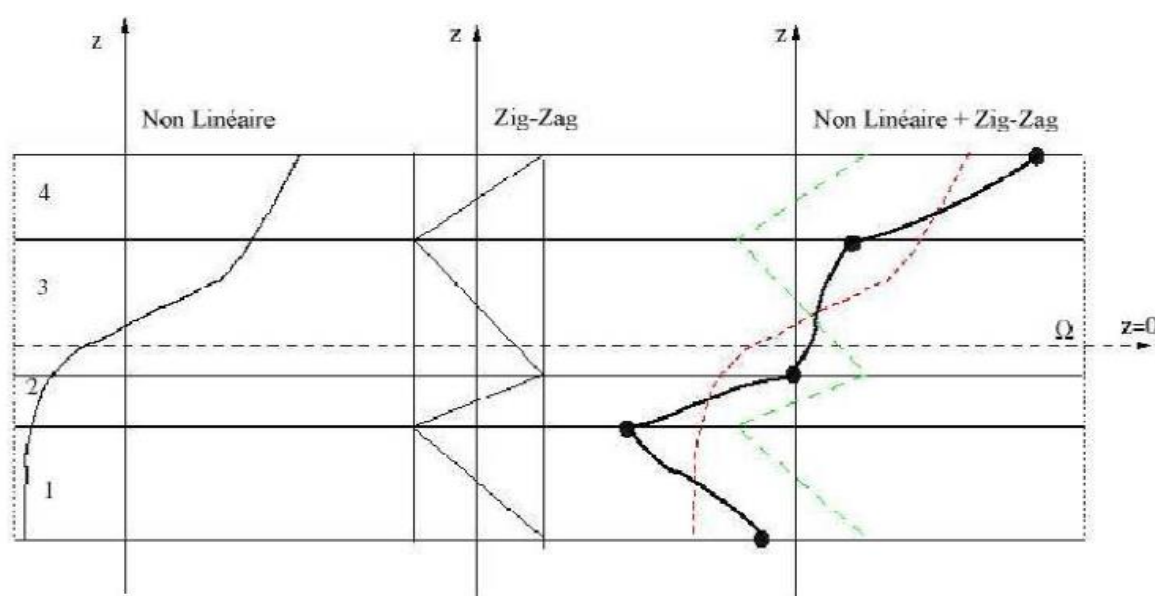
**Figure.II.16:** Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique  
(Nguyen 2004)



**Figure.II.17:** Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique  
(Nguyen et al 2004)

### II.6.2.1. Les modèles zig-zag:

Di Sciuva (1987) a proposé le modèle de zig-zag du premier ordre. Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, où les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside), cette dernière donne une contribution des déplacements membranaires qui sont continus en  $z$ , mais sa première dérivée est discontinue à l'interface (Figure.II.18). La continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée, et les déformations transversales sont donc discontinues.



*Figure.II.18: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen 2004)*

### II.6.2.2. Les modèles couches discrètes:

Ces modèles adoptent une approximation plus fine des champs à travers l'épaisseur du multicouche que les approches décrites précédemment puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. Avec le modèle couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaque (2D) couplés par des efforts d'interface, le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite, les conditions de continuité aux interfaces sont assurées.

Le champ de contraintes dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche, les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. (Kassapoglou 198), dans les contraintes planes sont supposées constantes à travers l'épaisseur, et le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables

séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Dans (Yin 1987), pour déterminer les contraintes inter laminaires, des fonctions de contrainte sont utilisées par couche, les contraintes sont approximées de façon polynomiale à travers l'épaisseur. La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité, (Nguyen 2004).

### **II.6.3. Modèles éléments finis de structure multicouche:**

Les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples, mais pour les cas compliqués, plusieurs méthodes numériques ont été développées. La méthode des éléments finis est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

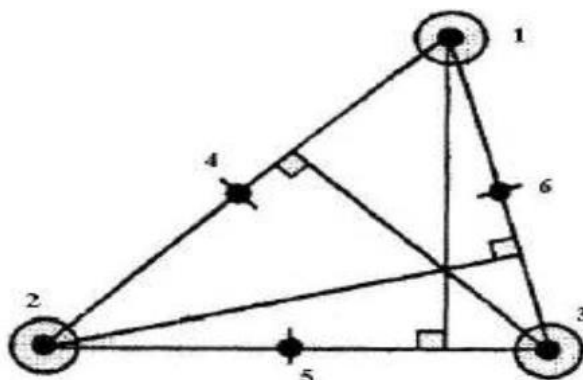
#### **II.6.3.1 Modèles éléments finis 2D**

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction (Reddy 1980 ; Ganapathi 1997). Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grace à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité, les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer (Nguyen 2004).

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée

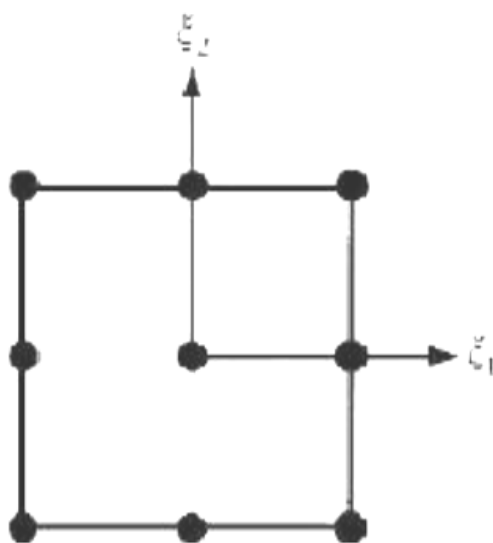
seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants.

En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier (1991), différents éléments finis quadrilatères et triangulaires sont considérés. L'élément triangulaire développé par Polit (1997) est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds, la continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure.II.19.

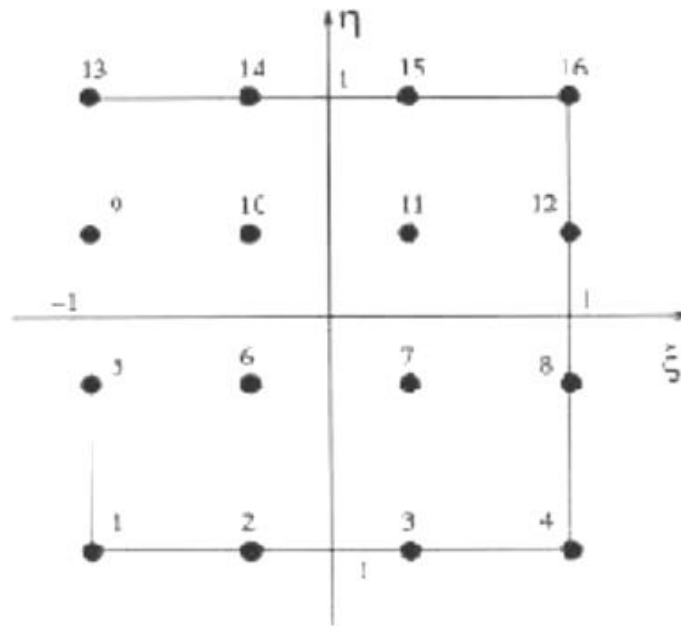


**Figure.II.19:** Éléments « sinus » triangulaire 6 nœuds (Polit, 1997).

Les travaux de (Shankara 1996 ; Khare, 2004), ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures.II.20 et II.21). Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:



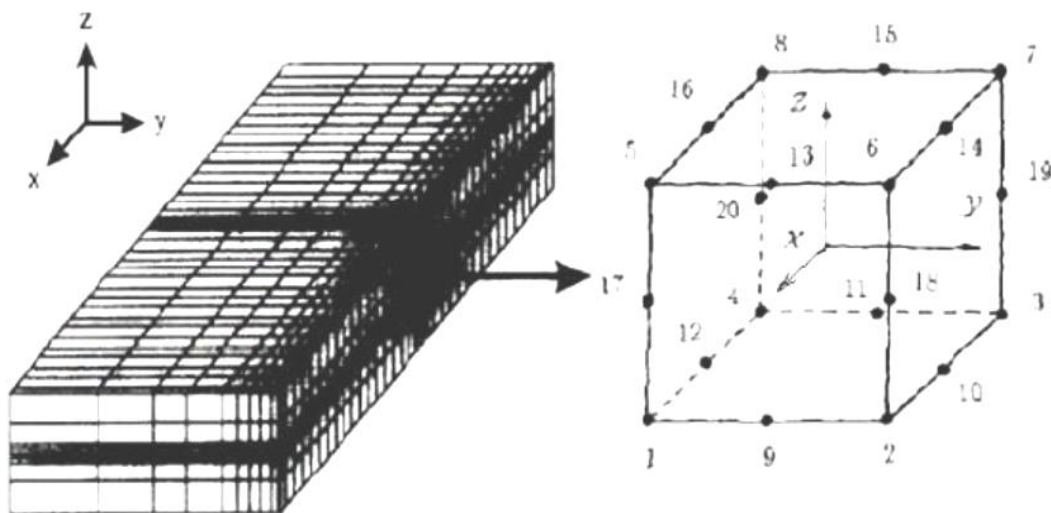
**Figure.II.20:** Éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 nœuds (Nguyen 2004).



**Figure.II.21:** Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds

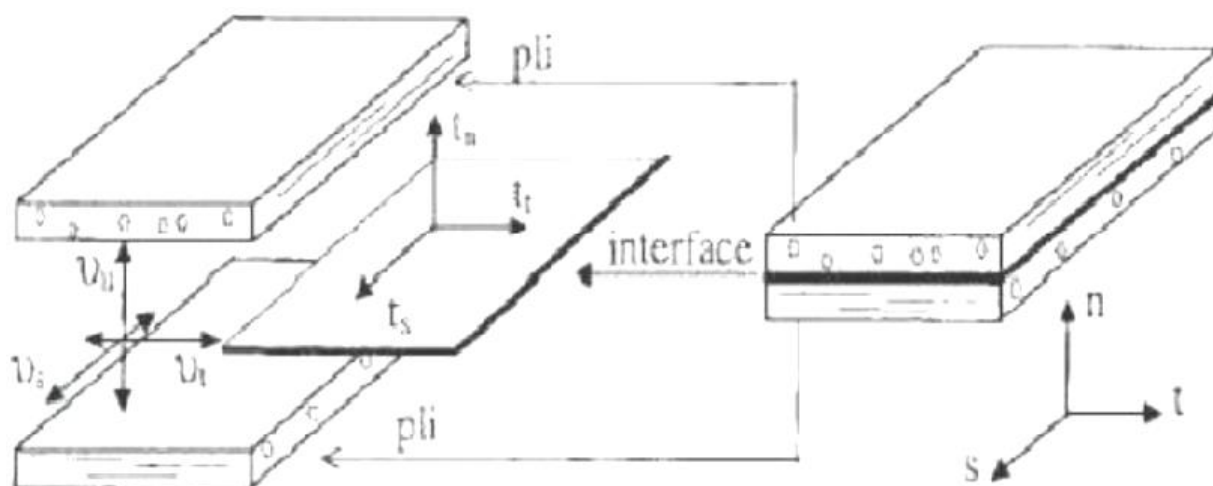
**II.6.3.2.Modèles éléments finis 3D**

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso-paramétrique 20 nœuds de Raju(1981) sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure.II.22.



**Figure .II.22:** Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires (Nguyen 2004)

Dans (Bui 2000) les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénéralisant continuellement l'épaisseur d'un élément de plaque mince vers zéro (voir Figure.II.23). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.



**Figure.II.23:** Élément d'interface. (Bui 1999)

## II.7. Accommodation de l'approche monocouche avec les matériaux FGM

Dans la littérature, on trouve que l'approche de la monocouche équivalente (ESL) est l'approche la plus fréquente. Cette approche considère le stratifié hétérogène comme une seule couche homogène équivalente, et permet ainsi de donner une réponse globale et précise du comportement de la multicouche (flèche transversale, fréquence propre, charge critique, etc.). De plus, cette approche est distinguée par un nombre de variables indépendant du nombre de couches. Dans l'approche monocouche équivalente, on adopte, le plus souvent des modèles en déplacement, en prenant une forme du champ de déplacement comme une combinaison des fonctions inconnues et des coordonnées concernant l'épaisseur

Puisque les matériaux FGM à l'échelle macroscopique sont considérés comme des matériaux isotrope, l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour ces matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas diverger. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

## II.8. Conclusion

Dans cette partie de la thèse ; nous avons présenté les principes énergétiques pour la résolution des problèmes structuraux , on commençant par le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre puis nous avons exposé les relations fondamentales dans la structure tel que les relations contraintes-déformations, le potentiel interne et ses applications.

Les différentes théories des plaques ont été décrit à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche. D'après les travaux faits, Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques, il peut être considéré comme matériau homogène à l'échelle macroscopique ; contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème inévitable.



## **Chapitre III :**

### **Présentation du matériau d'étude -matériaux FGM-**

#### **III.1. Introduction**

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

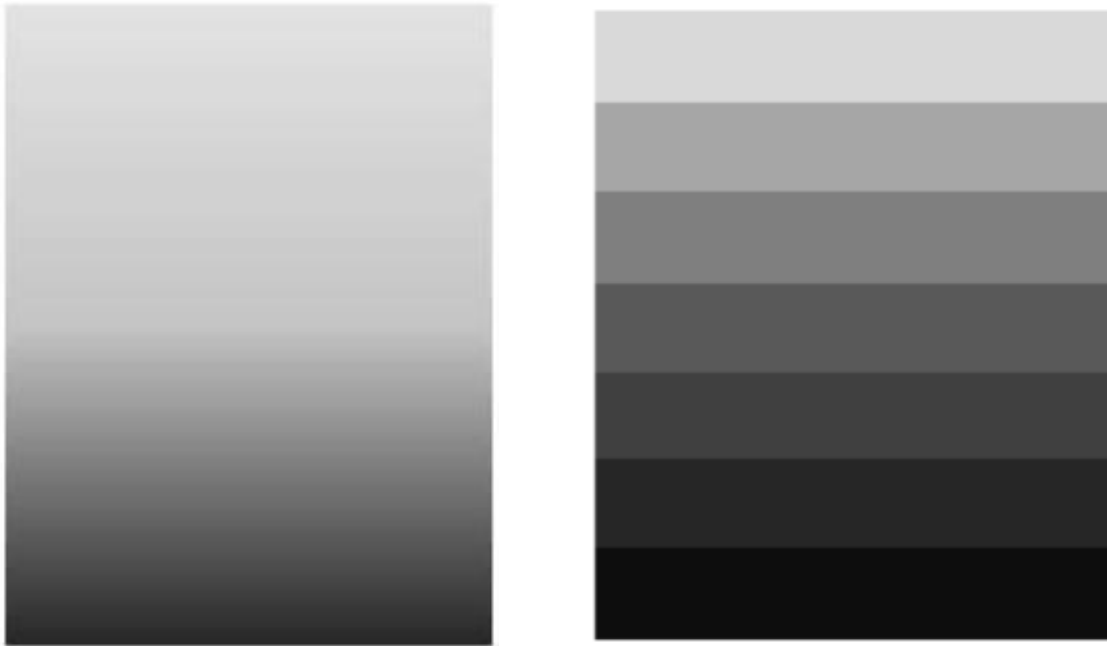
Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un sur-échauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le

fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier. La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil (Baron et Naili 2008).

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

### **III.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués**

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure III.1) ou discrète (figure III.2) à travers l'épaisseur (Hirai 1996). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.



**Figure.III.1** : Variation continue propriétés    **Figure.III.2** : Variation discrète des propriétés

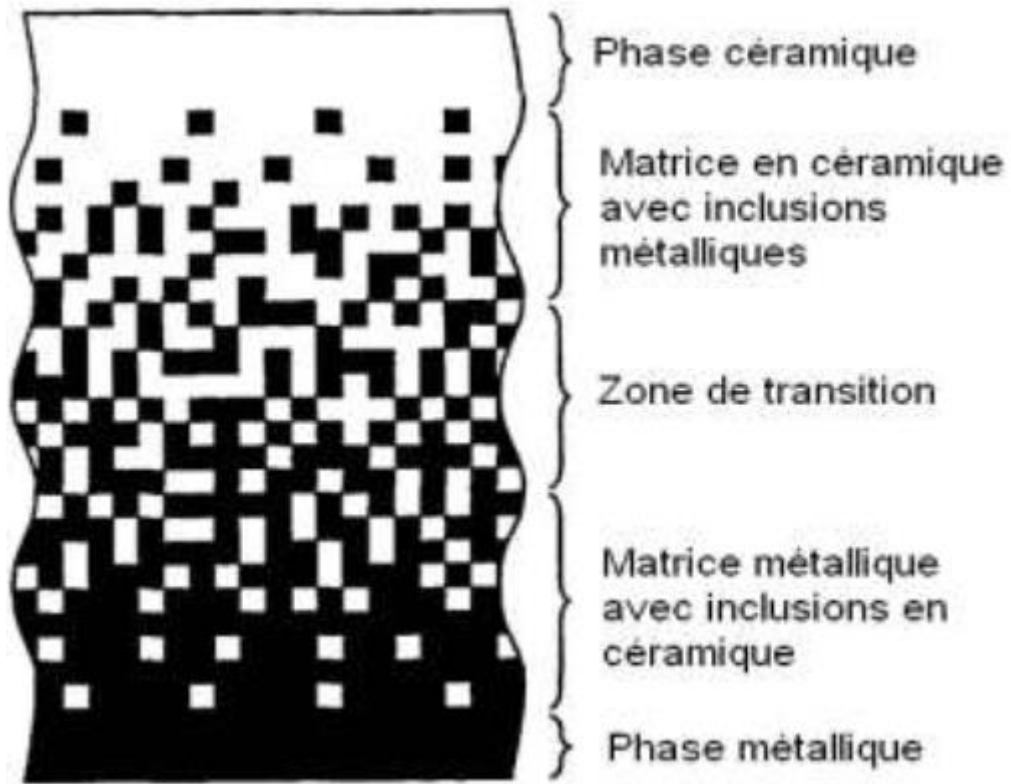
La variation continue des propriétés (figures III.3 et III.4) trouve son application lorsque par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.



*Figure. III.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée)*



*Figure III.4: Variation continue de la microstructure*

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu (Jian, Hashida et al. 1995, Kawasaki et Watanabe. 1997). La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans ce qui suit.

### III.3. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

#### III.3.1. Propriétés physiques de l'aluminium

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

**Propriétés physiques :** L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

Résistance à la traction.

Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

La malléabilité (mises en feuilles).

La ductilité (mise en fils).

**Propriétés des alliages d'aluminium :** L'Aluminium a pour propriétés une :

Température de travail élevée.

Très bonne résistance à la corrosion.

Légèreté.

Très bonnes solidités, dureté et rigidité.

Bon rapport force/poids.

Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.

Bonne conductivité thermique.

Conductivité électrique élevée.

Bonnes caractéristiques de finition.

Entièrement recyclable.

**Résistance à la corrosion:** Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### III.3.2. Propriétés physiques de la céramique

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

**Propriétés physiques :** La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

**Propriétés des céramiques :** Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression =200 MPa).

### III.4. Exemples de secteurs d'application des composites

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie, ont permis de produire des matériaux fonctionnellement gradués, utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microscopique, et la composition matérielle. Le concept du FGM est applicable à de

nombreux domaines. Dans les applications d'ingénierie à des outils de coupe, des composants du moteur, et des pièces de machines, grâce à des propriétés incompatibles telles que légèreté, liberté de forme, résistance à la chaleur et l'usure, la résistance à la corrosion ainsi que la ténacité et l'usinage sont incorporés dans une seule pièce. Quelques-unes des applications des FGM sont discutées ci-dessous:

#### **III.4.1. Secteur de la construction civile**

L'utilisation des matériaux composites dans la construction civile est un nouveau pas qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. Le problème majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. (Menail 2009). Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone résistent aux séismes. L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité. (Ait Atmen 2011)

#### **III.4.2. Secteur de la médecine**

Watari et al.(2003) ont présenté une technique pour la fabrication d'implants dentaires en titane et hydroxyapatite en céramique. La base de l'implant a été faite de l'hydroxyapatite à insérer dans la mâchoire. L'implant était en titane gradué vers le haut, afin de recevoir la prothèse dentaire. L'expérience a montré le tissu osseux succès croissant autour de l'insert. L'implant a été produit par une graduation de titane et hydroxyapatite en poudre dans un moule en caoutchouc de silicone qui a été soumise à une pression isostatique à froid et ensuite fritté dans un four. Chu et al. (1999) ont également étudié les FGM avec le titane et hydroxyapatite et les résultats ont montré que l'amélioration des propriétés mécaniques de l'implant a été obtenue et aucun problème inter faciale n'a été détecté. Kumar et Maruno (2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité. Les couches de verre et de verre/zircone graduée ont été utilisées pour enrober l'alumine substrats par Vitale Brovarone et al. (2001). La graduation était nécessaire en raison du coefficient de dilatation différent et l'incompatibilité entre le substrat et les revêtements. Les revêtements fournis une bonne biocompatibilité et l'alumine fourni de bonnes propriétés mécaniques (Hopkinson 2006, Saiyath 2015).

### **III.4.3. Secteur de l'aérospatiale et l'automobile :**

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, Le secteur de l'aérospatiale a montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale Aboudi et al (2000) ont présenté l'utilisation des FGM pour adapter la réponse des composants structurels par la théorie d'ordre élevé. L'objectif était d'analyser la performance du gradient par la modélisation de la microstructure en utilisant le modèle de l'élément fini (FEM). Des travaux ultérieurs présentés par Arnold (2001) appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales (Hopkinson 2006, Saiyath 2015).

Bhatt (2000) a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine. Le nitrure de silicium supporte des températures élevées, mais a un coût de traitement élevé et faible résistance aux chocs. En utilisant des technologies SFF, la métallurgie des poudres et la coulée de gel ont été étudiés comme des alternatives pour produire des pièces viables.

### **III.4.4. Secteur de l'industrie :**

Le développement des matériaux composites, avec la possibilité de modifier leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy. L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique, particulièrement gradient à matrice d'aluminium, ont été utilisés dans des applications importantes dans l'industrie tels que l'emballage électronique, les ensembles de frein de rotor dans l'industrie automobile et les matériaux de blindage (Saiyath 2015).

### **III.4.5. Articles de sports :**

Les matériaux composites répondent bien aux exigences sportives, malgré un coût relativement élevé, divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de



l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance, Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques etc..... Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports (Hopkinson 2006, Saiyath 2015).

### III.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen 2009)

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \cdot V_i \quad (\text{III.1})$$

Avec  $P_i$  et  $V_i$  sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant  $i$ , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{III.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

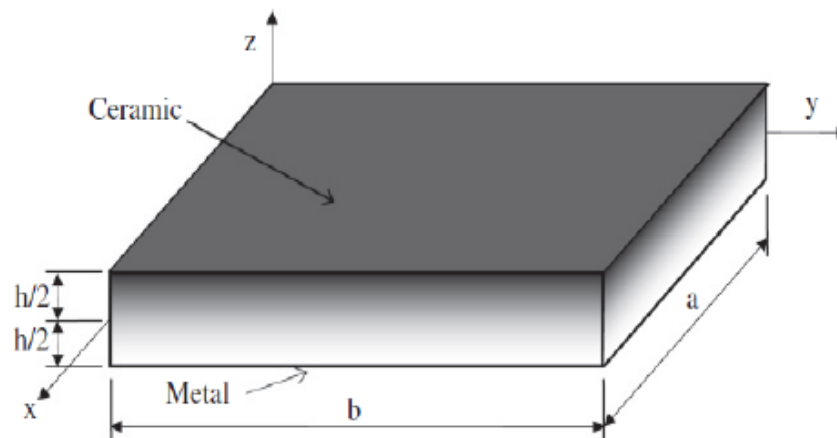
$$p = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{III.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à

l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure.III.5:** La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$  et  $\nu = \nu(z)$ .

Jin et Batra (1996) indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### III.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

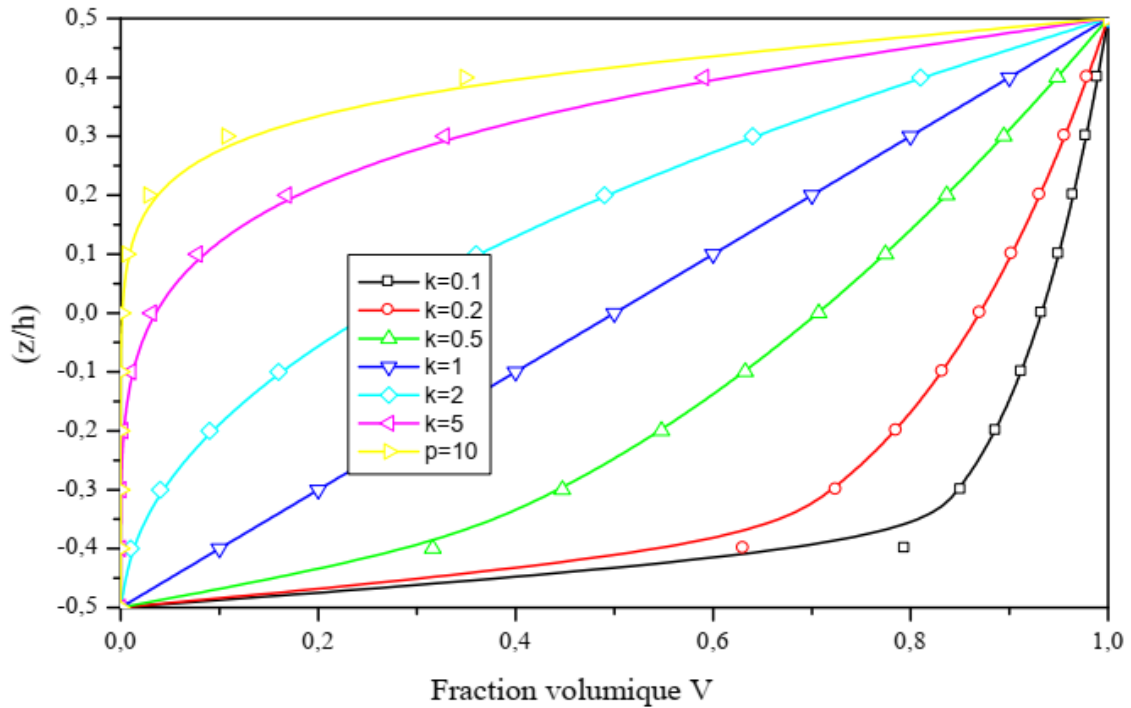
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.5})$$

Où  $p$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995)

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \times V(z) \quad (\text{III.6})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure  $z=-h/2$  et de la surface supérieure  $z=h/2$  de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure III.6. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure.III.6:** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

### III.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.7a})$$

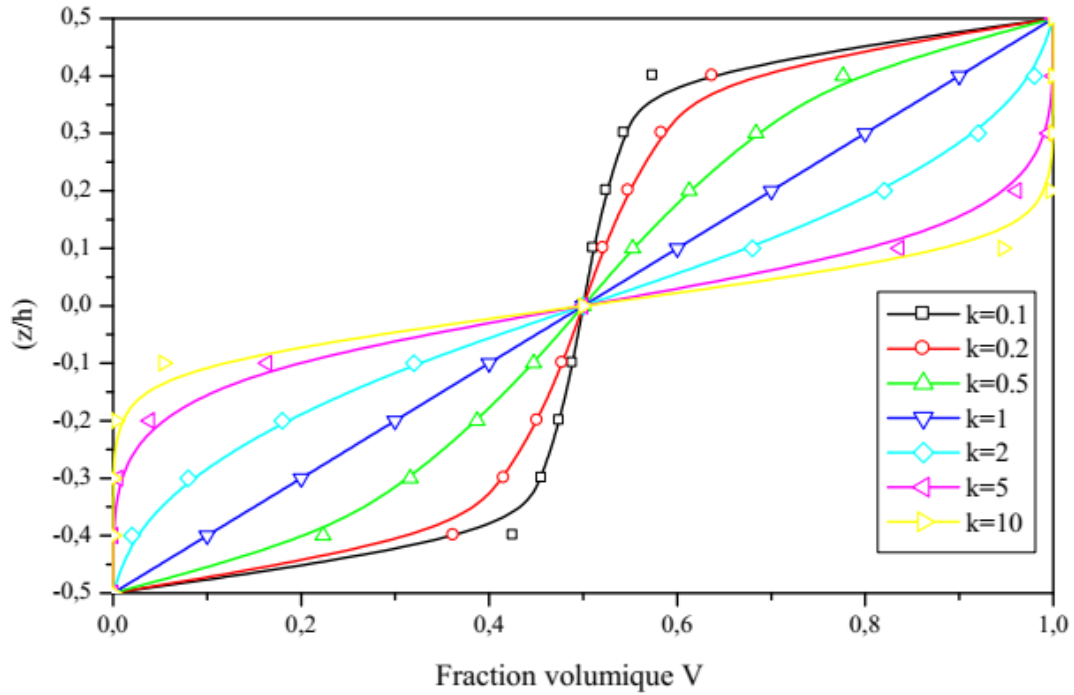
$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.7b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young et la masse volumique de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$P(z) = g_1(z) P_c + [1 - g_1(z)] P_m \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.8a})$$

$$P(z) = g_2(z) P_c + [1 - g_2(z)] P_m \text{ for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.8b})$$

La figure III.7 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (III.8-a) et (III.8-b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-fgm).



**Figure III.7:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

### III.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

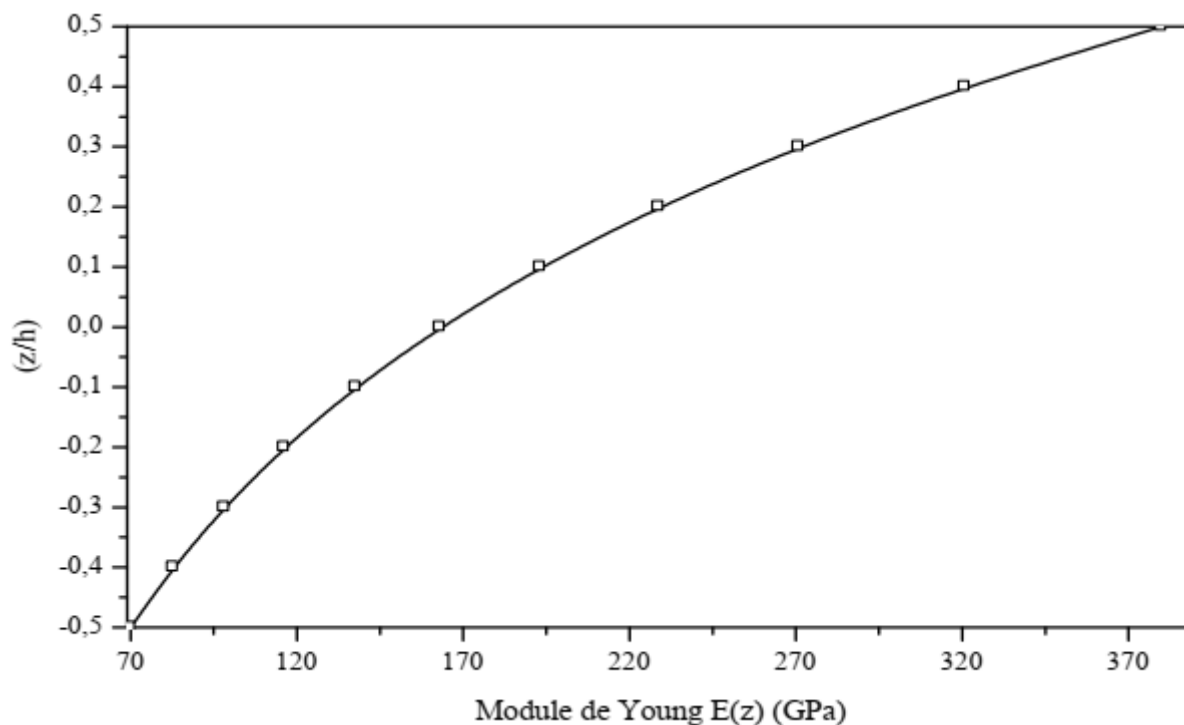
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983).

$$E(z) = E_2 \cdot e^{B(z+h/2)} \quad (\text{III.9a})$$

avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{III.9b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure III.8



*Figure III.8: Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM*

### III.6. Les matériaux impropres (poreux)

#### III.6.1.1. Définition de la porosité

Selon le glossaire international d'hydrologie, la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz). La porosité est aussi une valeur numérique définie comme le rapport entre le volume des vides et le volume total d'un milieu poreux.

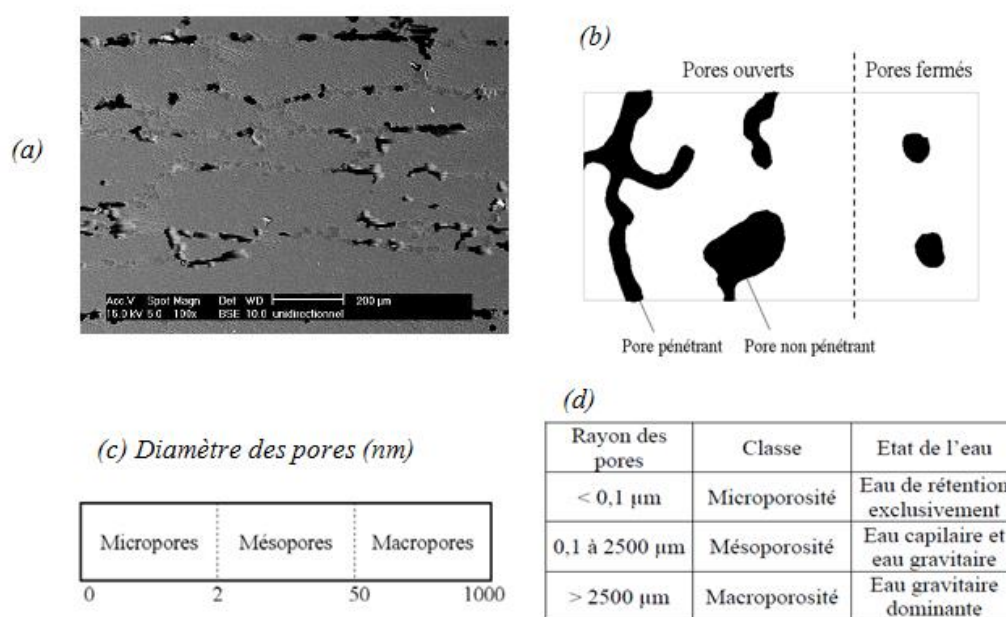
$$\alpha_0 = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (III.10)$$

Avec :  $\alpha_0$  c'est la porosité,  $V_{pores}$  le volume des pores et  $V_{total}$  le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de solide et du volume des pores.

La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension). D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant a priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la Figure.III.9.a). Schoeller (1955) distingue deux catégories de pores représentés sur la Figure. III.9.b) :

- les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.- les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité. Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux.

Les nombreuses applications des matériaux poreux font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure.III.9.c) (Schaefer, 1994) En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques de l'eau contenue en leur sein, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée (Schoeller, 1955). Celle-ci définit un micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à  $0,1\mu\text{m}$  et un macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à  $2,5\text{mm}$ . Les mésoporosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre  $0,1\mu\text{m}$  et  $2,5\text{mm}$  (Figure.III.9.d).



**Figure.III.9:** (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. (Ait yahia, 2015)

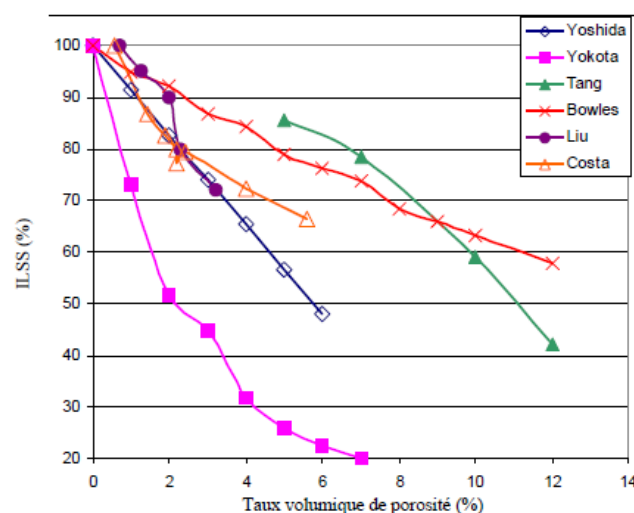
La porosité est donc un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés. Néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petites tailles (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages.

### III.6.1.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau

Très recherchée dans la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, la porosité est en revanche néfaste aux matériaux composites à hauts performances. L'impact de ce défaut a fait l'objet de beaucoup d'attention, comme en atteste le nombre important d'études sur ce sujet. Tous les auteurs sont d'accord pour affirmer qu'en dessous d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'influence sur le comportement de la pièce si elle est iso répartie.

En revanche, pour des taux de porosité plus élevés, les propriétés mécaniques de la pièce sont affectées de manière significative et en particulier le cisaillement inter laminaire. En effet, la résistance au cisaillement inter laminaire, notée ILSS (InterLaminar Shear Stress), est très sensible à la présence de ces inclusions gazeuses. Sa diminution représentée à la (Figure.III.10), a été mesurée en fonction du taux de porosité par plusieurs chercheurs (Yokota, 1978. Yoshida et al., 1986. Tang et al., 1987. Bowles et al., 1992. Costa et al., 2001 Liu et al., 2006 (a)).

La diminution moyenne de l'ILSS a été estimée en moyenne à 6% par unité volumique de taux de porosité pour des stratifiés carbone/époxy. On peut remarquer de grandes disparités suivant les études considérées. Celles-ci sont dues essentiellement à la nature des matériaux des différentes études (tissu préimprégné (Costa), ou nappes avec différents types de fibres (T300 (Bowles), T700 (Liu)...), et différents types de résine de classe 120°C (Yoshida) ou 180°C (autres)).



**Figure.III.10:** Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy (Wisnom et al., 1996).

L'étude la plus réaliste permettant d'expliquer la diminution de l'ILSS en fonction de l'augmentation du taux volumique de porosité est proposée par Wisnom et al.,(1996). Ces travaux mettent en évidence l'initiation des fissures à partir des porosités dès que ces dernières sont suffisamment grandes (diamètre équivalent  $> 0.2$  mm). Les résultats présentés montrent aussi que la présence de porosité diminue la surface de contact entre les fibres et la matrice, ce qui favorise la rupture de la pièce en cisaillement inter laminaire.

Plusieurs modèles sont proposés afin de prévoir numériquement la valeur de la contrainte à rupture en cisaillement inter laminaire d'une pièce en fonction de son pourcentage volumique de porosité (Bowles et al., 1992, Yoshida et al., 1986). Cependant, quel que soit le modèle considéré, les résultats théoriques diffèrent sensiblement des résultats expérimentaux. Ceci est dû aux nombreuses hypothèses simplificatrices utilisées pour l'élaboration de certaines équations, notamment concernant la forme des porosités (sphérique ou cylindrique), et de leur répartition supposée homogène au sein de la pièce. Une telle répartition est en réalité rarement constatée. De plus, il est signalé que la dispersion des résultats augmente avec le taux volumique de porosité, ce qui rend difficile la comparaison des données expérimentales et théoriques pour des taux de porosité supérieurs à 10%.

D'après toutes ces études, il est indéniable que la porosité affecte le comportement en cisaillement inter laminaire du matériau composite, dès que le pourcentage volumique de ce défaut est supérieur à 1%. Les autres caractéristiques mécaniques (traction, compression, cisaillement plan) sont également affectées par la présence de porosité, mais de façon moindre, bien que non négligeable (Harper et al., 1987, Liu et al., 2004).

De manière générale, une augmentation du taux volumique de porosité entraîne une diminution des propriétés mécaniques du matériau. L'une des raisons invoquée (Olivier, 1994, Olivier et al. 1995) notamment pour expliquer la chute de la contrainte à rupture en traction et en compression, concerne la déformation locale des fibres due essentiellement à l'apparition de ces porosités et à leurs mouvements au sein de la matrice durant le cycle de cuisson. On peut aussi raisonnablement penser que la présence de porosité au sein du stratifié modifie à la fois le transfert d'effort entre la résine et le renfort mais aussi la cohésion de celui-ci. Cette hypothèse reste cependant encore à démontrer.

Dans le milieu industriel aéronautique, il est admis qu'une pièce structurale comportant un taux volumique de porosité supérieur à 2% doit être rebutée. On comprend dès lors l'intérêt de cette étude pour minimiser au maximum l'apparition de ces défauts, apparition qui peut être due à plusieurs causes détaillées ci-après.



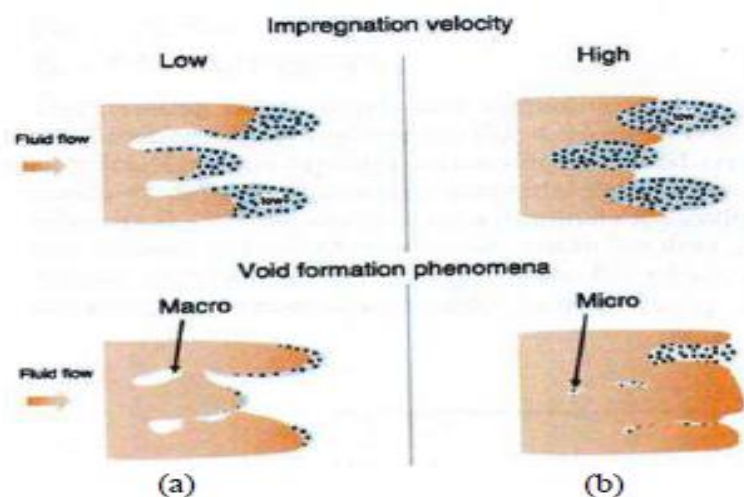
### III.6.2. Causes possibles d'apparition de la porosité.

#### III.6.2.1. Les causes mécaniques

La création de porosité par emprisonnement mécanique d'air lors de la conception de la pièce est la cause la plus facile à comprendre intuitivement.

Les deux exemples suivants illustrent ce type de création :

Le premier concerne l'emprisonnement de poches d'air dans la résine durant sa phase de fabrication (malaxage, etc....) ou durant l'imprégnation du renfort. Ce deuxième point est largement développé par de nombreux auteurs travaillant sur la mise en œuvre des composites par RTM ou par infusion (RLI, RFI...). L'intégralité de ces travaux explique la formation lors du moulage par LCM de deux types de porosités : les macros porosités observées entre les mèches et les micros porosités, observées au sein même des mèches (figure.III.11).



**Figure.III.11:** Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante (Ledru, 2009).

Les macros porosités sont principalement présentes dans la pièce lorsque l'écoulement de la résine, lors de l'imprégnation du renfort, est gouverné par la pression visqueuse (viscosité faible) contrairement aux micros porosités qui sont majoritaires lorsque l'écoulement est gouverné par la capillarité (viscosité importante) La vitesse d'écoulement de la résine étant régie par la loi de Darcy (eq.III.11.) il est important d'ajuster la différence de pression imposée au système en fonction de la perméabilité du renfort et de la viscosité de la résine afin d'obtenir une vitesse d'écoulement intra-mèche et inter-mèche la plus uniforme possible. (Ledru, 2009)

$$v = -\frac{[K]}{\mu} \nabla P \quad (\text{III.11})$$

avec  $v$  ( $\text{m.s}^{-1}$ ) la vitesse moyenne du fluide (Darcy),  $[K]$  ( $\text{m}^2$ ) le tenseur de perméabilité du renfort,  $\mu$  ( $\text{Pa.s}$ ) la viscosité de la résine et  $\nabla P$  ( $\text{Pa.m}^{-1}$ ) le gradient de pression.

L'objectif majeur de ces recherches consiste à développer un modèle numérique permettant de simuler l'imprégnation du renfort en fonction de la forme de la pièce. Les variables prises en compte sont la pression ou dépression appliquée au système, la perméabilité du renfort et la viscosité de la résine directement liée à la température de l'outillage (moule,...), ainsi que le nombre de point d'injection. Une fois développés, ces modèles ont servi à l'optimisation des paramètres précédemment cités pour limiter la création des macros et micros porosités.

Malgré la difficulté rencontrée dans l'expression du tenseur de perméabilité du renfort, les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. La figure.III.11, représente en fonction du temps, la position du front de résine injectée dans un renfort tridimensionnel. La courbe continue, représentative des résultats numériques obtenus par Trochu (2006), concorde presque parfaitement les résultats expérimentaux obtenues par Bréard (1997).

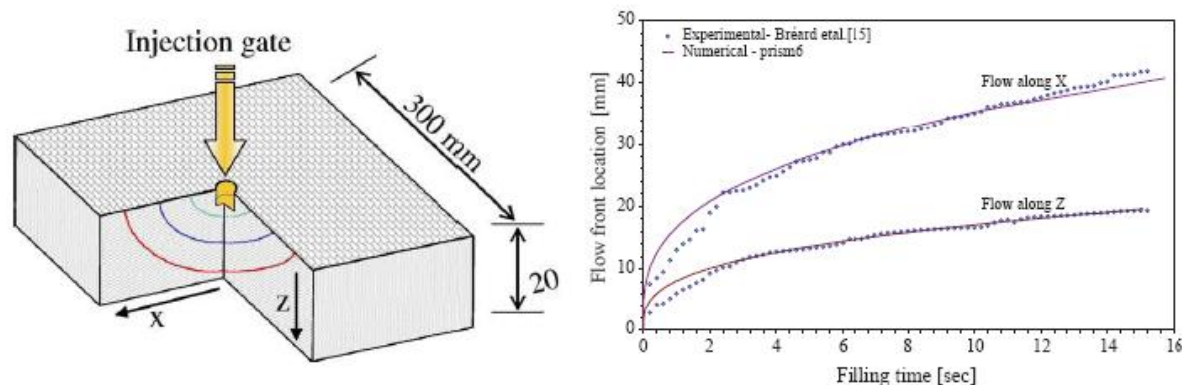
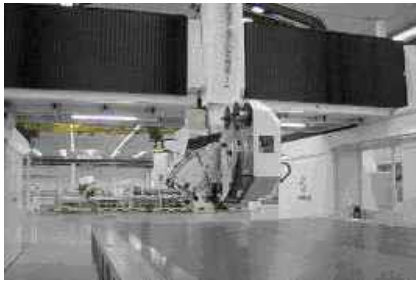


Figure.III.12: Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope (Ledru, 2009).

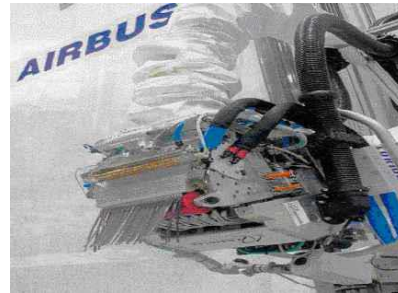
Ces modèles ne sont pas développés plus en détail car relativement éloignés de la situation correspondant à cette étude. Les procédés de mise en œuvre ne sont pas les mêmes et les viscosités des résines utilisées lors de l'injection sont environ mille fois plus faible que celles des résines utilisées au sein des préimprégnés. Les phénomènes de création de la porosité sont donc différents en fonction du procédé de mise en œuvre considéré.

Le second exemple de création de porosité par voie mécanique concerne directement l'étape de drapage qui se fait de plus en plus à l'aide de machine automatique à placement de nappes

ou de fibres (figure.III.13). Des microcavités gazeuses sont observées lorsqu'une fibre est rompue ou lors d'une pliure, d'un chevauchement de plis ou d'un décalage entre deux nappes au sein du composite.



(a)



(b)

**Figure. III.13 :** (a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres.

Bien que très largement mentionnée dans la littérature, la création de porosité par voie mécanique n'a fait l'objet que d'un très petit nombre d'études. Seuls Ranganathan et Pitchumani (1995), Pitchumani, (1996) se sont intéressés à la modélisation du comportement des porosités créées lors du drapage automatisé d'une pièce en composite thermoplastique AS-4/PEEK. A la différence du préimprégné thermodurcissable, le drapage de nappe carbone/thermoplastique nécessite l'application de température élevée afin de favoriser l'adhésion des plis entre eux et d'assurer la consolidation de la pièce. La vitesse de dépose de la nappe, la pression d'application et la température imposée par la machine de dépose, ainsi que la configuration du rouleau sont les paramètres principaux à contrôler pour minimiser la présence de porosité dans la pièce finale.

Hormis l'effet de la température, cette étude pourrait être extrapolée à la dépose de nappe pré-imprégnée à fibre carbone / résine époxyde. Il serait alors nécessaire de contrôler la vitesse de dépose, la configuration du rouleau ainsi que la pression de compactage imposé par le galet de la tête de dépose lors de l'étape de drapage. Une fois optimisé, ce procédé de drapage permet d'obtenir une très bonne adhésion homogène des plis entre eux, ce qui est beaucoup plus difficile à garantir sur le drapage manuel.

Enfin, la porosité pourrait aussi provenir de grosses particules ou d'un amas de celles-ci présentes dans le pré imprégné (particules volant dans l'air, poussières, cheveux....). Cette cause de création mécanique de la porosité peut cependant être partiellement écartée, car le drapage en milieu industriel s'effectue dans une pièce confinée appelée 'salle blanche', à température et taux d'hygrométrie contrôlés, et surtout avec un taux de particules de poussière présentes dans l'air ambiant contrôlé, inférieur à 100 000 particules par m<sup>3</sup>.

En plus des causes mécaniques, la présence de porosité peut aussi être expliquée en considérant certains phénomènes thermodynamiques.

### III.6.2.2. Les cause thermodynamiques

L'observation du diagramme de phase de l'eau montre qu'une bulle de vapeur dans la phase liquide se forme soit en augmentant la température localement dans le liquide, soit en provoquant une rapide décompression. Ces deux paramètres favorisent en effet les nucléations homogène et hétérogène des germes initiateurs de bulle. Seul un aperçu des théories relatives à la nucléation, présentées par (Kardos et al., 1983, Kardos et al., 1986, Kwak et al., 1998, Lee et al, 1996) sont abordées dans cette partie.

Au sein de la résine, les molécules de gaz diffusent au hasard et finissent par se rencontrer d'autant plus facilement que leur concentration est élevée. Les molécules diffusantes, à l'état de monomère s'additionnent donc successivement pour former des agglomérats qui ont une taille suffisante pour être qualifiés de germes (entre 50 et 100 molécules pour une espèce chimique à faible masse molaire comme l'eau (Kingery et al., 1975)). Le processus de formation de tels germes met en jeu l'enthalpie libre,  $\Delta G$ , de Gibbs. La création d'un germe nécessite la création d'un volume et d'une surface, qui met en jeu deux énergies antagonistes : L'énergie de volume, apportée par la sursaturation de la solution, et l'énergie de surface résistant à la croissance du germe. Si le germe est supposé sphérique de rayon  $R_p$  (m), l'enthalpie libre  $\Delta G$  ( $\text{J.mol}^{-1}$ ) est donnée par :

$$\Delta G = -\frac{4\pi R_p^3}{3V_m} kT \ln(\beta) + 4\pi R_p^2 \gamma_{LV} \quad (\text{III.12})$$

avec  $k$  ( $\text{J.K}^{-1}$ ) la constante de Boltzmann;  $T$  (K) la température du milieu,  $V_m$  ( $\text{m}^3$ ) le volume d'une molécule dans le germe,  $\gamma_{LV}$  ( $\text{Pa.m}$ ) ou ( $\text{J.m}^{-2}$ ) l'énergie de surface entre la porosité et la matrice et  $\beta$  le degré de saturation.

Le premier terme correspondant à l'énergie de volume est le produit du nombre de molécules contenues dans le germe, par la différence de potentiel chimique. Le terme  $\beta$ , représentatif du degré de saturation, peut être exprimé dans le cas de la cavitation, c'est à dire d'une création de bulle gazeuse, par le rapport entre la pression de gaz  $p_{gaz}$  et la pression du liquide  $p_s$ , Dans le cas d'une rapide dépression,  $\beta$  augmente et  $\Delta G$  diminue, ce qui favorise la création de bulle de gaz. Le second terme de l'expression (III.12) représente l'énergie de surface. La compétition entre ces deux termes est montrée à l'aide de la figure III.14. La taille du germe

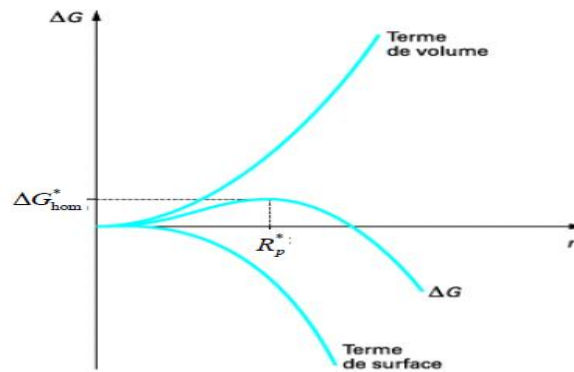
critique, c'est à dire le rayon critique  $R_p^*$  (équation (III.13)) dit de Gibbs-Thomson-Freundlich), est obtenu à l'équilibre, (Ledru, 2009).

$$R_p^* = \frac{2V_m \gamma_{LV}}{kT \ln(\beta)} \quad (\text{III.13})$$

A la taille critique  $R_p^*$  le germe est en équilibre instable. Il croît ou se dissout selon qu'il gagne ( $R_p > R_p^*$ ) ou qu'il perd ( $R_p < R_p^*$ ) une molécule.

Le calcul de la barrière énergétique à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique, pour créer une porosité est donné par l'équation (III.14).

$$\Delta G_{\text{hom}}^* = \frac{4}{3} \pi (R_p^*)^2 \gamma_{LV} \quad (\text{III.14})$$



**Figure.III.14:** Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction du rayon du germe.

En combinant les équations précédentes, il est possible de montrer qu'une température élevée du système ainsi qu'une importante sursaturation en molécules génératrices de germe vont favoriser la nucléation: l'augmentation de  $T$  et  $\beta$  entraîne une diminution de  $R_p^*$ , et donc de  $\Delta G_{\text{hom}}^*$ . La vitesse à laquelle apparaissent les germes, appelée fréquence de nucléation, est le nombre de germes formés par unité de temps et de volume de fluide. Cette fréquence  $J_{\text{hom}}$  s'écrit dans le cas de la nucléation homogène par une loi similaire à une loi d'Arrhenius (eq.III.15)

$$J_{\text{hom}} = A_{\text{hom}} \exp\left(-\frac{\Delta G_{\text{hom}}^*}{kT}\right) \quad (\text{III.15})$$

Avec  $A_{\text{hom}}$  ( $\text{nb.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ ) le coefficient cinétique

Ce coefficient peut être modifié suivant la viscosité du fluide, pour prendre en compte la diminution de la fréquence de nucléation dans le cas d'un milieu très visqueux. Cette expression confirme le fait que plus la température du système est élevée, plus la fréquence de Nucléation est élevée.

Le mécanisme de nucléation homogène décrit précédemment reste très rare en milieu industriel où il est impossible d'éliminer tous les corps étrangers (poussière, etc...). La nucléation va alors se développer de préférence au contact de ces corps étrangers, appelés substrats. On parlera de nucléation hétérogène. En supposant une géométrie sphérique du germe, la résolution des équations montre que le rayon de courbure du germe critique  $R_p^*$  pour la nucléation hétérogène est le même que celui donné par l'équation (III.13). En revanche, la barrière d'énergie à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique de nucléation hétérogène  $\Delta G_{\text{hét}}^*$  est fonction de l'angle de contact  $\theta$  entre le germe et le substrat. Sa valeur est décrite par l'équation (III.16).

$$\Delta G_{\text{hét}}^* = f \Delta G_{\text{hom}}^* \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos^3 \theta \quad (\text{III.16})$$

$\cos \theta$  étant inférieur à 1, la barrière énergétique à franchir pour la création d'un germe est plus faible pour une nucléation hétérogène qu'une nucléation homogène. La nucléation hétérogène se fera donc plus facilement que la nucléation homogène et ce d'autant plus que le germe présentera une affinité avec le substrat ( $\theta$  décroissant, meilleur mouillabilité).

Cette conclusion est confirmée par l'expression de la fréquence de nucléation hétérogène  $J_{\text{hét}}$  (eq.III.17) :

$$J_{\text{hét}} = A_{\text{hét}} \exp\left(-\frac{\Delta G_{\text{hét}}^*}{kT}\right) \quad (\text{III.17})$$

Pour cette nucléation hétérogène, nous retrouvons les mêmes influences des paramètres opératoires (température, pression...) que pour la nucléation homogène.

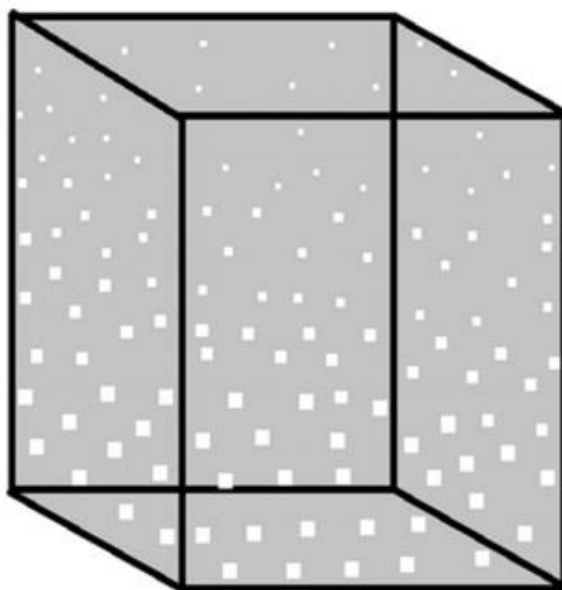
La création de porosité par nucléation est une hypothèse très réaliste, notamment lors de la polymérisation. Le système subit alors une dépression, une augmentation de la température jusqu'à 180°C et les concentrations en espèces diffusantes peuvent considérablement augmenter, en particulier si le pré imprégné contient quelques résidus de solvant ou d'humidité, absorbés lors de sa phase de fabrication, ou de stockage. En revanche, la

détermination expérimentale de certains paramètres développés dans ce paragraphe, tel que le coefficient cinétique  $A_{hét}$  limite considérablement l'utilisation de ce modèle pour prévoir la fréquence d'apparition des germes en fonction de la température.

Une fois le germe formé sous des conditions thermodynamiques favorables, ou une fois la microcavité créée au sein du matériau par voie mécanique, leur stabilité, leur croissance ou leur dissolution va dépendre de plusieurs facteurs et notamment des paramètres imposés lors de la polymérisation.

### III.6.3. Les Matériaux fonctionnellement gradués avec gradient de porosité

Le matériau gradué fonctionnellement à gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau en vrac. La forme et la taille des pores sont conçus et variés en fonction des propriétés du matériau fonctionnellement gradué requis. La figure.III.15 présente un exemple de matériau fonctionnellement gradué à gradient de porosité.



*Figure.III.15 : FGM avec porosité gradué (Rasheedat, 2017)*

Ce type de matériau fonctionnellement gradué est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles proposent à remplacer consiste en une porosité fonctionnellement gradué, laquelle faciliterait également l'intégration de la greffe et des tissus entourer. La porosité est importante pour le processus de guérison de ce greffe et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total du greffe et d'améliorer le module d'élasticité du matériau

pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-greffe. Cela est nécessaire pour éviter la concentration de contrainte qui se produit lorsque le module d'élasticité du greffe est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange de différentes formes et tailles de particules, ce qui aiderait à produire la porosité variable voulu en fonction des formes et des tailles des pores changeantes.

Les matériaux à gradient de porosité peuvent être gradient de densité de porosité ou un gradient de taille des pores. La densité de porosité est produite lorsque elle change en fonction de la position spatiale dans le volume du matériau. Le gradient de taille des pores de la FGM est obtenu en faisant varier la taille des pores et / ou la forme des pores. La gradation de la taille des pores peut être obtenue en faisant varier la taille des particules de poudre utilisées à différents endroits du matériau en vrac au cours du processus de gradation. Il peut également être produit en faisant varier les paramètres de traitement de la production ou en utilisant différents paramètres de frittage pour produire le gradient de porosité requis. La fonction de degré de distribution de porosité dans les FGM inclut un changement progressif de la répartition des pores dans un FGM avec porosité qui aide à absorber le choc d'une face à l'autre. Il aide également à fournir une isolation thermique; cela contribue à l'efficacité catalytique; et il aide également à relâcher les contraintes électriques et thermiques. La porosité graduée dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau.

### **III.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les matériaux FGM, leurs domaines d'application. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives et les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles des différents types de matériaux FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, à la fin on a terminé par les causes d'apparition de la porosité dans les structures FGM. Ces éléments cités sont avancés, car nous ont aurons besoin de ces notions pour entamer notre analyse mathématique



## Chapitre IV:

### Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM.

#### IV.1. Introduction

L'objectif visé dans ce chapitre est de développer la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse du comportement vibratoire des structures en matériau fonctionnellement gradués FGM. Dans cette partie, deux types de plaque FGM sont considérés, à savoir une plaque FG parfaites, tandis que la deuxième structure est une plaque en matériau FGM poreux.

Pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques FGM simplement appuyées, une théorie de cisaillement à quatre variables a été utilisée et développé pour le calcul des fréquences de vibration libre de ces plaques FGM. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM sans avoir recours à un éventuel facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvement pour les plaques sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les relations de dispersion analytiques de la plaque sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres ; La loi de mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité.

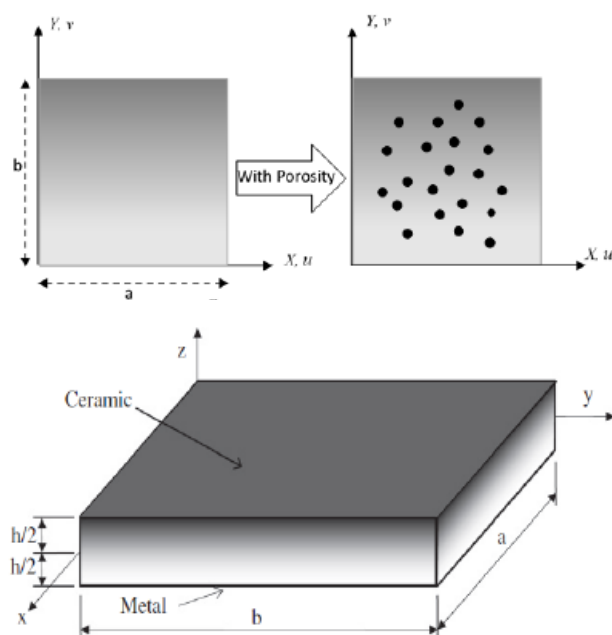



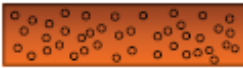

Figure. IV.1: La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.

### IV.2.1. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque P-FGM avec porosité

Dans ce qui suit, nous considérons une plaque FGM composée d'une mixture de deux phases de matériaux, du métal et de la céramique comme indiqué sur la figure. IV.1 La plaque FGM est considérée comme une structure dont les propriétés matérielles varient suivant son épaisseur. En outre dans cette étude d'autres types de plaque sont prisent en compte, c'est le cas de la plaque imparfaite qui est supposée avoir une porosité. ce défaut constitutif peut se produire au cours de fabrication.

Le facteur de distribution de la porosité du matériau d'étude,  $\xi$  ( $\xi \ll 1$ ), selon l'épaisseur de la plaque, est donné dans le Tableau.IV.1, avec une nouvelle distribution proposée:

Tableau.IV.1. Facteur de la distribution de la porosité  $\xi$ .

	$\xi$	La forme géométrique
Ankit Gupta et al. (2017)	$\log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$	
Nuttawit Wattanasakulpong et al. (2013)	$\frac{\lambda}{2}$	
proposé	$1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$	

$$\bar{P} = \bar{P}_c(V_c - \xi) + \bar{P}_m(V_m - \xi) \quad (IV.1)$$

A présent, la fraction totale du métal et de la céramique est la suivante:  $V_m + V_c = 1$ , et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrit comme suit:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^P \quad (IV.2)$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM poreux (Ankit Gupta et Mohammad Talha, 2017) peuvent être exprimés par la relation (IV.3).

$$\bar{P} = (\bar{P}_c - \bar{P}_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \bar{P}_m - (\bar{P}_c + \bar{P}_m) \xi^z \quad (\text{IV.3})$$

Il est à noter que  $\bar{P}$  représente la propriété qui varie suivant l'épaisseur de la plaque. Elle peut être le module de Young, la masse volumique ou le coefficient de poisson ; le nombre réel positif  $p$  ( $0 \leq p < \infty$ ) est l'indice de loi de puissance ou la fraction de volume, et  $z$  est comptée à partir du plan médian de la plaque FGM, qui devient une plaque entièrement en céramique, lorsque  $p$  soit nul et entièrement métallique pour une grande valeur de  $p$ .

Ainsi, le module de Young ( $E$ ) et de la densité de matière ( $\rho$ ) peuvent être exprimés comme suit :

$$E(z) = [E_c - E_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [E_c + E_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + E_m \quad (\text{IV.4a})$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^p - \xi [\rho_c + \rho_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + \rho_m \quad (\text{IV.4b})$$

Cependant, le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfait peuvent être obtenues lorsque  $\lambda$  égale à zéro.

#### IV.2.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque S-FGM

La plaque S-FGM est définie en utilisant la fraction de volume de deux fonctions de loi de puissance

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{IV.5a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{IV.5b})$$

En utilisant la loi de mélange, les propriétés matérielles effectives, telles que le module de Young ( $E$ ), le coefficient de Poisson et la masse volumique peuvent être exprimées comme suit:

$$\bar{P}(z) = g_1(z) \bar{P}_c + [1 - g_1(z)] \bar{P}_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{IV.6a})$$

$$\bar{P}(z) = g_2(z) \bar{P}_c + [1 - g_2(z)] \bar{P}_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{IV.6b})$$

### IV.3. Equations fondamentales

#### IV.3.1. Hypothèses de base et équations constitutives

Les champs de déplacement de diverses théories de déformation de cisaillement de la plaque sont choisis en fonction des hypothèses suivantes:

1. La normale au plan médium reste normale au plan médium déformé après déformation ;
2. La flèche de la plaque FGM est très petite par rapport à son épaisseur  $h$ , tel que les relations linéaires contraintes-déformations sont valides ;
3. Pour les plaques élastiques FGM, les propriétés matérielles (Module de Young et le coefficient de Poisson) sont des fonctions de la coordonnée de l'espace «  $z$  ».
4. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur
5. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV.7a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV.7b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV.7c})$$

Où  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ , et  $\theta(x, y)$  sont les quatre fonctions de déplacement inconnues de la surface moyenne de la plaque, le dernier inconnu est un terme mathématique qui permet d'obtenir les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes  $y$  et  $x$ , respectivement (comme dans le HSDT ordinaire). Noter que les intégrales n'ont pas de limites. Dans la présente étude, on considère seulement quatre termes de déplacement inconnus au lieu de cinq termes dans HSDT ordinaire (Akavci, 2014). Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de la géométrie.  $f(z)$  représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur.

Pour vérifier La précision du modèle présent, impliquant seulement quatre fonctions de déplacement inconnu, en comparant beaucoup de théories comme Reddy (1987), Reissner (1975), Ait Atmane (2010), et Afaq (2003).

Dans cette étude, ces fonctions de forme sont choisies tel que présenté dans le tableau. IV.2.

**Tableau IV.2** : les fonctions de formes des différents modèles.

modèle	$f(z)$	$g(z) = f'(z)$
Third plate theory (TSDT) Reedy (1987)	$z - \frac{4z^3}{3h^2}$	$1 - \frac{4z^2}{h^2}$
Reissner (1975)	$\left(\frac{5}{4}z - \frac{5z^3}{3h^2}\right)$	$\left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2}\right)$
Hyperbolic plate theory (HSDT) Ait Atmane (2010),	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) * z - \left(\frac{h}{\pi}\right) * \sinh\left(\left(\frac{\pi}{h}\right) * z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} - \frac{\cosh\left(\left(\frac{\pi}{h}\right) * z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$
Exponential plate theory (ESDT) Afaq(2003)	$ze^{-2(z/h)^2}$	$\left(1 - \frac{4z^3}{h^4}\right)e^{-2(z/h)^2}$

En remplaçant, les relations de déplacement (IV.7) dans les équations d'élasticité de déformation-déplacement, les composantes normales et déformations transversale sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + z \begin{cases} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{cases} + f(z) \begin{cases} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = g(z) \begin{cases} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

Où

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}, \begin{cases} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.9a})$$

$$\begin{cases} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{cases} = \begin{cases} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} = \begin{cases} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{cases}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.9b})$$

Les intégrales apparaissant dans les expressions ci-dessus doivent être résolues par une solution de Navier et peuvent être exprimées comme suites:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.10})$$

Où les coefficients A' et B' sont définis selon le type de solution adoptée, dans ce cas par Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés:

$$A' = -\frac{1}{\kappa_1^2}, B' = -\frac{1}{\kappa_2^2}, k_1 = \kappa_1^2, k_2 = \kappa_2^2 \quad (\text{IV.11})$$

Où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les nombres d'onde de propagation le long des directions d'axe des « x » et d'axe des « y » respectivement.

Pour les plaques FG, les relations contrainte-déformation pour l'état de contrainte plane peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (IV.8), les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$  peuvent être exprimés comme:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.13})$$

### IV.3.2. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et aux équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique:

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV.14})$$

$\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation;  $\delta V$  est la variation de l'énergie potentielle de la base élastique; et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0\end{aligned}\quad (IV.15)$$

Où  $A$  est la surface supérieure. Les efforts et les moments résultants  $N$ ,  $M$  et  $S$  sont définies par:

$$\left( N_i, M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy) \quad \left( S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (IV.16)$$

La variation du travail externe peut être exprimée par

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (IV.17)$$

Là où  $q$  et  $(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)$  sont les charges transversales et normales appliquées,

respectivement. Pour les problèmes de la vibration libre et la propagation des ondes le travail externe est zéro.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme:

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_V \left[ \dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left( (k_1 A') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left( \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( (k_1 A')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left( (k_1 A') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA\end{aligned}\quad (IV.18)$$

Où la convention de ( . ) représente la dérivée par rapport au temps  $t$  ;  $\rho(z)$  est la densité de masse donnée par l'équation. (6.b); Et (  $I_1$  ,  $J_1$  ,  $K_1$  ) sont des inerties de masse exprimées par:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (IV.19)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz$$

En utilisant les relations de déplacement-déformation généralisées (IV.8), les relations contraintes-déformation (IV.12), les fondamentaux du calcul des variations et la collecte des coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \theta_0$  dans l'équation. (IV.14), les équations de mouvement sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - \\ I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) & \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= \\ -J_1 \left( k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + \\ J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) & \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Où les résultats des contraintes et les moments résultants définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (IV.21)$$

Dans lequel:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t \quad (IV.22a)$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (IV.22b)$$



$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \quad (IV.22c)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \quad (IV.22d)$$

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ S_{xz}^s, S_{yz}^s \right\}^t, \quad \gamma = \left\{ \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0 \right\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (IV.22e)$$

Les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (IV.23a)$$

$$\left( A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left( A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right) \quad (IV.23b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (IV.23c)$$

En remplaçant l'équation (IV.21) dans l'équation (IV.22), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_0, \theta$ ) et les équations appropriées prennent la forme:

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + \left( B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{122} \theta + \left( B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2 \right) d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta}, \quad (IV.24a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + \left( B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{112} \theta + \left( B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1 \right) d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta}, \quad (IV.24b)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + \\
& B_{22} d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122}w_0 - \\
& D_{22} d_{2222}w_0 + \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2\right) d_{11}\theta + 2\left(D_{66}^s (k_1A'+k_2B')\right) d_{1122}\theta + \\
& \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2\right) d_{22}\theta = I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) \\
& + J_2(k_1A' d_{11}\ddot{\theta} + k_2B' d_{22}\ddot{\theta})
\end{aligned} \tag{IV.24c}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2\right) d_1u_0 - \left(B_{66}^s (k_1A'+k_2B')\right) d_{122}u_0 - \\
& \left(B_{66}^s (k_1A'+k_2B')\right) d_{112}v_0 - \left(B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2\right) d_2v_0 \\
& + \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2\right) d_{11}w_0 + 2\left(D_{66}^s (k_1A'+k_2B')\right) d_{1122}w_0 + \\
& \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2\right) d_{22}w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta \\
& - \left((k_1A'+k_2B')^2 H_{66}^s\right) d_{1122}\theta + A_{44}^s (k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s (k_1A')^2 d_{11}\theta = \\
& - J_1(k_1A' d_1\ddot{u}_0 + k_2B' d_2\ddot{v}_0) + J_2(k_1A' d_{11}\ddot{w}_0 + k_2B' d_{22}\ddot{w}_0) - \\
& K_2\left((k_1A')^2 d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2 d_{22}\ddot{\theta}\right)
\end{aligned} \tag{IV.24c}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \\
d_{ijlm} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2).
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

### IV.3.3. Les relations de la dispersion d'onde

Nous supposons que  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  and  $\theta_0$  sont les solutions de la propagation d'ondes dans le plan  $x$ - $y$ , formulées comme suit :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta_0(x, y, t) \end{cases} = \begin{cases} U \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ V \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ W \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ X \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \end{cases} \tag{IV.26}$$

où  $U$ ;  $V$ ;  $W$  et  $X$  sont les coefficients d'amplitude d'onde,  $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'onde de propagation le long de l'axe  $x$  et l'axe des  $y$  respectivement,  $\omega$  est la fréquence de propagation .

En substituant l'équation. (26) dans les équations (24), on obtient

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right) \{\Delta\} = \{0\} \tag{IV.27}$$

Ou

$$\{\Delta\} = \{U, V, W, X\}^T, \quad (IV.28)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (IV.29)$$

Avec:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\kappa_1^2 + A_{66}\kappa_2^2), \quad S_{12} = -\kappa_1\kappa_2 (A_{12} + A_{66}), \\ S_{13} &= \kappa_1 \cdot i \cdot (B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2), \\ S_{14} &= i \cdot \kappa_1 (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \kappa_2^2), \\ S_{22} &= -(A_{66}\kappa_1^2 + A_{22}\kappa_2^2), \quad S_{23} = i \cdot \kappa_2 (B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2), \\ S_{24} &= i \cdot \kappa_2 (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \kappa_1^2) \\ S_{33} &= -(D_{11}\kappa_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\kappa_1^2 \beta^2 + D_{22}\beta^4) \\ S_{34} &= -k_1 (D_{11}^s \kappa_1^2 + D_{12}^s \kappa_2^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \kappa_1^2 \kappa_2^2 - k_2 (D_{22}^s \kappa_2^2 + D_{12}^s \kappa_1^2) \quad (IV.30) \\ S_{44} &= -k_1 (H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \kappa_1^2 \kappa_2^2 - \\ & k_2 (H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \kappa_1^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \kappa_2^2 \\ m_{11} &= -I_0, \quad m_{13} = i \cdot \kappa_1 I_1, \quad m_{14} = -i \cdot J_1 k_1 A' \kappa_1, \quad m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = i \cdot \kappa_2 I_1, \\ m_{24} &= -i \cdot k_2 B' \kappa_2 J_1, \quad m_{31} = -i \cdot \kappa_1 I_1, \quad m_{32} = -i \cdot \kappa_2 I_1, \quad m_{33} = -I_0 - I_2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \\ m_{34} &= J_2 (k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2), \quad m_{41} = i \cdot J_1 k_1 A' \kappa_1 \\ m_{42} &= i \cdot k_2 B' \kappa_2 J_1, \quad m_{43} = J_2 (k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2), \\ m_{44} &= -K_2 ((k_1 A')^2 \kappa_1^2 + (k_2 B')^2 \kappa_2^2) \end{aligned}$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnelle graduée sont données par équation (IV.27) ; En supposant  $k_1 = k_2 = k$ , les racines de l'équation. (IV.27), peut être exprimé en tant que :

$$\omega_1 = W_1(k), \quad \omega_2 = W_2(k), \quad \omega_3 = W_3(k) \text{ and } \omega_4 = W_4(k) \quad (IV.31)$$

Elles correspondent aux modes d'ondes  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$ , respectivement. Les modes d'ondes  $M_0$  et  $M_3$  correspondent à l'onde de flexion, les modes d'ondes  $M_1$  et  $M_2$  correspondent à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnelle graduée peut être exprimée par :

$$C_i = \frac{W_i(k)}{k}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{IV.32})$$

#### **IV.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, L'analyse de la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées sont examinées par une théorie de déformation de cisaillement avec un champ de déplacement à variable intégrale. Cette fonction remplit exactement les conditions de frontière d'effort sur les deux facettes supérieure et inférieure de la plaque. Dans cette étude deux types de matériaux sont choisis pour l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques FGM.

Les équations du mouvement pour la plaque FGM sont obtenues en appliquant le principe de minimisation des énergies. Les solutions sont obtenues en utilisant les relations de la dispersion, les fréquences fondamentales et la vitesse de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres, Une validation de résultats ainsi qu'une étude paramétrique seront faites dans le chapitre qui suit.

## **Chapitre V**

### **Validation des résultats et discussion**

#### **V.1. Introduction**

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats de la vibration libre et la propagation des ondes de dispersion utilisant une nouvelle théorie à quatre variables intégrales employant quatre différentes fonctions de forme pour une plaque FGM parfaite et imparfaite en commençant en premier lieu par la validation et comparaison des résultats obtenus par cette nouvelle théorie. Les résultats sont représentés par des tableaux et courbes de fréquences propres et vitesse de phase de la propagation des ondes pour différents types de plaques en P-FGM et S-FGM.

Pour étudier les effets des paramètres de distribution de porosité du matériau sur les caractéristiques vibratoires des plaques poreuses P-FGM un nouveau modèle de distribution a été développé pour couvrir la phase de porosité qui survient dans les matériaux hors la phase de fabrication, dans ce travail une évaluation et étude de la convergence et validation de la théorie actuelle avec deux autres types de distribution de porosité ont été faites pour vérifier sa efficacité; Les résultats obtenus sont comparés à ceux disponibles dans la littérature (Nuttawit et al.2013, Gupta et al.2017). Les effets de l'indice de puissance, la fraction volumique de porosité, le rapport d'épaisseur sur la vibration libre et la vitesse de phase des plaques P-FGM poreuses sont discutés. Les résultats numériques sont présentés sous forme de tableau et graphes.

#### **V.2. Les résultats numériques et discussion**

Dans cette étude, une plaque en FGM est fabriquée à partir de deux matériaux Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> / SUS304; dont les propriétés sont:

$$E_c = 348,43 \text{ GPa}, \rho_c = 2370 \text{ Kg/m}^3, \nu_c = 0.3 \text{ pour Si}_3\text{N}_4$$

$$E_m = 201.04 \text{ GPa}, \rho_m = 8166 \text{ Kg/m}^3, \nu_m = 0.3 \text{ pour SUS304};$$

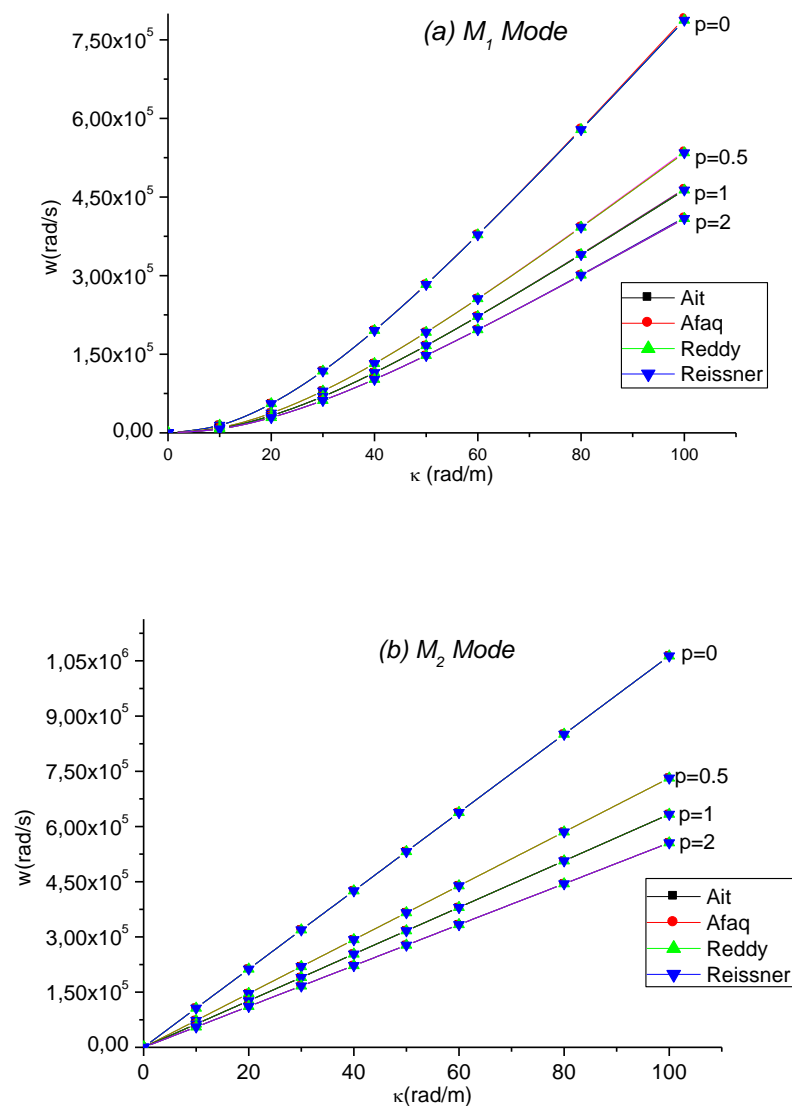
Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance ou une loi sigmoïde. La surface supérieure de plaque FGM est riche en céramique Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>, tandis que la surface inférieure de la plaque FGM est riche en métal SUS304 (Ait Yahia *et al.* 2015).

L'épaisseur de la plaque en FGM est prise égale h=0.02 mètres. Plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour évaluer l'exactitude de la présente théorie dans la recherche de la propagation d'ondes dans les plaques FGM; utilisant des théories existantes

dans la littérature comme Reddy (1987), Reissner (1975), Ait Atmane (2010), et Afaq (Afaq et al. 2003); Cette analyse a été effectuée via le logiciel MAPLE.

### V.2.1. Propagation des ondes dans les plaques P- FGM parfait

Sur la figure.V.1, les courbes de dispersion des différentes plaques P-FGM sont représentées en utilisant différentes théories des plaques de déformation par cisaillement (tableau IV.1). On peut noter que les courbes de dispersion prédites par toutes les théories des plaques proposées sont presque identiques, indépendamment de l'indice de puissance P et des modes d'onde (M1, M2, M3 et M4). Pour la même valeur de  $k$ , la fréquence de propagation de l'onde dans la plaque FGM augmente avec la diminution de l'indice de loi de puissance  $p$ , pour les quatre modes d'onde. De plus, la fréquence de propagation de l'onde devient maximale dans la plaque homogène ( $p= 0$ ).



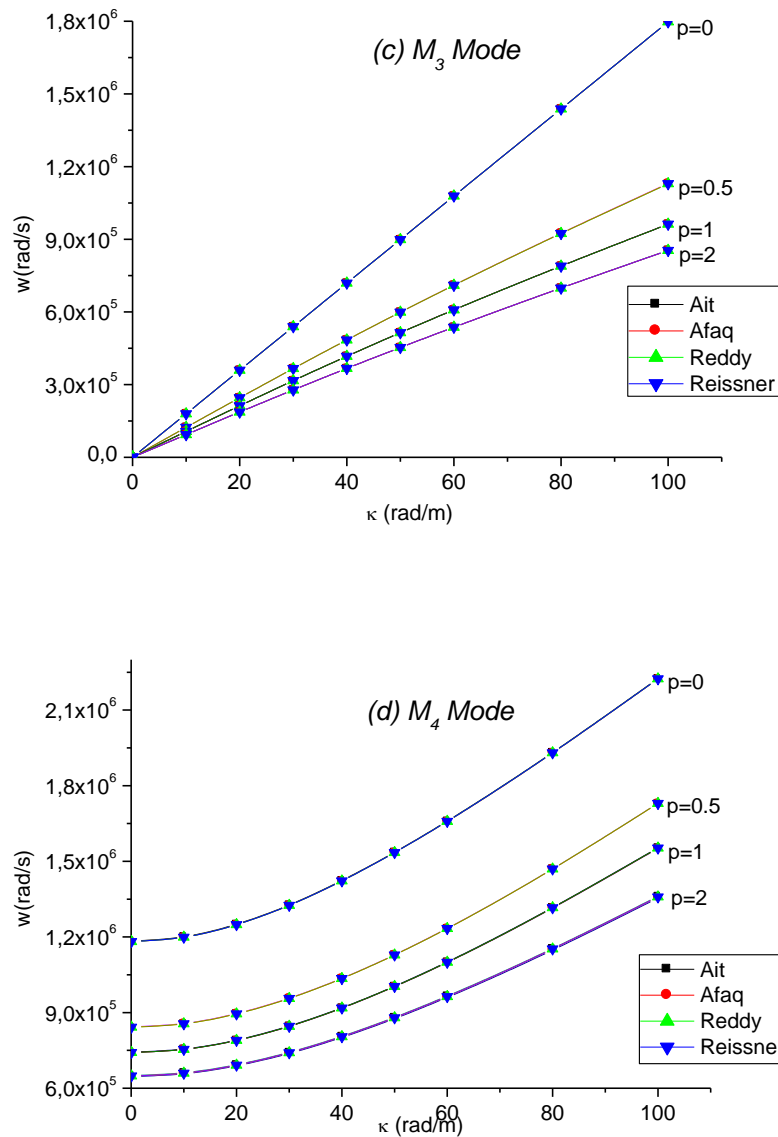
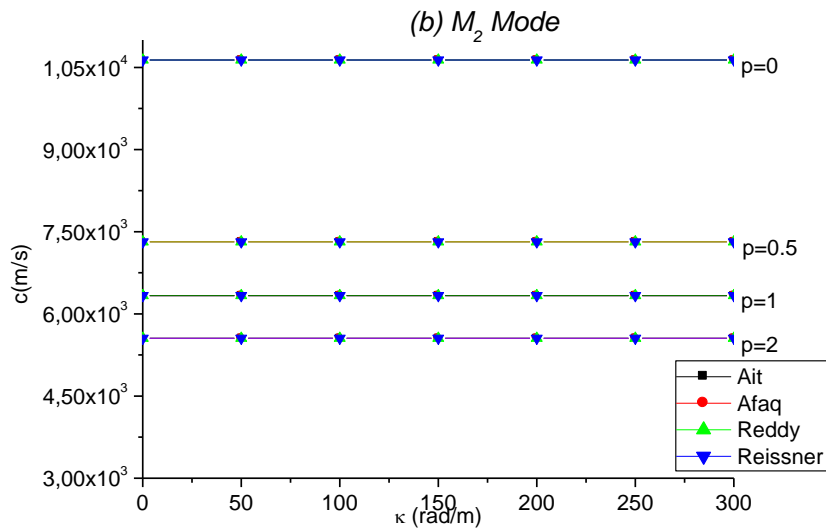
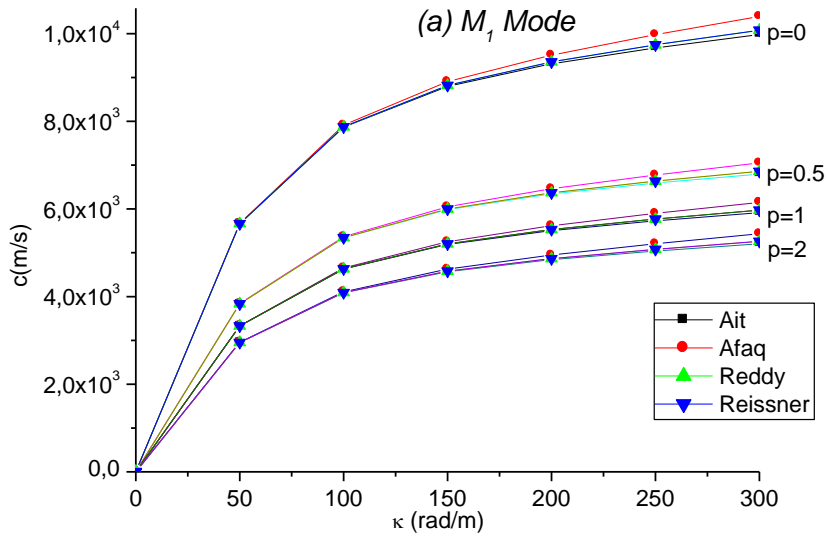


Figure.V.1 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm

La figure.V.2 montre l'évolution de vitesse de phase en fonction de nombre d'onde de propagation dans les plaques P-FGM avec l'indice de puissance ( $P$ ) variable. Il peut être vu que la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FGM parfait diminue à mesure que l'indice de loi de puissance ( $P$ ) augmente pour le même nombre d'onde  $k$ . La vitesse de phase pour les modes d'ondes d'extension  $M_2$  et  $M_3$  de la plaque en céramique ( $p = 0$ ) est constante, mais elle n'est pas constante pour la plaque ( $p \neq 0$ ). Dans le cas de la plaque homogène ( $p = 0$ ), la vitesse de phase prend la valeur maximale, parmi celles de toutes les plaques FGM, pour le mode M4 augmentation du nombre d'onde entraîne une diminution de la vitesse ; En outre, on observe que les courbes de vitesse de phase présentées

par toutes les théories utilisées dans l'étude de la vitesse de phase des plaque P-FGM sont pratiquement identiques les unes aux autres.





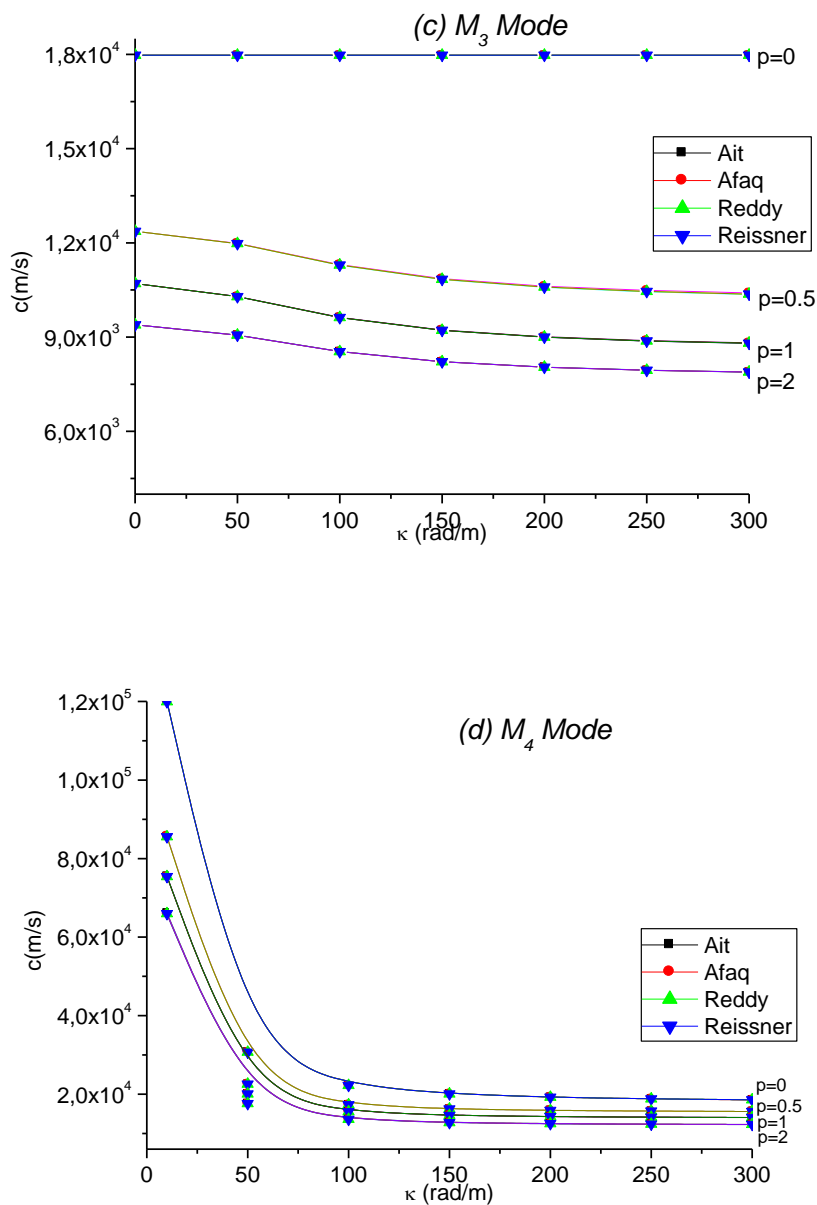
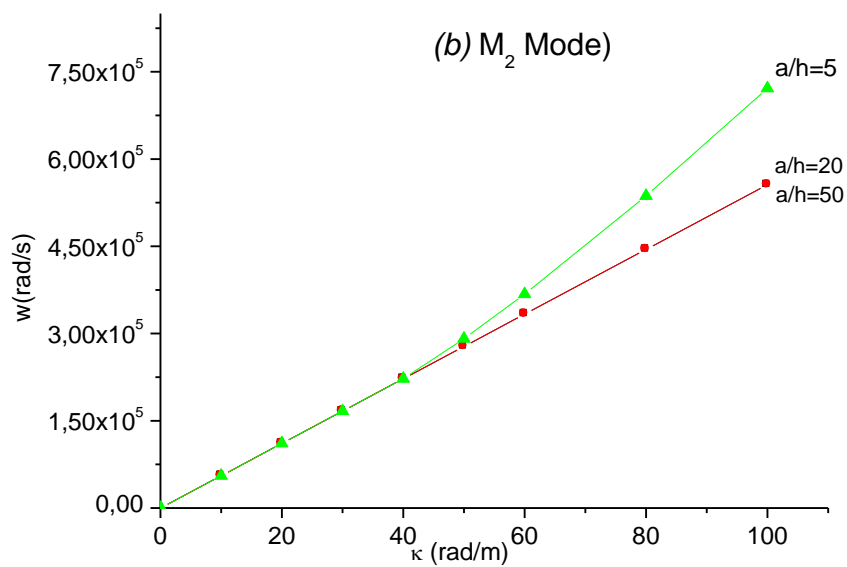
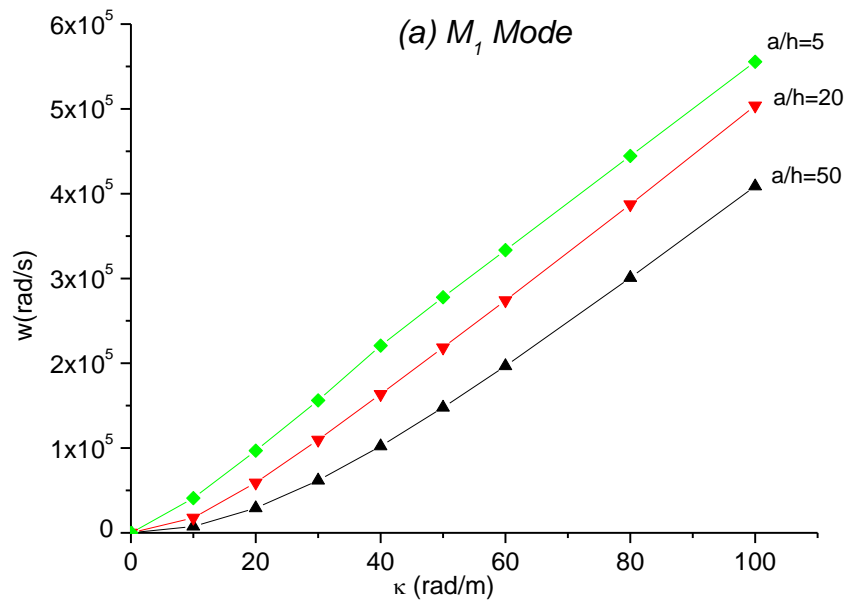


Figure.V.2: Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement gradués P-fgm

### V.2.2. Etude paramétrique de la plaque P-fgm:

La figure.V.3 montre les courbes de dispersion de différentes plaques P-FGM carrée simplement appuyée avec  $p = 2$  utilisant une fonction de forme hyperbolique proposée par atmane (2010). On peut voir que l'épaisseur de la plaque a un effet sur la fréquence de propagation de l'onde dans la plaque FGM pour le grand nombre d'ondes ( $\kappa$ ) et surtout pour le

mode fondamental. En effet, les fréquences sont réduites lorsque l'épaisseur diminue pour les trois premiers modes et augmente pour le mode M4.



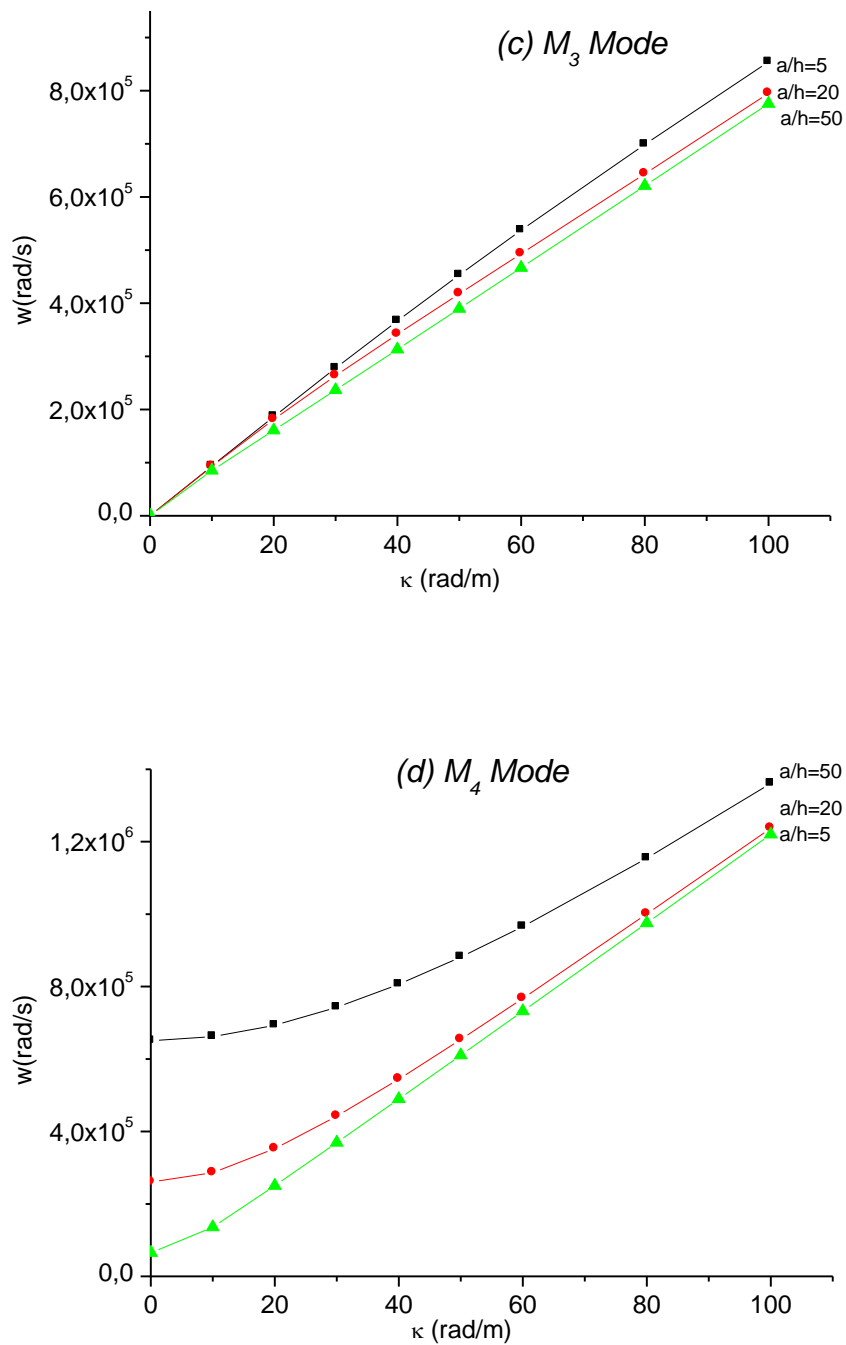
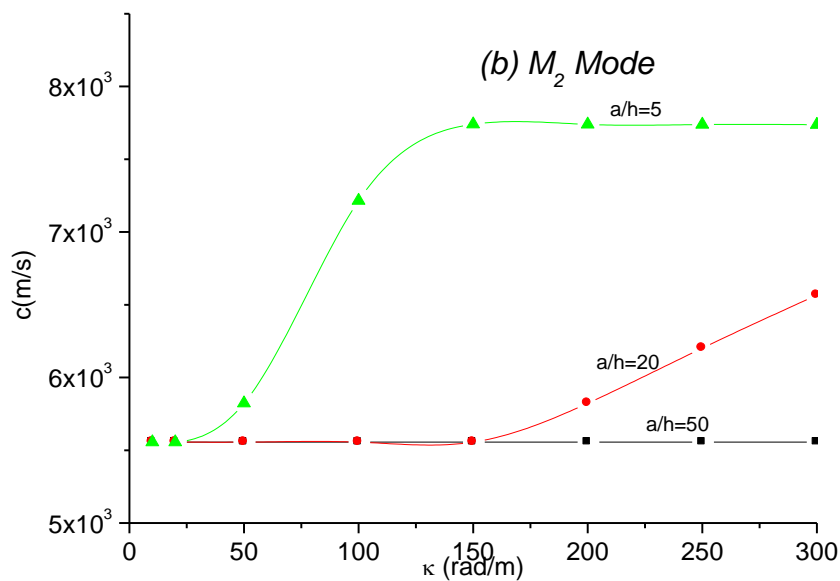
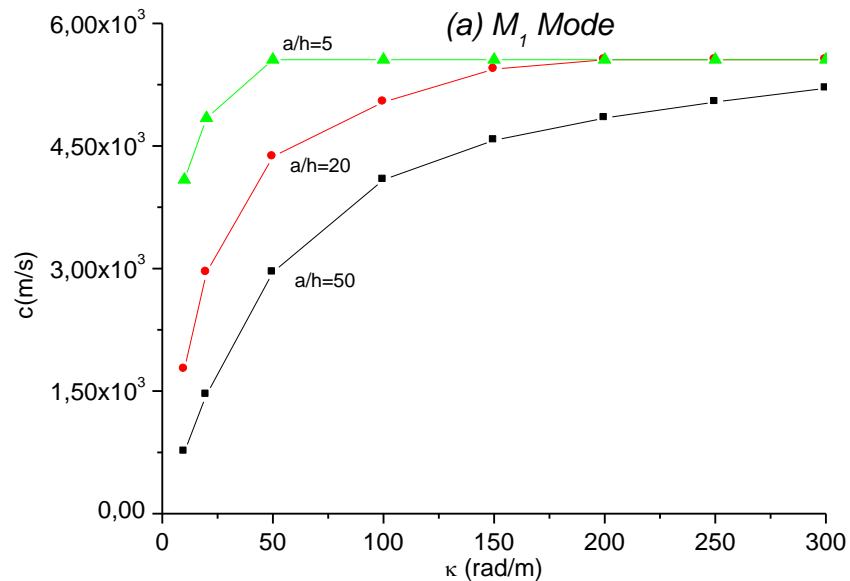


Figure.V.3 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel  
*P*-fgm avec différent rapport épaisseur (ait ;  $p=2$ )

La figure.V.4 montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques P-FGM avec un indice de puissance matériel  $p = 2$ . Comme on le voit à partir de cette figure la vitesse de phase de la plaque FGM diminue à mesure que l'épaisseur diminue pour les petites valeurs du nombre d'ondes ( $\kappa$ ) dans les modes  $M_1$  et  $M_2$  quand ( $\kappa$ ) prend des grandes valeurs les vitesses

de phases se converges les uns aux autres quelle que soit le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), pour le troisième mode M3, les vitesses de phase diminuent quand l'épaisseur augmente. On peut également remarquer que pour le mode d'onde M4, pour l'augmentation du nombre d'ondes ( $\kappa$ ) on observe une diminution de la vitesse de phase qui se converge pour les grandes valeurs du nombre d'ondes des différentes épaisseurs ; en outre les vitesses de phase supérieures sont obtenues pour les faibles épaisseurs.



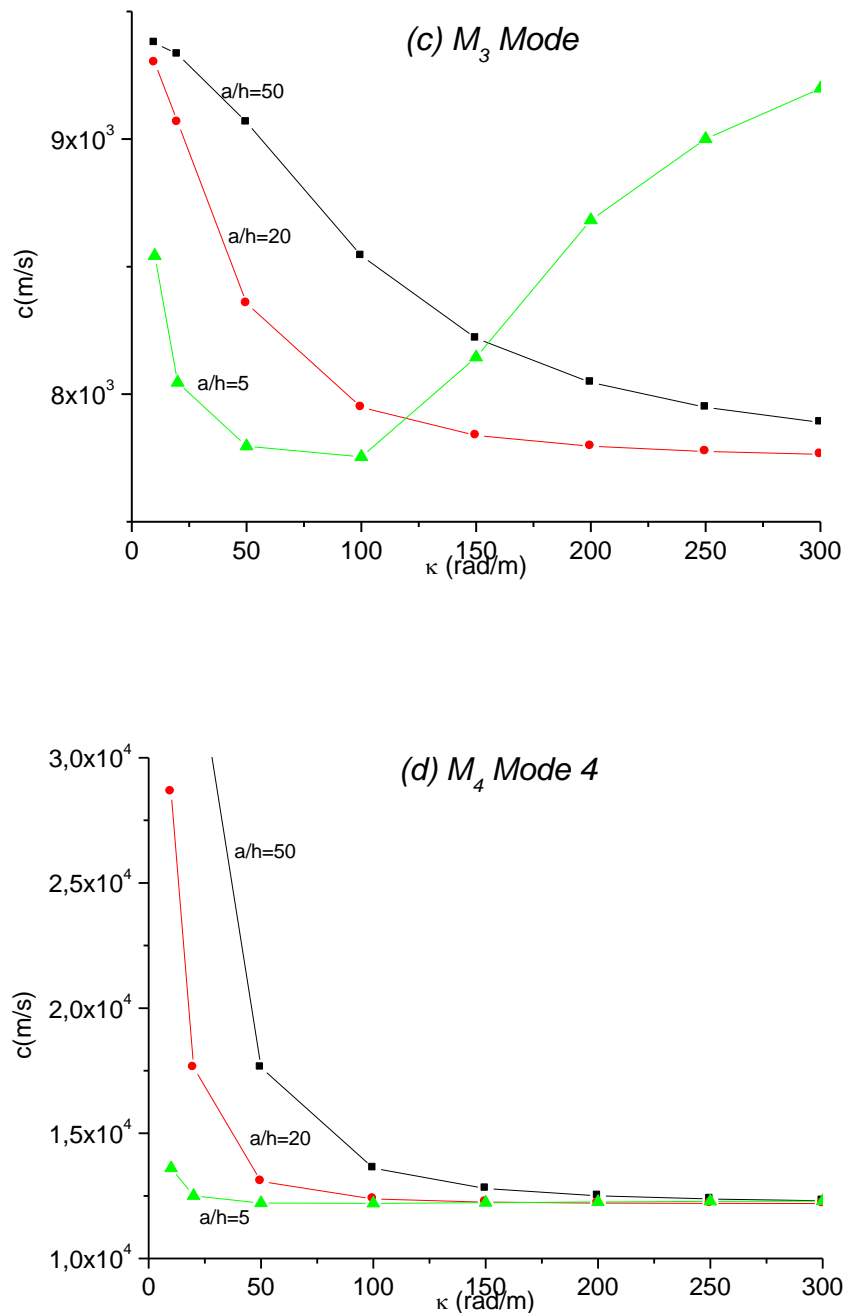
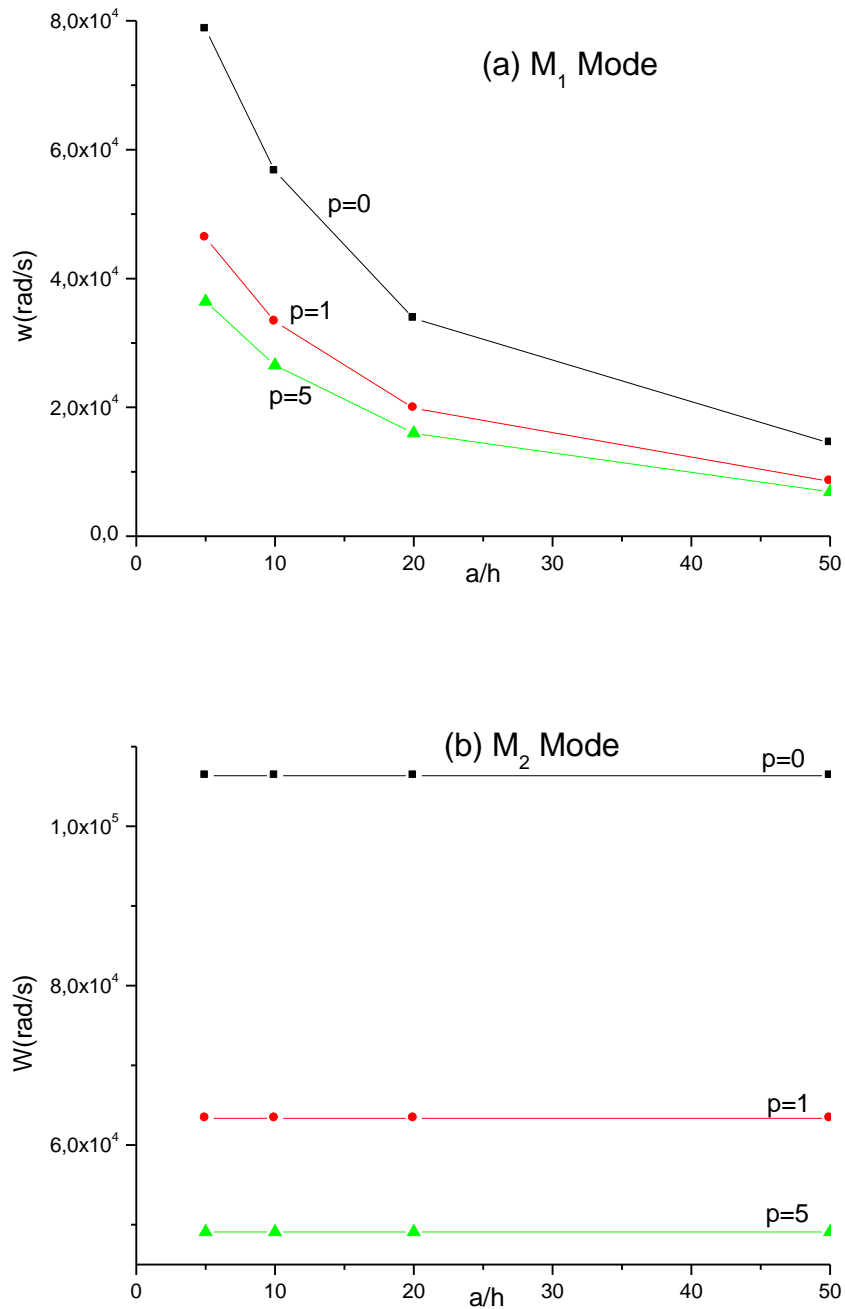


Figure.V.4: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent rapport épaisseur ( $a/h$ ;  $p=2$ )

Figurés.V.5-6 présentent respectivement les courbes de dispersion et la vitesse de phase dans la plaque P-FGM en fonction du rapport longueur-épaisseur ( $a/h$ ), en utilisant une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique. Le nombre d'ondes est ici pris égal à  $k = 10$ ; à partir de ces figures, les similitudes dans les évolutions des courbes de dispersion et de vitesse de phase peuvent être mises en évidence.

Pour le mode M1, l'augmentation du rapport longueur / épaisseur de la plaque entraîne une diminution de la fréquence ainsi que de la vitesse de phase. Les modes M2 et M3, l'augmentation du rapport longueur / épaisseur de la plaque n'a aucune influence sur la fréquence et la vitesse de phase. Au contraire, pour le mode M4, l'augmentation du rapport longueur / épaisseur de la plaque entraîne une augmentation de la fréquence et de la vitesse de phase.



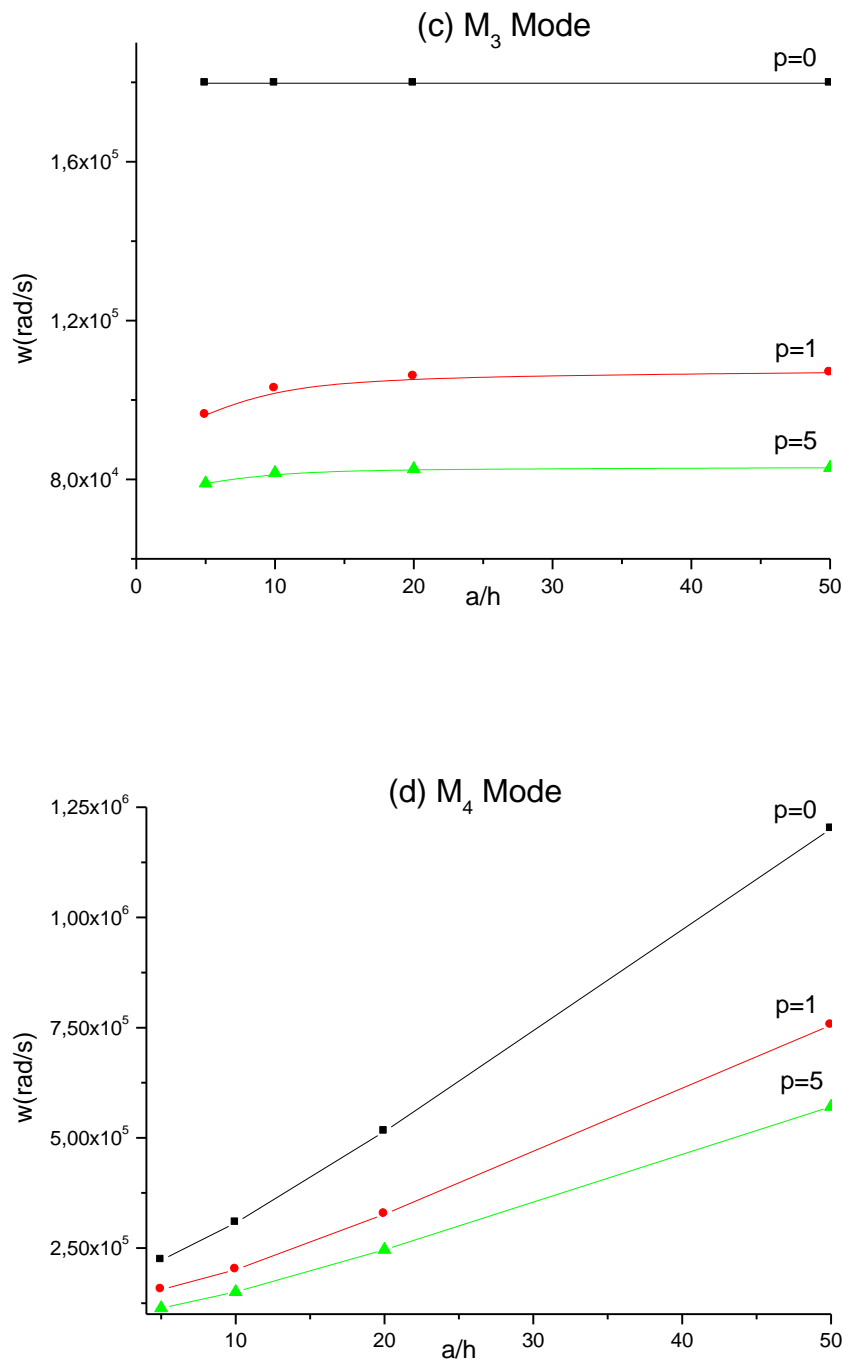
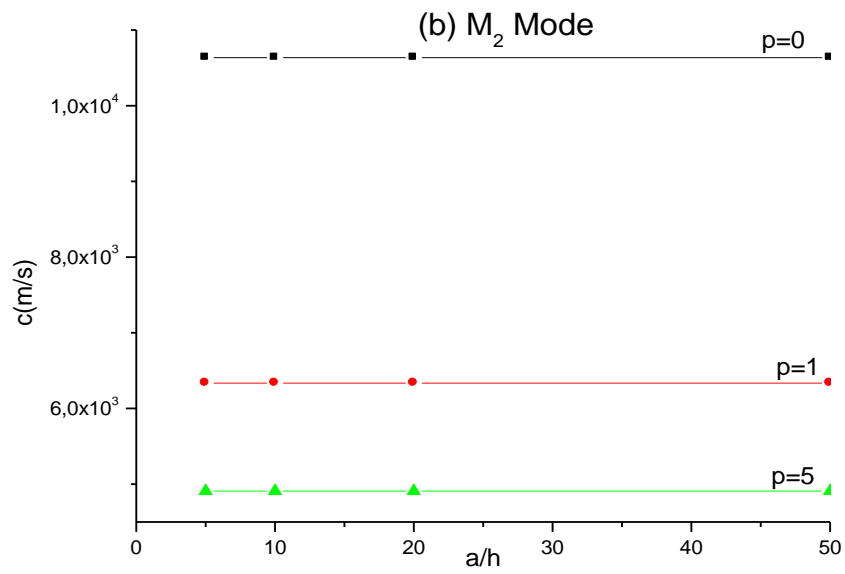
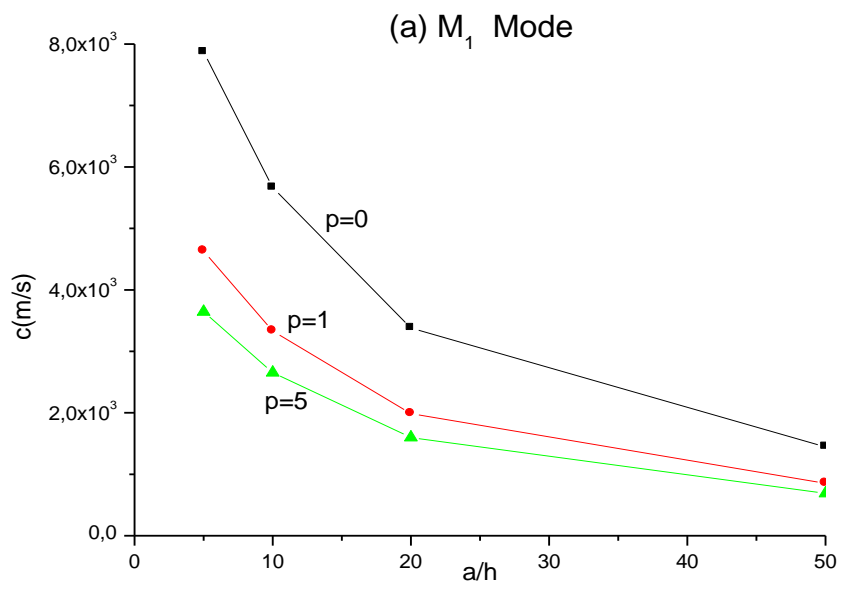
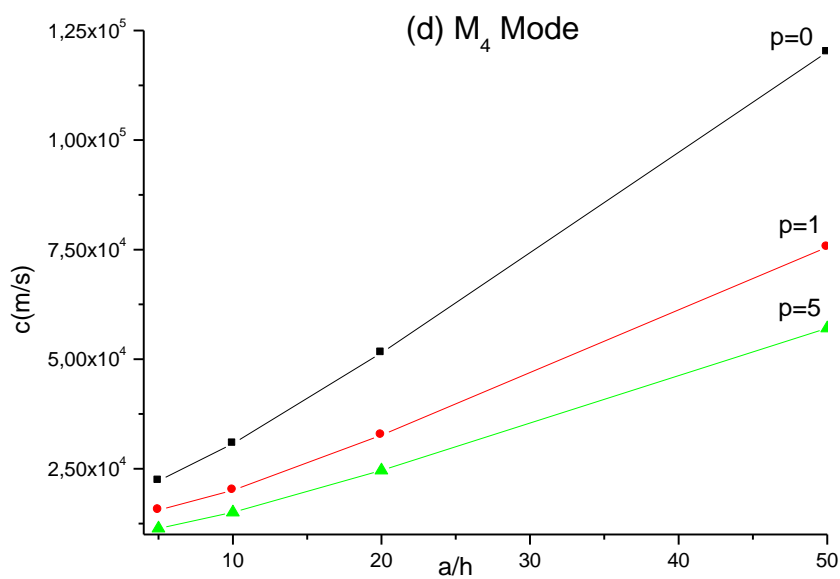
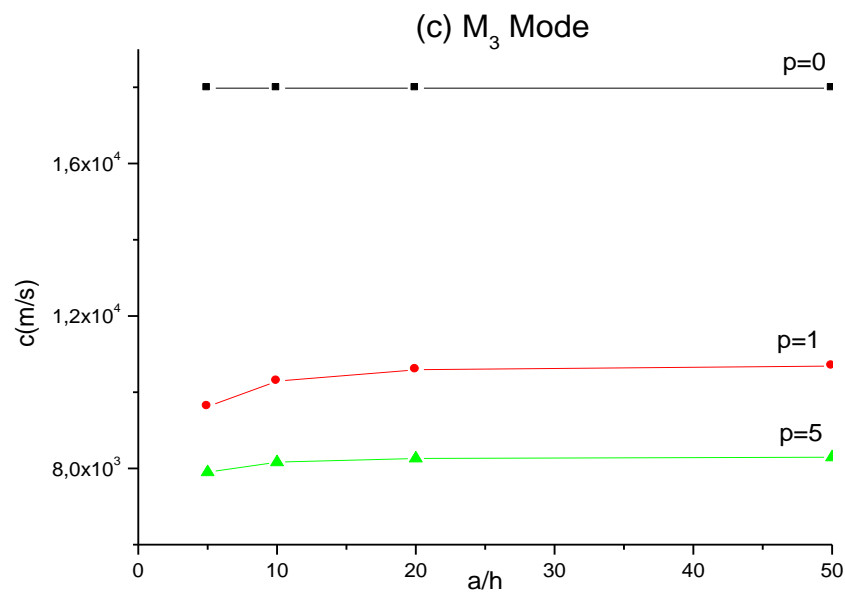


Figure.V.5: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent indice de puissance matériel ( ait ;  $\kappa = 10$ )







Figures.V.6: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-fgm avec différent indice de puissance matériel ( $\kappa = 10$ )

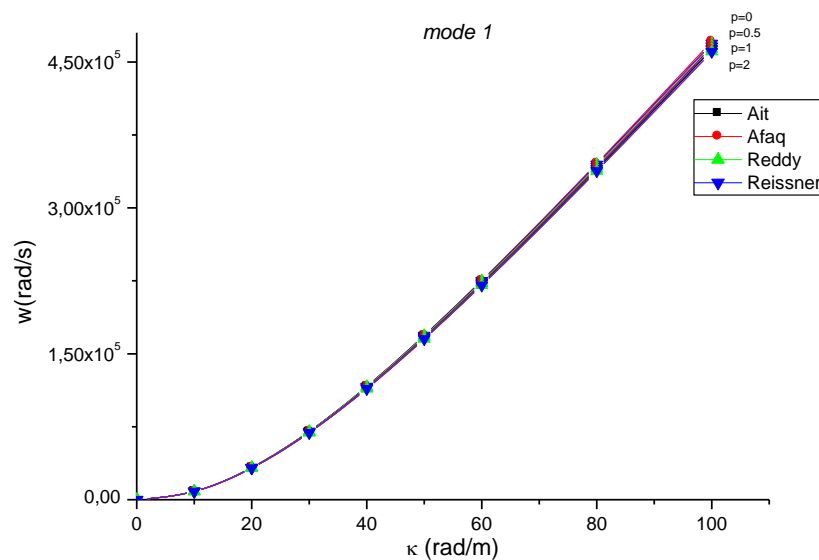
### V.2.3. Propagation des ondes dans les plaques S- FGM parfait

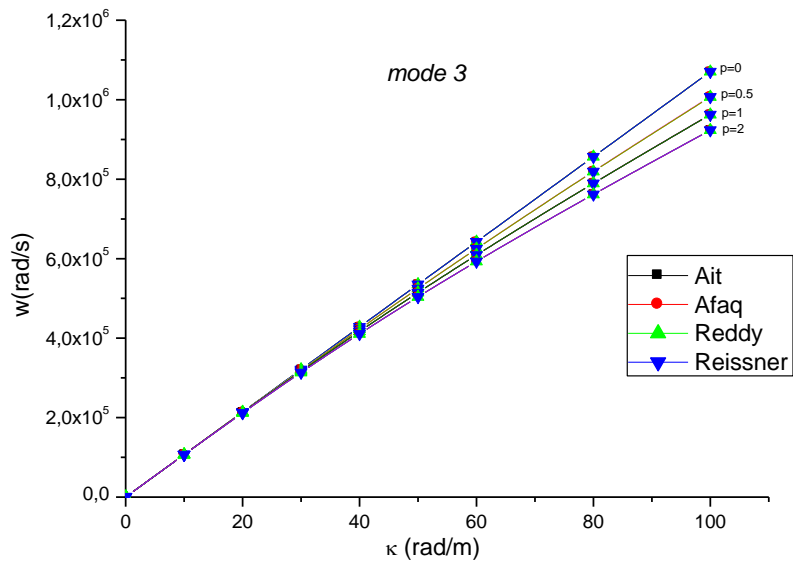
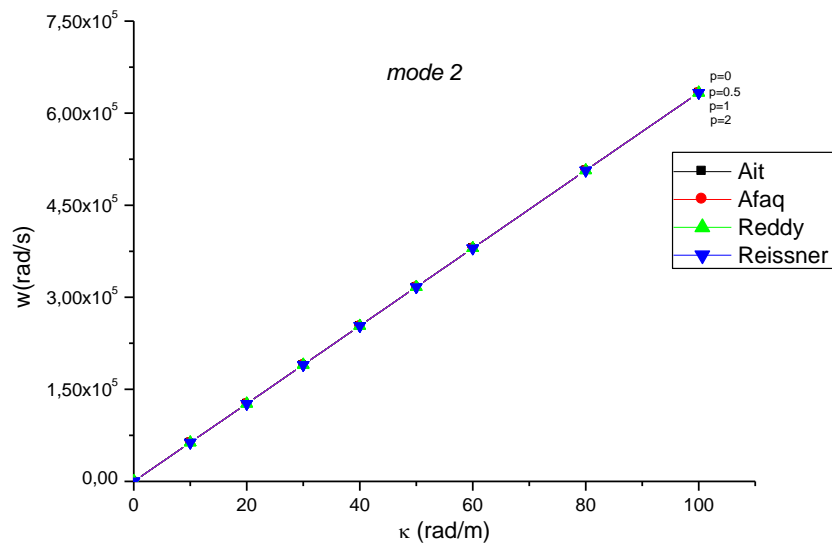
L'analyse de la vibration libre des plaques S-FGM parfaites simplement appuyés est également considérée dans cette étude ; Utilisant les différentes fonctions de forme  $f(z)$

présentées dans le tableau IV.1 pour assurer la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque,

Les effets de l'indice de la fraction volumique  $p$  sur les fréquences propres  $\omega$  des plaques S-FGM parfaite en fonction de nombre d'onde  $k$  pour les quatre modes de vibration avec une valeur du rapport d'épaisseur  $a/h = 50$  de la plaque sont illustrés dans la figure V.7. D'après cette figure, la variation de la fréquence en fonction de nombre d'onde  $k$  et de l'indice matériel  $p$  est résumée comme suit:

Il apparait clairement que les résultats obtenus par les différents modèles concordent parfaitement entre eux et les fréquences de vibration pour les quatre modes de vibration augmentent avec l'augmentation du nombre d'onde  $k$ . Pour le même nombre d'onde  $k$  la fréquence du mode fondamentale et du troisième mode de la plaque S-FGM diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique  $p$  et augmente avec l'augmentation de  $p$  dans le quatrième mode ; pour le deuxième mode les fréquences de vibration sont égales pour les différentes valeurs de l'indices de puissance matériel  $p$ .





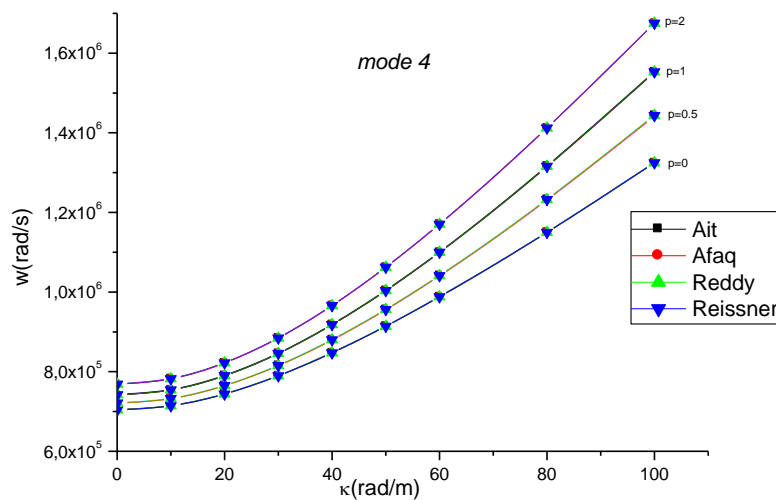
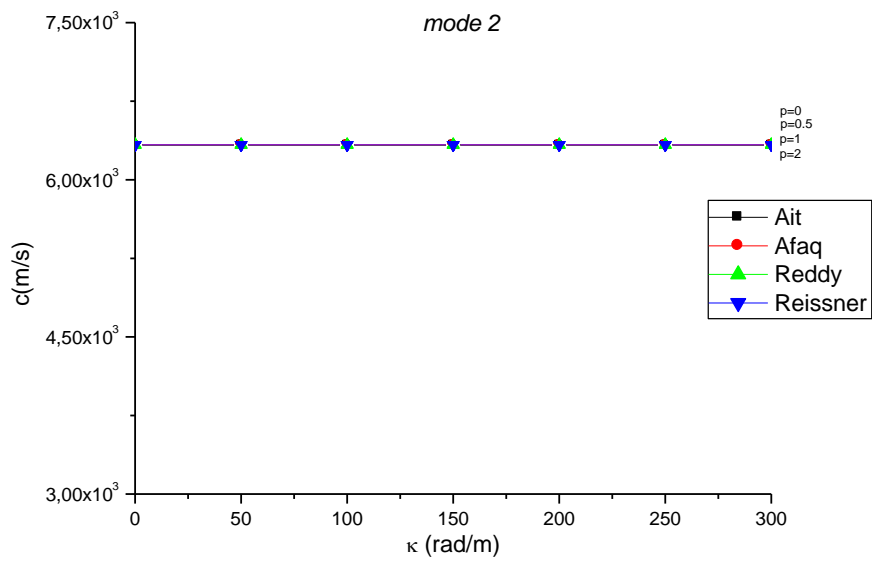
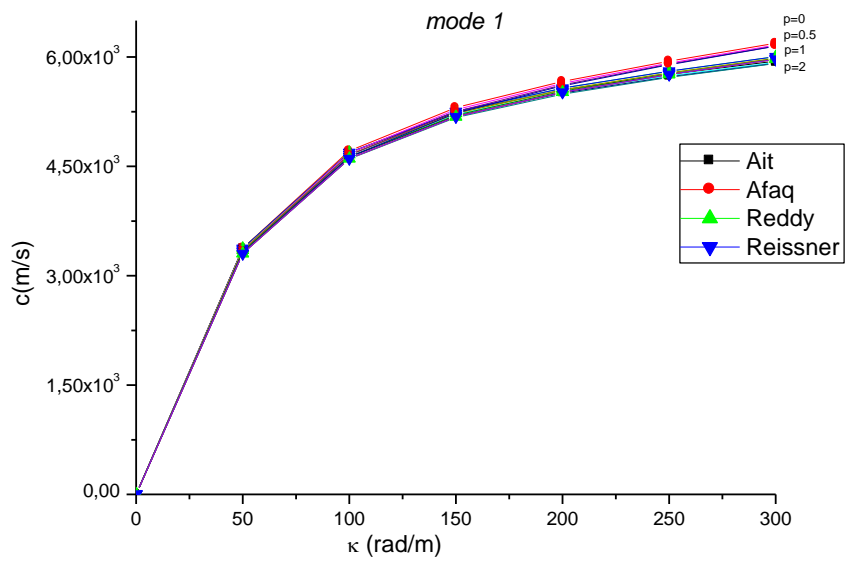


Figure.V.7 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel S-fgm

La figure V.8 montre l'évolution de vitesse de phase en fonction de nombre d'onde de propagation et l'indice de puissance matériel ( $p$ ) dans les plaques S-FGM, on observe que les courbes de vitesse de phase présentées par toutes les théories proposées de la plaque FGM sont pratiquement identiques les unes aux autres. Il peut être vu que la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque S-FGM augmente avec l'augmentation du nombre d'onde et diminue à mesure que l'indice de loi de puissance  $p$  augmente pour le même nombre d'onde  $k$  du mode fondamentale ; La vitesse de phase pour le mode d'onde  $M_2$  quel que soit l'indice  $P$  et  $M_3$  de la plaque quand ( $p = 0$ ) n'est pas affecté par la variation du nombre d'onde, pour le mode  $M_4$  la vitesse de phase diminue avec l'augmentation du nombre d'onde et augmente avec l'augmentation de l'indice de puissance matériel.



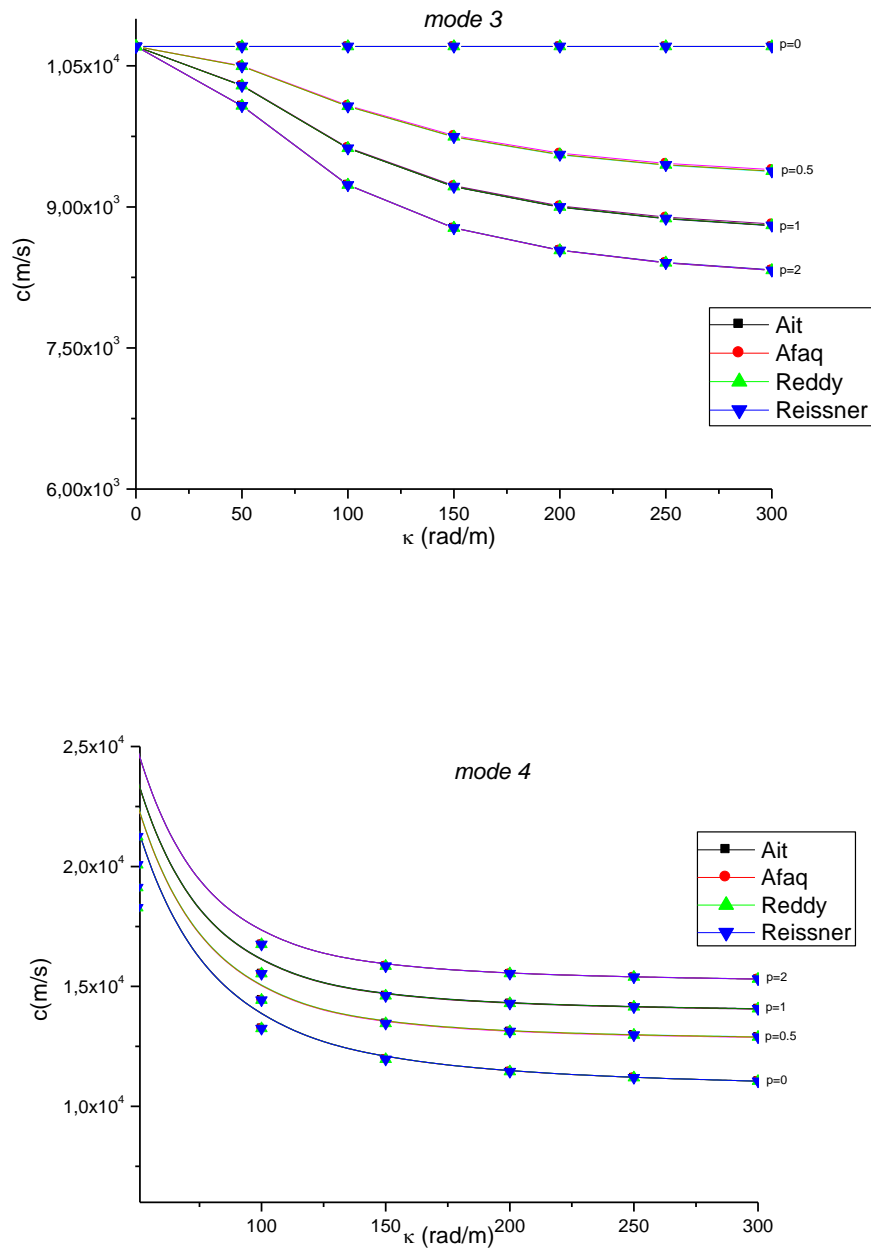
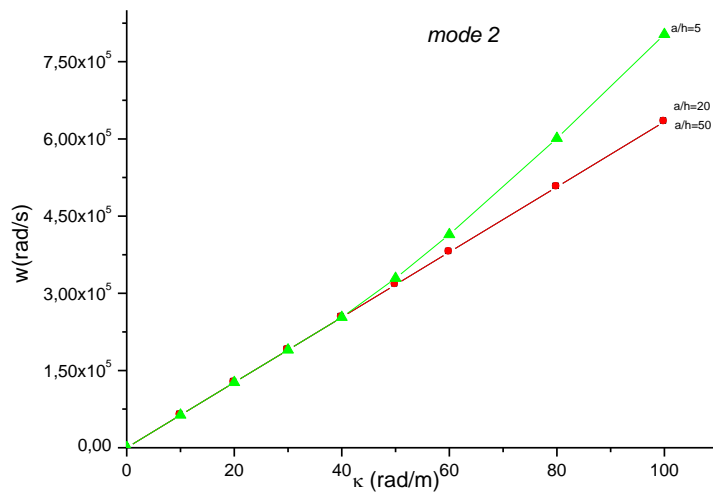
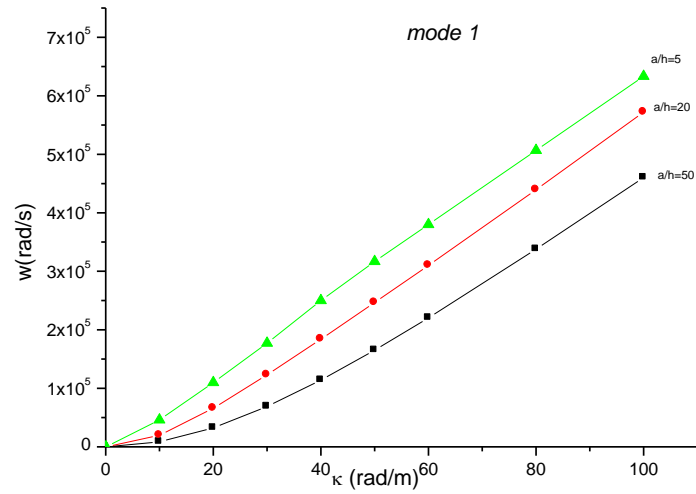


Figure.V.8: Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement gradués S-fgm

#### V.2.4. Etude paramétrique de la plaque S-fgm

La figure V.9 montre l'effet du rapport épaisseur longueur ( $a/h$ ) sur la fréquence naturel d'une plaque S- FGM en fonction du nombre d'onde utilisant une fonction de forme hyperbolique proposée par ait atmane (2010). L'indice de puissance est considéré égal à  $p=2$ . Dans cette figure, Il est clair que la fréquence est maximale pour une plaque FGM épaisse et dans le cas

d'une plaque mince devienne minimale pour le première et le deuxième mode. On peut également remarquer que la fréquence augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur  $a/h$  pour les deux autres modes.



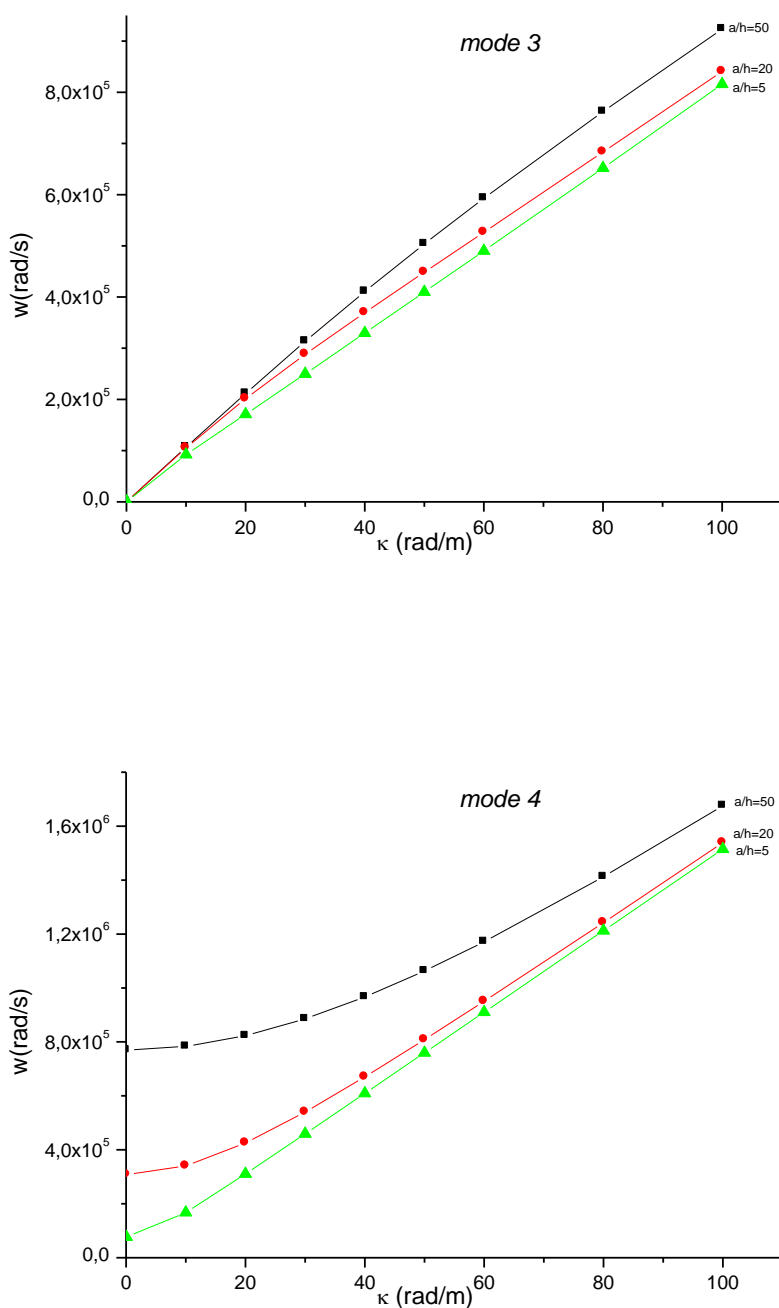
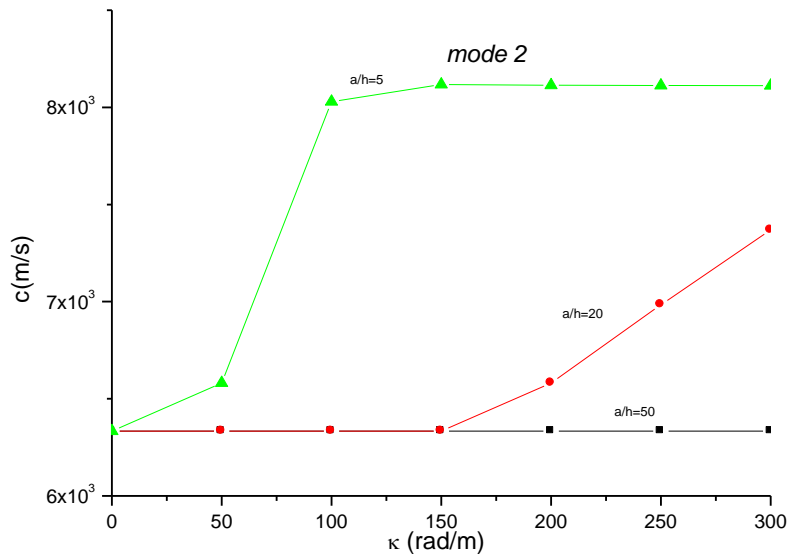
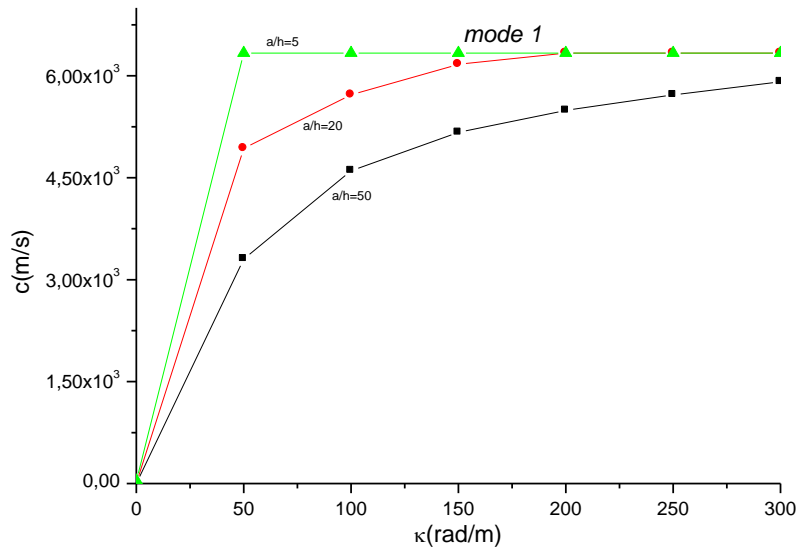


Figure.V.9: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent rapport épaisseur ( $a/h$  ;  $p=2$ )

Pour étudier l'effet du rapport d'épaisseur longueur ( $a/h$ ) sur la vitesse de phase ; La figure V.10 montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques S-FGM en fonction du nombre d'onde avec  $p=2$ . D'après les résultats graphiques, Il est intéressant de constater que l'influence du rapport ( $a/h$ ) sur la vitesse de phase est également significative pour les nombres



d'onde plus petit ainsi la vitesse de phase de la plaque diminue à mesure que le rapport ( $a/h$ ) augmente pour le mode  $M_1$  et  $M_2$  excepté pour le mode d'onde  $M_3$  et  $M_4$  où un comportement inverse est observé.



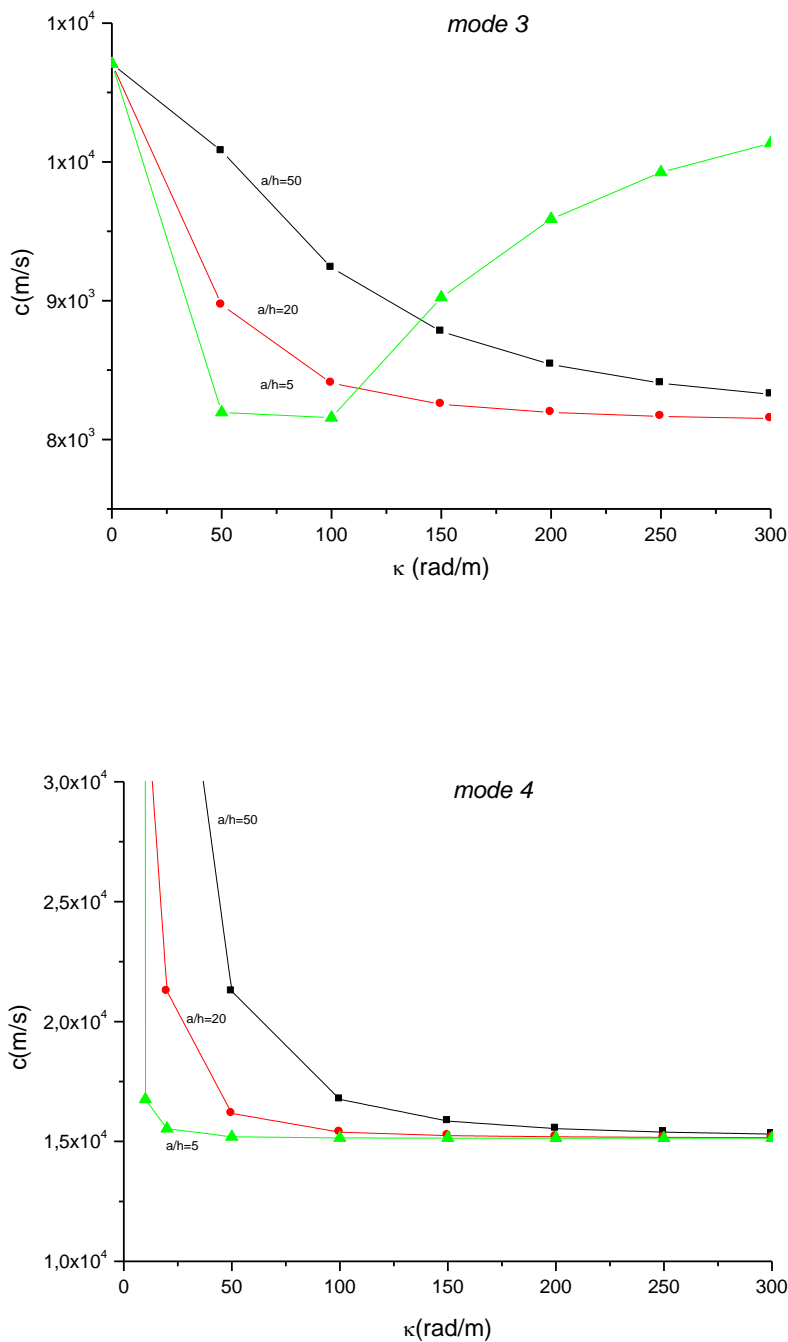
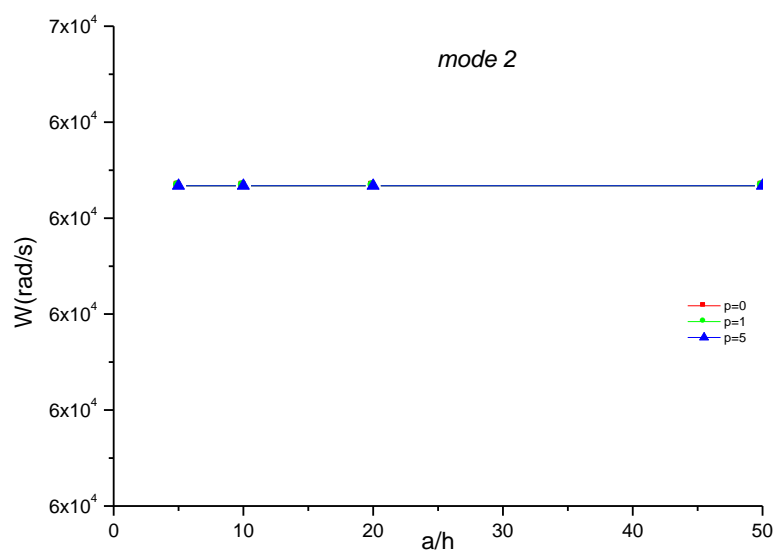
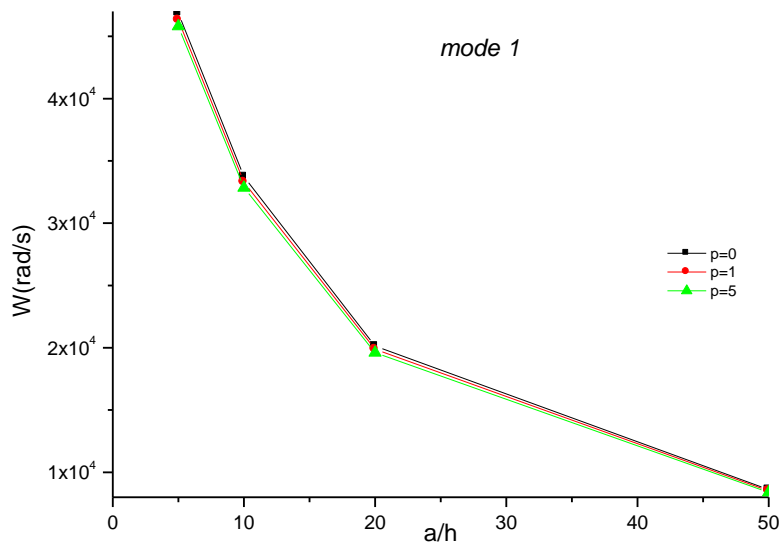
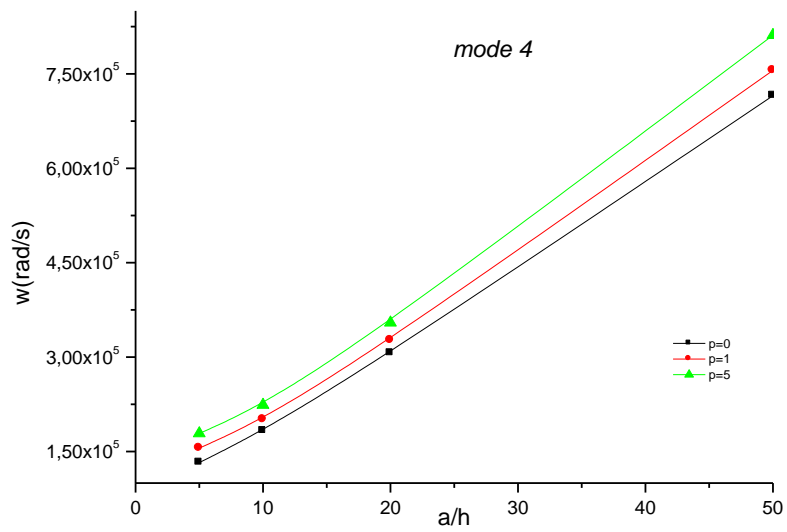
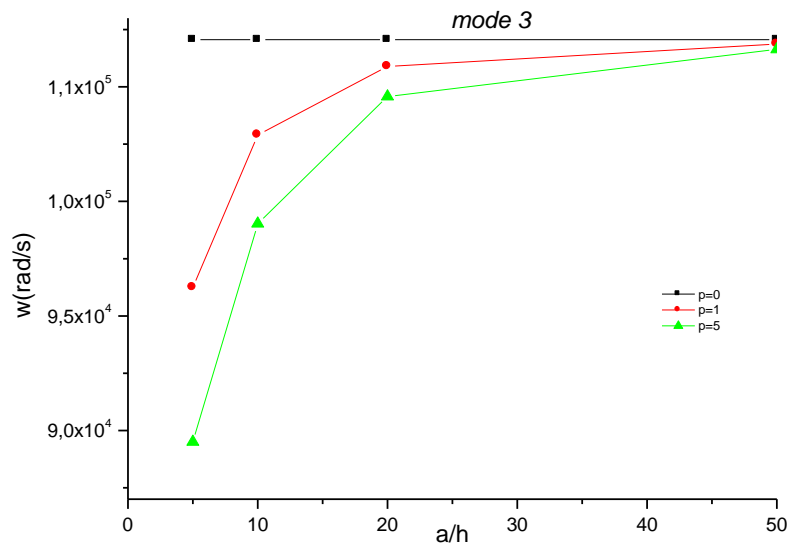


Figure.V.10: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent rapport épaisseur ( $a/h$ ) ;  $p=2$ )

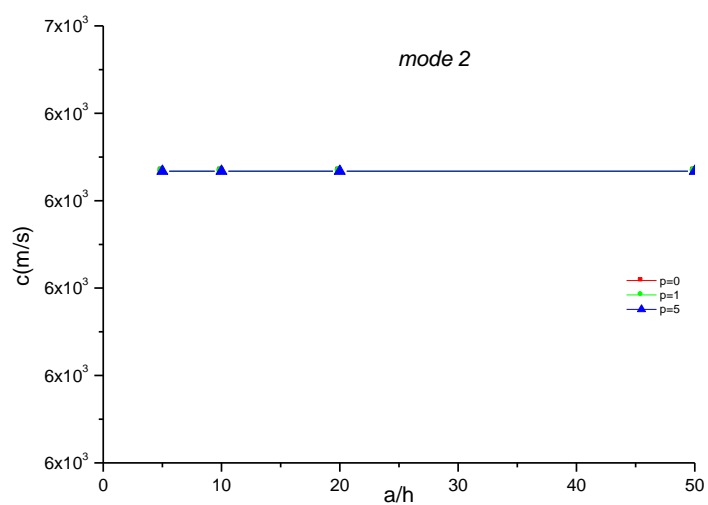
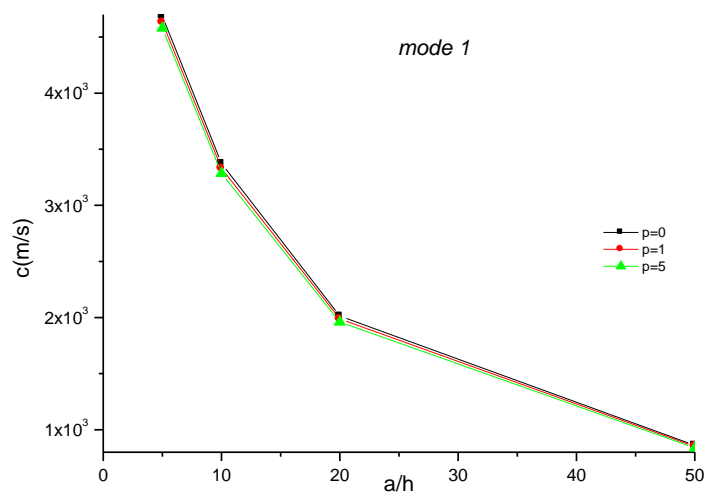
L'effet de l'indice de puissance matériel sur la fréquence naturel et la vitesse de phase d'une plaque S-FGM en fonction du rapport d'épaisseur longueur ( $a/h$ ) est présenté dans les figures V.11-V.12 respectivement, le nombre d'onde est pris égal à  $k = 10$ . Il est à noter que la

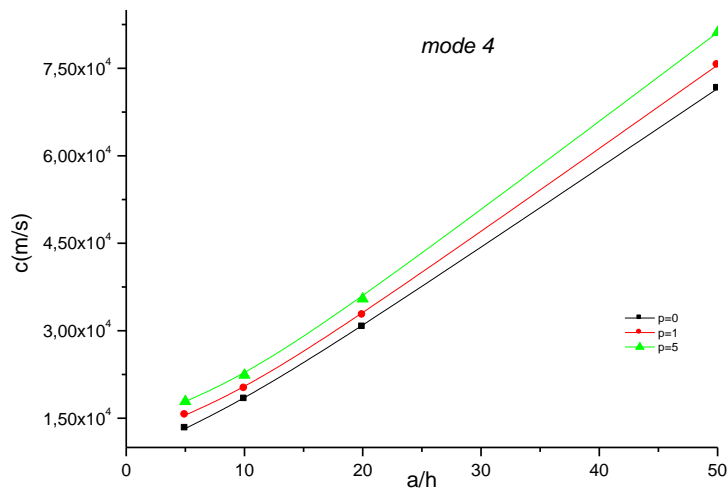
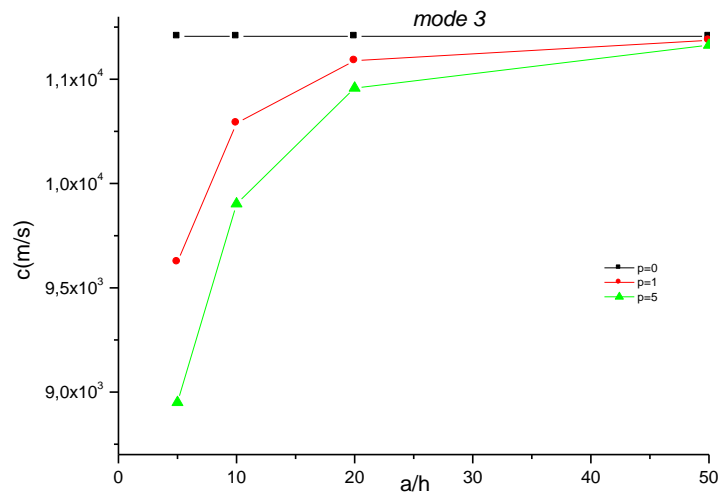
fréquence et les vitesses de phase diminuent avec l'augmentation du rapport longueur épaisseur et les valeurs maximum sont obtenu pour épaisseur entièrement en céramique pour le mode  $M_1$  pour le mode  $M_2$  la variation du rapport  $a/h$  et l'indice  $P$  n'ont aucune influence sur la fréquence et la vitesse de phase on peut également remarquer que la fréquence et la vitesse de phase augmente avec l'augmentation du rapport  $a/h$  mode des modes  $M_3$  et  $M_4$ .





Figures.V.11: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent indice de puissance matériel (ait ;  $\kappa = 10$ )





Figures.V.12: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel avec différent indice de puissance matériel ( $\kappa = 10$ )

### V.2.3 Comparaison étude paramétrique de plaques P-FGM et S-FGM

Les Figures. V. 13 à 16 contiennent des comparaisons des variations des fréquences et vitesses de phase des plaques P-FGM et S-FGM carrées avec un indice de loi de puissance ( $P = 2$ ), en

fonction de nombre d'onde et rapport épaisseur longueur ; il est clair que la plaque S-FGM présente des résultats supérieurs à ceux de la plaque P-FGM pour le mode fondamental. Cette observation est valable pour tous les modes. Ainsi, une répartition en douceur des propriétés du matériau sur l'épaisseur a été assurée.

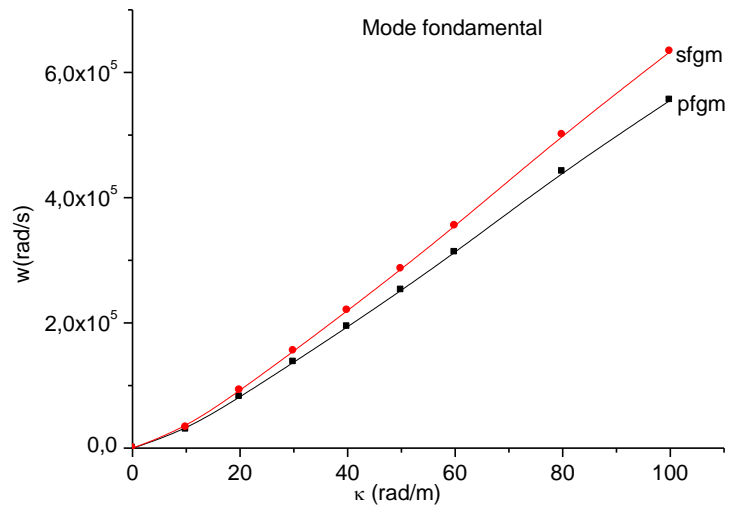


Figure.V.13: Comparaisons des fréquences Pfgm–Sfgm ( $a/h=10$ ,  $p=2$ ) (ait)

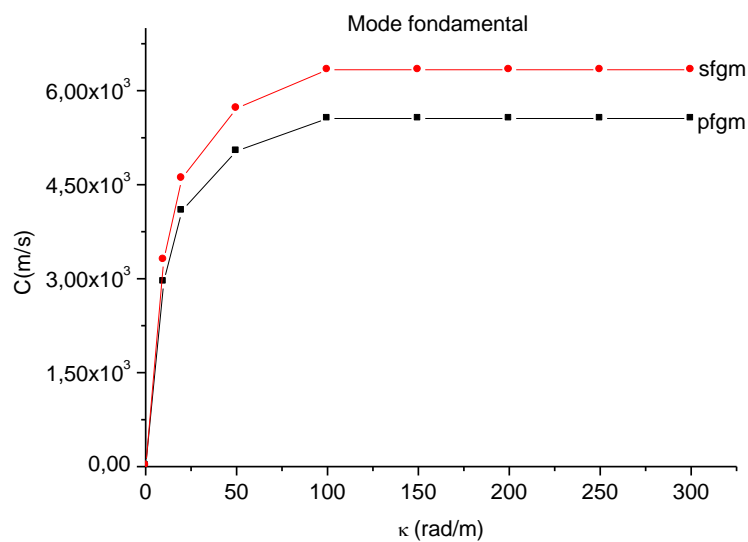


Figure.V.14: Comparaisons des vitesses de phase Pfgm– Sfgm ( $a/h=10$ ,  $p=2$ ) (ait)

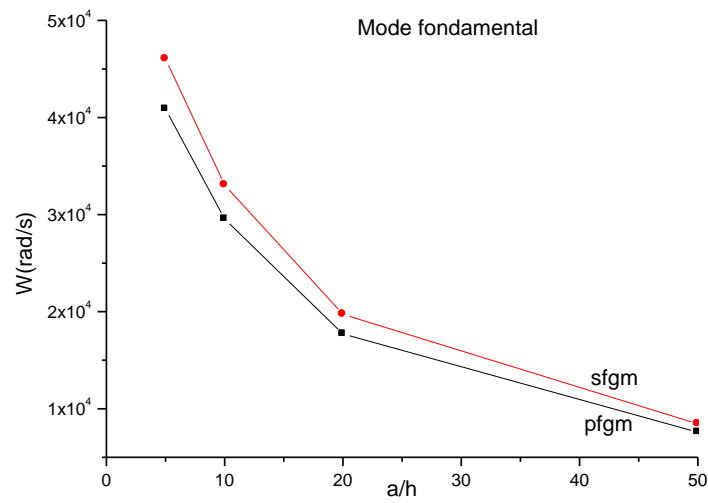


Figure.V.15: Comparaisons des fréquences Pfgm–Sfgm ( $\kappa=10$   $p=2$ ) (ait)

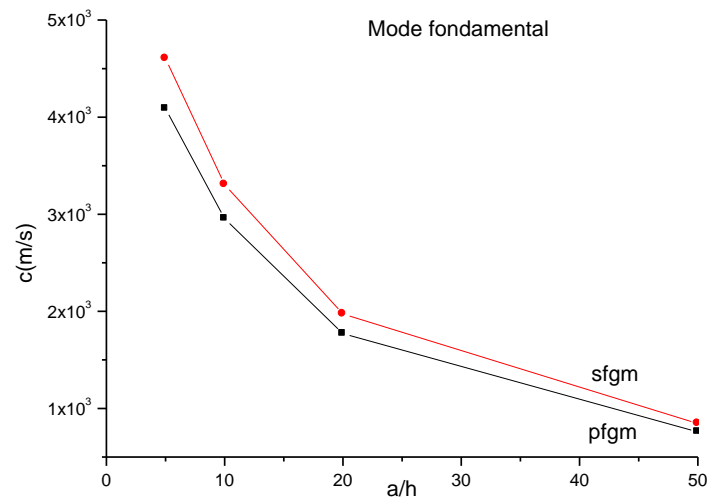


Figure.V.16: Comparaisons des vitesses de phase Pfgm– Sfgm ( $\kappa=10$ ,  $p=2$ ) (ait)

### V.3.1. Plaque en FGM imparfaite (poreuse)

Dans le cadre d'analyser l'effet de porosité sur le comportement vibratoire et les vitesses de phase des plaques FGM carrée simplement appuyée avec porosité, dans cette partie, Les



propriétés du matériau de la plaque FGM sont supposées variées en fonction d'une distribution en loi de puissance. L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels, La plaque fonctionnellement graduée est confectionnée par deux matériaux (Si3N4 / SUS304) ; dont leurs propriétés sont présentés précédemment avec un nombre d'onde ( $\kappa = 10$ ). L'objectif de cette étude est d'utiliser le présent modèle de distribution de porosité pour l'étude du comportement en vibration libre des plaques FGM avec porosités.

Tableau .V. 1. fréquences naturel d'une plaque FG pour déférent rapport d'épaisseur paramètre de porosité, indices de puissance matériel et distributions de porosité.

a/h	p	$\lambda=0$			$\lambda=0,1$			$\lambda=0,2$		
		Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent	Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent	Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent
5	0	78680,80	78680,80	78680,80	85629,23	81551,57	81550,31	96890,84	84841,06	84829,58
	0.5	53406,38	53406,38	53406,38	54182,36	53788,74	53788,58	55166,40	54179,50	54178,22
	1	46301,80	46301,80	46301,80	46166,29	46274,80	46274,82	45974,20	46227,97	46228,16
	5	36431,00	36431,00	36431,00	35427,32	35925,91	35926,13	34201,36	35368,65	35370,55
	10	34648,82	34648,82	34648,82	33532,33	34089,57	34089,81	32179,12	33474,25	33476,35
10	0	56646,44	56646,44	56646,44	61648,98	58995,93	58994,90	69756,81	61682,99	61673,63
	0.5	38361,90	38361,90	38361,90	38917,80	38825,08	38824,89	39627,60	39304,78	39303,19
	1	33289,58	33289,58	33289,58	33183,38	33441,90	33441,84	33034,31	33587,82	33587,36
	5	26537,07	26537,07	26537,07	25843,07	26364,23	26364,31	24993,52	26163,80	26164,50
	10	25211,47	25211,47	25211,47	24438,12	25001,00	25001,09	23501,75	24761,30	24762,13

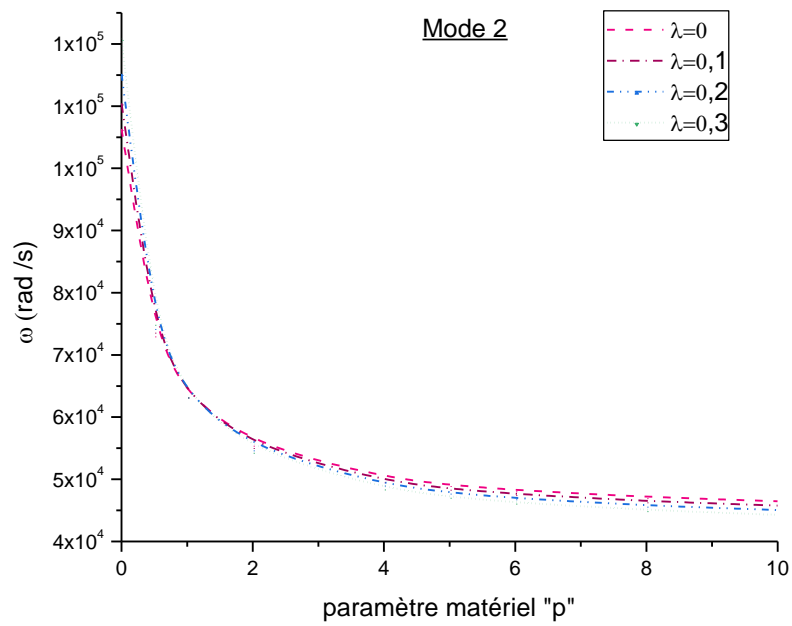
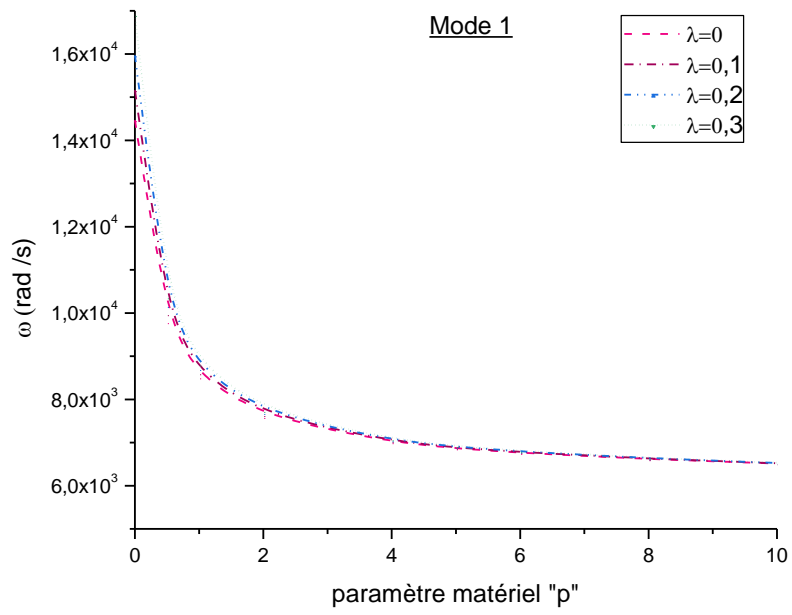
Tableau .V. 2. Vitesse de phase d'une plaque FG pour déférent rapport d'épaisseur paramètre de porosité, indices de puissance matériel et distributions de porosité.

a/h	p	$\lambda=0$			$\lambda=0,1$			$\lambda=0,2$		
		Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent	Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent	Nuttawit 2013	Gupta 2017	présent
5	0	7868,08	7868,08	7868,08	8562,92	8155,16	8155,03	9689,08	8484,11	8482,96
	0.5	5340,64	5340,64	5340,64	5418,24	5378,87	5378,86	5516,64	5417,95	5417,82
	1	4630,18	4630,18	4630,18	4616,63	4627,48	4627,48	4597,42	4622,80	4622,82
	5	3643,10	3643,10	3643,10	3542,73	3592,59	3592,61	3420,14	3536,86	3537,05
	10	3464,88	3464,88	3464,88	3353,23	3408,96	3408,98	3217,91	3347,43	3347,64
10	0	5664,64	5664,64	5664,64	6164,90	5899,59	5899,49	6975,68	6168,30	6167,36
	0.5	3836,19	3836,19	3836,19	3891,78	3882,51	3882,49	3962,76	3930,48	3930,32
	1	3328,96	3328,96	3328,96	3318,34	3344,19	3344,18	3303,43	3358,78	3358,74
	5	2653,71	2653,71	2653,71	2584,31	2636,42	2636,43	2499,35	2616,38	2616,45
	10	2521,15	2521,15	2521,15	2443,81	2500,10	2500,11	2350,17	2476,13	2476,21

Les tableaux V.1 et V.2 présentent les fréquences et les vitesses de phase d'une plaque FGM pour les trois types de distribution de porosité. À partir des résultats présentés dans ces deux tableaux, on peut remarquer que si l'indice de puissance matériel ( $P$ ) augmente donc la plaque FGM devient riche en métal le module d'élasticité s'accroît le matériau devient rigide en conséquence les fréquences et les vitesses de phase se diminuent et augmentent si l'épaisseur de la plaque augmente, nous pouvons observer aussi que les valeurs des fréquences et de la vitesse obtenues par le modèle actuel sont en bon accord avec celles du modèle de Gupta (2017) dans les deux cas  $\lambda=0,1$  et  $\lambda = 0,2$  quelle que soit la valeur du rapport épaisseur longueur et l'indice de puissance matériel.

Les courbes de variation de la fréquence propre ( $\omega$ ) et de la vitesse de phase pour les quatre premiers modes des différentes plaques à gradation fonctionnelle, en fonction de l'indice de puissance du matériau ( $p$ ) pour différentes valeurs de porosité ont été respectivement présentées aux figures V.17 et V.18; nous pouvons voir que plus le paramètre de l'indice de puissance matériel est élevé, plus la fréquence naturelle et la vitesse de phase dans les plaques FGM sont faibles, quel que soit le facteur de porosité. Cependant, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la fréquence pour les deux premiers modes et l'inverse pour les modes 3 et 4. En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour une plaque en céramique ( $p = 0$ ) et un facteur de porosité  $\lambda = 0,3$ .

La fréquence propre et la vitesse de phase de la propagation d'onde dans la plaque homogène sont maximum parmi celles de toutes les autres plaques FGM. Cela est dû au fait que la plaque de céramique ( $p = 0$ ) est celle qui présente une plus grande rigidité. Par conséquent, il est clair que l'hétérogénéité des FGM a une grande influence sur la vitesse de phase de la propagation de l'onde et la fréquence naturelle dans la plaque FGM.



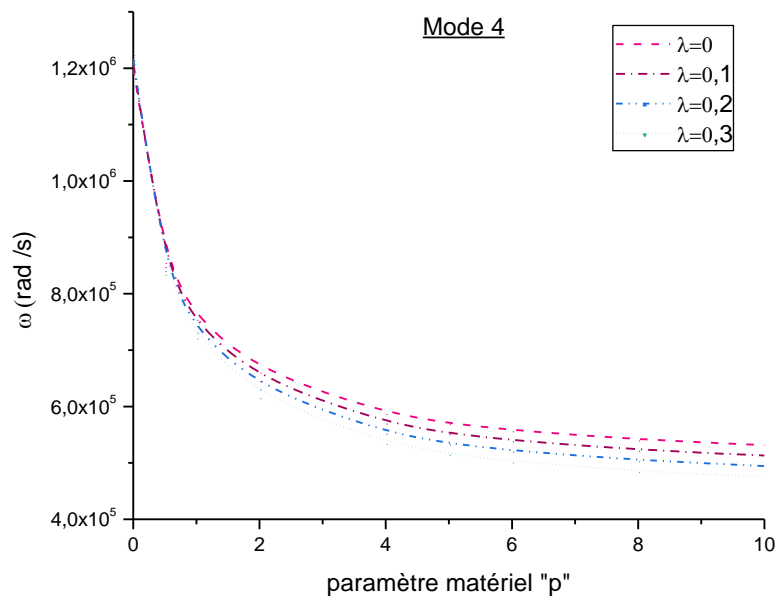
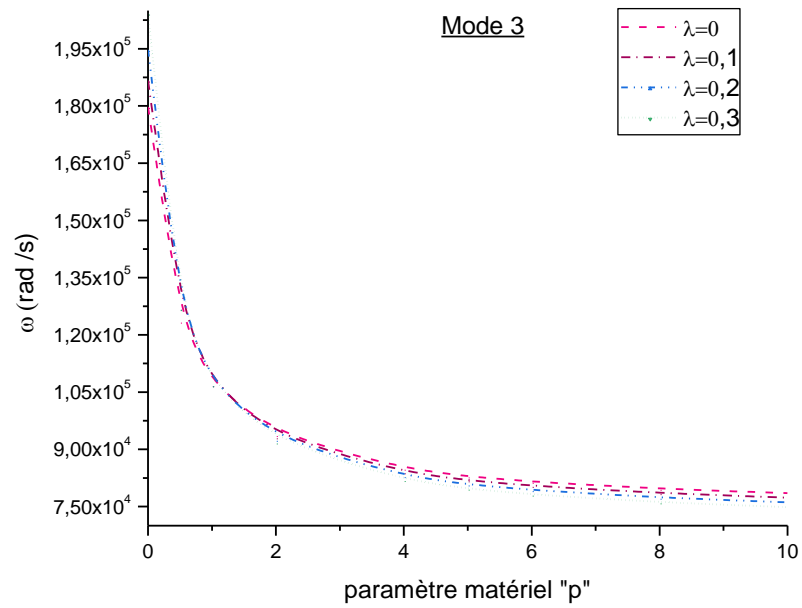
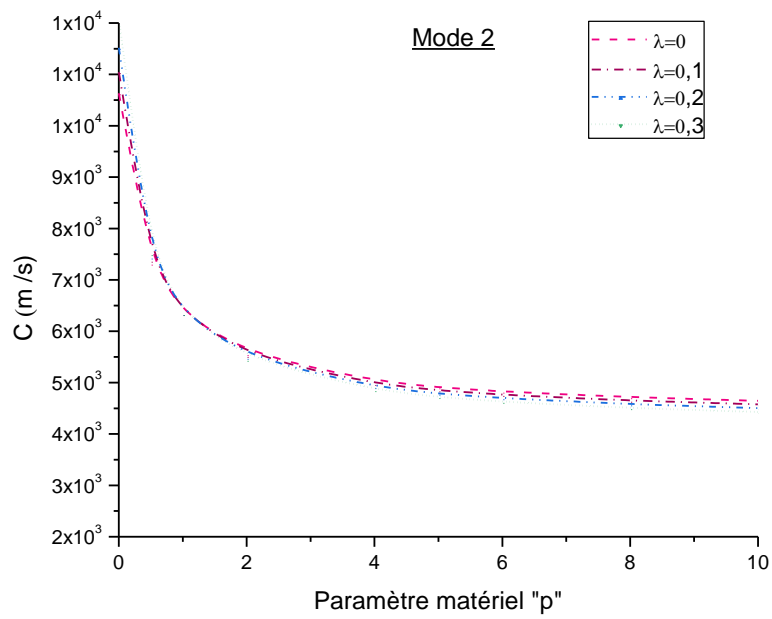
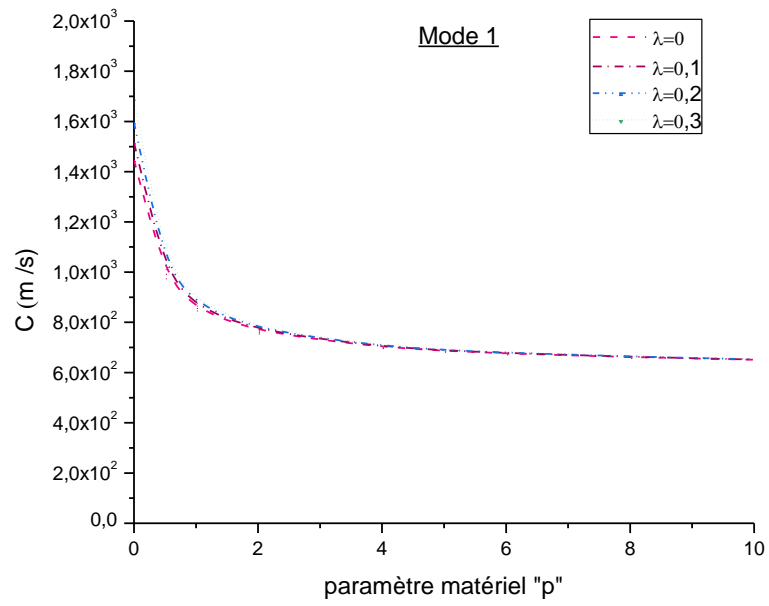


Figure.V.17: variation des fréquences naturelles d'une plaque FG en fonction indice de puissance matériel avec différent indice de porosité



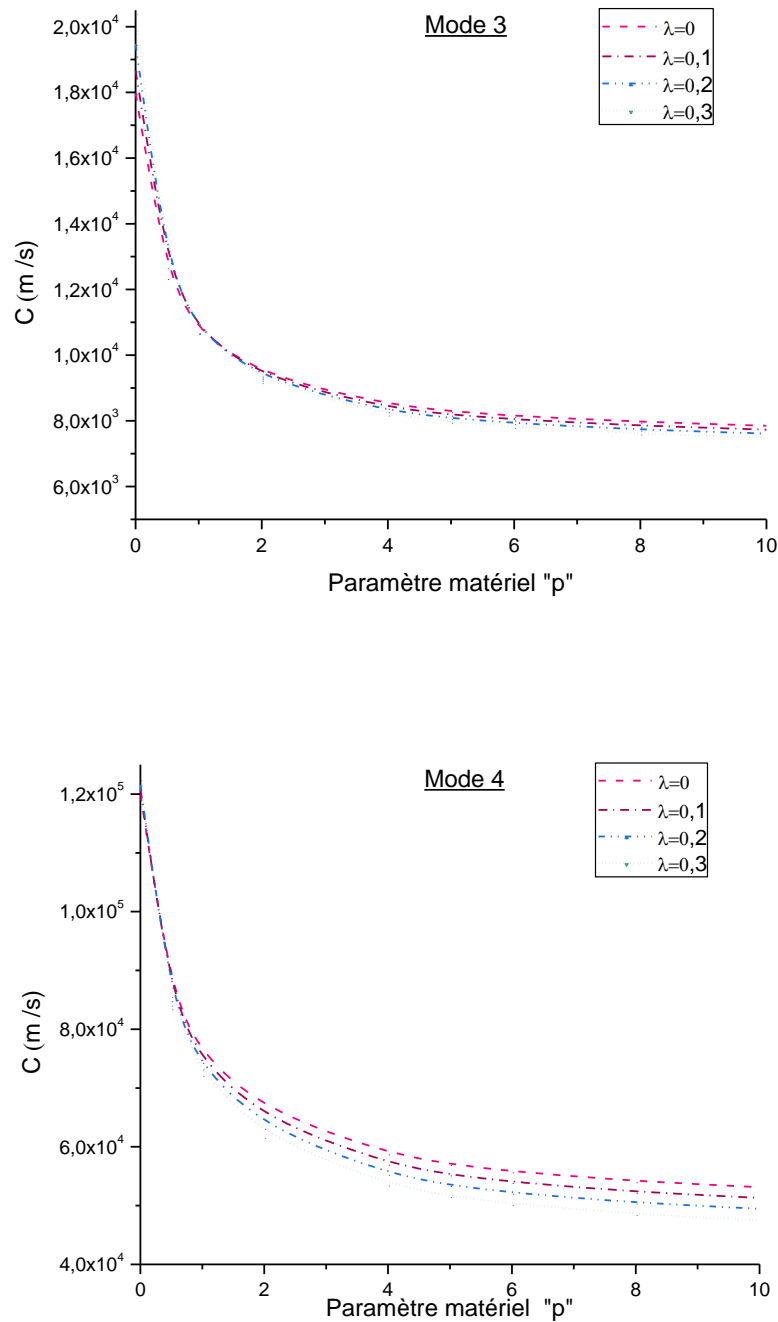
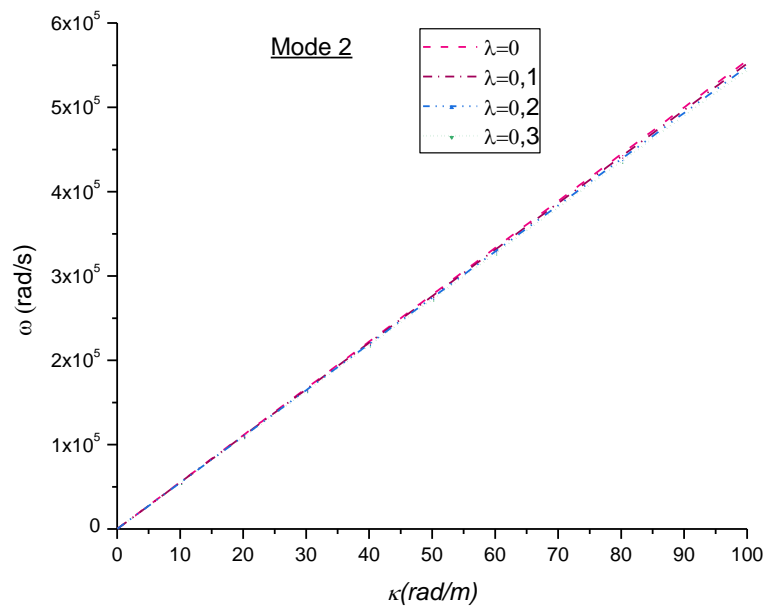
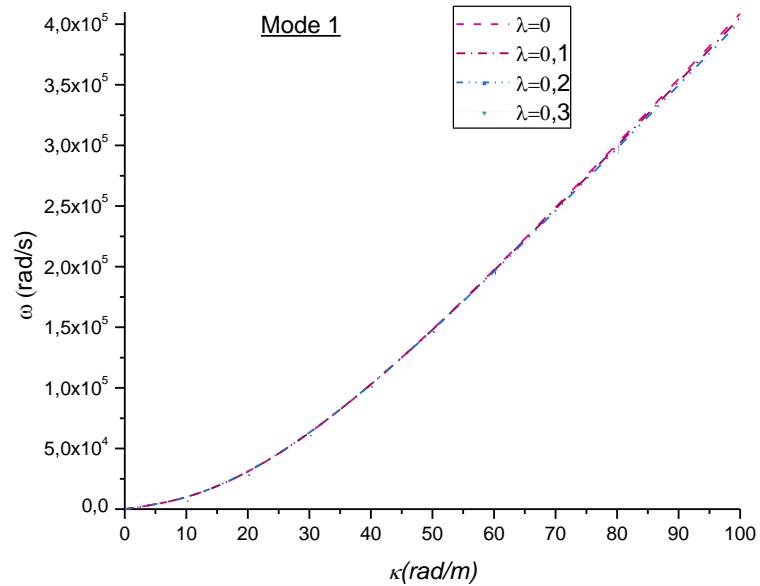


Figure.V.18: variation des vitesses de phases d'une plaque FG en fonction indice de puissance matériel avec différent indice de porosité

Afin d'étudier l'effet du paramètre de porosité sur les caractéristique vibratoire de la plaque FGM poreuse La figure.V.19 montre les courbes de fréquence des différentes plaques FGM obtenues respectivement en utilisant la formule proposée du facteur de distribution de la porosité pour différentes valeurs de cette dernière avec un indice de puissance matériel ( $p=2$ )

en fonction du nombre d'onde  $k_p$ . On peut voir à partir de ces courbes que la fréquence augmente avec l'augmentation de  $k_p$  pour le même paramètre de porosité du matériau. Nous pouvons également observer que la fréquence devient maximale pour la plaque parfaite ( $\lambda=0$ ) ; La raison est que, en augmentant le paramètre de porosité, la résistance du matériau diminue en conséquent Les paramètres de porosité jouent un rôle très important dans le comportement vibratoire des plaques poreuses FG.



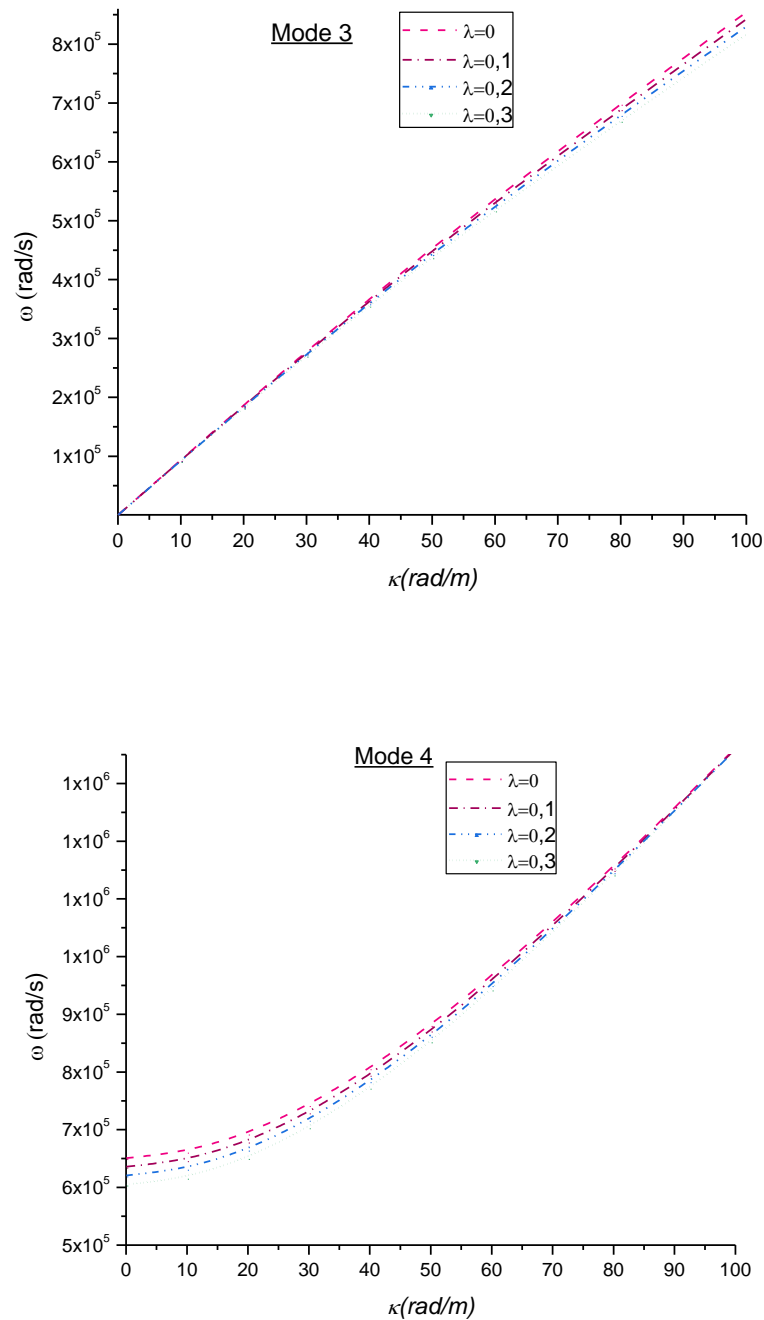
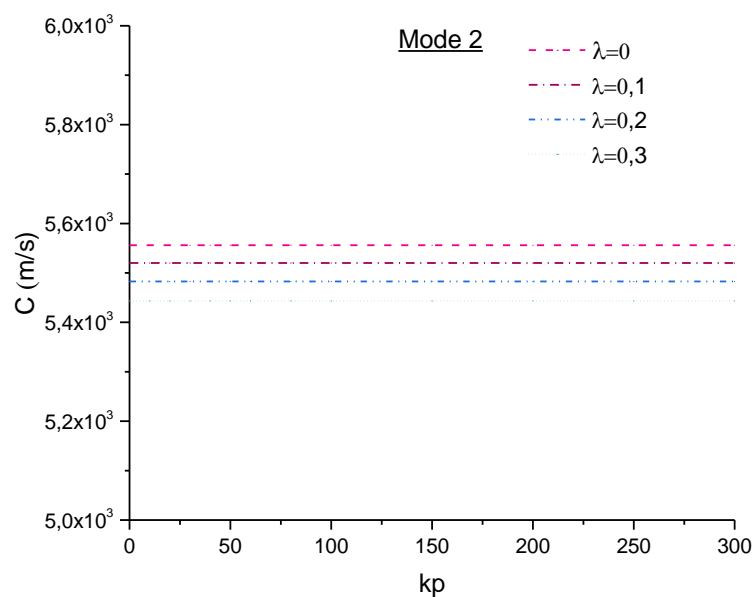
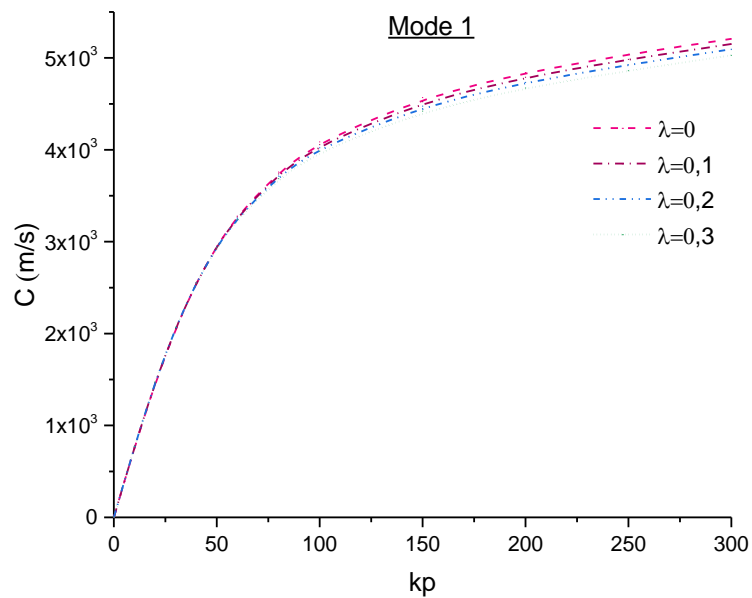


Figure.V.19: les courbes des fréquences naturelles d'une plaque FG en fonction du nombre d'onde avec différent indice de porosité

La figure.V.20 montre respectivement l'influence du paramètre de porosité et son effet sur la vitesse de phase d'une plaque FGM en fonction du nombre d'ondes. L'indice de puissance matériel est pris égal à  $p = 2$ . A partir de cette figure, les similitudes dans les évolutions de la vibration peuvent être mises en évidence.



Pour le mode 1, l'augmentation du nombre d'onde de la plaque entraîne une augmentation de la vitesse de la phase. Pour le mode 2, l'augmentation du nombre d'ondes de la plaque n'a aucune influence sur la vitesse de la phase. Au contraire, pour le mode 3, l'augmentation du nombre d'onde de la plaque entraîne une diminution à la fois de la vitesse de phase semblable au mode 4. Nous pouvons également voir que la vitesse de phase a diminué avec l'augmentation du facteur de porosité pour tous les modes.



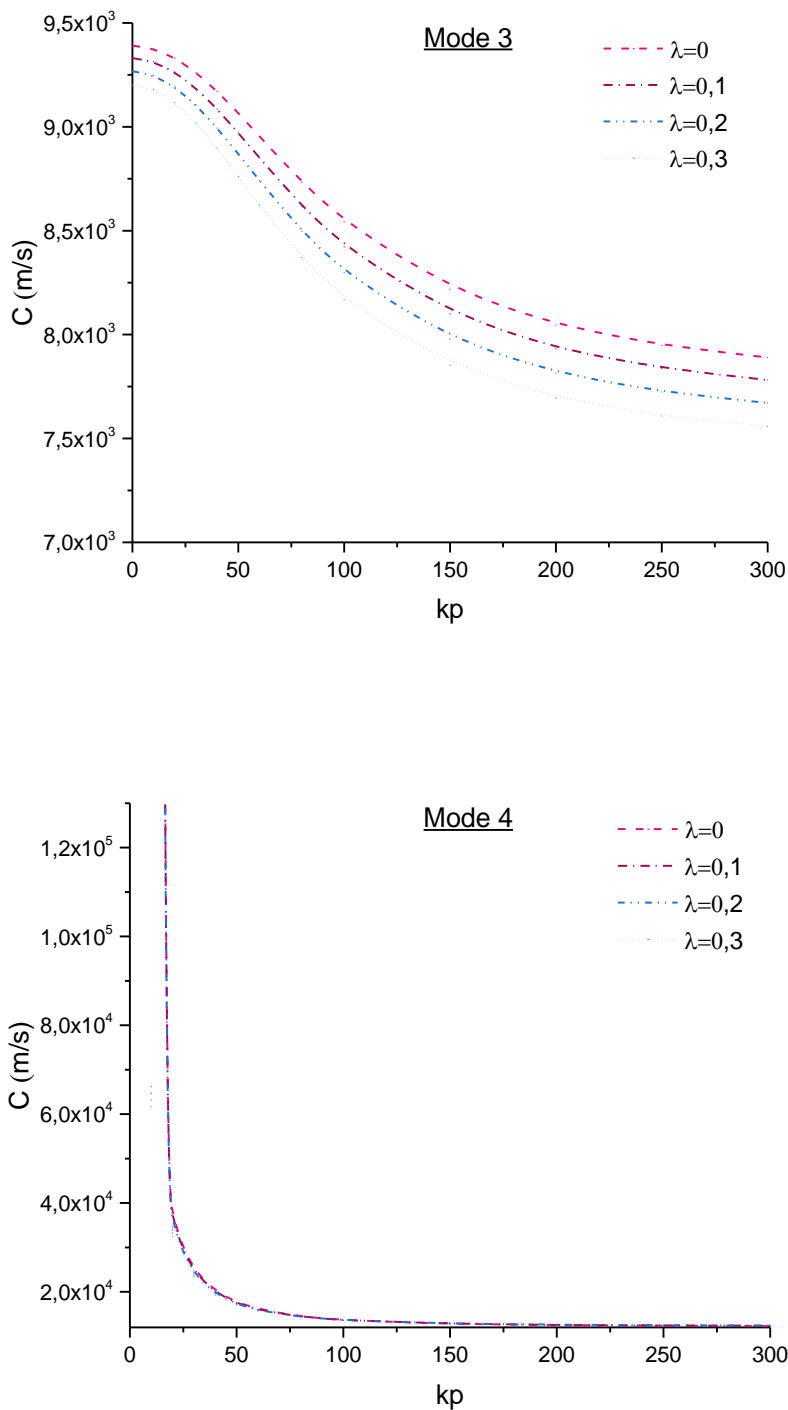


Figure.V.20: les courbes des vitesses de phase d'une plaque FG en fonction du nombre d'onde avec différent indice de porosité

Les figures.V.21 et V.22 montrent l'influence du rapport d'épaisseur des plaques sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase de la propagation des ondes, respectivement. Deux valeurs du paramètre de porosité sont considérées ( $\lambda = 0$  et  $\lambda = 0,3$ ). La valeur du nombre

d'onde  $k_p$  est prise égale à 10. On peut voir les fréquences et les vitesses de phase décroît avec l'augmentation du rapport  $a/h$  alors le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) a un effet considérable sur la fréquence de propagation de l'onde dans la plaque FGM

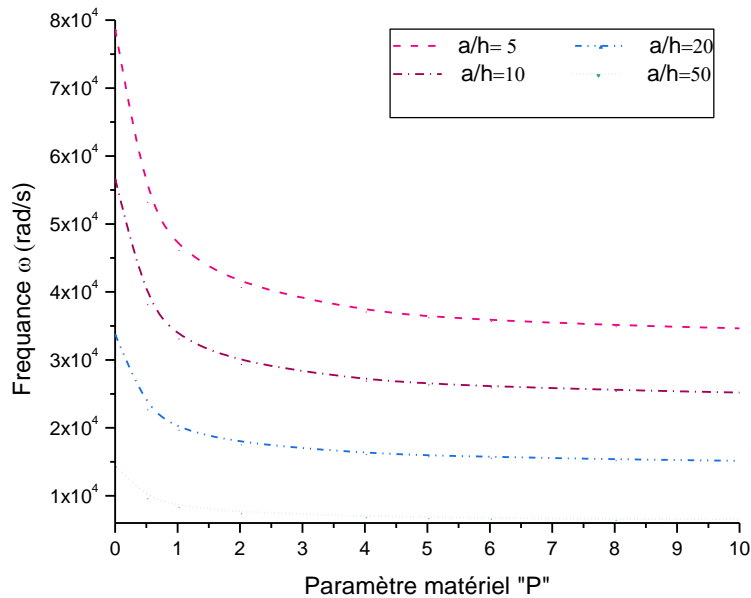
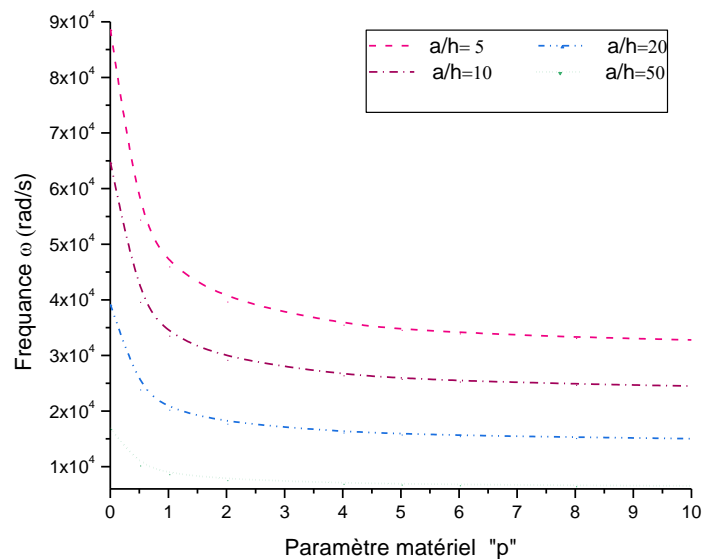
(a)  $\lambda=0$ (b)  $\lambda=0,3$ 

Figure.V.21 : Influence du rapport d'épaisseur sur les fréquences naturel d'une plaque FG

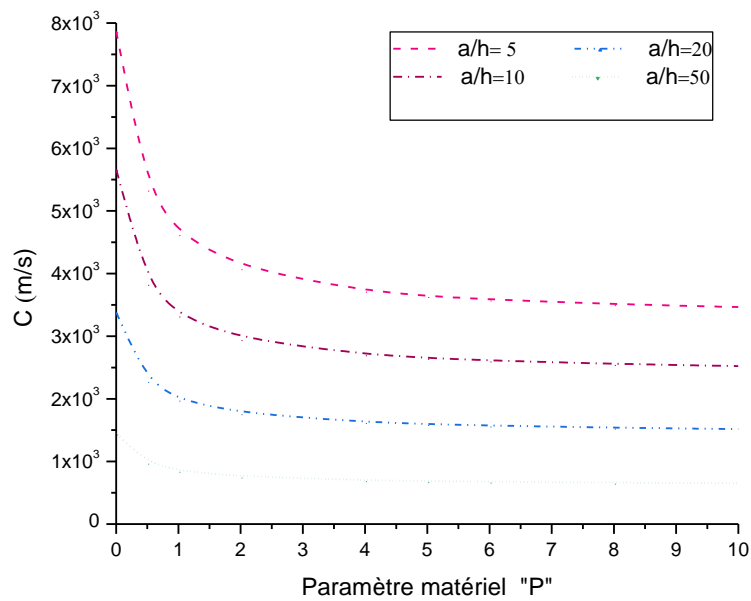
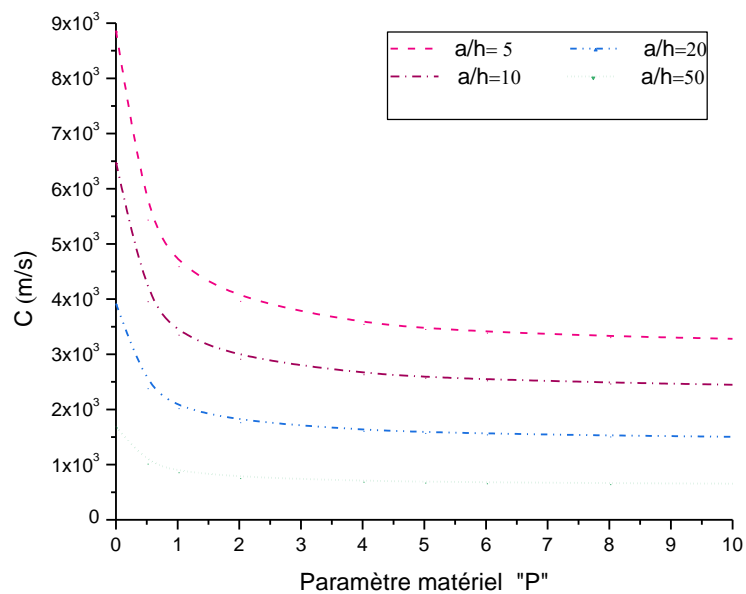
(a)  $\lambda = 0$ (b)  $\lambda = 0,3$ 

Figure.V.22 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque FG

La figure.V.23 montre la variation de la fréquence de propagation de l'onde en fonction du facteur de porosité en utilisant la formule proposée pour les plaques de MGF avec différentes

valeurs du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ). On peut remarquer que les fréquences et les vitesses sont augmentées légèrement pour les plaques épaisses et diminuées pour les plaques minces.

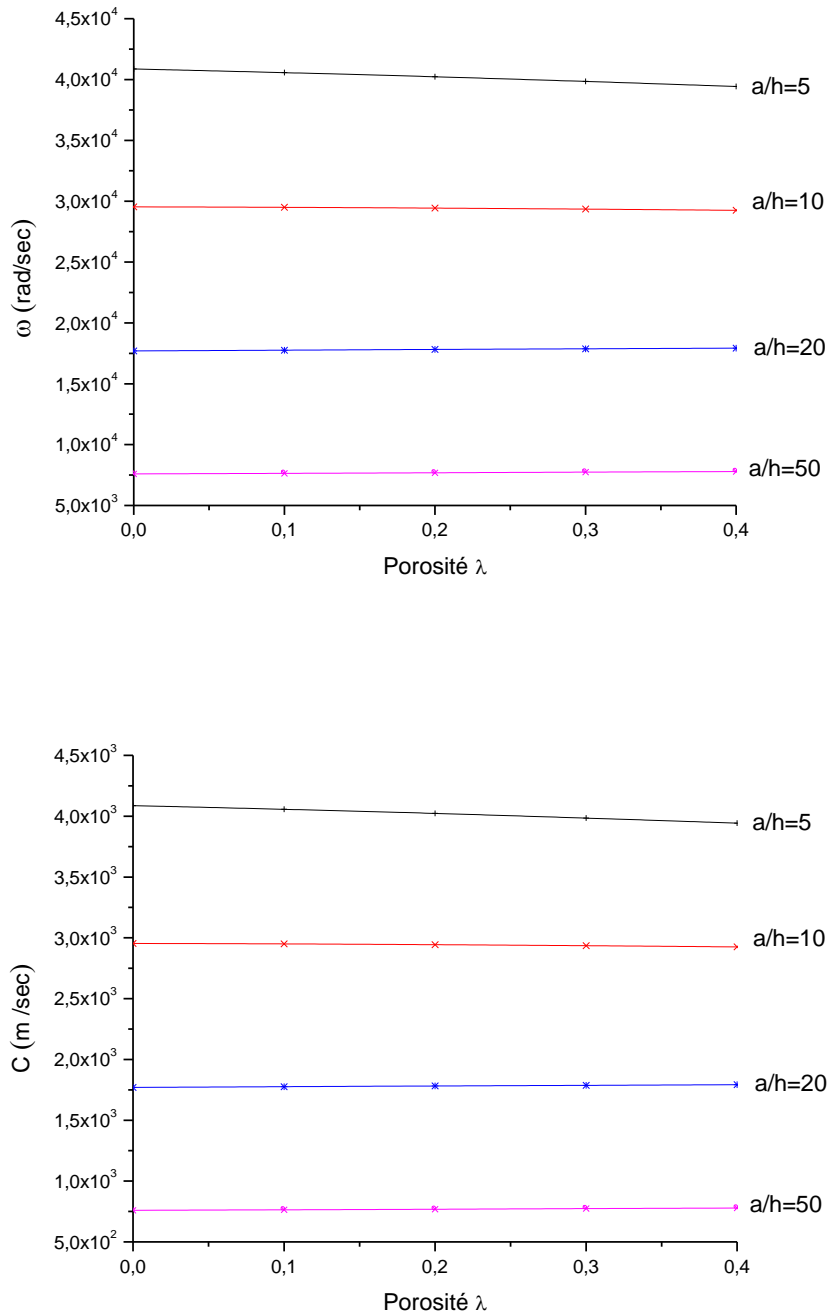


Figure.V.23: influence de la porosité sur les fréquences naturelles et les vitesses de phase des plaques FGM avec différent rapport d'épaisseur

#### **V.4. Conclusions**

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur à quatre variable intégrale est utilisée pour analyser la propagation des ondes des plaques fonctionnellement graduée parfaites et poreuses avec un nouveau modèle de la distribution de la porosité utilisant divers modèles des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, Les propriétés mécaniques de la plaque ont été prises comme variant à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance et sigmoïde. A partir des résultats obtenus, on peut conclure que les courbes de dispersion et la vitesse de phase sont considérablement influencées par l'indice de loi de puissance et l'indice de volume de porosité dans les plaques fonctionnellement graduées avec une excellente convergence du modèle actuel de distribution de porosité avec d'autre modèle dans la littérature.

En conclusion, on peut dire que le modèle proposé est simple pour la résolution du comportement vibratoire des plaques FGM, en raison de leurs nombre d'inconnus réduits.

### *Conclusion générale et perspectives*

Une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur est utilisée pour analyser la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement graduée à l'aide de diverses théories de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Cette théorie intègre un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Le coût de calcul peut donc être réduit grâce au nombre réduit d'inconnues et aux relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque FG.

La fréquence propre et la propagation des ondes d'une plaque FG poreuse avec un nouveau modèle de distribution de la porosité, La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM imparfaites; pour traiter un tel problème de plaque FGM en vibration avec des conditions aux frontières sous forme d'appui simple sur tous les côtés, Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions apparaissent en utilisant les relations de la dispersion, et les fréquences fondamentales et les vitesses de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres. Les propriétés du matériau sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases de porosité.

Dans ce travail, Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse de comportement des plaques FGM parfaits et poreuses sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation par cisaillement. il peut être conclu que la théorie utilisée a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques vibratoires et de propagation des ondes dans les plaques FGM ainsi le nouveau modèle mathématique qui a été développé par la reformulation de la règle de mélange pour incorporer la phase de porosité dans les propriétés du matériau couvre très bien les phases de porosité dans les plaques FG imparfaits. Et que l'influence de l'indice de la fraction volumique du matériau, le rapport d'épaisseur, le nombre d'onde et l'indice de volume de porosité sur les fréquences et la propagation des ondes dans la plaque FG sont significatifs.

En effet, on constate que pour un même nombre d'ondes, les fréquences de la propagation des ondes et les vitesses de phase dans la plaque parfait sont maximales pour les plaques homogènes en céramique et réduites quand la plaque est en FGM quel que soit le mode de vibration, On peut conclure que les fréquences naturelles augmentent quand la raideur du matériau augmente, ceci est expliqué par la variation de l'indice de puissance matérielle.

- Pour les modes d'ondes d'extension pour une plaque en céramique ( $p = 0$ ) La vitesse de phase est constante,
- La fréquence naturelle et la vitesse de phase du mode fondamentale diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance matériel et augmentation du rapport épaisseur et la plaque devient mince;
- Pour le mode fondamental les fréquences et les vitesses de phase d'une plaque S-FGM sont supérieurs à ceux de la plaque P-FGM avec un indice de puissance matériel ( $p=2$ ).

La fréquence de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité lorsque l'indice de porosité ( $\lambda$ ) soit élevée et surtout pour le mode d'onde fondamentale. En effet, les fréquences sont augmentées lorsque la porosité augmente; de même pour la vitesse de phase que soit l'indice matériel; Par contre, pour le 4<sup>ème</sup> mode de vibration c'est tout à fait le contraire; pour le mode d'onde de flexion, on constate aussi que lorsque l'indice de loi de puissance est supérieur à 1 ( $p > 1$ ), la fréquence et la vitesse de phase diminuent avec l'augmentation de la porosité contrairement au cas où l'indice de loi de puissance est inférieur à 1.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie :

- tenir compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur
- introduisant l'effet des différentes approches des fondations élastiques.
- étude de l'effet de hygrothermique sur le comportement mécanique des structures FGM
- développe un modèle élément fini pour étudier le comportement des structures FG en introduisant des théories de déformation par cisaillement et l'effet de stretching.



- Aboudi 2000 Aboudi, J. Pindera, M.J. and Arnold, S.M. Higher-order theory for functionally graded materials, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2000.
- Afaq 2003 Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Ait Amar et al. 2014 Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane et al. 2010 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int J Mech Mater Des*, 6, 113–121.
- Ait Atmane et al. 2015 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R.(2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- Ait Atmen 2011 Ait Atmane Hassen .2011. Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement Thèse de doctorat de l'Universite Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes 2004
- Ait yahia, 2015 Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higherorder shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6),1143-1165.
- Akavci, 2014 Akavci, S.S. (2015), “An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Compos. Struct.*, 108, 667-676.
- Akbas SD (2017) Akbas SD. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2017; 3(3): 199-207
- Al-Basyouni 2015 Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, 125, 621-630.
- Ambartsumyan 1969 S.A. Ambartsumyan. *Theory of anisotropic plate*. Technomic Publishing Co, 1969.
- Arnold 2001 Arnold, S.M. Higher-order-theory-structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2001.
- Baron et Naili 2008 Baron. C, Naili. S. (2008), —Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- Beldjelili et al. 2015 Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygrothermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4), 755-786
- Benachour et al. 2011 Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- Benadouda et al. 2017 Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), —An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities, *Earthquakes and Structures*, 13(3),255-265.
- Bennai 2015 Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 521-546

- Bhatt 2000 Bhatt, R.T. Feasibility of actively cooled silicon nitride airfoil for turbine applications demonstrated, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 34, 2000.
- Boukhari 2016 Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(5), 837-859
- Boukli. H, 2015 Cours «ondes mécaniques» Université Hassiba Benbouali De Chlef 2014 /2015
- Bowles, 1992 K.J. Bowles and S. Frimpong, ‘Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites’, *Journal of Composite Materials*, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- Bréard, 1997 J. Bréard, ‘Matériaux composites à matrice polymère, modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé R.T.M. et détermination expérimentale de la perméabilité d’un renfort fibreux’, *Thèse de doctorat*, Université du Havre, 1997.
- Bresse, 1859 Bresse, J.A.C. (1859), “Cours de Mécanique Appliquée”, MalletBachelier, Paris, France
- Brovarone 2001 Brovarone, Vitale, C. Verne, E. Krajewski, A and Ravagliolo, A. Graded coatings on ceramic substrates for biomedical applications, *Journal of the European Ceramic Society*, Elsevier Science Limited, 21, 2855-62, 2001.
- Bui 1999 V.Q. Bui, E. Marechal, and H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : bending, buckling and transient responses. *Composites Science and Technology*, 59 :2269–2277, 1999.
- Bui 2000 V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*, vol. 60, pages 131,143,2000.
- Carrera 2000 E. Carrera .An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198, 2000.
- Chabot 1997 A. Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- Cheng et Batra 2000 Cheng, Z.Q. and Batra, B.C. (2000), “Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate”, *J. Sound Vib.*, 229(4), 879-895.
- Chu 1999 Chu, C. Zhu, J. Yin, Z. and Wang, S. Hydroxyapatite-Ti functionally graded biomaterial fabricated by powder metallurgy, *Materials Science and Engineering*, A217, 95-100, Elsevier Science Limited, 1999.
- Chung et chi, 2003 Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Costa, 2001 M.L. Costa, S.F. Müller de Almeida, M.C. Rezende, ‘The influence of porosity on the ILSS of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates’, *Composites Science and Technology*, Vol. 61; pp 2101-2108; 2001
- Cranch , 1956 Cranch, E.T. and Adler, A.A. (1956), “Bending vibration of variable section beams”, *J. Appl. Mech.*, 23(1), 103-108
- Cugnoni 2004 J.cugnoni. Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. These de doctorat de l'école polytechnique fédérale de Lausanne ,2004.
- D. A. Davids 1989 D. A. Davids, P. Y. Wu, and D. Chizhik, Restricted Aperture Acoustic Microscope Lens for Rayleigh Wave Imaging, *Appl. Phys. Lett.*, 54, (1989), p. 1639.
- Dan Israël Cours «Ondes Mécaniques et Lumineuses» Université Pierre et Marie Curie
- Delale et Erdogan 1983 Delale, F, Erdogan. F. (1983), —The crack problem for a non-homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

- Di Sciuva 1987 M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- Djelouah.h,2007 cours « ondes & vibrations » université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène 2006 /2007.
- Duong, 2008 Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2008.
- Ebrahimi , 2016a Farzad, E. and Reza Barati, M. (2016a), "Wave propagation analysis of quasi-3D FG nanobeams in thermal environment based on nonlocal strain gradient theory", *Appl. Phys. A*, 122(9), 843. DOI: doi.org/10.1007/s0033
- Ebrahimi , 2016b Farzad, E., Barati, R.M. and Dabbagh, A. (2016b), "A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates", *Int. J. Eng. Sci.*, 107, 169-182.
- Ganapathi 1997 M. Ganapathi & M. Touratier. A study on thermal post buckling behavior of laminated composite plates using a shear-exible finite element. *Finite element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- H. Sazdjian, 2013 Cours «Ondes» Université Paris-Sud 11 Orsay 2012-2013
- Han et al. 2001 Han, X., Liu, G.R., Xi, Z.C. and Lam, K.Y. (2001), "Transient responses in a functionally graded cylinder", *Int. J. Solids Struct.*, 38, 3021-3037.
- Harper et al., 1987 B.D. Harper, G.H. Staab and R.S. Chen, 'A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 Graphite/Epoxy', *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, pp 280-289, March 1987.
- Hebali et al, 2014 Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383
- Hencky 1947 Hencky, H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *Ingenieur-Archiv*, 16 (1), 72–76, 1947.
- Hildebrand 1949 Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833.
- Hirai 1996 Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- Hopkinson 2006 Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, P.M. *Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- Jahwari et Naguib, 2016 Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190-2205.
- Jian, Hashida et al. 1995 Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.
- Kant et Swaminathan 2002 Kant.T, K. Swaminathan, (2002). —Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structure*; 56 (4): 329-344.
- Kardos et al., 1983 J.L. Kardos, M.P. Dudukovic, E.L. Mc Kagne and M.W. Lehman, 'Void formation and transport during composite laminate processing: an initial model Framework', *Composite Materials: Quality Assurance and Processing*, ASTM STP 797, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, pp 96-109, 1983.
- Kardos et al., 1986 J.L. Kardos and M.P. Dudukovic, 'Void growth and resin transport during processing of thermosetting – matrix composites', *Advances in Polymer Science*, Vol.80, p 101-123, 1986.

- Kassapoglou 1986 C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987
- Kawasaki et Watanabe 1997 Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35
- Khare, 2004 R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- Kingery et al., 1975 W.D. Kingery, .K. Bowen, D.R. Uhlmann, 'Introduction to ceramics', *Wiley-Interscience publication*, 2nd Edition, ISBN 0-471-47860-1, 1032 p, 1975.
- Kirchhoff 1950 G.Kirchhoff .uber das gleichgewicht und die bewegungeiner elastischen scheid. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, Vol.40, pages 51-88,1950.
- Koizumi 1993 "The concept of FGM Ceramic transactions", *Funct Grad Mater*, 34, 3–10
- Kumar et Maruno 2002 Kumar, Roop R. and Marino, S. Functionally graded coatings of HA-G-Ti composites and their in vivo studies, *Materials Science and Engineering*, A334, 156-62, Elsevier Science Limited, 2002.
- Kwak et al., 1998 H.Y. Kwak and Y.W. Kim, 'Homogeneous nucleation and macroscopic growth of gas bubble in organic solutions', *International Journal of Heat mass transfer*; Vol. 41 N°4-5; pp 757-767; 1998.
- Larbi Chaht 2015 Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- Ledru, 2009 Y. Ledru 'Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques 'Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 242p, 2009.
- Lee et al., 1996 J.G. Lee and R.W. Flumerfelt, 'A refined approach to bubble nucleation and polymer foaming process : dissolved gas and cluster size effects', *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol 184, pp 335-348, 1996.
- Liu et al., 2004 L. Liu, B. Zhang, D. Wang, 'Void content in carbon/epoxy composites and its effects on flexural properties', *49th International Sampe Symposium and Exhibition*, pp 254-261, 2004.
- Liu et al., 2006 (a) L. Liu, B. Zhang, D. Wang, Z. Wu, 'Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates', *Composite Structure*, Vol. 73, pp 303-309, 2006.
- Malek zadeh , 2009 Malekzadeh, P. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Compos Struct*, 89, 367–373.
- Menail 2009 Menail 2009Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat UBMA naba Menail Younès 2009.
- Mindlin 1951 Mindlin. R.D, (1951). —Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38.
- Miyamoto et al. 1999 Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.
- Mouaici et al. 2016 Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22(4), 429-454
- Murthy 1981 M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. *Rapport technique, NASA*, 1981.
- Naghdi 1957 Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.

- Nguyen 2004 Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- Nicolas , 2010 cours« ondes & vibrations» polytech Marseille 2009 /2010.
- O. Xeridat 2011 Olivier Xeridat, Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, France2011.
- Ochoa. 1992 Ochoa, O.O., Reddy, J.N. Finite Element Analysis of Composite Laminates. Solid mechanics and its applications. Dordrecht: Springer, 1992
- Öchsner et al. 2008 Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.
- Olivier et al., 1995 P. Olivier, J.P. Cottu et B. Ferret, 'Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates', *Composites*, Vol. 26 N°7, p 509, 1995.
- Olivier, 1994 P. Olivier, 'Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone / époxy en relation avec les cycles de polymérisation', *Thèse de doctorat*, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p, 1994.
- Ould Larbi 2013 Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), —An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 – 433
- P. Puzo. 2012 Notes de cours d' électromagnétisme classique
- Pitchoumani et al., 1996 R. Pitchumani, S. Ranganathan, R.C. Don, J.W. Gillespie, M.A. Lamontia, 'Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow placement', *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 39, N°9, pp 1883-1897, 1996.
- Polit,1997 O. Polit & M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- Raju, 1981 I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.
- Ranganathan et al.1995 S. Ranganathan, S.G. Advani, M.A. Lamontia, 'A nonisothermal process model for consolidation and void reduction during in-situ tow placement of thermoplastic composites', *Journal of composite materials*, Vol. 29, N°8, pp 1040-1062, 1995.
- Rasheedat 2017 Rasheedat Modupe Mahamood Esther Titilayo Akinlabi, "Functionally Graded Materials"© Springer International Publishing AG 2017
- Reddy 1980 J.N. Reddy. A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.
- Reddy 1984 Reddy. J.N., (1984). —A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- Reddy 1984 J.N.Reddy. A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* .Vol.51, pages 745-752, 1984.
- Reddy 1997 Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures* 34 (26), 3373–338, 1997.
- Reddy 1999 J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis,Philadelphia, 1999.
- Reddy 2004 Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis* (second edition). CRC Press; 2004.
- Reddy, 2000 Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47, 663-684

- Reddy1997 Reddy. J.N, (1997). —Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton.
- Reedy, 2002 Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2002), “Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform”, *Int. J. Mech. Sci.*, 44(5), 967-985.
- Reissner , 1945 Reissner.E (1945).”The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates”.*J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.
- Reissner, 1975 Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- S. Bouhedja, 2000 Bouhedja S. Etude des vitesses des ondes de surface et de l’atténuation du mode de rayleigh via un capteur fonctionnant en champ noir ; Thèse de doctorat d’état en physique, Université mentouri constantine(2000).
- Saiyath, 2015 Saiyathibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- A review. International conference on systems, sciences, control, communication, engineering and technology, 2015.
- Schaefer, 1994 D.W. Schaefer, ‘Engineered porous materials’, A publication of the Materials Research Society : Bulletin MRS, Vol 19, N°4, pp 14-17, 1994.
- Schoeller, 1955 H. Schoeller, ‘Hydrogéologie’. Ecole Nationale Supérieure du Pétrole, Technip, Paris, 2 vol, 443 p, 1955.
- Shankara ,1996 C.A. Shankara & N.G.R. Iyengar. A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- Shen, 2009 Shen, H.-S. "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group. 2009
- Şimşek et Aydın ,2012) Simsek, M, Kocatürk, T and Akbas, SD. (2012), "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 94(8), 2358-2364.
- Sun et Luo ,2011a Sun, D. and Luo, S.N. (2011a), “The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completely clamped supports under impulse load”, *Eur. J. Mech. – A/Solids*, 30, 396-408.
- Sun et Luo ,2011b Sun, D. and Luo, S.N. (2011b), “Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments”, *Ultrasonics*, 51, 940-952
- Suresh et Mortensen 1998 Suresh, S., Mortensen, A. (1998), —Fundamentals of Functionally Graded Materials, (IOM Communications Ltd., London).
- Tang et al., 1987 J.M. Tang, W.I. Lee and G.S. Springer, ‘Effects of cure pressure on resin flow, voids and mechanical properties’, *Journal of Composite Materials*, Vol 21, p 421- 440, May 1987.
- Timoshenko et WoinowskyKrieger 1959 S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- Tounsi 2013 Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi et al ,2016 Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 - 565
- Touratier 1991 Touratier. M, (1991). —An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916.
- Trochu et al., 2006 F. Trochu, E. Ruiz, V. Achim, S. Soukane, ‘Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization’, *Composites:Part A*, Vol 37, pp 890-902, 2006.
- Veesler et al. S. Veesler, D. Mangin, F. Puel, ‘Cristallisation’, *Technique de l’ingénieur*, Ch Nucléation, J2710.

- Vel et Batra, 2004 Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 272, 703-730.
- W.L.Bond 1975 W. L. Bond, C. C. Culter, R. A. Lemons and C. F. Quate, Dark Field and Stereo Viewing with the Acoustic Microscope, *Appl. Phys. Lett.*, 27, (1975), p. 270
- Watari 2003 Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M.Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. *Mater. Sci. Forum*, 423-425:321-326, 2003.
- Wattanasakulpong et al. 2012 Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), —Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validationl, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- Wattanasakulpong et al. 2014 Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), —Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porositiesl, *Aerosp. Sci. Technol.*,32(1), 111-120.
- Wisnom et al., 1996 M.R. Wisnom, T. Reynolds and N. Gwilliam, ‘Reduction in ILSS by discrete and distributed Voids’, *Composites Science and Technology*, 56, pp 93-101, 1996.
- Yin 1987 W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- Yokota,1978 M.J. Yokota, ‘Process controlled curing of resin matrix composites’, *Sample Journal*, p11-17, July/Augus, 1978.
- Yoshida et al., 1986 H. Yoshida, T. Ogasa and R. Hayashi, ‘Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP’, *Composites Science and Technology*, Vol 25, pp 3-18, 1986.
- Zenkour 2006 Zenkour, A.M. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.