

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès



Faculté de Technologie
Département de Génie Civil & travaux publics
Labortoire des matériaux & hydrologie

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

ZARGA Djaloul

Sujet de la thèse

Analyse élastique de la déformation thermomécanique des plaques épaisses non homogènes

Soutenue le : 26 / 02 / 2020

Devant le jury composé de :

<i>Mr FAHSI Bouazza</i>	<i>Professeur</i>	<i>UDL-SBA</i>	<i>Président</i>
<i>Mr TOUNSI Abdelouahed</i>	<i>Professeur</i>	<i>UDL-SBA</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>Mr BENRAHOU Kouider Halim</i>	<i>Professeur</i>	<i>UDL-SBA</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr DAOUADJI HASSAINE Tahar</i>	<i>Professeur</i>	<i>UIK-TIARET</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr ZIDOUR Mohamed</i>	<i>Professeur</i>	<i>UIK-TIARET</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr BOUAKKAZ Khaled</i>	<i>Maître de conférences (A)</i>	<i>UIK-TIARET</i>	<i>Examineur</i>

Année Universitaire : 2019-2020

Remerciements

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements au Professeur TOUNSI Abdelouahed, en Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, d'avoir bien voulu proposer et diriger cette thèse et pour m'avoir permis de le réaliser dans d'excellentes conditions. Son appui, ses précieux conseils et orientations m'ont beaucoup apporté quant à la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur FAHSI Bouazza, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie Monsieur BENRAHOU Kouider Halim Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, Monsieur DAOUADJI HASSAINE Tahar Professeur à l'université de Tiaret, Monsieur ZIDOUR Mohamed Professeur à l'université de Tiaret et Monsieur BOUAKKAZ Khaled Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse également ma profonde reconnaissance et ma sympathie la plus vive à Monsieur Fouad BOURADA Docteur en Laboratoire des Matériaux et Hydrologie pour leurs soutiens et encouragements. Ainsi que à Monsieur Mohamed BOURADA le directeur du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université de Sidi Bel Abbès.

Je tiens mes remerciements à l'équipe du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Enseignant, Chercheurs et secrétaires.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille, particulièrement ma mère et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail à :

- ❖ *Ma très chère mère et à âme de mon père.*
- ❖ *Mes chères frères et sœurs.*
- ❖ *Tous mes amis (es) et toute la famille.*

Résumé

Dans cette thèse, une simple théorie quasi-3D de déformation en cisaillement est utilisée pour l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs en matériau FG. Le champ de déplacement est défini en utilisant seulement cinq variables comme la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), contrairement aux autres théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). La formulation actuelle considère une nouvelle cinématique qui inclut des variables intégrales indéterminées. Les équations d'équilibre sont dérivées en se basant sur le principe des travaux virtuels, puis résolues par la méthode de Navier. Des solutions analytiques sont proposées pour fournir les flèches et les contraintes des plaques sandwichs FGM simplement appuyées. On présente des exemples comparatifs pour démontrer l'exactitude de la présente théorie. On étudie les effets de l'indice de puissance, des paramètres géométriques et de la charge thermique sur la réponse thermo-mécanique à la flexion des plaques sandwichs FG.

Mots clés : Plaque sandwich, thermo-mécanique, HSDT quasi-3D, matériaux fonctionnellement gradués.

Abstract

In this work, a simple quasi-3D shear deformation theory is employed for thermo-mechanical bending analysis of functionally graded material (FGM) sandwich plates. The displacement field is defined using only 5 variables as the first order shear deformation theory (FSDT). Unlike the other high order shear deformation theories (HSDTs), the present formulation considers a new kinematic which includes undetermined integral variables. The governing equations are determined based on the principle of virtual work and then they are solved via Navier method. Analytical solutions are proposed to provide the deflections and stresses of simply supported FGM sandwich structures. Comparative examples are presented to demonstrate the accuracy of the present theory. The effects of gradient index, geometrical parameters and thermal load on thermo-mechanical bending response of the FG sandwich plates are examined.

K e y w o r d s : Sandwich plate; thermo-mechanical; quasi-3D HSDT; functionally graded material.

ملخص

في هذا العمل، يتم استخدام نظرية بسيطة شبه ثلاثية الأبعاد لتشوه القص لتحليل الانحناء الميكانيكي الحراري للصفائح متعددة الطبقات المصنوعة من مواد متدرجة وظيفياً. يتم تعريف حقل الانتقال باستخدام خمسة متغيرات فقط مثل نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى، على النقيض من نظريات تشوه القص عالية الدقة الأخرى. تتضمن الصيغة الحالية في الحركيات الجديدة متغيرات تكاملية غير محددة. يتم اشتقاق معادلات التوازن من خلال مبدأ الأعمال الافتراضية ثم يتم حلها باستعمال طريقة نافيه. تم اقتراح حلول تحليلية لإعطاء الانحناء و الاجهاد الخاصة بالصفائح متعددة الطبقات المتدرجة وظيفياً المسندة بدعائم بسيطة. يتم تقديم أمثلة مقارنة لإثبات دقة هذه النظرية. كما يتم دراسة تأثير مؤشر التدرج ، المعاملات الهندسية والحمولة الحرارية على الاستجابة الحرارية الميكانيكية لانحناء الصفائح المتعددة الطبقات المتدرجة وظيفياً.

الكلمات المفتاحية : صفيحة متعددة الطبقات، الميكانيكي الحراري، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، مواد متدرجة وظيفياً.

Liste des figures

Figure 1.1 : Gradation de la microstructure avec des constituants métal - céramique [Jha.13]..	6
Figure 1.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés	7
Figure 1.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	7
Figure 1.4 : Publications récentes de revues à comité de lecture en anglais sur les FGM [Gup.15]	9
Figure 1.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	10
Figure 1.6 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	11
Figure 1.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	12
Figure 1.8 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes [Xio.05].....	16
Figure 1.9 : Protection thermique des matériaux conventionnels et des FGM [Gup.15].....	19
Figure 1.10 : Applications des FGM dans divers domaines [Gup.15].....	20
Figure 3.1 : Exemple de plaque d'une géométrie quelconque.....	35
Figure 3.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff	36
Figure 3.3 : Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner.....	37
Figure 3.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé.....	39
Figure 4.1 : Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.....	46
Figure 5.1 : Géométrie des plaques sandwichs FG.....	59
Figure 5.2 : Variation de la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " de la plaque sandwich FG symétrique de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau " k ". ...	68
Figure 5.3 : Effets du chargement thermique et du rapport d'aspect géométrique sur la flèche non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " de la plaque sandwich FG symétrique et antisymétrique de type "B" avec " $p = 0$ " et " $k = 1$ ".....	69
Figure 5.4 : Effets du chargement thermique " t_2, t_3 " et du rapport géométrique " a/h " sur la flèche centrale " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " avec " $p = 0$ " et " $k = 1$ ".....	70
Figure 5.5 : La distribution de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " sur l'épaisseur " \bar{z} " de la plaque sandwich FG de type "B" avec " $p = 0$ ".	70
Figure 5.6 : Effet de l'indice " k " de matériau du noyau sur la flèche centrale non dimensionnelle " \bar{w} " des plaques sandwich FG de type C" avec " $p = 1$ ".	74

-
- Figure 5.7 :** La distribution de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " sur l'épaisseur " \bar{z} " de la plaque sandwich FG de type "C" en fonction de l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure " p " avec l'indice de matériau de noyau " $k=1$ " 75
- Figure 5.8 :** Effet de la charge thermique " t_3 " sur la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " des plaques sandwichs FG de type "C" avec les indices des matériaux " $p=0.5$ " et " $k=0.5$ ". 76
- Figure 5.9 :** Diagramme contrainte – déformation du béton confiné, Bouafia et al. (2010). 77

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	8
Tableau 5.1 : Valeurs de l'épaisseur de couche de la plaque sandwich.....	59
Tableau 5.2 : Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque sandwich en FGM.....	60
Tableau 5.3 : Comparaison de la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " de la plaque sandwich FG de type "A" en fonction de l'indice de puissance " p " des couches supérieure et inférieure avec " $a/h=10$ "	62
Tableau 5.4 : Effet du rapport d'aspect géométrique " a/b " sur la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " de la plaque sandwich FG de type "A" soumise à une charge thermomécanique avec " $a/h=10$ " et " $p=3$ "	63
Tableau 5.5 : Comparaison de la contrainte normale non dimensionnelle " $\bar{\sigma}_x$ " en fonction du rapport d'épaisseur de couche et l'indice de puissance " p " des plaques sandwichs FG de type "A" à " $a/h=10$ "	64
Tableau 5.6 : Variation de la flèche non dimensionnelle de la plaque sandwich FG de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau E-FG " k " avec " $a/h=10$ "	66
Tableau 5.7 : Effet du rapport d'aspect " a/b " sur la flèche centrale non dimensionnelle de la plaque sandwich FG de type "B" sous charge thermomécanique avec " $a/h=10$ " et " $k=1$ "	66
Tableau 5.8 : Variation de la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ " de la plaque sandwich FG de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau " k " avec " $a/h=10$ "	67
Tableau 5.9 : Variation de la flèche centrale non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2,b/2)$ " de la plaque sandwich FG de type "C" en fonction de l'indice de puissance " p " avec " $a/h=10$ " et " $k=1$ "	72
Tableau 5.10 : Effet du rapport d'aspect géométrique " a/b " sur la flèche centrale non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2,b/2)$ " de la plaque sandwich FG de type "C" soumise à une charge thermomécanique avec ($a/h=10, k=1$ et $p=3$).....	73
Tableau 5.11 : Variation de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " de la plaque sandwich FG de type "C" en fonction de l'indice de puissance " p " sous charge thermo-mécanique avec " $a/h=10$ "	73

Notations principales

FGM	Matériaux fonctionnellement gradués
VDT	Technique de dépôt en phase vapeur
CVD	Dépôt chimique en phase vapeur
PVD	Dépôt physique en phase vapeur
PM	La métallurgie des poudres
CS	Coulée centrifuge
SFFM	Méthode de fabrication de forme solide libre
P_t	Propriétés du matériau à la surface supérieure
P_b	Propriétés du matériau à la surface inférieure
CLPT	Théorie classique des plaques
FSDT	Théorie de déformation au premier ordre
SSDT	Théorie de la déformation en cisaillement au second ordre
TSDT	Théorie de la déformation en cisaillement de troisième ordre
HSDT	Théorie de la déformation en cisaillement d'ordres supérieurs
IHZTT	Théorie hyperbolique inverse de zigzag
$E(z)$	Module de Young en fonction de (z)
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de (z)
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de (z)
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de (z)
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité de la céramique
$V(z)$	Fraction volumique
$\lambda(z), \mu(z)$	Coefficients de Lamé
α	Coefficient de dilatation thermique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque

h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions (x, y, z)
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation du travail virtuel externe
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Efforts de cisaillements
∂	Dérivée partielle
i, j, l et m	Des nombres naturels
$\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$	Les variables intégrales indéterminées
k_1, k_2	Les coefficients dépendant de la géométrie des plaques
$q(x, y)$	Charge transversale
(I_i, J_i, K_i, J_i^s)	Inerties de masse
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
$T(x, y, z)$	Chargement thermique
$\{ \Delta \}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ f \}$	Le vecteur des efforts généralisés.

Sommaire

Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Introduction générale	1

Chapitre 1 :

Généralités sur les matériaux a gradient de propriétés

1.1 Introduction.....	5
1.2 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	6
1.3 Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués.....	8
1.4 Les propriétés matérielles des plaques FGM	9
1.4.1 Loi de puissance (P-FGM)	9
1.4.2 Loi exponentielle (E-FGM).....	10
1.4.3 Loi de mélange sigmoïde (S-FGM).....	11
1.5 Propriétés matérielles effectives (homogénéisation) des FGM	12
1.5.1 Schéma de Mori-Tanaka	12
1.5.2 Modèle de Voigt.....	13
1.6 Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	14
1.6.1 La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)	15
1.6.2 Technique de dépôt en phase vapeur.....	15
1.6.3 Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)	15
1.6.4 Méthode de fabrication de forme solide libre	16
1.7 Applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	18
1.7.1 L'aérospatiale	18
1.7.2 Application biomédicale	19
1.7.3 L'optoélectronique	19
1.8 Conclusion.....	21

Chapitre 2 :

Revue sur les travaux réalisés sur les structures en FGM

2.1	Introduction	22
2.2	Etude des recherches disponibles sur les structures en FGM	22
2.2.1	Vibration et réponse dynamique FGM	22
2.2.2	Analyse de la flexion et de la stabilité des plaques FG.....	26
2.2.3	Analyse d'étude des plaques sandwichs FG	30
2.3	Conclusion	33

Chapitre 3 :

Théories des plaques

3.1	Introduction	34
3.2	Définition d'une plaque	34
3.3	Différents théories de déformation en cisaillement	35
3.3.1	La théorie classique des plaques au premier ordre et deuxième ordre	35
3.3.1.1	La théorie classique des plaques minces de Love- Kirchoff (CPT)	35
3.3.1.2	La théorie des plaques de Reissner – Mindlin (la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre (FSDT)	37
3.3.1.3	La théorie non linéaire raffinée des plaques	38
3.3.1.4	La théorie de déformation de second ordre (SSDT)	38
3.3.2	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT)	38
3.3.2.1	La théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT)	39
3.3.2.2	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT5)	40
3.3.2.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT6)	40
3.3.2.4	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT7)	40
3.3.2.5	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT9)	40
3.3.2.6	La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT11).....	41
3.3.3	Modification dans les théories des plaques	41
3.3.3.1	Raffinement des théories des plaques stratifiées d'ordre élevé	41
3.3.3.2	La théorie raffinée des plaques de Shimpi	41

3.3.3.3	Modèles de théorie raffinés de déformation en cisaillement au premier ordre pour les composites stratifiés	42
3.3.3.4	La théorie généralisée de la déformation en cisaillement	42
3.3.3.5	La théorie modifiée de la déformation en cisaillement d'ordres supérieurs	42
3.3.3.6	La théorie hyperbolique inverse du Zig-Zag (IHZZT).....	43
3.3.3.7	La théorie de déformation en cisaillement basée sur la fonction sécante .	43
3.4	Conclusion	44

Chapitre 4 :

Modélisation analytique de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs

4.1	Introduction	45
4.2	Formulation théorique	45
4.2.1	Hypothèses	45
4.2.2	Géométrie de la plaque	46
4.2.3	Propriétés des matériaux	46
4.2.3.1	Propriétés matérielles des couches supérieure et inférieure	46
4.2.3.2	Propriétés matérielles des couches supérieure et inférieure	47
4.3	Cinématique et équations constitutives	48
4.3.1	Champs de déplacement	48
4.3.2	Champs de déformation	49
4.3.3	Relations constitutives	50
4.3.4	Principe des travaux virtuels (PVW)	51
4.4	Solution analytique exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée	54
4.5	Conclusion	57

Chapitre 5 :**Résultats de modélisation et exemples de validation**

5.1 Introduction	58
5.2 Résultats numériques et discussions	60
5.2.1 Analyse de la flexion thermo-mécanique des plaques sandwichs FG de type “A” avec des couches supérieure et inférieure en P-FG et un noyau homogène.....	61
5.2.2 Analyse de la flexion thermo-mécanique des plaques sandwichs FG de type “B” à des couches supérieure et inférieure homogènes “ $p = 0$ ” et un noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ”.....	65
5.2.3 Analyse de la flexion thermo-mécanique de la plaque sandwich FG de type “C” avec les couches supérieure et inférieure P-FGM “ $p \geq 0$ ” et le noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ”	71
5.3 Conclusion.....	78
Conclusions générales	79
Références bibliographiques	81

Introduction générale

Les structures sandwichs sont largement utilisées dans les domaines des systèmes aéronautiques, aérospatiaux, navals / maritimes, de la construction civile, grâce à leur grande rigidité et à leur faible poids, ainsi que à leur capacité d'absorption d'énergie [Vin.01, Vin.05, Lin.10 et Dea.11]. Il existe plusieurs types des structures sandwichs, le plus largement utilisé est la structure sandwich à des couches supérieure et inférieure homogènes et à noyau homogène [Lib.00]. Avec le développement des matériaux avancés, les matériaux de qualité fonctionnelle (FGM) sont à l'heure actuelle explorés dans la conception des plaques sandwichs. On étudie deux nouveaux types des structures sandwichs avec des plaques à des couches (supérieure et inférieure) en FGM et un noyau homogène [Zen.05, She.08, Zen.10b, Sob.13 et Faz.15] ou avec des plaques à des couches (supérieure et inférieure) homogènes et un noyau de FGM [Faz.15, Kash.09, Ali.14 et Liu.16]. Les propriétés des matériaux de FGM, qui varient de manière continue et régulière, aident à éliminer les contraintes induites mécaniquement et thermiquement dues au désadaptation des propriétés des matériaux aux interfaces, ce qui constitue un problème majeur dans les structures sandwichs classiques [Swa.15, Tha.15 et Dai.16]. Par conséquent, des nombreux chercheurs ont accordé une grande attention aux comportements mécaniques, thermiques et thermomécaniques des structures sandwichs (FG).

Pour la flexion mécanique des plaques sandwichs FGM, Zenkour [Zen.10] a utilisé une théorie de déformation en cisaillement sinusoïdale pour étudier la flexion d'une plaque sandwich simplement appuyée avec des couches (supérieure et inférieure) FG et un noyau homogène et isotrope en céramique. Neves et al.[Nev.12] ont proposé une variante de la théorie de Zig-Zag de Murakam afin de procéder à l'analyse statique de deux types des plaques sandwichs FGM, en tenant compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur. Natarjan et Manickam [Nat.12] ont étudié la flexion et la vibration en flexion libre de deux types des plaques sandwichs FG en utilisant un élément flexible de cisaillement QUAD-8 développé sur la base de la théorie structurelle d'ordre supérieur. Neves et al. [Nev.13] ont mis en œuvre une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé d'étirement d'épaisseur afin de présenter l'analyse statique, la vibration libre et le flambement de deux types des plaques sandwichs FG. Zenkour [Zen.13] a étudié la flexion des plaques sandwichs FG simplement appuyées, sur la base d'une théorie raffiné d'ordre élevé trigonométrique. Thai et al.[Tha.14] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse de la flexion des plaques sandwichs composées des couches (supérieure et inférieure) FGM et d'un

noyau homogène isotrope en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre. Nguyen et al. [Ngu.14] ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique inverse pour l'analyse statique, la vibration libre et le flambement des deux types des plaques sandwichs FG. Alipour et Shariyat [Alip.14] ont analysé les contraintes et la déformation des plaques sandwichs FG soumises à des tractions normales et / ou de cisaillement non uniformes. Thai et al. [Thai.14] ont présenté une analyse statique, dynamique et le flambement des deux types des plaques sandwichs FGM sur la base d'une théorie généralisée de déformation en cisaillement d'ordre élevé. Alibeigloo et Alizedah [Ali.15] ont étudié le comportement en flexion et en vibration libre de deux types de plaques sandwichs FG en se basant sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Mahi et al. [Mah.15] ont appliqué une nouvelle théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la flexion et de vibration libre des plaques sandwichs FG. Thai et al. [Thai.14] ont analysé la statique, la dynamique et le flambement des plaques sandwichs FGM isotropes en utilisant une nouvelle théorie simple du cisaillement à quatre inconnus et des déformations normales. Alipour [Alip.16] a proposé une nouvelle approche analytique économique pour l'analyse statique des plaques circulaires sandwichs FG, basée sur une théorie des couches liée à la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Nguyen et al. [Ngu.16] ont étudié une approche sans maillage de Kriging en mouvement sans rotation pour deux types des plaques sandwichs isotropes de FGM basées sur une théorie de plaque raffinée. Nguyen et al. [Ngu.16a] ont proposé d'analyser les vibrations libres de deux types des plaques sandwichs isotropes FG à l'aide d'un élément finie MITC3, basé sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Akavci [Aka.16] a utilisé une nouvelle théorie des plaques de cisaillement hyperbolique et de déformation normale pour étudier le comportement statique, les vibrations libres et le flambement des plaques sandwichs FG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques.

Le comportement de la flexion thermoélastique des plaques sandwichs FGM a été étudié théoriquement par un certain nombre de recherches. Zenkour et Alghamdi [Zen.08] ont mis au point une théorie unifiée des plaques déformables en cisaillement pour étudier la flexion thermoélastique des plaques sandwichs avec des couches (supérieure et inférieure) FGM et un noyau homogène isotrope. Tounsi et al. [Tou.13] ont réalisé une analyse de la flexion thermoélastique des plaques sandwichs à des couches (supérieure et inférieure) homogènes isotropes et un noyau FGM en utilisant une théorie raffinée de la déformation de cisaillement trigonométrique. Houari et al. [Hou.13] ont étudié la flexion thermoélastique des plaques sandwichs des couches (supérieure et inférieure) FGM et un noyau homogène isotrope en

utilisant une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre élevé et de déformation normale. On constate que les études [Zen.08, Hou.11, Tou.13, Hou.13] portent principalement sur le comportement en flexion des plaques sandwichs FGM sous l'effet des charges thermiques.

L'analyse de la flexion des plaques sandwichs FGM soumises à la fois à des charges mécaniques et à des charges thermiques est rare dans la littérature. Zenkour [Zen.09] a présenté une analyse thermomécanique de la flexion des plaques sandwichs rectangulaires FG simplement appuyées en utilisant la théorie raffinée des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdale, dans son étude, le nombre de fonctions inconnues impliquées est de six et les couches supérieure et inférieure des plaques sandwichs sont constituées de FGM, tandis que la couche centrale est isotrope et homogène. Zenkour et Alghamdi [Zen.05 et Zen.10a] ont analysé la flexion et les contraintes des plaques sandwichs symétriques et non symétriques de FGM sous l'effet des charges mécaniques et thermiques. Dans leurs études, le nombre des fonctions inconnues impliquées est de cinq et les plaques sandwichs se composent des deux couches supérieure et inférieure de FGM et d'un noyau homogène isotrope. Taibi et al. [Tai.15] ont analysé le comportement de déformation thermomécanique des plaques sandwichs déformables par cisaillement avec des couches supérieure et inférieure FG et un noyau métallique homogène isotrope reposant sur une fondation élastique. Alibeigloo [Ali.14a] a effectué une analyse statique d'un panneau sandwich simplement appuyée avec noyau FGM soumis à une charge thermomécanique par la théorie d'élasticité. Li et al [Li.16] ont étudié la flexion thermomécanique de deux types des plaques sandwichs FG en se basant sur une la théorie raffinée des plaques à quatre variables.

L'objectif de ce travail est d'étendre une nouvelle simple théorie de déformation en cisaillement de type quasi-3D à cinq variables des plaques afin d'étudier le comportement thermomécanique en flexion d'un nouveau type de plaque sandwich FGM, constituée des couches supérieure et inférieure en FGM et d'un noyau en FGM. Les équations d'équilibre sont dérivées par le principe des travaux virtuels et résolues par la méthode de Navier. Le nombre de fonctions inconnues impliquées dans les équations d'équilibre est cinq. Les études comparatives sont menées pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle. On présente les déformations et les contraintes d'une plaque sandwich à des couches supérieure et inférieure homogènes et du noyau FGM ou les couches supérieure et inférieure FGM et du noyau FGM.

On étudie les effets de la charge thermique et d'autres paramètres sur le comportement thermomécanique en flexion des plaques sandwichs FGM.

- **Méthodologie et organisation du thèse**

Pour répondre à ces objectifs, cette thèse est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre est un généralité sur les matériaux a gradient de propriétés et leurs applications.

Le second chapitre est un revue sur les travaux réalisés sur les structures en FGM et l'analyse des plaques sandwichs fonctionnellement graduées.

Le troisième chapitre présente les différents modèles et les théories des plaques.

Le quatrième chapitre décrit la formulation proposée pour la modélisation analytique de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs.

Enfin, le dernier chapitre présente une série d'exemples d'applications et de confrontations à des résultats théoriques et numériques afin de valider l'efficacité de la théorie qui a été présenté dans cette étude, et aussi pour évaluer la précision des résultats obtenus.

On termine par une conclusion générale.

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux a gradient de propriétés

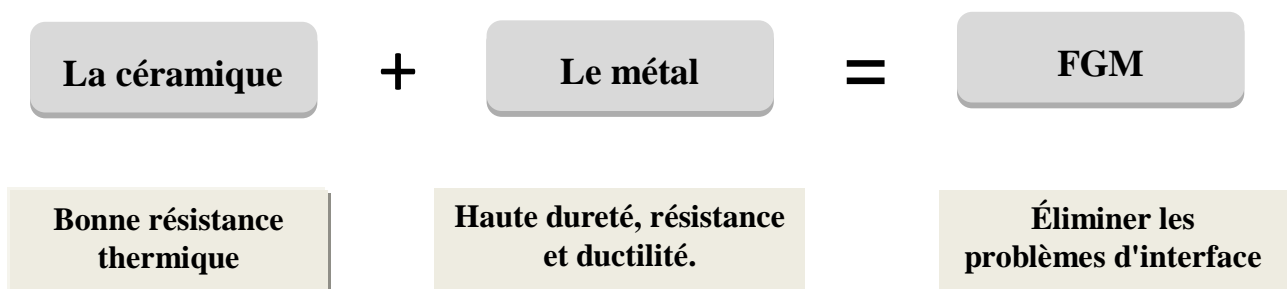
1.1. Introduction

Les matériaux de haute performance tels que les FGM permettent des certaines technologiques avancées les plus étonnantes du siècle dans le domaine des applications biomédicales, optoélectroniques, spatiales, chimiques, mécaniques et autres.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des matériaux inhomogènes microscopiquement, à hautes performances, dotés de gradients artificiels de composition et de structure dotés de propriétés spécifiques dans l'orientation préférée [Koi.97]. Les propriétés mécaniques souhaitées des FGM, à savoir le module de Young, le module de cisaillement, le coefficient de Poisson et la densité du matériau, peuvent être obtenues dans une direction préférée par la variation des fractions volumiques des matériaux constitutifs.

Les matériaux fonctionnellement gradués de haute technologie offre une excellente capacité de résistance à la chaleur et à la corrosion, et est capable de résister à des gradients de température extrêmement élevés [Nii.87].

Les FGM disponibles les plus courantes sont les composites céramique-métal, où la pièce en céramique présente une bonne capacité de résistance à la chaleur et à la corrosion et la pièce métallique offre une ténacité à la rupture et une soudabilité supérieures [Jha.13].



Une microstructure à gradation continue avec des constituants métal / céramique est représentée à la figure 1.1.

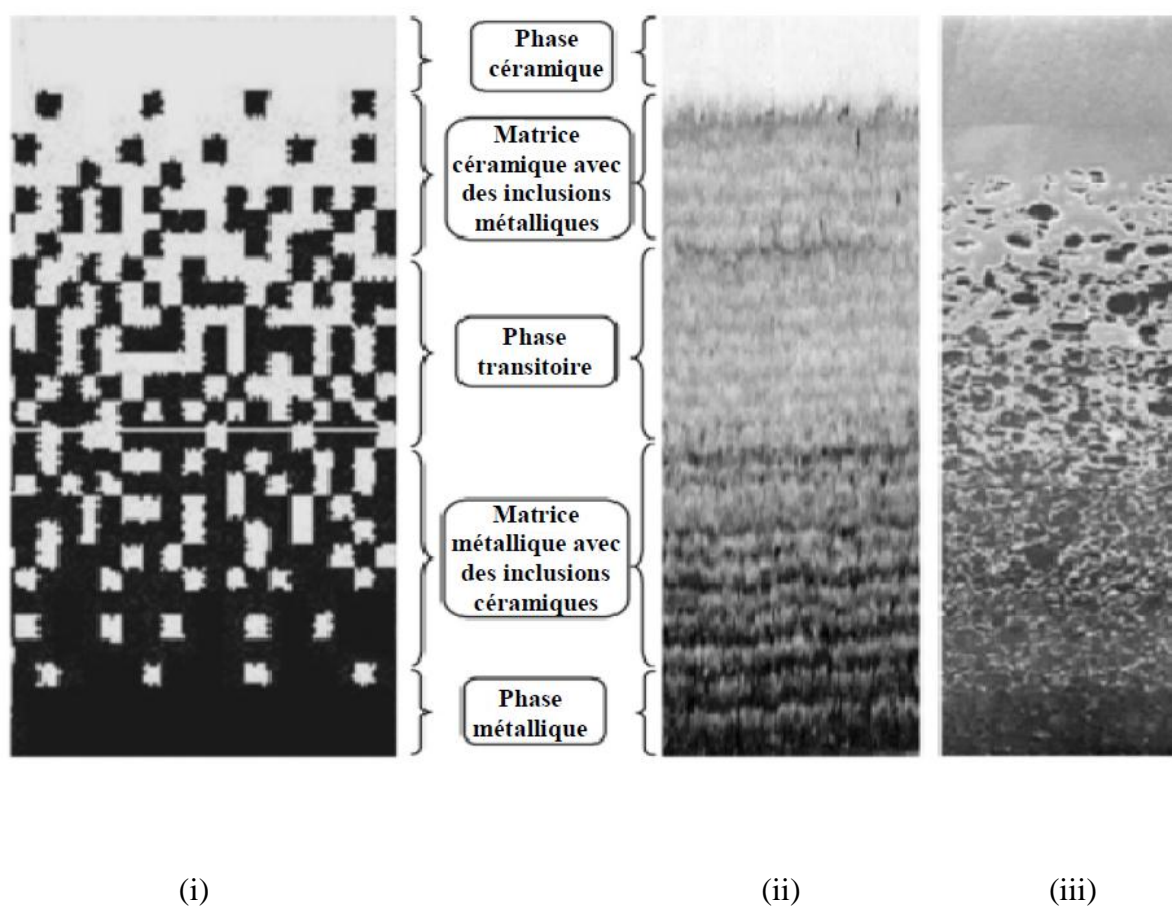


Figure 1.1 : Gradation de la microstructure avec des constituants métal - céramique [Jha.13].

1.2. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGM sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure 1.2) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Koi.97].

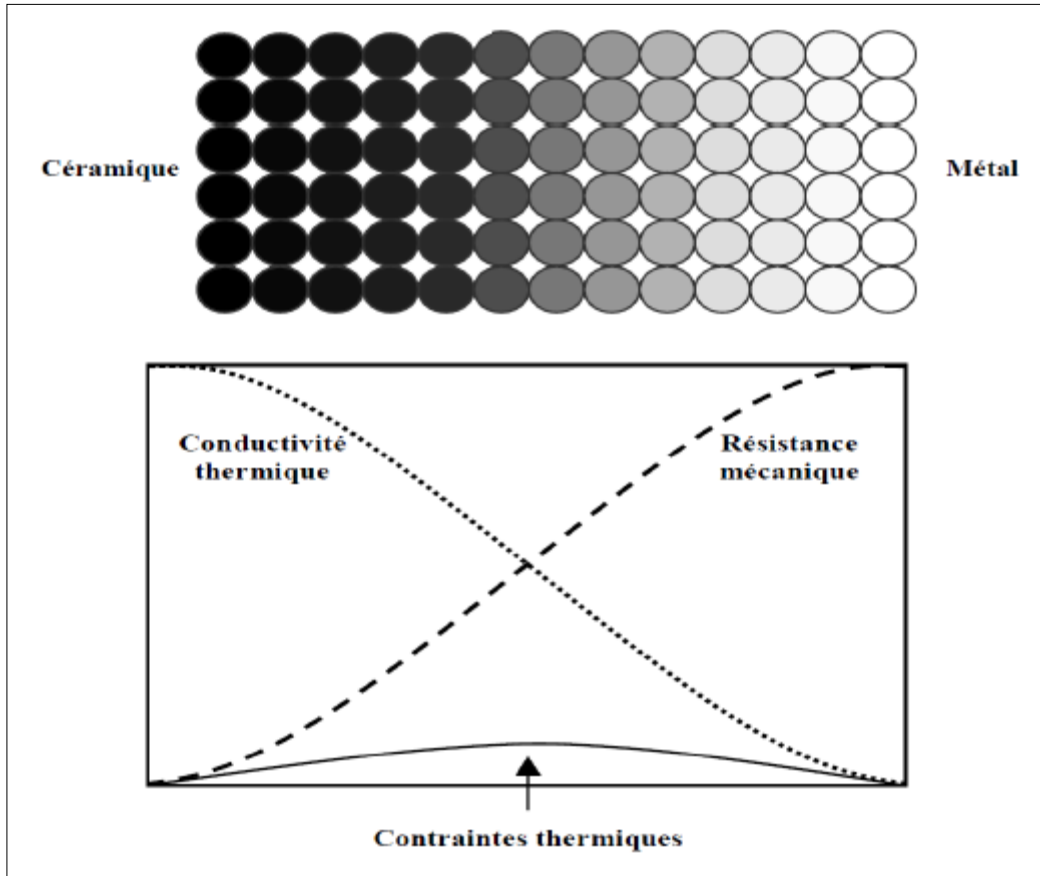


Figure 1.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kok.90]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibres ◇*</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure 1.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koi.97].

Tableau 1.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
« Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

1.3. Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koi.97].

Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koi.97].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".

L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Plusieurs laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koi.97].

La figure 1.4, illustre nombre de publications récentes de revues à comité de lecture en anglais sur les FGM du 1998 à 2015.

Les données collectées à partir d'un service d'informations basé sur le Web [Gup.15].

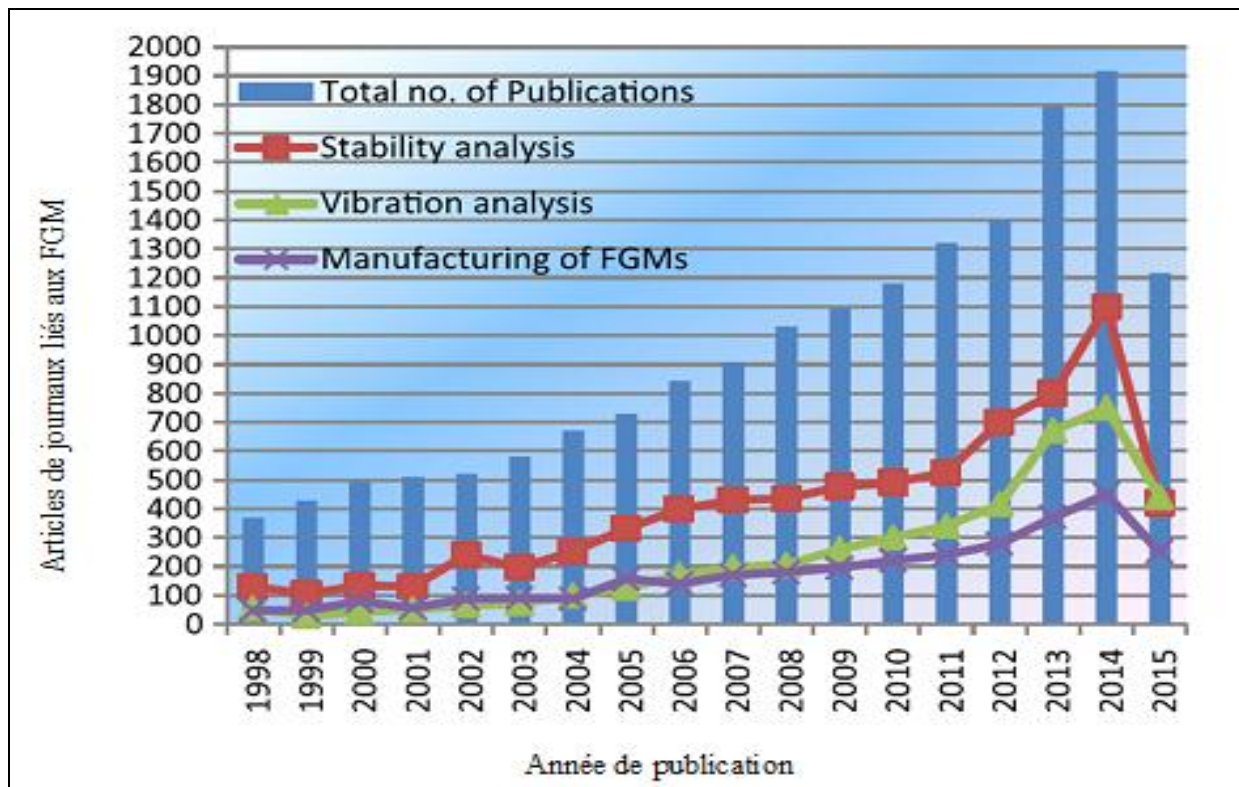


Figure 1.4 : Publications récentes de revues à comité de lecture en anglais sur les FGM [Gup.15]

1.4. Les propriétés matérielles des FGM

Dans la littérature, de nombreux chercheurs ont adopté plusieurs méthodologies pour obtenir la gradation des propriétés des FGM. Bien que les chercheurs aient considéré que les modules de Young pouvaient suivre les fonctions de loi de puissance, les fonctions exponentielles ou les fonctions sigmoïdes dans le sens de l'épaisseur.

1.4.1. Loi de puissance (P-FGM)

La littérature ouverte montre que ce comportement particulier en loi de puissance est bien reconnu par les chercheurs [Bao.95]. Si l'on utilise pour l'analyse d'une plaque FGM d'épaisseur uniforme " h ", les propriétés du matériau P (z) dans une direction spécifique (le long de "z") peuvent être déterminées par :

$$P(z) = P_b + (P_t - P_b)V(z) \quad (1.1)$$

Il convient de noter que les propriétés des matériaux dépendent de la fraction volumique V(z) des FGM qui suit la loi de la puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1.2)$$

Où “ k ” est l'exposant de la fraction de volume. Les coefficients “ t ” et “ b ” représentent respectivement les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. L'exposant “ k ” de la loi de puissance peut varier de 0 à ∞ , ce qui indique la transition du matériau de la phase entièrement céramique à la phase entièrement métallique.

La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure 1.5.

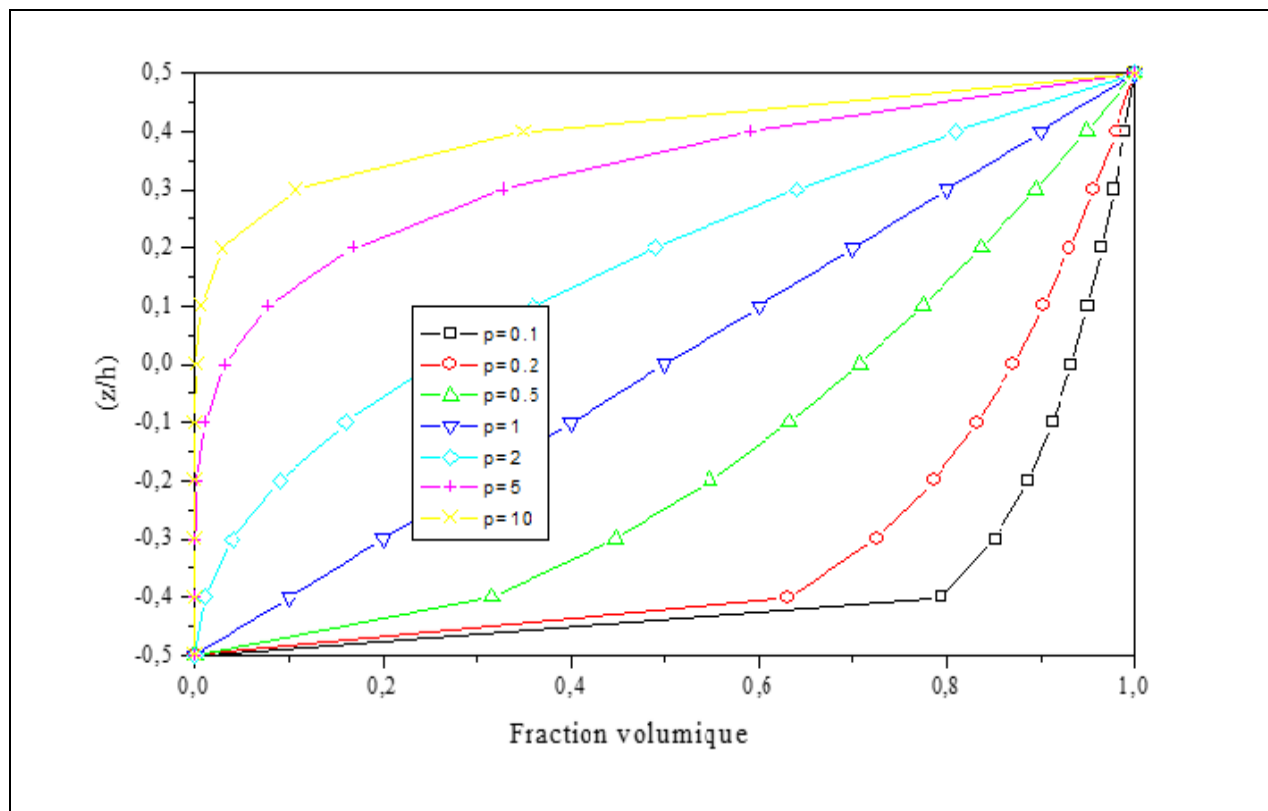


Figure 1.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [Hou.11a].

1.4.2. Loi exponentielle (E-FGM)

Cette loi est généralement adoptée par les chercheurs lorsqu'ils traitent des problèmes de mécanique de la rupture [Del.83, Sur.98]. Selon cette loi, la propriété matérielle $P(z)$ dans une direction spécifique est donnée par :

$$P(z) = P_t e^{B(z+h/2)} \quad (1.3.a)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_b}{P_t} \right) \quad (1.3.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure 1.6.

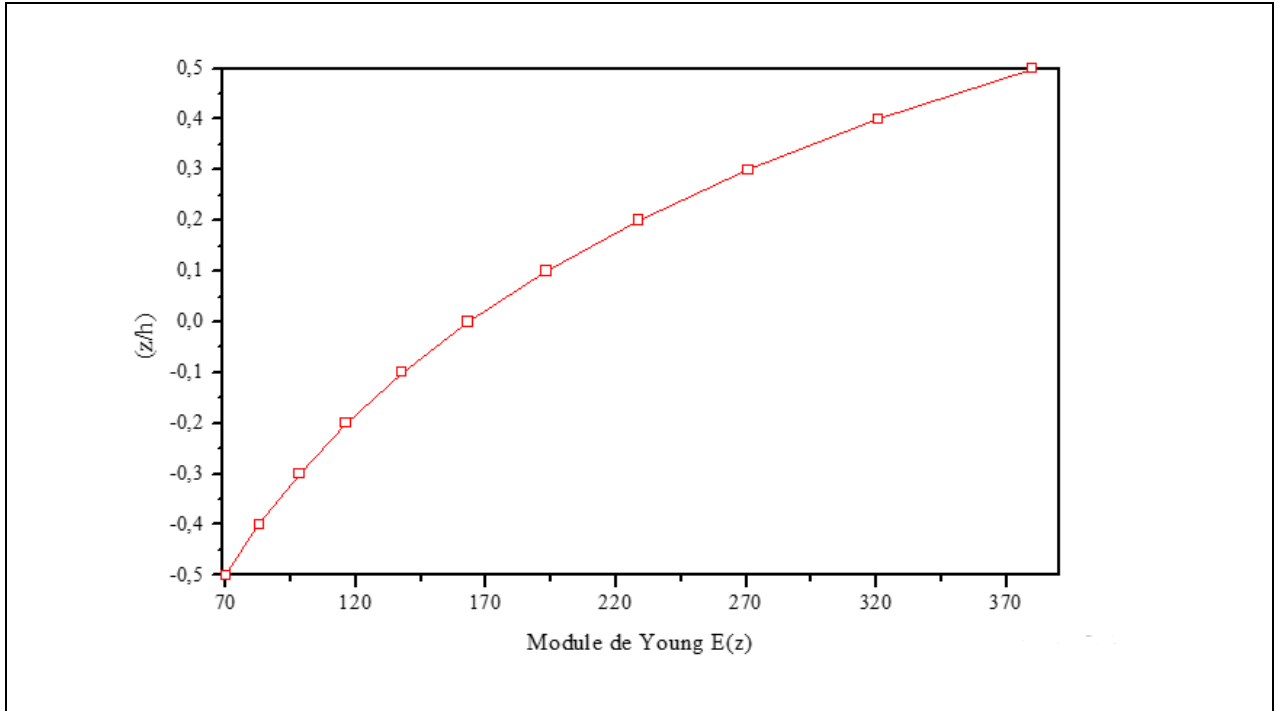


Figure 1.6 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [Hou.11a].

1.4.3. Loi de mélange Sigmoidale (S-FGM)

La loi de puissance et la fonction exponentielle sont généralement utilisées pour décrire la gradation des propriétés matérielles des FGM, mais dans les fonctions de loi de puissance et exponentielles, les concentrations de contraintes apparaissent dans l'une des interfaces dans lesquelles la matière est continue mais évolue rapidement. Pour surmonter ce problème, Shyang et Chung [Shy.06] ont suggéré une autre loi appelée loi Sigmoidale, qui combine deux fonctions de loi de puissance. Cette loi n'est pas une loi indépendante, elle a deux couches de FGM symétriques avec une distribution de la loi de puissance. Chung et Chi [Chu.01, Chi.02] ont également proposé de réduire jusqu'à un certain point l'utilisation de la loi sigmoïde les facteurs d'intensité de contrainte d'un corps fissuré. Selon cette loi, les deux fonctions de la loi de puissance sont définies par :

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.4.a)$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.4.b)$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.5.a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.5.b)$$

La figure 1.7, illustre la variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

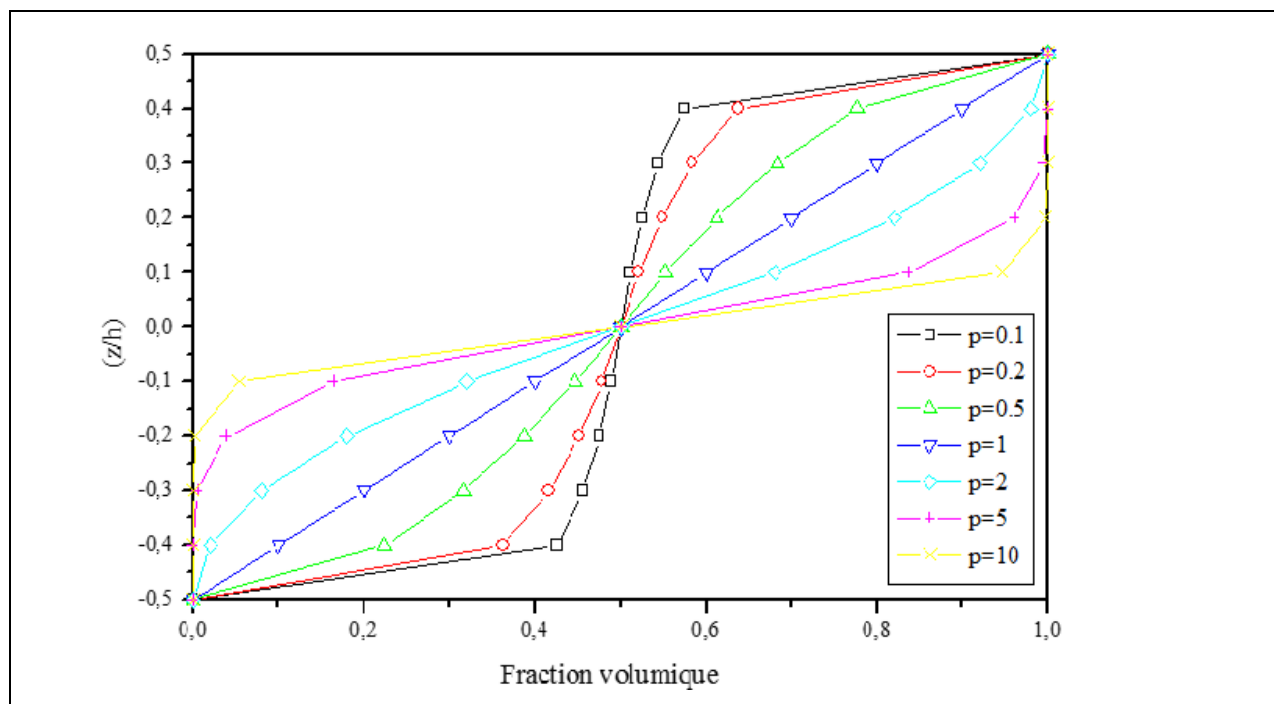


Figure 1.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [Hou.11a].

1.5. Propriétés matérielles effectives (homogénéisation) des FGM

Les propriétés effectives des matériaux composites homogènes macroscopiques peuvent être dérivées des structures de matériaux hétérogènes microscopiques en utilisant des techniques d'homogénéisation. Plusieurs modèles tels que les règles de mélange (schéma de Voigt), les limites de type Hashin - Shtrikman, les modèles de type Mori - Tanaka et les schémas autocohérents sont disponibles dans la littérature pour la détermination des limites des propriétés effectives [Klu.10]. Les schémas de Voigt et de Mori - Tanaka sont généralement adoptés par les chercheurs pour l'analyse de la plaque et de la structure d'un matériau fonctionnellement gradué.

1.5.1. Schéma de Mori-Tanaka

Mori et Tanaka [Mor.73] ont formulé une méthode pour calculer la contrainte interne moyenne dans la matrice d'un matériau qui a été à nouveau reformulée par Benveniste [Ben.87] pour l'application en matériau composite. Ce procédé permet de gonfler des composites avec des régions de phase particulière discontinues de la microstructure graduée. Selon le schéma de

Mori - Tanaka [She.12], le module de Young effectif E_f et le coefficient de Poisson ν_f peuvent être exprimés par :

$$E_f = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f} \quad (1.6)$$

$$\nu_f = \frac{9K_f - 2G_f}{6K_f + 2G_f} \quad (1.7)$$

Le coefficient de dilatation thermique α_f et la conductivité thermique K_f peuvent être exprimés par :

$$\frac{\alpha_f(Z, T) - \alpha_c(T)}{\alpha_m(T) - \alpha_c(T)} = \frac{\frac{1}{K_f(Z, T)} - \frac{1}{K_c(T)}}{\frac{1}{K_m(T)} - \frac{1}{K_c(T)}} \quad (1.8)$$

1.5.2. Modèle de Voigt

Le modèle de Voigt a été adopté dans la plupart des analyses des structures de FGM [She.09]. L'avantage de la méthode de Voigt est qu'elle est facile à calculer et peut être considérée comme la limite supérieure et inférieure des propriétés élastiques effectives d'un matériau hétérogène [Gib.95]. Les propriétés matérielles effectives P_f , telles que le module de Young E_f , le coefficient de Poisson ν_f , le coefficient de dilatation thermique α_f et la conductivité thermique K_f peuvent être exprimées comme suit:

$$P_f = P_t V_c + P_b V_m \quad (1.9)$$

Où P_t et P_b désignent les propriétés dépendantes de la température des surfaces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement V_m et V_c et sont les fractions volumiques de métal et de céramique qui peuvent être exprimées par $V_c + V_m = 1$. Si la fraction de volume V_m est supposée suivre une loi de puissance simple comme :

$$V_m = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1.10)$$

Où "k" est l'indice de fraction volumique et prend uniquement des valeurs positives, les différentes propriétés effectives peuvent être données comme suit:

$$E_f(Z, T) = [E_b(T) - E_t(T)] \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k + E_t(T) \quad (1.11)$$

$$\alpha_f(Z, T) = [\alpha_b(T) - \alpha_t(T)] \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k + \alpha_t(T) \quad (1.12)$$

$$K_f(Z, T) = [K_b(T) - K_t(T)] \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k + K_t(T) \quad (1.13)$$

$$\nu_f(Z, T) = [\nu_b(T) - \nu_t(T)] \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k + \nu_t(T) \quad (1.14)$$

Shen et al. [She.12] ont comparé les fréquences d'une plaque carrée Si / SUS304 simplement appuyée FG avec différentes valeurs d'indice de fraction volumique en environnement thermique à l'aide des modèles de Mori-Tanaka et de Voigt. Ils ont constaté que la différence de fréquences basée sur ces deux modèles variait de 0,3% à 0,98%, ce qui est très inférieur. Huang et al. [Hua.11] ont également comparé les modèles de Mori-Tanaka et de Voigt par l'analyse vibratoire de plaques carrées en porte-à-faux de plaques Al / Al₂O₃. Ils ont également observé que la différence maximale entre les fréquences propres utilisant le modèle est d'environ 6% lorsque l'épaisseur est augmentée. Il est bien connu que le modèle de Voigt est simple par rapport à Mori-Tanaka et prend également moins de temps de calcul. Donc, à la lumière de la discussion ci-dessus, on peut observer que le modèle de Voigt est acceptable pour prédire la réponse globale de la plaque et de la structure FGM.

1.6. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Il existe différentes méthodes physiques et chimiques pour la fabrication des FGM, en fonction du type de matériau, de leur application et des commodités accessibles. Les méthodes de traitement des FGM peuvent être classées en deux grandes catégories basées sur le traitement constructif et le transport de masse [Gro.97]. Dans la première catégorie, le FGM est construite couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement construits dans l'espace. L'avantage de cette technique est de fabriquer un nombre illimité de gradients. Pendant ce temps, dans la deuxième catégorie, les gradients au sein d'un composant dépendent de phénomènes de transport naturel tels que l'écoulement d'un fluide, la diffusion d'espèces atomiques ou la conduction thermique. Cependant, les progrès de la technologie d'automatisation au cours des deux dernières décennies ont permis de proposer des processus de gradation constitutifs réalisables sur les plans technologique et économique.

Les techniques existantes et les plus récentes de fabrication des FGM sont décrites en détail dans le tableau 1.2.

1.6.1. La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)

La technique de la métallurgie des poudres (PM) est utilisée pour produire un matériau fonctionnellement gradué [Koi.97, Wat.01, Nem.11] en quatre étapes principales: préparation de la poudre, pesée et mélange de la poudre selon la distribution spatiale prédéfinie, empilement et pilonnage du prémélange poudres (opérations de formage) et finalement compactage et formation d'une masse solide de matériau (frittage) [Zhu.01]. Plusieurs techniques ont été utilisées pour la préparation de la poudre, telles que les réactions chimiques, le dépôt électrolytique, le broyage, la pulvérisation, l'atomisation, la désintégration centrifuge, la réduction à l'état solide, etc. La méthode de traitement de la poudre est axée sur la précision de la pesée et la dispersion des poudres qui influencent sur les propriétés de la structure. L'opération de formage consiste à compacter des poudres en une forme géométrique et le pressage est généralement effectué à température ambiante. La résistance de la pièce comprimée non frittée dépend de la compacité [Zhu.01]. La pièce frittée a la forme d'une masse sans apparence de structure particulaire. Une certaine porosité peut être rencontrée et peut être réduite par les opérations secondaires.

1.6.2. Technique de dépôt en phase vapeur

Il existe différents types de techniques de dépôt en phase vapeur (VDT), notamment le dépôt par pulvérisation cathodique, le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD), le dépôt chimique en phase vapeur renforcé par plasma, etc. sont condensés par condensation, réaction chimique ou conversion pour former un matériau solide [Gro.97, Ras.12]. Ces processus sont utilisés pour former des revêtements afin de modifier les propriétés mécaniques, électriques, thermiques, optiques, de résistance à la corrosion et à l'usure des substrats. Ces procédés de dépôt en phase vapeur sont utilisés pour déposer des revêtements de surface de niveaux fonctionnels offrant une excellente microstructure pour un revêtement de surface mince.

La technique de dépôt en phase vapeur consomme beaucoup d'énergie mais produit des gaz toxiques comme sous-produits [Gup.15].

1.6.3. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Dans le procédé de coulage centrifuge (CS), la force de gravitation est utilisée par le filage du moule pour produire un matériau fonctionnellement gradué. Cette méthode est exclusivement adaptée à la fabrication de pièces cylindriques [Ras.12]. Le métal en fusion est versé dans un

moule à filer et le filage est poursuivi jusqu'à ce que le métal se solidifie. Le principal avantage de la méthode de coulée centrifuge est d'améliorer la densité du métal, d'augmenter les propriétés mécaniques réelles de la coulée de 10 à 15% et d'obtenir une structure métallurgique uniforme [Fuk.91]. Le gradient de composition est principalement obtenu par la différence de force centrifuge produite par la différence de densité entre le métal en fusion et les particules solides [Wata.00, Kie.03]. Il est évident dans la littérature qu'il existe une limite quant au type de gradient pouvant être produit car ce dernier est formé par un processus naturel (force centrifuge et différence de densité).

La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans la figure 1.8 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano [Xio.05].

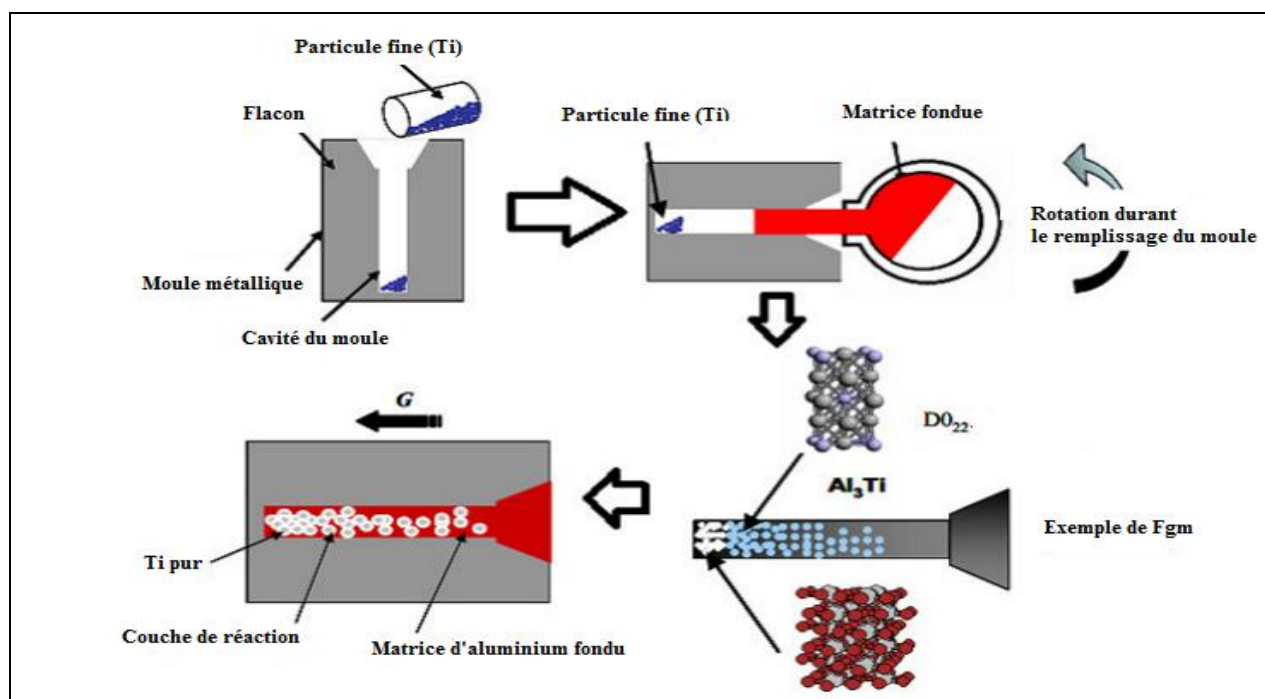


Figure 1.8 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes [Xio.05].

1.6.4. Méthode de fabrication de forme solide libre

La méthode de fabrication de forme solide libre (SFFM) est l'une des technologies de pointe permettant de produire des objets physiques directement à partir des informations générées par ordinateur des pièces. La fabrication de matériaux à gradient de fonctionnement est l'application la plus importante de cette méthode, car cette méthode représente de manière détaillée la distribution variée des matériaux dans la géométrie et son aptitude à contrôler la composition interne des composants [Lin X.05]. La forme de solide libre est un processus de fabrication

additive qui offre de nombreux avantages, dont une plus grande rapidité de production, une moindre consommation d'énergie, une utilisation maximale des matériaux, la possibilité de produire des formes et des conceptions complexes [Lin X.05]. Les procédés à base de laser utilisent principalement la méthode SFF dans la fabrication de matériaux fonctionnellement gradués [Hut.04].

Tableau 1.2 : Les processus général de traitement des FGM [Sat.80, Fuk.91, Wet.96, Gro.97, Wat.01, Zhu.01, Vel.02, Nem.11, Ras.12, Gur.14].

Processus	Variabilité de la fonction de transition	Polyvalence dans le contenu de la phase	Type des FGM	Polyvalence dans la géométrie des composants
Empilement de poudre	Très bien	Très bien	Masse	Modéré
Laminage de feuilles	Très bien	Très bien	Masse	Modéré
Pulvérisation humide	Très bien	Très bien	Masse	Modéré
Trempeage du lisier	Très bien	Très bien	Enrobage	Bien
Solidification par jet	Très bien	Très bien	Masse	Très bien
PVD, CVD	Très bien	Très bien	Masse	Modéré
Processus GMFC	Très bien	Très bien	Masse	Bien
Filtration / coulée en barbotine	Très bien	Très bien	Masse	Bien
Laser	Très bien	Très bien	Masse enrobage	Très bien
Pulvérisation thermique	Très bien	Très bien	Masse	Bien
Sédimentation	Bien	Très bien	Joindre masse	Faible
Diffusion	Modéré	Très bien	Masse	Bien
Solidification dirigée	Modéré	Modéré	Masse	Faible
Gradation électrochimique	Modéré	Bien	Masse	Bien
Moussage	Modéré	Bien	Masse	Bien

1.7. Applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

L'intérêt pour les applications des FGM s'explique par leurs caractéristiques supérieures à celles des matériaux composites traditionnels. Après plus de 30 ans de recherche, les applications des mutilations génitales féminines ont eu des effets à la fois inattendus et bénéfiques pour la société. La plupart des avantages de ces matériaux dépendent du fait qu'ils peuvent être adaptés aux besoins, ce qui élargit considérablement les outils bien utilisés de la science des matériaux. Les FGM sont initialement utilisés dans l'aérospatiale, mais au cours des dernières années, les chercheurs ont montré leur application dans d'autres domaines, tels que les matériaux industriels, l'optoélectronique, les biomatériaux et les matériaux énergétiques, comme illustré à la figure 1.10.

1.7.1. L'aérospatiale

Les matériaux gradués sur le plan fonctionnel appartiennent à une classe de composites présentant une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre. Cette qualité de gradation des propriétés du matériau entraîne la réduction des contraintes thermiques, des contraintes résiduelles et des concentrations des contraintes [Red.00, Red.04]. Étant donné que les propriétés changent en fonction de l'épaisseur d'un matériau, les FGM peuvent fournir aux concepteurs une réponse de matériau personnalisée et des performances exceptionnelles dans les environnements thermiques. Par exemple, la navette spatiale utilise des carreaux de céramique comme protection thermique contre la chaleur générée lors de la réintroduction dans l'atmosphère terrestre. Cependant, ces tuiles sont laminées à la superstructure de la navette et sont sujettes à la fissuration et au décollement à l'interface superstructure / tuile en raison d'un changement soudain entre les coefficients de dilatation thermique. En d'autres termes, le carreau de céramique se dilate d'une quantité différente de celle de la sous-structure qu'elle protège. La différence d'expansion provoque des concentrations des contraintes à l'interface du carreau et de la superstructure, ce qui entraîne une fissuration ou un décollement [Gup.15].

La Figure 1.9, montre les concentrations de contraintes trouvées dans les panneaux de protection thermique conventionnels à l'interface carreau / superstructure [Gup.15]. Il montre également comment une FGM réagit contre ces concentrations de contraintes en modifiant progressivement les propriétés du matériau en fonction de son épaisseur.

Un FGM composée de céramique sur la surface extérieure et de métal sur la surface intérieure élimine la transition abrupte entre les coefficients de dilatation thermique, offre une protection thermique / anticorrosion et une capacité de charge.

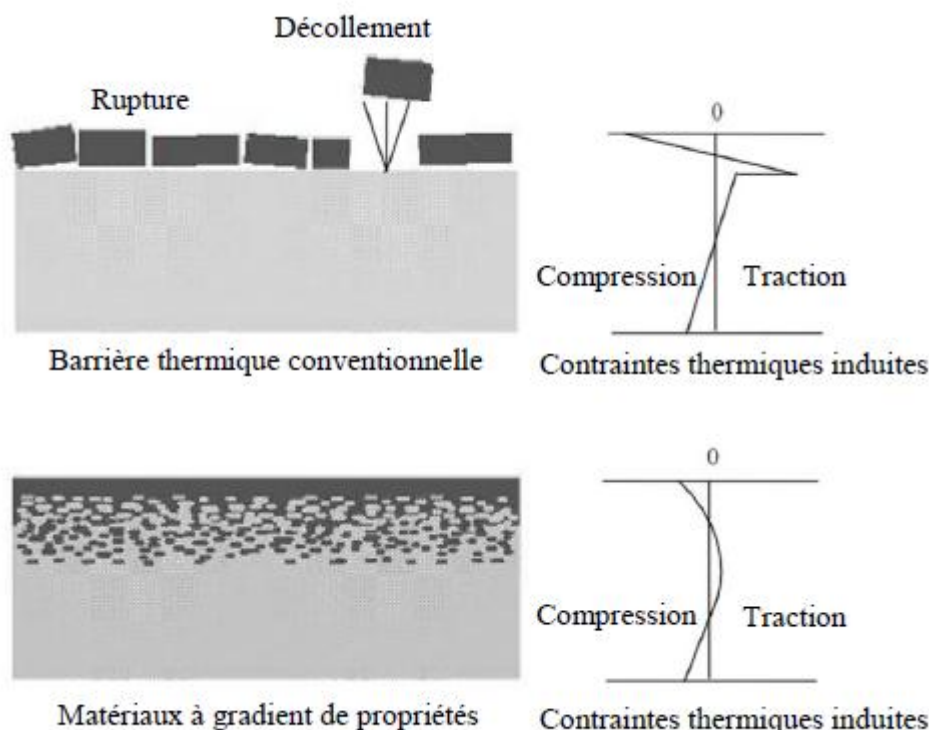


Figure 1.9 : Protection thermique des matériaux conventionnels et des FGM [Gup.15].

1.7.2. Application biomédicale

Les FGM attirent de plus en plus l'attention pour les applications biomédicales, notamment dans les implants dentaires, les prothèses du genou et les prothèses articulaires de la hanche. Les implants dentaires peuvent être classés de manière fonctionnelle afin de créer un comportement mécanique optimisé et d'obtenir la biocompatibilité et l'amélioration d'osséointégration prévues [Chu.06, Meh.13]. Dans le cas des implants dentaires, les FGM sont généralement composées d'un mélange de titane et d'hydroxyapatite / collagène bioactif (HAP / Col) [Li.10, Wat.97, Wat.04]. Dans la littérature, plusieurs auteurs ont suggéré différents matériaux pour l'implantation dentaire tels que Ti / HA [Wat.02, Yan.07, Fuj.10], TiN / HA [Wat.99], Ti / SiO₂ [Tak.92], HA / ZrO₂ [Guo.03], etc.

Les FGM sont également utilisées dans le remplacement artificiel de l'articulation de la hanche [Fro.07, Osh.14]. Tawakol et Bondok [Taw.13] ont suggéré, en ce qui concerne le remplacement du genou.

1.7.3. L'optoélectronique

Dans la littérature, il existe quelques applications possibles de matériaux fonctionnellement gradués pour des dispositifs optoélectroniques, telles que des diodes p - i - n, des photodétecteurs et des lasers à hétéro-jonction [Mul.03, Wos.05]. L'étude théorique démontre que les dispositifs avec région active de FGM auraient des caractéristiques supérieures à celles

des constructions orthodoxes. Par exemple, la modulation de l'indice de réfraction peut être obtenue dans de tels composants grâce à la modification de la composition du matériau. Une autre possibilité consiste à appliquer le concept de gradation dans des dispositifs actifs à semi-conducteurs. Dans les semi-conducteurs, la fonction du matériau peut décrire la bande interdite énergétique, l'indice de réfraction, la concentration en porteurs, la mobilité des porteurs, la longueur de diffusion, le champ électrique intégré et d'autres propriétés influençant sur les paramètres des dispositifs optoélectroniques. Les matériaux fonctionnellement gradués sont des matériaux en perspective pour les dispositifs optoélectroniques modernes, tels que les lasers de bord à seuil de courant faible (GRINSCH) [Bau.98, Yam.03] et les photodétecteurs accordables. Les couches graduées peuvent également être utilisées comme tampons dans l'hétéroépitaxie de nitrures. À l'avenir, il devrait s'appliquer de manière plus réaliste en particulier dans ce domaine.

Parmi les autres applications possibles, citons: le revêtement d'insert d'outil de coupe, les composants de moteur automobile tels que les chambres de combustion (SiC - SiC), (AlSiC), les chemises de cylindre de moteur (SiCw / Alliage-Al), les composants de réacteur nucléaire, les aubes de turbine, les échangeurs thermiques, tribologie, capteurs, portes ignifuges, photodétecteurs et cellules solaires à haute efficacité énergétique, réservoirs de pression, réservoirs de carburant, inserts pour outils de coupe, pales d'éoliennes, réservoirs pneumatiques de lutte contre les incendies, tubes cryogéniques pour scanner IRM, tables à rayons X, freins pour voitures de course (SiCp/ Alliage-Al), etc [Xin.98, Kaw.02, Mali.05]. La liste est interminable et de plus en plus d'applications naissent à mesure que la technologie de traitement, le coût de production et les propriétés des FGM s'améliorent [Wood.12].

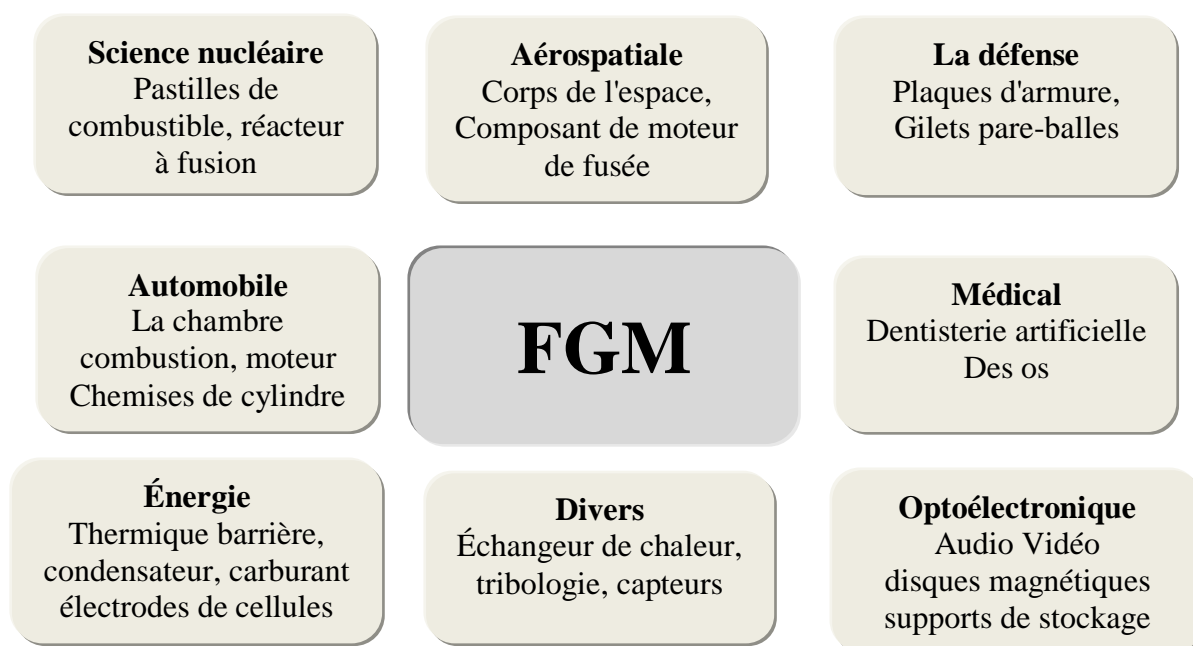


Figure 1.10 : Applications des FGM dans divers domaines [Gup.15].

1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », la statistique et l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs divers domaines d'applications.

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

La variation spatiale et la variation progressive des propriétés des matériaux a gradient de propriétés permettent de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'applications dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre 2 : Revue sur les travaux réalisés sur les structures en FGM

2.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites microscopiques inhomogènes, qui sont souvent fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramiques, les caractéristiques matérielles des FGM varient selon les dimensions du matériau suivant une fonction. Le concept de FGM a été proposé au Japon en 1984, lors d'un projet spatial, depuis ses débuts dans les années 80.

Les plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont largement utilisées dans différents domaines de l'ingénierie tels que le génie civil, la mécanique, l'aérospatiale, la chimie, l'électricité, etc [Ahm.14, Yag.14, Bel.15, Yah.15, Kar V.16, Bous.16, Bell.16, Bouk.16, Ald.17, Akb.17, Sek.17a, Kol.17, Moh.18, She G.18, Hus.18, Far.18, Att.18, Avc.19, Kara.19, Chaa.19, Ber.19].

2.2. Etude des recherches disponibles sur les structures en FGM

Beaucoup de travaux relatifs au domaine d'analyse de la vibration, de la stabilité et de la flexion des plaques FGM sous des différents chargements thermiques et mécaniques ont été publiés durant les dernières années.

2.2.1. Vibration et réponse dynamique FGM

Un grand nombre des études sur les vibrations libres et forcées pour les plaques de FGM avec ou sans charge thermique et / ou mécanique initiales dans le plan ont été rapportées dans la littérature au cours des dernières années. Cheng et Kitipornchai [Che.99] ont utilisé la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de la déformation en cisaillement au premier ordre (FSDT) pour étudier le comportement en flambement et en vibration des plaques FGM par analogie avec les vibrations membranaires. Ng et al. [Ng.00] ont étudié la résonance paramétrique des plaques en utilisant le principe de Hamilton. He et al. [He.01] ont rapporté la formulation par éléments finis basée sur la théorie des plaques minces pour contrôler la forme et la vibration d'une plaque FGM avec des capteurs piézoélectriques et des actionneurs intégrés soumis à une charge mécanique. Les analyses de vibrations tridimensionnelles pour les plaques

rectangulaires de FGM ont été développées par Reddy et Cheng [Red.03] en utilisant une méthode de formulation asymptotique et de matrice de transfert. Yang et Shen [Yan.02] ont étudié la réponse dynamique d'une FGM soumise à des charges latérales impulsives combinées à des actions initiales dans le plan dans un environnement thermique. Kim [Kim.05] a utilisé la méthode de Rayleigh - Ritz basée sur la théorie des plaques de déformation en cisaillement de troisième ordre pour étudier les caractéristiques de vibration de plaques rectangulaires FG initialement soumises à des contraintes dans un environnement thermique.

Ferreira et al. [Fer.06] ont utilisé des méthodes sans maillage pour étudier les fréquences propres des plaques FG. Les vibrations libres des plaques FGM avec différentes conditions aux limites sont rapportées par Roque et al. [Roq.07] qui utilisent la méthode de la fonction de base radiale multiquadrique et la HSDT. Li et al. [Li.09] ont utilisé la théorie de l'élasticité tridimensionnelle ainsi que la méthode de Ritz pour générer les fréquences propres des plaques rectangulaires FG dépendantes de la température. Natarajan et al. [Nat.11] ont étudié la vibration en flexion libre linéaire d'une plaque FG fissurée dans un environnement thermique sévère. Sheikholeslami et Saidi [Shei.13] ont exposé la théorie de cisaillement d'ordre normal et la plaque déformable normale pour analyser les caractéristiques de vibration des plaques rectangulaires à gradations fonctionnelles sur un appui élastique. Des analyses de vibrations d'amplitude faible et importante des plaques FG reposant sur des bases élastiques de type Pasternak dans un environnement thermique à l'aide de schémas de Voigt et de Mori - Tanaka basées sur la théorie d'ordres supérieurs ont été effectuées par Shen et Wang [She.12].

Thai et Vo [Tha.13a] ont présenté une nouvelle théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal pour la flexion, le flambement et la vibration des plaques FG. Neves et al. [Nev.13] ont utilisé la technique sans maillage et la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur pour étudier les analyses statiques, la vibration libre et le flambement des plaques sandwichs isotropes. Thai et al. [Tha.14] ont utilisé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour étudier la vibration libre, la flexion et le flambement d'une plaque en sandwich à noyau homogène et d'une plaque à des couches supérieure et inférieure en FGM dans diverses conditions aux limites.

Cheng et Batra [Che.00b] ont utilisé la théorie des plaques du troisième ordre de Reddy pour étudier la réponse dynamique de plaques isotropes à gradient fonctionnel sous une charge hydrostatique uniforme dans le plan. L'auteur a mené une étude comparative des différentes théories telles que CLPT, FSDT et HSDT afin de réaliser une analyse dynamique d'une plaque simplement appuyée en tenant compte de l'inertie de torsion.

Yang et Shen [Che.00a] ont étudié la réponse dynamique de plaque FGM pré-sollicitée soumises à une charge latérale impulsive avec différentes conditions aux limites. Le module de Young de la plaque FGM est supposé dépendant de la température et gradué dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en terme de fraction volumique des constituants. Les effets des différents paramètres tels que l'indice de fraction de volume constituant, la rigidité de la fondation, le rapport d'aspect de la plaque, la forme et la durée de la charge impulsive, sur la réponse dynamique des plaques FGM sont étudiés. Dans la suite, l'auteur a étudié [Yan.02] l'influence des mêmes paramètres sur des plaques FGM soumis à des contraintes initiales dans un environnement thermique en utilisant différentes conditions aux limites.

Shen [She.12a] a utilisé la théorie des coques de déformation sous cisaillement d'ordre supérieur pour étudier la réponse aux vibrations d'une coque cylindrique de FGM déformable par cisaillement dans le milieu élastique de fondation Pasternak. Les schémas Voigt et Mori -Tanaka sont utilisés pour déterminer les propriétés effectives des matériaux. L'auteur a constaté que la réponse aux vibrations est fortement influencée par les différentes théories de coque et les méthodologies de solution adoptées pour obtenir la solution, mais qu'elle est moins affectée par les différents modèles utilisés de micromécanique (Voigt et Mori - Tanaka) [Gup.15].

Vel et Batra [Vel.04] ont formulé la solution exacte de l'analyse dynamique de FGM et ont été validés à l'aide des théories disponibles pour la mise en œuvre efficace de la solution formulée dans les plaques épaisses et minces en FGM. Ils ont trouvé la compatibilité d'une solution exacte avec les théories existantes (CLPT, FSDT et TSDT) en comparant les fréquences propres exactes, les déplacements et les contraintes.

Sundararajan et al. [Sun.05] ont étudié l'effet de divers paramètres tels que l'indice de gradient, la température, l'épaisseur et le rapport d'aspect, ainsi que l'angle d'inclinaison sur la caractéristique dynamique de la plaque FGM dans un environnement thermique. La séquence de mouvement de Lagrange est utilisée pour formuler les équations d'équilibre non linéaires et la solution a été réalisée par la méthode des éléments finis et la technique d'itération directe. Woo et al. [Woo.06] ont étudié l'effet des propriétés des matériaux, des conditions aux limites et des charges thermiques sur le comportement dynamique des plaques. La modélisation mathématique est réalisée à l'aide de la théorie de Von Karman. Huang et Shen [Hua.06] ont étudié les effets du changement de température, de la répartition de la tension et des fractions volumiques sur les vibrations non linéaires et la réponse dynamique de la plaque en FGM sous chargement électrothermique. Ils ont utilisé l'équation HSDT et l'équation générale de Von Karman pour formuler les équations régissant les effets thermo-piézoélectriques. On constate que les

fréquences propres diminuent avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique, du changement de température et de la tension de commande.

Kitipornchai et al. [Kit.06] ont étudié l'influence des différentes propriétés mécaniques telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, la charge thermique, les différentes conditions aux limites, le rapport latéral sur l'épaisseur et le rapport d'aspect de la plaque sur les caractéristiques dynamiques de la plaque FGM. Allahverdizadeh et al. [All.08] ont utilisé une approche semi-analytique pour analyser les vibrations libres et forcées non linéaires d'une plaque en FGM d'épaisseur constante. La solution généralisée est effectuée par la méthode du mode de temps supposé et la technique de moyennage du temps de Kantorovich. L'étude a montré l'effet de l'amplitude de vibration, de la variation du coefficient de Poisson et de l'indice de fraction volumique sur la caractéristique de vibration. Nie et Zhong [Nie.07] ont étudié la réponse dynamique d'une plaque FGM en utilisant la théorie d'élasticité-3D avec différentes conditions aux limites.

Matsunaga [Mat.08] a incorporé les effets du cisaillement transverse, des déformations normales et de l'inertie rotative lors de l'analyse de la fréquence naturelle des plaques en FGM. Fares et al. [Fare.09] ont présenté une théorie unifiée incorporant la contrainte normale transversale et la contrainte avec les conditions aux limites aux deux surfaces des plaques sans prendre en compte le facteur de correction du cisaillement.

Malekzadeh et Beni [Mal.10] ont mené une étude sur la vibration libre d'une plaque FGM avec certaines conditions aux limites dans un environnement thermique basé sur la FSDT. Hashemi et al. [Has.10] ont présenté l'étude de la vibration libre de la plaque FGM reposant sur les fondations élastiques de Winkler ou de Pasternak dans plusieurs conditions aux limites. Ils ont proposé une nouvelle formule pour les facteurs de correction de cisaillement afin d'étudier l'effet des paramètres de rigidité de la fondation sur la vibration libre des plaques FG en tenant compte des rapports de forme, des indices de gradient et des rapports épaisseur / longueur dans certaines conditions aux limites exposées à la plaque. Dans la même ligne, l'auteur [Has.11] a utilisé la théorie des plaques de Reissner-Mindlin pour analyser des plaques de mouvement libre avec des différentes conditions aux limites. Ils ont introduit des nouvelles fonctions potentielles et auxiliaires pour la formulation des champs de déplacement des plaques et pour trouver la fréquence propre de la plaque.

Xiang et al. [Xia.11] ont obtenu un modèle d'ordre n pour une plaque FGM dans lequel un polynôme d'ordre n est utilisé pour caractériser le champ de déplacement. Ils ont calculé les fréquences propres de la plaque FGM avec différents rapports côte à épaisseur, les propriétés des matériaux et comparé à la théorie existante pour valider les résultats.

Talha et Singh [Tal.10] ont modifié leur déplacement transversal lors de l'examen par la HSDT afin d'étudier la réponse en vibration des plaques FGM. L'auteur a utilisé un élément fini Lagrangien isopérimétrique continu pour résoudre les équations de base. Ils ont observé que le paramètre de fréquence naturelle augmenté avec le rapport d'aspect de la plaque, l'indice de fraction volumique n inférieur et le rapport d'épaisseur plus faible. Autre auteur [Tal.11abc] a ensuite poursuivi l'étude des différentes conditions aux limites a découvert les effets des différents paramètres tels que la fraction volumique, le rapport d'épaisseur, etc. sur la grande amplitude de vibration en flexion d'un matériau FG.

Natarajan et Manickam [Nat.12] ont utilisé un élément flexible de cisaillement basé sur la théorie d'ordre supérieur des structures pour étudier le comportement vibratoire des tics de plaque FGM lorsqu'il existe une variation non intrinsèque des déplacements sur l'épaisseur et l'inertie de rotation. Jha et al. [Jha.13] ont analysé la réponse en vibration libre des plaques FGM avec différentes conditions aux limites en utilisant une théorie d'ordre supérieur de déformation en cisaillement/ cisaillement normal (HOST/ HOSNT). Ils ont observé qu'il y avait une diminution des fréquences propres lorsque l'indice de gradient de matériau ainsi que le rapport côte à épaisseur augmentaient. Ungbhakorn et Wattanasakulpong [Ung.13] ont utilisé une méthode énergétique pour étudier la réponse aux vibrations de la plaque FGM dans des conditions de charge thermo-élastique.

Abualnour et al. [Abu.18] ont présenté une nouvelle théorie de la plaque trigonométrique quasi-3D pour l'analyse dynamique des plaques FG.

2.2.2. Analyse de la flexion et de la stabilité des plaques FG

Birman [Bir.95] a étudié le comportement en flambement d'une plaque composite FG. Feldman et Aboudi [Fel.97] a optimisé la charge de flambement pour une plaque FGM avec différentes conditions aux limites sous des charges compressives dans le plan. Reddy et al. [Red.99] ont formulé les relations entre la théorie classique des plaques et la théorie des plaques au premier ordre pour le comportement en flexion des plaques circulaires FG. Reddy [Red.00] a également utilisé la HSDT pour développer le modèle des éléments finis pour la réponse de la flexion thermomécanique linéaire et non linéaire des plaques FGM. Vel et Batra [Vel.02] ont utilisé la méthode des éléments finis pour obtenir une solution exacte de la déformation thermo-élastique des plaques épaisses FG exposées à des charges thermomécaniques. Liew et al. [Lie.03] ont souligné le comportement après le flambement des plaques FGM avec deux bords opposés fixés et avec actionneurs piézoélectriques liés à la surface. Najafizadeh et Eslami [Naj.02] ont utilisé la théorie des plaques classique (CLPT) pour étudier le comportement en flambement des plaques FGM circulaires simplement appuyées et bloquées. Onkar et al.

[Onk.06, Onk.07] ont présenté le flambement généralisé d'une plaque composite stratifiée présentant des propriétés de matériau aléatoires en utilisant la théorie des plaques classique (CLPT) associée à la théorie de la déformation en cisaillement au premier ordre (FSDT). Samsamshariat et al. [Sam.07] ont étudié le comportement de flambement d'une plaque FGM sous compression uniaxiale, compression et tension biaxiales, en utilisant du CLPT et du HSDT. Lee et al. [Lee.10] ont utilisé la méthode de Ritz afin de réaliser l'analyse post-flambement pour des plaques FG soumises à une charge thermomécanique. Thai et Choi [Tha.12] ont présenté une théorie raffinée pour l'analyse de flambement des plaques FG soumises à des compressions uniaxiales et biaxiales.

Uymaz et Aydogdu [Uym.13] ont utilisé le concept d'énergie de déformation linéaire et la méthode de Ritz pour étudier le flambement mécanique des plaques rectangulaires à gradient transversal soumises à des charges biaxiales. Dans la discussion qui suit, des efforts ont été faits pour incorporer certaines des études qui ont été réalisées pour obtenir l'analyse de la stabilité sous plusieurs conditions des charges telles que thermiques, électromécaniques depuis des décennies. Praveen et Reddy [Prav.98] ont utilisé la FSDT pour étudier le comportement thermo-élastique des plaques rectangulaires FG. Reddy [Red.00] a également utilisé la théorie des plaques TSDT pour étudier l'effet de la distribution du matériau sur les flèches et les contraintes transversales, et a conclu que la réponse des plaques FGM est fortement influencée par les matériaux à gradients des propriétés.

Shen [She.98] a utilisé la HSDT pour formuler la base de l'analyse post-flambement d'une plaque composite déformable par cisaillement sous les charges axiales et thermiques. La technique de perturbation est appliquée pour déterminer les charges de flambement et les trajectoires d'équilibre post-flambement. L'auteur [She.01] a poursuivi son étude sur l'effet de flambement et l'effet post-amortisseur d'une plaque de Reissner-Mindlin rectangulaire soumise à une compression biaxiale combinée à une charge transversale centrale et reposant sur une base élastique de type Pasternak. Nous concluons que le comportement de la plaque en matière de flexion est strictement influencé par la rigidité de la fondation, la déformation par cisaillement transversal, le rapport hauteur / largeur et la pression latérale initiale [Gup.15].

Mian et Spencer [Mia.98] ont proposé des solutions exactes aux équations 3D d'élasticité 3D pour les plaques FG rectangulaires et circulaires sans traction. Ils ont développé une solution 3D exacte pour une plaque épaisse basée sur les équations classiques 2D pour l'étirement et la flexion des plaques similaires. Ootao et Tanigawa [Oot.99] ont examiné l'apport de chaleur partiel dans un état transitoire pour étudier la contrainte thermique tridimensionnelle sur les plaques en FGM. Cheng et Batra [Che.00a] ont établi une relation exacte entre la déflexion d'une

plaque polygonale FG simplement appuyée donnée par la FSDT et la TSDT à celle d'une plaque homogène de Kirchhoff. Les propriétés matérielles effectives sont régies par la règle du mélange et la fraction volumique de la phase céramique doit suivre une distribution de la loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque.

Woo et Meguid [Woo.01] ont étudié par l'ordinateur les déformations non linéaires basées sur la théorie des plaques non linéaires classique de Von Karman des plaques FG minces et des coques peu profondes. La flexion, la contrainte et le moment de flexion sont calculés avec les différentes conditions aux limites de la plaque et de la coque FGM soumises à une charge thermomécanique transversale.

Vel et Batra [Vel.02] ont présenté une solution exacte pour les déformations tridimensionnelles d'une plaque rectangulaire FG simplement appuyée, soumise à des charges thermomécaniques. La méthode des séries de puissance est utilisée pour trouver la solution de l'équation d'équilibre avec différentes conditions aux limites thermiques et structurelles.

Ma et Wang [Ma.03] ont examiné la théorie classique des plaques de Von Karman non linéaire pour obtenir la réponse structurelle des plaques FGM soumises à une charge thermomécanique. L'influence des constantes des matériaux et des conditions aux limites sur la distribution de la température, la flexion non linéaire, la température critique de flambement et le comportement thermique après le flambement de la plaque FGM est observée.

Wu [Wu.04] a utilisé la FSDT pour dériver les équations d'équilibre et de la stabilité d'une plaque FGM rectangulaire soumise à une charge thermique.

Qian et al. [Qia.04] ont utilisé une méthode de Petrov-Galerkin locale sans maillage (MLPG) pour analyser les déformations thermoélastiques à déformation plane d'une plaque FGM simplement appuyée. Le matériau de la plaque est considéré comme étant constitué de deux constituants isotropes répartis de manière aléatoire. Les déplacements et les contraintes calculés avec la méthode MLPG montrent une proximité étroite avec la solution analytique du problème.

Shen et al. [She.07] ont utilisé la théorie HSDT pour obtenir la réponse thermique d'une plaque FGM sous une charge thermique parabolique non uniforme dans le plan. Ils ont également examiné l'imperfection géométrique initiale de la plaque. Dans la suite l'auteur [She. 07a, 08], examine la réponse en flexion thermique non linéaire d'une plaque FGM déformable par cisaillement avec des actionneurs piézoélectriques sous des charges thermiques et électriques.

Sofiyev [Sof.10] a étudié l'effet des charges combinées d'extension axiale et de la pression hydrostatique sur les caractéristiques de flambement des coques circulaires et coniques en FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Les propriétés des matériaux sont

supposées varier de manière régulière dans le sens de l'épaisseur. Le schéma de Voigt est utilisé pour avoir les propriétés matérielles effectives. L'auteur a dérivé une formule spécifique pour obtenir la réponse de flambement de la coque FGM avec et sans la fondation élastique.

Bagherizadeh et al. [Bag.11] ont utilisé la théorie de déformation en troisième ordre (HSDT) pour étudier le flambement mécanique de la coque cylindrique FGM simplement appuyée qui est entourée par la fondation élastique de Pasternak sous des charges de compression axiales et radiales combinées. Il a conclu que la géométrie de la coque, la fraction volumique et les paramètres de fondation, tels que le coefficient de cisaillement de la fondation de Pasternak, avaient une grande influence sur les caractéristiques de flambement de la coque FGM. L'auteur a également constaté que la coque entièrement en céramique avait la plus grande charge critique de flambement.

Nguyen et al. [Ngu.11] ont utilisé la méthode de Gelerking et la HSDT avec la non-linéarité de Von Karman pour étudier les comportements de flambement et de post-flambement des plaques épaisses en FGM soumises à des charges thermomécaniques. Les propriétés des matériaux sont supposées être variées dans le sens de l'épaisseur, ce qui correspond à une distribution simple de la loi de puissance en termes des fractions volumiques des constituants.

Ghannadpour et al. [Gha.12] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le comportement du flambement des plaques FGM sous une distribution de température linéaire et non linéaire sur l'épaisseur de la plaque. La CLPT est utilisé pour formuler la modélisation mathématique. Alshorbagy et al. [Als.13] ont étudié l'effet du décalage du plan neutre à partir de la position médiane de la plaque FGM soumise à une charge thermomécanique. Ils ont constaté que dans la plaque FGM, le plan neutre n'est pas exactement à la position médiane, mais il se décale légèrement sur le côté avec le module de Young plus élevé.

Bousahla et al. [Bous.14] ont proposé une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale basée sur la position de la surface neutre pour l'analyse de la flexion des plaques FG.

Zhang et Zhou [Zha.15] ont étudié le comportement après le flambement d'une plaque FGM sur une fondation élastique en utilisant la HSDT avec les différentes conditions aux limites. La méthode de Ritz est utilisée pour trouver l'effet de différentes conditions aux limites, de la rigidité de la fondation, les conditions thermiques et de l'indice de fraction volumique sur le comportement après le flambement. Rad [Rad.15] a étudié le comportement thermo-élastique des plaques circulaires FGM. Les fondations de type Horvath-Colasanti et la théorie-3D de la thermoélasticité sont utilisées pour la modélisation. On a étudié l'influence des indices d'hétérogénéité des matériaux, des coefficients de rigidité de la fondation, des différentes charges

et de la répartition de la température à travers les surfaces de la plaque sur les champs de déplacement et de contrainte.

Beldjelili et al. [Beld.16] ont étudié la flexion thermomécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie d'une plaque trigonométrique à quatre variables. Benahmed et al. [Bena.17] ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour les plaques rectangulaires épaisses FG sur des fondations élastiques. Ait Atmane et al. [Ait.17] ont examiné l'effet de l'éirement en épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique de poutres en FG reposant sur des fondations élastiques. Younsi et al. [You.18] ont proposé d'une théorie de déformation en cisaillement 2D et 3D pour l'étude du comportement mécanique des plaques.

2.2.3. Analyse d'étude des plaques sandwichs FG

Zenkour et Alghamdi [Zen.10] ont étudié la flexion de la plaque sandwich fonctionnellement gradués sous des charges mécaniques et thermiques. Xiang et al. [Xia.09] ont proposé une étude du comportement de la flexion des plaques sandwichs isotropes soumises à des charges mécaniques par plusieurs théories de déformation en cisaillement. Afaq [Afa.03] on présenté une étude sur le développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord.

Librescu et Hause [Lib.00] ont présenté les développements récents dans la modélisation et le comportement de constructions sandwichs avancées. Tornabene et al. [Torn.14] ont proposé l'analyse vibratoire de structures en coque à double courbe en utilisant la cinématique généralisée de la formule de Carrera unifiée, ont introduisant l'influence de Zig-Zag fournie par la fonction de Murakami. Barretta et Luciano [Bar.14] ont présenté une nouvelle procédure de solution, basée sur le principe de correspondance entre une poutre de Saint-Venant linéairement élastique, homogène et orthotrope sous torsion et une plaque FG de Kirchhoff linéairement élastique viscoélastique, sans contraintes cinématiques. Tornabene et al. [Torn.15] ont étudié la récupération des contraintes normales, les contraintes transversales et de déformation de cisaillement transversale dans les structures en coque sandwich FG statiquement déformées à double courbure à l'aide de la cinématique de Zig-Zag généralisée et de la formulation unique de Carrera.

Natarajan et Manickam [Nat.12] ont étudié la flexion et la vibration en flexion dans deux types des plaques sandwich FG en utilisant un élément de cisaillement flexible QUAD-8 proposé sur la base de la HSDT. Neves et al. [Nev.13] ont utilisé la HSDT quasi-3D afin de présenter l'analyse statique et dynamique de flambement des deux types des plaques sandwichs FG.

Mantari et Soares [Man.14ab] ont proposé une HSDT quasi-3D à trois inconnus et à cinq inconnus pour l'analyse de la flexion d'une plaque sandwich FG. Alipour et Shariyat [Alip.14] ont étudié la contrainte et la déformation des plaques sandwichs annulaires FG de traction normale et / ou de cisaillement non uniforme en employée la théorie élastique des plaques de Zig-Zag .

Sobhy [Sob.13] a analysé le flambement et la réponse dynamique des plaques sandwichs graduées exponentiellement reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites. Alibeigloo et Alizadeh [Ali.15] ont examiné les réponses en flexion et en vibration libre des deux types des plaques sandwichs FG basées sur la théorie de l'élasticité 3D. Bennoun et al. [Benno.16] ont présenté une nouvelle théorie des plaques raffinées à cinq variables pour l'analyse des vibrations des plaques sandwichs FG. Akavci [Aka.16] a utilisé un nouveau modèle de plaque de déformation normale à cisaillement hyperbolique pour étudier les réponses en flexion dynamique et le flambement des plaques sandwichs FG simplement appuyée sur des fondations élastiques. Boudierba et al. [Boud.16] ont étudié la stabilité thermique d'une plaque sandwich fonctionnellement gradué en utilisant une simple théorie de la déformation en cisaillement. Menasria et al. [Men.17] ont proposé un nouveau HSDT simple pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwichs FG. Katariya et al. [Kat.18] ont présenté une analyse géométrique et non linéaire de flexion et des contraintes d'un panneau sandwich à coque asymétrique en utilisant la HSDT.

En Algérie, en laboratoire des matériaux et hydrologie de Sidi Bel-Abbes, beaucoup de travaux relatifs au domaine concernant l'étude des divers comportements des plaques FGM et en particulier sur les plaques sandwichs FG ont été publiée sous la direction de professeur Tounsi Abdelouahed, on peut citer quelques travaux comme ceux mené par Bachir et al. [Bac.12] ont étudié le flambement thermique d'une plaque FG en utilisant la théorie raffinée de déformation en cisaillement des plaques à quatre variables. Tounsi et al. [Tou.13] ont proposé une analyse de flexion des plaques sandwichs avec un noyau FG basé sur une théorie raffiné de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Houari et al. [Hou.13] ont étudié la flexion thermoélastique des plaques sandwichs FGM en utilisant la théorie HSDT avec l'effet d'étirement d'épaisseur. Hamidi et al. [Ham.15] ont utilisé un modèle sinusoïdal à 5 inconnues avec l'effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG. Belkorissat et al. [Bel.15] ont étudié les propriétés vibratoires de nanoplaques FG en utilisant un nouveau modèle à quatre variables.

Tounsi [Tou.16] a présenté une nouvelle théorie des plaques non polynomiales à 3 inconnues pour le flambement et la vibration d'une plaque sandwich FG. Bennoun et al. [Benno.16] ont

utilisé une nouvelle théorie raffinée à cinq variables en l'analyse des vibrations des plaques sandwichs en FGM. Meziane et al. [Mez.17] ont proposé une théorie raffinée simple et efficace pour le flambement et la vibration libre des plaques sandwichs à gradations exponentielles dans diverses conditions aux limites. Belabed et al. [Bela.18] ont développé une nouvelle théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique à 3 inconnues pour la vibration de la plaque sandwich FG. Zine et al. [Zin.18] ont proposé nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques et des coques isotropes et multicouches. Meksi et al. [Mek.19] ont présenté une solution analytique pour les réponses en flexion, en flambement et en vibration des plaques sandwichs FGM.

2.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps les études de la vibration et la réponse dynamique des structures en FGM. Ensuite, nous avons présenté l'analyse de la flexion et de la stabilité des plaques FG. Enfin, nous avons présenté l'analyse des différents comportements des plaques sandwichs FG a travers le monde et en particulier en laboratoire des matériaux et hydrologie à l'université de Sidi Bel-Abbes.

Le chapitre suivant sera consacré à la formulation détaillé sur les théories des plaques.

Chapitre 3 : Théories des plaques

3.1. Introduction

L'analyse des structures composites est l'un des domaines de recherche les plus attirants des dernières décennies. Les analyses structurelles et dynamiques précises sont nécessaires pour concevoir diverses parties structurelles de constructions aérospatiales, mécaniques, navales et civiles afin de déterminer le comportement de la réponse structurelle en temps réel. Les chercheurs ont mis au point diverses théories sur les plaques afin d'analyser les plaques et les coques composites. La théorie classique des plaques et les théories des plaques de déformation en cisaillement constituent une catégorisation bien connue des théories des plaques. Les composantes de la contrainte de cisaillement transverse sont négligées dans la théorie classique des plaques [Lov.1888, Red.07], où elles sont incluses dans les théories de la déformation en cisaillement [Rei.44, Rei.45, Min.51, Red.84, Bha.89, Kan.93, Rob.94, Khd.99, Shi.02, Aur.03, Zen.04, Zen.06, Tal.11c, Sah.13, Gro.14]. Nous présentons dans ce chapitre les différentes théories développées par les chercheurs sur les plaques et les coques.

3.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (x,y) et une épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions à savoir sa longueur et sa largeur (Figure 3.1). On définit :

- **Le plan moyen (plan médian)** : plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y) , avec $z = 0$.
- **Une fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .
- **L'épaisseur h** : l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

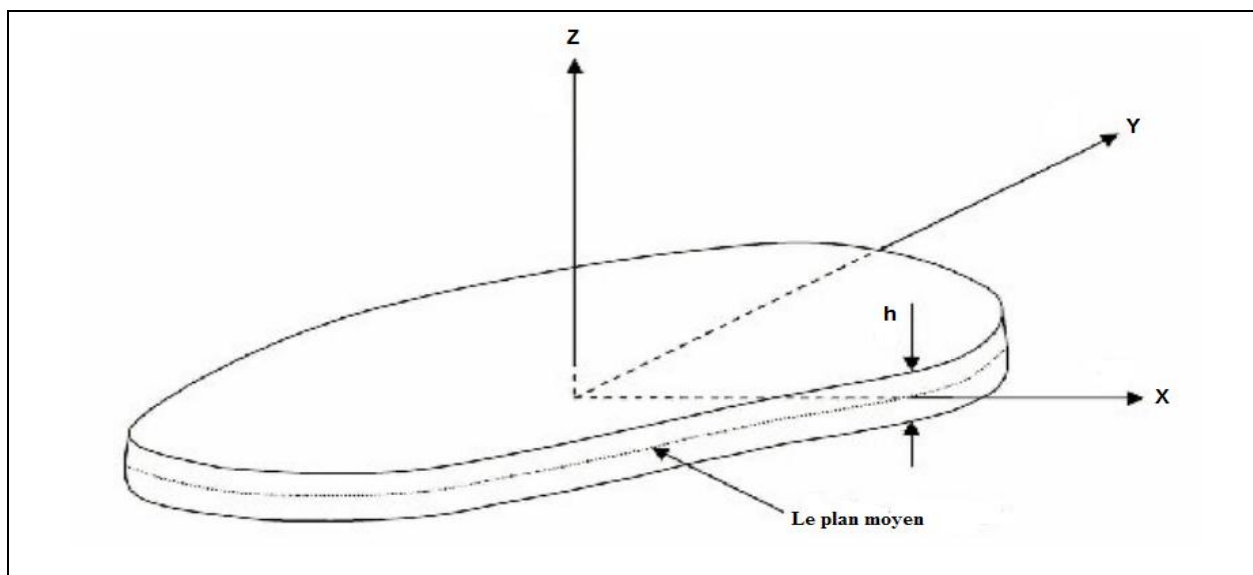


Figure 3.1 : Exemple de plaque d'une géométrie quelconque.

3.3. Différentes théories de déformation en cisaillement

On présente les différentes théories de déformation en cisaillement rapportées par les chercheurs [Lov.1888, Rei.44, Rei.45, Min.51, Red.84, Bha.89, Kan.93, Rob.94, Khd.99, Shi.02, Aur.03, Zen.04, Zen.06, Red.07, Tal.11c, Sah.13, Gro.14].

3.3.1. La théorie classique des plaques au premier ordre et deuxième ordre

3.3.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love- Kirchhoff (CPT)

Le développement de la théorie des poutres d'Euler -Bernoulli aux plaques est connu comme la théorie des plaques de Love- Kirchhoff [Lov.1888] (voir la figure 3.2), ou de la théorie classique de la plaque (CPT) . La théorie classique de la plaque est celle dans laquelle le champ de déplacement est basé sur l'hypothèse de Kirchhoff, qui se compose des trois parties suivantes :

- Les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane (les normales transversales) avant déformation restent droites après déformation.
- Les normales transversales ne subissent pas élongation (ils sont inextensibles).
- Les normales transversales tournent de telle sorte qu'ils restent perpendiculaires à la surface du milieu après déformation.

Aucune composante de contrainte de cisaillement transverse n'est impliquée dans la théorie classique de la plaque CPT [Lov.1888, Red.07].

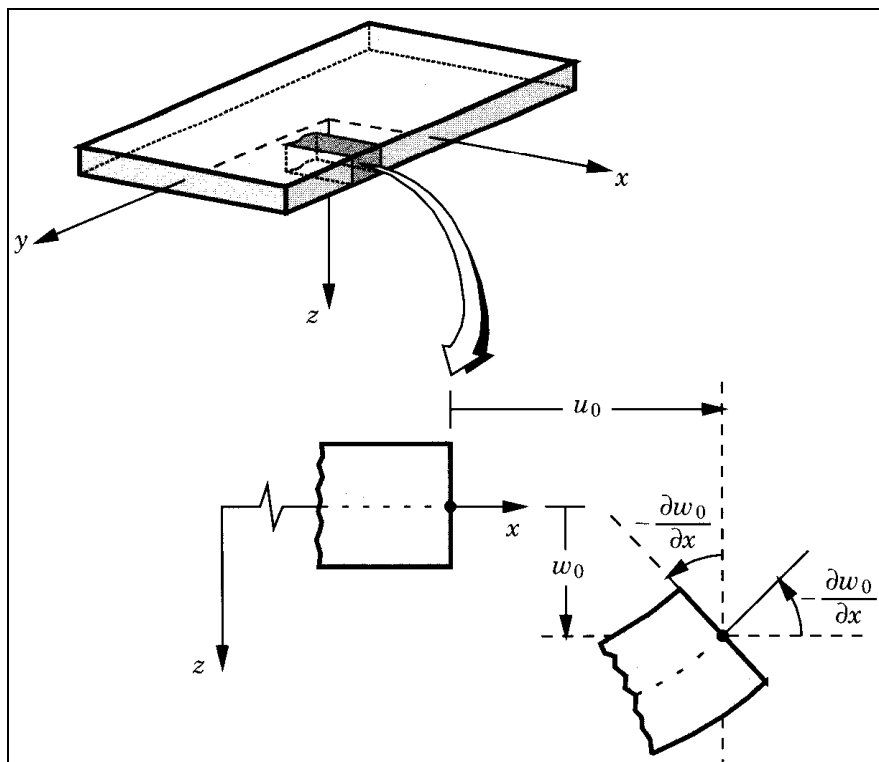


Figure 3.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Red.07].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit alors:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.1a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.1b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.1c)$$

Avec : u_0, v_0 les déplacements de membrane dans les directions x, y et z sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$)

w_0 : la flèche de la plaque, $\frac{\partial w_0}{\partial x}$: la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan x, y , et l'épaisseur h est orienté selon l'axe

$$z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$$

Puisque l'effet de cisaillement transverse ne tient pas en compte dans ce modèle, la précision de la théorie CPT n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces.

3.3.1.2. La théorie des plaques de Reissner – Mindlin (la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre (FSDT))

Les modèles élaborés selon la théorie FSDT, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement, les études sur la théorie FSDT peuvent être référées dans [Rei.44,45, Min.51] .

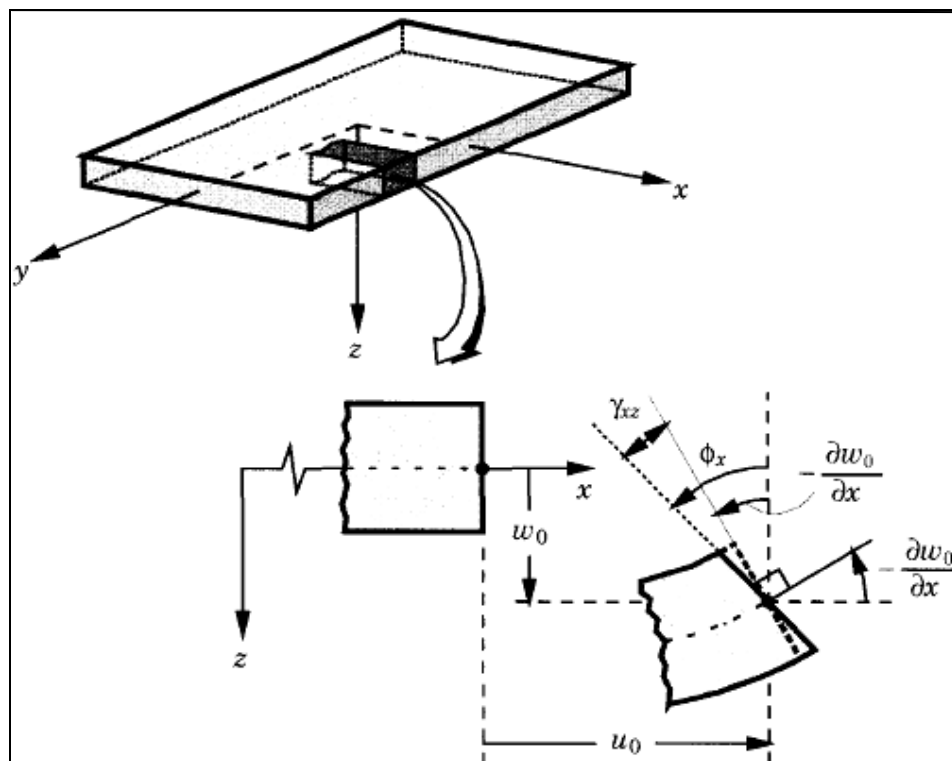


Figure 3.3 : Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner [Red.04].

Le champ du déplacement de la théorie FSDT est défini par :

$$u(x, y, z) = u_0 + z\phi_x(x, y), \quad (3.2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 + z\phi_y(x, y), \quad (3.2b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (3.2c)$$

La FSDT donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige d'introduire des facteurs de correction de cisaillement, ces facteurs dépendent des propriétés constitutives de la couche, le dispositif de stratification et le type de structure " comme les conditions aux limites et la géométrie" [Och.92], pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

3.3.1.3. La théorie non linéaire raffinée des plaques

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Red.84]:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) + z^3\xi_x(x, y, t) \quad (3.3a)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) + z^3\xi_y(x, y, t) \quad (3.3b)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3.3c)$$

Cette théorie explique la distribution parabolique des déformations transversales du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque [Red.84].

3.3.1.4. La théorie de déformation au second ordre (SSDT)

Le champ du déplacement de la théorie (SSDT) est défini par [Khd.99]:

$$u_1 = u + x_3\phi_1 + x_3^2\phi_2 \quad (3.4a)$$

$$u_2 = v + x_3\psi_1 + x_3^2\psi_2 \quad (3.4b)$$

$$u_3 = w \quad (3.4c)$$

Toutes les composantes du champ de déplacement sont considérées comme une fonction de la position et du temps [Khd.99].

3.3.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT)

Selon Reddy [Red.90] les hypothèses de base du développement des théories d'ordre élevé sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale en général n'est pas négligeable.

Le champ du déplacement de la théorie (HSDT) est défini par [Rei.45] :

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z)\varphi_x(x, y) \quad (3.5a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z)\varphi_y(x, y) \quad (3.5b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (3.5c)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement, $\left(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y\right)$ et $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z) = z$.

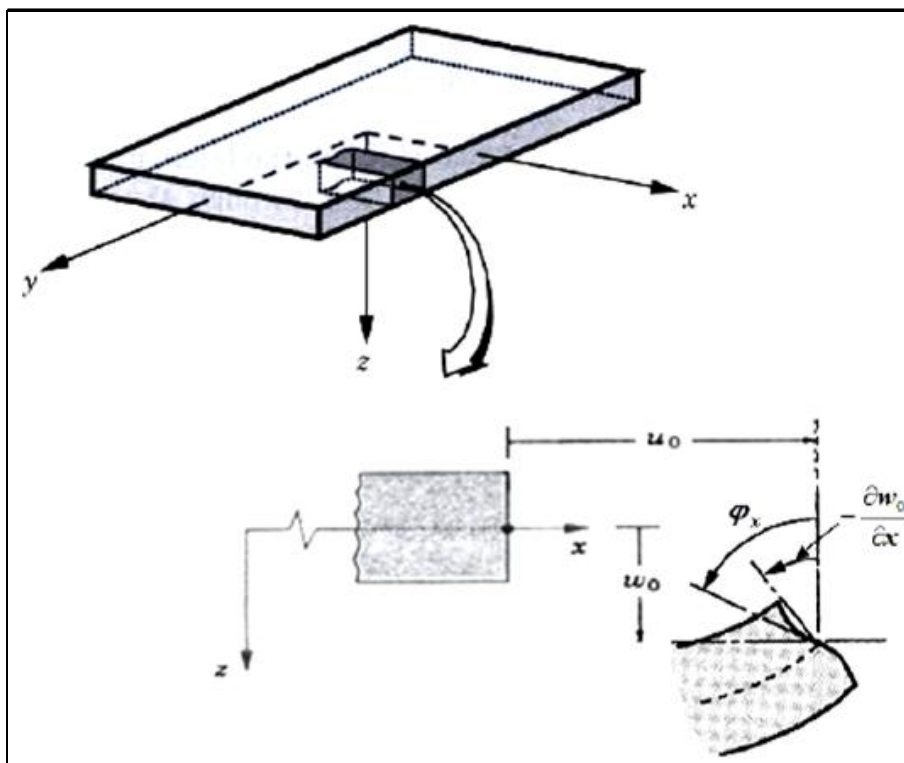


Figure 3.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [Red.97].

Plusieurs modèles de HSDT a été développé par les chercheurs.

3.3.2.1. La théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Rob.94]:

$$u = u_0 + z\phi_x - z^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_z}{\partial x}\right) - z^3\left[C_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial\phi_z}{\partial x}\right] \quad (3.6a)$$

$$v = v_0 + z\phi_y - z^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_z}{\partial x}\right) - z^3\left[C_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial\phi_z}{\partial y}\right] \quad (3.6b)$$

$$w = w_0 + z\phi_x + z^2\phi_z \quad (3.6c)$$

$$C_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad u_0 = u(x, y, 0, t), \quad v_0 = v(x, y, 0, t), \quad w_0 = w(x, y, 0, t)$$

Il rend compte de la variation quadratique des déformations de cisaillement transverses, il n'est pas nécessaire d'utiliser la correction de cisaillement [Rob.94].

3.3.2.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT5)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Kan.93] :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_x(x, y, t) + z^3\theta_x^*(x, y, t) \quad (3.7a)$$

$$v(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) + z^3\theta_y^*(x, y, t) \quad (3.7b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.3c)$$

Le champ de déplacement contient 5 degrés de liberté par nœud [Kan.93].

3.3.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT6)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Kan.93] :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_x(x, y, t) + z^3\theta_x^*(x, y, t) \quad (3.8a)$$

$$v(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) + z^3\theta_y^*(x, y, t) \quad (3.8b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z^2w_0^*(x, y, t) \quad (3.8c)$$

Le champ de déplacement contient 6 degrés de liberté par nœud [Kan.93].

3.3.2.4. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT7)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Kan.93] :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^3\theta_x^*(x, y, t) \quad (3.9a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^3\theta_y^*(x, y, t) \quad (3.9b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.9c)$$

Le champ de déplacement contient 7 degrés de liberté par nœud [Kan.93].

3.3.2.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT9)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Kan.93] :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^2u_0^*(x, y, t) + z^3\theta_x^*(x, y, t) \quad (3.10a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^2v_0^*(x, y, t) + z^3\theta_y^*(x, y, t) \quad (3.10b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.10a)$$

Le champ de déplacement contient 9 degrés de liberté par nœud [Kan.93].

3.3.2.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT11)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Kan.93] :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^2u_0^*(x, y, t) + z^3\theta_x^*(x, y, t) \quad (3.11a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^2v_0^*(x, y, t) + z^3\theta_y^*(x, y, t) \quad (3.11b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\theta_z(x, y, t) + z^2w_0(x, y, t) \quad (3.11c)$$

Le champ de déplacement contient 11 degrés de liberté par nœud [Kan.93].

Où t est le temps, u , v et w définissent les déplacements d'un point (x, y, z) dans l'espace de la plaque, u_0 , v_0 et w_0 désignent les déplacements d'un point (x, y) sur le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations des normales au plan médian autour des axes y et x , respectivement.

Les paramètres u_0^* , v_0^* , w_0^* , θ_x^* , θ_y^* et θ_z sont des termes d'ordres supérieurs dans le développement en série de Taylor et sont également définis à la mi-surface.

3.3.3. Modification dans les théories des plaques

3.3.3.1. Raffinement des théories des plaques stratifiées d'ordres supérieurs

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Bha.89] :

$$U(x, y, z) = -zW_x - pu + \sum_{k=1}^{N-1} \phi_x [p - p(z_k)] H(z - z_k) \quad (3.12a)$$

$$V(x, y, z) = -zW_y - pv + \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k [p - p(z_k)] H(z - z_k) \quad (3.12b)$$

$$W(x, y, z) = W + qw \quad (3.12c)$$

Avec : $U = -U$, $V(x, y, -z) = V(x, y, z)$, $W(x, y, -z) = W(x, y, z)$

$$p = p(z) = z - \frac{z^3}{3h^2}, \quad q = q(z) = 1 - \frac{z^2}{h^2}$$

Le déplacement par morceaux considéré dans cette théorie pour incorporer la continuité de l'effort de cisaillement transverse [Bha.89].

3.3.3.2. La théorie raffinée des plaques de Shimpi

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Shi.02] :

$$u = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} + h \left[\frac{z}{4h} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.13a)$$

$$v = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} + h \left[\frac{z}{4h} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3.13b)$$

$$w = w_b + w_s \quad (3.13c)$$

Shimpi [Shi.02] a rassemblé à CPT avec une de ses variantes mais donne de bien meilleurs résultats en comparant CLPT et FSDT.

3.3.3.3. Modèles de théorie raffiné de déformation en cisaillement du premier ordre pour les composites stratifiés

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Aur.03] :

$$s(x_1, x_2, z) = u(x_1, x_2) + z\varphi(x_1, x_2) \quad (3.14a)$$

$$s_3(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2) \quad (3.14a)$$

Avec :

$$s = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

La contrainte de cisaillement suit une fonction quadratique le long de l'épaisseur et ne nécessite pas l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement [Aur.03].

3.3.3.4. La théorie généralisée de la déformation en cisaillement

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Zen.04, 06] :

$$u_x(x, y, z, t) = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + h \sin(\pi \bar{z}) \varphi_x \quad (3.15a)$$

$$u_y(x, y, z, t) = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + h \sin(\pi \bar{z}) \varphi_y \quad (3.15b)$$

$$u_z(x, y, z, t) = w \quad (3.16c)$$

La contrainte de cisaillement transversal a également été intégrée à la théorie, de sorte qu'aucun facteur de correction de cisaillement transversal n'est requis.

3.3.3.5. La théorie modifiée de la déformation en cisaillement d'ordres supérieurs

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Tal.11c] :

$$\bar{u} = u_0 + f_1(z)\Psi_x + f_2(z)\alpha_x + f_3(z)\beta_x + f_4(z)\theta_x \quad (3.17a)$$

$$\bar{v} = v_0 + f_1(z)\Psi_y + f_2(z)\alpha_y + f_3(z)\beta_y + f_4(z)\theta_y \quad (3.17b)$$

$$\bar{w} = w_0 + f_5(z)\Psi_z + f_6(z)\alpha_z \quad (3.17c)$$

Avec :

$$f_1(z) = C_1 z - C_2 z^3, \quad f_2(z) = -C_3 z^2, \quad f_3(z) = -C_4 z^3, \quad f_4(z) = -C_5 z^3, \quad f_5(z) = C_1 z,$$

$$f_6(z) = C_1 z^2, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = C_4 = \frac{4}{3h^2}, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_5 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \xi_z = \alpha_z$$

Talha et Singh [Tal.11c] ont utilisant 13 degrés de liberté par nœud pour tenir compte de la contrainte de cisaillement transverse et obtenir des résultats plus précis.

3.3.3.6. La théorie hyperbolique inverse du Zig-Zag (IHZZT)

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Sah.13] :

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_{i=1}^{u-i} [z - z_i^u] H(z - z_i^u) \alpha_{xu}^i + \sum_{j=1}^{l-i} [z - z_j^l] H(-z + z_j^l) \alpha_{xl}^j + [g(z) + \Omega^k z] \beta_x \quad (3.18a)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_{i=1}^{u-i} [z - z_i^u] H(z - z_i^u) \alpha_{yu}^i + \sum_{j=1}^{l-i} [z - z_j^l] H(-z + z_j^l) \alpha_{yl}^j + [g(z) + \Omega^k z] \beta_y \quad (3.18b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, z) \quad (3.18c)$$

Sahoo et al.[Sah.13] considère une fonction hyperbolique inverse comme une fonction de forme de contrainte de cisaillement, qui représente la distribution non linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur.

3.3.3.7. La théorie de déformation en cisaillement basée sur la fonction sécante

Le champ du déplacement de cette théorie est défini par [Gro.14] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left[z \sec\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{\sec(r/2)}{\left(1 + \frac{r}{2} \tan\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right] \theta_x(x, y) \quad (3.19a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left[z \sec\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{\sec(r/2)}{\left(1 + \frac{r}{2} \tan\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right] \theta_y(x, y) \quad (3.19b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.19c)$$

Le champ de déplacement satisfait aux conditions de cisaillement transversal nulles [Gro.14].

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les différentes théories de calcul utilisées pour les matériaux composites et les plaques.

Dans le cadre de ce travail de recherche. On va appliquer une nouvelle simple théorie de déformation en cisaillement quasi-3D des plaques qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur, cette théorie permet de réduire le nombre d'inconnus à cinq et réduisant ainsi que le temps de calcul pour analyser la flexion thermomécanique des plaques sandwichs en FGM.

Chapitre 4 : Modélisation analytique de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs

4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation analytique du comportement thermomécanique des plaques sandwichs en matériaux à gradient de propriétés (FGM) en utilisant une nouvelle simple théorie de déformation en cisaillement de type quasi-3D à cinq variables. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement cinq. Cette théorie prend en considération l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur.

La théorie présentée est basée sur le principe des travaux virtuels, elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, satisfait les conditions d'équilibre sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sandwich sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. On suppose que les propriétés matérielles (module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants.

La solution de Navier est utilisée pour obtenir la forme de solution rapprochée pour les plaques sandwichs FGM simplement appuyées.

4.2. Formulation théorique

4.2.1. Hypothèses

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

- Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , à la surface, coïncidant avec la surface médiane de la plaque.
- L'origine du système cartésien est prise à la surface neutre de la couche médiane de la plaque sandwich fonctionnellement graduée.
- Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.

- Les déplacements (u) dans la direction x et (v) dans la direction y se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement.

4.2.2. Géométrie de la plaque

La plaque sandwich FG rectangulaire a une longueur “ a ”, une largeur “ b ” et une épaisseur uniforme “ h ” est illustrée dans la figure 4.1. Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires xyz ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ et $-h/2 \leq z \leq h/2$).

La plaque est composée de trois couches, à savoir, “couche 1”, “couche 2” et “couche 3” de la partie basse à la partie haute. Le plan médian de la plaque est définie par $z = 0$ et par ces surfaces extrêmes a $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement, $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 et $h_3 = h/2$.

Dans cette étude la plaque sandwich est soumise à une charge mécanique transversale appliquée sur la surface supérieure et une charge thermique variable à travers l'épaisseur.

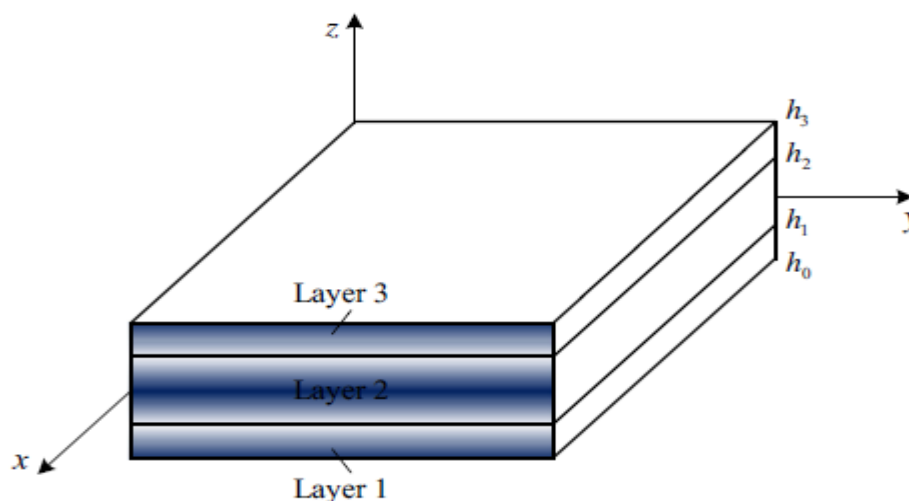


Figure 4.1. Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.

4.2.3. Propriétés des matériaux

4.2.3.1. Propriétés matérielles des couches supérieure et inférieure

La fraction de volume des deux couches “la couche supérieure” et “la couche inférieure” de la plaque varie en fonction de loi de puissance Eq. (4.1), où la couche supérieure varie d'une surface riche en céramique ($z = h_2$) à une surface riche en métal ($z = h_3$) et la couche inférieure varie d'une surface riche en métal ($z = h_0$) à une surface riche en céramique ($z = h_1$).

Les fractions volumiques des couches supérieure et inférieure peuvent être données par [Zen.10, Bour.12, Ket.13, Ngu.16, Benno.16, Abd.17, Elm.17, Tou.16, Hou.16] :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p & z \in [h_0, h_1] \\ V^{(3)} &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p & z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où $V^{(n)}$ ($n=1,3$) est la fraction volumique de la nième couche et p est un paramètre indiquant l'indice de puissance et prenant des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les propriétés matérielles effectives de la nième couche, telles que le module de Young $E^{(n)}$, le coefficient de Poisson $\mu^{(n)}$ et le coefficient de dilatation thermique $\alpha^{(n)}$ en un point, donné par [Bour.12, Bes.13, Bela.14, Tou.16, Hou.16] :

$$\begin{aligned} E^{(n)}(z) &= E_m + (E_c - E_m)V^{(n)} \\ \mu^{(n)}(z) &= \mu_m + (\mu_c - \mu_m)V^{(n)} \\ \alpha^{(n)}(z) &= \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m)V^{(n)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Où les indices m et c représentent respectivement le métal et la céramique.

4.2.3.2. Propriétés matérielles du noyau sandwich

La fraction volumique $V^{(2)}$ de la couche intermédiaire de la plaque sandwich peut être donnée par :

$$V^{(2)} = \left(\frac{2|z|}{h_2-h_1}\right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (4.3)$$

Où k est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la couche intermédiaire (le noyau) de la plaque sandwich, qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro.

Les propriétés matérielles effectives de la couche intermédiaire des plaques sont supposées varier de manière exponentielle à travers l'épaisseur [Zen.13a, Asn.15, Li.17] :

$$P^{(2)} = P_m \exp(\beta V^{(2)}),$$

$$\beta = \ln \frac{P_c}{P_m} \quad (4.4)$$

Où $P^{(2)}$ représentent les propriétés matérielles effectives du noyau FGM.

P_m et P_c sont respectivement les propriétés matérielles effectives du métal et de la céramique.

4.3. Cinématique et équations constitutives

4.3.1. Champs de déplacement

Dans la théorie de déformation quasi-3D des plaques avec l'effet d'étirement, le champ de déplacement conventionnelle est défini par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où u , v et w sont des déplacements dans les directions x , y , z ; u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements du plan médian; φ_x , φ_y et φ_z sont les rotations des plans yz , xz et xy , respectivement ; $f(z)$ représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et les déformations transversales suivant l'épaisseur.

En remplaçant les rotations φ_x et φ_y par $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$.

La nouvelle cinématique de la théorie quasi-3D actuelle peut être obtenue sous une forme plus simple avec seulement cinq variables au lieu de six dans des autres théories quasi-3D [Sek.17b, Ait S.18, Benc.18, You.18, Bou.18, Boukh.19, Boul.19, Bout.19, Bend.19, Zao.19, Khi.19] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Où k_1 et k_2 sont des coefficients dépendent de la géométrie de la plaque.

Dans cette étude, la théorie de la plaque de déformation en cisaillement quasi-3D proposée, en

considérant :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (4.7)$$

4.3.2. Champs de déformation

Le champ des déformations dérivées de l'équation (4.6) est le suivant:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (4.8)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z, \quad (4.9)$$

Les termes d'intégrale utilisée dans les expressions précédente peuvent être résolus en utilisant la procédure de Navier et peuvent être exprimé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.10)$$

Où les coefficients A' et B' sont adopté selon le type de solution employé, dans ce cas la solution de Navier. Ainsi, A' et B' sont définie par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2},$$

$$k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (4.11)$$

Avec :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b$$

4.3.3. Relations constitutives

Pour la plaque sandwich FG sujette à un chargement thermique $T(x, y, z)$, les relations contraintes-déformations pour la $n^{\text{ième}}$ couche sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \varepsilon_z - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)}, \quad n=1,2,3 \quad (4.12)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont respectivement les composantes de contraintes et de déformations.

Les constantes élastiques $C_{ij}^{(n)}$ de la $n^{\text{ième}}$ couche peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned} C_{11}^{(n)} &= C_{22}^{(n)} = C_{33}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2} \\ C_{12}^{(n)} &= C_{13}^{(n)} = C_{23}^{(n)} = \mu^{(n)} C_{11}^{(n)} \\ C_{44}^{(n)} &= C_{55}^{(n)} = C_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + (\mu^{(n)})^2)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le champ de température généralisé qui varie selon l'épaisseur de la plaque sandwich peut être écrit par [Hou.13, Man.15, Zen.10a, Tai.15, Li.16] comme suit :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\psi(z)}{h} T_3(x, y) \quad (4.14)$$

Où T_1, T_2 et T_3 sont des charges thermiques.

$T_1(x, y)$ est uniforme a long de l'épaisseur de la plaque sandwich;

$\frac{z}{h} T_2(x, y)$ est varié de manière linéaire a long de l'épaisseur;

$\frac{\psi(z)}{h} T_3(x, y)$ est varié de manière non linéaire à long de l'épaisseur.

Où

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (4.15)$$

4.3.4. Principe des travaux virtuels (PVW)

Le principe des travaux virtuels (PVW) est utilisé pour déterminer les équations d'équilibre de la plaque sandwich FG dans le cas de la flexion thermomécanique [Al-B.15, Bour.15, Att.15, Aho.16, Bour F.16, Bell.17a, Bell.17b, Bess.17, Bour F.18, Cher.18, Add.19] :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (4.16)$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle, δV est le travail virtuel externe dû à une charge externe appliquée à la plaque sandwich FG.

δU est l'énergie de déformation virtuelle est donnée par [Tou.13, Zid.14, Heb.14, Zem.15, Khe.17, Fah.17, Hac.17, Zid.17, Fou.18, Bour.19] :

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] d\Omega dz \quad (4.16a)$$

δV est le travail virtuel externe, donnée par :

$$\delta V = - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega \quad (4.16b)$$

En substituant les expressions énergétiques appropriées on peut déterminer :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

Où Ω est la surface supérieure et q est la charge transversale répartie.

Substituons les équations (4.8) et (4.12) dans l'équation (4.17), et en l'intégrant sur l'épaisseur de la plaque, l'équation (4.17) peut être réécrite comme :

$$\int_{\Omega} \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta \kappa_x^b + M_y^b \delta \kappa_y^b + M_{xy}^b \delta \kappa_{xy}^b + M_x^s \delta \kappa_x^s + M_y^s \delta \kappa_y^s + M_{xy}^s \delta \kappa_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s - q \delta w \right) d\Omega = 0 \quad (4.18)$$

Où les résultantes des contraintes N , M , et S sont données par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f) \sigma_i^{(n)} dz \quad i = x, y, xy$$

$$N_z = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g'(z) \sigma_z^{(n)} dz \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} dz$$

Avec h_n et h_{n-1} sont les coordonnées supérieur et inférieur de la $n^{\text{ième}}$ couche.

En substitution l'équation (4.8) et introduit dans l'équation (4.12), et ensuite les résultats trouvés dans l'équation (4.19), les contraintes (N , M et S) peuvent être exprimées en fonction des déplacements ($u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$) :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \\ 0 \\ M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \\ 0 \\ N_z^T \end{Bmatrix} \quad (4.20a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.20b)$$

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{ij}^{(n)} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (4.21a)$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{ij}^{(n)} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad (4.21b)$$

Les efforts et les moments résultants : $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ et N_z^T

dû au chargement thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \\ N_z^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} T \begin{Bmatrix} 1 \\ Z \\ f(z) \\ g'(z) \end{Bmatrix} dz \quad (4.22)$$

En substituant les équations (4.8), (4.9) et (4.12) dans l'équation (4.18) et intégrant par parties, et par la suite égalant à zéro séparément les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et $\delta \varphi_z$

Les équations de stabilité sont obtenues pour la théorie de déformation de cisaillement comme suite :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_1 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0 \\ \delta \varphi_z : -N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

En substituant l'équation (4.20) dans l'équation (4.23), les équations résultantes qui régissent la présente théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D peut être exprimée en termes de déplacements $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$ comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} \theta + X_{13} d_{11} \varphi_z = p_1 \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$\begin{aligned} (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_{22} \theta + X_{23} d_{22} \varphi_z = p_2 \end{aligned} \quad (4.24b)$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta \\ + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z = p_3 \end{aligned} \quad (4.24c)$$

$$\begin{aligned} -(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 \\ - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_{22} v_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} w_0 \\ + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s (k_1)^2 \theta - H_{22}^s (k_2)^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s d_{1122} \theta \\ + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta - k_1 Y_{13}^s \varphi_z - k_2 Y_{23}^s \varphi_z + A_{44}^s (k_2 B') d_{22} \varphi_z + A_{55}^s (k_1 A') d_{11} \varphi_z = p_4 \end{aligned} \quad (4.24d)$$

$$\begin{aligned} -X_{13} d_{11} u_0 - X_{23} d_{22} v_0 + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 + (A_{44}^s - Y_{23}^s) (k_2 B') d_{22} \theta + (A_{55}^s - Y_{13}^s) (k_1 A') d_{11} \theta \\ -Z_{33} \varphi_z + A_{44}^s d_{22} \varphi_z + A_{55}^s d_{11} \varphi_z = p_5 \end{aligned} \quad (4.24e)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \quad (4.25)$$

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m) = (1, 2)$$

Les composantes du vecteur de force généralisé $\{p\}$ sont exprimées par :

$$p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x} \quad p_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y} \quad p_3 = -q + \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2} \quad (4.26)$$

$$p_4 = -k_1 M_x^{sT} - k_2 M_y^{sT} \quad p_5 = -N_z^T$$

4.4. Solution analytique exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Dans cette partie on s'intéresse à déterminer la solution exacte des équations (4.24) pour une plaque sandwich rectangulaire simplement appuyée avec une longueur a et une largeur b sous une charge transversale q . Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges transversales mécaniques et thermiques q, T_1, T_2 et T_3 sous la forme d'une double série trigonométrique comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (4.27)$$

Où q_0, t_1, t_2 et t_3 sont des constantes, α et β sont données par :

$$\alpha = m\pi/a \quad \beta = n\pi/b \quad (4.28)$$

En utilisant la procédure de Navier, la solution des variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites ci-dessus peuvent être écrites dans les

séries de Fourier suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Où (U, V, W, X, Φ) sont des paramètres arbitraires à déterminer.

Par considération les équations (4.21) et (4.26), on obtient à l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Avec

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \quad , \\ S_{12} &= -(A_{12} + A_{66})\alpha\beta \quad , \\ S_{13} &= B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \quad , \\ S_{14} &= (k_1B_{11}^s + B_{12}^s k_2)\alpha - (k_1A_1 + k_2B_2)B_{66}^s\alpha\beta^2 \quad , \\ S_{15} &= \alpha X_{13} \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \quad , \\ S_{23} &= B_{22}\beta^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta \\ S_{24} &= -(k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2\beta + (k_1B_{12}^s + k_2B_{22}^s)\beta \quad , \\ S_{25} &= X_{23}\beta \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \quad , \\ S_{34} &= -((k_1D_{11}^s + k_2D_{12}^s)\alpha^2 - 2D_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta^2 + (k_1D_{12}^s + k_2D_{22}^s)\beta^2) \quad , \\ S_{35} &= -(Y_{13}\alpha^2 + Y_{23}\beta^2) \quad , \\ S_{44} &= -((k_1)^2 H_{11}^s + 2k_1k_2 H_{12}^s + (k_2)^2 H_{22}^s + (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s\alpha^2\beta^2 + (k_1A')^2 A_{55}^s\alpha^2 \\ &\quad + (k_2B')^2 A_{44}^s\beta^2) \\ S_{45} &= -(k_1Y_{13}^s + k_2Y_{23}^s + k_1A'\alpha^2 A_{55}^s + k_2B'\beta^2 A_{44}^s) \\ S_{55} &= -(Z_{33} + \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Et les composantes du vecteur de force généralisé $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}^t$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3) \quad , \\ P_2 &= \beta(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3) \quad , \end{aligned}$$

$$P_3 = -q - h(\alpha^2 + \beta^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D^T t_3) \quad , \quad (4.32)$$

$$P_4 = -h(\alpha^2 + \beta^2)({}^s B^T t_1 + {}^s D^T t_2 + {}^s F^T t_3) \quad ,$$

$$P_5 = -h(L^T t_1 + {}^a L^T t_2 + R^T t_3)$$

Avec

$$(A^T, B^T, D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)}(1, \bar{Z}, \bar{Z}^2) dz \quad (4.33a)$$

$$({}^a B^T, {}^a D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{\Psi}(z)(1, \bar{Z}) dz \quad (4.33b)$$

$$({}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{f}(z)(1, \bar{Z}, \bar{\Psi}(z)) dz \quad (4.33c)$$

$$(L^T, L_a^T, R^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{g}'(z)(1, \bar{Z}, \bar{\psi}(z)) dz \quad (4.33d)$$

$$\bar{Z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{f}(z) = \frac{f(z)}{h}, \quad \bar{\psi}(z) = \frac{\psi(z)}{h} \quad (4.34)$$

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, démontré les étapes à suivre pour la modélisation analytique de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées. Le champ de déplacement défini en introduisant l'effet d'étirement de l'épaisseur en utilisant seulement cinq variables comme la FSDT (La théorie de déformation en cisaillement au premier ordre). Les équations d'équilibre ont été dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels et résolues par la solution de Navier. Les résultats de modélisation sont présentés dans le chapitre 5.

Chapitre 5 : Résultats de modélisation et exemples de validation

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, des divers exemples numériques sont présentés l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs en matériaux a gradient de propriété en utilisant une nouvelle simple théorie quasi 3-D de déformation en cisaillement à cinq variables. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature.

Nous avons effectué le calcul paramétrique sur les effets de la charge thermique, la charge thermomécanique et autres paramètres sur le comportement de la flexion des plaques sandwichs FG.

Chaque plaque sandwich FG est composée de trois (03) couches (voir la figure 5.1), à savoir "couche supérieure", "couche intermédiaire" et "couche inférieure" du haut vers le bas de la plaque sandwich. Les surfaces libres de la plaque sandwich étant définies par (h_0 pour la surface inférieure) et (h_3 pour la surface supérieure). La plaque a également deux surfaces intermédiaires situées entre les couches (supérieure et inférieure) et le noyau, ces surfaces sont situées à du rapport d'épaisseur de couche comme indiqué dans le tableau 5.1.

Les trois types des plaques sandwichs FG considérées dans cette étude sont :

- **Plaque sandwich FG de type "A"** : les couches supérieure et inférieure sont en FGM et le noyau en matériaux homogène.
- **Plaque sandwich FG de type "B"** : les couches supérieure et inférieure sont en matériaux homogènes et le noyau en FGM.
- **Plaque sandwich FG de type "C"** : les deux couches (supérieure et inférieure) et le noyau sont en FGM.

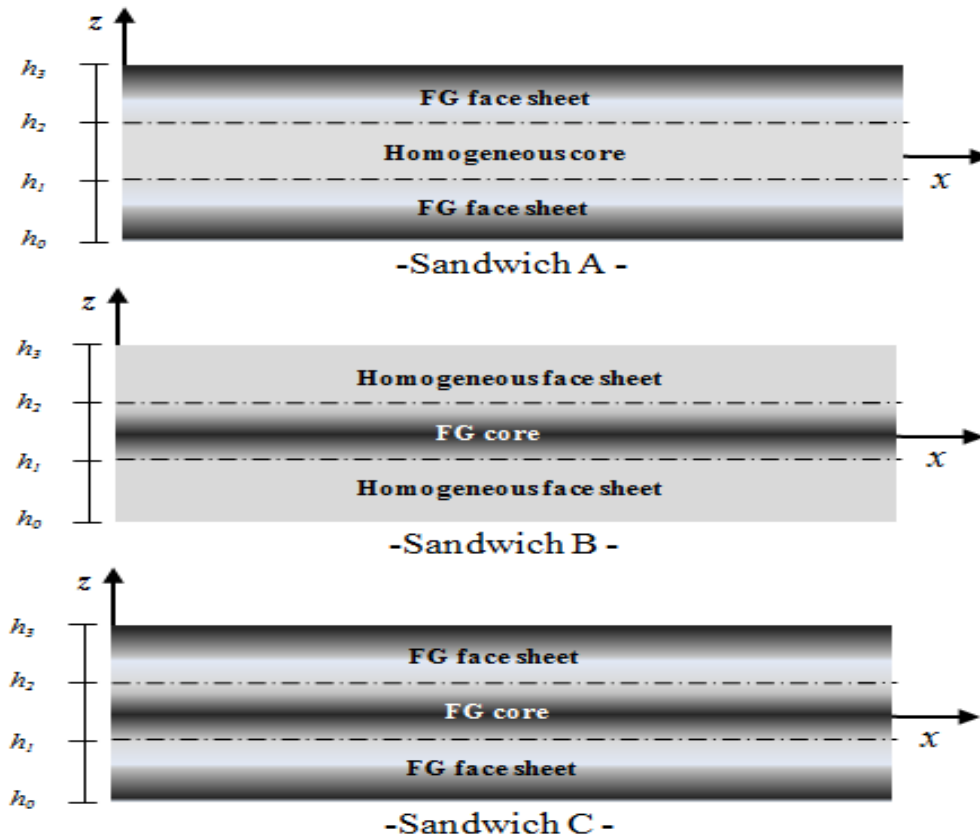


Figure 5.1 : Géométrie des plaques sandwichs FG.

Tableau 5.1 : Valeurs de l'épaisseur de couche de la plaque sandwich.

Rapport d'épaisseur de couche	h_0	h_1	h_2	h_3
1-0-1	$-h/2$	0	0	$h/2$
1-2-1		$-h/4$	$h/4$	
1-1-1		$-h/6$	$h/6$	
1-3-1		$-3h/10$	$3h/10$	
2-1-2		$-h/10$	$h/10$	
3-1-3		$-h/14$	$h/14$	
2-1-1		0	$h/4$	
2-2-1		$-h/10$	$3h/10$	

5.2. Résultats numériques et discussions

Dans cette partie, on présente l'analyse de la flexion thermomécanique d'une plaque sandwich FG simplement appuyée en utilisant une nouvelle simple théorie quasi-3D de déformation en cisaillement. Pour présenter l'effet de la déformation en cisaillement sur la déflexion et les contraintes des plaques sandwichs FG, plusieurs résultats sont présentés dans trois sections et comparés aux autres théories trouvées dans la littérature.

La déformation et les contraintes du problème de la flexion thermo-mécanique sont calculées avec les relations non dimensionnelles suivantes:

La flèche \bar{w} :
$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^4 / h} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (5.1)$$

La contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$:
$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (5.2)$$

La contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$:
$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 a / h + E_0 \alpha_0 t_2 a / (10h)} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right) \quad (5.3)$$

L'analyse thermomécanique de la flexion est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Le métal utilisé est un alliage de titane (**Ti-6Al-4V**) et une céramique de type oxyde de zirconium (**ZrO₂**). Les modules de Young, le coefficient de Poisson et les coefficients de dilatation thermique de la céramique et du métal utilisés sont présentés dans le tableau 5.2.

Tableau 5.2 : Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque sandwich en FGM.

Propriétés	Métal : Ti-6Al-4V	Céramique : ZrO ₂
E_i (GPa)	66.2	117.0
μ_i	1/3	1/3
$\alpha(10^{-6} / K)$	10.3	7.11

5.2.1. Analyse de la flexion thermo-mécanique des plaques sandwichs FG de type “A” avec des couches supérieure et inférieure en P-FG et un noyau homogène

Les premiers exemples présentent l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG de type “A” avec des couches supérieure et inférieure P-FG de loi de puissance et un noyau homogène “ $k = 0$ ”.

Les résultats actuels sont comparés à ceux obtenus par les théories de déformation en cisaillement telle que la FSDT (La théorie de déformation en cisaillement au premier ordre) et la HSDT (La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé a cinq variables) développées par Zenkour et Alghamdi [Zen.10] et la RPT proposées par Li et al. [Li.17].

Le tableau 5.3, présente la variation de la flèche non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” de la plaque sandwich FG de type “A” par rapport à l'indice de puissance “ p ” des couches (supérieure et inférieure).

Les résultats actuels obtenus à l'aide d'une théorie de déformation en cisaillement quasi-3D sont comparés à ceux données par la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre [Li.17], par la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé [Zen.10b] et celles calculées par la théorie raffinée de la plaque de déformation en cisaillement [Li.17] sans tenir en compte l'effet d'étirement.

À travers le tableau 5.3, on peut constater que les résultats actuels sont légèrement inférieurs à ceux obtenus par [Zen.10], ce qui est dû à l'introduction de la déformation transversale ($\varepsilon_z \neq 0$).

On peut également noter que la flèche non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” est en relation de proportionnalité avec l'indice de puissance “ p ” des couches supérieure et inférieure et ceci pour les différents rapports d'épaisseur de couche.

Le tableau 5.4, présente l'effet du rapport d'aspect géométrique “ a/b ” de la plaque sur la flèche non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” de la plaque sandwich FG de type “A” sous des charges combinées (thermique et mécanique) en utilisant une théorie de déformation en cisaillement quasi-3D.

Tableau 5.3 : Comparaison de la flèche non dimensionnelle “ \bar{w} ” de la plaque sandwich FG de type “A” en fonction de l’indice de puissance “ p ” des couches supérieure et inférieure avec “ $a/h = 10$ ”.

p	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$			
		1-0-1	3-1-3	2-1-2	1-1-1
0	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806085	0.806085	0.806085	0.806085
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.808168	0.808168	0.808168	0.808168
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.895735	0.895735	0.895735	0.895735
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864140	0.864140	0.864140	0.864140
1	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.072202	1.054599	1.045864	1.021066
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.077690	1.059613	1.050672	1.025367
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.190728	1.170533	1.160568	1.132449
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.149038	1.130125	1.120741	1.094113
2	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.129683	1.113609	1.104673	1.076998
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.137297	1.120582	1.111353	1.082911
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.257304	1.238234	1.227765	1.195703
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.210756	1.193444	1.183826	1.154061
3	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.149112	1.135925	1.127799	1.100705
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.157693	1.143856	1.135420	1.107475
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.280741	1.264724	1.255041	1.223232
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.231675	1.217447	1.208690	1.179518
4	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.157329	1.146452	1.139118	1.113133
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.166403	1.154902	1.147260	1.120403
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.290961	1.277527	1.268689	1.237931
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.240542	1.228791	1.220879	1.192880
5	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.161364	1.152187	1.145491	1.120562
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.170720	1.160948	1.153952	1.128152
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.296101	1.284626	1.276497	1.246833
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.244905	1.234980	1.227750	1.200876

Les résultats présentés montrent que les résultats obtenus avec la théorie quasi-3D sont inférieurs à ceux obtenus avec la théorie de plaque raffinée de déformation en cisaillement [Li.17]. On peut remarquer que la flèche " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " est démunie avec l'augmentation du rapport d'aspect " a/b ", le rapport d'aspect géométrique " a/b " et l'effet d'étirement conduit toujours à une réduction de la flèche non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2, b/2)$ ".

Tableau 5.4 : Effet du rapport d'aspect géométrique " a/b " sur la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " de la plaque sandwich FG de type "A" soumise à une charge thermomécanique avec " $a/h=10$ " et " $p=3$ "

Schéma	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$				
		$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
1-0-1	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.149112	0.456181	0.225191	0.130053	0.082979
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.157693	0.454308	0.225639	0.132324	0.086360
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.280741	0.503607	0.250355	0.146917	0.095948
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.231675	0.492573	0.246212	0.144771	0.094608
3-1-3	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.135925	0.451063	0.222763	0.128734	0.082209
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.143856	0.449019	0.223077	0.130867	0.085446
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.264724	0.497383	0.247274	0.145112	0.094770
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.217447	0.486952	0.243459	0.143199	0.093619
2-1-2	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.127799	0.447899	0.221252	0.127903	0.081716
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.135420	0.445781	0.221504	0.129968	0.084879
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.255041	0.493613	0.245406	0.144017	0.094055
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.208690	0.483486	0.241757	0.142222	0.093002
1-1-1	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.100705	0.437311	0.216165	0.125080	0.080011
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.107475	0.435020	0.216255	0.126958	0.082969
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.223232	0.481212	0.239259	0.140414	0.091704
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.179518	0.471920	0.236060	0.138942	0.090916

Le tableau 5.5, présente la variation de la contrainte normale non dimensionnelle " $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ " en fonction de l'épaisseur de couche (1-2-1, 2-1-2, 1-1-1 et 1-3-1) et de l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure " p " pour une plaque sandwich FG de type "A" simplement appuyée. Selon les résultats obtenus (tableau 5.5), on constate que l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure affecte la contrainte normale non dimensionnelle " $\bar{\sigma}_x$ " a une relation inverse et ceci pour les différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

Tableau 5.5 : Comparaison de la contrainte normale non dimensionnelle “ $\bar{\sigma}_x$ ” en fonction du rapport d’épaisseur de couche et l’indice de puissance “ p ” des plaques sandwichs FG de type “A” à “ $a/h=10$ ”

p	Théorie	$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$			
		1-0-1	3-1-3	2-1-2	1-1-1
0	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.446783	-2.446783	-2.446783	-2.446783
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.461177	-2.461177	-2.461177	-2.461177
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3,597007	-3,597007	-3,597007	-3,597007
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,911440	-2,911440	-2,911440	-2,911440
1	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.716951	-2.847778	-2.912696	-3.096888
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.473903	-2.562491	-2.606343	-2.730494
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3,471099	-3,569762	-3,618476	-3,756017
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,892290	-2,985255	-3,031378	-3,162208
2	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.290281	-2.410084	-2.476636	-2.682569
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.181780	-2.263627	-2.308903	-2.448528
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3,145662	-3,238636	-3,289757	-3,446485
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,589234	-2,674492	-2,721838	-2,868271
3	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.145598	-2.244126	-2.304740	-2.506605
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.081815	-2.149449	-2.190823	-2.328042
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3,031284	-3,109180	-3,156414	-3,311823
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,486287	-2,556476	-2,599635	-2,743281
4	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.084230	-2.165678	-2.220469	-2.414237
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.039172	-2.095247	-2.132710	-2.264592
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,981507	-3,046666	-3,089733	-3,239941
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,442566	-2,500626	-2,539661	-2,677611
5	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.054012	-2.122872	-2.172951	-2.358964
	[Zen.10] (TSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.018086	-2.065589	-2.099863	-2.226550
	[Zen.10] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,956534	-3,012040	-3,051612	-3,196423
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2,421017	-2,470126	-2,505817	-2,638388

5.2.2. Analyse de la flexion thermo-mécanique des plaques sandwichs FG de type “B” à des couches supérieure et inférieure homogènes “ $p = 0$ ” et un noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ”

Le deuxième exemple montre l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG de type “B” avec un noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ” et des couches supérieure et inférieure homogènes “ $p = 0$ ”.

Une comparaison est faite entre les résultats actuels et ceux obtenus par les théories développés (la FSDT et la RPT) par Li et al. [Li.17].

Le tableau 5.6, présente la variation de la flèche non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” de la plaque sandwich FG de type “B” par rapport à l'indice de matériau du noyau E-FG. La plaque est soumise à une charge thermomécanique. Les résultats actuels sont comparés à ceux obtenus par la FSDT et la RPT (Li et al. [Li.17]).

Le tableau 5.6, montre que les valeurs de la flèche non dimensionnelles “ \bar{w} ” calculées par la théorie quasi-3D “ $\varepsilon_z \neq 0$ ” réelle sont plus petites que celles publiées par Li et al. [Li.17] en utilisant la FSDT et la RPT à cinq variables avec ($\varepsilon_z = 0$) et ceci est dû à la contrainte de cisaillement non nulle sur les faces supérieure et inférieure de la plaque en sandwich assumée par la FSDT et à la négligence de l'effet d'étirement par la RPT. “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” sont obtenus pour le rapport de l'épaisseur “1-3-1”.

Le tableau 5.7, présente l'effet du rapport d'aspect géométrique “ a/b ” sur la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” de la plaque sandwich FG de type “B” soumise à une charge thermomécanique.

Les présents résultats sont comparés à ceux obtenus par la FSDT et la RPT développés par Li et al. [Li.17].

Le tableau 5.7, montre que les résultats actuels sont inférieurs à ceux obtenus par [Li.17] avec la théorie raffinée des plaques (RPT) et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). On peut conclure que la flèche non dimensionnelle “ \bar{w} ” est en relation inversement proportionnelle avec le rapport d'aspect “ a/b ” et ceci quel que soit le rapport d'épaisseur.

Tableau 5.6 : Variation de la flèche non dimensionnelle de la plaque sandwich FG de type “B” en fonction de l’indice de matériau du noyau E-FG “ k ” avec “ $a/h=10$ ”.

k	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.960453	0.960453	0.960453	0.960453
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864140	0.864140	0.864140	0.864140
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806085	0.806085	0.806085	0.806085
1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961067	0.963305	0.970187	0.977474
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864623	0.866466	0.872221	0.878396
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806521	0.808215	0.813523	0.819230
2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961375	0.964745	0.975191	0.986392
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864867	0.867635	0.876353	0.885834
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806743	0.809287	0.817325	0.826088
3	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961565	0.965637	0.978325	0.992040
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.865018	0.868359	0.878938	0.890547
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806880	0.809951	0.819705	0.830434
4	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961696	0.966250	0.980491	0.995971
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.865121	0.868855	0.880725	0.893831
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806975	0.810406	0.821350	0.833464
5	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961791	0.966697	0.982082	0.998875
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.865197	0.869218	0.882038	0.896261
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.807043	0.810739	0.822560	0.835706

Tableau 5.7 : Effet du rapport d'aspect “ a/b ” sur la flèche centrale non dimensionnelle de la plaque sandwich FG de type “B” sous charge thermomécanique avec “ $a/h=10$ ” et “ $k=1$ ”.

Schéma	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$				
		$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
2-1-2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961067	0.384421	0.192210	0.113064	0.073927
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864623	0.345661	0.172678	0.101451	0.066229
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806521	0.319975	0.157778	0.090968	0.057905
1-1-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.963305	0.385316	0.192657	0.113328	0.074099
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.866466	0.346369	0.173008	0.101625	0.066327
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.808215	0.320604	0.158051	0.091094	0.057905
1-2-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.970187	0.388069	0.194034	0.114137	0.074628
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.872221	0.348604	0.174070	0.102204	0.066667
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.813523	0.322612	0.158958	0.091547	0.058184
1-3-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.977474	0.390984	0.195491	0.114994	0.075189
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.878396	0.351016	0.175228	0.102846	0.067055
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806232	0.319872	0.157737	0.090954	0.057904

Le tableau 5.8, présente la variation de la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ " de la plaque sandwich FG de type "B" en fonction de l'indice de matériau de noyau " k " pour les différentes valeurs du rapport d'épaisseur de couche.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux publiés par Li et al. [Li.17] (sans effet d'étirement).

Selon la comparaison du tableau 5.7, on peut voir que l'effet d'étirement conduit à une réduction de la contrainte axiale non dimensionnelle " $\bar{\sigma}_x$ ". On peut également noter que l'augmentation de l'indice de matériel " k " conduit à une diminution des valeurs de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ ".

Tableau 5.8 : Variation de la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ " de la plaque sandwich FG de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau " k " avec " $a/h = 10$ ".

k	Théorie	$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.158732	-4.158732	-4.158732	-4.158732
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.911440	-2.911440	-2.911440	-2.911440
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.446783	-2.446783	-2.446783	-2.446783
1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.153417	-4.134036	-4.074434	-4.011326
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.907015	-2.890699	-2.840040	-2.785860
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.440581	-2.417713	-2.346661	-2.270612
2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.150749	-4.121567	-4.031095	-3.934090
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.904809	-2.880305	-2.803535	-2.720298
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.437490	-2.403148	-2.295477	-2.178638
3	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.149101	-4.113838	-4.003951	-3.885176
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.903451	-2.873883	-2.780706	-2.678783
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.435588	-2.394150	-2.263468	-2.120395
4	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.147973	-4.108535	-3.985199	-3.851130
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.902523	-2.869484	-2.764940	-2.649867
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.434288	-2.387987	-2.241361	-2.079825
5	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.147150	-4.104658	-3.971420	-3.825981
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.901847	-2.866270	-2.753353	-2.628487
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.433341	-2.383485	-2.225115	-2.049826

La variation de la flèche non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " de la plaque sandwich FG symétrique de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau " k " est illustrée dans la figure 5.2.

Selon les résultats, on peut constater que la croissance de l'indice de matériau de base " k " augmenté de la flèche non dimensionnelle " \bar{w} ".

La figure 5.3, illustre les effets de la charge thermique et le rapport d'aspect géométrique " a/b " sur la flèche " $\bar{w}(a/2, b/2)$ ". Les résultats sont valables pour les plaques sandwichs FG symétriques "1-2-1" et antisymétriques "2-1-1" de type "B" avec l'indice de matériau du noyau " $k=1$ ". À partir les graphes tracés, on peut conclure que la flèche " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " est en relation inversement proportionnelle avec le rapport de forme " a/b " pour les différents rapports d'épaisseur "1-2-1" et "2-1-1". La valeur de la flèche " \bar{w} " plus petite est obtenue avec des charges thermiques nulles " $t_2 = t_3 = 0$ ".

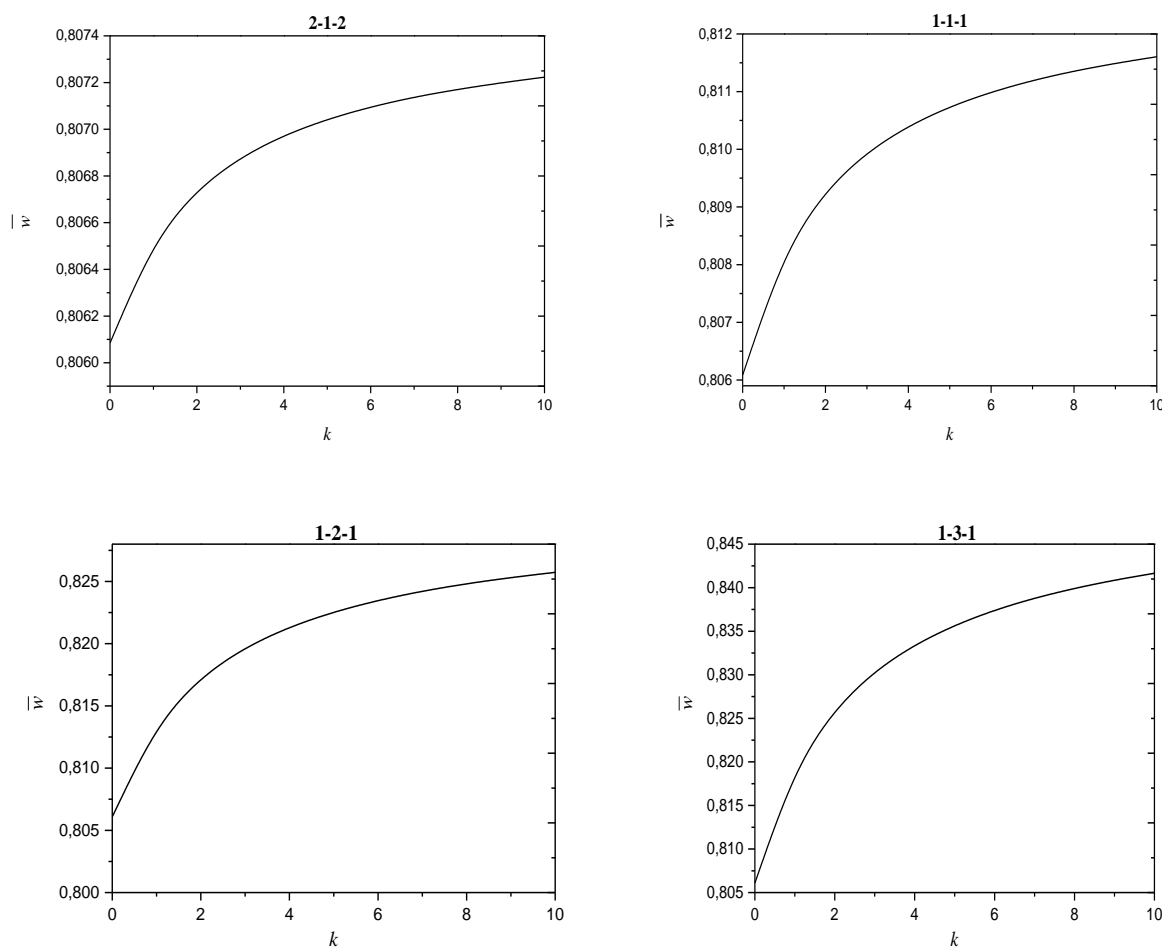


Figure 5.2 : Variation de la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " de la plaque sandwich FG symétrique de type "B" en fonction de l'indice de matériau du noyau " k ".

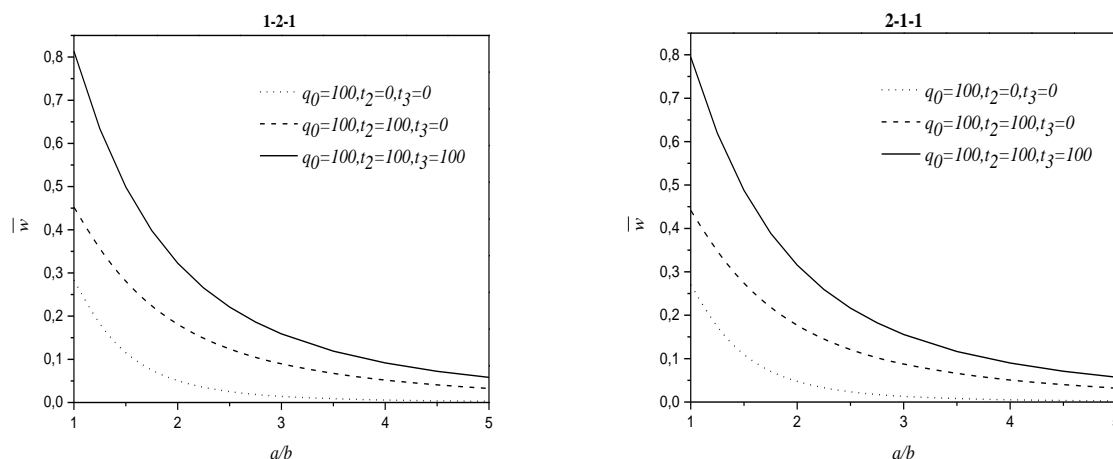


Figure 5.3 : Effets du chargement thermique et du rapport d'aspect géométrique sur la flèche non dimensionnelle " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " de la plaque sandwich FG symétrique et antisymétrique de type "B" avec " $p=0$ " et " $k=1$ ".

L'influence du chargement thermique " t_2, t_3 " et le rapport entre le côté et l'épaisseur " a/h " sur la flèche centrale " $\bar{w}(a/2, b/2)$ " pour une plaque sandwich FG symétrique "1-2-1" et anti-symétrique "2-2-1" sont illustrées dans les graphes à la figure 5.4, on peut noter que la flèche " \bar{w} " est en relation de corrélation directe avec le rapport côté à épaisseur " a/h " sauf pour la charge mécanique $q_0 = 100 Pa$ la relation est inversée, de même que l'augmentation de la valeur de " t_3 " conduit l'augmentation de la flèche " \bar{w} ".

La distribution de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ " sur l'épaisseur " z " des plaques sandwichs FG de type "B" symétriques "2-1-2, 1-2-1" et anti-symétriques "2-2-1, 2-1-1" est présentés dans la figure 5.5, la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " est tracée pour la diverse valeur de l'indice de matériau de base " $k = 0, 1, 2, 3$ et 4".

D'après les graphes de la figure 5.5, on peut conclure que la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ " est symétrique par rapport l'autour de l'axe moyen " z " pour la plaque sandwich-FG "2-1-2, 1-2-1" et non symétrique pour la plaque sandwich-FG "2-2-1" et "2-1-1".

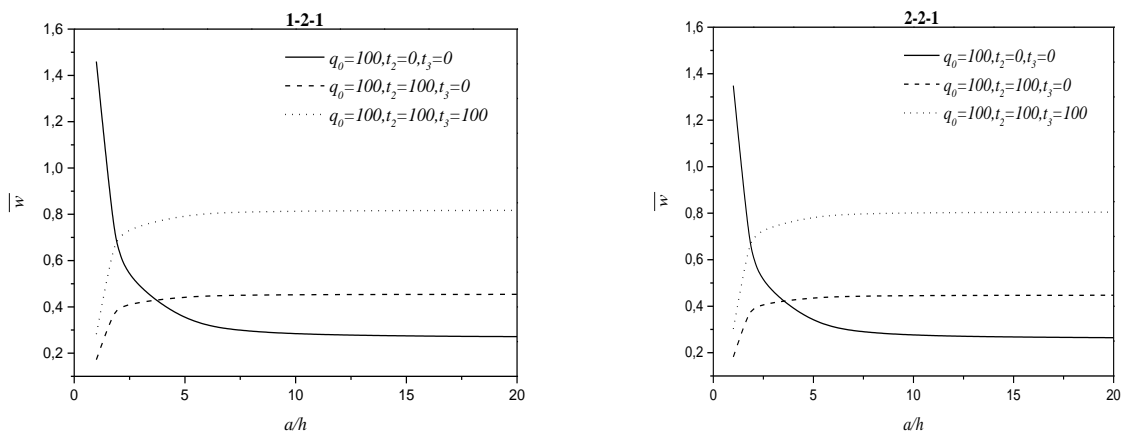


Figure 5.4 : Effets du chargement thermique “ t_2, t_3 ” et du rapport géométrique “ a / h ” sur la flèche centrale “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” avec “ $p = 0$ ” et “ $k = 1$ ”.

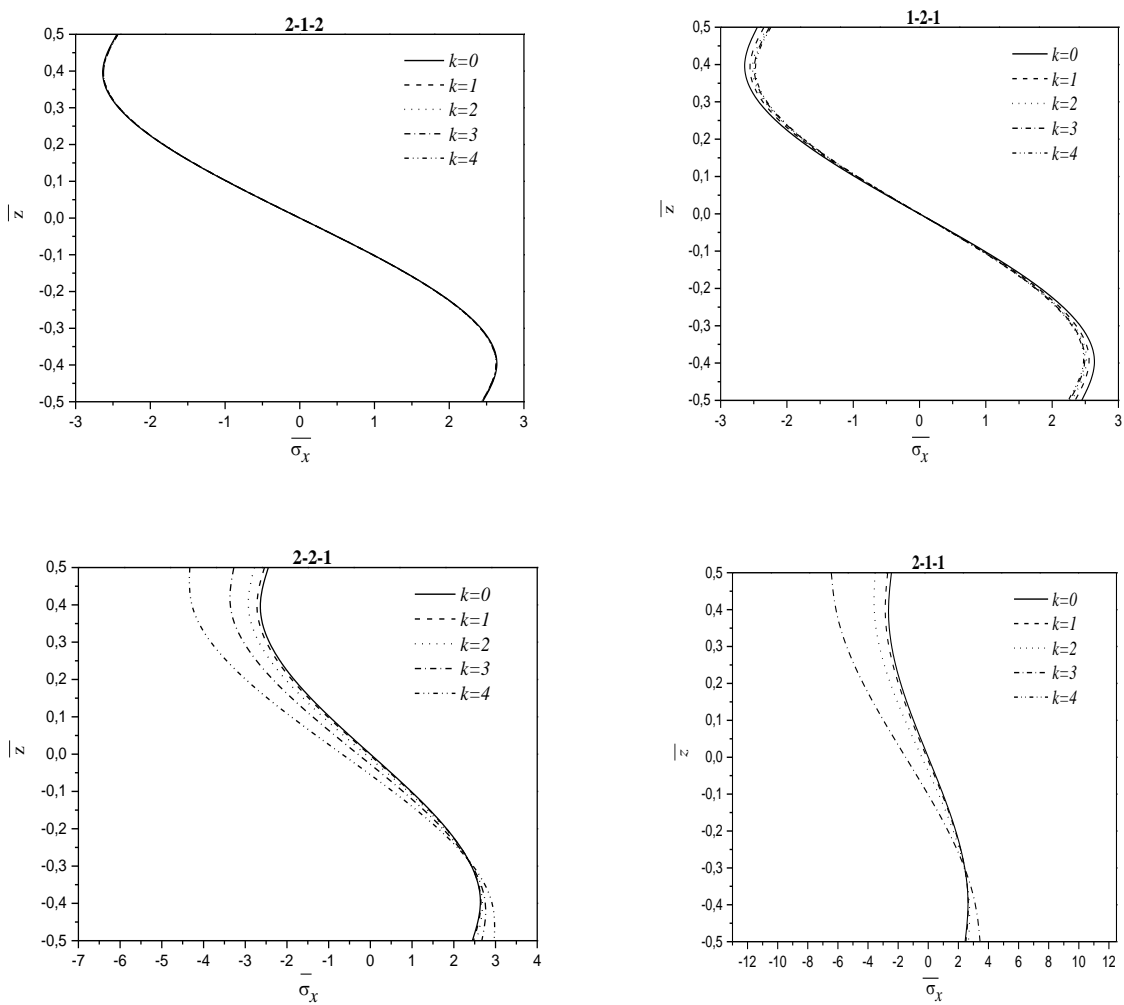


Figure 5.5 : La distribution de la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” sur l’épaisseur “ \bar{z} ” de la plaque sandwich FG de type “B” avec “ $p = 0$ ”.

5.2.3. Analyse de la flexion thermo-mécanique de la plaque sandwich FG de type “C” avec les couches supérieure et inférieure P-FGM “ $p \geq 0$ ” et le noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ”

Le troisième exemple illustre l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG de type “C” avec du noyau E-FGM “ $k \geq 0$ ” et des couches supérieure et inférieure P-FGM “ $p \geq 0$ ”. Une comparaison est faite entre les résultats actuels “ $\varepsilon_z \neq 0$ ” et ceux obtenus avec la FSDT (cinq variables) et la RPT (quatre variables $\varepsilon_z = 0$) publiées par Li et al. [Li.17].

Le tableau 5.9, présente la variation de la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” en fonction de l'indice de puissance “ p ” des couches supérieure et inférieure et l'indice de matériau de base “ $k=1$ ” avec “ $a/h=10$ ”.

Les résultats calculés en utilisant une théorie de déformation en cisaillement quasi-3D sont comparés à ceux obtenus par Li et al.[Li.17] en utilisant la FSDT et la RPT avec “ $\varepsilon_z = 0$ ”.

D'après le tableau 5.9, on peut remarquer que la flèche centrale “ \bar{w} ” de la plaque sandwich FG de type “C” augmenté avec l'augmentation de l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure “ p ”.

On peut aussi conclure que la plaque la plus rigide a un rapport d'épaisseur de couche “1-3-1”.

Le tableau 5.10, montre l'effet du rapport d'aspect géométrique “ a/b ” sur la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” de la plaque sandwich FG de type “C” sous charge combinée (thermique et mécanique) avec un rapport de géométrie “ $a/h=10$ ”, l'indice de matériau de base “ $k=1$ ” et l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure “ $p=3$ ”.

Selon le tableau 5.10, on note que les résultats actuels sont inférieurs à ceux obtenus avec la FSDT et la RPT par Li et al. [Li.17], en raison de l'effet d'étirement.

On peut également constater que la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” de la plaque sandwich FG démunie avec l'augmentation du rapport d'aspect géométrique “ a/b ”.

Tableau 5.9 : Variation de la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” de la plaque sandwich FG de type “C” en fonction de l’indice de puissance “ p ” avec “ $a/h=10$ ” et “ $k=1$ ”.

p	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.961067	0.963305	0.970187	0.977474
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	0.864623	0.866466	0.872221	0.878396
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	0.806521	0.808215	0.813523	0.819230
1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.242779	1.217361	1.180797	1.156699
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.121862	1.098934	1.065520	1.043229
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.046907	1.025543	0.994357	0.973513
2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.313230	1.284594	1.238612	1.206011
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.185157	1.159800	1.118459	1.088746
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.105907	1.082325	1.043808	1.016073
3	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.341711	1.313791	1.265222	1.229142
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.210108	1.185685	1.142459	1.109859
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.129112	1.106426	1.066195	1.035791
4	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.355934	1.329367	1.280204	1.242418
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.222339	1.199282	1.155813	1.121864
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.140467	1.119067	1.078638	1.046995
5	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.364062	1.338795	1.289699	1.250973
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.229235	1.207420	1.164203	1.129545
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.146860	1.126626	1.086449	1.054159

Le tableau 5.11, indique les valeurs de la contrainte normale non dimensionnelle “ $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ ” de la plaque sandwich FG de type “C” en fonction de l’indice de puissance “ p ” pour des différents rapports d’épaisseur de couche, on peut voir que la contrainte normale non dimensionnelle “ $\bar{\sigma}_x$ ” est en relation inversement proportionnelle avec l’indice de puissance “ p ” pour “ $p \geq 0$ ”.

Les mêmes conclusions sont notées pour les différents épaisseurs des couches “1-0-1, 3-1-3, 2-1-2 et 1-1-1”.

Tableau 5.10 : Effet du rapport d'aspect géométrique “ a/b ” sur la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2,b/2)$ ” de la plaque sandwich FG de type “C” soumise à une charge thermomécanique avec ($a/h=10, k=1$ et $p=3$).

Schéma	Théorie	$\bar{w}(a/2,b/2)$				
		$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
2-1-2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.341711	0.536675	0.268336	0.157844	0.103206
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.210108	0.484045	0.242031	0.142378	0.093100
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.129112	0.448404	0.221486	0.128022	0.081774
1-1-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.313791	0.525507	0.262752	0.154560	0.101058
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.185685	0.474370	0.237271	0.139642	0.091364
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.106426	0.439544	0.217231	0.125662	0.080349
1-2-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.265222	0.506080	0.253039	0.148846	0.097322
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.142459	0.457190	0.228773	0.134719	0.088208
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.066195	0.423731	0.209556	0.121336	0.077676
1-3-1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.229142	0.491649	0.245823	0.144601	0.094547
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	1.109859	0.444182	0.222295	0.130929	0.085748
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	1.035791	0.411695	0.203643	0.117944	0.075531

Tableau 5.11 : Variation de la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” de la plaque sandwich FG de type “C” en fonction de l'indice de puissance “ p ” sous charge thermo-mécanique avec “ $a/h=10$ ”

p	Théorie	$\bar{\sigma}_x(a/2,b/2,h/2)$			
		1-0-1	3-1-3	2-1-2	1-1-1
0	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.153417	-4.134036	-4.074434	-4.011326
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.907015	-2.890699	-2.840040	-2.785860
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.446783	-2.444543	-2.440581	-2.417712
1	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-4.136946	-4.261501	-4.440672	-4.558762
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3.025929	-3.138583	-3.302462	-3.411521
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.716951	-2.844923	-2.905056	-3.063748
2	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3.791718	-3.932040	-4.157364	-4.317119
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.715313	-2.840096	-3.043204	-3.188866
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.290281	-2.406671	-2.467487	-2.643040
3	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3.652156	-3.788971	-4.026970	-4.203773
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.592638	-2.712947	-2.925506	-3.085463
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.145598	-2.240479	-2.294927	-2.464046
4	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3.582456	-3.712645	-3.953554	-4.138716
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.532421	-2.646085	-2.859957	-3.026620
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.084230	-2.161916	-2.210316	-2.370007
5	[Li.17] (FSDPT, $\varepsilon_z = 0$)	-3.542632	-3.666444	-3.907027	-4.096793
	[Li.17] (RPT, $\varepsilon_z = 0$)	-2.498436	-2.606029	-2.818750	-2.988949
	Présente (Quasi-3D, $\varepsilon_z \neq 0$)	-2.054012	-2.119047	-2.162601	-2.313708

La figure 5.6, illustre l'effet de l'indice de puissance du noyau “ k ” sur la flèche centrale non dimensionnelle “ $\bar{w}_{(a/2,b/2)}$ ” de la plaque sandwich FG de type “C”. La flèche “ \bar{w} ” est calculée pour les différents épaisseurs des couches en utilisant la théorie actuelle de la déformation en cisaillement quasi-3D. Selon les graphes tracés, on peut noter que la croissance de l'indice de matériau du noyau “ k ” augmenté la flèche centrale non dimensionnelle “ \bar{w} ” pour des différents rapports d'épaisseur de couche.

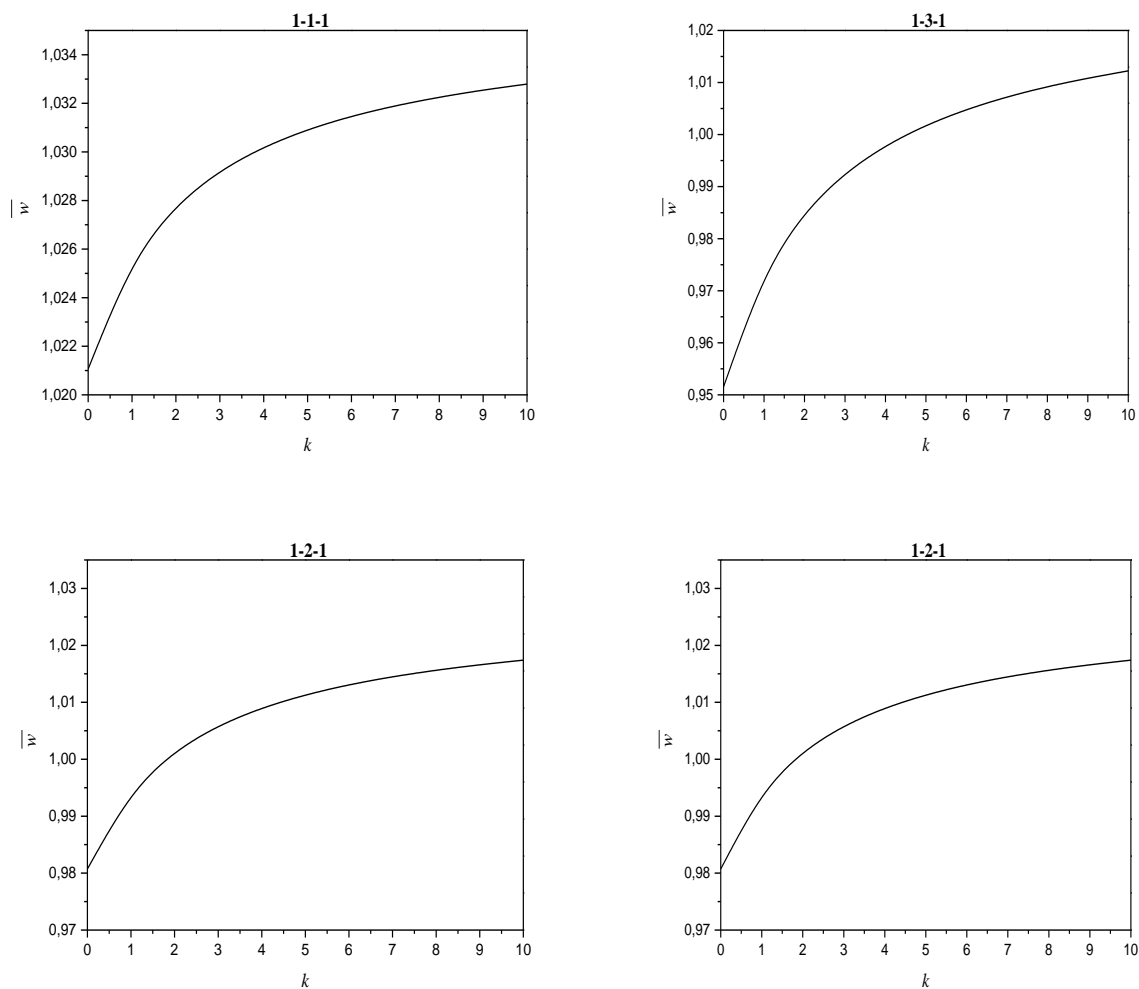


Figure 5.6 : Effet de l'indice “ k ” de matériau du noyau sur la flèche centrale non dimensionnelle “ \bar{w} ” des plaques sandwich FG de type “C” avec “ $p=1$ ”

La figure 5.7, illustre la distribution de la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” à travers l'épaisseur “ \bar{z} ” de la plaque sandwich FG de type “C” symétrique et antisymétrique en fonction de l'indice de puissance des couches supérieure et inférieure “ p ” avec l'indice de matériau du noyau “ $k=1$ ”. Selon les graphes tracés, on peut voir que la distribution de la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” est non linéaire sur l'épaisseur de la plaque sandwich FG, on peut également observer que la contrainte

normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” est symétrique par rapport l’autour de l’axe moyen “ $z=0$ ” pour les plaques sandwichs FG symétriques “1-1-1, 1-3-1, 2-1-2” et non symétriques pour “2-2-1, 2-1-1”.

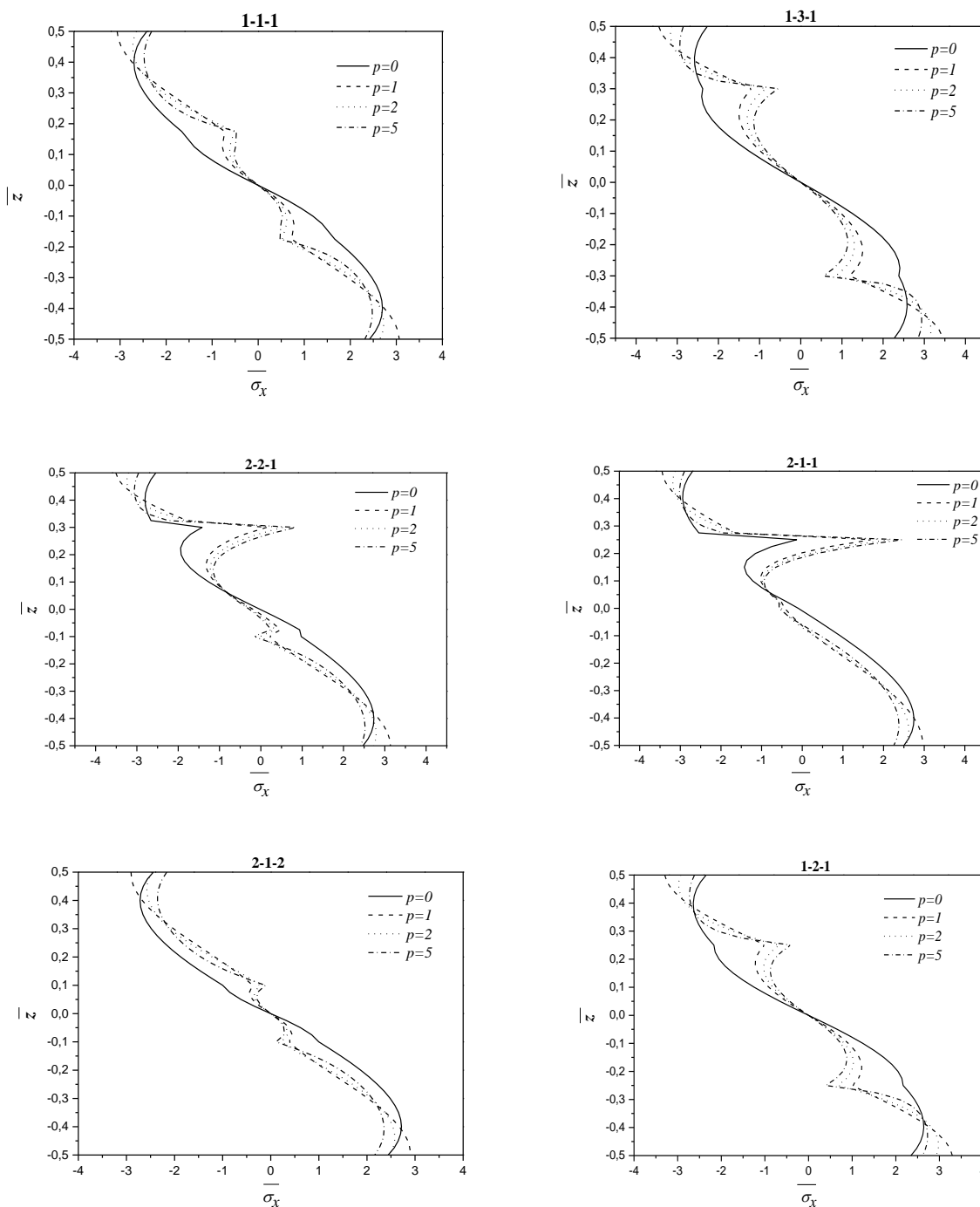


Figure 5.7 : La distribution de la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” sur l’épaisseur “ z ” de la plaque sandwich FG de type “C” en fonction de l’indice de puissance des couches supérieure et inférieure “ p ” avec l’indice de matériau de noyau “ $k = 1$ ”.

La figure 5.8, trace la distribution de la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " sur l'épaisseur de la plaque sandwich FG symétrique et antisymétrique de type "C" en fonction de la charge thermique " t_3 " avec les indices des matériaux " $p=0.5$ " et " $k=0.5$ ". On peut noter que la charge thermique " t_3 " a une influence significativement sur la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ ". On peut également conclure que la distribution de " $\bar{\sigma}_x$ " a une variation symétrique avec l'autour de l'axe moyen uniquement pour la plaque symétrique "2-1-2".

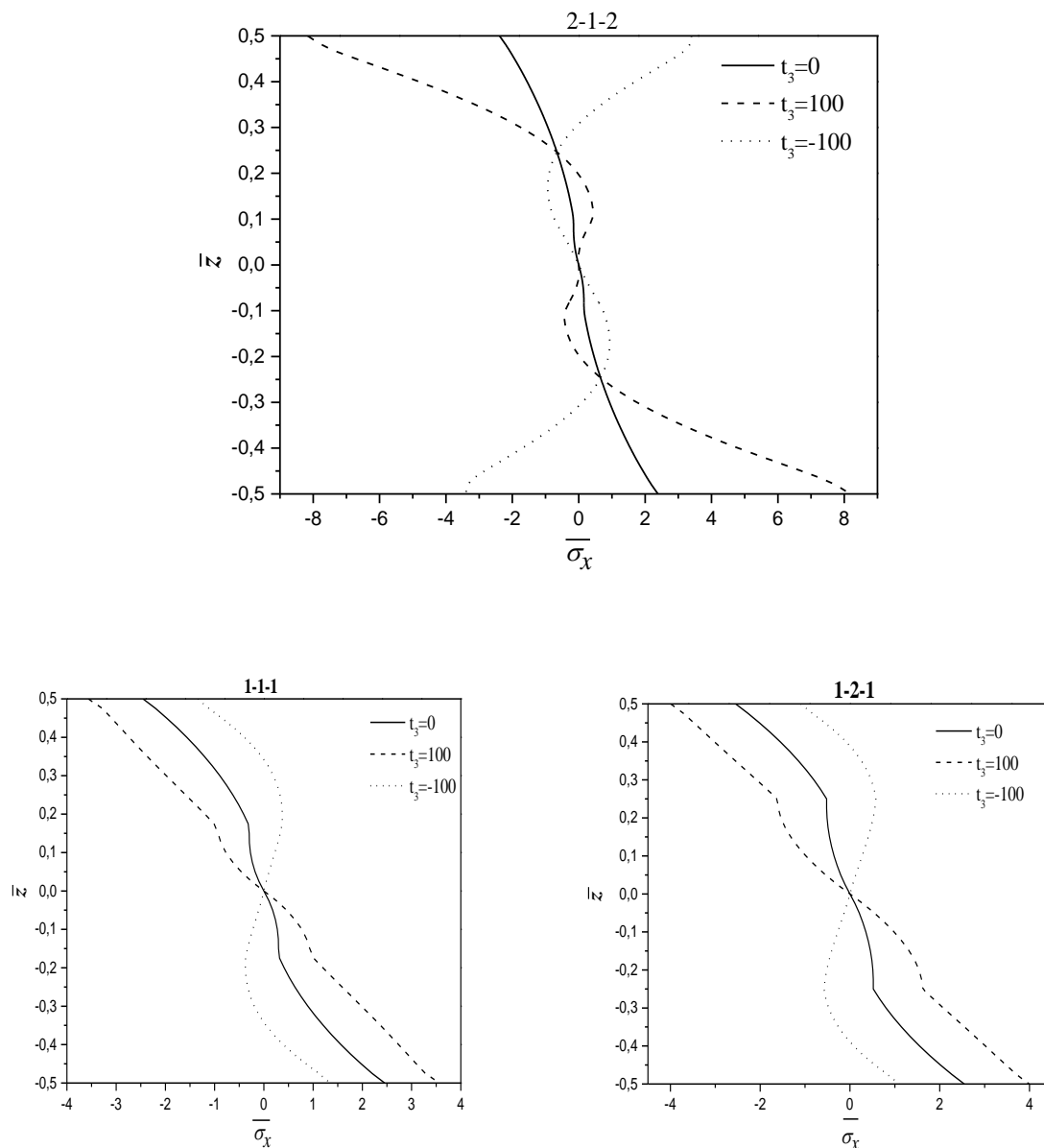


Figure 5.8 : Effet de la charge thermique " t_3 " sur la contrainte normale " $\bar{\sigma}_x$ " des plaques sandwichs FG de type "C" avec les indices des matériaux " $p=0.5$ " et " $k=0.5$ ".

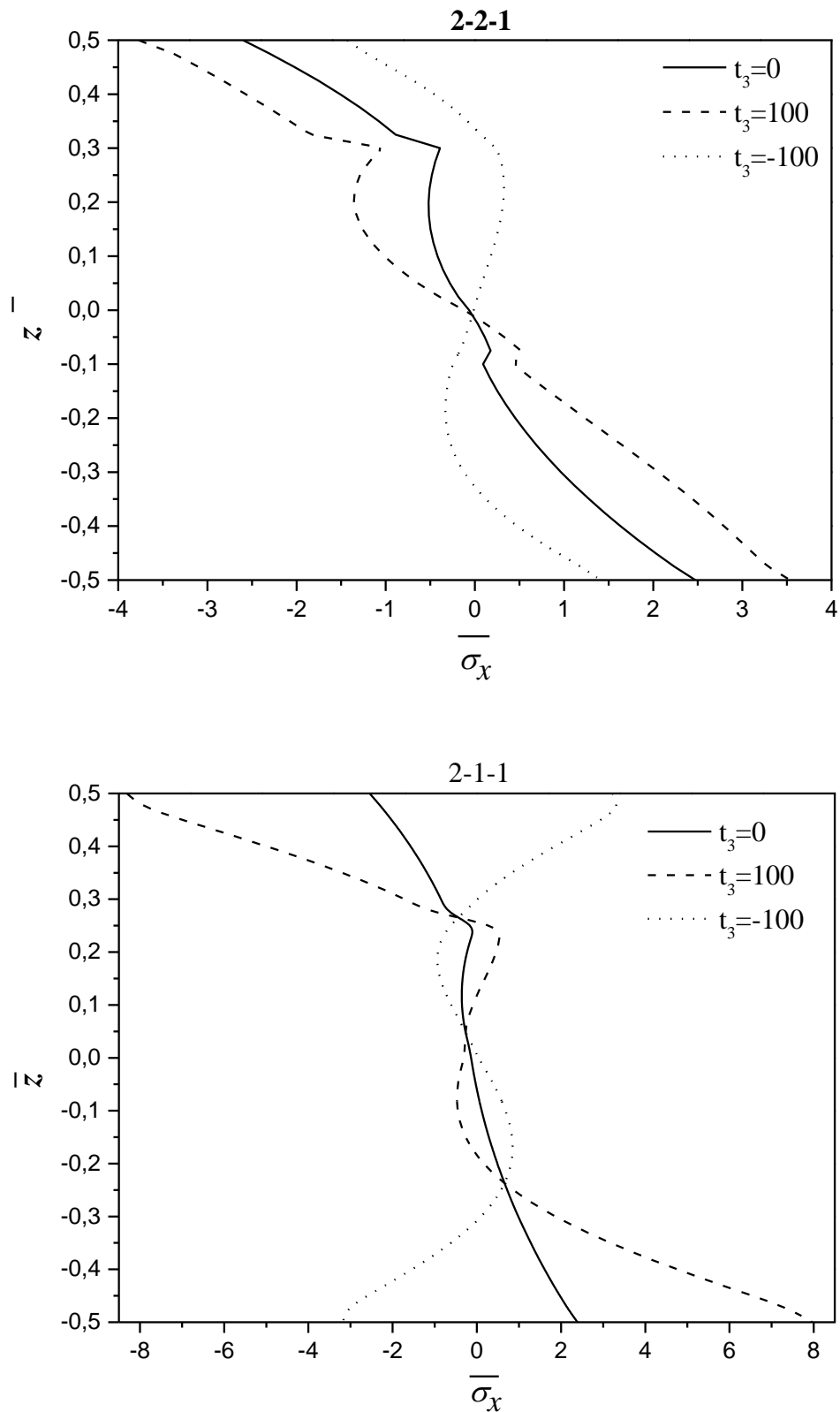


Figure 5.9 : Effet de la charge thermique “ t_3 ” sur la contrainte normale “ $\bar{\sigma}_x$ ” des plaques sandwichs FG de type “C” avec les indices des matériaux “ $p=0.5$ ” et “ $k=0.5$ ” pour les rapports d’épaisseurs 2-2-1 et 2-1-1.

5.3. Conclusion

En conclusion, les divers résultats obtenus en l'analyse de la flexion thermomécanique de la plaque sandwich FG à l'aide d'une simple théorie de la déformation en cisaillement quasi-3D, et sont présentés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle (la théorie de déformation en cisaillement quasi-3D). D'après les résultats, on peut conclure que l'effet d'étirement de l'épaisseur, le rapport d'aspect géométrique " a/b ", le rapport d'épaisseur de couche et les indices des matériaux " p et k " ont un effet significativement sur les contraintes normales non dimensionnelle et les flèches non dimensionnelle de la plaque sandwich FG.

Conclusions générales

Dans le cadre de cette étude une nouvelle simple théorie de déformation en cisaillement quasi-3D en élasticité linéaire du comportement en flexion thermomécanique des plaques sandwichs a été élaborée. Il tient compte l'effet d'étirement, et la variation non linéaire de la température à travers l'épaisseur de la plaque sandwich.

Dans ce travail, nous étudions la réponse thermomécanique en flexion des plaques sandwichs comportant à la fois des couches supérieure et inférieure de FGM et un noyau de FGM, en utilisant une nouvelle simple théorie quasi-3D des plaques. Le champ de déplacement défini en introduisant l'effet d'étirement en utilisant seulement cinq variables comme la FSDT (La théorie de déformation en cisaillement au premier ordre). Les équations d'équilibre sont obtenues par le principe des travaux virtuels puis résolues par l'approche de Navier. Des comparaisons de référence des solutions obtenues pour un modèle de dégradation (les couches supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène) avec celles de la littérature sont effectuées pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle. On présente les déformations et les contraintes des plaques sandwichs à des couches supérieure et inférieure homogènes et noyau FGM ou à des couches (supérieure et inférieure) en FGM et du noyau en FGM.

Les études paramétriques sont effectuées pour analyser les influences de l'indice de puissance " p ", le paramètre de non homogénéité " k ", des paramètres géométriques (les rapports " a/b ", " a/h ") et de la charge thermique sur la flèche adimensionnelle et les contraintes normales des plaques sandwichs FG.

Les principales conclusions peuvent être résumées comme suit:

Les études comparatives montrent que la théorie actuelle est non seulement exacte, mais également plus efficace, car le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la théorie actuelle est seulement cinq, par rapport à d'autres théories contenant six fonctions inconnues ou plus.

On présente la flèche et les contraintes pour la flexion thermomécanique d'une plaque sandwich à des couches supérieure et inférieure en FGM et d'un noyau homogène, d'une plaque sandwich à des couches supérieure et inférieure homogènes et d'un noyau FGM, ainsi que d'une plaque sandwich à des couches supérieure et inférieure FGM et noyau de FGM.

Les études paramétrique montrent que :

- ✓ L'indice de puissance “ p ” et le paramètre de non homogénéité “ k ” jouent un rôle important dans l'élimination des problèmes d'interface des plaques sandwichs et donc les distributions des contraintes sont continues;
- ✓ L'effet de l'étirement de l'épaisseur conduit toujours à une réduction de la flèche non dimensionnelle “ $\bar{w}(a/2, b/2)$ ” et la contrainte non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$;
- ✓ La flèche non dimensionnelle “ \bar{w} ” diminue à mesure que le rapport d'aspect géométrique “ a/b ” augmente;
- ✓ Le rapport entre le côté et l'épaisseur “ a/h ” a une influence sur la flèche non dimensionnelle “ \bar{w} ”;
- ✓ L'effet de la charge thermique est significatif sur la flèche et les contraintes.

On peut noter que la théorie développée est capable d'estimer le comportement des plaques sandwichs en flexion. Il est aussi capable de calculer la déformation élastique thermomécanique des plaques épaisses.

Malgré les bons résultats obtenus, il est possible en perspective d'améliorer la formulation actuelle qui ont été utilisées dans cette étude.

Les améliorations qui peuvent être proposées sont :

- ✓ Une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les travaux futurs pour utiliser un autre type de matériaux (Panjehpour et al. [Pan.13]; Panjehpour. [Pan.14]; Mahi et al. [Mah.15]; Larbi Chaht et al. [Lar.15]; Draiche et al. [Dra.16]; Bouafia et al. [Boua.17]; Klouche et al. [Klo.17]; Mouffoki et al. [Mou.17]; Chikh et al. [Chik.17]; Karami et al. [Kara.17]; Bakhadda et al. [Bak.18]; Kaci et al. [Kac.18]; Mokhtar et al. [Mok.18]; Yazid et al. [Yaz.18]; Panjehpour et al. [Pan.18]; Karami et al. [Kara.18abcd]; Youcef et al. [You.18]; Zine et al. [Zin.18]; Bouadi et al. [Bouad.18]; Kadari et al. [Kad.18]; Karami et al. [Kara.19abc]; Draoui et al. [Drao.19]; Semmah et al. [Sem.19]).
- ✓ Étude des différents comportements des plaques en matériaux à gradient de propriétés, tels que la stabilité thermique et mécanique, et la dynamique des plaques.
- ✓ Étude des différentes formes et géométries, tels que les coques et les plaques circulaires.

Références bibliographiques

- [Abd.17] Abdelaziz H H, Meziane M A A, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R. & Alwabli, A S. An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions. *Steel and Composite Structures.*, (2017), 25(6), 693-704.
- [Abu.18] Abualnour M, Houari M S A, Tounsi A, Adda Bedia E A et Mahmoud S R. A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Compos.Struct.*184, 688-697, 2018.
- [Add.19] Adda Bedia W, Houari M S A, Bessaim A, Bousahla A A, Tounsi A, Saeed T, Alhodaly M S. A new hyperbolic two-unknown beam model for bending and buckling analysis of a nonlocal strain gradient nanobeams. *Journal of Nano Research*, 2019, 57, 175–191.
- [Afa.03] Afaq K S. Développement d'un nouveau modèle pour les structure composites multicouche et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Aho.16] Ahouel M, Houari M S A, Adda Bedia E A et Tounsi A. Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct.*, 2016, 20(5), 963–981
- [Ahm.14] Ahmed A. Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory. *Int. J. Civil Struct. Environ.*, (2014), 4(2), 59-64.
- [Ait S.18] Ait Sidhoum I, Boutchicha D, Benyoucef S et Tounsi A. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates. *Smart Structures and Systems*, 2018, 22(3), 303-314.
- [Ait.17] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1) (2017), 71-84.
- [Aka.16] Akavci SS. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Compos Pt B-Eng* 2016;96:136–52.
- [Akb.17] Akbas S D. Thermal effects on the vibration of functionally graded deep beams with porosity. *International Journal of Applied Mechanics*, (2017), 9(5), 1750076.
- [Akb.12] Akbarzadeh AH, Abbasi M, Eslami MR. Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory. *Thin-Walled Struct*;53: 141–55, 2012.
- [Ald.17] Aldousari S M. Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam. *Appl. Phys.A*, (2017), 123, 296.
- [All.08] Allahverdizadeh A, Naei M H, Bahrami M N. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates, *J. SoundVib.* 310 (2008)966-984.

- [Al-B.15] Al-Basyouni K S, Tounsi A et Mahmoud S R. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Compos. Struct.*, 2015, 125, 621–630.
- [Ali.14] Alibeigloo A, Liew KM. Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Compos Struct* 2014;113:23–30.
- [Ali.14a] Alibeigloo A. Three-dimensional thermo-elasticity solution of sandwich cylindrical panel with functionally graded core. *Compos Struct* 2014;107:458–68.
- [Ali.15] Alibeigloo A, Alizadeh M. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method. *Eur J Mech A-Solids* 2015;54:252–66.
- [Alip.14] Alipour MM, Shariyat M. Analytical stress analysis of annular FGM sandwich plates with non-uniform shear and normal tractions, employing a zigzag elasticity plate theory. *Aerosp Sci Technol* 2014;32(1):235–59.
- [Alip.16] Alipour MM. A novel economical analytical method for bending and stress analysis of functionally graded sandwich circular plates with general elastic edge conditions, subjected to various loads. *Compos Pt B-Eng* 2016;95:48–63.
- [Als.13] Alshorbagy A E, Alieldin S S, Shaat M, Mahmoud F F. Finite element analysis of the deformation of functionally graded plates under thermo-mechanical loads, *H.P.C Math. Probl. Eng.* (2013), Article ID 569781.
- [Amb.69] Ambartsumyan S A. *Theory of anisotropic plate*. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Apa.05] Apalak MK, Gunes R. Thermal residual stress analysis of Ni-Al₂O₃, Ni-TiO₂, and Ti-SiC functionally graded composite plates subjected to various thermal fields. *J Thermoplast Compos Mater*;18:119–52,2005.
- [Asn.15] Asnafi A, et Abedi M. A complete analogical study on the dynamic stability analysis of isotropic functionally graded plates subjected to lateral stochastic loads”, *Acta Mechanica*, (2015), 226(7), 2347–2363.
- [Att.15] Attia A, Tounsi A, Adda Bedia E A et Mahmoud S R. Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories. *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212., 2015.
- [Att.18] Attia A, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R, Alwabli A S. A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. *Struct. Eng. Mech.*, (2018), 65(4). 453-464.
- [Aur.03] Auricchio F, Sacco E. Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates. *J.Appl.Mech.*70(2003)381.
- [Avc.19] Avcar M. Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. *Steel and Composite Structures*, (2019), 30 (6), 603-615.
- [Bac.12] Bachir Bouiadjra M, Houari M S A et Tounsi A. Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a Four-Variable Refined Plate Theory. *Journal of Thermal Stresses*. Volume 35, 35-56, 2012.

- [Bag.11] Bagherizadeh E, Kiani Y, Eslami M R. Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation, *Compos. Struct.*93(2011)3063–3071.
- [Bak.18] Bakhadda B, Bachir Bouiadjra M, Bourada F, Bousahla A A, Tounsi A and Mahmoud S R. Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation. *Wind Struct.*, **27**(5), 311-324(2018).
- [Bar.14] Barretta R, Luciano R. Exact solutions of isotropic viscoelastic functionally graded Kirchhoff plates. *Compos Struct*, 118, 448-454, 2014.
- [Bao.95] Bao G, Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Bau.98] Baumeister H, Veuhoff E, Popp M, Heinecke H. Grinsch gain As P MQW laser structures grown by MOMBE. *J.Cryst. Growth*188(1998)266–274.
- [Bela.14] Belabed Z, Houari M S A, Tounsi A, Mahmoud S R et Anwar Bég O. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Compos.: Part B*, 60, 274-283, 2014.
- [Bela.18] Belabed Z, Bousahla A A, Houari M S A, Tounsi A et Mahmoud S R. A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate. *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115, 2018.
- [Beld.16] Beldjelili Y, Tounsi A & Mahmoud S R. Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Structures and Systems*, 18(4) (2016), 755-786.
- [Bel.15] Belkorissat I, Houari M S A, Tounsi A, Adda Bedia E A and Mahmoud S R. On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model. *Steel Compos. Struct.*, (2015),18(4), 1063-1081.
- [Bell.16] Bellifa H, Benrahou K H, Hadji L, Houari M S A and Tounsi A. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, (2016), 38, 265-275.
- [Bell.17a] Bellifa H, Benrahou K H, Bousahla A A, Tounsi A et Mahmoud S R. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams. *Struct. Eng. Mech.*, (2017a), 62(6), 695-702.
- [Bell.17b] Bellifa H, Bakora A, Tounsi A, Bousahla A A et Mahmoud S R. An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Steel Compos. Struct.*, (2017b), 25(3), 257-270.
- [Bena.17] Benahmed A, Houari M S A, Benyoucef S, Belakhdar K, Tounsi A. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 12(1) (2017), 9-34.
- [Benc.18] Benchohra M, Driz H, Bakora A, Tounsi A, Adda Bedia E A et Mahmoud S R. A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Struct.Eng.Mech.*, 2018, 65(1), 19-31.

- [Bend.19] Bendaho B, Belabed Z, Bourada M, Benatta M A, Bourada F, Tounsi A. Assessment of new 2D and quasi-3D Nonlocal theories for free vibration analysis of size-dependent functionally graded (FG) nanoplates. *Advances in Nano Research*, (2019).
- [Benno.16] Bennoun M, Houari M S A, Tounsi A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2016), 23(4), 423 – 431.
- [Ben.87] Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory on composite materials. *Mech.Mater.*6(1987)147-157.
- [Ber.19] Berghouti H, Adda Bedia E A, Benkhedda A, Tounsi A. Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material. *Advances in Nano Research*, (2019).
- [Bes.13] Bessaim A, Houari MS, Tounsi A, Mahmoud S. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(6):671–703, 2013.
- [Bess.17] Besseghier A, Houari M S A, Tounsi A et Mahmoud S R. Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 2017, 19(6), 601-614.
- [Bir.95] Birman V. Stability of functionally graded hybrid composite plates. *Compos. Eng.* 5(1995)913–921.
- [Bha.89] Bhaskar K, Varadan T K. Refinement of higher-order laminated plate theories. *AIAAJ.* 27(12)(1989)1830-1831.
- [Bouad.18] Bouadi A, Bousahla A A, Houari M S A, Heireche H, Tounsi A. A new nonlocal HSDT for analysis of stability of single layer graphene sheet. *Advances in Nano Research*, 6(2), 147-162(2018).
- [Boua.17] Bouafia K, Kaci A, Houari M S A, Benzair A, Tounsi A. A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams. *Smart Structures and Systems.*, 19(2), 115-126(2017).
- [Bou.18] Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla A A, Benyoucef S, Mahmoud S R. Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *Struct. Eng. Mech.*, 2018, 66(1), 61-73.
- [Boud.16] Boudierba B, Houari M S A, Tounsi A et Mahmoud S R. Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory. *Struct. Eng. Mech.*, 58(3), 397-422, 2016.
- [Bouk.16] Boukhari A, Ait Atmane H, Tounsi A, Adda Bedia EA and Mahmoud S R. An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates. *Struct. Eng. Mech.*57(5), 837-859,2016.
- [Boukh.19] Boukhelif Z, Bouremana M, Bourada F, Bousahla A A, Bourada M, Tounsi A, Al-Osta M A. A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, 2019, 31(05),503-516.

- [Boul.19] Boulefrakh L, Hebali H, Chikh A, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R. The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration properties of a thick FG plate. *Geomechanics and Engineering*, 2019, 18(2), 161-178.
- [Bour.12] Bourada M, Tounsi A, Houari M S A et Adda Bedia E A .A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *J. Sandw. Struct. Mater.* (2012), 14(1), 5-33.
- [Bour.15] Bourada M, Kaci A, Houari M S A et Tounsi A. A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct.*, 2015, 18(2), 409-423.
- [Bour.19] Bourada M, Tounsi A, Al-Osta M A. A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*, 2019, 31(05),503-516.
- [Bour F.16] Bourada F, Amara K et Tounsi A. Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory. *Steel Compos.Struct.*, 2016, 21(6), 1287-1306.
- [Bour F.18] Bourada F, Amara K, Bousahla A A, Tounsi A et Mahmoud S R. A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates. *Structural Engineering and Mechanics.*, 2018, 68(6), 661-675.
- [Bous.14] Bousahla A A, Houari M S A, Tounsi A et Adda Bedia E A. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *Int. J. Computat. Methods*, 11(6), 2014, 1350082.
- [Bous.16] Bousahla A A, Benyoucef S, Tounsi A and Mahmoud S R. On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion.*Struct. Eng. Mech. Int J.60(2)*, 313-335,2016.
- [Bout.19] Boutaleb S, Benrahou K H, Bakora A, Algarni A, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R, Tounsi A. Dynamic Analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT. *Advances in Nano Research*, 2019, 7(3), 189-206.
- [Chaa.19] Chaabane L A, Bourada F, Sekkal M, Zerouati S, Zaoui F Z, Tounsi A, Derras A, Bousahla A A, Tounsi A. Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, (In press), 2019.
- [Che.99] Cheng Z Q, Kitipornchai S. Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates, *J. Eng. Mech. ASCE*125(11) (1999) 1293–1297.
- [Che.00a] Cheng Z Q, Batra R C. Deflection relations hips between the homogeneous plate theory and different functionally graded plate theories. *Arch. Mech.* 52 (2000)143–158.
- [Che.00b] Cheng Z Q, Batra R C. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J.Sound Vib.* 229(4)(2000)879–895.
- [Cher.18] Cherif R H, Meradjah M, Zidour M, Tounsi A, Belmahi H, Bensattalah T. Vibration analysis of nano beam using differential transform method including thermal effect. *Journal of Nano Research*, 2018, 54, 1-14.

- [Chi.02] Chi S H, Chung Y L. Cracking in sigmoid functionally graded coating. *J.Mech.* 18(2002)41-53.
- [Chik.17] Chikh A, Tounsi A, Hebali H and Mahmoud S R. Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. *Smart Struct. Syst.*, **19**(3), 289-297(2017).
- [Chu.01] Chung Y L, Chi S H. The residual stress of functionally graded materials. *J. Chin. Inst.Civ.Hydraul.Eng.*13(2001)1-9.
- [Chu.06] Chu C L, Xue X Y, Zhu J C, Yin Z D. In vivo study on biocompatibility and bonding strength of hydroxyapatite -20 vol %Ti composite with bone tissues in the rabbit, *Biomed. Mater. Eng.*16(3)(2006)203-213.
- [Dai.16] Dai HL, Rao YN, Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Compos Struct* 2016;152:199–225.
- [Dea.11] Dean J, Fallah AS, Brown PM, Louca LA, Clyne TW. Energy absorption during projectile perforation of light weight sandwich panels with metallic fibre cores. *Compos Struct* 2011;93(3):1089-95.
- [Del.83] Delale F, Erdogan F. The crack problem for an on homogeneous plane. *ASME J. Appl. Mech.* 50(1983)609-614.
- [Dra.16] Draiche K, Tounsi A and Mahmoud S R. A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates. *Geomech. Eng.*, **11**(5), 671-690(2016).
- [Drao.19] Draoui A, Zidour M, Tounsi A, Adim B. Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT). *Journal of Nano Research*, **57**, 117-135(2019).
- [Elm.17] Elmoossouess B, Kebdani S, Bachir Bouiadjra M et Tounsi A. A novel and simple HSDT for thermal buckling response of functionally graded sandwich plates. *Structural Engineering and Mechanics.*, (2017), 62(4), 401-415.
- [Fah.17] Fahsi A, Tounsi A, Hebali H, Chikh A, Adda Bedia E A, Mahmoud S R. A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Geomechanics and Engineering*, 2017, 13(3), 385-410.
- [Fare.09] Fares M E, Elmarghany M K, Atta D. An efficient and simple refined theory for - bending and vibration of functionally graded plates, *Compos. Struct.*91 (2009)296–305.
- [Far.18] Farokhi H, Ghayesh M H, Gholipour A, Hussain S. Modal interactions and energy transfers in large-amplitude vibrations of functionally graded microcantilevers. *Journal of Vibration and Control*, (2018), 24(17), 3882-3893.
- [Faz.15] Fazzolari FA. Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Compos Struct* 2015;121:197–210.
- [Fel.97] Feldman E, Aboudi J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading, *Compos. Struct.*38(1997)29–36.
- [Fer.06] Ferreira A J M, Batra R C, Roque C M C, Qian L F , Jorge R M N. Natural frequencies of functionally graded plates by a mesh less method, *Compos. Struct.* 75 (2006)593–600.

- [Fou.18] Fourn H, Ait Atmane H, Bourada M, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R. A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates. *Steel and Composite Structures*, 2018, 27(1), 109-122.
- [Fro.07] Froimson M I, Garino J, Machenaud A, Vidalain J P. Minimum 10-year results of tapered, titanium, hydroxyapatite-coated hip stem: an independent review. *J. Arthroplast.* 22 (2007) 1-7.
- [Fuk.91] Fukui Y. Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force. *JSME Int. J. Ser.III*34(1991) 144-148.
- [Fuj.10] Fujii T, Tohgo K, Araki H, Wakazono K, Ishikura M, Shimamura Y. Fabrication and strength evaluation of biocompatible ceramic-metal composite materials, *KeyEng. Mater.* 4(2010) 1699-1710.
- [Gha.12] Ghannadpour S A M, Ovesy H R, Nassirnia M. Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method, *Comput. Struct.*108(109)(2012)93-99.
- [Gib.95] Gibson L J, Ashby M F, Karam G N, Wegst U, Shercliff H R. Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency. *Proc. R. Soc. Lond. A*450 (1995) 141-162.
- [Gro.97] Groves J F, Wadley H N G. Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Compos.B:Eng.*28(1997)57-69.
- [Gro.14] Grover N, Maiti D K, Nath B. Flexural behavior of laminated composite and sandwich plates. *LatinAm. J. Solids Struct.* 11(2014)1275-1297.
- [Guo.03] Guo H, Khor K A, Boey Y C, Miao X. Laminated and functionally graded hydroxyapatite/yttria stabilized tetragonal zirconia composites fabricated by spark plasma sintering. *Biomaterials* 24(2003)667-675.
- [Gup.15] Gupta A, Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences.* 0376-0421(2015).
- [Gur.14] Gururaja U, Rao S S, Gangadharan K V. Functionally graded composite material : an overview, *Procedia Mater. Sci.*5 (2014)1291-1299.
- [Hac.17] Hachemi H, Kaci A, Houari M S A, Bourada A, Tounsi A, Mahmoud S R. A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations. *Steel and Composite Structures*, 2017, 25(6), 717-726.
- [Ham.15] Hamidi A, Houari M S A, Mahmoud S R and Tounsi A. A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel Compos. Struct.* 18(1), 235-253, 2015.
- [Has.10] Hashemi S H, Taher H R D, Akhavan H, Omid M, Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory, *Appl.Math.Model.*34(2010)1276-1291.
- [Has.11] Hashemi S H, Fadaee M, Atashipour S R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.*53(2011)11-22.

- [He.01] He X Q, Ng T Y, Sivashankar S, Liew K M. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *Int.J. Solids Struct.* 38(2001) 1641–1655.
- [Heb.14] Hebali H, Tounsi A, Houari M S A, Bessaim A and Adda Bedia E A. A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383, 2014.
- [Hou.11] Houari MSA, Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Bedia EAA. Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Therm Stresses* 2011;34(4):315–34.
- [Hou.11a] Houari MSA. Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [Hou.13] Houari MSA, Tounsi A, Bég OA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *Int J Mech Sci* 2013;76(6):102–11.
- [Hou.16] Houari M S A, Tounsi A, Bessaim A and Mahmoud SR. A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Steel Compos. Struct., Int. J.* 22(2), 257-276, 2016.
- [Hua.06] Huang X L, Shen H S. Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments, *J. Sound Vib.* 289(2006)25–53.
- [Hua.11] Huang C S, McGee O G, Chang M J. Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates. *Compos. Struct.* 93(2011)1747-1764.
- [Hus.18] Hussain M, Naeem M N. Effects of ring supports on vibration of armchair and zigzag FGM rotating carbon nanotubes using Galerkin's method. *Composites Part B: Engineering*, (2018), 163, 548-561.
- [Hut.04] Hutmacher D W, Sittinger M, Risbud M V. Scaffold-based tissue engineering: rationale for computer-aided design and solid free-form fabrication systems. *Trends Biotechnol.* 22 (7) (2004) 354-362.
- [Jin.02] Jin ZH. An asymptotic solution of temperature field in a strip a functionally graded material. *Int Commun Heat Mass Transf* ; 29:887–95, 2002.
- [Jha.13] Jha D K, Tarun Kant, Singh R K. Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects, *Compos. Struct.* 96 (2013)799–823.
- [Kac.18] Kaci A, Houari M S A, Bousahla A A, Tounsi A, Mahmoud S R. Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 65(5), 621-631(2018).
- [Kad.18] Kadari B, Bessaim A, Tounsi A, Heireche H, Bousahla A A, Houari M S A. Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations. *Journal of Nano Research*, 55, 42-56(2018).
- [Kan.93] Kant T, Mallikarjuna. A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches. *Compos. Struct.*23(1993)293-312.

- [Kara.17] Karami B, Janghorban M, Tounsi A. Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates. *Steel and Composite Structures*, **25**(3), 361-374(2017).
- [Kara.18a] Karami B, Janghorban M, Tounsi A. Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory. *Thin-Walled Structures*, **129**, 251–264(2018a).
- [Kara.18b] Karami B, Janghorban M, Shahsavari D, Tounsi A. A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates. *Steel and Composite Structures*, **28**(1), 99-110(2018b).
- [Kara.18c] Karami B, Janghorban M, Tounsi A. (2018c). Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles. *Steel and Composite Structures*, **27**(2), 201-216.
- [Kara.18d] Karami B, Janghorban M and Tounsi A. Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions. *Engineering with Computers*. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0664-9>(2018d).
- [Kara.19] Karami B, Shahsavari D. Nonlocal strain gradient model for thermal stability of FG nanoplates integrated with piezoelectric layers. *Smart Structures and Systems*, (2019), **23**(3), 215-225.
- [Kara.19a] Karami B, Shahsavari D, Janghorban M, Tounsi A. Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with grapheme nanoplatelets. *International Journal of Mechanical Sciences*, **156**, 94-105(2019a).
- [Kara.19b] Karami B, Janghorban M, Tounsi A. On exact wave propagation analysis of triclinic material using three dimensional bi-Helmholtz gradient plate model. *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(5), 487-497(2019b).
- [Kara.19c] Karami B, Janghorban M, Tounsi A. Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, **7**(1), 55-66(2019c).
- [Kar V.16] Kar V R, Panda S K. Geometrical free vibration analysis of FGM spherical panel under nonlinear thermal loading with TD and TID properties. *Journal of Thermal Stresses*, (2016), **39**(8), 942-959.
- [Kar V.16a] Kar V R et Panda S K. Nonlinear thermomechanical behaviour of FGM cylindrical / hyperbolic/ elliptical shell panel with TD and TID properties. *J. Press. Vessel Technol. ASME*, **138**(6), 061206, 2016.
- [Kash.09] Kashtalyan M, Menshykova M. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core. *Compos Struct* 2009;**87** (1):36–43.
- [Kat.18] Katariya P V, Hirwani C K et Panda S K. Geometrically nonlinear deflection and stress analysis of skew sandwich shell panel using higher-order theory", *Engineering with Computers*, (In press), 2018.
- [Kaw.02] Kawasaki A, Watanabe R. Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Eng. Fract. Mech.***69**(2002)1713–1728.

- [Ket.13] Kettaf F Z, Houari M S A, Benguediab M, Tounsi A Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel and Composite Structures*, (2013), 15(4), 399-423.
- [Kie.03] Kieback B, Neubrand A, Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [Kim.05] Kim Y W. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates, *J. Sound Vib.* 284 (2005) 531–549.
- [Kit.06] Kitipornchai S, Yang J, Liew K M. Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195(2006)1075–1095.
- [Khe.17] Khetir H, Bachir Bouiadjra M, Houari M S A, Tounsi A et Mahmoud S R. A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates. *Struct. Eng. Mech., Int. J.*,2017, 64(4), 391-402.
- [Khd.99] Khdeir A A, Reddy J N. Freevibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory. *Compos.Struct.*71(1999)617–626.
- [Khi.19] Khiloun M, Bousahla A A, Kaci A, Bessaim A, Tounsi A, Mahmoud S R. Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT. *Engineering with Computers*. (2019), <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00732-1>.
- [Klu.10] Klusemann B, Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: comparisons and benchmarks. *Tech.Mech.*30(4)(2010) 374-386.
- [Klo.17] Klouche F, Darcherif L, Sekkal M, Tounsi A and Mahmoud S R. An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates. *Structural Engineering and Mechanics*, **63**(4), 439-446(2017).
- [Koi.97] Koizumi M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21.Japan,1997.
- [Kok.90] Kokini K, Takeuchi Y. Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90*. 31-36, Sendai-Japan 1990.
- [Kol.17] Kolahchi R, Zarei M S, Hajmohammad M H, Nouri A. Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, (2017), 130, 534–545.
- [Lar.15] Larbi Chaht F, Kaci A, Houari M S A, Tounsi A, Anwar Bég O and Mahmoud S R. Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect. *Steel. Compos. Struct.*,**18**(2), 425-442(2015).
- [Lee.10] Lee Y Y, Zhao X, Reddy J N. Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads, *Comput. MethodAppl. Mech. Eng.*199(2010)1645-1653.
- [Li.09] Li Q, Iu V P, Kou K P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment, *J. SoundVib.*324(2009) 733–750.

- [Li.10] Li Q, Li W, Swain M. Bonere modeling induced by dental implants of functionally graded materials. *J.Biomed.Mater.Res.B:Appl.Biomater.*92B (2) (2010)430–438.
- [Li.16] Li D, Deng Z, Xiao H. Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Compos Pt BEng* 2016;106:107–19.
- [Li.17] Li D, Deng Z, Chen G, Xiao H, Zhu L. Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core. *Compos Struct* 2017; <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.026>.
- [Lib.00] Librescu L, Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Compos Struct* 2000;48(1–3):1–17.
- [Lie.03] Liew K M, Yang J, Kitipornchai S. Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading, *Int.J.SolidsStruct.*40(2003) 3869–3892.
- [Lin X.05] Lin X, Yue T M. Phase formation and microstructure evolution in laser rapid forming of graded SS316L/Rene88D Talloy. *Mater.Sci.Eng.*402(2005) 294-306.
- [Lin.10] Lindström A, Hallström S. Energy absorption of SMC/balsa sandwich panels with geometrical triggering features. *Compos Struct* 2010;92(11):2676–84.
- [Liu.16] Liu B, Ferreira AJM, Xing YF, Neves AMA. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method. *Compos Struct* 2016;136:546-53.
- [Lov.1888] Love A E H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philos. Trans.R.Soc.*17(1888)491-549.
- [Ma.03] Ma L S, Wang T J. Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings, *Int. J. Solids Struct.*40(2003)3311–3330.
- [Mah.15] Mahi A, Bedia EAA, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Appl Math Model* 2015;39(9):2489–508.
- [Mali.05] Malinina M, Sammi T, Gasik M. Corrosion resistance of homogeneous and FGM coatings. *Mater. Sci. Forum*492-493 (2005)305-310.
- [Mal.10] Malekzadeh P, Alibeygibeni A, Free vibration of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates in thermal environment, *Compos. Struct.* 92 (2010)2758–2767.
- [Man.14a] Mantari JL, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71, 2014.
- [Man.14b] Mantari JL, Soares CG. A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014.
- [Man.15] Mantari JL, Granados EV. Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns. *Compos Pt BEng* 2015;69:317–34.
- [Mat.08] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Compos. Struct.* 82(2008) 499–512.

- [Meh.13] Mehrali M, Farid S S, Mehrali M, Metselaar H S C, Kadri N A B, Osman N A A. Dental implants from functionally graded materials. *J. Biomed. Mater. Res. Part A*101 (10) (2013) 3046-3057.
- [Mek.19] Meksi R, Benyoucef S, Mahmoudi A, Tounsi A, Adda Bedia E A et Mahmoud SR. An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *J. Sandw. Struct.Mater.*, 2019, 1099636217698443.
- [Men.17] Menasria A, Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla A A et Mahmoud S R. A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates. *Steel. Compos. Struct.*, 25(2), 157-175, 2017.
- [Mez.17] Meziane M A A, Abdelaziz H H et Tounsi A. An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions. *J. Sandw.Struct. Mater.*,16(3), 293-318, 2014.
- [Min.51] Mindlin R D. Influence of rotary inertia and shear on exural motions of isotropic,elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mia.98] Mian M A, Spencer A J M. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids* 35(1)(1998)1172-1184.
- [Moh.18] Mohammadimehr M, Atifeh S J, Navi B R. Stress and free vibration analysis of piezoelectric hollow circular FG-SWBNNNTs reinforced nanocomposite plate based on modified couple stress theory subjected to thermo-mechanical loadings. *Journal of Vibration and Control*, (2018), 24(15), 3471-3486.
- [Mok.18] Mokhtar Y, Heireche H, Bousahla A A, Houari M S A , Tounsi A, Mahmoud S R. A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory. *Smart Structures Systems*, **21**(4), 397-405(2018).
- [Mor.73] Mori T et Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 571-574, 1973.
- [Mou.17] Mouffoki A, Adda Bedia E A, Houari M S A, Tounsi A, Mahmoud SR. Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory. *Smart Structures Systems*, **20**(3), 369-383(2017).
- [Mul.03] Muller E, Drasar C, Schilz J, Kaysser W A. Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Mater.Sci.Eng.A:Struct.Mater.Prop.Mi- crostruct. Process.*362(1-2) (2003)17-39.
- [Naj.02] Najafizadeh M M, Eslami M R. Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression, *Int. J.Mech.Sci.* 44(2002)2474-2493.
- [Nat.11] Natarajan S, Baiz P M, Ganapathi M, Kerfriden P, Bordas S. Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates int hermal environment. *Comput. Struct.* 89 (2011) 1535-1546.
- [Nat.12] Natarajan S, Manickam G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem Anal Des* 2012;57:32-42.

- [Nem.11] Nemat-Alla M M, Ata M H, Bayoumi M R, Eldeen W K. Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminium/steel functionally graded material. *Mater.Sci.Appl.*2(2011)1708–1718.
- [Nev.12] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Jorge RMN, Soares CMM. Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering Zig-Zag and warping effects. *Adv Eng Softw* 2012;52:30-43.
- [Nev.13] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos Pt B-Eng* 2013;44(1):657–74.
- [Nie.07] Nie G. J, Zhong Z. Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, *Comput. MethodsAppl. Mech. Eng.*196 (2007)4901–4910.
- [Ng.00] Ng T Y, Lam K Y, Liew K M. Effect of FGM materials on parametric response of plate structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190(2000)953–962.
- [Ngu.11] Nguyen D D, Tung H V. Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations, *Compos. Struct.*93(2011)2874–2881.
- [Ngu.14] Nguyen V H, Nguyen TK, Thai HT, Vo TP. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Compos Pt B-Eng* 2014;66:233-46.
- [Ngu.16] Nguyen T N, Thai CH, Nguyen-Xuan H. A novel computational approach for functionally graded isotropic and sandwich plate structures based on a rotation-free meshfree method. *Thin-Walled Struct* 2016;107:473–88.
- [Ngu.16a] Nguyen T K, Nguyen VH, Chau-Dinh T, Vo TP, Nguyen-Xuan H. Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Compos Pt B-Eng* 2016;107:162–73.
- [Nii.87] Niino M, Hirai T, Watanabe R. The functionally gradient materials. *J.Jpn. Soc. Compos. Mater.*13(1987)257-264.
- [Nod.99] Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials. *J Therm Stress*; 22:477–512, 1999.
- [Nod.12] Noda N, Ootao Y, Tanigawa Y. Transient thermoelastic analysis for a functionally graded circular disk with piecewise power law. *J Theor Appl Mech*; 50:831–9, 2012.
- [Oot.99] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating, *J. Therm. Stress.* 22 (1999)35–55.
- [Och.92] Ochoa O O, Reddy J N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates. Solid mechanics and its applications.* Dordrecht: Springer, 1992.
- [Onk.06] Onkar A K, Upadhyya C S, Yadav D. Generalized buckling analysis of laminated plates with random material properties using stochastic finite elements. *Int.J.Mech.Sci.*48(2006)780–798.

- [Onk.07] Onkar A K, Upadhya C S, Yadav D. Stochastic finite element analysis buckling analysis of laminated with circular cutouts under uniaxial compression. *Trans. ASMEJ. Appl. Mech.* 74(2007)789-809.
- [Osh.14] Oshkour A A, Talebi H, Shirazi S F, Bayat M, Yau Y H, Tarlochan F, Abu Osman N A, Comparison of various functionally graded femoral prostheses by finite element analysis. *HindawiPubl. Corp.Sci. WorldJ.*2014; 1-17.
- [Pan.13] Panjehpour M, Ali AAA, Voo YL. Structural insulated panels: past, present, and future. *Journal of Engineering, Project, and Production Management (EPPM)*, **1**(3), 2-8(2013).
- [Pan.14] Panjehpour M. Evaluation of structural insulated wall panels behaviour using various substituted materials. *Journal of Civil Engineering and Architecture Research*, **1**(2), 138-142(2014).
- [Pan.18] Panjehpour M, Eric Woo Kee Loh, Deepak TJ. Structural Insulated Panels: State-of-the-Art. *Trends in civil Engineering and its architecture*, **3**(1) 336-340(2018).
- [Prav.98] Praveen G N and Reddy J N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 4457-4476, 1998.
- [Qia.04] Qian L F, Batra R C, Chen L M. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plate by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method. *Composites B*35(2004)685–697.
- [Rad.15] Rad A B. Thermo-elastic analysis of functionally graded circular plates resting on a gradient hybrid foundation, *Appl. Math. Comput.*256(2015) 276–298.
- [Ras.12] Rasheedat M M, Esther T A, Shukla M, Pityana S. Functionally graded material: an overview, in: *Proceedings of World Congresson Engineering, London, U.K.,volIII,July4–6, 2012.*
- [Red.90] Reddy J N. A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates. *22*(7), 1990.
- [Red.97] Reddy J N, Wang C M, Lee K H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures.* 34(26), 3373–338, 1997.
- [Red.99] Reddy J N, Wang C M, Kitipornchai S. Axi symmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *Eur. J. Mech. A: Solids*18(1)(1999) 185-199.
- [Red.00] Reddy J N. Analysis of functionally graded plates. *Int J. Numer. Method Eng.* 47, 663–684, 2000.
- [Red.03] Reddy J N, Cheng Z Q. Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach, *J. Eng. Mech.*ASCE129(8)(2003) 896–900.
- [Red.04] Reddy J N. *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis* (second edition). CRC Press; 2004.
- [Red.07] Reddy J N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells.* CRC Press, Taylor and Francis, 2007, ISBN 9780849384158 - CAT# 8415.
- [Rei.44] Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J.Math.Phys.*23 (1944)184-191.

- [Rei.45] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J.Appl. Mech*; 12 (2): 69-77, 1945.
- [Rob.94] Robbins D H, Reddy J N. Structural theories and computational models for composite laminates. *Appl. Mech. Rev.*47(6-1) (1994)147-170.
- [Roq.07] Roque C M C, Ferreira A J M, Jorge R M N. A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory, *J.SoundVib.*300(2007)1048–1070.
- [Sah.13] Sahoo R, Singh B N. A new inverse hyperbolic zigzag theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates. *Compos.Struct.*105 (2013)385-397.
- [Sam.07] Samsamshariat B A, Eslami M R. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Compos. Struct.*78(2007)433–439.
- [Sat.80] Satyamurthy K, Hasselman D P H, Singh J P, Kamat M P. Effect of Spatial Variation of Thermal Conductivity on Magnitude of Tensile Thermal Stress in Brittle Materials Subjected to Convective Heating. *Thermal Stresses in Severe Environment*, Plenum Press, New York (1980), p.322-342.
- [Sek.17a] Sekkal M, Fahsi B, Tounsi A, Mahmoud S R. A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. *Steel and Composite Structures*, (2017a), 25(4), 389-401.
- [Sek.17b] Sekkal M, Fahsi B, Tounsi A, Mahmoud S R. A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate. *Structural Engineering and Mechanics*, (2017b),64(6), 737-749.
- [Sem.19] Semmah A, Heireche H, Bousahla A A, Tounsi A. Thermal buckling analysis of SWBNNT on Winkler foundation by non-local FSDT. *Advances in Nano Research*, 7(2), 89-98(2019).
- [She.98] Shen H S. Thermomechanical post-buckling analysis of imperfect laminated plates using a higher order shear deformation theory. *Comput. Struct.* 66(4)(1998)395-409.
- [She.01] Shen H S. Postbuckling of free edge Reissner-Mindlin plates elastically supported on a two parameter foundation and subjected to biaxial compression and transverse loads, *Eng.Struct.*23(2001)260–270.
- [She.04] Shen H S. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Int J Solids Struct*; 41:1961–74, 2004.
- [She.07] Shen H S. Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties, *Int. J. Mech. Sci.*49(2007)466–478.
- [She.07a] Shen H S. Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction, *Composites B*38 (2007) 201–215.
- [She.08] Shen H S, Li SR. Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. *Compos Pt B-Eng* 2008;39(2):332–44.
- [She.09] Shen H S. *Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
- [She.12] Shen H S, Wang X Z. Assessment of Voigt and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 94(2012) 2197–2208.

- [She.12a] Shen H S. Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium, *Compos. Struct.* 94(2012)1144–1154.
- [Shei.13] Sheikholeslami S A, Saidi A R. Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory. *Compos.Struct.*106 (2013)350-361.
- [She G.18] She G L, Ren Y R, Xiao W S, Liu H. Study on thermal buckling and post- buckling behaviors of FGM tubes resting on elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*, (2018), 66(6), 729-736.
- [Shi.02] Shimpi RP. Refined plate theory and its variants. *AIAA J*; 40(1):137–46, 2002.
- [Shy.06] Shyang H C, Chung Y L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load Part I : analysis. *Int.J.SolidsStruct.*43(2006) 3657–3674.
- [Sob.13] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos Struct* 2013;99:76–87.
- [Sof.10] Sofiyev A H. Buckling analysis of FGM circular shells under combined loads and resting on the Pasternak type elastic foundation, *Mech. Res. Commun.*37 (2010)539–544.
- [Sun.05] Sundararajan N, Prakash T, Ganapathi M. Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environments, *FiniteElem. Anal. Des.* 42(2005)152–168.
- [Sur.98] Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, 1st ed., IOM Communications, London, 1998.
- [Swa.15] Swaminathan K, Naveenkumar DT, Zenkour AM, Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review. *Compos Struct* 2015;120:10-31.
- [Tai.15] Taibi FZ, Benyoucef S, Tounsi A, Bouiadjra RB, Bedia EAA, Mahmoud SR. A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *J Sandwich Struct Mater* 2015;17(2):99–129.
- [Tak.92] Takahashi H, Watari F, Nishimura F, Nakamura H. Study of functionally gradient materials of titanium-apatite and titanium-silica for dental use. *J. Jpn. Soc. Dent. Mater. Device* 11 (1992)462-468.
- [Tal.10] Talha M et Singh B N. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl.Math.Model.*34(2010) 3991–4011.
- [Tal.11a] Talha M et Singh B N. Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method, *Finite Elem. Anal. Des.* 47(2011)394–401.
- [Tal.11b] Talha M et Singh B N. Thermo-mechanical induced vibration characteristics of shear deformable functionally graded ceramic metal plates using finite element method. *Proc. IMechEng. C:J. Mech. Eng. Sci.* 25 (2011) 50–65.
- [Tal.11c] Talha M et Singh B N. Thermo-mechanical buckling analysis of finite element modeled functionally graded ceramic-metal plates, *Int. J. Appl. Mech.*3(04) (2011)867–880.

- [Taw.13] Tawakol A E, Bondok N E. Material selection in the design of the tibia tray component of cemented artificial knee using finite element method. *Mater. Des.* 44(2013)454–460.
- [Tha.12] Thai H T, Choi D H. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates, *Appl. Math. Model.* 36(2012) 1008–1022.
- [Tha.13] Thai H T, Kim SE. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct*; 99:172–80, 2013.
- [Tha.13a] Thai H T, Vo T P. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates, *Appl. Math. Model.* 37 (2013)3269–3281.
- [Tha.14] Thai HT, Nguyen TK, Vo TP, Lee J. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *Eur J Mech A-Solids* 2014;45:211–25.
- [Tha.15] Thai HT, Kim SE. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Compos Struct* 2015;128:70–86.
- [Thai.14a] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Comput Struct* 2014;141:94-112.
- [Thai.14b] Thai CH, Zenkour AM, Wahab MA, Nguyen-Xuan H. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Compos Struct* 2016;139:77–95.
- [Torn.14] Tornabene F, Fantuzzi N, Baccocchi M. Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories. *Compos Part B*, 67, 490-509, 2014.
- [Torn.15] Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E, Batra RC. Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equivalent single layer theory. *Compos Struct*, 119, 67-89, 2015.
- [Tou.13] Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp Sci Technol* 2013;24(1):209–20.
- [Tou.16] Tounsi A, Houari M S A and Bessaim A. A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 60(4), 547-565, 2016.
- [Ung.13] Ungbhakorn V, Wattanasakulpong N. Thermo-elastic vibration analysis of third-order shear deformable functionally graded plates with distributed patch mass under thermal environment. *Appl. Acoust.* 74(2013)1045-1059.
- [Uym.13] Uymaz B, Aydogdu M. Three dimensional mechanical buckling of FG plates with general boundary conditions, *Compos. Struct.* 96(2013)174–193.
- [Vel.02] Vel S S and Batra R C. Exact solution for thermo-elastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAAJ.* 40(2002)1421–1433.
- [Vel.04] Vel S S et Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.

- [Vin.01] Vinson JR. Sandwich structures. *Appl Mech Rev* 2001; 54(3):201–14.
- [Vin.05] Vinson JR. Sandwich structures: past, present, and future. In: Thomsen OT, Bozhevolnaya E, Lyckegaard A, editors. *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*. Netherlands: Springer; 2005. p. 3-12.
- [Wata.00] Watanabe Y, Yamanaka N, Fukui Y. Microstructures and mechanical properties of functionally graded materials fabricated by a centrifugal method. *Rec.Res.Dev.Metall.Mater.Sci.*4(2000)51-93.
- [Wat.97] Watari F, Yokoyama A, Saso F, Kawasaki M. Uo T. Fabrication and properties of functionally graded dental implant. *Compos.BEng.*28(1997)5–11.
- [Wat.99] Watari F, Yokoyama A, Saso F, Kawasaki M. Uo T. Biocompatibility of titanium/hydroxyapatite and titanium/cobalt functionally graded implants. *Mater. Sci. Forum* 308-311(1999) 356-361.
- [Wat.01] Watari F, Yokoyama A, Miyao R, Uo M, Kawasaki T, Omori M, Hirai T. Fabrication of Functionally Graded Implant and its Biocompatibility. *Functionally Graded Materials in the 21st century: A Workshop on Trends and Forecasts*, Kluwer Academic, Boston(2001),p.187-190.
- [Wat.02] Watari F, Kondo H, Miyao R, Omori M, Okubo A, Hirai T, Yokoyama A, Uo M, Tamura Y, Kawasaki T. Effect of spark plasma sintering pressure on the properties of functionally graded implant and its biocompatibility. *Jpn. Soc. PowderMetall.*49(2002)1063–1069.
- [Wat.04] Watari F, Yokoyama A, Omori M, Hirai T, Kondo H, Kawasaki M Uo T. Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Compos.Sci.Technol.*64(2004)893–908.
- [Wet.96] Wetherhold R C, Seelman S, Wang J. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation. *Compos.Sci.Technol.*56 (10)(1996)91-104.
- [Woo.01] Woo J, Meguid S A. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct*; 38(42):7409–21,2001.
- [Woo.06] Woo J, Meguid S A, Ong L S. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J.SoundVib.*289(2006)595–611.
- [Wood.12] Woodward B, Kashtalyan M. Performance of functionally graded plates under localized transverse loading. *Compos.Struct.*94(7)(2012) 2254–2262.
- [Wos.05] Wosko M, Paszkiewicz B, Piasecki T, Szyszka A, Paszkiewicz R, Tlaczala M. Applications of functionally graded materials in optoelectronic devices. *Opt. Appl.* 35(2005)663–667.
- [Wu.04] Wu L. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Compos. Struct.* 64 (2004) 211-218.
- [Xin.98] Xing A, Jun Z, Chuanzhen H, Jianhua Z. Development of an advanced ceramic tool material functionally gradient cutting ceramics, *Mater.Sci. Eng.* A248(1998)125–131.
- [Xio.05] Xiong H, Kawasaki A, Kang Y, Watanabe R. Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat. Technol.* 194 203, 2005.

- [Xia.09] Xiang S, Wang K, Ai Y, Sha Y and Shi H. Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories. *Compos.Struct.* 91(1), 31-37,2009.
- [Xia.11] Xiang S, Jin Y, Bi Z, Jiang S, Yang M. An-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates, *Compos. Struct.* 93 (2011) 2826-2832.
- [Yag.14] Yaghoobi H, Valipour M S, Fereidoon A, Khoshnevisrad P. Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM. *Steel and Composite Structures*, (2014), 17(5), 753-776.
- [Yah. 15] Yahia S A, Ait Atmane H, Houari M S A and Tounsi A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Struct. Eng. Mech.*, (2015), 53(6), 1143-1165.
- [Yam.03] Yamaguchi M, III-V compound multi-junction solar cells : present and future, *Sol.EnergyMater.Sol.Cells*75(1-2) (2003)261-269.
- [Yan.02] Yang J, Shen H S. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments, *J. Sound Vib.* 255 (2002)579–602.
- [Yan.03] Yang J, Shen H S. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non Linear Mech*; 38:467–82.2003.
- [Yan.07] Yang J, Xiang H J. A three-dimensional finite element study on the biomechanical behavior of an FGBM dental implant in surrounding bone. *J. Biomech.* 40(2007)2377–2385.
- [Yaz.18] Yazid M, Heireche H, Tounsi A, Bousahla A A, Houari M S A. A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium. *Smart Structures and Systems.*, **21**(1), 15-25(2018).
- [You.18] Youcef D O, Kaci A, Benzair A, Bousahla A A, Tounsi A. Dynamic analysis of nanoscale beams including surface stress effects. *Smart Structures and Systems.*, **21**(1), 65-74(2018).
- [You.18] Younsi A, Tounsi A, Zaoui F Z, Bousahla A A, Mahmoud S R. Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *Geomechanics and Engineering*, (2018), 14(6), 519-532.
- [Zao.19] Zaoui F Z, Ouinas D, Tounsi A. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos. Part B*, 2019, 159, 231-247.
- [Zen.04] Zenkour AM. Analytical solution for bending of crossply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Compos.Struct.*65(2004)367-379.
- [Zen.05] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses. *Int J Solids Struct* 2005;42 (18):5224-42.
- [Zen.06] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl.Math.Model.*30(2006)67-84.

- [Zen.08] Zenkour AM, Alghamdi NA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Mater Sci* 2008;43(8):2574-89.
- [Zen.09] Zenkour AM. The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Int J Appl Mech* 2009;1(04):667-707.
- [Zen.10] Zenkour A M and Alghamdi N A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2010),17(6), 419-432.
- [Zen.10a] Zenkour AM, Alghamdi NA. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates. *J Sandwich Struct Mater* 2010;12(1):7-46.
- [Zen.10b] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct* 2010;93(1):93-102.
- [Zen.13] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandw Struct Mater* 2013;15(6):629-56.
- [Zen.13a] Zenkour A M. et Sobhy M. Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations. *Aerosp. Sci. Technol.*, (2013), 29(1), 7–17.
- [Zem.15] Zemri A, Houari M S A, Bousahla A A, Tounsi A. A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 2015, 54(4), 693-710.
- [Zha.15] Zhang D G, Zhou H M. Mechanical and thermal post-buckling analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on non-linear elastic foundations, *Thin-Walled Struct.*89(2015)142–151.
- [Zhu.01] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S. Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater. Chem.Phys.*68(1–3) (2001) 130–135.
- [Zid.17] Zidi, M, Houari M S A, Tounsi A, Bessaim A, Mahmoud S R. A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams. *Struct. Eng. Mech.*, 2017, 64(2), 145-153.
- [Zid.14] Zidi M, Tounsi A, Houari M S A et Bég O A. Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Sci. Tech.*, 2014, 34, 24-34.
- [Zin.18] Zine A, Tounsi A, Draiche K, Sekkal M, Mahmoud S R. A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells. *Steel and Composite Structures*, 26(2), 125-137, 2018.