N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
ACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

HAMIDI Nesrine

Domaine : Mathématique informatique
Filière : Mathématique
Intitulé de la formation : Probabilités et Statistique appliquées

Intitulée

Estimation fonctionnelle de la fonction de répartition conditionnelle et ses applications

Soutenue le…………………….

Devant le jury composé de :

Président :

M^r RABHI Abbès Professeur à l'université de S.B.A.

Examinateurs :

M^r MADANI Fethi M.C.A . à l'université de Saida.

Directeur de thèse :

M^r MECHAB Boubaker M.C.A . à l'université de S.B.A.

Co-Directeur de thèse :

M^r BENAISSA Samir Professeur à l'université de S.B.A.

Année universitaire : 2019/2020

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail

*En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Pr **Boubaker MECHAB,** pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour sa patience, son suivie et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail, je remercie aussi mon Co-encadreur Pr **Samir BENAISSA** pour l'aide et les idées qu'il m'a accordé au cours de ma recherche.*

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury.

*Monsieur le président Dr **Abbes RABHI**, Vous m'avez honoré d'accepter avec grande sympathie de siéger parmi notre jury, Veuillez trouver ici l'expression de notre grand respect et nos vifs remerciements.*

*Monsieur l'examinateur **Fethi MADANI**, je vous remercie pour votre estimable participation dans l'élaboration de ce travail. .*

Mes remerciements aussi tous les enseignants du laboratoire des statistiques probabilités de l'université de Sidi Bel-Abbés ainsi que mes collègues de la faculté des Sciences Exactes de l'université de Sidi Bel-Abbés.

Un précieux remerciement est destiné à mon cher époux, Ilias BENSAID, pour sa présence, sa confiance, son soutien, sa patience, pour avoir su trouver les mots justes dans les moments les plus difficiles.

Mon plus grand remerciement est pour mes parents et mes beaux-parents, merci de m'avoir donné le goût des études, pour m'avoir encouragé, et donné cette exigence de moi-même indispensable dans le milieu scientifique.

Bien entendu, ces remerciements ne seraient complets sans la mention de mes frères, mes beaux frères et mes belles sœurs ainsi pour mes neveux et nièces.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à toutes la famille Bensaid et Hamidi ainsi à mes amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **6**

1 Introduction **7**

1.1 Analyse des données fonctionnelles 7

1.1.1 Variables fonctionnelles 8

1.2 Fonction de répartition et ses dérivées 9

1.2.1 Quantile Conditionnel 10

1.2.2 Densité et densité conditionnelle 11

1.2.3 Fonction de hasard 12

1.3 Estimation par régression relative 13

1.4 Données ergodiques 15

1.5 Données incomplètes 16

1.5.1 Données manquantes 16

1.5.2 Données censurées 18

1.5.3 Estimateur de Kaplan-Meier pour la fonction de survie 20

1.6 Contribution de la thèse 21

1.7 Plan de travail 23

2 Estimation of the conditional quantile for functional stationary ergodic data with responses missing at random **34**

2.1 Introduction 36

2.2 Estimation Model 37

2.2.1 The kernel estimation of the conditional quantile 37

2.2.2 The kernel estimation of conditional quantile adapted to MAR response 38

2.3 Assumptions 39
2.4 Main Results 41
2.4.1 The asymptotic normality 41
2.5 Appendix 43

3 Asymptotic properties of the conditional hazard function estimator from censored functional ergodic data 61
3.1 Introduction 63
3.2 Estimation Model 64
3.3 Hypotheses 66
3.4 Main Results 68
3.4.1 Asymptotic normality 68
3.5 Technical lemmas 69
3.6 Appendix 72

4 Nonparametric estimation of the relative error in functional regression and censored data 87
4.1 Introduction 89
4.2 Estimation Model 90
4.2.1 A nonparametric estimator of the relative error regression . . 90
4.2.2 The relative error regression under a random censorship 91
4.3 Assumptions and main results 93
4.3.1 The almost complete convergence 93
4.3.2 Asymptotic normality 94
4.4 Numerical study 96
4.5 Confidence bands 98
4.6 Appendix 99

Conclusion et Perspectives 111
4.7 Conclusion 111
4.8 Perspectives 112

Bibliographie générale 113

Résumé

Les données incomplètes peuvent entraîner des problèmes d'analyse qui conduiraient à des conclusions erronées et cela est dû à des questions sans réponses ou des variables sans observations. Dans ce cadre, la problématique abordée dans cette thèse est d'étudier la fonction de répartition conditionnelle et ses dérivées ainsi que la régression relative lorsque les données sont incomplètes.

Au commencement, nous allons étudier les propriétés asymptotiques d'un estimateur du quantile conditionnel construit à partir de l'inverse de la fonction de répartition conditionnelle. Nous établissons la convergence presque sûre de l'estimateur proposé quand la variable réponse est manquante au hasard et la variable explicative est fonctionnelle ainsi nous étudions sa normalité asymptotique. Notons que dans cette partie les données sont supposées stationnaires et ergodiques.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'étude de la fonction de hasard conditionnelle pour des données ergodiques et lorsque la variable réponse est censurée. Dans cette section nous estimons par la méthode du noyau trois paramètres : la densité conditionnelle, la fonction de répartition conditionnelle et la fonction de hasard conditionnelle. Nous établissons pour ces paramètres les mêmes propriétés asymptotiques que la première partie mais dans le cas de censure.

Une autre méthode d'estimation est abordée dans la troisième partie, où nous construisons à partir de la minimisation de l'erreur relative moyenne l'estimateur de la régression dans le cas d'une réponse censurée sachant une variable explicative fonctionnelle. La convergence presque sûre ainsi que la normalité asymptotique sont étudiés. À la fin de cette partie, nous réalisons une simulation pour comparer entre la régression classique et la régression relative.

Abstract

Incomplete data can cause serious problems with the analysis leading to draw wrong conclusions and this is due questions without answers or variables without observations. In this context, the problem addressed in this thesis is to study the conditional distribution function and its derivatives as well as the relative regression when the data are incomplete.

Initially, we will study the asymptotic properties of a conditional quantile estimator constructed from the inverse of the conditional distribution function. We establish the almost sure convergence of the proposed estimator when the response variable is missing at random and the explanatory variable is functional as well as we study its asymptotic normality. Note that in this part, the data are assumed to be stationary and ergodic.

In the second part, we are interested in the study of the conditional hazard function for ergodic data and when the response variable is censored. In this section we estimate by the kernel method three parameters : the conditional density, the conditional distribution function and the conditional hazard function. We establish for these parameters the same asymptotic properties as the first part in the case of censorship.

Another estimation method is discussed in the third part, where we construct from the minimization of the mean squared relative error the regression estimator in the case of a censored response given a functional explanatory variable. The almost sure convergence as well as the asymptotic normality are studied. At the end of this part, we perform a simulation to compare classical regression with relative regression.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Analyse des données fonctionnelles

Ces dernières années, la communauté scientifique s'intéressent a une certaine branche de la statistique qui a fait l'objet de plusieurs études dans lesquels les observations peuvent être assimilées à des courbes ou à des surfaces. Cette nouvelle branche nommée statistique fonctionnelle a connu un grand potentiel en terme d'applications dans des domaines variés : la biométrie, la météorologie, la chimiométrie, la médecine et dans de nombreux autres domaines, en raison du développement des outils informatique et leurs capacités de stockage.

Historiquement, les premiers ouvrages considérant la statistique fonctionnelle dans un context paramétrique sont les monographies de Ramsay et Silverman (2002, 2005) ([82], [83]), ils ont étudié des méthodes statistiques pour des variables fonctionnelles, ainsi le livre de Bosq (2000)[10] dans le cadre de séries chronologiques. Dans le context non-paramétrique, les premiers ouvrages faisant référence en la matière sont ceux de Ferraty et Vieu (2000)[40], ils ont considéré un modèle non-paramétrique fonctionnelle dans des espaces vectoriels semi-normé, étendue en (2002) [41] pour la prévision en série chronologique. En (2004) [43] les même auteurs ont construit un estimateur a noyau pour la régression et obtiennent des vitesses de convergence pour cet estimateur ainsi une solution au problème de fléau de la dimension, ce phénomène bien connu en statistique non paramétrique concerne la dégradation considérable de la qualité de l'estimation lorsque la dimension augmente, ainsi il rend les vitesses de convergence très faibles. La solution de ce problème est la mesure de probabilité des petites boules ou la propriété de concentration qui intervient dans les vitesses

de convergence. En 2004, Dabo-Niang et Rhomari [24] ont étudié la convergence en norme L^p de l'estimateur de la régression. Masry (2005) [69] a établit la normalité asymptotique d'un estimateur a noyau de la régression pour des observations dépendantes. Ferraty et al. (2006)[35] ont montré la convergence presque complète pour un estimateur a double noyau de la fonction de distribution conditionnelle. La monographie de Ferraty et Vieu (2006) [44] offre un large choix d'étude concernant le comportement asymptotique des estimateurs à noyau pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et ses dérivées, le mode (avec ou sans conditionnement), la médiane (avec ou sans conditionnement) ainsi que le quantile conditionnel, cet ouvrage est devenu une référence en statistique non paramétrique tant sur le plan pratique que sur le plan théorique. En 2007, Dabo-Niang et Laksaci [21] ont montré la convergence en norme L^p pour un estimateur a noyau du mode conditionnel, l'estimation non paramétrique a noyau de la fonction de hazard conditionnelle a été abordé par Ferraty et al. (2008) [38] dans le cas des données complète i.i.d et α-mélangeantes ainsi dans le cas des données censurées i.i.d et dépendantes. En 2012, Dabo-Niang et Laksaci [23] ont estimé le quantile conditionnel pour des variables fonctionnelles dépendantes. Nous revoyons a Ferraty (2011)[33] pour son ouvrage sur les avances récentes et les sujets connexes dans l'analyse des données fonctionnelles.
Pour une littérature plus récente, nous nous referons à Hsing et Eubank (2015) pour des concepts mathématiques clés et des résultats pertinents pour le développement théorique de l'analyse des données fonctionnelles, ainsi le livre de Ould Said et al. (2015) [74] pour des contributions de recherche originales sur les statistiques fonctionnelles.

1.1.1 Variables fonctionnelles

Dans l'analyse fonctionnelle les données collectées ne sont pas des variables réelles ou vectorielles mais des courbes, ainsi un très grand nombre de variables peuvent être observées pour l'etude d'un même phénomène. Dans ce cas, l'un des principaux intérêts pour les statistiques a haute dimension est le nombre croissant de situation impliquant chaque jour un grand nombre de variables observées.

Definition 1.1 *On appelle modèle fonctionnels, tout modèle prenant en compte au moins une variable aléatoire fonctionnelle (v.a.f)*

Definition 1.2 (Ferraty et Vieu (2006)) *Une variable aléatoire est dite fonctionnelle si ses valeurs sont dans un espace de dimension infinie. Une observation d'une variable fonctionnelle $\mathcal{X}$ est appelée donnée fonctionnelle.*
$\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t : t \in T\}$,
si $T \subset \mathrm{IR}$ *: on observe une courbe,*
si $T \subset \mathrm{IR}^2$ *: la variable fonctionnelle représente une image.*

Definition 1.3 *L'ensemble de données fonctionnelles $X_1...X_n$ est l'observation de n variables fonctionnelles $\mathcal{X}_1...\mathcal{X}_n$ identiquement distribuée comme $\mathcal{X}$.*

1.2 Fonction de répartition et ses dérivées

L'estimation de la fonction de répartition joue un role important dans l'estimation d'autres paramètres fonctionnel, Geffroy (1947)[46], Gasser et al. (1998) [45] ont été les premiers a fournir des travaux sur la loi de probabilité des variables fonctionnelles. Cadre (2001) [12] a étudié la médiane d'une distribution pour une variable fonctionnelle à valeur dans un espace de Banach. d'autre auteurs se sont intéressés à ce paramètre, citons, par exemple, Hall et Heckman (2002) [49]. Lorsque les données sont disponible sous forme de couple (X_i, Y_i) on peut chercher à estimer la fonction de répartition conditionnelle qui est définie comme suit :

Definition 1.4 *Soient X et Y deux variable aléatoires définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$ la fonction définie par :*

$$F^x(y) = \mathbb{P}(Y \leq y | X = x).$$

Exemple
On suppose que les deux variables aléatoires W et Z suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ et que $X = W$ et $Y = W + Z$, tel que X et Y sont deux variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes.
Alors la fonction de répartition conditionnelle de Y/X est :

$$\mathrm{IP}(Y \leqslant y/X = x) = \mathrm{IP}(W + Z \leqslant y/W = x) = \mathrm{IP}(x + Z \leqslant y) = 1 - e^{-(y-x)}.$$

Le schéma suivant donne la courbe de la fonction trouvée précédemment :

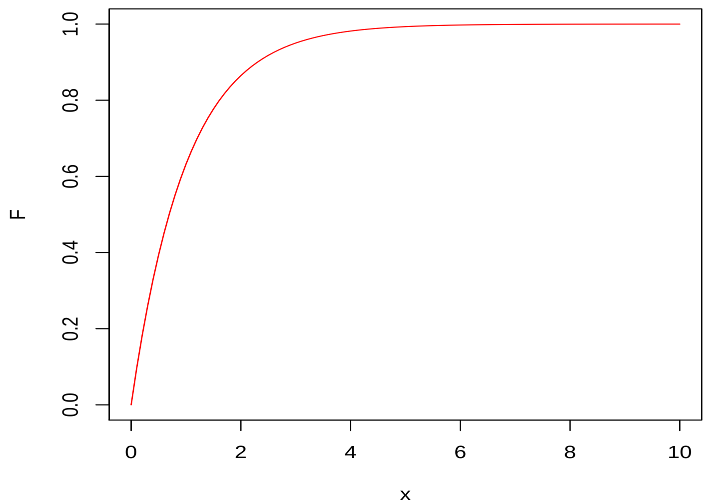

FIGURE 1.1 : Fonction de répatition conditionnelle.

Dans un cadre fonctionnel, Ferraty et al. (2006) [35] ont introduit l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle en construisant un estimateur à double noyau ainsi ils ont étudié la vitesse de convergence presque complète de cet estimateur dans le cas d'observations indépendante et identiquement distribuées, le cas d'observations dépendantes a été étudié par Ferraty et al. (2005) [34]. La fonction de répartition conditionnelle a été abordé par plusieurs auteurs comme une étude préliminaire de l'estimation des quantiles conditionnels.

1.2.1 Quantile Conditionnel

Definition 1.5 (Quantile conditionnel) *Soient X et Y deux variables aléatoires continues et $\alpha \in]0,1[$. Le quantile conditionnel d'ordre α noté t_α de la variable Y sachant $X = x$ est défini par :*

$$t_\alpha = F^{-1}(\alpha/x) = \inf\{y|F(y/x) \geq \alpha\}.$$

$F(y/x)$ désigne la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$.

En effet L'estimation des quantiles conditionnels est utilisée pour la construction d'intervalles predictive, la détermination des courbes de référence ou comme outil de prévision lorsqu'il apparaît que la régression n'est pas très adaptée à certaines situations pour mieux prévoir l'impact de la variable explicative X sur la variable réponse Y. Nous renvoyons à Cardot et al.(2004)[14], ils ont construit par la méthode de fonctions splines un estimateur des quantiles conditionnels, Ezzahrioui et Ould-Said (2005, 2006) ont étudié la normalité asymptotique de cet estimateur dans les deux cas (i.i.d et dépendants), en (2005) Ferraty et al. [37] ont établi la convergence presque complète avec vitesse d'un estimateur du quantile conditionnel pour des données α-mélangeantes puis ils ont appliqué leur approche à la série chronologique EL Niño. Une autre méthode d'estimation pour les quantiles conditionnels a été proposée par Laksaci et al. (2009)[60] ou ils ont étudié la convergence et la normalité asymptotique pour une approche en norme L^1. Dans le cas de variables fonctionnelles spatialement dépendante, Laksaci et Maref (2009) [63] ont établi la vitesse de convergence presque complète pour un estimateur à noyau du quantile conditionnel. Récemment, Charlier et al. (2015)[15] ont construit un estimateur non-paramétrique des quantiles conditionnels de Y sachant$X$ en utilisant la quantification optimale.

1.2.2 Densité et densité conditionnelle

L'estimateur de la densité a connu un grand intérêt en statistique, ce paramètre fonctionnel intervient dans les estimateurs du mode, de la fonction de hasard... L'estimateur de Parzen-Rosenblatt est défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right).$$

où K est un noyau et h un paramètre de lissage nommé fenêtre. La première version de l'estimateur précédent fut donnée par Rosenblatt (1956)[84] où il a utilisé le noyau uniforme et il a étudié l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de la densité pour des observations univariées indépendantes et identiquement distribuées. Parzen (1962) généralise le résultat de Rosenblatt pour une vaste classe de noyaux et établit aussi la normalité asymptotique. Cacoullos (1966)[13] traite le cas multivarié. Delecroix (1979) [25] établit la convergence presque sûre et la convergence en moyenne quadratique pour l'estimateur de la densité et celui de la densité conditionnelle. Geffroy (1974) [46], Jacob et oliveira (1995) ont étudié le comportement asymptotique de l'histogramme, Wertz (1981) établit la convergence presque sure de l'estimateur à noyau dans un espace abstrait localement compact, Dabo-Niang (2002)[20] établit

la convergence en moyenne quadratique, la convergence presque sure et la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de la densité de probabilité.
La densité conditionnelle est un moyen de prévision qui offre une alternative à la régression non paramétrique. En statistiques fonctionnelles, la densité conditionnelle a été introduite par Ferraty et al.(2006) [35], ils ont construit un estimateur pour ce paramètre fonctionnel et ont établi la convergence presque complète pour cet estimateur à noyau ainsi que pour le mode conditionnel dans le cas d'observations i.i.d. Ces auteurs ont appliqué leurs résultats aux données issues de l'industrie agro-alimentaire. En (2007), Dabo-Niang et Laksaci [21] ont montré sous des conditions de régularités de la densité conditionnelle et la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau du mode conditionnel. la détermination des termes dominants de l'erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle a été obtenue par Laksaci (2007) [59]. Dabo-Niang en collaboration avec laksaci (2010) [22] ont généralisé leurs résultats de l'estimateur à noyau du mode conditionnel dans le cas i.i.d au cas α-mélangeant. En (2013) Laksaci et al. [62] ont résolu la question du choix du paramètre de lissage dans l'estimation de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle. Didi et louani (2013a) [28] ont obtenu des résultats de convergence presque sûre, ponctuelle et uniforme avec des vitesses de convergence non paramétrique et des preuves basées sur des différence de martingale.

Remarque 1.1 *Notons que l'estimateur par la méthode du noyau permet d'avoir des estimateurs réguliers et faciles à utiliser mais cette technique reste sensible aux valeurs aberrantes.*

1.2.3 Fonction de hasard

Definition 1.6 *Soient X et Y deux variables aléatoires continues, la fonction de hasard conditionnelle est définie comme suit :*

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Où f^x(resp. $F^x(y)$) désigne la fonction de densité conditionnelle (resp. la fonction de répartition conditionnelle).

La fonction de hasard ou taux de hasard ou bien taux de défaillance, est un paramètre fonctionnel fréquemment utilisé dans l'étude de la fiabilité ou dans l'analyse

de survie. Elle mesure la probabilité qu'un objet survive à un certain moment en fonction de sa survie à une date antérieure (t). Notons que l'usage de ce paramètre est appliqué à beaucoup de branche de recherche sous des noms légèrement différents, y compris l'analyse de la fiabilité (ingénierie), l'analyse de la durée (économie), et l'analyse de l'histoire de l'évènement (sociologie).
L'estimation de la fonction de hasard a été abordée par de nombreux auteurs, les premiers à avoir estimé cette fonction en analyse non paramétrique furent Watson et Leadbetter (1964a [91], 1964b [92]), ils ont proposé un estimateur pour lequel ils établissent la propriété de convergence asymptotiquement sans biais. Concernant le cas fonctionnel, les précurseurs sur le sujet sont Ferraty et al. (2008)[38], ils ont donné la convergence presque complète (avec vitesse) pour l'estimation à noyau de la fonction de hasard dans le cadre des données complètes i.i.d (respectivement dépendantes), ainsi que dans le cadre des données censurées i.i.d (respectivement mélangeantes). Quintela-del-Río(2010) [79] a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al. (2008). L'auteur applique ces résultats asymptotiques sur des données sismiques. L'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle dans le cas des observations spatialement dépendantes a été étudié par Laksaci et Mechab (2010) [61].
Récemment, nous renvoyons à Rabhi et al. (2015) [80], ils ont établi l'estimation du maximum de la fonction de hasard conditionnelle sous des conditions de dépendance. Une autre approche concernant cette fonction a été étudié par Massim et Mechab (2006) [68], ils ont considéré l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle en utilisant la méthode locale linéaire où ils ont établi la convergence presque complète de l'estimateur proposé.

1.3 Estimation par régression relative

La fonction de régression est une méthode parmi plusieurs d'autres pour étudier la co-variabilité entre deux variables aléatoires. Plus précisément, cette méthode permet de prédire le lien entre une variable explicative X et une variable réponse Y. Cette fonction est définie par l'expression suivante :

$$Y = r(X) + \epsilon.$$

La littérature concernant ce domaine est très dense dans le cas non paramétrique, nous referons à (voir parmi d'autres : Ferraty et Vieu (2004)[43], Ferraty et Vieu (2006)[44], Ferraty et al. (2007)[36], Rachdi et Vieu (2007)[81]...).
La fonction $r(x)$ est généralement estimée en minimisant le critère suivant :

$$E[(Y - r(X))^2 | X = x].$$

Dans la présence de valeurs aberrantes, ce critère peut ne pas convenir et entraîner des résultats inappropriés car il ne tient pas en compte le poids de la variable réponse Y. Précisément, il traite toutes les variables de la même manière. Pour cela, afin de surmonter ce problème en propose d'estimer la fonction r en utilisant une autre approche basée en minimisant le critère de l'erreur quadratique relative suivant :

$$E\left[\left(\frac{Y - r(x)}{Y}\right)^2 |X\right].$$

Cette approche a été développé par Jones et al.(2008) [51]. Notons que c'est une mesure plus significative en présence de valeurs aberrantes par rapport à l'approche classique.
Concernant la littérature de ce modèle, dans le cas paramétrique nous renvoyons à Narula et Wellington (1977)[71], Shen et al. (1985)[85], Bernhard et Stahlecker (2003) [9] et Yang et Ye (2013)[95]. Cependant, la littérature dans le cas non paramétrique est restreinte, nous nous referons à l'article de Jones et al. (2008)[51], ils ont établi la convergence en moyenne quadratique d'un estimateur à noyau ainsi pour un autre estimateur construit par la méthode locale linéaire dans le cas où les observations sont indépendantes identiquement distribuées (i.i.d). En (2016), Mechab et laksaci [70] ont traité la convergence presque complète et la normalité asymptotique d'un estimateur à noyau de la régression relative pour des variables aléatoires associées. Dans la même année, Attouch et al. (2016) [4] ont obtenu la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur de la régression relative dans le cas des données spatiales. Pour les données fonctionnelles, nous renvoyons à Demongeot et al.(2016)[26] et à Chahad et al. (2017)[17], ces derniers ont étudié l'estimateur de la régression relative par la méthode locale linéaire dans le cas fonctionnel. Récemment, en (2018) Altendji et al. [1] ont établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique pour l'estimateur à noyau de la régression relative quand la variable explicative est fonctionnelle et la variable

réponse est tronquée à gauche.

1.4 Données ergodiques

Le terme "ergodique" est issu des mots grecs (ergon, odos) qui signifient (travail, chemin), il a été choisi par Ludwing Boltzmann alors qu'il travaillait sur un problème en mécanique statistique. La branche des mathématiques qui étudie les systèmes ergodiques est connue sous le nom de la théorie ergodique. Cette théorie est une hypothèse fondamentale de la physique statistique. plus précisément, elle a connu un développement dans l'utilisation des systèmes dynamiques, la théorie du chaos ainsi dans le traitement du signal. Les chercheurs Birkhoff et Von Neumann (1931) se sont intéressé à cette théorie et ont développé deux des plus importants théorèmes sur ce sujet. Nous renvoyons au livre de Krengel (1985) [55] pour une série de résultats sur la théorie ergodique.

En ce qui concerne la statistique non paramétrique, la littérature sur ce sujet est restreinte. En 1997, Ould-Said [72] a étudié la convergence uniforme presque sure d'un processus stationnaire ergodique d'un estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Laib et Ould-Said (2000)[58] ont obtenu la convergence uniforme de l'estimateur de Collomb et Hardle (1986) [19] pour un modèle auto-régressif d'un processus stationnaire ergodique.

Dans le cas des données fonctionnelles, les précurseurs sont Laib et Louani (2010) [56], ils ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau de la régression dans un cas dépendant moins faible qui est le cas d'ergodicité, ils ont établi la convergence uniforme presque complète ainsi que la normalité asymptotique. En (2011)[57], ces mêmes auteurs ont abordé la vitesse de convergence presque sure et uniforme de l'estimateur de la fonction de régression. Nous renvoyons à Gheriballah et al.(2013)[47], ils ont obtenu la convergence presque complète pour l'estimateur de la régression robuste ainsi que la normalité asymptotique dans le cas d'observation ergodique fonctionnelle. deux estimateurs récursifs sur le quantile conditionnel ont été étudié par Benziadi et al.(2016)[7], le premier est obtenu en inversant l'estimateur à noyau de la fonction de répartition conditionnelle et le second est obtenu en utilisant l'approche robuste ainsi ils ont établi la convergence presque complète pour ces deux estimateurs lorsque les observations sont échantillonné à partir d'un processus ergodique fonctionnel. Dans la même année Ardjoun et al. [2] ont considéré un estimateur récursif pour le mode conditionnel sous une condition de dépendance ergodique.

1.5 Données incomplètes

Une durée de vie est une variable aléatoire généralement positive qui désigne le temps écoulé jusqu'à la survenue d'un événement précis, cet évènement peut être "décès", "panne" ou "échec" selon le domaine d'étude. En médecine, cette variable peut par exemple : constituer effectivement la durée de survie après un infarctus ou encore le temps de rémission d'une certaine maladie. En fiabilité, la durée de vie d'un élément sera le temps entre la mise en marche et la première panne de celui-ci ou le temps entre deux pannes successives d'un appareil.
La présence de données incomplètes est une des caractéristiques de l'analyse des durées de vie. En effet, ces données proviennent du fait qu'on n'a pas accès à toute l'information c'est à dire la variable d'intérêt Y n'est pas complètement observée pour toutes les données de l'échantillon $\{T_i, 1 \leq i \leq n\}$.
Les données peuvent être incomplètes pour de nombreuses raisons différentes : données manquantes, données censurées ou des données tronquées.

1.5.1 Données manquantes

En statistique, on parle de données manquantes ou bien valeurs manquantes lorsqu'on n'a pas d'observations pour une variable donnée pour un individu donné. Le concept de ces valeurs est important à comprendre afin de gérer les données avec succès. Des solutions différentes peuvent être choisies, les chercheurs pourront retirer les variables ou les individus présentant des données manquantes ou imputer des valeurs aux données manquantes ou encore développer des méthodes qui permettent de mener l'étude en présence de ce manque.
La non-réponse se produit lorsque la personne interrogée ne répond pas à certaines questions en raison du stress, de la fatigue, par manque de connaissances ou en raison de la sensibilité des questions. Ce manque de réponses serait considéré comme des valeurs manquantes.
Les différents types de données manquantes

- les données manquantes complètement au hasard.

- les données manquantes au hasard.

- les données manquantes non aléatoirement.

Dans ce mémoire on s'intéresse seulement au deuxième type de données manquantes qui est : les données manquantes au hasard (en anglais : Missing At Random (MAR)).
Ce type de données se produit lorsque le manque peut être expliqué par des variables sur lesquelles vous avez des informations complètes. Le manque au hasard est une hypothèse qu'il est impossible de vérifier sur le plan statistique, mais il y a des cas où c'est raisonnable ou non.

Exemple 1.1 *Nous avons le tableau suivant :*

	Sexe	*Age*	*Revenu*
1	*homme*	*moins de 30 ans*	*faible*
2	*femme*	*moins de 30 ans*	*faible*
3	*femme*	*30 ans ou plus*	*élevé*
4	*femme*	*30 ans ou plus*	*donnée manquante*
5	*femme*	*30 ans ou plus*	*élevé*

On peut prévoir la valeur manquante basée sur une autre donnée.
Dans cet exemple : un modèle prédictif simple est que le revenu peut être prédit à partir du sexe et de l'âge. Regardons le tableau, on note que notre valeur manquante est pour la femme âgée de 30 ans ou plus, notons que l'autre femme qui a le même âge à un revenu élevé, à partir de là, on peut prévoir que la valeur manquante doit être élevée.

La littérature concernant les données manquantes aléatoirement est plutôt développée. Cheng (1994) [18] a employé une estimation non paramétrique de la moyenne fonctionnelle avec des données MAR, dans le livre de Little et Rubin (2002) [67] sur l'analyse statistique avec données manquantes, les auteurs attribuent une valeur pour chaque donnée manquante et analysent les résultats comme s'ils étaient complets. En 2011, Efromovich [29] estime la régression non paramétrique avec des prédicteurs manquant au hasard.
Dans le cas des données fonctionnelles, les premiers à avoir étudié ce cas sont Ferraty et al. (2013) [39], ils ont considéré deux types d'estimateurs pour la réponse

moyenne, le premier est basé sur la moyenne des valeurs prédites et le deuxième est une adaptation fonctionnelle de l'estimateur d'Horvitz-Thompson. Ling et al. (2015) [65] ont construit un estimateur à noyau pour la régression pour des données ergodiques fonctionnelles et lorsque la variable réponse est MAR, sous certaines conditions, ils obtiennent les propriétés asymptotiques de l'estimateur proposé. L'estimateur du mode conditionnel dans le cas de données ergodiques fonctionnelles avec des réponses manquantes au hasard a été établi par Ling et al. (2016) [66]. Récemment, en 2017, Bachir Bouiadjra [5] construit un estimateur du type noyau de la fonction de hasard conditionnelle quand les données sont fonctionnelles et pour ce type de données incomplètes.

1.5.2 Données censurées

La censure est le phénomène le plus couramment rencontré, en analyse de survie et c'est le fait de ne pas observer la variable d'intérêt T parce que l'évènement ne s'est pas produit. les modèles de censure se rencontrent dans de nombreuses situations : en biostatistiques, en médecine, en biologie, en fiabilité, ils trouvent également leurs applications en assurance ou même en finance.
Historiquement pour l'analyse des données médicales, nous référons à Wei et al. (1989) [93] qui ont considéré la méthode de régression pour des données de temps de défaillance incomplètes multivariée. Perdonà et Louzada-Neto (2008) [77] ont étudié un modèle de distribution de Weibull modifié et ont présenté une application à la fois à un ensemble de données sur les enfants contaminés par le VIH et au problème de classification erronée de la cause du décès.
En mathématiques, Padgett (1988) [75] a estimé la fonction de densité et la fonction de hasard dans le cas d'échantillon censuré, aussi voire parmi d'autres Lecroutre et Ould-Said (1995) [64], Vankeilegom et Veraverbeke (2001) [88]. Pour des développements récents, nous renvoyons à Ould Said et Cai (2005) [73], ils ont établi la convergence uniforme de l'estimateur non paramétrique de la fonction du mode pour des données censurées. En 2008, Ferraty et al .[38] ont étudié un estimateur à noyau de la fonction de hasard et ont démontré certaines propriétés lorsque les variables sont censurées et dépendantes, nous referons aussi à Khardani et al. (2009)[53] ils ont étudié quelques propriétés asymptotiques pour un estimateur à noyau lisse du mode conditionnel sous la censure aléatoire. Chaouch et Khardani (2015)[16] ont aussi étudié l'estimation fonctionnelle du quantile conditionnelle en combinant le

cas de réponse censurée et celui de l'ergodicité.

Remarque 1.2 *Il y'a la censure a droite, a gauche et par intervalle.*

- Si au lieu d'observer les variables $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ qui nous intéressent, on n'observe T_i que lorsque $\{T_i < C(\text{variable de censure})\}$ sinon on sait seulement que $\{T_i > C\}$ alors on parle de censure à droite.
- Si l'individu a déjà subi l'évènement avant d'être observé (on observe C et non T_i) et que l'on sait que $\{T_i < C\}$, il y'a censure à gauche.
- L'évènement est dit censuré par intervalle, si au lieu de l'observer on sait seulement qu'il est observé entre deux dates $\{C_1 < T_i < C_2\}$.

On distingue trois types de censure :

Censure de type 1 (Censure fixe) : Nous sommes dans le 1^{er} cas de la remarque décrite précédemment où C est une valeur constante fixée. Ce type de censure décrit la situation où un test se termine à une certaine période et nous savons que les objets/individus restant n'ont pas encore échoué à ce moment. Le temps de censure est fixe et le nombre d'objets /individus ayant échoué est une variable aléatoire.

Exemple 1.2 *Nous démarrons avec 100 ampoules électriques et terminons l'expérience après un certain temps.*

Censure de type 2 : On observe les durées de vie de n patients jusqu'à ce que r d'entre eux soient décédés et on s'arrête à ce moment. si on ordonne les $T_1, T_2, ..., T_n$ on obtient les statistiques d'ordre $T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(n)}$. La date de la censure est alors $T_{(r)}$ et on observe $Y_{(1)} = T_{(1)}, Y_{(2)} = T_{(2)}, ..., Y_{(r)} = T_{(r)}, Y_{(r+1)} = T_{(r)}, ..., Y_{(n)} = T_{(r)}$. où $Y_i = T_i \wedge T_(r)$.

Exemple 1.3 *(En fiabilité) : pour tester la fiabilité d'un système complexe, on met en état de fonctionnement n systèmes du même type, et on s'arrête lorsque la r^{ime} panne est observée.*

Censure de type 3 (Censure aléatoire) : La censure du type 3 généralise la censure du type 1 au cas où le temps de censure est une variable aléatoire. Plus précisément, soient un échantillon de durée de survie $(T_{(1)}, ..., T_{(n)})$ et un second échantillon indépendant composé de variable positive $(C_{(1)}, ..., C_{(n)})$. On dit qu'il

y'a censure de type 3, si au lieu d'observer $(T_1, ..., T_n)$ on observe $(Y_1, \delta_1)...(Y_n, \delta_n)$ avec $Y_i = T_i \wedge C_i$ et $\delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}$.
- $\delta_i = 1$ Si $T_i \leq C_i \Longrightarrow Y_i = T_i$ (évènement observée),
- $\delta_i = 0$ Si $T_i > C_i \Longrightarrow Y_i = C_i$ (censure).

Exemple 1.4 *(Koziol et Green (1976)[54]) Un essai clinique est réalisé sur* 211 *individus atteints du cancer de la prostate traités par oestrogène (hormone). À la fin de l'étude, 90 meurent du cancer de la prostate, 105 meurent d'autres causes et 16 sont encore vivants. Les censurés à droite sont les 105+16 (=121) individus qui ne sont pas morts du cancer de la prostate (objet de l'étude).*

1.5.3 Estimateur de Kaplan-Meier pour la fonction de survie

Soient $\{T_i, 1 \leq i \leq n\}$, un échantillon de v.a positives i.i.d de fonction de répartition F inconnue et de densité f. $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$ un échantillon de variable aléatoire de censure positives i.i.d et de fonction de répartition G inconnue. Les C_i sont supposées être indépendantes des T_i.
Dans le modèle de censure aléatoire on observe les couples $(Y_1, \delta_1)...(Y_n, \delta_n)$ où $Y_i = T_i \wedge C_i$ et $\delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}$.
Les (Y_i) sont de fonction de répartition H définie par :

$$\begin{aligned} H(t) = 1 - \mathbb{P}(Y > y) = 1 - \mathbb{P}(T \wedge C > y) &= 1 - \mathbb{P}(T > y)\mathbb{P}(C > y) \\ &= 1 - \bar{F}(y)\bar{G}(y), \qquad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Un estimateur naturel de la survie de la variable d'intérêt T dans le cas des données complètes est la survie empirique définie par $S_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{T_i > t\}}$.
Dans le cas de données censurées, on fait appel à l'estimateur de Kaplan Meier (EKM). S'il n'y a pas d'ex-aequo (c'est a dire des temps de décès identiques pour plusieurs sujets), on peut donc le définir sous la forme suivante :

$$\hat{S}_n(t) = \bar{F}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \dfrac{\delta_{(i)}}{n - i + 1}\right)^{\mathbb{I}\{Y_{(i)} < t\}} & \text{si } t \leq Y_{(n)}, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Où $Y_{(1)} < Y_{(2)} < ... < Y_{(n)}$ représentent les statistiques d'ordre associées à Y_i.
Pour la survie de la variable de censure l'estimateur de Kaplan Meier est défini de

la même manière par :

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1-\delta_{(i)}}{n-i+1}\right)^{\mathbb{I}\{Y_{(i)}<t\}} & \text{if } t \leq Y_{(n)}, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.3 *Les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Kaplan-Meier ont été étudié par plusieurs auteurs voir (Breslow et Crowley (1974)[11], Peterson (1977)[78], Gill(1982)[48] et le livre de Shorack et wellner (1986)[86] pour plus de détails.*

1.6 Contribution de la thèse

La statistique non paramétrique fonctionnelle est un domaine d'actualité qui intéresse plusieurs statisticiens et dont il a fait l'objet de plusieurs travaux grâce à son champ d'application très large. Notons aussi que l'une des motivations de cette statistique est la solution qu'elle apporte pour le problème du fléau de la dimension.
Le thème principal abordé dans cette thèse porte sur l'estimation fonctionnelle de la fonction de répartition conditionnelle et les paramètres qui en découlent, comme le quantile conditionnel, la densité conditionnelle et la fonction de hasard conditionnelle. Dans ce travail de thèse, nous avons apporté une contribution dans le cadre de la statistique fonctionnelle pour des données incomplètes.
Une courte présentation des résultats obtenus dans ce mémoire est donnée :
Résultats : Estimation du quantile conditionnel pour des données ergodiques et manquantes au hasard

Theorem 1.1 *Sous certaines hypothèses, nous avons*

$$|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)| = O_{a.s}\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.s}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Theorem 1.2 *Sous certaines conditions portant sur l'estimateur, nous obtenons*

$$\sqrt{n\phi(h)}(\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)) \xrightarrow{L} N(0, \gamma^2(x, t_\alpha(x))) \quad quand \quad n \to \infty. \tag{1.1}$$

Où

$$\gamma^2(x, t_\alpha(x)) = \frac{M_2}{M_1^2}\frac{F^x(t_\alpha(x))(1 - F^x(t_\alpha(x)))}{p(x)f_1(x)(f^x(t_\alpha(x)))^2},$$

et $\xrightarrow{L}$ *signifie la convergence en loi.*

La démonstration et les hypothèses nécessaires de ces résultats, sont présentées au chapitre 2.

Résultats : Les propriétés asymptotiques de la fonction de hasard conditionnelle à partir des données fonctionnelles ergodiques

Theorem 1.3 *Sous la condition d'ergodicité, les hypothèses de régularité et les conditions de lipschitz, nous avons :*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t) - h^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}\right).$$

Theorem 1.4 *Sous certaines hypothèses, nous avons*

$$\sqrt{nh_H\phi(h)}(\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t) - h^{\mathcal{X}}(t)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_h^2(\mathcal{X}, t)) \quad quand \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

avec

$$\sigma_h^2(\mathcal{X}, t) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{h^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{G}(t) f_1(\mathcal{X})(1 - F^{\mathcal{X}}(t))} \int_{\mathbb{R}} {H^{(1)}}^2(v)dv,$$

et $\xrightarrow{L}$ *signifie la convergence en loi.*

Les preuves de ces théorèmes sont démontrées au chapitre 3.

Résultats : Estimation non paramétrique fonctionnelle de la régression relative pour des données censurées

Theorem 1.5 *Sous certaines hypothèses, nous avons*

$$|\widehat{r}_n(x) - r(x)| = O(h^{k_1}) + O(h^{k_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right). \tag{1.3}$$

Theorem 1.6 *Sous certaines hypothèses détaillées dans le chapitre 4, nous avons*

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}} (\widehat{r}_n(x) - r(x)) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1) \quad quand \quad n \to \infty.$$

avec

$$\sigma^2(x) = \frac{M_2}{M_1^2} \left(g_2(x) + r^2(x) g_4(x) - 2r(x) g_3(x)\right).$$

Où $\xrightarrow{L}$ *signifie la convergence en loi.*

Les preuves de ces théorèmes sont détaillées dans le chapitre 4.

1.7 Plan de travail

L'étude développée dans cette thèse porte essentiellement sur les propriétés asymptotiques de la fonction de répartition conditionnelles et les applications qu'il en dérive, l'estimation de notre fonction et par la méthode de noyau lorsque la variable réponse est réelle sachant une variable explicative fonctionnelle.
Ce travail est constitué de 4 chapitres :
le premier chapitre est un chapitre introductif dont nous présentons d'une part les différents thèmes abordés ainsi que les différentes notations et définitions nécessaires pour la compréhension de cette thèse et d'une autre part nous allons donner un contexte bibliographique sur la fonction de distribution conditionnelle et ses dérivées.
Une estimation du quantile conditionnel est abordée dans le deuxième chapitre où nous construisons par la méthode du noyau un estimateur pour le quantile en inversant l'estimateur de la fonction de répartition conditionnelle. Sous la condition ergodique proposée par Laib et Louani (2010[56],2011 [58]) et des hypothèses de régularité, nous établissons la convergence presque sûre lorsque la variable réponse est manquante au hasard conditionnée par une variable explicative fonctionnelle ainsi la normalité asymptotique de l'estimateur proposé.
Dans le troisième chapitre, nous étudions les propriétés asymptotiques de la fonction de hasard conditionnelle à partir des données ergodiques fonctionnelles censurées. Ce chapitre est structuré comme suit : nous commençons par construire l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle pour une variable réponse censuré. Plus précisément, la construction de cet estimateur se fait à partir de la fonction de répartition conditionnelle et la fonction de densité conditionnelle ainsi que l'estimateur de Kaplan-Meier, puis nous citons les hypothèses nécessaires pour énoncer nos principaux résultats qui se présentent par la convergence presque sûre et la normalité asymptotique, les démonstrations des résultats sont données à la fin.
Le quatrième chapitre porte sur la construction de l'estimateur de l'opérateur régression en minimisant le critère de l'erreur quadratique relative. Nous établissons la convergence presque sûre de l'estimateur proposé pour des données incomplètes.

Plus précisément, lorsque la variable réponse est censurée. Ainsi, nous traitons la normalité asymptotique en appliquant le théorème central limite de Lyapunov. Une étude de simulation est réalisée à la fin de ce chapitre, nous comparons la performance de l'échantillon fini basée sur l'erreur quadratique moyenne entre la régression classique et la régression d'erreur relative.
Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion du travail effectué et quelques perspectives de recherche.

Bibliographie

[1] Altendji, B., Demongeot, J., Laksaci, A. and Rachdi M. (2018). Functional data analysis : estimation of the relative error in functional regression under random left truncation model. *Journal of Nonparametric Statistics.* **30**, 1-19.

[2] Ardjoun, F. Z., Hennani, L. and Laksaci, A. (2016). A récursive kernel estimate of the functional modal regression under ergodic dependence condition. *Journal of Statistical theory and practice.* **10** :3, 475-496.

[3] Attouch, M. and Bouabça, W. (2013). The k-nearest neighbors estimation of the conditional mode for functional data.*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.***58**, no. 4, 393–415.

[4] Attouch, M., Laksaci, A. and Messabihi, N. (2015). Nonparametric relative error regression for spatial random variables. *Statistical Papers.* **58(4)**, 987–1008.

[5] Bachir Bouiadjra, H. (2017). Conditional hazard function estimate for functional data with missing at random. *International journal of statistics & economics.* **18**(4), 45-58.

[6] Baíllo, A. and Grané, A.(2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response.*Journal of Multivariate Analysis.***100(1)**, 102–111.

[7] Benziadi, F., Laksaci, A. and Tebboune F. (2015) Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data.*Communications in Statistics - Theory and Methods.* **45** :11, 3097-3113.

[8] Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. (2011). Local linear regression for functional data. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics.* **63 :5**, 1047–1075.

[9] Bernhard F. A. and Stahlecker P. (2003). Relative squared error prediction in the generalized linear regression model. *Statist. Papers.* **44**, 107-115.

[10] Bosq, D. (2000). Linear Processes in Functional Spaces, *Springer-Verlag*, New-York.

[11] Breslow, N. and Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and productlimit estimates under random censorship. *Ann. Statist.* **2**, 437–443.

[12] Cadre, B. (2001). Convergent estimators for the L1-median of Banach valued random variables, *Statistics* **35**, 509-521.

[13] Cacoullos, Theophilos. (1966). Estimation of a multivariate density. *Ann. Inst. Statist. Math.* **18**, p. 179–189.

[14] Cardot, H., Crambes, C. and Sarda, P. (2004). Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **339**, 141-144.

[15] Charlier, I., Paindaveine, D. and Saracco, J. (2015). Conditional quantile estimation through optimal quantization. *J. Statist. Plann. Inference.* **156**, 14–30.

[16] Chaouch, M. and Khardani, S. (2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *Journal of Nonparametric Statistics.* **27** :1, 65-87,

[17] Chahad, A., Ait-Hennani, L. and Laksaci, A. (2017). Functional local linear estimate for functional relative-error regression. *Journal of Statistical Theory and Practice.* **11**(4), 771–789.

[18] Cheng, P.E. (1994). Nonparametric estimation of mean functionals with data missing at random. *J. Amer. Stat. Assoc.* **89**, 81–87.

[19] Collomb, G. and Härdle, W. (1986). Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction : Kernel regression estimation from dependent observations. *Stoch. Proc. Appl.* **23**, 77-89.

[20] Dabo-Niang, S.(2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux diffusions. *C. R. Acad. Sci., Paris.* **334**, No.3, 213-216.

[21] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* **51** , 27-42.

[22] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2010). Note on conditional mode estimation for functional dependent data. *Statistica.* **70**, 83-94.

[23] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2012). Nonparametric Quantile Regression Estimation for Functional Dependent Data. *Communications in Statistics - Theory and Methods.* **41 :7**, 1254-1268

[24] Dabo-Niang, S. and Rhomari, N. (2003). Estimation non paramétrique de la régression avec variable explicative dans un espace métrique. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris.* **336**, 75-80.

[25] Delecroix, M. (1979). Sur l'estimation des densités d'un processus stationnaire et mélangeant. *Publ. U.E.R. Math. Pures Appl.* IRMA, **1(4)**, exp. no. I, 24. Seminar on Mathematical Statistics.

[26] Demongeot, J., Hamie, A., Laksaci, A. and Rachdi, M. (2016). Relative-error prediction in nonparametric functional statistics : Theory and practice. *Journal of Multivariate Analysis.***146**, 261-268.

[27] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application. *Statistics.* **47(1)**, 26–44.

[28] Didi, S. and Louani, D. (2013a). Consistency results for the kernel density estimate on continuous time stationary and dependent data. *Journal of Statistics & Probability Letters.* **83 :4**, p. 1262-1270.

[29] Efromovich, S. (2011). Nonparametric Regression with Predictors Missing at Random. *Journal of American Statistical Association.* **106**, 306-319.

[30] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2005). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space, Technical report, LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale.

[31] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2006). Asymptotic results of the kernel estimator of the conditional quantile in the normed space under α-mixing hypothesis, Technical report, LMPA, Univ. du Littoral Côte d'Opale.

[32] Fan, J. (1992). Design-adaptive nonparametric regression. *J. Amer. Statist. Assoc.* **87**, Pages 998–1004.

[33] Ferraty, F.(2011)*Recent Advances in Functional Data Analysis and Related Topics.* Springer. New York.

[34] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **340**, 389-392.

[35] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P.(2006). Estimation some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

[36] Ferraty, F., Mas, A. and Vieu, P.(2007). Advances in nonparametric regression for functional variables. *Aust. New Zeal. J. of Satist.***49**, 1-20.

[37] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2005) Conditional quantiles for functionally dependent data with application to the climatic El Nino Phenomenon. *Sankhyia* **67**, 378–399

[38] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **53**, 1-18.

[39] Ferraty,F., Sued, F. and Vieu, P. (2013). Mean estimation with data missing at random for functional covariables.*Statistics.* **47** :4, 688-706.

[40] Ferraty, F. and Vieu, P. (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés.*C. R. Acad. Sci.*, Paris,**330**, 139-142.

[41] Ferraty, F. and Vieu, P. (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data.*Comput. Statist. and Data Anal.* **17**, 545-564.

[42] Ferraty, F. and Vieu, P. (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. *Comput. Statist. and Data Anal.* **44**, 161-173.

[43] Ferraty, F. and Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* **16**, 111-127.

[44] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice.* Springer Series in Statistics. Springer. New York.

[45] Gasser, T., Hall, P. and Presnell, B.(1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. Roy. Statist. Soc.* , Ser **B**, 60, 681-691.

[46] Geffroy, J. (1947). Sur l'estimation d'une densité dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér.* **A 278**, 1449-1452.

[47] Gheriballah, A., Laksaci, A. and Sekkal, S. (2013) Nonparametric M -regression for functional ergodic data. *Stat. Probab. Lett.***83** , 902-908.

[48] Gill, R. D. (1980). *Censoring and stochastic integrals.* Mathematical center tracts, 124, Mathematics centrum, Amesterdam.

[49] Hall, P. and Heckman, N.E. (2002). Estimating and depicting the structure of a distribution of random functions. *Biometrika.* **89**, No.1, 145-158.

[50] Hsing, T. and Eubank, R. (2015).*Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators.* Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester.

[51] Jones M. C., Park H., Shinb K. Vines S. K. and Jeong S.O. (2008). Relative error prediction via kernel regression smoothers. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138(10)**, 2887-2898.

[52] Kara-Zaitri, L., Laksaci, A., Rachdi, M. and Vieu, P. (2016). Data-driven kkNN estimation in nonparametric functional data analysis. *J. Multivariate Analysis.* **153**, 176-188.

[53] Khardani, S., Lemdani, M. and Ould Said, E. (2009). Some asymptotic properties for a smooth kernel estimator of the conditional mode under random censorship. *Journal of the Korean Statistical Society.* **39**, 455–469.

[54] Koziol, J.A. and Green, S.B. (1976). A Cramer-Von Mises statistic for randomly censored data. *Biometrika.***63**, 465–474.

[55] Krengel, U.(1985). *Ergodic Theorems.* Walter de Gruyter & Co., Berlin.

[56] Laib, N. and Louani, D. 2010. Nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties. *J. Multivariate Anal.* **101**, 2266–2281.

[57] Laib, N. and Louani, D. 2011. Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data.*J. Statist. Plann. Inference***141**, 359–372.

[58] Laïb, N. and Ould Saïd, E. (2000). A robust nonparametric estimation of the autoregression function under an ergodic hypothesis. *Canad. J. Statist.***28**, 817-828.

[59] Laksaci, A. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. *Ann. I.S.U.P.* **51**, 69-80.

[60] Laksaci, A., Lemdani, M. and Ould-Saïd, E. (2009). A generalized L^1- approach for a kernel estimator of conditional quantile with functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.* **79**, 1065-1073.

[61] Laksaci, A. and Mechab, B. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.* **55**, 35-51.

[62] Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013).Kernel Conditional Density Estimation When the Regressor is Valued in a Semi-Metric Space.*Communications in Statistics - Theory and Methods.* **42 :19**, 3544-3570.

[63] Laksaci, A. and Maref, F. (2009). Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **347**, 1075–1080.

[64] Lecoutre, J. P. and Ould-Said, E. (1995). Hazard rate estimation for strong mixing and censored processes. *J. Nonparametr. Statist.***5**, 83–89.

[65] Ling, N., Liang, L. and Vieu, P. (2015). Nonparametric regression estimation for functional stationary ergodic data with missing at random. *J. Statist. Plann. Inference.* **162**, 75-87.

[66] Ling, N., Liu, Y. and Vieu, P. (2016). Conditional mode estimation for functional stationary ergodic data with responses missing at random. *Statistics.***50**(5), 991–1013.

[67] Little, R. and Rublin, D. (2002). *Statistical analysis with missing data.* 2nd ed, New York, John Wiley.

[68] Massim, I. and Mechab, B. (2016). Local linear estimation of the conditional hazard function. *International Journal of Statistics & Economics* **17**, 1-11.

[69] Masry, E. (2005). Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. *Stoch. Proc. and their Appl.* **115**, 155-177.

[70] Mechab, W. and Laksaci, A. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron.***74**, 75–97.

[71] Narula S.C. and Wellington, J.F. (1977) Prediction, linear regression and the minimum sum of relative errors. *Technometrics.* **19**, 185-190.

[72] Ould-Said, E. (1997) A note on ergodic processes prediction via estimation of the conditional mode function. Scand. J. Statist.**24**, 231–239.

[73] Ould Saïd, E. and Cai, Z. (2005). Strong uniform consistency of nonparametric estimation of the censored conditional mode function. *Journal of Nonparametric Statistics.* **17**, 797–806.

[74] Ould Said, E., Ouassou, I. and Rachdi, M. (2015) *Functional Statistics and Applications*, Springer Series in Statistical Theory and Methods, Springer International Publishing Switzerland.

[75] Padgett, W.J. (1988). Nonparametric estimation of density and hazard rate functions when samples are censored. *In P.R. Krishnaiah and C.R. Rao (Eds.), Handbook of Statistics.* **7**, Elsevier Science Publishers, pp. 313–331.

[76] PARZEN, E.(1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* , p. 1065–1076.

[77] PERDONÁ, G.C and LOUZADA-NETO, F. (2008). Interval estimation for the parameters of the modified Weibull distribution model with censored data : A simulation study. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional.* **9**, 437–446.

[78] PETERSON, A. V. (1977). Expressing the Kaplan-Meier estimator as a function of subsurvival function. *J. Amer. statist. Assoc.***72**, 854–858.

[79] QUINTELA-DEL-RÍO, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions. *J. Nonparametr. Stat.* **20**, 413-430.

[80] RABHI, A., DJEBBOURI, T., and HAMMOU, Y.(2015). Nonparametric estimation of the maximum of conditional hazard function under dependence conditions for functional data. *Nonparametric estimation of the maximum of conditional hazard function under dependence conditions for functional data.***10**, 777-794.

[81] RACHDI, M. and VIEU, P.(2007). Nonparametric regression for functional data : automatic smoothing parameter selection. *J. Statist. Plann. and Inference.* **137**, 2784-2801.

[82] RAMSAY, J. and SILVERMAN, B. (2002).*Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies.* Springer Series in Statistics, Springer, New York.

[83] RAMSAY, J. and SILVERMAN, B. (2005).*Functional Data Analysis.* Springer Series in Statistics. Springer, New York.

[84] ROSENBLATT, M.(1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function.*Ann. Math. Statist.***27**, p. 832–837,

[85] SHEN V.Y., YU T. and THEBAUT, S.M.(1985). Identifying error-prone software an empirical study.*IEEE Trans. Software Eng.* **11**, 317-324.

[86] SHORACK, G. R. and WELLNER, J.A . (1986). *Empirical processes with applications to statistics.* Wiley, New York.

[87] Stone, C.J. (1977). Consistent nonparametric regression. With discussion and a reply by the author. *Ann. Statist.***5**, no. 4, 595–645.

[88] Van Keilegom, I. and Veraverbeke, N. (2001). Hazard rate estimation in nonparametric regression with censored data. *Ann. Inst. Statist. Math.***53**, 730–745.

[89] Wang, L. (2016). Local linear estimation for regression models with locally stationary long memory errors.*J. Korean Statist. Soc.***45**, no. 3,381–394.

[90] Wang, J., Ma, W., Fan, G. and Wen, L. (2015). Local linear quantile regression with truncated and dependent data. *Statist. Probab. Lett.* **96**, 232–240.

[91] Watson, G.S. (1964a). Smooth regression analysis. *Sankhya.***26**, 359-372.

[92] Watson, G.S. and Leadbetter, M.R. (1964b). Hazard analysis. I. *Biometrika.* **51**, 175-184.

[93] Wei, L.J., Lin, D.Y. and Weissfeld, L. (1989). Regression analysis of multivariate incomplete failure time data by modeling marginal distributions. *Journal of the American Statistical Association.* **84**, 1065–1073.

[94] Wertz, W. Nonparametric estimators in abstract and homogeneous spaces.*Lecture notes in Mathematics. University of Technology*, Wien. (1981).

[95] Yang, Y. and Ye, F. (2013). General relative error criterion and M-estimation. *Front. Math. China.* **8**, 695–715.

Chapitre 2

Estimation of the conditional quantile for functional stationary ergodic data with responses missing at random

Ce chapitre fait l'objet d'une publication accepté dans le Journal of Probability and Statistical Science.

Estimation of the conditional quantile for functional stationary ergodic data with responses missing at random

Nesrine Hamidi[1], **Boubaker Mechab**[2]
Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
University of Djillali Liabes
BP 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria.
e-mail : [1] nisou_93@hotmail.com, [2] mechaboub@yahoo.fr

Abstract

The purpose of this paper consists in estimating the conditional quantile by the kernel method, in the case of response missing at random and when explanatory variable takes its values in a space of infinite dimension. Under the ergodicity condition, we study the asymptotic properties of the proposed estimator by establishing its rate of almost sure convergence as well as its asymptotic normality by taking into account the missing data.

Keywords : Conditional quantile, functional ergodic data, kernel estimation, missing at random.

AMS 2010 Subject Classification : 62G05, 62G20.

2.1 Introduction

The estimation of the conditional quantile is a very important subject in statistics. This estimate is used for the construction of predictive intervals, the determination of reference curves or as a forecasting tool when it appears that the regression is not very adapted to certain situations in order to better predict the impact of explanatory variable X on the response variable Y.
Historically, Stone [26] seems to be the first one approached the estimation of the conditional quantile, he obtained the convergence in probability of an estimator based on the empirical estimation of the conditional distribution function. In 1989, Samanta [25] established the asymptotic normality and the uniform convergence of the kernel estimator of the conditional quantile in the case i.i.d. (see also Roussas [24], Berlinet et al. [2]).
In the case when explanatory variable is functional, the first results were obtained by Cardot et al. [3]. They had constructed by the spline method a conditional quantile estimator, seen as a continuous linear form defined on a Hilbert space. The nonparametric approach of this model has been considered by Ferraty et al. [11]. They have studied the almost complete convergence rate of the kernel estimator in the independent, identically distributed (i.i.d.) case. Ezzahrioui and Ould-Saïd ([9], [10]) studied the asymptotic normality of this estimator in both cases (i.i.d. or strong mixing conditions). Recently, an alternative estimate based on L^1-method was suggested by Laksaci et al. ([17], [18]). Dabo-Niang and Laksaci [6] considered the convergence in L^p-norm of nonparametric quantile regression under the mixing hypothesis.
We consider firstly, the functional estimation of the conditional quantile under the condition of ergodicity. This latter condition is a fundamental hypothesis of statistical physics for a good approximation between theory and experience. It is important in the study of Markov chains, stationary processes and for numerical learning. This type of dependency is used when the usual mixing does not satisfy certain conditions. The literature in ergodic functional data is still limited. further motivation are discussed in Laib and Louani ([15], [16]) where details defining the ergodic property of processes are also given. Recently, several contributions have been studied under the condition of ergodicity (see Benziadi et al. [1]) they considered a recursive model to estimate the conditional quantile for ergodic data, also (Chaouch and Khardani [4]) studied the problem of quantile estimation for censored data under the condi-

tion of ergodicity.
Secondly, data missing at random (MAR) occurs when the missing is not random but when this missing can be explained by variables in which information is complete. Missing data at random are a kind of incomplete data which are performed when the data-gathering is carried out in an incorrect way, when it has errors during the seizure or because of the non-response. The literature in multivariate setting for MAR samples is more developed (see among others Chen [5], Little and Rubin [21] and Efromovich [8]). The literature in the case of functional data concerning MAR sample is only contributed by Ferraty et al. [13].
Inspired by all the paper above, The aim of our work is to contribute to the research on the functional nonparametric model by studying the estimation of the conditional quantile when the data are both MAR and ergodic. The organization of the paper is as follows : we present the model of estimate in section 2, Section 3 is devoted to some hypotheses on the proposed model based on stationary ergodic data. In section 4 we present the main result of our work. Finally, the proofs of the auxiliary results are given in section Appendix.

2.2 Estimation Model

2.2.1 The kernel estimation of the conditional quantile

Let $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ be a sequence of strictly stationary ergodic processes with identically distribution as (X, Y), When X takes values in a semi-metric space $(\mathcal{F}, d)$ and Y are real-valued random variables. For all $x \in \mathcal{F}$, the conditional distribution function $F^x(y)$ of Y given $X = x$ is defined as follows :

$$F^x(y) = \mathbb{P}\left(Y \leq y | X = x\right).$$

The conditional quantile, of the order $\alpha \in (0,1)$, is defined by :

$$t_\alpha(x) = \inf\{y \in R : F^x(y) \geq \alpha\}.$$

$\forall x \in \mathcal{F}$, $F^x(y)$ admits a unique conditional quantile. Let $\alpha \in (0,1)$, the α th conditional quantile, denoted $t_\alpha(x)$, satisfies the following equation :

$$F^x(t_\alpha(x)) = \alpha. \tag{2.1}$$

We will define an estimator of the conditional distribution function $F^x(y)$ of Y given $X = x$ is defined as follows :

$$\widetilde{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Where K is the kernel, H is a distribution function and $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) is a sequence of positive real numbers such that $\lim_{n\to +\infty} h_K = \lim_{n\to +\infty} h_H = 0$. This estimator given by equation (2.2) has been introduced in Ferraty and Vieu [12].
Then, it naturally follows an estimator of conditional quantile $\widetilde{t_\alpha}$ defined as follows :

$$\widetilde{t_\alpha}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \widetilde{F}^x(y) \geq \alpha\},$$

which satisfies

$$\widetilde{F}^x(\widetilde{t_\alpha}(x)) = \alpha. \tag{2.3}$$

2.2.2 The kernel estimation of conditional quantile adapted to MAR response

In the case of missing response, we consider a random sample of incomplete data $\{(X_i, Y_i, \delta_i),\ i = 1, ..., n\}$, when all the X_i are observed and $\delta_i = 1$ if Y_i is observed, and $\delta_i = 0$ otherwise. The MAR assumption implies that δ and Y are conditionally independent given X. Such that

$$\mathbb{P}(\delta = 1|X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\delta = 1|X = x) = p(x).$$

Rosenbaum and Rubin (1983) propose this assumption. The new functional estimator of $F^x(y)$ adapted to MAR response can be defined as :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

In order to simplify the notations, we pose :

$$\Delta_i(x) = K(h_K^{-1}d(x, X_i)) \quad \text{et} \quad H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i)).$$

We can write

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\widehat{F}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x},$$

where

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \Delta_i(x) H_i(y), \tag{2.5}$$

and

$$\widehat{F}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \Delta_i(x). \tag{2.6}$$

Then, the new estimator of the conditional quantile can be defined as

$$\widehat{t_\alpha}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \widehat{F}^x(y) \geq \alpha\},$$

which satisfies

$$\widehat{F}^x(\widehat{t_\alpha}(x)) = \alpha. \tag{2.7}$$

2.3 Assumptions

To establish the almost surely convergence of $\widehat{F}^x(y)$, we need to include the following assumptions :

The functional ergodic data is carried out by the following consideration : for $i = 1, ..., n$, we put $\mathcal{F}_i$ is the σ-field generated by $((X_1, Y_1), ..., (X_i, Y_i))$, we pose $\mathcal{G}_i$ is the σ-field generated by $((X_1, Y_1), ..., (X_i, Y_i), X_{i+1})$, and write $\phi_x(h) = \mathbb{P}(d(x, X) \leq h) = \mathbb{P}(X \in B(x, h))$ and $\phi_x^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \mathbb{P}(d(x, X) \leq h|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{P}(X \in B(x, h)|\mathcal{F}_{i-1})$ for any fixed $x \in \mathcal{F}$ and $h > 0$, where $B(x, h) = \{y|d(x, y) \leq h, y \in \mathcal{F}\}$ and we suppose that the strictly stationary ergodic process $(X_i, Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfies

- $(H1)$ K is a non-negative bounded kernel of class C^1 over its support $[0, 1]$. The derivative $K' < 0$, $|\int_0^1 (K^j)'(u)du| < \infty$ for $j = 1, 2$.

- $(H2)$ There exists a sequence of non negative random functional $(f_{i,1}(x))_{i\geq 1}$ a.s. bounded by a sequence of deterministic quantities $(b_i(x))_{i\geq 1}$ accordingly, a sequence of random functions $(g_{i,x})_{i\geq 1}$. a deterministic non-negative bounded functional f_1 and a non-negative real function ϕ tending to zero as its argument tends goes to zero. Such that

(i) $\phi_x(h) = \phi(h)f_1(x) + o(\phi(h)),\ as\ h \longrightarrow 0.$

(ii) For any $i \in N$, $\phi_x^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \phi(h)f_{i,1}(x) + g_{i,x}(h)$ with $g_{i,x}(h) = o_{a.s}(\phi(h))$ as $h \to 0$. $g_{i,x}(h)/\phi(h)$ a.s. bounded and $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} g_{i,x}^{j}(h) = o_{a.s}(\phi^j(h))$ as $n \to \infty$, $j = 1, 2$.

(iii) $n^{-1}\sum_{i=1} f_{i,1}^{j}(x) \longrightarrow f_1^j(x)$ a.s as $n \longrightarrow \infty$, $j = 1, 2$.

(iv) There exists a non-decreasing bounded function τ_0 such that. uniformly in $t \in [0,1]$, $\phi(ht)/\phi(h) = \tau_0(t) + o(1)$ as $h \downarrow 0$ and $\int_0^1 (K^j)'(t)\tau_0(t)dt < \infty$ for $j \geq 1$.

(v) $n^{-1}\sum_{i=1} b_i(x) \longrightarrow D(x) < \infty$, as $n \longrightarrow \infty$.

$(H3)$ For any $m \geq 1$, $\mathbb{E}(|H_i^{(l)}(y)|^m|\mathcal{G}_{i-1}) = \mathbb{E}(|H_i^{(l)}(y)|^m|X_i)$, a.s. for $l = 0, 2$.

$(H4)$ The conditional distribution function $F^x(y)$ is differentiable, continuous and it has a first derivative uniformly bounded, denoted $f^x(y)$ and satisfies :
$\forall\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\forall\ (x_1, x_2) \in N_{x_1} \times N_{x_2}$, there exist some constants $C, b_1, b_2 > 0$, such that, for $j = 0, 1$, we have

$$|F^{x_1^{(j)}}(y_1) - F^{x_2^{(j)}}(y_2)| \leq C(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}).$$

$(H5)$ $p(x)$ is continuous in a neighbourhood of x, such that $0 < p(x) < 1$.

$(H6)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^b h_H = \infty$, $\forall\ b > 0$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n\phi(h_K)} = 0$.

$(H7)$ (i) $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $|H(y_1) - H(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$ and $\int |t|^{\beta_2} H^{(1)}(t)dt < \infty$.

(ii) $H^2(t)$ is Hölder continuous of order one.

Comments on the hypotheses : The condition $(H1)$ is very standard in non-parametric function, the assumption $(H2) - (H3)$ involves the ergodic nature of the data and its relationship with the small ball techniques and the phenomenon of concentration used in this paper. This latter hypothesis has been adopted by Laib and Louani [15]. The condition $(H4)$ represents a certain property of regularity which is stronger than the continuity, this hypothesis is the Lipschitz's condition. Assumptions $(H5) - (H7)$ are technical conditions.

2.4 Main Results

Proposition 2.1 *Under assumptions* $(H1)-(H4)$ *and* $(H6)$, *we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\epsilon,t_\alpha(x)+\epsilon]}|\widehat{F}^x(y)-F^x(y)| = O_{a.s}\left(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}\right)+O_{a.s}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Theorem 2.1 *Under hypotheses* $(H1)$-$(H7)$, *we have*

$$|\widehat{t_\alpha}(x)-t_\alpha(x)| = O_{a.s}\left(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}\right)+O_{a.s}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

2.4.1 The asymptotic normality

Proposition 2.2 *Assume that the assumptions* $(H1)-(H4)$, $(H6)$ *and* $(H7)(i)$ *hold true, if in addition*

$$\sqrt{n\phi(h)}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.8}$$

Then, we have

$$\sqrt{n\phi(h)}(\widehat{F}^x(y)-F^x(y)) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2(x,y)) \quad as \quad n\to\infty. \tag{2.9}$$

Where $\xrightarrow{D}$ *means the convergence in distribution.*

$$\sigma^2(x,y)=\frac{M_2}{M_1^2}\frac{F^x(y)(1-F^x(y))}{p(x)f_1(x)},$$

with $M_j=K^j(1)-\int_0^1(K^j)'(t)\tau_0(t)dt$ *for* $j=1,2$.

Theorem 2.2 *Under assumptions of Proposition* 2.2 ,$(H5)$ *and* $(H7)$, *we have*

$$\sqrt{n\phi(h)}(\widehat{t_\alpha}(x)-t_\alpha(x)) \xrightarrow{D} N(0,\gamma^2(x,t_\alpha(x))) \quad as \quad n\to\infty. \tag{2.10}$$

Where

$$\gamma^2(x,t_\alpha(x))=\frac{M_2}{M_1^2}\frac{F^x(t_\alpha(x))(1-F^x(t_\alpha(x)))}{p(x)f_1(x)(f^x(t_\alpha(x)))^2}.$$

Proof of Proposition 2.1 : We start by writing

$$\widehat{F}^x(y)-F^x(y)=\widehat{B}_n(x,y)+\frac{\widehat{R}_n(x,y)}{\widehat{F}_D^x}+\frac{\widehat{Q}_n(x,y)}{\widehat{F}_D^x}. \tag{2.11}$$

Where

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_n(x,y) &= (\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x).\\
\widehat{B}_n(x,y) &= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D^x} - F^x(y).\\
\widehat{R}_n(x,y) &= -\widehat{B}_n(x,y)(\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x).
\end{aligned}$$

With

$$\begin{aligned}
\bar{F}_N^x(y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\delta_i\Delta_i(x)H_i(y)|\mathcal{F}_{i-1}].\\
\bar{F}_D^x &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\delta_i\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}].
\end{aligned}$$

Thus, Proposition 2.1 is a consequence of the following lemmas, where their proofs are given at the Appendix.

Lemma 2.1 *Under hypotheses $(H1)-(H2)$ and $(H5)-(H6)$, we have*

$$\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right), \tag{2.12}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{F}_D^x = \lim_{n\to\infty}\bar{F}_D^x = p(x). \quad a.s. \tag{2.13}$$

Lemma 2.2 *Assume that hypothesis $(H1)-(H4)$ and $(H6)$ are satisfied, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\epsilon, t_\alpha(x)+\epsilon]}|\widehat{B}_n(x,y)| = O_{a.s}(h_K^{b1}+h_H^{b2}).$$

Lemma 2.3 *Suppose that $(H1)-(H3)$and $(H7)$ hold true, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\epsilon, t_\alpha(x)+\epsilon]}|\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)| = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right). \tag{2.14}$$

Lemma 2.4 *Under assumptions of Lemma* 2.3

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\epsilon,t_\alpha(x)+\epsilon]} |\widehat{Q}_n(x,y)| = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Lemma 2.5 *Under the conditions of Theorem* 2.1 *, we have*

$$\widehat{t_\alpha}(x) \longrightarrow t_\alpha(x). \quad a.s. \tag{2.15}$$

Lemma 2.6 *Under hypotheses* $(H1)-(H7)$*, we have*

$$\exists\ \delta > 0 \quad such\ that \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x))| < \delta] < \infty. \tag{2.16}$$

2.5 Appendix

Lemma 2.7 *Let* $(Z_n)_n \geq 1$ *be a sequence of real martingale differences with respect to the sequence of* $\sigma - fields(\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, ...Z_n))_{n\geq 1}$ *, when* $\sigma(Z_1, Z_2, ...Z_n)$ *is the* $\sigma - fields$ *generated by the random variables* $Z_1, Z_2, ...Z_n$*. Set* $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$*. For any* $p \geq 2$*,* $n \geq 1$ *assume that there exist some non-negative constants* C *and* d_n *such that* $\mathbb{E}(Z_n^p|\mathcal{F}_{n-1}) \leq C^{p-2}p!d_n^2$*, a.s. Then, for any* $\epsilon > 0$*,*

$$\mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2(D_n + C\epsilon)}\right\},$$

where $D_n = \sum_{i=1}^n d_i^2$*.*

Proof See Laib and Louani [16] and references therein.

Lemma 2.8 *For any real numbers* $1 \leq j$ *and* $1 \leq k$*. as* $n \to \infty$*.*

(i) $(1/\phi(h))\mathbb{E}[\Delta_i^j(x)|\mathcal{F}_{i-1}] = M_j f_{i,1}(x) + O_{a.s}(g_{i,x}(h)/\phi(h))$,

(ii) $(1/\phi(h))\mathbb{E}[\Delta_1^j(x)] = M_j f_1(x) + o(1)$,

(iii) $(1/\phi^k(h))(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^k = M_1^k f_1^k(x) + o(1)$,

whereM_j *is defined in Proposition* 2.2

Proof See the proof of Lemma 1 in Laib and Louani [15].

Proof of Lemma 2.1

Similar to the proof of Lemma 5.3 of N. Ling, Y. Liu and P. Vieu [20]

Firstly, we denote

$$\begin{aligned}\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i \Delta_i(x) - \mathbb{E}[\delta_i \Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} L_i(x).\end{aligned}$$

Then, $\{L_i(x)\}$ forms a triangular array of martingale differences sequence with respect to the $\sigma - fields\ \ \mathcal{F}_{i-1}$.

By C_r inequality and $(H5)$. It follows that

$$\mathbb{E}[L_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}] \leq 2\mathbb{E}[\delta_i \Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}] = 2(p(x) + o(1))\mathbb{E}(\Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}).$$

Therefore, combining lemma 2.8 with $(H2)$, it follows that :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}] &\leq (2p(x) + o(1))(M_2 f_{i,1}(x) + \phi(h))\phi(h) \\ &\leq (2p(x) + o(1))\phi(h)[M_2 b_i(x) + 1] \\ &= d_i^2.\end{aligned}$$

By applying inequality of Lemma 2.7, lemma 2.8 and $(H2)$(v), we have

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x| > \epsilon) &= \mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} L_i(x)\right| > n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x))\right] \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{(n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}{2(D_n + Cn\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))}\right) \\ &= 2\exp\left\{-n\epsilon^2 \frac{(\mathbb{E}\Delta_1(x))^2}{2D_n/n}\left[\frac{1}{1 + \dfrac{C\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x))}{D_n/n}}\right]\right\} \\ &= 2\exp\left\{-n\epsilon^2\phi(h)\left(\frac{M_1^2 f_1^2(x)}{(4p(x) + o(1))[M_2 D(x) + 1]} + o(1)\right)\right. \\ &\qquad \left.\frac{1}{1 + \frac{C\epsilon M_1 f_1(x)}{(2p(x)+o(1))(M_2 D(x)+1)} + o(1)}\right\}.\end{aligned}$$

Then, taking

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{(4p(x)+o(1))[M_2 D(x)+1]\log n}{M_1^2 f_1^2(x) n\phi(h)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

With $\epsilon_0 > 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x| > \epsilon) &\leq 2\exp\left\{ -\epsilon_0^2 \log n \frac{1}{1+\epsilon_0(\frac{\log n}{n\phi(h)})^{\frac{1}{2}} \frac{C}{((p(x)+o(1))[M_2 D(x)+1])^{\frac{1}{2}}+o(1)}} \right\} \\
&\leq 2\exp\{-C\epsilon_0^2 \log n\} \leq 2n^{-C\epsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Therefore, for ϵ_0 largely enough , it follows that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h)}} \right) < \infty.$$

hence, by $(H6)$ and Proposition $A.4$ in Ferraty and Vieu [12], it follows that

$$\widehat{F}_D^x - \bar{F}_D^x = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h)}} \right).$$

Furthermore, to prove equation (2.13), we only need to demonstrate that

$$\bar{F}_D^x \xrightarrow{a.s} p(x) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

By the properties of conditional expectation and the mechanism of MAR, combining $(H2)$(ii)(iii), $(H3)$, $(H5)$ with lemma 2.8, it is easily seen that

$$\begin{aligned}
\bar{F}_D^x &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\delta_i \Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}] \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\delta_i \Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]|\mathcal{G}_{i-1}\} \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\delta_i \mathbb{E}[\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]|\mathcal{G}_{i-1}\} \\
&= (p(x)+o(1)) \frac{1}{\phi(h)M_1 f_1(x) + o(\phi(h))} \phi(h) M_1 f_1(x) + O_{a.s}(\phi(h)) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x) \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

Proof of Lemma 2.2 First, we evaluate the conditional bias term. Observe that

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_n(x,y) &= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D^x} - F^x(y) \\
&= \frac{\bar{F}_N^x(y) - F^x(y)\bar{F}_D^x}{\bar{F}_D^x} \\
&= \frac{\widehat{B}_n^{(*)}(x,y)}{\bar{F}_D^x}.
\end{aligned}$$

By equation (2.13), we only need to prove that

$$\widehat{B}_n^{(*)}(x,y) = O_{a.s}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}).$$

Then, by using $(H2)$, $(H3)$ and $(H4)$, we hold

$$\begin{aligned}
|\widehat{B}_n^{(*)}(x,y)| &= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\delta_i \Delta_i(x)(H_i(y) - F^x(y))|\mathcal{F}_{i-1}] \right| \\
&= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\delta_i \Delta_i(x)\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) - F^x(y)|\mathcal{F}_{i-1}] \right|.
\end{aligned}$$

By taking,

$$\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) = \int_R H\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^{X_i}(u)du.$$

And by integration by parts and changing variables, we have

$$\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) = \int_R H^{(1)}(t) F^{X_i}(y - h_H t)dt.$$

Hence,

$$\begin{aligned}
|\widehat{B}_n^{(*)}(x,y)| &= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{ \Delta_i(x)p(x) \int_R H^{(1)}(t) \left| F^{X_i}(y - h_H t) - F^x(y) \right| \, dt \, |\mathcal{F}_{i-1} \right\} \right| \\
&\leq C(h_K^{b_1} + h_H^{b_2})(p(x) + o(1)) \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= O_{a.s}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}).
\end{aligned}$$

Proof of Lemma 2.3

By The compactness of $S = \{t_\alpha(x) - \epsilon, t_\alpha(x) + \epsilon\}$, we can write that $S \subset \cup_{k=1}^{s_n} S_k$, where $S_k = (t_k - l_n, t_k + l_n)$, with $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$ and $s_n = O(n^{\beta+\frac{1}{2}})$. We put $t_y = arg\ min_{\{k\in 1,\dots,s_n\}}|y - t_k|$, we have

$$\begin{aligned}\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)\right| &\leq \underbrace{\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_y)\right|}_{T_1} + \underbrace{\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(t_y) - \bar{F}_N^x(t_y)\right|}_{T_2} \\ &+ \underbrace{\sup_{y\in S}\left|\bar{F}_N^x(t_y) - \bar{F}_N^x(y)\right|}_{T_3}.\end{aligned}$$

Concerning T_1, by $(H7)$, we can write

$$\begin{aligned}T_1 &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\Delta_i(x)|H_i(y) - H_i(t_y)| \\ &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sup_{y\in S}|y - t_y|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\frac{\Delta_i(x)}{h_H} \\ &\leq \widehat{F}_D^x\sup_{y\in S}\frac{|y - t_y|}{h_H} \\ &\leq A\frac{l_n}{h_H}.\end{aligned}$$

Employing equation (2.13) and $(H6)$, it follows that

$$T_1 \to 0 \ \text{ a.s } \ \text{as} \ \ n \to \infty.$$

So, for n large enough, we can found a $\epsilon > 0$ such that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_y)\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right) = 0. \tag{2.17}$$

Concerning T_3, Using analogous arguments as for T_1 we have

$$\begin{aligned}
T_3 &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\Delta_i(x)|H_i(y)-H_i(t_y)||\mathcal{F}_{i-1}] \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sup_{y\in S}|y-t_y|\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}[\delta_i\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]}{h_H} \\
&\leq \bar{F}_D^x\sup_{y\in S}\frac{|y-t_y|}{h_H} \\
&\leq A\frac{l_n}{h_H}\longrightarrow 0 \quad a.s. \quad \text{as} \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

So, for n large enough, we can found a $\epsilon>0$ such that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}\left|\bar{F}_N^x(t_y)-\bar{F}_N^x(y)\right|>\epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right)=0. \tag{2.18}$$

Concerning T_2, observing that

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_N^x(t_y)-\bar{F}_N^x(t_y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\Delta_i(x)H_i(t_y)-\mathbb{E}(\delta_i\Delta_i(x)H_i(t_y)|\mathcal{F}_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)}\sum_{i=1}^{n}L_{i,n}(x,t_y).
\end{aligned}$$

Where $L_{i,n}(x,t_y)$ is a martingale difference sequence with respect to σ fields $\mathcal{F}_{i-1}$. Similar to the proof of Lemma 5 in Laib and Louani [16] and that of Lemma 6.3 in Chaouch and Khardani, for any $p\geq 2$, we can write, under $(H1)-(H3)$ and lemma 2.8 that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_{i,n}^p(x,t_y)|\mathcal{F}_{i-1}) &= p!C^{p-2}(p(x)+o(1))[M\phi(h)f_{i,1}(x)+O_{a.s}(g_{i,x}(h))] \\
&\leq p!C^{p-2}(p(x)+o(1))\phi(h)[Mb_i(x)+1].
\end{aligned}$$

Where $C=2max(1,a_1^2)$ and $M=(c_2C)^2$. Next, denote $d_i^2=(p(x)+o(1))\phi(h)[Mb_i(x)+1]$, $D_n=\sum_{i=1}^n d_i^2$. By $(H2)$(ii)(v), then $n^{-1}D_n=(p(x)+o(1))\phi(h)[MD(x)+o(1)]$ as $n\to\infty$.

Thus, by lemma 2.7, for $\epsilon_0 > 0$, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(t_y)-\bar{F}_N^x(t_y)|>\epsilon\right) &\leq s_n \max_{k=1,\dots,s_n}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n L_{i,n}(x,t_k)\right|>n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x))\right)\\
&\leq 2s_n\exp\left(-\frac{(n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}{2(D_n+Cn\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))}\right)\\
&\leq 2s_n\exp\{-C\epsilon_0^2\log n\}\\
&\leq 2s_n n^{-c\epsilon_0^2}\leq 2n^{\beta+\frac{1}{2}-C\epsilon_0^2}
\end{aligned}$$

by taking $C\epsilon_0^2 = 2\beta + \frac{3}{2}$.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(t_y)-\bar{F}_N^x(t_y)|>\epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h)}}\right)\leq Cn^{-\beta-1}<\infty. \tag{2.19}$$

The proof of Lemma follows from (2.17), (2.18) and (2.19).

Proof of Lemma 2.4

The proof of this lemma is a direct consequence of the statement (2.14) in lemmas 2.3 and 2.1 .

Proof of Lemma 2.5

The proof of this lemma is based on the decomposition used in Chaouch and Khardani's study [4]. Since $F^x(y)$ admits a unique quantile of order α, then $\forall\epsilon > 0$, we get

$$\delta(\epsilon)=\min\left\{F^x(t_\alpha(x)+\epsilon)-F^x(t_\alpha(x)),F^x(t_\alpha(x))-F^x(t_\alpha(x)-\epsilon)\right\},$$

then

$$\forall\epsilon>0\ \exists\ \delta(\epsilon)>0,\ \forall y\in\mathbb{R},|t_\alpha(x)-y|\geq\epsilon\Rightarrow|F^x(t_\alpha(x))-F^x(y)|\geq\delta(\epsilon).$$

Under equations (2.1) and (2.7), we obtain

$$\begin{aligned}
\exists\ \delta(\epsilon)>0,\ \mathbb{P}(|\widehat{t}_\alpha(x)-t_\alpha(x)|>\epsilon) &\leq \mathbb{P}(|\widehat{F}^x(\widehat{t}_\alpha(x))-\widehat{F}^x(t_\alpha(x))|>\delta(\epsilon))\\
&= \mathbb{P}(|F^x(t_\alpha(x))-\widehat{F}^x(t_\alpha(x))|>\delta(\epsilon))\\
&\leq \sup_{y\in S}|\widehat{F}^x(y)-F^x(y)|.
\end{aligned}$$

Since $F^x(y)$ is continuously differentiable, we have

$$\sum_n \mathbb{P}\left(|\widehat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)| > \epsilon\right) \leq \sum_n \mathbb{P}\left(\sup_{y\in S} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| > \delta(\epsilon)\right) < \infty.$$

which complete the proof.

Proof of Lemma 2.6

Similar to the proof of Theorem 3.1 in Dabo-Niang and Laksaci [6] and by combining equation (2.15) and the result of Lemma 11.17 of Ferraty and Vieu [12], we have

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x))\right| &= \left|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t^*_\alpha(x)) + f^x(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x))\right| \\
&\leq \left|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t^*_\alpha(x))\right| + |f^x(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x))| \\
&\leq \left|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t^*_\alpha(x))\right| + |f^x(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x))|
\end{aligned}$$

it follows that

$$\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{a.co.}$$

Then

$$\{|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x))| < \delta\} \subset \{|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) - f^x(t_\alpha(x))| > \delta\}.$$

by Proposition A.4 in Ferraty and Vieu and just take $\delta = \dfrac{F^{x^{(1)}}(t_\alpha(x))}{2}$ to show that :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x))| < \delta] < \infty.$$

Lemma 2.9 *Assume that hypothesis $(H1)-(H4)$ and $(H6)$ are satisfied, we have*

$$\sqrt{n\phi(h)}\widehat{Q}_n(x,y) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_0^2(x,y)) \quad as \quad n \to \infty. \tag{2.20}$$

where $\sigma_0^2(x,y)) = \dfrac{M_2}{M_1^2}\dfrac{p(x)F^x(y)[1-F^x(y)]}{f_1(x)}$.

Proof of Lemma 2.9 This proof is similar to that of Lemma 4 in Laib and Louani [15] and lemma 5.7 in Ling, Liu and Vieu [20] with some technical changes.
Firstly, we denote

$$\eta_{n,i} = \left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2} (H_i(y) - F^x(y)) \frac{\delta_i \Delta_i(x)}{\mathbb{E}(\Delta_1(x))}.$$

and $\xi_{n,i} = \eta_{n,i} - \mathbb{E}[\eta_{n,i}|\mathcal{F}_{i-1}]$. It is visible that

$$\sqrt{n\phi(h)}\widehat{Q}_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{n,i}. \tag{2.21}$$

Thus, the summands in equation (4.5) forms a triangular array of stationary martingale differences with respect to the σ-fields $\mathcal{F}_{i-1}$. We establish the asymptotic normality of $\widehat{Q}_n(x,y)$ by applying the central limit theorem for discrete-time arrays of real-valued martingales (see Hall and Heyde [14]). However, we have to establish the following statements :

(A) $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_0^2(x,y)$,

and

(B) $n\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\xi_{n,i}|>\epsilon]}) = o(1)$ holds for any $\epsilon > 0$.

Proof of part (A) :

Observe that

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{n} [|\mathbb{E}(\eta_{n,i})|\mathcal{F}_{i-1}|]^2. \tag{2.22}$$

We have

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\eta_{n,i}|\mathcal{F}_{i-1})| &= \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(x))}\left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2} |\mathbb{E}(\delta_i\Delta_i(x)(H_i(y) - F^x(y))|\mathcal{F}_{i-1})| \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(x))}\left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2} (p(x)+o(1))\mathbb{E}(\Delta_i(x)[\mathbb{E}H_i(y)|X_i) - F^x(y)]|\mathcal{F}_{i-1}). \end{aligned}$$

Notice that,

$$\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) = \int_R H\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^{X_i}(u)du.$$

By integration by parts and changing variables, we have :

$$\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) = \int_R H^{(1)}(t)F^{X_i}(y - h_H t)dt.$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\eta_{n,i}|\mathcal{F}_{i-1})| &\leq \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(x))}\left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2}(p(x)+o(1))\mathbb{E}\left(\Delta_i(x)\int_R H^1(t)|F^{X_i}(y-h_Ht)-F^x(y)||\mathcal{F}_{i-1}\right)\\
&\leq C(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})(p(x)+o(1))\frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(x))}\left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2}\mathbb{E}\left(\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}\right)\\
&= O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})(p(x)+o(1))\left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{1/2}\left(\frac{f_{i,1}(x)}{f_1(x)}+O_{a.s}\left(\frac{g_{i,x}(h)}{\phi(h)}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Therefore, by $(H2)$(ii)(iii), we have

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}[|\mathbb{E}(\eta_{n,i})|\mathcal{F}_{i-1}|]^2 &= O_{a.s}(\phi(h)(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})^2)(p(x)+o(1))^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{i,1}(x)}{f_1(x)}+O_{a.s}\left(\frac{g_{i,x}(h)}{\phi(h)}\right)\right)^2\\
&= O_{a.s}(\phi(h)(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})^2).
\end{aligned}
$$

Hence, the statement (A) follows if we show that

$$
\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_0^2(x,y), \quad as \;\; n\to\infty. \tag{2.23}
$$

To determine equation (2.23), we decompose the statement as follows

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\delta_i\Delta_i^2(x)[H_i(y)-F^x(y)]^2|\mathcal{F}_{i-1}\}\\
&= J_{1,n}(x,y)+J_{2,n}(x,y). \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Where

$$
J_{1,n}(x,y)=\frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\delta_i\Delta_i^2(x)[H_i(y)-\mathbb{E}(H_i(y)|X_i)]^2|\mathcal{F}_{i-1}\}.
$$

And

$$
J_{2,n}(x,y)=\frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\delta_i\Delta_i^2(x)[\mathbb{E}(H_i(y)|X_i)-F^x(y)]^2|\mathcal{F}_{i-1}\}.
$$

Thus, by properties of conditional expectation and $(H3)$ for l=0 and m=2, we have

$$\begin{aligned} J_{1,n}(x,y) &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(x)\mathbb{E}[\delta_i[H_i(y)-\mathbb{E}(H_i(y)|X_i)]^2|\mathcal{G}_{i-1}]|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(x)\mathbb{E}[\delta_i[H_i(y)-\mathbb{E}(H_i(y)|X_i)]^2|X_i]|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{p(X_i)\Delta_i^2(x)[\mathbb{E}(H_i^2(y)|X_i)-(\mathbb{E}(H_i(y)|X_i))^2]|\mathcal{F}_{i-1}\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

So,

$$\mathbb{E}(H_i^2(y)|X_i) = \int_R H^2\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^{X_i}(u)du.$$

By integration by parts and changing variables, we have :

$$\mathbb{E}(H_i^2(y)|X_i) = 2\int_R H^{(1)}(t)H(t)F^{X_i}(y-h_Ht)dt.$$

Which leads to

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_i^2(y)|X_i) &= 2\int_R H^{(1)}(t)H(t)F^{X_i}(y-h_Ht)dt \\ &= 2\int_R H^{(1)}(t)H(t)(F^{X_i}(y-h_Ht)-F^x(y)+F^x(y))dt \\ &= O(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})+F^x(y) \\ &\to F^x(y) \quad as \quad n\to\infty. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_i(y)|X_i) &= \int_R H^{(1)}(t)F^{X_i}(y-h_Ht)dt \\ &\to F^x(y) \quad as \quad n\to\infty. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Then, we lead at

$$\begin{aligned}
J_{1,n}(x,y) &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{(p(x)+o(1))((F^x(y)-(F^x(y))^2))\Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}\} \\
&= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}(p(x)+o(1))((F^x(y)-(F^x(y))^2))\mathbb{E}\{\Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}\} \\
&= \frac{M_2}{M_1^2}\frac{p(x)F^x(y)(1-F^x(y))}{f_1(x)} \\
&= \sigma_0^2(x,y), \quad as \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Now, we examine the second term $J_{2,n}$ by $(H2)$(ii)(iii) and lemma 2.8, we obtain

$$\begin{aligned}
|J_{2,n}(x,y)| &= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\delta_i\Delta_i^2(x)[\mathbb{E}(H_i(y)|X_i)-F^x(y)]^2|\mathcal{F}_{i-1}\} \\
&= \frac{\phi(h)}{n(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}(p(x)+o(1))\left[\int_R H^{(1)}(t)\left|F^{X_i}(y-h_Ht)-F^x(y)\right|dt\right]^2\mathbb{E}\{\Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}\} \\
&= O_{a.s}((h_K^{b_1}+h_H^{b_2})^2)(p(x)+o(1))\left(\frac{M_1}{M_2^2}\frac{1}{f_1(x)}+o_{a.s}(1)\right) \\
&\to 0, \quad as \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) &= \lim_{n\to\infty}(J_{1,n}(x,y)+J_{2,n}(x,y)) \\
&= \frac{M_2}{M_1^2}\frac{p(x)F^x(y)(1-F^x(y))}{f_1(x)} \\
&= \sigma_0^2(x,y), \quad a.s.
\end{aligned}$$

Proof of part (B) The lindeberg condition implies that $n\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\xi_{n,i}|>\epsilon]})\le 4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]})$, where $\mathbb{I}$ is an indicator function of a set A. Let $a>1$ and $b>1$ such that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Using Hölder and Markov inequalities, one can write for all $\epsilon>0$, $\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]})\le\frac{\mathbb{E}|\eta_{n,i}|^{2a}}{(\epsilon/2)^{2a/b}}$. Taking C_0 a positive constant and $2a=2+\delta$ for any

$\delta > 0$, it follows that

$$\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C_0 \left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} \mathbb{E}([(H_i(y) - F^x(y))\delta_i \Delta_i(x)]^{2+\delta}) \\
&\leq C_0 \left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} \mathbb{E}\{p(X_i)\Delta_i^{2+\delta}(x)\mathbb{E}[|H_i(y) - F^x(y)|^{2+\delta}|X_i]\}.
\end{aligned}$$

By integration by parts and changing variables, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|H_i(y) - F^x(y)|^{2+\delta}|X_i] &= \int_R \left|H\left(\frac{y-u}{h_H}\right) - F^x(y)\right|^{2+\delta} f^x(u)du \\
&= C\left(\int_R H^{(1)}(t)H^{1+\delta}(t)\left|F^{X_i}(y - h_H t) - F^x(y)\right| dt\right).
\end{aligned}$$

By $(H5)$ and $(H7)$, we have

$$\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C \left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} (p(x) + o(1)) \\
&\quad \mathbb{E}\{\Delta_i^{2+\delta}(x)\left[\int_R H^{(1)}(t)H^{1+\delta}(t)F^{X_i}(y - h_H t)dt + F^{2+\delta}(y|x)\right]\} \\
&\leq C \left(\frac{\phi(h)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} (p(x) + o(1)) \frac{n\mathbb{E}\{\Delta_i^{2+\delta}(x)\}}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}}.
\end{aligned}$$

Thus by lemma 2.8, it results that

$$\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C(n\phi(h))^{\frac{-\delta}{2}}(p(x) + o(1)) \frac{M_{2+\delta} f_1(x) + o(1)}{M_1^{2+\delta} f_1^{2+\delta}(x) + o(1)} \\
&= O((n\phi(h))^{\frac{-\delta}{2}}).
\end{aligned}$$

Proof of Theorem 2.1

Writing a Taylor expansion of order one of the function $\widehat{F}^x$ at point $\widehat{t_\alpha}(x)$ leads to the existence of some $t_\alpha{}^*(x)$ betweens $\widehat{t_\alpha}(x)$ and $t_\alpha(x)$ and taking into account lemma 2.5 such that

$$\widehat{F}^x(\widehat{t_\alpha}(x)) - \widehat{F}^x(t_\alpha(x)) = (\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x))\widehat{F}^{x^{(1)}}(t_\alpha^*(x))$$

$$|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)| = \frac{1}{\widehat{F}^{x^{(1)}}(t_\alpha^*(x))}[|\widehat{F}^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x))|].$$

Then

$$|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)|\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) = O_{a.s}\left(\left|\widehat{F}^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x))\right|\right)$$

The result provided by lemma 2.5 insures that $t_\alpha{}^*(x)$ tends to $t_\alpha(x)$ a.s . it follows that

$$|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)| = O_{a.s}\left(\left|\widehat{F}^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x))\right|\right).$$

So, the result of the Theorem is an easy consequence of Proposition 2.1.

Proof of Proposition 2.2

By combining the decomposition (2.11), (2.13)and (2.20) with the fact that $\sqrt{n\phi(h)}\widehat{B}_n(x,y) \to 0$ and $\sqrt{n\phi(h)}\widehat{R}_n(x,y) \to 0$, a.s. as $n \to \infty$ then the proof of proposition is finished.

Proof of Theorem 2.2 Using a Taylor expansion of order one of the function $\widehat{F}^x$ at point $\widehat{t_\alpha}(x)$, we have

$$\widehat{F}^x(\widehat{t_\alpha}(x)) - \widehat{F}^x(t_\alpha(x)) \quad = \quad (\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x))\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x))$$

where $t_\alpha{}^*(x)$ betweens $\widehat{t_\alpha}(x)$ and $t_\alpha(x)$.

Then, by combining the consistency result of $\widehat{t_\alpha}(x)$ giving by lemma 2.5, we get

$$|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)| = \frac{[|\widehat{F}^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x))|]}{\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x))}.$$

Secondly by $(H4)$ for j=1 and $(H7)$, following the same steps as the proof of Lemma 2.2 and lemma 2.3, we have

$$\widehat{F}^{x^{(1)}}(y) \longrightarrow F^{x^{(1)}}(y) \quad a.s. \quad as \quad n \longrightarrow \infty$$

which leads to

$$\widehat{F}^{x^{(1)}}(t^*_\alpha(x)) \longrightarrow F^{x^{(1)}}(t_\alpha(x)) \quad a.s. \quad as \quad n \longrightarrow \infty.$$

Finally, the combination of equation (2.5) and theorem 2.1 allows us to finish proof of Theorem 2.2 .

Acknowledgments

The authors greatly thank the Editor in chief and the reviewers for the careful reading, constructive comments and relevant remarks which permit us to improve the paper.

Bibliographie

[1] Benziadi, F., Laksaci, A. and Tebboune, F. (2012). Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data. *Communications in Statistics - Theory and Methods.*, 3097-3113.

[2] Berlinet, A., Gannoun, A. and Matzner-lober, E. (1998). Asymptotic properties of convergent estimators of conditional quantiles. *C. R. Acad.Sci. Paris.* Serie 1, **326**, 611-614.

[3] Cardot, H., Crambes, C. and Sarda, P. (2004). Estimation spline de quantiles conditionnels pour variables explicatives fonctionnelles. *C. R. Math. Paris.* **339**, 141-144.

[4] Chaouch, M. and Khardani, S. (2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *J. Nonparametric Statistics.* **27 :1**, 65-87.

[5] Cheng, PE. (1994). Nonparametric estimation of mean functionals with data missing at random. *J. Amer Statist Assoc.* **89**, 81-87.

[6] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2012). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Comm in Statist. Theory and Methods.* **41**, 1254-1268.

[7] Dabo-Niang, S. and Thiam, B. (2010). L^1 consistency of a kernel estimate of spatial conditional quantile. *Statist. Probab. Lett.* **80** (2010), 1447-1458.

[8] Efromovich, S. (2011). Nonparametric regression with predictors missing at random. *J. Amer Statist Assoc.* **106**, 306-319.

[9] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2008). Asymptotic results of a nonparametric conditional quantile estimator for functional time series. *Comm in Statist. Theory and Methods.* **37**, 2735-2759.

[10] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2008). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space. *Far East J. Theoretical Statist.* **25**, 15–38.

[11] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P. (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *J. Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, **9**, 47-76.

[12] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis.* Springer Series in Statistics, Springer New York.

[13] Ferraty, F., Sued, M. and Vieu, P. (2013). Mean estimation with data missing at random for functional covariables. *Statistics.* **47**, 688-706.

[14] Hall, P. and Heyde, C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Application.* Academic Press, New York.

[15] Laib, N. and Louani, D. (2010). Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties. *J. Multivariate Anal.* **101**, 2266-2281.

[16] Laib, N. and Louani, D. (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. *J. Statist. Plann. Inference.* **141**, 359-372.

[17] Laksaci, A., Lemdani, M. and Ould-Saïd, E. (2009). L^1-norm kernel estimator of conditional quantile for functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.* **79**, 1065-1073.

[18] Laksaci, A., Lemdani, M. and Ould-Saïd, E. (2011). Asymptotic results for an L^1-norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology. *Sankhya*, **A 73**, 125–141 .

[19] Ling, N., Liang, L. and Vieu, P. (2015). Nonparametric regression estimation for functional stationary ergodic data with missing at random. *J. Statist. Plann. Inference.*

[20] Ling, N., liu, Y. and Vieu, P. (2016). Conditional mode estimation for functional stationary ergodic data with responses missing at random. *J. Theoretical and Applied Statistics.*

[21] Little, R. and Rubin, D. (2002). *Statistical analysis with missnig data.* 2nd ed. New York : Wiley.

[22] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. (2002). *Applied functional data analysis ; Methods and case studies.* Springer-Verlag, New York.

[23] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. (2005). *Functional Data Analysis.* Second Edition, Springer, New York.

[24] Roussas, G. (1991). *Nonparametric functional estimation and related topics*, 509-529.

[25] Samanta, M. Non-parametric estimation of conditional quantiles. *Statist. Probab. Lett.* **7** (1989), 407–412.

[26] Stone, C.J. (1977). Consistent nonparametric regression. *Discussion, Ann. Statist.* **5**, 595–645.

Chapitre 3

Asymptotic properties of the conditional hazard function estimator from censored functional ergodic data

Ce chapitre fait l'objet d'une publication accepté dans International journal of Statistics and Economics.

Asymptotic properties of the conditional hazard function estimator from censored functional ergodic data

Nesrine Hamidi[1], **Boubaker Mechab**[2]
Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
University of Djillali Liabes
BP 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria.
e-mail : [1] nisou_93@hotmail.com, [2] mechaboub@yahoo.fr

Abstract

In this paper, we study the asymptotic properties of the kernel type estimator of the conditional hazard function from the fraction of the conditional density and the conditional distribution function in the case of a censored response given a functional explanatory variable. Under ergodicity condition, we establish the rate of almost sure convergence and the asymptotic normality of the proposed estimator.

Keywords : censored data, conditional hazard function, functional ergodic data, asymptotic normality.
2000 Mathematics Subject Classification : 62G05, 62G20, 62N01.

3.1 Introduction

The functional data estimation has had a lot of interest in statistics branch, as it has been the subject of various works, we refer to Bosq [1] and Ramsay and Silverman [15] for a parametric models and monograph of Ferraty and Vieu [6] for a non parametric models.

The hazard function estimation is used in the risk analysis or for the study of survival phenomena and it occur in different domain for example : (biologies, epidemiology, econometrics...) Therefore, the first results on the subject were established in the early 60s see Watson and Leadbetter [21]. Roussas [16] used the kernel method to estimate the hazard function as the ratio between the kernel density estimator and the empirical estimator of the distribution function, so under weak mixing conditions he established the almost sure convergence, a year later he got the asymptotic normality of this estimator. Youndjé et al.[22] constructed an estimator for the hazard function and they developed a method for choosing optimal smoothing parameter when the observations are i.i.d. This last result has been generalized by Estévez-Pérez et al. [4] in the mixing case. Later Quintela-del Rio [14] has elaborated the almost complete convergence rate as well as the asymptotic normality of the constructed estimator for the maximum of the hazard function.

In the case of censored data, Padgett [13] has estimated density and hazard rate functions in the case of censored samples, (also see among others Lecoutre and Ould-Said [11] and Van Keilegom and Veraverbeke [19]...).

In the functional framework, one of the important works is that of Ferraty and Vieu [5], where they establish a kernel type estimator and they demonstrate some properties when variables are censored and dependent. By another approach Massim and Mechab [12] have studied the conditional hazard function by the local linear method.

In this paper, we study the asymptotic properties of the conditional hazard function for a censored observations given a functional explanatory variable under the ergodicty condition. Other motivations are examined in Laib and Louani [9], [10] where the ergodic property is defined from the mean. Chaouch and Khardani [2] have already studied the functional estimation of the conditional quantile combining the case of the censored response and that of ergodicity.

The organization of the paper is as per the following : section 2 introduces the proposed estimator of the conditional hazard function and characterize some notations, in section 3 we list some hypotheses, our fundamental outcomes are given in section 4, the section 5 is devoted to technical lemmas, the proofs of our outcomes are given in section 6.

3.2 Estimation Model

let be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d) random variables $(T_n)_n$ with common unknown absolutely continuous distribution function F with density f . These random variables are regarded as lifetimes of items under study.
Instead of observing the lifetimes T, we observe the censored lifetimes. That is, assuming that $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ is a sequence of i.i.d censoring random variable (r.v.) with common unknown continuous distribution function G.
In the random censorship model, we only observe the n pairs (Y_i,δ_i) with

$$Y_i = T_i \wedge C_i \quad \text{and} \quad \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i\leq C_i\}}, \quad 1\leq i\leq n,$$

where $\mathbb{I}_A$ means the indicator function of the set A.
Let (X,T) be $\mathcal{F}\times\mathbb{R}$-valued random elements, where $\mathcal{F}$ is some-metric abstract space, denote by $d(.,.)$ a semi-metric associated with space $\mathcal{F}$. Given a sequence of observations $(X_i,T_i)_{i\geq 1}$ with the same probability distribution as (X,T) supposed to be stationary and ergodic.
For this model, we consider by $F^{\mathcal{X}}(t)$ a conditional distribution function of t given $X=\mathcal{X}$, a pseudo-estimator of $F^{\mathcal{X}}(t)$ is given by

$$\tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(Y_i)K(h_K^{-1}d(\mathcal{X},X_i))H(h_H^{-1}(t-Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(\mathcal{X},X_i))}, \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Where K is a real-valued kernel function, H is a distribution function, $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) a sequence of positive real numbers which decrease to zero as $n\to\infty$ and $\bar{G}(.) = 1-G(.)$. We pose $\Delta_i(\mathcal{X}) = K(h_K^{-1}d(\mathcal{X},X_i))$, where

$$\tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\tilde{F}_n(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}.$$

With

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n(\mathcal{X},t) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)H(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X}),\\ l_n(\mathcal{X}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\mathcal{X}).\end{aligned}$$

From this estimator, we deduce an estimator for the conditional density, denoted $\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t)$, defined as :

$$\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}K(h_K^{-1}d(\mathcal{X},X_i))H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))}{\sum_{i=1}^{n}K(h_K^{-1}d(\mathcal{X},X_i))}, \tag{3.2}$$

where $H^{(1)}$ is the derivative of H,
and

$$\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\tilde{f}_n(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}.$$

With

$$\tilde{f}_n(\mathcal{X},t) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X}).$$

Since G is unknown in practice, one can estimate it using the estimator of [7] defined as :

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1-\delta_{(i)}}{n-i+1}\right)^{\mathbb{I}\left\{Y_{(i)}<t\right\}} & \text{if } t\le Y_{(n)},\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

where $Y_{(1)} < Y_{(2)} < ... < Y_{(n)}$ are the order statistics of $(Y_i)_{1\le i\le n}$ and $\delta_{(i)}$ is concomitant with $Y_{(i)}$. Thus , an estimator of $F^{\mathcal{X}}(t)$ is given by

$$\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\widehat{F}_n(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}.$$

With

$$\widehat{F}_n(\mathcal{X},t) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}_n^{-1}(Y_i)H(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X}).$$

We deduce an estimator for a conditional density $f^{\mathcal{X}}(t)$ defined as :

$$\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\widehat{f}_n(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}.$$

with

$$\widehat{f}_n(\mathcal{X},t) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}_n^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X}).$$

By definition, the naturel estimator of the conditional hazard function, denoted $\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}$ is :

$$\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t)}{1-\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)}, \qquad \forall \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

3.3 Hypotheses

We fixe a point $\mathcal{X}$ in $\mathcal{F}$ (respectively, a compact $\mathcal{S} \in \mathbb{R}$) and $N_{\mathcal{X}}$ denotes a fixed neighborhood of this point. Furthermore, for $i = 1, ..., n$, we put $\mathcal{F}_i$ as the σ-field generated by $((X_1, Y_1), ..., (X_i, Y_i))$ and $\mathcal{G}_i$ as the σ-field generated by $((X_1, Y_1), ..., (X_i, Y_i), X_{i+1})$ and write $F_{\mathcal{X}}(h) = \mathbb{P}(d(\mathcal{X}, X) \leq h) = \mathbb{P}(X \in B(\mathcal{X}, h))$ and $F_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \mathbb{P}(d(\mathcal{X}, X) \leq h|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{P}(X \in B(\mathcal{X}, h)|\mathcal{F}_{i-1})$, where $B(\mathcal{X}, h)$ a ball of center $\mathcal{X}$ and a radius $h > 0$.

Under the hypotheses cited below, we show our results :

(H1) K is a non-negative bounded kernel of class C^1 over its support $[0,1]$. The derivative $K^{'}(t) < 0$, $|\int_0^1 (K^j)'(u)du| < \infty$ for $j = 1, 2$.

(H2) There exists a sequence of non negative random functional $(f_{i,1}(\mathcal{X}))_{i\geq 1}$ a.s. bounded by a sequence of deterministic quantities $(b_i(\mathcal{X}))_{i\geq 1}$ accordingly, a sequence of random functions $(g_{i,\mathcal{X}})_{i\geq 1}$. a deterministic non-negative bounded functional f_1 and a non-negative real function ϕ tending to zero as its argument tends goes to zero. Such that

(i) $F_{\mathcal{X}}(h) = \phi(h)f_1(\mathcal{X}) + o(\phi(h)),\ as\ h \longrightarrow 0.$

(ii) For any $i \in N$, $F_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \phi(h)f_{i,1}(\mathcal{X}) + g_{i,\mathcal{X}}(h)$ with $g_{i,\mathcal{X}}(h) = o_{a.s}(\phi(h))$ as $h \to 0$. $g_{i,\mathcal{X}}(h)/\phi(h)$ a.s. bounded and $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} g_{i,\mathcal{X}}^j(h) = o_{a.s}(\phi^j(h))$ as $n \to \infty$, $j = 1, 2$.

(iii) $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_{i,1}^{j}(\mathcal{X}) \longrightarrow f_1^j(\mathcal{X})$ a.s as $n \longrightarrow \infty$, $j = 1, 2$.

(iv) There exists a non-decreasing bounded function τ_0 such that uniformly in $t \in [0,1]$,
$\dfrac{\phi(ht)}{\phi(h)} = \tau_0(t) + o(1)$ as $h \downarrow 0$ and $\int_0^1 (K^j)'(t)\tau_0(t)dt < \infty$ for $j \geq 1$.

(v) $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_i(\mathcal{X}) \longrightarrow D(\mathcal{X}) < \infty$. as $n \longrightarrow \infty$.

(H3) For any $m \geq 1$, $\mathbb{E}(|H^{(l)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|^m|\mathcal{G}_{i-1}) = \mathbb{E}(|H^{(l)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|^m|X_i)$, a.s. for $l = 0, 2$.

(H4) $\forall$ $(t_1,t_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall$ $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in N_{\mathcal{X}} \times N_{\mathcal{X}}$, there exists some constants $C_{\mathcal{X}} > 0$, $b_1, b_2 > 0$, such that

$$\left|F^{\mathcal{X}_1}(t_1) - F^{\mathcal{X}_2}(t_2)\right| \leq C_{\mathcal{X}}(d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{b_1} + |t_1 - t_2|^{b_2}).$$

(H5) (i) $\forall$ $(t_1,t_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall$ $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in N_{\mathcal{X}} \times N_{\mathcal{X}}$, there exists some constants $C_{\mathcal{X}} > 0$, $b_1, b_2 > 0$, such that

$$\left|f^{\mathcal{X}_1}(t_1) - f^{\mathcal{X}_2}(t_2)\right| \leq C_{\mathcal{X}}(d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{b_1} + |t_1 - t_2|^{b_2}).$$

(ii) $\displaystyle\int |t| f^{\mathcal{X}}(t)dt < \infty.$

(H6) The kernel $H^{(1)}$ is bounded such that
$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists C > 0$, $|H^{(j)}(t_1) - H^{(j)}(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|$, $\displaystyle\int {H^{(1)}}^2(v)dv < \infty$ and $\displaystyle\int |v|^{b_2} H^{(1)}(v)dv < \infty$, for $j = 0, 1$.

(H7) $(C_n)_{n\geq 1}$ and $(X_n, T_n)_{n\geq 1}$ are independent.

(H8) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nh_H^j\phi(h_K) = \infty$ and $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{nh_H^j\phi(h_K)} = 0$, for $j = 0, 1$.

(H9) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\beta}h_H = \infty$, $\forall$ $\beta > 0$.

(H10) G has a bounded first derivative $G^{(1)}$.

3.4 Main Results

Proposition 3.1 *Suppose that assumptions $(H1)-(H4)$ and $(H6)-(H9)$ hold true, then we have*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-F^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})+O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Proposition 3.2 *Under assumptions $(H1)-(H3)$ and $(H5)-(H9)$, we hold*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-f^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})+O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}\right).$$

Proposition 3.3 *Under assumptions of proposition 3.1, we have*

$$|1-\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} |1-F^{\mathcal{X}}(t)|.$$

Theorem 3.1 *Assume that conditions $(H1)-(H9)$ remain true, we get*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}}|\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t)-h^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})+O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}\right).$$

3.4.1 Asymptotic normality

Proposition 3.4 *Under conditions $(H1)-(H4)$ and $(H6)-(H10)$ and by adding the following hypothesis*

$$\sqrt{n\phi(h)}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4}$$

Then, we have

$$\sqrt{n\phi(h)}(\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-F^{\mathcal{X}}(t)) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_F^2(\mathcal{X},t)) \quad as \quad n\to\infty, \tag{3.5}$$

where $\xrightarrow{D}$ means the convergence in distribution
and

$$\sigma_F^2(\mathcal{X},t) = \frac{M_2}{M_1^2}\frac{F^{\mathcal{X}}(t)(1-F^{\mathcal{X}}(t))}{\bar{G}(t)f_1(\mathcal{X})},$$

with $M_j = K^j(1)-\int_0^1 (K^j)'(t)\tau_0(t)dt$ for $j=1,2$.

Proposition 3.5 *Under hypothesis* $(H1)-(H3)$ *and* $(H5)-(H10)$ *and in addition*

$$\sqrt{nh_H\phi(h)}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.6}$$

We have,

$$\sqrt{nh_H\phi(h)}(\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-f^{\mathcal{X}}(t)) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_f^2(\mathcal{X},t)) \quad as \quad n\to\infty, \tag{3.7}$$

where $\xrightarrow{D}$ *means the convergence in distribution*
and

$$\sigma_f^2(\mathcal{X},t)=\frac{M_2}{M_1^2}\frac{f^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{G}(t)f_1(\mathcal{X})}\int_{\mathbb{R}} {H^{(1)}}^2(v)dv,$$

with $M_j=K^j(1)-\int_0^1(K^j)'(t)\tau_0(t)dt \quad$ *for* $j=1,2$.

Theorem 3.2 *Under conditions* $(H1)-(H10)$, *we get*

$$\sqrt{nh_H\phi(h)}(\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t)-h^{\mathcal{X}}(t)) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_h^2(\mathcal{X},t)) \quad as \quad n\to\infty, \tag{3.8}$$

with

$$\sigma_h^2(\mathcal{X},t)=\frac{M_2}{M_1^2}\frac{h^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{G}(t)f_1(\mathcal{X})(1-F^{\mathcal{X}}(t))}\int_{\mathbb{R}} {H^{(1)}}^2(v)dv.$$

3.5 Technical lemmas

In order to prove our main results, we need the following notations and lemmas :
Proof of proposition 3.1 and 3.2 We start by the following decompositions

$$\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-F^{\mathcal{X}}(t)=\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-\tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t)+\tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-F^{\mathcal{X}}(t). \tag{3.9}$$

$$\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-f^{\mathcal{X}}(t)=\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t)+\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-f^{\mathcal{X}}(t). \tag{3.10}$$

We introduce some additional notation

$$\begin{aligned}
\bar{\tilde{F}}_n(\mathcal{X},t) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)H(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}].\\
\bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}].\\
\bar{l}_n(\mathcal{X}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}].
\end{aligned}$$

We can write,

$$\tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t)-F^{\mathcal{X}}(t)=B_{n,1}(\mathcal{X},t)+\frac{R_{n,1}(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}+\frac{Q_{n,1}(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}, \tag{3.11}$$

where
$Q_{n,1}(\mathcal{X},t)=(\tilde{F}_n(\mathcal{X},t)-\bar{\tilde{F}}_n(\mathcal{X},t))-F^{\mathcal{X}}(t)(l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X}))$,
$B_{n,1}(\mathcal{X},t)=\dfrac{\bar{\tilde{F}}_n(\mathcal{X},t)}{\bar{l}_n(\mathcal{X})}-F^{\mathcal{X}}(t)$,
$R_{n,1}(\mathcal{X},t)=-B_{n,1}(\mathcal{X},t)(l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X}))$.

And

$$\tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t)-f^{\mathcal{X}}(t)=B_{n,2}(\mathcal{X},t)+\frac{R_{n,2}(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}+\frac{Q_{n,2}(\mathcal{X},t)}{l_n(\mathcal{X})}, \tag{3.12}$$

where
$Q_{n,2}(\mathcal{X},t)=(\tilde{f}_n(\mathcal{X},t)-\bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t))-f^{\mathcal{X}}(t)(l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X}))$,
$B_{n,2}(\mathcal{X},t)=\dfrac{\bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t)}{\bar{l}_n(\mathcal{X})}-f^{\mathcal{X}}(t)$,
$R_{n,2}(\mathcal{X},t)=-B_{n,2}(\mathcal{X},t)(l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X}))$.
Thus, we show the previous propositions 3.1 and 3.2 by the following intermediate results

Lemma 3.1 *Assume that hypotheses* $(H1)-(H9)$ *remain true, we have*

$$l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X})=O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right), \tag{3.13}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} l_n(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \bar{l}_n(\mathcal{X}) = 1. \quad a.s. \tag{3.14}$$

Lemma 3.2 *Under conditions* $(H1)-(H4)$ *and* $(H6)-(H8)$ *we have*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |B_{n,1}(\mathcal{X},t)| = O_{a.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}), \tag{3.15}$$

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |R_{n,1}(\mathcal{X},t)| = O_{a.s.}\left((h_K^{b_1} + h_H^{b_2})\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right)\right). \tag{3.16}$$

Lemma 3.3 *Under assumptions* $(H1)-(H3)$ *and* $(H5)-(H8)$*, we get*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |B_{n,2}(\mathcal{X},t)| = O_{a.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}), \tag{3.17}$$

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |R_{n,2}(\mathcal{X},t)| = O_{a.s.}\left((h_K^{b_1} + h_H^{b_2})\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right)\right). \tag{3.18}$$

Lemma 3.4 *Assume that* $(H1)-(H4)$ *and* $(H6)-(H9)$ *are satisfied. Then, we have*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |\tilde{F}_n(\mathcal{X},t) - \bar{\tilde{F}}_n(\mathcal{X},t)| = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right). \tag{3.19}$$

Lemma 3.5 *Under conditions* $(H1)-(H3)$ *and* $(H5)-(H9)$ *, we have*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |\tilde{f}_n(\mathcal{X},t) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t)| = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}\right). \tag{3.20}$$

Lemma 3.6 *Suppose that conditions* $(H1)-(H4)$ *and* $(H6)-(H8)$ *hold, one gets*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) - \tilde{F}_n^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right). \tag{3.21}$$

Lemma 3.7 *Assume assumptions* $(H1)-(H3)$ *and* $(H5)-(H8)$ *hold true, we have*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t) - \tilde{f}_n^{\mathcal{X}}(t)| = O_{a.s.}\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.22}$$

Lemma 3.8 [10] *Let $(Z_n)_n \geq 1$ be a sequence of real martingale differences with respect to the sequence of $\sigma-fields(\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, ...Z_n))_{n\geq 1}$, where $\sigma(Z_1, Z_2, ...Z_n)$ is the $\sigma - fields$ generated by the random variables $Z_1, Z_2, ...Z_n$. Set $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. For any $p \geq 2$, $n \geq 1$ assume that there exist some non-negative constants C and d_n such that $\mathbb{E}(Z_n^p|\mathcal{F}_{n-1}) \leq C^{p-2}p!d_n^2$, a.s. Then, for any $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2(D_n + C\epsilon)}\right\},$$

where $D_n = \sum_{i=1}^n d_i^2$.

Lemma 3.9 [9] *For any real numbers $1 \leq j$ and $1 \leq k$. as $n \to \infty$.*

(i) $(1/\phi(h))\mathbb{E}[\Delta_i^j(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}] = M_j f_{i,1}(\mathcal{X}) + O_{a.s}(g_{i,\mathcal{X}}(h)/\phi(h))$,

(ii) $(1/\phi(h))\mathbb{E}[\Delta_1^j(\mathcal{X})] = M_j f_1(\mathcal{X}) + o(1)$.

(iii) $(1/\phi^k(h))(\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))^k = M_1^k f_1^k(\mathcal{X}) + o(1)$.

where M_j is defined in Proposition 3.4.

Remark Lemmas 3.8 and 3.9 are technical lemmas that we use for the demonstration of several other lemmas. their proofs are given by lemma 1 in [10] and by lemma 1 in [9].

3.6 Appendix

Proof of lemma 3.1. Similar to the proof of lemma 6.1 in [2]

$$\begin{aligned} l_n(\mathcal{X}) - \bar{l}_n(\mathcal{X}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^n[\Delta_i(\mathcal{X}) - \mathbb{E}[\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^n L_{n,i}(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Where $L_{n,i}(\mathcal{X})$ forms a triangular array of martingale differences sequence with respect to the σ-fields $\mathcal{F}_{i-1}$, using C_r inequality, it follow that

$$\mathbb{E}[L_i^2(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}] \leq 2\mathbb{E}[\Delta_i^2(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}].$$

By combining lemma 3.9 and condition $(H2)$, one gets

$$\mathbb{E}[L_i^2(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}] \leq 2\phi(h)[M_2 b_i(\mathcal{X})+1] = d_i^2. \quad \text{a.s.}$$

Therefore, by used lemma 3.8, lemma 3.9 and $(H2)(v)$, it follow that

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X})|>\epsilon) &= \mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} L_{n,i}(\mathcal{X})\right| > n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X}))\right] \\
&\leq 2\exp\left(-\frac{(n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))^2}{2(D_n + Cn\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))}\right) \\
&= 2\exp\left\{-n\epsilon^2\frac{(\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X}))^2}{2D_n/n}\left[\frac{1}{1+\dfrac{C\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X}))}{D_n/n}}\right]\right\} \\
&= 2\exp\left\{-n\epsilon^2\phi(h)\left(\frac{M_1^2 f_1^2(\mathcal{X})}{4[M_2 D(\mathcal{X})+1]}+o(1)\right)\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{1+\frac{C\epsilon M_1 f_1(\mathcal{X})}{2(M_2 D(\mathcal{X})+1)}+o(1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Then, by taking

$$\epsilon = \epsilon_0\left(\frac{4[M_2 D(\mathcal{X})+1]\log n}{M_1^2 f_1^2(\mathcal{X}) n\phi(h)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

With $\epsilon_0 > 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X})|>\epsilon) &\leq 2\exp\left\{-\epsilon_0^2\log n\frac{1}{1+\epsilon_0(\frac{\log n}{n\phi(h)})^{\frac{1}{2}}\frac{C}{([M_2 D(\mathcal{X})+1])^{\frac{1}{2}}+o(1)}}\right\} \\
&\leq 2\exp\{-C\epsilon_0^2\log n\} \leq 2n^{-C\epsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Thus, for ϵ_0 largely enough, we obtain by Borel-Cantelli lemma

$$l_n(\mathcal{X})-\bar{l}_n(\mathcal{X}) = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h)}}\right).$$

Moreover, for equation 3.14 it suffice to show that

$$\lim_{n\to+\infty}\bar{l}_n(\mathcal{X}) = 1. \quad a.s.$$

By applying lemma 3.9 it is easily to seen that

$$\begin{aligned}\bar{l}_n(\mathcal{X}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}[\mathbb{E}[\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}]]. \\ &= \frac{1}{\phi(h)M_1f_1(\mathcal{X})+o(\phi(h))}\phi(h)M_1f_1(\mathcal{X})+O_{a.s}(\phi(h)) \\ & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

Proof of lemma 3.2 The proof of this lemma is the same as that of lemma 6.2 in [2].
Proof of lemma 3.3 Remind that

$$B_{n,2}(\mathcal{X},t) = \frac{\bar{\bar{f}}_n(\mathcal{X},t)}{\bar{l}_n(\mathcal{X})} - f^{\mathcal{X}}(t) = \frac{\bar{\bar{f}}_n(\mathcal{X},t) - \bar{l}_n(\mathcal{X})f^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{l}_n(\mathcal{X})}.$$

By conditions $(H3)$ and by using properties of conditional expectation with respect to the σ-fields $\mathcal{G}_{i-1}$ and T_i and taking into account the fact that $\mathbb{I}_{\{T_i\le C_i\}}\varphi(Y_i) = \mathbb{I}_{\{T_i\le C_i\}}\varphi(T_i)$, we obtain

$$\begin{aligned}\bar{\bar{f}}_n(\mathcal{X},t) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}] \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i(\mathcal{X})\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{G}_{i-1},T_i]|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i(\mathcal{X})\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|X_i,T_i]|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i(\mathcal{X})\bar{G}^{-1}(T_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-T_i))\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T_i\le C_i\}}|X_i,T_i]|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i(\mathcal{X})h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-T_i))|\mathcal{F}_{i-1}\}. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Then, by a double conditioning with respect to $\mathcal{G}_{i-1}$, we have

$$\bar{\bar{f}}_n(\mathcal{X},t)-\bar{l}_n(\mathcal{X})f^{\mathcal{X}}(t) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i(\mathcal{X})[\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-T_i))|X_i)-f^{\mathcal{X}}(t)]|\mathcal{F}_{i-1}\}.$$

Where

$$\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-T_i))|X_i) = \frac{1}{h_H}\int_R H^{(1)}(h_H^{-1}(t-u))f^{X_i}(u)du,$$

and by changing variables, we obtain

$$\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-T_i))|X_i) = \int_R H^{(1)}(z)f^{X_i}(t-h_H z)dz.$$

Hence, by assumptions $(H5)$ and $(H6)$ and equation 3.14, we have

$$\begin{aligned}
|\bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t) - \bar{l}_n(\mathcal{X})f^{\mathcal{X}}(t)| &= \left|\frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left\{\Delta_i(\mathcal{X})\int_R H^{(1)}(z)\left|f^{X_i}(t-h_H z) - f^{\mathcal{X}}(t)\right| \ dz \ |\mathcal{F}_{i-1}\right\}\right| \\
&\leq C(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})\frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\Delta_i(\mathcal{X})|\mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

For the second part of lemma 3.3, since $R_{n,2}(\mathcal{X},t) = -B_{n,2}(\mathcal{X},t)(l_n(\mathcal{X}) - \bar{l}_n(\mathcal{X}))$, and by the statement of equation 3.17 and lemma 3.1, one gets

$$\sup_{t\in\mathcal{S}}|R_{n,2}(\mathcal{X},t)| = O_{a.s.}\left((h_K^{b_1}+h_H^{b_2})\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right)\right).$$

Proof of lemma 3.5 The compactness of S permits to write $S \subset \cup_{k=1}^{s_n} S_k$, where $S_k = (t_k - l_n, t_k + l_n)$ and sequences (l_n, s_n) such that $l_n s_n \leq C$, we put $t_y = arg\ min_{\{k\in 1,\dots,s_n\}}|y-t_k|$, we obtain

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathcal{S}}\left|\tilde{f}_n(\mathcal{X},t) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t)\right| &\leq \underbrace{\sup_{t\in\mathcal{S}}\left|\tilde{f}_n(\mathcal{X},t) - \tilde{f}_n(\mathcal{X},t_y)\right|}_{T_1} + \underbrace{\sup_{t\in\mathcal{S}}\left|\tilde{f}_n(\mathcal{X},t_y) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t_y)\right|}_{T_2} \\
&+ \underbrace{\sup_{t\in\mathcal{S}}\left|\bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t_y) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X},t)\right|}_{T_3}.
\end{aligned}$$

For T_1 we use condition $(H6)$ and $H9$, and we denote $H_i(y) = H\left(\frac{t-Y_i}{h_H}\right)$,

$$\begin{aligned}
T_1 &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}\Delta_i(\mathcal{X})|H_i(y)-H_i(t_y)| \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sup_{y\in\mathcal{S}}|y-t_y|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)\frac{\Delta_i(\mathcal{X})}{{h_H}^2} \\
&\leq A\frac{l_n}{{h_H}^2},
\end{aligned}$$

by choosing $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}}$, we have

$$\frac{l_n}{{h_H}^2} = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}\right).$$

For T_3 using analogous arguments as for T_1 we have

$$\begin{aligned}
T_3 &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}\Delta_i(\mathcal{X})|H_i(y)-H_i(t_y)||\mathcal{F}_{i-1}] \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sup_{y\in\mathcal{S}}|y-t_y|\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)\Delta_i(\mathcal{X})}{{h_H}^2}|\mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&\leq A\frac{l_n}{{h_H}^2}\longrightarrow 0 \;\; a.s. \;\; \text{as} \;\; n\to\infty.
\end{aligned}$$

Concerning T_2 observing that

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)\Delta_i(\mathcal{X})h_H^{-1}H_i(t_y)-\mathbb{E}(\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)\Delta_i(\mathcal{X})h_H^{-1}H_i(t_y)|\mathcal{F}_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(\mathcal{X})}\sum_{i=1}^{n}L_{i,n}(\mathcal{X},t_y).
\end{aligned}$$

Where $L_{i,n}(\mathcal{X},t_y)$ is a martingale difference sequence with respect to σ fields $\mathcal{F}_{i-1}$. Similar to the proof of lemma 5 in [10], under $(H1)-(H3)$ and for $p\geq 2$ we can write

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_{i,n}^p(\mathcal{X},t_y)|\mathcal{F}_{i-1}) &= p!C^{p-2}[M\phi(h)f_{i,1}(\mathcal{X})+O_{a.s}(g_{i,\mathcal{X}}(h))]/h_H^{p-1} \\
&\leq p!C^{p-2}\phi(h)[Mb_i(\mathcal{X})+1]/h_H^{p-1}.
\end{aligned}$$

Where $C = 2\ max(1, a_1^2)$ and $M = (c_2 C)^2$. Next, by taking $d_i^2 = \phi(h)[Mb_i(\mathcal{X}) + 1]/h_H^{p-1}$, $D_n = \sum_{i=1}^n d_i^2$, Under $(H2)(ii)$ and $(H2)(v)$, we get $n^{-1}D_n = \phi(h)[MD(\mathcal{X}) + o(1)/h_H^{p-1}]$ as $n \longrightarrow \infty$.
Thus, by applying lemma 3.8, for any $\epsilon_0 > 0$ and $p = 2$, one gets

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\sup_{t\in\mathcal{S}} \left| \tilde{f}_n(\mathcal{X}, t_y) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X}, t_y) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}} \right) \\
\leq\ & s_n \max_{k=1,\dots,s_n} \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n L_{i,n}(\mathcal{X}, t_k) \right| > n\epsilon_0 \mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})) \sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}} \right) \\
\leq\ & 2s_n \exp\left\{ - \frac{(n\epsilon_0 \mathbb{E}(D_1(\mathcal{X})))^2 \frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}{2D_n + 2Cn\epsilon_0\mathbb{E}(D_1(\mathcal{X}))\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}}} \right\} \\
\leq\ & 2s_n \exp\{-C_1{\epsilon_0}^2 \log n\} \\
\leq\ & 2n^{\frac{3\beta}{2}+\frac{1}{2}-C_1\epsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Where C_1 is a positive constant, Thus, taking ϵ_0 largely enough, it follows that

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P} \left(\sup_{t\in\mathcal{S}} \left| \tilde{f}_n(\mathcal{X}, t_y) - \bar{\tilde{f}}_n(\mathcal{X}, t_y) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi(h_K)}} \right) < \infty.$$

Then, by using the Borel-Cantelli lemma the proof can be finished.
Proof of lemma 3.6 The proof of this lemma is identical to the proof of lemma 6.6 in [2].
Proof of lemma 3.7 The proof of this lemma is very similar to proof of lemma 5.2 in [8].
Proof of proposition 3.3 We have directly from proposition 3.1

$$\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} \widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) = F^{\mathcal{X}}(t)\} = 1.$$

On the other hand, by taking account that $F^{\mathcal{X}}(t) < 1$, we have

$$\left| (1 - \widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)) - (1 - F^{\mathcal{X}}(t)) \right| = \left| \widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) - F^{\mathcal{X}}(t) \right|.$$

That implies,

$$1 - \widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 1 - F^{\mathcal{X}}(t).$$

Proof of theorem 3.1 The proof of theorem is based on the following decomposition

$$\widehat{h}_n^{\mathcal{X}}(t) - h^{\mathcal{X}}(t) = \frac{1}{1-\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)}\left[\widehat{f}_n^{\mathcal{X}}(t) - f^{\mathcal{X}}(t)\right] + \frac{h^{\mathcal{X}}(t)}{1-\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t)}\left[\widehat{F}_n^{\mathcal{X}}(t) - F^{\mathcal{X}}(t)\right]. \tag{3.25}$$

By combining propositions 3.1, 3.2 and 3.3 we get to show the result.

Lemma 3.10 *Assume that* $(H1)-(H4)$ *and* $(H6)-(H10)$ *hold true, we have*

$$\sqrt{n\phi(h_K)}Q_{n,1}(\mathcal{X},t) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_F^2(\mathcal{X},t)) \quad as \quad n\to\infty. \tag{3.26}$$

Where $\sigma_F^2(\mathcal{X},t)$ *is defined in proposition 3.4*

Lemma 3.11 *Under conditions* $(H1)-(H3)$ *and* $(H6)-(H10)$, *one gets*

$$\sqrt{nh_H\phi(h_K)}Q_{n,2}(\mathcal{X},t) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_f^2(\mathcal{X},t)) \quad as \quad n\to\infty. \tag{3.27}$$

Where $\sigma_f^2(\mathcal{X},t)$ *is defined in proposition 3.5*

Proof of lemma 3.10 The proof of this lemma is identical to proof of lemma 6.9 in [2].
Proof of lemma 3.11 Let's designate by

$$\eta_{n,i} = \left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{1/2}\left(\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i)) - f^{\mathcal{X}}(t)\right)\frac{\Delta_i(\mathcal{X})}{\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X}))},$$

and determine $\xi_{n,i} = \eta_{n,i} - \mathbb{E}[\eta_{n,i}|\mathcal{F}_{i-1}]$. It is visible that

$$\sqrt{nh_H\phi(h_K)}Q_{n,2}(\mathcal{X},t) = \sum_{i=1}^{n}\xi_{n,i}. \tag{3.28}$$

In this way, the summands in Equation (3.28) forms a triangular array of stationary martingale differences regarding to the σ-fields $\mathcal{F}_{i-1}$. The asymptotic normality of $Q_{n,2}(\mathcal{X},t)$ can be established by applying the central limit theorem for discrete-time arrays of real-valued martingales (see Hall and Heyde). Thus, we need these statements :
(a) $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_f^2(\mathcal{X},t)$.
(b) $n\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\xi_{n,i}|>\epsilon]}) = o(1)$ holds for any $\epsilon > 0$.

Proof of part (a) :
Observe that

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1})\right|\leq\sum_{i=1}^{n}[|\mathbb{E}(\eta_{n,i})|\mathcal{F}_{i-1}|]^2. \tag{3.29}$$

By using lemma 3.9 and equation 3.23 and 3.24, we get

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(\eta_{n,i}|\mathcal{F}_{i-1})| &= \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X}))}\left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\mathbb{E}[\Delta_i(\mathcal{X})\left(\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))-f^{\mathcal{X}}(t)\right)|\mathcal{F}_{i-1}]\right|\\ &= O_{a.s}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})\left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f_{i,1}(\mathcal{X})}{f_1(\mathcal{X})}+O_{a.s}\left(\frac{g_{i,\mathcal{X}}(h)}{\phi(h)}\right)\right).\end{aligned}$$

Therefore, by $(H2)$(ii)(iii), we have

$$\sum_{i=1}^{n}[|\mathbb{E}(\eta_{n,i})|\mathcal{F}_{i-1}|]^2=O_{a.s}(h_H\phi(h_K)(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})^2).$$

So, now we have to show that,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1})\xrightarrow{\mathbb{P}}\sigma_f^2(\mathcal{X},t),\quad as\quad n\to\infty. \tag{3.30}$$

To prove equation 3.30 we proceed as well

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) &= \frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\Delta_i^2(\mathcal{X})\left(\delta_i\bar{G}^{-1}(Y_i)h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))-f^{\mathcal{X}}(t)\right)^2|\mathcal{F}_{i-1}\right\}\\ &= \frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\Delta_i^2(\mathcal{X})\mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\right.\right.\right.\\ &- \left.\left.\left.f^{\mathcal{X}}(t)\right)^2|\mathcal{X}_i\right]|\mathcal{F}_{i-1}\right\}.\end{aligned}$$

Then, by definition of the conditional variance as proposed in, we obtain

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\quad\left[\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))-f^{\mathcal{X}}(t)\right)^2|\mathcal{X}_i\right]\\ &= Var\left[\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right]+\left[\mathbb{E}\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right)-f^{\mathcal{X}}(t)\right]^2.\\ &= M_{n1}+M_{n2}.\end{aligned}$$

Concerning M_{n2}, similar to statements 3.23 and 3.24 and lemma 3.9, we obtain

$$\frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(\mathcal{X})M_{n2}|\mathcal{F}_{i-1}\} = O_{a.s}(h_H(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})^2)\left[\frac{M_2}{M_1^2}\frac{1}{f_1(\mathcal{X})}+o_{a.s.}(1)\right].$$

Then,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(\mathcal{X})M_{n2}|\mathcal{F}_{i-1}\} = 0, \quad a.s.$$

Concerning M_{n1},

$$\begin{aligned}
M_{n1} &= Var\left[\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))\right)^2|\mathcal{X}_i\right]-\left[\mathbb{E}\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right)\right]^2\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\delta_i}{\bar{G}^2(Y_i)}\frac{1}{h_H^2}H^{(1)^2}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right]-\left[\mathbb{E}\left(\frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)}h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(t-Y_i))|\mathcal{X}_i\right)\right]^2\\
&= T_1+T_2.
\end{aligned}$$

We examine T_1 as follows :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{h_H^2\bar{G}(T_i)}H^{(1)^2}(h_H^{-1}(t-T_i))|\mathcal{X}_i\right]\\
&= \int_R\frac{1}{h_H^2}H^{(1)^2}(h_H^{-1}(t-u))\frac{1}{\bar{G}(u)}f^{\mathcal{X}}(u)du.
\end{aligned}$$

By changing variables, we have :

$$T_1 = \int_R\frac{1}{h_H}H^{(1)^2}(v)\frac{1}{\bar{G}(t-h_Hv)}dF^{\mathcal{X}}(t-h_Hv).$$

By the first-order Taylor's expansion of the function $\bar{G}^{-1}(.)$ around zero, one gets

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{h_H}\int_{\mathbb{R}}H^{(1)^2}(v)\bar{G}^{-1}(t)dF^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)+\frac{1}{\bar{G}^2(t)}\int_{\mathbb{R}}vH^{(1)^2}(v)\bar{G}^{-1}(t^*)dF^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)+o(1)\\
&= V_1+V_2.
\end{aligned}$$

Where t^* is between t and $t-h_Hv$.
Under condition $(H10)$, we have $V_2 \le h_H(\sup_{u\in\mathbb{R}}\frac{|G^{(1)}(u)|}{\bar{G}^2(t)}\int_{\mathbb{R}}vf^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)dv)$.
Then, using condition $(H5)$, we obtain $V_2 = O(h_H)$.

Concerning V_1, under condition $(H5)$ we have

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{h_H\bar{G}(t)}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v)f^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)dv \\ &= \frac{1}{h_H\bar{G}(t)}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v)[f^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)-f^{\mathcal{X}}(t)]dv + \frac{1}{h_H\bar{G}(t)}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v)f^{\mathcal{X}}(t)dv \\ &= O_{a.s.}(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}) + \frac{f^{\mathcal{X}}(t)}{h_H\bar{G}(t)}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v)dv. \end{aligned}$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(\mathcal{X})M_{n1}|\mathcal{F}_{i-1}\} \\ = & \left(O(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}) + \frac{f^{\mathcal{X}}(t)}{h_H\bar{G}(t)}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v)dv + O(h_H) - (O(h_K^{b_1}+h_H^{b_2})+f^{\mathcal{X}}(t))^2\right) \\ \times & \frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2|\mathcal{F}_{i-1}\}. \end{aligned}$$

Finally, under lemma 3.9, we get

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{h_H\phi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(\mathcal{X})))^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\Delta_i^2(\mathcal{X})M_{n1}|\mathcal{F}_{i-1}\} = \frac{M_2}{M_1^2}\frac{f^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{G}(t)f_1(\mathcal{X})}\int_R H^{(1)^2}(v)dv.$$

Therefore,

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}) = \frac{M_2}{M_1^2}\frac{f^{\mathcal{X}}(t)}{\bar{G}(t)f_1(\mathcal{X})}\int_R H^{(1)^2}(v)dv = \sigma_f^2(\mathcal{X},t).$$

So we arrive to demonstrate the part (a).

Proof of part (b) : The lindeberg condition implies that $n\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\xi_{n,i}|>\epsilon]}) \leq 4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]})$, where $\mathbb{I}_A$ is an indicator function of a set A. Let $a>1$ and $b>1$ such that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Using Hölder's and Markov's inequalities, one can write for all $\epsilon>0$, $\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2\mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) \leq \frac{\mathbb{E}|\eta_{n,i}|^{2a}}{(\epsilon/2)^{2a/b}}$. Taking C_0 a positive constant and $2a=2+\delta$ for any $\delta>0$, it follows that

$$
\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C_0 \left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))^{2+\delta}} \\
&\times \mathbb{E}\left(\left[\left|\frac{\delta_i}{h_H\bar{G}(Y_i)} H^{(1)}\left(\frac{t-Y_i}{h_H}\right) - f^{\mathcal{X}}(t)\right| \Delta_i(\mathcal{X})\right]^{2+\delta}\right) \\
&\leq C_0 \left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))^{2+\delta}} \\
&\times \mathbb{E}\left((\Delta_i(\mathcal{X}))^{2+\delta}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\delta_i}{h_H\bar{G}(Y_i)} H^{(1)}\left(\frac{t-Y_i}{h_H}\right) - f^{\mathcal{X}}(t)\right|^{2+\delta} |\mathcal{X}_i\right]\right).
\end{aligned}
$$

By changing variables, we obtain

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\frac{\delta_i}{h_H\bar{G}(Y_i)} H^{(1)}\left(\frac{t-Y_i}{h_H}\right) - f^{\mathcal{X}}(t)\right|^{2+\delta} |\mathcal{X}_i\right] \\
&= C_0\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(h_H\bar{G}(t-h_Hv))^{1+\delta}} H^{(1)^{2+\delta}}(v) f^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)dv + f^{2+\delta}(t|\mathcal{X})\right).
\end{aligned}
$$

By using lemma 3.9, we obtain

$$
\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}|>\frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C_0 \left(\frac{h_H\phi(h_K)}{n}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n\mathbb{E}(\Delta_i(\mathcal{X}))^{2+\delta}}{h_H^{1+\delta}(\mathbb{E}(\Delta_1(\mathcal{X})))^{2+\delta}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\bar{G}(t-h_Hv))^{1+\delta}} H^{(1)^{2+\delta}}(v) f^{\mathcal{X}}(t-h_Hv)dv + f^{2+\delta}(t|\mathcal{X}) \\
&\leq C_0\left(nh_H\phi(h_K)\right)^{\frac{-\delta}{2}} \frac{M_{2+\delta}f_1(\mathcal{X}) + o(1)}{M_1^{2+\delta}f_1^{2+\delta}(\mathcal{X}) + o(1)} \\
&= O((nh_H\phi(h_K))^{\frac{-\delta}{2}}).
\end{aligned}
$$

This yields the proof.

Proof of proposition 3.4

By combining decompositions 3.9, 3.11 and lemma 3.1, 3.6 with fact that $\sqrt{n\phi(h_K)}B_{n,1}(\mathcal{X},t) \to 0$ and $\sqrt{n\phi(h_K)}R_{n,1}(\mathcal{X},t) \to 0$, a.s. as $n\to\infty$, then we conclude that asymptotic normality will be treated by the term $Q_{n,1}(\mathcal{X},t)$ which is studied in lemma 3.10. However, the proof of proposition is finished.

Proof of proposition 3.5

By combining decompositions 3.10, 3.12 and lemma 3.1, 3.7 with fact that $\sqrt{nh_H\phi(h_K)}B_{n,2}(\mathcal{X},t) \to 0$ and $\sqrt{nh_H\phi(h_K)}R_{n,2}(\mathcal{X},t) \to 0$, a.s. as $n\to\infty$, then we conclude that asymptotic normality will be treated by the term $Q_{n,2}(\mathcal{X}, t)$ which is studied in lemma 3.11. However, the proof of proposition is finished.

Proof of theorem 3.2 From equation 3.3 and by using the decomposition 3.25 and with combination of propositions 3.3, 3.4 and 3.5, we get to prove theorem.

Acknowledgment

The authors would like to thank an anonymous referee as well as the associate editor for suggestions which improved the presentation of this work.

Bibliographie

[1] Bosq, D. (2000).*Linear Processes in Function Spaces : Theory and applications.* Lecture Notes in Statistics, **1**,Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[2] Chaouch, M and Khardani, S.(2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *J. Nonparametric Statistics.* **27**, 65-87.

[3] Estévez-Pérez, G.(2002). On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation. *J. Statist. Probab. Lett.* **57**, 231-241.

[4] Estévez-Pérez, G. and Quintela-del-Rio, A. and Vieu, P. (2002). Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. *J. Statist. Plann. Inference.***104**, 1-30.

[5] Ferraty, F. Rabhi, A. and Vieu, P. (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.***53**, 1-18.

[6] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis.* Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[7] Kaplan, E.L. and Meier, P.(1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of American Statistical Association.* **53**, 457-481.

[8] Khardani, S. and Lemdani, M. and Ould-Said, E.(2010). Some Asymptotic Properties for a Smooth Kernel Estimator of the Conditional Mode under Random Censorship. *Journal of Korean Statistical Society.***39**, 455-469.

[9] Laib, N. and Louani, D.(2010). Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties. *J. Multivariate Anal.***101**, 2266-2281.

[10] Laib, N. and Louani, D.(2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. *J. Statist. Plann. Inference.* **141**, 359-372.

[11] Lecoutre, J. P. and Ould-Said, E.(1995). Hazard rate estimation for strong mixing and censored processes. *J. Nonparametr. Statist.***5**, 83-89.

[12] Massim, I. and Mechab, B. (2016). Local linear estimation of the conditional hazard function. *International Journal of Statistics & Economics.***17**, 1-11.

[13] Padgett, W. J. (1988). Nonparametric estimation of density and hazard rate functions when samples are censored.*Elsevier Science Publishers.***7**, 313-331.

[14] Quintela-del-Río, A.(2006). Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statistics and Probability Letters.***76** , 1117-1124.

[15] Ramsay, J. O. and Silverman, B. W.(2005).*Functional Data Analysis.*Springer-Verlag New York. **1**, 425.

[16] Roussas, G.(1989). Hazard rate estimation under dependence conditions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22**, 81-93.

[17] Roussas, G.(1990). Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions : application to hazard rate. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **25**, 81-104.

[18] Tanner, M. and Wong, W. H. (1983). The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel methods. *Ann. Statist.* **11**, 989-993.

[19] Van Keilegom, I. and Veraverbeke, N. (2001).Hazard rate estimation in nonparametric regression with censored data. *Ann. Inst. Statist. Math.* **53**, 730-745.

[20] Vieu, P. (1991). Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence. *J. Multivariate Anal.* **39**, 324-347.

[21] Watson, G. S. and Leadbetter, M.R. (1964). Hazard analysis. *Sankhyia.* **26**, 101-116.

[22] Youndjé, É. and Sarda, P. and Vieu, P.R. (1996). Optimal smooth hazard estimates. *Test.* **5**, 379-394.

Chapitre 4

Nonparametric estimation of the relative error in functional regression and censored data

Nonparametric estimation of the relative error in functional regression and censored data

Nesrine Hamidi[1], **Boubaker Mechab**[2], **Samir Benaissa**[3]
Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
University of Djillali Liabes
BP 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria.
e-mail :[1]nisou_93@hotmail.com, [2]mechaboub@yahoo.fr, [3]benaissamir@yahoo.fr

Abstract

In this paper, the almost complete consistency and the asymptotic normality of the estimator of the regression operator in the case of a censored response given a functional explanatory variable are investigated under some mild conditions. The latter is constructed from the minimization of the mean squared relative error, the novelty of this work compared to works found in the literature is that the response variable is censored. A simulation study is carried out to compare the finite sample performance based on mean square error between the classical regression and the relative error regression.

4.1 Introduction

Functional data analysis is a section of statistics that studies observation of infinite dimension, more precisely, the observations that are not real or vector variables but random curves. This kind of data appears in many practical situations, and it has been the subject of many works. The first authors who discussed this type of data are Ramsay and Silverman [24] for the parametric models and monograph of Ferraty and Vieu [10] for the nonparametric estimation. Recently, many topics concerning the analysis of functional data have been developed and the most recent advances in this field have been collected in the book of Ould Said et al. [22]. The particularity of the nonparametric estimation consists in estimating an infinite number of parameters whose function is unknown, elements of a certain functional class, such as the density function or the regression function. The latter is one of many methods to predict the link between the response variable Y and the explanatory variable X, we assume the existence of a function $r(x)$ which expresses the relationship between these two variables. The literature concerning this field is developed, we refer to Ferraty and Vieu [9], they established the strong consistency of the regression function when the response is scalar given a functional explanatory variable.
Usually, to estimate the nonparametric regression model, the authors use the least squares error as a criterion for constructing the predictors. This method is very sensitive to outliers, therefore, the presence of large outliers can lead to inappropriate results. For this, the authors have developed methods that study robustification of the nonparametric functional regression, among these authors, we see the work of Attouch et al. [3] and Gheriballah et al. [11].

The relative squared error criterion is more convenient as a measure of performance than the previous criterion, since the notion of relative regression is more recent than the others, the results still limited. Jones et al. [15] studied the asymptotic properties of a consistent estimator for this model by using the kernel method. We refer to Mechab and Laksaci [21] for recent advances, they have studied nonparametric relative regression for associated variables. In a functional framework, the paper of Demongeot et al. [5] brought an extra to the research by studying the almost complete convergence and asymptotic normality of the proposed estimator.

In this paper, we investigate the asymptotic properties of the relative error regression by the kernel method and under censoring data. The literature of this kind of incomplete functional data is quite restricted, we refer to Horrigue and Ould Said [13, 14] for the non parametric regression quantile estimation under random censorship and to Altendji et al. [1] for the estimation of the functional relative error regression under random left truncation, where they established the almost complete convergence with rates, as well as the asymptotic normality of the kernel estimator of the functional relative error regression for truncated data. In a more general field, we can see (for instance, Hsing and Eubank [16] and Aneiros et al. [2]).

The organization of this paper is as follows. In section 2, we construct an estimator of the relative error regression for a censored response. The necessary conditions and main results are presented in section 3. In Section 4, numeric result has been conducted in order to highlight, the performances of our estimator. We establish a confidence interval as an application for the asymptotic normality in section 5. Finally, the proofs are given in the Appendix.

4.2 Estimation Model

4.2.1 A nonparametric estimator of the relative error regression

Let $Z_i = (X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ be a $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ valued measurable strictly stationary process, a common nonparametric modelization of the link between the response variables Y and the explanatory variable X is to suppose that

$$Y = r(X) + \varepsilon. \tag{4.1}$$

Where ε is a random error variable and r is a regression operator usually estimated by minimizing the expected squared loss function :

$$\mathbb{E}[(Y - r(X))^2 | X].$$

In some situations, this loss function which is considered as a measure of prediction, may not be suitable. Among these situations, the presence of outliers can lead to inappropriate results since all variables have an equal weight. For this, we overcame this limitation by proposing to estimate the function r with respect to the minimization of the following mean squared relative error :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{Y-r(X)}{Y}\right)^2|X\right] \quad \text{For} \quad Y>0. \tag{4.2}$$

Obviously, this loss function is a more meaningful measure of prediction performance in the presence of outliers since the range of predicted values is large. Furthermore, the solution of (4.2) can be expressed by the ratio of first two conditional inverse moments of Y given X. The best predictor of Y given X (as studied in Park and Stefanski [23]) is :

$$r(x)=\frac{\mathbb{E}[Y^{-1}|X=x]}{\mathbb{E}[Y^{-2}|X=x]}.$$

We estimate the regression operator r under our relative loss as :

$$\widetilde{r}(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^{-1}K(h^{-1}d(x-X_i))}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^{-2}K(h^{-1}d(x-X_i))}. \tag{4.3}$$

Where K is a kernel and $h=h_n$ is a sequence of positive real numbers.

4.2.2 The relative error regression under a random censorship

Let $(X_i,Y_i)_{i=1,\dots,n}$ be a $\mathcal{F}\times\mathbb{R}$ valued measurable strictly stationary process, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric abstract space, denote by d(.,.) a semi-metric associated with the space $\mathcal{F}$.

We observe the lifetimes Y_n as a sequence of independent and identically distributed (i.i.d) random variable (with common unknown absolutely continuous distribution function F with density f).

In censoring case, due to possible withdrawals of items from the study, we observe the censored lifetimes C instead observing the lifetimes Y. Supposing that (C_i) is a sequence of i.i.d censoring random variable (r.v.) with common unknown continuous distribution function G.

We remark the pairs (T_i,δ_i) where :

$$T_i=Y_i\wedge C_i \quad \text{and} \quad \delta_i=\mathbb{I}_{\{Y_i\le C_i\}}, \quad 1\le i\le n,$$

where $\mathbb{I}_A$ denotes the indicator of no censoring.
We consider a pseudo estimator of the regression operator r under the censorship and the relative loss given by :

$$\widetilde{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(T_i) T_i^{-1} K(h^{-1} d(x - X_i))}{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(T_i) T_i^{-2} K(h^{-1} d(x - X_i))} = \frac{\widetilde{g}_1(x)}{\widetilde{g}_2(x)}. \tag{4.4}$$

Where $\bar{G}(.) = 1 - G(.)$ and for $\quad l = 1, 2,$

$$\widetilde{g}_l(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(T_i) T_i^{-l} K_i(x) \quad ,$$

where $K_i(x) = K(h^{-1} d(x - X_i))$.
Since G is unknown in practice, one can estimate it using the Kaplan and Meier [17] estimator defined as :

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1}\right)^{\mathbb{I}_{\{T_{(i)} \leq t\}}} & \text{if } t < T_{(n)}, \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

Where $T_{(1)} < T_{(2)} < ... < T_{(n)}$ are the order statistics of $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $\delta_{(i)}$ is concomitant with $T_{(i)}$. Thus, an estimator of r is given by :

$$\widehat{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-1} K(h^{-1} d(x - X_i))}{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-2} K(h^{-1} d(x - X_i))} = \frac{\widehat{g}_{1,n}(x)}{\widehat{g}_{2,n}(x)}, \tag{4.5}$$

where

$$\widehat{g}_{l,n}(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-l} K_i(x) \quad \text{for} \quad l = 1, 2.$$

Let $\tau_F = \sup\{y, \bar{F}(y) > 0\}$ and $\tau_G = \sup\{y, \bar{G}(y) > 0\}$ be a upper endpoints of $\bar{F}$ and $\bar{G}$, respectively. We assume that $\tau_F < \infty$, $\bar{G}(\tau_F) > 0$ (this implies that $\tau_F \leq \tau_G$) and that $(C_n)_{n \geq 1}$ and $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ are independent.

4.3 Assumptions and main results

4.3.1 The almost complete convergence

We fixe a point x in $\mathcal{F}$ and N_x denotes a fixed neighborhood of this point. We will denote by C and C' some strictly positive constants, $g_l(x) = \mathbb{E}[Y^{-l}|X = x]$ for $l = 1, 2$ and we pose $B(x, h) = \{x' \in \mathcal{F}|d(x', x) < h\}$ a ball of center x and a radius h.
In what follows, we will need the following assumptions :

(H1) For all $h > 0$, $\mathbb{P}(X \in B(x, h)) =: \phi_x(h) > 0$ and $\lim_{h\to 0} \phi_x(h) = 0$.

(H2) For all $(x_1, x_2) \in N_x^2$ and $l = 1, 2$, we have

$$|g_l(x_1) - g_l(x_2)| \le C d^{k_l}(x_1, x_2) \quad \text{for} \quad k_l > 0.$$

(H3) The kernel K is a measurable function that is supported by $(0, 1)$ and satisfies :

$$0 < C \le K(.) \le C' < \infty.$$

(H4) The bandwidth satisfies :

$$\lim_{n\to+\infty} h = 0 \ \text{ and } \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n\phi_x(h)} = 0.$$

(H5) The inverse moments of the response variable verify :

$$\mathbb{E}[Y^{-m}|X = x] < C < \infty \quad \text{for all} \quad m \ge 2.$$

Remarque 4.1 *The hypothesis (H1) defines the concentration properties of the probability measures of the explanatory variable X, which is provided by means of a function $\phi_x(.)$. This property allows to propose an alternative to the curse of dimensionality problem. (H2) is a regularity condition to facilitate the calculation of the bias part of our estimator. (H3)-(H5) are technical assumptions to ensure the convergence of our results.*

Theorem 4.1 *Assume that conditions (H1)-(H5) hold true, we get*

$$|\widehat{r}_n(x) - r(x)| = O(h^{k_1}) + O(h^{k_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right). \tag{4.6}$$

Proof of Theorem 4.1. The proof of this theorem is based on the following decomposition :

$$\begin{aligned} |\widehat{r}_n(x) - r(x)| &= \frac{1}{\widehat{g}_{2,n}(x)}\left[|\widehat{g}_{1,n}(x) - \widetilde{g}_1(x)| + |\widetilde{g}_1(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]| + |\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] - g_1(x)|\right] \\ &+ \frac{r(x)}{\widehat{g}_{2,n}(x)}\left[|\widetilde{g}_2(x) - \widehat{g}_{2,n}(x)| + |\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] - \widetilde{g}_2(x)| + |g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]|\right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Thus, we prove Theorem 4.1 by the following intermediate results.

Lemma 4.1 *Under assumptions (H1)-(H4), we obtain, for* $l = 1, 2$,

$$|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right] - g_l(x)| = O(h^{k_l}). \tag{4.8}$$

Lemma 4.2 *Under conditions (H1) and (H3)-(H5), we have, for* $l = 1, 2$,

$$|\widetilde{g}_l(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right]| = O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right). \tag{4.9}$$

Lemma 4.3 *Assume hypotheses (H1)-(H5) hold, we have, for* $l = 1, 2$,

$$|\widehat{g}_{l,n}(x) - \widetilde{g}_l(x)| = O_{a.s}\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right). \tag{4.10}$$

Corollary 4.1 *Under assumptions of Theorem 4.1,we get*

$$|\widehat{g}_{2,n}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} g_2(x).$$

4.3.2 Asymptotic normality

The purpose of this section is to establish the asymptotic normality of the estimator $\widehat{r}_n(x)$. To do that, we consider the following assumptions :

(C1) The hypothesis (H1) holds and there exists a function $\chi_x(.)$ such that, for all

$s \in [0,1]$, we have :

$$\frac{\phi_x(sr)}{\phi_x(r)} = \chi_x(s) + o(1) \text{ and } \int_0^1 (K^j)'(s)\chi_x(s)ds < \infty \text{ for } j \geq 1.$$

(C2) The functions $\Psi_l(.) = \mathbb{E}[g_l(X) - g_l(x)|d(x,X) = .]$ are derivable at 0, for $l = 1, 2$.

(C3) The hypothesis (H3) holds and the kernel K is a differentiable function on $]0,1[$ and its first derivative function K' satisfies that $C < K'(.) < C'$.

(C4) The small ball probability satisfies :

$$n\phi_x(h) \to \infty.$$

(C5) The inverse moments $g_m = \mathbb{E}[|\bar{G}^{-1}(Y)Y^{-m}||X = .]$ of the censored response variable are continuous in a neighborhood of x, for $m = 1, 2, 3, 4$.

Remarque 4.2 *The condition $C1$ is realized by several small ball probability functions, there exist many examples, we quote the following (which can be found in [8]) :*

1) For some $\gamma > 0$, $\phi_x(h) = C_x h^\gamma$ with $\chi_x(u) = u^\gamma$,

2) for some $\gamma > 0$ and $p > 0$, $\phi_x(h) = C_x h^\gamma \exp\{-\frac{C}{h^p}\}$ with $\chi_x(u) = \delta_1(u)$ where $\delta_1(.)$ is Dirac function,

3) $\phi_x(h) = \frac{C_x}{|\log(h)|}$ with $\chi_x(u) = \mathbb{I}_{[0,1]}(u)$, where $\mathbb{I}_A$ is an indicator function of a set A.

Theorem 4.2 *Suppose that conditions (C1)-(C5) hold true, for all $x \in \mathcal{F}$, we have*

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}} (\widehat{r}_n(x) - r(x)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \quad as \quad n \to \infty.$$

Where $\xrightarrow{D}$ means the convergence in distribution
and

$$\sigma^2(x) = \frac{M_2}{M_1^2}\left(g_2(x) + r^2(x)g_4(x) - 2r(x)g_3(x)\right).$$

With $M_0 = K(1) - \int_0^1 (sK(s))' \chi_x(s) ds$ *and* $M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(s) \chi_x(s) ds$ *for* $j = 1, 2$.

Proof of Theorem 4.2 From the decomposition 4.7 we get the following decomposition :

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_n(x) - r(x) &= \frac{1}{\widehat{g}_{2,n}(x) g_2(x)} \left[\left(\widetilde{g}_1(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] \right) g_2(x) + \left(\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] - \widetilde{g}_2(x) \right) g_1(x) \right. \\
&\quad + \left(\widehat{g}_{1,n}(x) - \widetilde{g}_1(x) \right) g_2(x) + \left(\widetilde{g}_2(x) - \widehat{g}_{2,n}(x) \right) g_1(x) \\
&\quad \left. + \left(\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] - g_1(x) \right) g_2(x) + \left(g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] \right) g_1(x) \right].
\end{aligned}$$

Then, Theorem 4.2 is a consequence of following lemmas.

Lemma 4.4 *Under the same conditions of Theorem 4.2, we have*

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\widetilde{g}_1(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] \right] g_2(x) + \left[\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] - \widetilde{g}_2(x) \right] g_1(x) \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1).$$

Lemma 4.5 *Under hypotheses of Theorem 4.2, we get*

$$\widehat{g}_{2,n}(x) \to g_2(x), \quad \textit{in probability}$$

and

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\widehat{g}_{1,n}(x) - \widetilde{g}_1(x) \right) g_2(x) + \left(\widetilde{g}_2(x) - \widehat{g}_{2,n}(x) \right) g_1(x) \right] \to 0, \quad \textit{in probability.}$$

Lemma 4.6 *Under hypotheses of Theorem 4.2, we obtain*

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{g_2(x)} \left(\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] - g_1(x) \right) g_2(x) + \left(g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] \right) g_1(x) \right] \to 0, \quad \textit{in probability.}$$

4.4 Numerical study

To compare the finite-sample performance of the proposed estimator of $r(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$ to the classical regression, we conducted a small simulation study. We consider a functional regression model,

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon$$

where the random variable ε is normally distributed as $\mathcal{N}(0,1)$ and

$$m(x) = 4\exp\left(\frac{1}{1+\int_0^\pi |x(t)|^2 dt}\right).$$

The functional variable X is chosen as a real-valued function with support $[0,\pi]$, we generate $n = 100$ functional data (see figure 1.) by :

$$X_i(t) = \sin(W_i(t)), \text{for all } t \in [0,\pi] \text{ et } i = 1, ..., n$$

where the random variables W_i are i.i.d. and follow the normal distribution $\mathcal{N}(0,1)$. The curves are discretized on the same grid which is composed of 100 equidistant values in $[0,\pi]$.

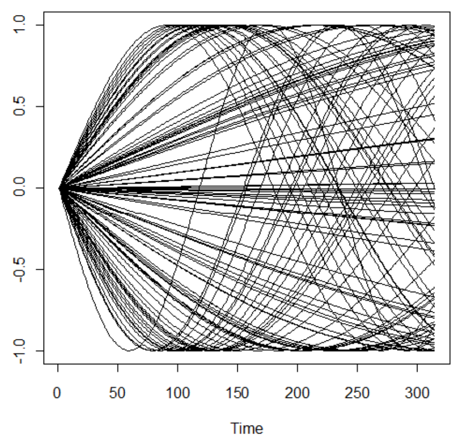

Fig. 1. Curves Xi

Our purpose is to compare the mean square error (MSE) of the estimator of relative error regression (R.E.R.) with the censored data set and with the classical regression estimator (C.R.) respectively which are defined as :

$$\widehat{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-1} K(h^{-1} d(x - X_i))}{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-2} K(h^{-1} d(x - X_i))}$$

and

$$\widehat{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i K(h^{-1} d(x - X_i))}{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) K(h^{-1} d(x - X_i))}.$$

We choose the quadratic kernel given by

$$K(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)\mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$$

and the bandwidth h is automatically selected by the procedure of the cross validation.

We give the formula of the mean squared errors of the both estimators

$$MSE(R.E.R.) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{r}_{n,i}(X_i))^2$$

and

$$MSE(C.R.) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{r}_{i}(X_i))^2$$

where $\widehat{r}_{n,i}$ (resp. $\widehat{r}_i$) is the leave-one-out version of $\widehat{r}_n$ (resp. $\widehat{r}$) computed by removing the i^{th} datum from the initial sample.

Table 1

Values of the MSE according to the number of introduced artificial outliers (first line).

Outliers	5	10	20	30	40	50
C.R.	0.5254138	70.67035	658.129	3702.399	5923.839	14809.60
R.E.R.	0.1219565	0.1256098	0.1261814	0.1261834	0.1261834	0.1261834

We can say that in our study case, the MSE values for both kernel methods increase considerably relative to the presence of the outliers, while these errors remain very small in the case of the relative error estimator. In conclusion, the relative error regression performs better than the classical regression, i.e., the classical regression is more sensitive to the presence of outliers than the relative error regression.

4.5 Confidence bands

A usual application of asymptotic normality is to establish confidence intervals for the true value of the proposed estimator. To determine this band, we need the estimation of the unknown quantity of the asymptotic variance. In our case, we have

$$\sigma^2(x) = \frac{M_2}{M_1^2}\left(g_2(x) + r^2(x)g_4(x) - 2r(x)g_3(x)\right).$$

Where M_1, M_2, r and g_l (for $l = 1, 2, 3, 4$) are unknown in practice and have to be estimated. Now a plug-in estimate for the asymptotic standard deviation $\sigma(x)$ can be easily obtained using the estimators $\widehat{M}_1, \widehat{M}_2, \widehat{r}_n$ and $\widehat{g}_{l,n}$ of M_1, M_2, r and g_l respectively. Precisely, we estimate $g_3(x)$ and $g_4(x)$ in the same way as for $g_1(x)$ and $g_2(x)$.

We estimate empirically the constants M_1 and M_2, as follows :

$$\widehat{M}_1 = \frac{1}{n\phi_x(h)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}_n^{-1}(T_i)K_i(x)$$

and

$$\widehat{M}_2 = \frac{1}{n\phi_x(h)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\bar{G}_n^{-1}(T_i)K_i^2(x).$$

Furthermore, we get

$$\widehat{\sigma}(x) = \left(\frac{\widehat{M}_2}{\widehat{M}_1^2}\left(\widehat{g}_{2,n}(x) + \widehat{r}_n^2(x)\widehat{g}_{4,n}(x) - 2\widehat{r}_n(x)\widehat{g}_{3,n}(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We have the following approximate $(1-\zeta)$ confidence band for $r(x)$

$$\left[\widehat{r}_n(x) - t_{1-\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\widehat{\sigma}^2(x)}{n\phi_x(h)}\right)^{\frac{1}{2}},\ \widehat{r}_n(x) + t_{1-\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\widehat{\sigma}^2(x)}{n\phi_x(h)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

where $t_{1-\frac{\zeta}{2}}$ denotes the $1-\frac{\zeta}{2}$ quantile of the standard normal distribution.

4.6 Appendix

Proof of Lemma 4.1. We have,

$$\left|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right] - g_l(x)\right| = \left|\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x) - g_l(x)]\right|.$$

By using a double conditioning with respect to Y_i, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right] &= \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{E}(\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)|X_i)] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[K(h^{-1}(x-X_1))\mathbb{E}(\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}|X_1)] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[K(h^{-1}(x-X_1))\mathbb{E}(\mathbb{E}[\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}|Y_1]|X_1)] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[K(h^{-1}(x-X_1))\mathbb{E}(\bar{G}^{-1}(Y_1)Y_1^{-l}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Y_1\leq C_1\}}|Y_1]|X_1)]
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)-g_l(x)\right] &= \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}\left[K(h^{-1}(x-X_1))\mathbb{I}_{B(x,h)}(X_1)\left|\mathbb{E}(Y_1^{-l}|X_1)-g_l(x)\right|\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}\left[K(h^{-1}(x-X_1))\mathbb{I}_{B(x,h)}(X_1)|g_l(X_1)-g_l(x)|\right]
\end{aligned}$$

Under conditions (H2), we get

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)-g_l(x)\right]\right| &\leq Ch^{k_l} \\
&= O(h^{k_l}).
\end{aligned}$$

Proof of Lemma 4.2. We have for $l=1,2$

$$\widetilde{g}_l(x)-\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right]=\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]}\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)-\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)]\right]$$

we pose

$$Z_{i,l}=\frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\left[\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)-\mathbb{E}[\delta_i\bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)]\right].$$

To prove this lemma, we use the exponential inequality given in the monograph of Ferraty and Vieu [10] (Corollary A.8i), we calculate the quantity of $\mathbb{E}[|Z_{i,l}^m|]$ similarly as lemma 6.3 in Ferraty and Vieu [10]. By the Newton's binomial expansion, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Z_{i,l}^m|] &\leq C\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{(\mathbb{E}[K_1])^j}\mathbb{E}\left[\left|\delta_1\bar{G}^{-j}(T_1)T_1^{-jl}K_1^j(x)\right|\right] \\
&\leq C\max_{j=0,\dots,m}\phi_x^{-j+1}(h) \\
&\leq C\phi_x^{-m+1}(h).
\end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{E}[|Z_{i,l}^m|] = O(\phi_x^{-m+1}(h)).$$

Thus, we apply the mentioned exponential inequality with $a^2 = \phi_x^{-1}(h)$, we get, for all $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_{i,l}\right| > \varepsilon n\right) \leq 2\exp\left\{\frac{-\varepsilon^2 n}{2a^2(1+\varepsilon)}\right\}.$$

We pose $\varepsilon = \varepsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_{i,l}\right| > \varepsilon n\right) &\leq 2\exp\left\{\frac{-\varepsilon_0^2\frac{\log n}{n\phi_x(h)}n}{2\frac{1}{\phi_x(h)}(1+\varepsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}})}\right\} \\
&\leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon_0^2\log n}{2(1+\varepsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}})}\right\} \\
&\leq 2\exp\left\{-C\varepsilon_0^2\log n\right\} \\
&\leq 2n^{-C\varepsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Finally, an appropriate choice of ε_0 and by Proposition A.4. in Ferraty and Vieu [10], we deduce that :

$$|\widetilde{g}_l(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_l(x)\right]| = O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right) = o_{a.s.}(1).$$

Proof of Lemma 4.3. We have

$$
\begin{aligned}
|\widehat{g}_{l,n}(x) - \widetilde{g}_l(x)| &= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \bar{G}_n^{-1}(T_i) T_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) - \delta_i \bar{G}^{-1}(T_i) T_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \right| \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \sum_{i=1}^{n} \left| \mathbb{I}_{\{Y_i \le C_i\}} \bar{G}_n^{-1}(Y_i) Y_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \right. \\
&- \left. \mathbb{I}_{\{Y_i \le C_i\}} \bar{G}^{-1}(Y_i) Y_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \right| \\
&\le \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \sum_{i=1}^{n} \left| Y_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \left(\frac{1}{\bar{G}_n(Y_i)} - \frac{1}{\bar{G}(Y_i)}\right) \right| \\
&\le \frac{\sup_{t \le t_F} |\bar{G}_n(t) - \bar{G}(t)|}{\bar{G}_n(t_F)\bar{G}(t_F)} \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \sum_{i=1}^{n} Y_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right).
\end{aligned}
$$

By using conditional expectation, we obtain

$$
|\widehat{g}_{l,n}(x) - \widetilde{g}_l(x)| \le \frac{\sup_{t \le t_F} |\bar{G}_n(t) - \bar{G}(t)|}{\bar{G}_n(t_F)\bar{G}(t_F)} \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_i^{-l} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) |X_i \right].
$$

Under conditions (H3), (H5) and by taking into account formula (4.28) in Deheuvels and Einmahl [4], we obtain

$$
|\widehat{g}_{l,n}(x) - \widetilde{g}_l(x)| = O_{a.s.}\left(\frac{\log\log n}{n}\right).
$$

Proof of Corollary 4.1. We have,

$$
\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} \widehat{g}_{2,n}(x) = g_2(x)\} = 1.
$$

By taking into account the results of lemmas 4.1-4.3 we arrive to prove the corollary.
Proof of Lemma 4.4. We use the same arguments as lemma 7 in Demongeot et al. [26] for censored data.
Let

$$
\frac{\sqrt{n\phi_x(h)}}{g_2^2(x)\sigma(x)} \left(\left[\widetilde{g}_1(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]\right] g_2(x) + \left[\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] - \widetilde{g}_2(x)\right] g_1(x) \right) = \frac{S_n}{g_2^2(x)\sigma(x)}.
$$

With $S_n = \sum_{i=1}^n (L_i(x) - \mathbb{E}[L_i(x)])$, where

$$L_i(x) = \frac{\sqrt{n\phi_x(h)}}{n\mathbb{E}[K_1]}\delta_i \bar{G}^{-1}(T_i)K_i(x)\left(g_1(x)T_i^{-2} - g_2(x)T_i^{-1}\right).$$

We apply the Lyapunov central limit theorem on $L_i(x)$ for showing the asymptotic normality of S_n, it suffices to show, for some $\delta > 0$, that :

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|L_i(x) - \mathbb{E}[L_i(x)]|^{2+\delta}\right]}{\left(var\left(\sum_{i=1}^n L_i(x)\right)\right)^{\frac{2+\delta}{2}}} \to 0. \tag{4.11}$$

Clearly,

$$\begin{aligned} var\left(\sum_{i=1}^n L_i(x)\right) &= n\phi_x(h) var\left[\widetilde{g_2}(x)g_1(x) - \widetilde{g_1}(x)g_2(x)\right] \\ &= n\phi_x(h)\left[var\left(\widetilde{g_2}(x)\right)g_1^2(x) + var\left(\widetilde{g_1}(x)\right)g_2^2(x) - 2g_1(x)g_2(x)cov(\widetilde{g_1}(x), \widetilde{g_2}(x))\right]. \end{aligned}$$

So, for $l = 1, 2$, we obtain

$$\begin{aligned} var\left(\widetilde{g_l}(x)\right) &= \frac{1}{(n\mathbb{E}[K_1])^2}\sum_{i=1}^n var\left[\delta_i \bar{G}^{-1}(T_i)T_i^{-l}K_i(x)\right] \\ &= \frac{1}{n(\mathbb{E}[K_1])^2} var\left[\delta_1 \bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}K_1(x)\right]. \end{aligned}$$

By conditioning on the random variable x and using hypotheses $(C1)$ and $(C3)$ and the fact that :

$$E[K_1] = \phi_x(h)\left(K(1) - \int_0^1 K^{'}(s)\chi_x(s)ds\right) + o(\phi_x(h)).$$

We get,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\delta_1 \bar{G}^{-2}(T_1)T_1^{-2l}K_1^2(x)\right] &= \mathbb{E}\left[K_1^2(x)\mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}(Y)Y^{-2l}|X = x\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}(Y)Y^{-2l}|X = x\right]\left(\phi_x(h)\left(K^2(1) - \int_0^1 (K^2)^{'}(s)\chi_x(s)ds\right)\right. \\ &+ \left. o(\phi_x(h))\right). \end{aligned}$$

By a double conditioning on the random variable x and under conditions (H3) and (H5), we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}K_1(x)\right] &= \mathbb{E}\left[K_1(x)\mathbb{E}\left[Y_1^{-1}|X=x\right]\right]\\ &\leq C\mathbb{E}[K_1]\\ &\leq C\phi_x(h).\end{aligned}$$

So,

$$\left(\mathbb{E}\left[\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}K_1(x)\right]\right)^2 = O(\phi_x(h)^2).$$

Then,

$$\begin{aligned}var\left[\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-l}K_1(x)\right] &= \mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}(Y)Y^{-2l}|X=x\right]\left(\phi_x(h)\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2)'(s)\chi_x(s)ds\right)\right)\\ &+ O(\phi_x(h)^2).\end{aligned}$$

Finally

$$var\left(\widetilde{g}_l(x)\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}(Y)Y^{-2l}|X=x\right]\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2)'(s)\chi_x(s)ds\right)}{n\phi_x(h)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\chi_x(s)ds\right)^2} + o\left(\frac{1}{n\phi_x(h)}\right). \quad (4.12)$$

Now, we calculate the covariance part

$$\begin{aligned}cov(\widetilde{g}_1(x),\widetilde{g}_2(x)) &= \frac{1}{n(\mathbb{E}[K_1])^2}cov\left(\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-1}K_1(x),\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-2}K_1(x)\right)\\ &= \frac{1}{n(\mathbb{E}[K_1])^2}\left[\mathbb{E}\left(\delta_1\bar{G}^{-2}(T_1)T_1^{-3}K_1^2(x)\right)\right.\\ &- \left.\mathbb{E}\left(\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-1}K_1(x)\right)\mathbb{E}\left(\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)T_1^{-2}K_1(x)\right)\right].\end{aligned}$$

Where,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\delta_1\bar{G}^{-2}(T_1)T_1^{-3}K_1^2(x)\right) &= \mathbb{E}\left[K_1^2\mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}Y^{-3}|X=x\right]\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}Y^{-3}|X=x\right]\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2)'(s)\chi_x(s)ds\right)+o(1).\end{aligned}$$

Then,

$$cov(\widetilde{g}_1(x),\widetilde{g}_2(x))=\frac{\mathbb{E}\left[\bar{G}^{-1}Y^{-3}|X=x\right]\left(K^2(1)-\int_0^1(K^2)'(s)\chi_x(s)ds\right)}{n\phi_x(h)\left(K(1)-\int_0^1K'(s)\chi_x(s)ds\right)^2}+o\left(\frac{1}{n\phi_x(h)}\right).$$

It follow that,

$$var\left(\sum_{i=1}^n L_i(x)\right)=g_2^2(x)\sigma+o(1).$$

Thusly, it is sufficient to demonstrate that the numerator of (4.11) converges to 0, to finish the evidence of this lemma. For that we apply the C_r inequality (see Loève [20], p. 155) to show that :

$$\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[|L_i(x)-\mathbb{E}\left[L_i(x)\right]|^{2+\delta}\right]\leq C\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[|L_i(x)|^{2+\delta}\right]+C'\sum_{i=1}^n|\mathbb{E}\left[L_i(x)\right]|^{2+\delta}.$$

Then, under assumptions (H5) and (H3), we get

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[|L_i(x)|^{2+\delta}\right] &= n^{\frac{-\delta}{2}}(\phi_x(h))^{-1-\frac{\delta}{2}}\mathbb{E}\left[\delta_1^{2+\delta}\bar{G}^{-(2+\delta)}(T_1)K_1^{2+\delta}(x)|g_1(x)T_i^{-2}-g_2(x)T_i^{-1}|^{2+\delta}\right]\\ &\leq C(n\phi_x(h))^{-1-\frac{\delta}{2}}\left(\mathbb{E}[K_1^{2+\delta}]\right)\to 0.\end{aligned}$$

For the second term, we obtain

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|\mathbb{E}\left[L_i(x)\right]|^{2+\delta} &\leq n^{\frac{-\delta}{2}}(\phi_x(h))^{-1-\frac{\delta}{2}}\left|\mathbb{E}\left[\delta_1\bar{G}^{-1}(T_1)K_1(x)|g_1(x)T_i^{-2}-g_2(x)T_i^{-1}|\right]\right|^{2+\delta}\\ &\leq Cn^{\frac{-\delta}{2}}\left(\phi_x(h)\right)^{\frac{1+\delta}{2}}\to 0.\end{aligned}$$

which finishes the proof.

Proof of Lemma 4.5. For the first term, by taking into account lemma 4.1-4.3 and equation (4.12), we have

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)-g_2(x)\right]\to 0,$$

and

$$var\left[\widetilde{g}_2(x)\right]\to 0.$$

So

$$\widehat{g}_{2,n}(x) - g_2(x) \to 0, \quad \text{in probability.}$$

For the second limit, by lemma 4.3 and first limit, we get

$$var\left[\widehat{g}_{l,n}(x) - \widetilde{g}_l(x)\right] \to 0.$$

it follow that

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\widehat{g}_{1,n}(x) - \widetilde{g}_1(x)\right)g_2(x) + \left(\widetilde{g}_2(x) - \widehat{g}_{2,n}(x)\right)g_1(x)\right] \to 0, \quad \text{in probability.}$$

Proof of Lemma 4.6. We write

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{g_2(x)}\left(\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] - g_1(x)\right)g_2(x) + \left(g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]\right)g_1(x)\right] \\
= & \frac{1}{g_2(x)}\left[\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]g_2(x) - g_1(x)g_2(x) + g_1(x)g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]g_1(x)\right] \\
= & \frac{1}{g_2(x)\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]}\left[\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]g_1(x)\right]\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] \\
= & A_n\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right].
\end{aligned}$$

For A_n, we get

$$A_n = \frac{\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]}{\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]} - \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

It suffices to evaluate $\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]$ and $\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]$. By the same arguments used in lemma 4.1, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\left[K_1\right]}\mathbb{E}\left[K_1(x)\mathbb{E}\left[Y_1^{-1}|X_1\right]\right].$$

and

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\left[K_1\right]}\mathbb{E}\left[K_1(x)\mathbb{E}\left[Y_1^{-2}|X_1\right]\right].$$

By the same ideas used by Ferraty et al. [8] for regression operator, we demonstrate that :

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right] = g_1(x) + h\Psi_1^{'}(0)\left[\frac{K(1) - \int_0^1 (sK(s))'\chi_x(s)ds}{K(1) - \int_0^1 (K)'(s)\chi_x(s)ds}\right] + o(h).$$

and
$$\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] = g_2(x) + h\Psi_2^{'}(0)\left[\frac{K(1) - \int_0^1 (sK(s))^{'}\chi_x(s)ds}{K(1) - \int_0^1 (K)^{\prime}(s)\chi_x(s)ds}\right] + o(h).$$
At last,
$$A_n = \frac{\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_1(x)\right]}{\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]} - r(x) = hB_n(x) + o(h).$$
Where $B_n = \dfrac{(\Psi_1^{'}(0) - r(x)\Psi_2^{'}(0))M_0}{M_1 g_2(x)}$.
For second term, we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] = g_2(x) + h\Psi_2^{'}(0)\left[\frac{K(1) - \int_0^1 (sK(s))^{'}\chi_x(s)ds}{K(1) - \int_0^1 (K)^{\prime}(s)\chi_x(s)ds}\right] + o(h), \\
&\mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right] - g_2(x) = O(h).
\end{aligned}$$

So, for showing that lemma 4.6 converges to 0 in probability, we have

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}} A_n\left(\left|g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]\right|\right)\right] = 0,$$

and

$$var\left[\left(\frac{n\phi_x(h)}{g_2^2(x)\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}} A_n\left(\left|g_2(x) - \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_2(x)\right]\right|\right)\right] = O(A_n^2) = O(h^2) \longrightarrow 0.$$

Which complete the proof.
Acknowledgements. The authors greatly thank an Associate Editor and an anonymous referee for a careful reading of the paper.

Bibliographie

[1] Altendji, B., Demongeot, J., Laksaci, A. and Rachdi M. 2018. Functional data analysis : estimation of the relative error in functional regression under random left truncation model. *Journal of Nonparametric Statistics* **30** :1-19.

[2] Aneiros, G., Bongiorno, E.G., Cao, R., and Vieu, P. 2017. *Functional Statistics and Related Fields*, Cham : Springer.

[3] Attouch, M., Laksaci, A., and Ould-Saïd, E. 2009.Asymptotic Distribution of Robust Estimator for Functional Nonparametric Models.*Communications in Statistics – Theory and Methods* **38** :1317–1335.

[4] Deheuvels, P. and Einmahl, J. H. J. 2000. Functional limit laws for the increments of Kaplan–Meier product-limit processes and applications. *The Annals of Probability* **28** : 1301–1335.

[5] Demongeot, J., Hamie, A., Laksaci, A. and Rachdi, M. 2016. Relative-error prediction in nonparametric functional statistics : Theory and practice. *Journal of Multivariate Analysis* **146** : 261-268.

[6] Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A. and Vieu, P. 2010. Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Inference* **140** : 335-352.

[7] Ferraty, F., Laksaci, A., Vieu, P. 2006. Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Statistical Inference for Stochastic Processes* **9** : 47-76.

[8] Ferraty, F., Mas, A., and Vieu, P. 2007. Nonparametric Regression on Functional Data : Inference and Practical Aspects. *Australian and New Zealand Journal of Statistics* **49** : 267–286.

[9] Ferraty, F., Vieu, P. 2004. Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *Journal of Nonparametric Statistics* **16** : 111-127.

[10] Ferraty, F. and Vieu, P. 2006. *Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and Practice*, Vol. 1 of Springer Series in Statistics, New York, Springer.

[11] Gheriballah, A., Laksaci, A., and Sekkal, S. 2013. Nonparametric M-Regression for Functional Ergodic Data. *Statistics and Probability Letters* **83** : 902–908.

[12] Guessoum, Z. and Ould-Said, E. 2009. On nonparametric estimation of the regression function under random censorship model. *Statistics and Decisions International mathematical journal for stochastic methods and models* **26** : 159-177.

[13] Horrigue, W., and Ould-Saïd, E. 2011. Strong UniformConsistency of a Nonparametric Estimator of a Conditional Quantile for Censored Dependent Data and Functional Regressors. *Random Operators and Stochastic Equations* **19** : 131–156.

[14] Horrigue, W., and Ould-Saïd, E. 2014. Nonparametric Regression Quantile Estimation forDependant Functional Data under Random Censorship : Asymptotic Normality. *Communications in Statistics – Theory and Methods* **44(20)** :4307–4332.

[15] Jones, M. C. ; Park, Heungsun ; Shin, Key-Il ; Vines, S. K. and Jeong, Seok-Oh. 2008. Relative error prediction via kernel regression smoothers. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138(10)** : 2887-2898.

[16] Hsing, T., and Eubank, R. 2015. *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators*, Wiley Series in Probability and Statistics, Chichester :Wiley.

[17] Kaplan, E.L. and Meier, P. 1958. Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of American Statistical Association* **53** : 457–481.

[18] Khardani, S., Lemdani, M. and Ould Saïd, E. 2010. Some asymptotic properties for a smooth kernel estimator of the conditional mode under random censorship. *Journal of the Korean Statistical Society* **39** : 455-469.

[19] Kohler, M., Màthé, K. and Pintér, M. 2002. Prediction from randomly right censored data. *Journal of Multivariate Analysis* **80** : 73–100.

[20] Loève, M. (1963). *Probability Theory (3rd ed.)*, Princeton : Van Nostrand.

[21] Mechab, W. and Laksaci, A. 2016. Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron* **74** : 75–97.

[22] Ould Said, E., Ouassou, I. and Rachdi, M. 2015 *Functional Statistics and Applications*, Springer Series in Statistical Theory and Methods, Springer International Publishing Switzerland.

[23] Park, H. and Stefanski, L.A. 1998. Relative-error prediction. *Stat. Probab. Lett.* **40(3)** : 227-236.

[24] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. 2005. *Functional Data Analysis (2nd ed.)*,New York, Springer.

Conclusion et Perspectives

4.7 Conclusion

La contribution de cette thèse se concentre sur l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle et ses dérivées ainsi sur l'estimation de la régression pour des données incomplètes dans un cadre fonctionnel.

La première approche est utilisée pour l'estimation du quantile conditionnel abordé au chapitre 2 ainsi pour l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle abordée au chapitre 3. L'aspect non paramétrique est bien exploité dans les deux chapitres par les hypothèses données. Les estimateurs proposés sont cohérents et asymptotiquement distribués sous des conditions appropriées.
Pour prouver les résultats, la méthodologie est basée sur l'approximation martingale utilisée dans l'article de Laib et Louani [56]. L'hypothèse ergodique utilisée dans cette thèse évite les calculs probabilistes compliqués de la condition de mélange.

La deuxième méthode est utilisée pour l'estimation de la régression lorsque la variable réponse est objet d'une censure. Notons que cette approche est plus significative en présence de valeurs aberrantes par rapport à l'approche classique. Comme résultats asymptotiques nous donnons la convergence presque sûre et la normalité asymptotique.
Dans tous les cas de notre étude nos vitesses de convergence sont en deux parties : partie biais et partie dispersion. La dimensionnalité du modèle est la partie biais tandis que la dimensionnalité de l'espace fonctionnel de la variable explicative est dans la partie dispersion.

4.8 Perspectives

La recherche dans le domaine non paramétrique reste une question ouverte qui fera l'objet de plusieurs études futures en vue d'améliorer et de mettre en évidence les résultats obtenu dans cette thèse.
Nous listons dans ce qui suit les perspectives à traiter dans le futur :

- Notre premiers travail est une finalisation du chapitre 1 où nous allons étendre notre étude d'estimation du quantile conditionnel d'une réponse MAR (missing at random) au cas dépendant.
- Un autre type de dépendance pourrait être considéré tel que le quasi-associé.
- Nous pourrons élaborer les propriétés asymptotique d'un estimateur à noyau des K plus proches voisins pour une réponse MAR.
- Nous généralisons les résultats obtenus en utilisant d'autres familles de semi métriques afin d'améliorer la performance de prédiction de nos estimateurs ainsi le choix de la fenêtre de lissage est important.

Bibliographie générale

[1] ALTENDJI, B., DEMONGEOT, J., LAKSACI, A. and RACHDI M. (2018). Functional data analysis : estimation of the relative error in functional regression under random left truncation model. *Journal of Nonparametric Statistics.* **30**, 1-19.

[2] ANEIROS, G., BONGIORNO, E.G., CAO, R. and VIEU, P. (2017). *Functional Statistics and Related Fields*, Cham : Springer.

[3] ARDJOUN, F. Z., HENNANI, L. and LAKSACI, A. (2016). A récursive kernel estimate of the functional modal regression under ergodic dependence condition. *Journal of Statistical theory and practice.* **10** :3, 475-496.

[4] ATTOUCH, M. and BOUABÇA, W. (2013). The k-nearest neighbors estimation of the conditional mode for functional data.*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.***58**, no. 4, 393–415.

[5] ATTOUCH, M., LAKSACI, A. and MESSABIHI, N. (2015). Nonparametric relative error regression for spatial random variables. *Statistical Papers.* **58(4)**, 987–1008.

[6] ATTOUCH, M., LAKSACI, A. and OULD-SAÏD, E. (2009). Asymptotic Distribution of Robust Estimator for Functional Nonparametric Models. *Communications in Statistics – Theory and Methods* **38**, 1317–1335.

[7] BACHIR BOUIADJRA, H. (2017). Conditional hazard function estimate for functional data with missing at random. *International journal of statistics & economics.* **18**(4), 45-58.

[8] BAÍLLO, A. and GRANÉ, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response.*Journal of Multivariate Analysis.***100(1)**, 102–111.

[9] Benziadi, F., Laksaci, A. and Tebboune F. (2012) Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data.*Communications in Statistics - Theory and Methods.* **45** :11, 3097-3113.

[10] Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. (2011). Local linear regression for functional data. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics.* **63 :5**, 1047–1075.

[11] Berlinet, A., Gannoun, A. and Matzner-lober, E. (1998). Asymptotic properties of convergent estimators of conditional quantiles. *C. R. Acad.Sci. Paris.* Serie 1, **326**, 611-614.

[12] Bernhard F. A. and Stahlecker P. (2003). Relative squared error prediction in the generalized linear regression model. *Statist. Papers.* **44**, 107-115.

[13] Bosq, D. (2000). Linear Processes in Functional Spaces, *Springer-Verlag*, New-York.

[14] Breslow, N. and Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and productlimit estimates under random censorship.*Ann. Statist.* **2**, 437–443.

[15] Cacoullos, Theophilos. (1966). Estimation of a multivariate density. *Ann. Inst. Statist. Math.* **18**, p. 179–189.

[16] Cadre, B. (2001). Convergent estimators for the L1-median of Banach valued random variables, *Statistics* **35**, 509-521.

[17] Cardot, H., Crambes, C. and Sarda, P. (2004). Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **339**, 141-144.

[18] Chahad, A., Ait-Hennani, L. and Laksaci, A. (2017). Functional local linear estimate for functional relative-error regression. *Journal of Statistical Theory and Practice.* **11**(4), 771–789.

[19] Chaouch, M. and Khardani, S. (2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *Journal of Nonparametric Statistics.* **27** :1, 65-87.

[20] Charlier, I., Paindaveine, D. and Saracco, J. (2015). Conditional quantile estimation through optimal quantization. *J. Statist. Plann. Inference.* **156**, 14–30.

[21] Cheng, P.E. (1994). Nonparametric estimation of mean functionals with data missing at random. *J. Amer. Stat. Assoc.***89**, 81–87.

[22] Collomb, G. and Härdle, W. (1986). Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction : Kernel regression estimation from dependent observations. *Stoch. Proc. Appl.***23**, 77-89.

[23] Dabo-Niang, S. (2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux diffusions. *C. R. Acad. Sci., Paris.* **334**, No.3, 213-216.

[24] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* **51** , 27-42.

[25] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2010). Note on conditional mode estimation for functional dependent data. *Statistica.* **70**, 83-94.

[26] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2012). Nonparametric Quantile Regression Estimation for Functional Dependent Data. *Communications in Statistics - Theory and Methods.* **41 :7**, 1254-1268

[27] Dabo-Niang, S. and Rhomari, N. (2003). Estimation non paramétrique de la régression avec variable explicative dans un espace métrique. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris.* **336**, 75-80.

[28] Dabo-Niang, S. and Thiam, B. (2010). L^1 consistency of a kernel estimate of spatial conditional quantile. *Statist. Probab. Lett.* **80** (2010), 1447-1458.

[29] Deheuvels, P. and Einmahl, J. H. J. (2000). Functional limit laws for the increments of Kaplan–Meier product-limit processes and applications. *The Annals of Probability* **28** : 1301–1335.

[30] Delecroix, M. (1979). Sur l'estimation des densités d'un processus stationnaire et mélangeant. *Publ. U.E.R. Math. Pures Appl.* IRMA, **1(4)**, exp. no. I, 24. Seminar on Mathematical Statistics.

[31] Demongeot, J., Hamie, A., Laksaci, A. and Rachdi, M. (2016). Relative-error prediction in nonparametric functional statistics : Theory and practice. *Journal of Multivariate Analysis.* **146**, 261-268.

[32] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application. *Statistics.* **47(1)**, 26–44.

[33] Didi, S. and Louani, D. (2013a). Consistency results for the kernel density estimate on continuous time stationary and dependent data. *Journal of Statistics & Probability Letters.* **83 :4**, p. 1262-1270.

[34] Efromovich, S. (2011). Nonparametric Regression with Predictors Missing at Random. *Journal of American Statistical Association.* **106**, 306-319.

[35] Estévez-Pérez, G. (2002). On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation. *J. Statist. Probab. Lett.* **57**, 231-241.

[36] Estévez-Pérez, G. and Quintela-del-Rio, A. and Vieu, P. (2002). Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. *J. Statist. Plann. Inference.* **104**, 1-30.

[37] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2008). Asymptotic results of a nonparametric conditional quantile estimator for functional time series. *Comm in Statist. Theory and Methods.* **37**, 2735-2759.

[38] Ezzahrioui, M. and Ould-Saïd, E. (2008). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space. *Far East J. Theoretical Statist.* **25**, 15–38.

[39] Fan, J. (1992). Design-adaptive nonparametric regression. *J. Amer. Statist. Assoc.* **87**, Pages 998–1004.

[40] Ferraty, F. (2011). *Recent Advances in Functional Data Analysis and Related Topics.* Springer. New York.

[41] Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A. and Vieu, P. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Inference* **140** : 335-352.

[42] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **340**, 389-392.

[43] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P. (2006). Estimation some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

[44] Ferraty, F., Mas, A. and Vieu, P. (2007). Advances in nonparametric regression for functional variables. *Aust. New Zeal. J. of Satist.* **49**, 1-20.

[45] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2005). Conditional quantiles for functionally dependent data with application to the climatic El Nino Phenomenon. *Sankhyia.* **67**, 378–399

[46] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **53**, 1-18.

[47] Ferraty,F., Sued, F. and Vieu, P. (2013). Mean estimation with data missing at random for functional covariables.*Statistics.* **47** :4, 688-706.

[48] Ferraty, F. and Vieu, P. (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés.*C. R. Acad. Sci.*, Paris, **330**, 139-142.

[49] Ferraty, F. and Vieu, P. (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data. *Comput. Statist. and Data Anal.* **17**, 545-564.

[50] Ferraty, F. and Vieu, P. (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. *Comput. Statist. and Data Anal.* **44**, 161-173.

[51] Ferraty, F. and Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* **16**, 111-127.

[52] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice.* Springer Series in Statistics. Springer. New York.

[53] GASSER, T., HALL, P. and PRESNELL, B.(1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. Roy. Statist. Soc.* , Ser **B**, 60, 681-691.

[54] GEFFROY, J. (1947). Sur l'estimation d'une densité dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér.* **A 278**, 1449-1452.

[55] GHERIBALLAH, A., LAKSACI, A. and SEKKAL, S. (2013) Nonparametric M -regression for functional ergodic data. *Stat. Probab. Lett.* **83** , 902-908.

[56] GILL, R. D. (1980). *Censoring and stochastic integrals.* Mathematical center tracts, 124, Mathematics centrum, Amesterdam.

[57] GUESSOUM, Z. and OULD-SAID, E. (2009). On nonparametric estimation of the regression function under random censorship model. *Statistics and Decisions International mathematical journal for stochastic methods and models* **26** : 159-177.

[58] HALL, P. and HECKMAN, N.E. (2002). Estimating and depicting the structure of a distribution of random functions. *Biometrika.* **89**, No.1, 145-158.

[59] HALL, P. and HEYDE, C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Application.* Academic Press, New York.

[60] HORRIGUE, W. and OULD-SAÏD, E. (2011). Strong Uniform Consistency of a Nonparametric Estimator of a Conditional Quantile for Censored Dependent Data and Functional Regressors. *Random Operators and Stochastic Equations* **19**, 131–156.

[61] HORRIGUE, W. and OULD-SAÏD, E. (2014). Nonparametric Regression Quantile Estimation for Dependant Functional Data under Random Censorship : Asymptotic Normality. *Communications in Statistics – Theory and Methods* **44(20)**, 4307–4332.

[62] HSING, T. and EUBANK, R. (2015).*Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators.* Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester.

[63] Jones M. C., Park H., Shinb K. Vines S. K. and Jeong S.O. (2008). Relative error prediction via kernel regression smoothers. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138(10)**, 2887-2898.

[64] Kaplan, E.L. and Meier, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of American Statistical Association.* **53**, 457-481.

[65] Kara-Zaitri, L., Laksaci, A., Rachdi, M. and Vieu, P. (2016). Data-driven kkNN estimation in nonparametric functional data analysis. *J. Multivariate Analysis.* **153**, 176-188.

[66] Khardani, S., Lemdani, M. and Ould Said, E. (2009). Some asymptotic properties for a smooth kernel estimator of the conditional mode under random censorship. *Journal of the Korean Statistical Society.* **39**, 455–469.

[67] Kohler, M., Màthé, K. and Pintér, M. (2002). Prediction from randomly right censored data. *Journal of Multivariate Analysis* **80** : 73–100.

[68] Koziol, J.A. and Green, S.B. (1976). A Cramer-Von Mises statistic for randomly censored data. *Biometrika.***63**, 465–474.

[69] Krengel, U.(1985). *Ergodic Theorems.* Walter de Gruyter & Co., Berlin.

[70] Laib, N. and Louani, D. 2010. Nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties. *J. Multivariate Anal.* **101**, 2266–2281.

[71] Laib, N. and Louani, D. 2011. Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data.*J. Statist. Plann. Inference***141**, 359–372.

[72] Laïb, N. and Ould Saïd, E. (2000). A robust nonparametric estimation of the autoregression function under an ergodic hypothesis. *Canad. J. Statist.***28**, 817-828.

[73] Laksaci, A. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. *Ann. I.S.U.P.* **51**, 69-80.

[74] LAKSACI, A., LEMDANI, M. and OULD-SAÏD, E. (2009). A generalized L^1- approach for a kernel estimator of conditional quantile with functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.* **79**, 1065-1073.

[75] LAKSACI, A., LEMDANI, M. and OULD-SAÏD, E. (2011). Asymptotic results for an L^1-norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology. *Sankhya*, **A 73**, 125–141 .

[76] LAKSACI, A., MADANI, F. and RACHDI, M. (2013). Kernel Conditional Density Estimation When the Regressor is Valued in a Semi-Metric Space.*Communications in Statistics - Theory and Methods.* **42 :19**, 3544-3570.

[77] LAKSACI, A. and MAREF, F. (2009). Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **347**, 1075–1080.

[78] LAKSACI, A. and MECHAB, B. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.* **55**, 35-51.

[79] LECOUTRE, J. P. and OULD-SAID, E. (1995). Hazard rate estimation for strong mixing and censored processes. *J. Nonparametr. Statist.***5**, 83–89.

[80] LING, N., LIANG, L. and VIEU, P. (2015). Nonparametric regression estimation for functional stationary ergodic data with missing at random. *J. Statist. Plann. Inference.* **162**, 75-87.

[81] LING, N., LIU, Y. and VIEU, P. (2016). Conditional mode estimation for functional stationary ergodic data with responses missing at random. *Statistics.***50**(5), 991–1013.

[82] LITTLE, R. and RUBLIN, D. (2002). *Statistical analysis with missing data.* 2nd ed, New York, John Wiley.

[83] LOÈVE, M. (1963). *Probability Theory (3rd ed.)*, Princeton : Van Nostrand.

[84] MASRY, E. (2005). Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. *Stoch. Proc. and their Appl.* **115**, 155-177.

[85] Massim, I. and Mechab, B. (2016). Local linear estimation of the conditional hazard function. *International Journal of Statistics & Economics* **17**, 1-11.

[86] Mechab, W. and Laksaci, A. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron.* **74**, 75–97.

[87] Narula S.C. and Wellington, J.F. (1977) Prediction, linear regression and the minimum sum of relative errors. *Technometrics.* **19**, 185-190.

[88] Ould-Said, E. (1997) A note on ergodic processes prediction via estimation of the conditional mode function. Scand. J. Statist. **24**, 231–239.

[89] Ould Saïd, E. and Cai, Z. (2005). Strong uniform consistency of nonparametric estimation of the censored conditional mode function. *Journal of Nonparametric Statistics.* **17**, 797–806.

[90] Ould Said, E., Ouassou, I. and Rachdi, M. (2015). *Functional Statistics and Applications*, Springer Series in Statistical Theory and Methods, Springer International Publishing Switzerland.

[91] Padgett, W.J. (1988). Nonparametric estimation of density and hazard rate functions when samples are censored. *In P.R. Krishnaiah and C.R. Rao (Eds.), Handbook of Statistics.* **7**, Elsevier Science Publishers, pp. 313–331.

[92] Park, H. and Stefanski, L.A. (1998). Relative-error prediction. *Stat. Probab. Lett.* **40(3)** : 227-236.

[93] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* , p. 1065–1076.

[94] Perdoná, G.C and Louzada-Neto, F. (2008). Interval estimation for the parameters of the modified Weibull distribution model with censored data : A simulation study. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional.* **9**, 437–446.

[95] Peterson, A. V. (1977). Expressing the Kaplan-Meier estimator as a function of subsurvival function. *J. Amer. statist. Assoc.***72**, 854–858.

[96] Quintela-del-Río, A. (2006). Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statistics and Probability Letters.***76** , 1117-1124.

[97] Quintela-del-Río, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions. *J. Nonparametr. Stat.* **20**, 413-430.

[98] Rabhi, A., Djebbouri, T., and Hammou, Y. (2015). Nonparametric estimation of the maximum of conditional hazard function under dependence conditions for functional data. *J. Afrika Statistika.* **10**, 777-794.

[99] Rachdi, M. and Vieu, P. (2007). Nonparametric regression for functional data : automatic smoothing parameter selection. *J. Statist. Plann. and Inference.* **137**, 2784-2801.

[100] Ramsay, J. and Silverman, B. (2002). *Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies.* Springer Series in Statistics, Springer, New York.

[101] Ramsay, J. and Silverman, B. (2005). *Functional Data Analysis.* Springer Series in Statistics. Springer, New York.

[102] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function.*Ann. Math. Statist.* **27**, p. 832–837.

[103] Roussas, G. (1989). Hazard rate estimation under dependence conditions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22**, 81-93.

[104] Roussas, G. (1990). Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions : application to hazard rate. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **25**, 81-104.

[105] Roussas, G. (1991). *Nonparametric functional estimation and related topics*, 509-529.

[106] Samanta, M. (1989). Non-parametric estimation of conditional quantiles. *Statist. Probab. Lett.* **7** , 407–412.

[107] Shen V.Y., Yu T. and Thebaut, S.M. (1985). Identifying error-prone software an empirical study.*IEEE Trans. Software Eng.* **11**, 317-324.

[108] Shorack, G. R. and Wellner, J.A . (1986). *Empirical processes with applications to statistics.* Wiley, New York.

[109] Stone, C.J. (1977). Consistent nonparametric regression. With discussion and a reply by the author. *Ann. Statist.*5, no. 4, 595–645.

[110] Tanner, M. and Wong, W. H. (1983). The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel methods. *Ann. Statist.* **11**, 989-993.

[111] Van Keilegom, I. and Veraverbeke, N. (2001). Hazard rate estimation in nonparametric regression with censored data. *Ann. Inst. Statist. Math.*53, 730–745.

[112] Vieu, P. (1991). Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence. *J. Multivariate Anal.* **39**, 324-347.

[113] Wang, L. (2016). Local linear estimation for regression models with locally stationary long memory errors.*J. Korean Statist. Soc.* **45**, no. 3,381–394.

[114] Wang, J., Ma, W., Fan, G. and Wen, L. (2015). Local linear quantile regression with truncated and dependent data. *Statist. Probab. Lett.* **96**, 232–240.

[115] Watson, G.S. (1964 a). Smooth regression analysis. *Sankhya.* **26**, 359-372.

[116] Watson, G.S. and Leadbetter, M.R. (1964 b). Hazard analysis. I. *Biometrika.* **51**, 175-184.

[117] Wei, L.J., Lin, D.Y. and Weissfeld, L. (1989). Regression analysis of multivariate incomplete failure time data by modeling marginal distributions. *Journal of the American Statistical Association.* **84**, 1065–1073.

[118] Wertz, W. (1981). Nonparametric estimators in abstract and homogeneous spaces. *Lecture notes in Mathematics. University of Technology*, Wien.

[119] Yang, Y. and Ye, F. (2013). General relative error criterion and M-estimation. *Front. Math. China.* **8**, 695–715.

[120] Youndjé, É. and Sarda, P. and Vieu, P.R. (1996). Optimal smooth hazard estimates. *Test.* **5**, 379-394.

الملخص

قد تؤدي البيانات غير المكتملة إلى مشاكل تحليلية تؤدي إلى استنتاجات خاطئة ، ويرجع ذلك إلى أسئلة أو متغيرات لم تتم الإجابة عنها دون ملاحظات. في هذا السياق، فإن المشكلة التي تم تناولها في هذه الرسالة هي دراسة دالة التوزيع المشروط ومشتقاته بالإضافة إلى الانحدار النسبي عندما تكون البيانات غير مكتملة.

في البداية ، سوف ندرس الخصائص التقاربية لمقدار الكمي الشرطي المصنوع من معكوس دالة التوزيع الشرطي. في الجزء الثاني ، نحن مهتمون بدراسة دالة الصدفة الشرطية للبيانات الأرجوديك عندما يكون متغير الاستجابة خاضع للرقابة.

تتم مناقشة طريقة تقدير أخرى في الجزء الثالث، حيث يتم البناء من تقليل متوسط الخطأ النسبي لمقدار الانحدار في حالة الاستجابة الخاضعة للرقابة مع معرفة متغير توضيحي وظيفي.

في نهاية هذا الجزء ، نقوم بإجراء محاكاة لمقارنة الانحدار الكلاسيكي مع الانحدار النسبي.

Résumé

Les données incomplètes peuvent entraîner des problèmes d'analyse qui conduiraient à des conclusions erronées et cela est dû à des questions sans réponses ou des variables sans observations. Dans ce cadre, la problématique abordée dans cette thèse est d'étudier la fonction de répartition conditionnelle et ses dérivées ainsi que la régression relative lorsque les données sont incomplètes.

Au commencement, nous allons étudier les propriétés asymptotiques d'un estimateur du quantile conditionnel construit à partir de l'inverse de la fonction de répartition conditionnelle.
Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'étude de la fonction de hasard conditionnelle pour des données ergodiques lorsque la variable réponse est censurée.

Une autre méthode d'estimation est abordée dans la troisième partie, où nous construisons à partir de la minimisation de l'erreur relative moyenne l'estimateur de la régression dans le cas d'une réponse censurée sachant une variable explicative fonctionnelle.
À la fin de cette partie, nous réalisons une simulation pour comparer entre la régression classique et la régression relative.

Abstract

Incomplete data can cause serious problems with the analysis leading to draw wrong conclusions and this is due questions without answers or variables without observations. In this context, the problem addressed in this thesis is to study the conditional distribution function and its derivatives as well as the relative regression when the data are incomplete.

Initially, we will study the asymptotic properties of a conditional quantile estimator constructed from the inverse of the conditional distribution function.
In the second part, we are interested in the study of the conditional hazard function for ergodic data and when the response variable is censored.

Another estimation method is discussed in the third part, where we construct from the minimization of the mean squared relative error the regression estimator in the case of a censored response given a functional explanatory variable.
At the end of this part, we perform a simulation to compare classical regression with relative regression.