REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES
SIDI BEL-ABBÈS

BP 89 SBA 22000 –ALGERIE- TEL/FAX 048-54-43-44

THESE

Présentée par:
DAOUDI HAMZA

Pour obtenir le Diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques
Option : Probabilités-Statistiques

Intitulée

Propriétés asymptotiques de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle cas des données associées

Thèse soutenue le /03/2019

Devant le jury composé de :

Président :
Mr BENAISSA Samir Professeur à L'Université S.B.A
Directeur de thèse :
Mr MECHAB Boubaker Maitre de Conférences A à L'Université S.B.A
***Examinateurs** :*
Mr Azzouzi Badr eddine Maitre de Conférence A à L'Université de Tlemcen
Mr BeLGUERNA Abderrahmane Maitre de Conférences A à C.U. de Nâama

Remerciements

Je remercie Dieu d'abord et avant tout à la fin d'un tel travail et tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Je tiens à remercier vivement tout d'abord mon directeur de recherches, monsieur **Mechab Boubaker**, Maître de Conférence à l'université de Sidi Bel Abbés pour tout le temps qu'ils m'ont consacré et pour sa patience, son suivie et ses conseils durant l'évolution de ce travail.

Que **Benaissa Samir** trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse. Je le remercie chaleuresement d'avoir accepté d'être le président du jury de ce travail.

Je voudrais également remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour avoir accepter d'examiner cette thèse : Je voudrais remercier Monsieur **Belguerna Abderrahmane** pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux en acceptant de participer au jury. Je remercie vivement Monsieur **Azzouzi Badreddine** pour sa lecture attentive et ses remarques pertinentes. Je suis très honoré de sa présence.

Mes remeriements aussi tous les enseignants du laboratoire de statistiquesprobabilit és de l'université de Sidi Bel-Abbés ainsi que mes collègues de la faculté des Siences Exactes de l'université de Sidi Bel-Abbés.

Je tiens à remercier chaleureusement **Zouaoui Chikr Elmezouar** et **Ali Laksaci**, Professeurs à l'université King Khalid, Arabie Saoudite.

Mes remerciements aussi tous les enseignants de l'université Ibn Khaldoun à Tiaret ainsi que mes collègues de la faculté des mathematiques et informatique, En particulier le chef du département de mathématiques Monsieur le docteur **Arabi Abderrahmen** et mon collègue Monsieur le maître-assisstant **Benalou Mohamed** Pour ses aides et ses conseils.

Finalement, mes plus vifs remerciement s'adressent à tout personne qui a contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Cette thèse est dédiée à toute ma famille...
et mes meilleurs amis...

Table des matières

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons d'étudier les propriétés asymptotiques de quelques paramètres fonctionnels conditionnels tels que la fonction de répartition, la densité et la fonction de hasard pour une variable explicative à valeurs dans un espace de Hilbert (dimension infinie) et une variable réponse réelle dans un cadre de dépendance quasi-associé.
Dans un premier temps, Nous considérons l'estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode de noyau en présence de la dépendance quasi-associé et nous établissons sous des hypothèses générales la convergence presque complète avec vitesse de l'estimateur construit dans le cas quasi-associée.
Dans un second temps, Nous considérons l'estimation non paramétrique de la fonction de répartition conditionnelle par la méthode de noyau en présence de la dépendance quasi-associé et nous établissons sous des hypothèses générales la convergence presque complète avec vitesse de l'estimateur construit dans le cas quasi-associée et on va appliquer les deux résultats de la densité conditionnelle et la fonction de répartition conditionnelle à l'estimation la fonction de hasard.
Dans la troisième partie, nous établissons la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau la fonction de hasard conditionnelle de modèle d'indice fonctionnel convenablement normalisée. Nous donnons de manière explicite la variance asymptotique. Finalement, une application pour valider notre résultat, une étude sur des données simulées sera donnée. Notons que toutes ces propriétés asymptotiques ont été obtenu sous des conditions standard et elles mettent en évidence le phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle sur des petites boules. Autant que l'on sache le problème de l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle des données quasi-associées n'a pas été abordé. En général, l'estimation sur des données quasi-associées est récente dans la littérature statistique. Ce qui fait sans doute, l'originalité de cette thèse.

Summary

In this thesis, we propose to study the asymptotic properties of some conditional functional parameters such as the distribution function, the density and the hazard function for an explanatory variable with values in a Hilbert space (infinite dimension) and a response variable. real in a quasi-associated dependency framework.
First, we consider the nonparametric estimation of the conditional density by the kernel method in the presence of the quasi-associated dependence and we establish under general hypotheses the almost complete convergence with speed of the constructed estimator in the case almost associated.
In a second step, We consider the non parametric estimation of the conditional distribution function by the kernel method in the presence of the quasi-associated dependence and we establish under general hypotheses the almost complete convergence with speed of the estimator built in the quasi-associated case and we will apply the two results of the conditional density and the conditional distribution function to estimate the function of chance.
In the third part, we establish the asymptotic normality of the kernel estimator as the function of conditional chance of a properly normalized functional index model. We give explicitly the asymptotic variance.
Finally, an application to validate our result, a study on simulated data will be given.
Note that all these asymptotic properties have been obtained under standard conditions and they concentrate the concentration phenomenon of the probability measure of the functional variable on small balls. As far as we know the problem of nonparametric estimation of the conditional chance function of quasi-associated data has not been addressed. In general, the estimate on quasi-associated data is recent in the statistical literature. Which undoubtedly makes the originality of this thesis.

Liste des travaux scientifique

Publications

1. Daoudi. H, Mechab. B. and chiker zouaoui el mezouar. Asymptotic Normality of a Conditional Hazard Function Estimate in the Single Index for Quasi-Associated Data. Communications in Statistics - Theory and Methods.
2. Daoudi. H, and Mechab. B. Rate of pointwise consistency of the nonparametric conditional distribution function estimate with functional variables for quasi-associated data : International Journal of Mathematics and Computation.
3. Daoudi. H, and Mechab. B. Nonparametric estimation of the conditional density with a functional explicatory variable for quasi-associated data. International Journal of Statistics and Economics.

Communications internationales et nationales

1. Daoudi.H and chiker. Z. el mezouar. Etude Comparative entre les tests de stationnarité. 1ère Colloque International sur la statistique et ses Application -Université Tahar Molay, Saida, 06-07 Mai 2015.
2. Daoudi.H and Mechab. B. Estimation non-paramétrique de la fonction de Hasard avec variable explicative fonctionnelle cas des donnés quasi-associés. 1ère édition Des doctorales Nationales de Mathématiques. ENS Assia DJEBAR-Constantine, 28-31 Octobre 2017.
3. Daoudi.H and Mechab. B. Consistency rates of the Hazard Function conditional with explanatory functional for Associated Data. National Day on Applied Mathematics JMNA2018, 20 November 2018, 20 August University, 1955 Skikda, Algeria.

Chapitre 1

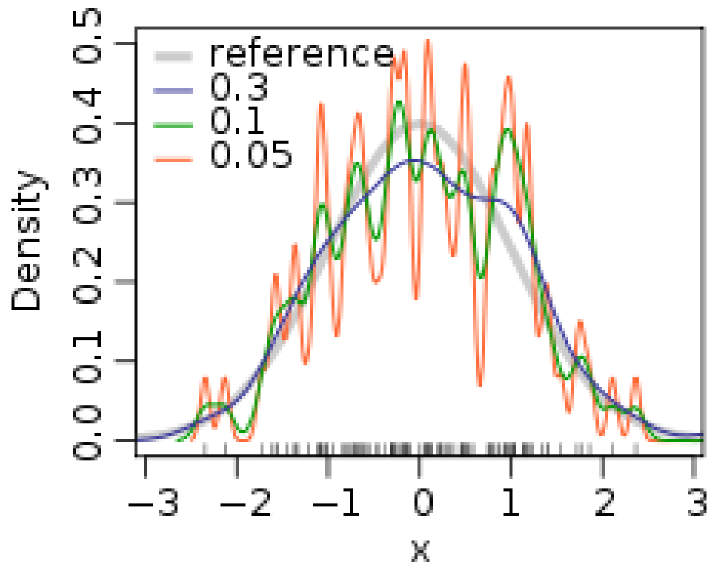
Présentation

1.1 De l'approche paramétrique vers la non paramétrique

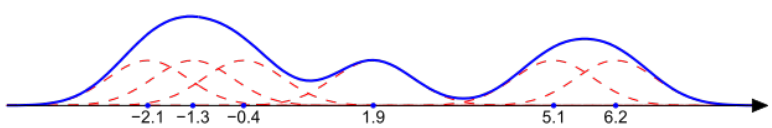
Les statistiques non paramétriques sont un domaine des statistiques qui ne reposent pas sur des familles de loi de probabilité paramétriques. Les méthodes non paramétriques pour la régression comprennent les histogrammes, les méthodes d'estimation par noyau, les splines et les décompositions dans des dictionnaires de filtres (par exemple décomposition en ondelettes). Bien que le nom de non paramétriques soit donné à ces méthodes, elles reposent en vérité sur l'estimation de paramètres. La différence avec les méthodes de statistique classique est qu'il s'agit en général d'un très grand nombre de paramètres et que chacun de ces paramètres ne permet pas de décrire la structure générale des données. Pour les méthodes non paramétriques, le nombre de paramètres qui sont estimés croît avec le nombre d'échantillons disponibles, pour les méthodes classiques, ce nombre est décidé à l'avance.

1.1.1 Estimation par la méthode de noyau

En statistique, l'estimation par noyau (ou encore méthode de Parzen-Rosenblatt) est une méthode non-paramétrique d'estimation de la densité de probabilité d'une variable aléatoire. Elle se base sur un échantillon d'une population statistique et permet d'estimer la densité en tout point du support. En ce sens, cette méthode généralise astucieusement la méthode d'estimation par un histogramme. En effet, dans un histogramme, la densité en un point x est estimée par la proportion d'observations $x_1, x_2, ..., x_n$ qui se trouvent à proximité de x. Pour cela, on trace une boîte en x et dont la largeur est gouvernée par un paramètre de lissage h_n ; on compte ensuite le nombre d'observations qui appartiennent à cette boîte. Cette estimation, qui dépend du paramètre de lissage h_n, présente de bonnes propriétés statistiques mais est par construction non-continue. Exemple de l'estimation par la méthode du noyau d'un échantillon de 100 nombres aléatoires distribués selon la loi normale pour différentes valeurs de la fenêtre.



La méthode du noyau consiste à retrouver la continuité : pour cela, on remplace la boîte centrée en x et de largeur h par une gaussienne centrée en x. Plus une observation est proche du point de support x plus la courbe en cloche lui donnera une valeur numérique importante. À l'inverse, les observations trop éloignées de x se voient affecter une valeur numérique négligeable. L'estimateur est formé par la somme (ou plutôt la moyenne) des courbes en cloche. Comme indiqué sur l'image suivante, il est clairement continu.



Dans ces dernières décennies, une immense innovation sur les appareils de mesure est apparue permettant d'observer plusieurs données de plus en plus complexes d'une façon continue, tels les indices boursiers, la météorologie, les images satellitaires, la chimie quantitative, la biométrie, l'imagerie médicale..., en raison de la précision des appareils de mesures modernes et de l'importante capacité de stockage qu'offrent les systèmes informatiques actuels, c'est possible à présent d'obtenir une discrétisation très précise de ces objets mathématiques (courbes, images,...) pendant toutes leurs trajectoires et qui prennent des valeurs dans des espaces de dimension infinie. Une modélisation statistique est importante pour mieux comprendre le fonctionnement du problème modélisé. En statistiques non paramétriques la performance des outils statistiques se réduit considérablement lorsque la dimension des observations augmente. Ce grand développement technologique a imposé la modernisation des méthodes statistiques comme outils d'analyse et de contrôle. Ainsi, une nouvelle branche de la statistique, dénommée statistique fonctionnelle s'est développée pour traiter des observations comme éléments aléatoires fonctionnels. Les premiers ouvrages de référence en la matière sur le sujet ont été consacrées à l'étude des modèles

paramétriques, les monographies de Ramsay et Silverman (1997) pour le cas i.i.d. où pour le cas dépendant Bosq (2000) pour les aspects théoriques. Cependant, la base d'analyse statistique via les modèles linéaires est la préliminaire connaissance de la nature de la covariabilité entre les observations, ce qui est très compliqué à vérifier en statistiques fonctionnelles, par contre dans la statistique classique on dispose d'outils graphiques, on prend comme exemple le scatter plot qui donne un aperçu sur le rapport entre les observations. Ceci justifie l'intérêt de la modélisation des données fonctionnelles par des méthodes non paramétriques, on peut citer les contributions de Bosq (2000) pour les aspects théoriques, Ferraty et Vieu (2006) pour une étude non paramétrique et Ferraty et Romain (2011) pour des développements récents. Dans le même contexte, nous renvoyons à Ferraty (2010).
L'objectif de ce paragraphe est de faire une étude bibliographique sur les modèles non paramétriques conditionnels considérés dans cette thèse. Le traitement non paramétrique des données fonctionnelles est beaucoup plus récent que l'analyse paramétrique. En effet, les premiers résultats ont été obtenus par Gasser et al. (1998). Ils se sont intéressés à l'estimation non paramétrique du mode de la distribution d'une variable fonctionnelle vérifiant un condition fractale. En considérant la même condition fractale Ferraty et Vieu (2000) ont étudié la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de régression, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Dabo-Niang (2002) a obtenu, la convergence presque sûre et la normalité asymptotique d'un estimateur de type histogramme de la densité d'une variable aléatoire dans un espace de dimension infinie. En utilisant la propriété de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative fonctionnelle, Dabo-Niang et Rhomari (2004) ont étudié la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau de la régression non paramétrique. La convergence presque complète pour le cas fortement mélangeant a été étudié par Ferraty et al. (2004). Masry (2005) a montré la normalité asymptotique dans le cas d'observations fonctionnelles α-mélangeantes.
Les premiers résultats sur les modèles conditionnels ont été obtenus par Ferraty et al. (2006). Ils ont précisé la vitesse de convergence presque complète des estimateurs à noyau pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et ses dérivées, le mode conditionnel et les quantiles conditionnels. Nous renvoyons à Ferraty et Vieu (2006) pour un large éventail d'applications de ces modèles en statistique fonctionnelle. Dabo-Niang et Laksaci (2007) ont ajouté des résultats sur la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau du mode conditionnel dans le cas i.i.d. La détermination des termes dominants de l'erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle a été obtenue par Laksaci (2007). Ferraty et al. (2008) ont abordé l'estimation de la fonction du hasard conditionnelle et ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle non paramétrique.

1.1.2 Statistique des données fonctionnelles

L'analyse des données fonctionnelle est une branche des statistiques vers laquelle l'intérêt de la communauté scientifique se développe de plus en plus, aussi en relation avec le nombre croissant de situations dans lesquelles les scientifiques théoriques et appliqués doivent faire face à des données ayant une nature continue. Le domaine a été popularisé en particulier au moyen des livres de Ramsay-Silverman (2002) et (2005) et, au cours des vingt dernières années, Les contributions ont été publiées (voir par exemple Bosq (2000), Ferraty et Vieu (2006) et aussi Hsing et Eubank (2015) pour les monographies générales, Cuevas (2014), Horváth et Rice (2015) et Müller (2005) Pour les études méthodologiques, Bongiorno et al. (2014) pour un ensemble sélectionné d'événements récents). Parallèlement, des méthodologies étendues et variées pour traiter des problèmes ayant une dimension très élevée ont été développés.

Variables et données fonctionnelles : La statistique pour données fonctionnelles ou analyse des données fonctionnelles étudie des observations qui ne sont pas des variables réelles ou vectorielles mais des courbes aléatoires. En général on veut indiquer que le nombre de variables observées est grand et même parfois beaucoup plus élevé que le nombre des unités statistiques. Dans ce cas également, l'un des principaux intérêts pour les statistiques hautes dimensions sont le nombre croissant de situations impliquant chaque jour un grand nombre de variables observées.

La définition d'une variable aléatoire fonctionnelle comme elle est définie dans les livres de statistique, par exemple, Ferraty et vieu (2006), Bosq et Lecoutre (1987), est une variable aléatoire observée dans plusieurs points d'un intervalle et qui prend des valeurs dans un espace infini, par exemple la variable fonctionnelle $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(t), t \in T\}$ avec $T \in \mathbb{R}$ représente une courbe observée sur l'intervalle T de $\mathbb{R}$. D'autre part si $T \in \mathbb{R}^2$ notre variable fonctionelle représente une image. Pour fixer les idées on présente ces définitions.

Définition 1.1 *Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ est appelée variable fonctionnelle si, elle prend des valeurs dans un espace à dimension infinie. L'observation X de $\mathcal{X}$ est appelée une donnée fonctionnelle.*

Définition 1.2 *L'ensemble de données fonctionnelles $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ est l'observation de n variables fonctionnelles $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ identiquement distribuées comme $\mathcal{X}$.*

Nous exposons ci-dessous quelques exemples de Ferraty et Vieu (2002, 2003) sur l'applications statistiques aux problèmes soulevés par l'analyse des données fonctionnelles. Dans un contexte général on parle de deux cas, le cas où les variables fonctionnelles sont indépendantes et dépendantes.

Cas des variables fonctionnelles indépendantes : Dans ce cas ils se sont intéressés d'un problème de contrôle de la qualité dans l'industrie alimentaire, on peut trouver ces données sur le site web http ://lib.stat.cmu.edu/datasets/tecator. Cet ensemble de données concerne un échantillon de viande finement hachée. L'objectif est d'étudier et mesurer par le spectromètre la contenance en graisse dans les morceaux de viande (figure 1.1).

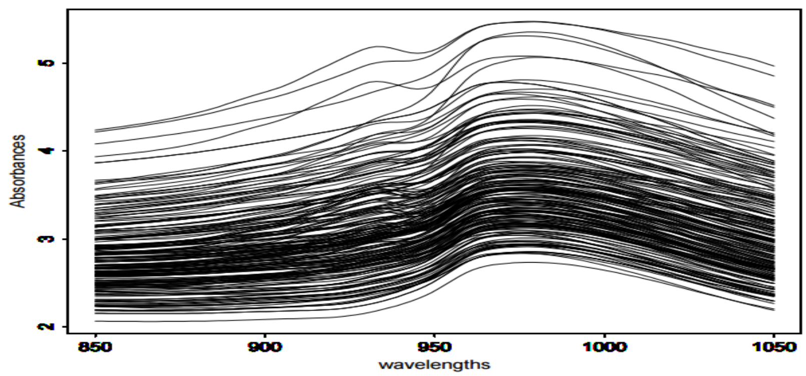


FIGURE 1.1 – Les courbes spectrométriques

Cas des variables fonctionnelles dépendantes : Dans ce cas on prend l'exemple de consommation annuelle d'électricité, aux USA qui donne une série chronologique économique. Les données d'électricité mensuelle consommée par les secteurs résidentiel et commercial à partir de janvier 1973 à février 2001 (338 mois) sont disponibles sur le site web www.economagic.com après ils ont décidé de choisir les années passées comme période explicative. Cela signifie que l'ensemble des variables explicatives à inclure dans notre méthode statistique est composé de 28 courbes données qui sont les 28 séries chronologiques annuelles continues. Ces données fonctionnelles dépendantes sont présentées à la Figure 1.2 La classification des courbes est un domaine qui a reçu une grande attention

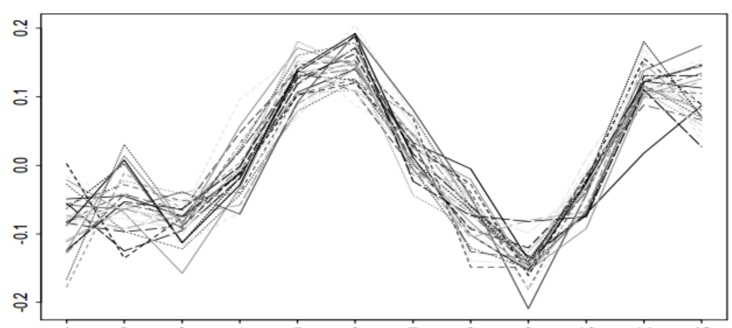


FIGURE 1.2 – Courbes annuelles de consommation d'électricité aux USA

ces dernières années, le document de Cholaquidis et *al.* (2015) propose un algorithme d'agrégation de classification adapté aux données fonctionnelles. Le modèle linéaire fonctionnel a été largement étudié dans la littérature pour les problèmes de régression dont le prédicteur est de dimension infinie. Dans ce problème, deux contributions traitent ce type de modèle dans le contexte plus général où on a observé plus d'une variable fonc-

tionnelle. La modélisation semi-paramétrique des données fonctionnelles est un domaine actuellement actif dont les principaux objectifs le compromis entre la grande sensibilité à la dimension des modèles non paramétriques et la flexibilité linéaires (voir Goia et Vieu (2014) pour une courte enquête). Fondamentalement, dans la littérature on peut trouver différents modèles de différents types d'additifs (Voir par exemple Aneiros-Pérez et Vieu (2008), Ferraty et Vieu (2009)) ou des modèles basés sur les projections (voir par exemple Chen et al. (2011), Ferraty et al. (2013)) et la contribution de Ahmedou et al. (2015) complète cette littérature en proposant une combinaison de ces idées à travers un modèle de régression linéaire fonctionnelle généralisé capable d'intégrer de manière semi-paramétrique additive les informations issues d'un prédicteur fonctionnel et à partir de ses dérivés. Pour la modélisation fonctionnelle de séries temporelles autorégressives, l'extension des processus autorégressifs habituels dans le cadre fonctionnel a été popularisé au cours des dernières années, principalement grâce aux diverses contributions de Bosq (voir par Monographies Bosq (2000), Bosq et Blanke (2007)).
Cas des variables quasi-associées : On s'intéresse à des données fonctionnelles issues de mélange de deux processus stochastiques gaussiens $Z_1(t)$ et $Z_2(t)$ sur un intervalle [-1,1] définies par :
$Z_1(t) = \sqrt{-2\log(U)}cos(2\pi(1-W)_t)$, $Z_2(t) = \sqrt{-2\log(1-U)}sin(2\pi W_t)$ où U, W est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle [0,1]. Le processus stochastiques $X(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$ est gaussien quasi-associé. On génère un échantillon de taille 200 200 $\{X_i(t)\}_{i=1,\ldots 200}$ de $X(t)$, et on observe chaque variable X_i sur $(t_j)_{j=1,\ldots,100} \in [-1,1]$). Les courbes obtenues apparaissent dans la figure 1.3.

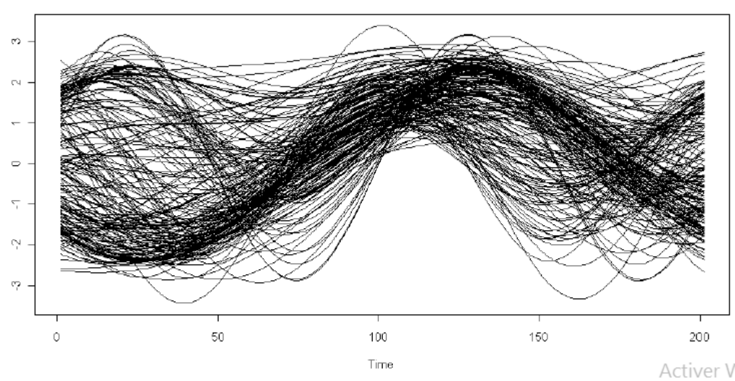


FIGURE 1.3 – Courbes gaussiennes quasi-associées

1.1.3 Contexte bibliographique sur la fonction de hasard et/ ou hasard conditionnelle

La fonction de hasard, appelée parfois fonction de risque est très fréquemment utilisée pour l'étude de la fiabilité en statistique. Elle s'est développée très rapidement, motivée

par ses applications dans des domaines exigeants. Elle mesure la probabilité instantanée qu'un évènement ait lieu à une date donnée, sachant qu'il n'a pas encore eu lieu juste avant cette date. Notons que l'usage de ce modèle s'est popularisé en économétrie, particulièrement pour l'analyse des transitions (trajectoires individuelles sur le marché du travail). Ainsi, on peut chercher à mesurer, pour un chômeur, l'évolution au fil du temps de sa propension à retrouver un emploi. Voir par exemple Florens et al. (1994), Lancaster (1990), entre autres. Les actuaires s'intéressent également à ces quantités, avec le souci de repérer les clients à risques, c'est-à-dire susceptibles d'induire des pertes pour la compagnie (non remboursement d'emprunts, risque de défaillance...).
La fonction de hasard se retrouve aussi bien sous forme continue que sous forme discrétisée. Dans le premier cas, l'estimation fonctionnelle non paramétrique s'impose d'elle même lorsqu'on n'a aucune idée sur la forme à priori de la fonction de hasard (ou lorsqu'on se refuse à émettre des hypothèses sur l'appartenance à une famille de lois particulières). Dans le second cas, on estime les taux de hasard (décès, panne) comme étant des paramètres. Les précurseurs de l'analyse non paramétrique furent Watson et Leadbetter (1964a, 1964b) ont proposé un estimateur pour lequel ils établissent la propriété de convergence asymptotiquement sans biais.
L'estimation non paramétrique de la fonction de hasard a été abordée par de nombreux. La littérature sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle est relativement restreinte en statistique fonctionnelle. L'article de Ferraty et al. (2008) est un travail précurseur sur le sujet. Dans cette publication les auteurs ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard conditionnelle, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Dans le même contexte, Quantela-del Rio (2008) a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al. (2008) sur la fonction de hasard conditionnelle. L'auteur a illustré ces résultats asymptotiques par une application sur des données sismiques. On pourra regarder également le récent article de Laksaci et Mechab (2010) sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour des données fonctionnelles spatialement dépendantes.

1.2 Notions d'Association

Le concept d'association a été introduit par Esary, Proschan et Walkup (1967), qui s'inspirent de la dépendance positive (plus précisément la dépendance positive par quadrant, en anglais Positive Quadrant Dependence ou PQD) définie par Lehmann (1966) comme suit :

Définition 1.3 *Deux variables aléatoires X et Y sont dites PQD si pour tous nombres réels x et y*

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$$

Esary et al. *proposent, à travers l'association, une notion plus forte. On considère une famille $X = \{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires réelles, définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Définition 1.4 *La famille finie $X_1, X_2, ..., X_n$ est dite associée si pour tout sous ensemble $I \in 1, 2, ..., n$*

$$Cov(\phi_1(Xi, i \in I), \phi_2(Xj, j \in I)) \geq 0$$

pour toutes fonctions non décroissantes $\phi_1, \phi_2 de R^{|I|} \to R$, pour lesquelles la covariance existe.

Pour rappel, une application h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite croissante si, pour tout $i = 1, 2, ...n$, l'application $t \to h_i(t) := h(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Une famille infinie de variables aléatoires est associée si toute sous famille finie est associée. Les variables indépendantes sont un exemple de variables associées, de même que des variables gaussiennes positivement corrélées (Pitt 1982). L'association décrit la structure de dépendance positive de modèles rencontrés en analyse de survie, fiabilité, physique statistique (à travers les inégalités FKG du nom de leurs auteurs Fortuin, Kasteleyn and Ginibre (1971), qui sont des inégalités de corrélation utilisées dans l'étude de modèles de graphes aléatoires et en théorie de la percolation).

Propriétés 1.1 *(Esary and* al. *(1967) et Suquet (2001))*

1. *Tout sous ensemble d'un ensemble fini de variables aléatoires réelles associées est encore associé.*
2. *Si deux ensembles de variables associées sont indépendants l'un de l'autre, leur union est un ensemble associé.*
3. *Tout singleton formé d'une variable aléatoire réelle X est associé.*
4. *Si $X = (X_1, ..., X_n)$ est associé et $si f_1, ..., f_k$ sont des fonctions toutes croissantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (ou toutes décroissantes), alors le $vecteur Y = (f_1(X), ..., f_k(X))$ est associé.*
5. *Si $X(k) = (X_1(k), ..., X_n(k))$ est associé pour tout k, et si $X(k)$ converge en loi vers $X = (X_1, ..., X_n)$ lorque $k tend$ vers $+\infty$, $alors X est$ associé.*

Exemple 1.1 *Quelques exemples importants :*

1. ***Famille de variables indépendantes*** *Tout vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes est associé.*
2. ***Processus gaussien*** *(Pitt (1982)) Tout vecteur gaussien $(X_1, ..., X_n)$ est associé si et seulement si $Cov(X_i, X_j) \geq 0$, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$.*
3. ***Variables aléatoires binaires*** *Un vecteur aléatoire (X_1, X_2) de variables binaires (qui prennent les valeurs 0 ou 1) est associé si et seulement si sa covariance $Cov(X_1, X_2) \geq 0$.*

4. ***Processus linéaire***(*Doukhan and Louhichi (1999)*) *Soit* $(\epsilon_i)i \in \mathbb{Z}$, *une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les 2 valeurs* $-1/2, 1/2$*avec équiprobabilité. Soit* $(X_n)n \in \mathbb{Z}$,*une suite aléatoire vérifiant l'équation d'auto-régression :*

$$X_n = \frac{1}{2}X_{n-1} + \epsilon_n, n \in \mathbb{Z}.$$

Alors,$X_n = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\epsilon_{n-i}$ *presque sûrement, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*(qui est une série de termes indépendants qui converge en moyenne quadratique et presque sûrement), le processus linéaire* $(X_n)n \in \mathbb{Z}$ *est associé.*

Association Positive(PA)

Définition 1.5 *Une famille finie de variables aléatoires* $Xi, 1 \leq i \leq n$ *est dite positivement associée (PA), si pour tout sous-ensembles disjoints* A_1 *et* A_2 *de* $1, 2, ..., n$,

$$Cov(\phi_1(Xi, i \in A_1), \phi_2(Xj, j \in A_2)) \geq 0$$

pour toutes fonctions croissantes $\phi_1 : R^{|A_1|} \rightarrow R$ *et* $\phi_2 : R^{|A_2|} \rightarrow R$ *pour lesquelles la covariance existe.*
Une famille infinie est positivement associée si chaque sous-famille finie est positivement associée.

Association négative (NA)

L'association négative a été introduite par Alam et Saxena (1981) et développée par Joag-Dev et Proschan (1983).

Définition 1.6 *Une famille finie de variables aléatoires* $Xi, 1 \leq i \leq n$ *est dite négativement associée (NA), si pour tout sous-ensemble* A *de* $1, 2, ..., n$,

$$Cov(\phi_1(Xi, i \in A), \phi_2(Xj, j \in A)) \leq 0$$

pour toutes fonctions croissantes $\phi_1 : R^{|A_1|} \rightarrow R$ *et* $\phi_2 : R^{|A_2|} \rightarrow R$ *pour lesquelles la covariance existe.*
Une famille infinie est négativement associée si chaque sous-famille finie est négativement associée.

Joag-Dev et Proschan (1983) montrent, en plus des propriétés fondamentales des variables NA, que certaines distributions multi-variées (les lois gaussiennes négativement corrélées, les lois multinomiales, les lois de Dirichlet,...) possèdent la propriété de NA. L'étude de l'association négative a, depuis, connu son essor (avec les travaux de Newman (1984), Matula (1992), Roussas (1994, 2000)), Bulinski (1996), et plus particulièrement ces dernières années avec les contributions de Su et al (1997) qui proposent des inégalités pour les moments et étudient la convergence faible, Zhang (2001), qui établit un LIL, Baek et al. (2005), Jabbari et Azarnoosh (2006), Xing et al. (2009), Kuczmaszewska (2009), Sun et al. *(2010), Doosti et Dewan (2010), Mi-Hwa Ko (2011) pour la convergence complète, Guang et Hui Cai (2011) pour un principe d'invariance fort,...*

Quasi-Association (QA)

Définition 1.7 *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables de vecteurs aléatoires réels est dite Quasi-Associée (QA), si pour des sous-ensembles disjoints I et J de $\mathbb{N}$ et toutes fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R}^{|I|d} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{|J|d} \to \mathbb{R}$ on a :*

$$Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq Lip(f)Lip(g) \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \left|Cov(X_i^k, X_j^l)\right|$$

où X_i^k désigne le composant k^{me} de X_i,

$$Lip(f) = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_1} \quad with \quad ||(x_1, ..., x_k)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_k|.$$

Une famille infinie de variables aléatoires est quasi-associée (QA) si toute sous famille finie est quasi-associée.

Remarque 1.1 *L'association positive est souvent confondue avec l'association : les deux définitions sont ressemblantes, mais pas équivalentes.*
La définition de la PA est strictement plus faible que celle de l'association, dans le sens où l'association implique la PA.
La réciproque est en général fausse. Pour le cas bivarié, Esary et al (1967) montrent les implications strictes suivantes :
X et Y associées $\Longrightarrow Cov(f_X, g_Y) \leq 0$ pour toutes fonctions non décroissantes f et g ($\Longrightarrow Cov(f_X, g_Y) \leq 0$)

Autrement dit, Il existe des variables PA qui ne sont pas associées, comme le montre l'exemple d'un cas binaire dû à Esary et al. (1967), puis repris et développé par Bulinski et Shashkin (2007, page 09). Pitt (1982) montre qu'une famille $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de variables aléatoires gaussiennes (centrées) est associée si et seulement elle est positivement corrélée (i.e. $Cov(Xi, Xj) \geq 0$). Bulinski et *al.* (2012) ajoutent que "pour de telles familles, les concepts d'association et de PA coïncident". Parmi les travaux relatifs à la PA, on peut citer ceux de Burton et *al.* (1986) qui démontrent un TCL, Dabrowski et Dehling (1988) qui proposent un LIL ainsi qu'une inégalité de type Berry-Esseen, et parmi les plus récents, Xing et Yang (2010a,2010b,2011).
La définition de la quasi-association (QA) "unifie les systèmes aléatoires PA et NA, sous l'hypothèse que la fonction de covariance est sommable (ce qui est habituellement requis pour les théorèmes limites)" (Bulinski et Shashkin (2007)).

Remarque 1.2 *L'inégalité (1.1) est vérifiée pour des variables PA ou NA (voir Bulinski et Sabanovitch (1998)). Autrement dit, la PA ou la NA impliquent la quasi-association. Ce qui fait de la quasi-association la plus faible forme de dépendance dans l'association. Shashkin (2002) montre que toute suite aléatoire gaussienne, dont la fonction de covariance prend des valeurs positives et négatives, est QA.*

Remarque 1.3 *La même année (1998), une autre définition de la QA a été proposée par Khoshnevisan et Lewis. Cette définition s'apparente plutôt à la PA.*

Cas des variables quasi-associées Hilbertiennes

Définition 1.8 *Soit* $(\mathcal{H}, < .,. >)$ *un espace de Hilbert séparable à base orthonormale* $e_k, k \geq 1$. *Une séquence* $(X_n)n \in \mathbb{N}$ *de variables aléatoires réelles prenant des valeurs dans* $\mathcal{H}$ *est dit quasi-associé, par rapport à la base* e_k *si pour tout* $d \geq 1$, *la séquence d-dimensionnelle* $\{(< X_i, e_{j1} >, ..., < X_i, e_{jd} >), i \in \mathbb{N}\}$ *est quasi-associé*

Notez bien que la définition de la quasi-association dans l'espace de Hilbert dépend du choix de la base.

1.3 L'approche à indice unique

L'approche à indice unique est largement appliquée en économétrie en tant que compromis raisonnable entre les modèles non paramétriques et paramétriques.
Ce type de modélisation est étudié de manière intensive dans le cas multivarié. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous citons par exemple Härdle et al. (1993), Hristache et al. (2001). Sur la base de la fonction de régression, Delecroix et al. (2003) ont étudié l'estimation de l'indice simple et établi certaines propriétés asymptotiques.
La littérature est strictement limitée dans le cas où la variable explicative est fonctionnelle (c'est-à-dire une courbe). Les premières propriétés asymptotiques du modèle simple fonctionnel fixe ont été obtenues par Ferraty et al. (2003). Ils ont établi la convergence presque complète, dans le i.i.d. cas, de la fonction de régression de lien de ce modèle. Leurs résultats ont été étendus aux cas dépendants par Aït Saidi et al. (2005). Aït Saidi et al. (2008) ont étudié le cas où l'index unique fonctionnel est inconnu. Ils ont proposé un estimateur de ce paramètre, basé sur la procédure de validation croisée.
L'objectif de cet article est d'étudier le modèle fonctionnel à index unique via son estimation de densité conditionnelle. Cela étend, de manière différente, les travaux de Delecroix et al. (2003) et Ferraty et al. (2006). Nous construisons un estimateur de la densité conditionnelle de Y donnée X par une méthode du noyau et nous prouvons, dans des conditions générales, sa convergence ponctuelle et uniforme presque complète (avec le taux).
En pratique, cette étude a une grande importance car elle nous permet de construire une méthode de prédiction basée sur l'estimateur de mode conditionnel. De plus, dans le cas où l'index fonctionnel unique est inconnu, notre estimation peut être utilisée pour estimer ce paramètre via la méthode d'estimation par pseudo maximum. Notant que l'estimation de l'indice unique fonctionnel présente un grand intérêt pour le choix semi-métrique dans l'analyse de données fonctionnelles non paramétriques, elle n'a toutefois pas été attaquée dans le présent document.

1.4 Contribution de la thèse

Dans notre travail de thèse, nous avons apporté une contribution au thème de l'estimation non paramétrique fonctionnelle et à la statistique des données quasi-associés.

Le cadre général présenté dans cette thèse est celui de l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle dans le cas des données fonctionnelles sous une dépendance quasi-associés. Ce domaine est d'actualité et d'un intérêt scientifique important selon les différents résultats obtenus et publiés dans des revues bien établies. Les utilisateurs ont désormais fréquemment recours à des méthodes non paramétriques, rendues accessibles par ces travaux scientifiques et par leur intégration dans les logiciels de statistique. La méthode d'estimation non paramétrique considérée est la méthode de noyau . Nous sommes intéressés à enrichir cadre des données quasi associées en utilisant l'estimation par la méthode du noyau par quelques travaux de recherche en étudiant les propriétés asymptotiques de la fonction de hasard conditionnelle.

Brève présentation des résultats

Ce paragraphe présente une brève présentation des différents résultats obtenu dans la thèse et nous laissons les détails pour les chapitres qui suivent.

Notations

Considérons $Z_i = (X_i, Y_i)_{1\leq i\leq n}$ n variable aléatoire quasi-associé identiquement distribué sous la forme aléatoire $Z = (X, Y)$, avec des valeurs dans $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel séparable avec la norme $\| \, . \, \|$ généré par un produit scalaire $< .,. >$.
considérons la semi-métrique $d \in \mathcal{H}$ defined by $\forall x, x' \in \mathcal{H} : d(x, x') := \|x - x'\|$. on définit un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle $\widehat{F}^X$ par la méthode du noyau comme suit :

$$\widehat{F}^X(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(X, X_i)) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(X, X_i))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

où K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs.

De cet estimateur, on déduit un estimateur pour la densité conditionnelle, noté $\widehat{f}^{\mathcal{X}}$, défini par :

$$\widehat{f}^X(y) = \frac{h_H^{-1} \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(X, X_i)) H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(X, X_i))} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

. Donc l'estimateur du fonction de hasard est :

$$\widehat{h}^X = \frac{\widehat{f}^X(y)}{1-\widehat{F}^X(y)} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Résultat 1 : Vitesse de convergence de l'estimateur de la densité conditionnelle

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses (H1)- (H7), on a :*

$$|\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1}$$

Résultat 2 : Vitesse de convergence de l'estimateur de la fonction de répartition conditionnelle

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses (H1)- (H7), on a :*

$$|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2}$$

Résultat 3 : Vitesse de convergence de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle

Théorème 1.3 *Sous les hypothèses (H1)- (H7), on a :*

$$|\widehat{h}^X(y) - h^X(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_X(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3}$$

Résultat 4 : la normalité asymptotique dans le cas de l'estimation à un seul indice

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses (H1)-(H7), on a, pour tout $x \in \mathcal{A}$*

$$\sqrt{n h_H \phi_\theta(x, h_K)}\left(\widehat{h}(\theta, y, x) - h(\theta, y, x)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_h^2(\theta, x)) \quad \text{as } n \quad \to \infty$$

où

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{H},\ f(\theta, y, x)(1 - F(\theta, y, x)) \neq 0\}\ , \sigma_h^2(\theta, x) = \frac{C_2 h(\theta, y, x)}{C_1^2(1 - F(\theta, y, x))}\int H'^2(t)dt,$$

avec

$$C_j = K(1) - \int_0^1 (K^j)'(s)\beta_\theta(x, s)ds, \quad for\ j = 1, 2.$$

et $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ signifie la convergence en loi.

Les démonstrations et les hypothèses nécessaires de ces résultats, sont détaillées dans les chapitres qui suivent.

1.5 Plan de la thèse

Notre principale étude est celle de l'estimation non paramétrique fonctionnelle de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode de noyau lorsqu'on dispose d'une variable réponse réelle conditionnée à une variable explicative fonctionnelle dans le but par la suite est d'étudier les propriétés asymptotiques de notre estimateur, les propriétés asymptotiques sont énoncées en termes de convergence presque complète qui est connue pour impliquer à la fois la convergence presque sûre et la convergence en probabilité. Nous avons scindé notre travail en cinq chapitres.

Le premier chapitre est un chapitre présentatif des différents thèmes abordés dans notre thèse. Nous commençons par un bref historique sur l'estimation nonparamétrique fonctionnelle et un contexte bibliographique sur la fonction de hasard conditionnelle, ainsi nous avons choisi, de donner une courte introduction sur la méthode noyau et sur la statistique des données associées et quasi-associés et un dernier paragraphe sur les résultats obtenus dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons l'estimation de noyau de la densité conditionnelle pour une variable de réponse réelle et une variable exogène fonctionnelle quasi-associée. L'organisation de ce chapitre est comme suit. Nous construisons un estimateur avec la méthode de noyau la densité conditionnelle. Ainsi, nous établissons la convergence presque complète de notre estimateur sous des conditions de régularités et sous l'hypothèse de concentration.

Dans le troisième chapitre, nous considérons l'estimation de noyau de la fonction de répartition conditionnelle pour une variable de réponse réelle et une variable exogène fonctionnelle quasi-associée. Ce chapitre est composé de six sections, une introduction fait la première section. Tout d'abord, nous construisons un estimateur avec la méthode du noyau. Nous introduisons les notations et les hypothèses dans la troisième section. Dans la suivante section, nous établissons la convergence presque complète de notre estimateur et en cinquième sections, une application directe des résultats obtenus sur l'estimateur de la densité conditionnelle et de la fonction de répartition conditionnelle pour prouver la convergence de l'estimation la fonction de hasard conditionnelle. Nous laissons les démonstrations à la dernière section.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'établissement de la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau la fonction de hasard conditionnelle de modèle d'indice fonctionnel. La structure est la suivante. Dans la deuxième section, nous présentons le modèle de notre étude. Les hypothèses et les notations seront données dans la troisième section. La section quatre est réservée au résultat de la normalité asymptotique de notre estimateur. Les démonstrations des résultats sont données à la dernière section.

Et Pour montrer, comment on peut implémenter facilement et rapidement la fonction de hasard conditionnelle par la méthode du noyau et d'examiner l'influence du degré de dépendance sur ces propriétés asymptotiques. Pour cela nous avons mis en ouvre au cinquième chapitre une étude des données simulées.

Enfin, Nous terminerons la thèse par une conclusion et quelques prolongements possibles de nos travaux rattachés au contenu de ce domaine de recherche.

Bibliographie

[1] A. Ahmedou, J. M. Marion et B. Pumo. (2016). Generalized linear model with functional predictors and their derivatives. *J. Multivariate Anal.* 146, 313-324.

[2] A. Aït Saïdi, F. Ferraty et R. Kassa. (2008). Cross-validated estimation in the single functional index model. *Statistics.* 42 , 475-494.

[3] G. Aneiros-Pérez et P. Vieu. (2008). Nonparametric time series prediction : a semi-functional partial linear modelling. *J. Multivariate Anal.* 99 (5), 834-857.

[4] S. Attaoui, A. Laksaci et E. Ould-Saïd. (2011). A note on the conditional density estimate in the single functional index model. *Statist. Probab. Lett.* 81, 45-53.

[5] S. Attaoui, A. Laksaci et E. Ould-Saïd. (2015). Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes. *Functional Statistics and Applications, Contributions to Statistics.* 10.1007/978-3-319-22476-3-1.

[6] S. Attaoui et N. Ling. (2016). Asymptotic results of a nonparametric conditional cumulative distribution estimator in the single functional index modeling for time series data with applications, *Metrika.* 79, 485Ũ511.

[7] E. Bongiorno, A. Goia, E. Salinelli et P. Vieu. (2014). An overview of IWFOS'2014. In : Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics. *Esculapio, Bologna.* 1-6.

[8] D. Bosq. (2000). *Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications.* Lecture Notes in Statistics, 149. New York : Springer.

[9] D. Bosq et D. Blanke. (2007). *Inference and Prediction in Large Dimensions.* Wiley Series in Probability and Statistics John Wiley & Sons.

[10] D. Bosq et J. P. Lecoutre. (1987). *Théorie de l'estimation fonnctionnelle.* Economica.

[11] A. Bulinski et C. Suquet. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54, 215-226.

[12] A. Bulinski et E. Shabanovich. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively dependent random fields. (in Russian). *Fundam. Appl. Math.* 4, 479-492

[13] H. Cardot, C. Crambes et P. Sarda. (2004). Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 339, 141-144.

[14] D. Chen, P. Hall et H. G. Müller. (2011). Single and multiple index functional regression models with nonparametric link. *Ann. Statist.* 39 (3), 1720-1747.

[15] A. Cholaquidis, R. Fraiman, J. Kalemkerian et P. Llop. (2016). An nonlinear aggregation type classifier. *J. Multivariate Anal.* 146, 269-281.

[16] A. Cuevas. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J. Statist. Plann. Inference.* 147, 1-23.

[17] S. Dabo-Niang. (2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux difusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 334, 213-216.

[18] S. Dabo-Niang. (2004). Kernel density estimator in an infnite dimensional space with a rate of convergence in the case of difusion process. *Applied Math. Lett.* 17, 381-386.

[19] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* 51, 27-42.

[20] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 344, 49-52.

[21] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *Pub. Instit. Statist. Univ. Paris.* 3, 27-42.

[22] J. Dedecker, P. Doukhan, G. Lang, R. J. R. León, S. Louhichi et C. Prieur. (2007) Weak dependence : with examples and applications.*Lecture Notes in Statistics.*

[23] J. De Gooijer et A. Gannoun. (2000). Nonparametric conditional predictive regions for time series. Comput. *Statist. Data Anal.* 33, 259-257.

[24] L. Douge. (2010). Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. *Ann. I.S.U.P.* 54, 51-60.

[25] P. Doukhan et S. Louhichi. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stoch. Proc. Appl.* 84, 313-342.

[26] J. Esary, F. Proschan et D. Walkup. (1967). Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.* 38, 1466-1476.

[27] G. Estévez-Pérez. (2002). On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation. *Statist. Probab. Lett.* 57, 231-241.

[28] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río et P. Vieu. (2002). Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. *J. Statist. Plann. Inference.* 104, 1-30.

[29] M. Ezzahrioui et E. Ould-Saïd. (2005). Asymptotic normality of nonparametric estimators of the conditional mode for functional data. *Technical report*, No.249, *LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale.*

[30] M. Ezzahrioui et E. Ould-Saïd. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data. *Preprint*, No 277, *LMPA, Univ. du Littoral Côte d'Opale.*

[31] J. Fan, Q. Yao et H. Tong. (1996). Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems. *Biometrika* 83, 189-206.

[32] F. Ferraty, A. Laksaci et P. Vieu. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 340, 389-392.

[33] F. Ferraty, A. Laksaci et P. Vieu. (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.* 9, 47-76.

[34] F. Ferraty, A. Tadj, A. Laksaci et P. Vieu. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Infer.* 140, 335-352.

[35] T. Gasser, P. Hall et B. Presnell. (1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. R. Stat. Soc.Ser. B, Stat. Methodol.* 60, 681-691.

[36] L. Horváth et G. Rice. (2015). An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves. *Rev. Mat. Complut.* 28 (3), 505-548.

[37] T. Hsing et R. Eubank. (2015). *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators.* Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester.

[38] R. S. Kallabis et M. H. Neumann. (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli.* 12, 333-350.

[39] A. Laksaci. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. *Ann. I.S.U.P.* 51, 69-80.

[40] A. Laksaci et B. Mechab. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales.*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 55(1), 35-51.

[41] E. Masry. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes IEEE. *Trans. Inform. Theory.* 32, 254-267.

[42] P. Matula. (1992). A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* 15, 209-213.

[43] W. Mechab et A. Laksaci. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron.* 10.1007/s40300-016-0084-9.

[44] H. G. Müller. (2005). Functional modelling and classification of longitudinal data. *Scand. J. Stat.* 3, 223-240.

[45] C. M. Newman. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables : In Inequalities in Statistics and Probability, *IMS Lect. Notes-Monographs Series*. 5, 127-140.

[46] A. Quintela-del-Río. (2008). Hazard function given of functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *J. Nonparametr. Stat.* 20, 413-430.

[47] J. O. Ramsay et B. W. Silverman. (2002). *Applied functional data analysis ; Methods and case studies*. Springer-Verlag, New York.

[48] J. O. Ramsay et B. W. Silverman. (2005). *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, New York.

[49] M. Rosenblatt. (1969). Conditional probability density and regression estimators. In : Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II.* New York and London : Academic Press.

[50] G. G. Roussas. (1999). Positive and negative dependence with some statistical applications In : Asymptotics, Nonparametrics and Time Series (S. Ghosh,Ed) pp. 757-788. *Marcell Dekker, Inc., New York.*

[51] H. Tabti et A. Aït Saïdi. (2016). Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure. *Commu. Stat. Theory and Methods*. 47(4), 816-838.

[52] E. Youndjé. (1993). Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Ph.D. Thesis, Rouen University (in French).

[53] E. Youndjé. (1996). Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Rev. *Roumaine Math. Pures Appl.* 41, 535-566.

Chapitre 2

Nonparametric estimation of the conditional density with a functional explicatory variable for quasi-associated data

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans International Journal of Statistics and Economics

NON-PARAMETRIC ESTIMATION OF THE CONDITIONAL DENSITY WITH A FUNCTIONAL EXPLICATORY VARIABLE FOR QUASI-ASSOCIATED DATA

HAMZA DAOUDI[1] and BOUBAKER MECHAB[2]

[1,2] Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques
Univ. Djillali Liabès, L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
[1] Univ. Ibn Khladoun. Dept.Math, L.P 78, Tiaret 14000, Algeria
E-mail [1] : Daoudiham63@gmail.com
E-mail [2] : Mechaboub@yahoo.fr

Abstract : The purpose of the present paper is to investigate by the kernel method a nonparametric estimate of the conditional density of a scalar response variable given a random variable taking values in a separable real hilbert space when the observations are quasi-associed dependent. Under some general conditions, we establish the pointwise almost complete consistencies with rates of this estimator. The principal aim is the investigate of the convergence rate of the proposed estimator.

AMS 2000 Subject Classification : 62G05, 62G20
Key words : conditional density, kernel estimation, Probabilities of small balls, quasi-associed data.

2.1 Introduction

The estimation of the conditional density function and its derivatives, in statistics functional, was introduced by Ferraty et *al.* [14]. These authors obtained almost complete convergence in the case i.i.d. Since this article, an abundant literature has developed on the estimation of the conditional density and its derivatives, in particular in order to use it to estimate the conditional mode. Indeed, considering a-mixing observations, Ferraty et *al.* [13] established the almost complete convergence of a kernel estimator of the conditional mode defined by the random variable maximizing the conditional density. Alternatively, Ezzahrioui and Ould-Said [10][11] estimated the conditional mode by the point that cancels the derivative of the kernel density estimator. The latter focused on the asymptotic normality of the estimator proposed in both cases (i.i.d. and mixing). The accuracy of the dominant terms of the quadratic error of the kernel density estimator has been obtained by Laksaci [17]. We refer to Laksaci et *al.*[19] for the question of the choice of the smoothing parameter in the estimation of conditional density to functional explanatory variable. The associated random variables play an important role in a wide variety of areas, including reliability theory, mathematical physics, multivariate statistical analysis, life sciences and in percolation theory.
Many works were treated data under positive and negative dependant random variables, one can quote, Newman [23], Matula [21] and Roussas [25].
The concept of quasi-association is a special case of weak dependence introduced by Doukhan and Louhichi [9] for real-valued stochastic processes. It was applied by Bulinski and Suquet [3] to real valued random fields, and it provides a unified approach to studying families of both positively and negatively dependent random variables. To the best of our knowledge, there is few papers dealing with the nonparametric estimation for quasi-associated random variables. We quote, Douge [8] studied a limit theorem for quasi-associated Hilbertian random variables, Said Attaoui, Ali Laksaci, and Elias Ould Saïd [1] studied Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes, Tabti and Saidi Ahmed [26] studied Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-indexstructure, Wardia Mechab and Ali Laksaci studied Nonparametric relative regression for associated random variables [22].
The main contribution of this work is the study of the estimator of The Conditional density of Ferraty et emphal.[14] in case of quasi-associated data. the almost-complete convergence (a.co.) [1] is established (with speed) of a kernel estimator for the Conditional density of a real random variable conditioned by a functional explanatory variable. Note that, like all asymptotic statistics nonfunctional parametric, our result is related to the phenomenon of concentration of the probability measure of the explanatory variable and regularity

1. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real r.v.'s ; we say that z_n converges almost completely (a.co.) to zero if, and only if, $\forall\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|z_n| > \epsilon) < \infty$. Moreover, we say that the rate of almost complete convergence of z_n to zero is of order u_n (with $u_n \to 0$) and we write $z_n = O_{a.co.}(u_n)$ if, and only if, $\exists\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|z_n| > \epsilon u_n) < \infty$.

of the functional space of the model. In this article, we discuss the asymptotic bias and dispersion of the conditional density in quasi-associated case. we recall the definition of association :

Définition 2.1 *A sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of real random vectors variables is said to be Quasi-Association (QA), if for any disjoint subsets I and J of $\mathbb{N}$ and all bounded Lipschitz functions f :*
$BBr^{|I|d} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^{|J|d} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq Lip(f)Lip(g) \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \left|Cov(X_i^k, X_j^l)\right|$$

where X_i^k denotes the k^{th} component of X_i,

$$Lip(f) = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_1} \text{ with } ||(x_1, ..., x_k)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_k|.$$

The paper is organized as follows : the next section we present our model. Section 3 is dedicated to fixing notations and hypotheses. We state our main results in section 4. Finally, the proofs the proofs of the auxiliary results in the section 5.

2.2 The model

Consider $Z_i = (X_i, Y_i)_{1\leq i\leq n}$ be a n quasi-associated random identically distributed as the random $Z = (X, Y)$, with values in $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{H}$ is a separable real Hilbert space with the norm $\| \,.\, \|$ generated by an inner product $< .,. >$.
We consider the semi-metric d defined by $\forall x, x' \in \mathcal{H}/d(x, x') =\| x - x' \|$. In the following x will be a fixed point in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{N}_x$ will denote a fixed neighborhood of x and $\mathcal{S}$ will be fixed compact subset of $\mathbb{R}$.
We intend to estimate conditional density $f^x(y)$ using n dependent observations $(X_i, Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ draw from a random variables with the same distribution with $Z := (X, Y)$

To this aim, we first introduce the kernel type estimator $\widehat{f^x}$ of f^x defined by :

$$\widehat{f^x}(y) = \frac{h_H^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))H'(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Where H' is the derivative of H.

Now, we introduce our main assumptions.

2.3 Notations and hypotheses

All along the paper, when no confusion will be possible, we will denote by C or/and C' some strictly positive generic constants whose values are allowed to change. The variable x is a fixed point in $\mathcal{H}$, $\mathcal{N}_x$ is a fixed neighborhood of x. We assume that the random pair $Z_i = \{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}\}$ is stationary quasi-associated processes. Let λ_k the covariance coefficient defined as :

$$\lambda_k = sup_{s\geq k} \sum_{|i-j|\geq s} \lambda_{i,j}$$

where

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, X_j^l) \mid + \sum_{k=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, Y_j) \mid + \sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(Y_i, X_j^l) \mid + cov(Y_i, Y_j) \mid .$$

X_i^k denotes the k^{th} component of X_i defined as $X_i^k :=< X_i, e^k >$.
For $h > 0$, let $B(x,h) := \{x' \in \mathcal{H}/d(x',x) < h\}$ be the ball of center x and radius h.
To establish the almost complete convergence of the estimator $\widehat{h}^x$ we need to include the following assumptions :

(H1) $\mathbb{P}(X \in B(x,h)) = \phi_x(h) > 0$ and the function $\phi_x(h)$ is a differentiable at 0.

(H2) The conditional density $f^x(y)$ satisfies the Hölder condition, that is : $\forall(x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x$, $\forall(y_1, y_2) \in \mathcal{S}^2$

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C \left(d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2}\right), \quad b_1 > 0,\, b_2 > 0.$$

where S is a fixed compact subset of $\mathbb{R}$.

(H3) The kernel H is a differentiable function and H' is a positive, bounded, Lipschitzian continuous function such that :

$$\int |t|^{b_2} H'(t)dt < \infty \quad textand \int H'^2(t)dt < \infty.$$

(H4) K is a bounded continuous Lipschitz function such that :

$$C\mathbf{1}_{[0,1]}(.) < K(.) < C'\mathbf{1}_{[0,1]}(.)$$

where $\mathbf{1}_{[0,1]}$ is a indicator function.

(H5) The sequence of random pairs $(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}$ is quasi-associated with covariance coefficient λ_k, $k \in \mathbb{N}$ satisfying :

$$\exists\alpha > 0, \exists C > 0, \text{such that } \lambda_k \leq Ce^{-\alpha k}$$

(H6) for all pairs (i, j), the joint distribution functions

$$\Psi_{i,j}(h) = \mathbb{P}\left[(X_i, X_j) \in B(x,h) \times B(x,h)\right]$$

satisfy

$$0 < \sup_{i\neq j} \Psi_{i,j}(h) = O(\phi_x^2(h_k))$$

(**H7**) The bandwidths h_K and h_H are a sequences of positive numbers satisfying :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^5 n}{n h_H^j \phi_x(h_K)} = 0, j = 0, 1.$$

2.4 Main result : Pointwise almost complete convergence

Théorème 2.1 *Under hypotheses (H1)-(H7), we have :*

$$|\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2}$$

Proof
The proof of Theorem 2.1 is based on the following decomposition :

$$\begin{aligned} \widehat{f}^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left((\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)) - (f^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y))\right) \\ &+ \frac{f^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right) \end{aligned} \tag{3}$$

we can write :

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\widehat{f}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

where

$$\widehat{f}_N^x(y) = \frac{1}{n h_H \mathbb{E}(K_1(x))} \sum_{i=1}^n K_i(x) H_i(y). \tag{4}$$

and

$$\widehat{F}_D^x = \frac{1}{n \mathbb{E}(K_1(x))} \sum_{i=1}^n K_i(x), \tag{5}$$

where

$$K_i(x) = K\left(h_K^{-1} d(x, X_i)\right) \qquad \text{and} \qquad H_i(y) = H\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right). \tag{6}$$

The proof of theorem 2.1 is based on the following lemmas :

Lemme 2.1 *Under hypotheses (H1)-(H4) and (H6), we have :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}(\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)) = O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7}$$

Corollaire 2.1 *Under hypotheses (H1)-(H4) and (H6), we have :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mid \widehat{F}_D^x \mid < 1/2\right) < \infty. \tag{8}$$

Lemme 2.2 *Under hypotheses (H1)-(H6), we have :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}(f^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)) = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right). \tag{9}$$

Lemme 2.3 *Under hypotheses (H1)-(H3) and (H6) , we have :*

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{10}$$

2.5 Auxiliary results and proofs

First of all, we state the following lemmas.

Lemme 2.4 *(Douge (2010))[8] Let $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a quasi-associated sequence of random variables with values in $\mathcal{H}$. Let $f \in BL(\mathcal{H}^{|I|}) \cap \mathbb{L}^\infty$ and $g \in BL(\mathcal{H}^{|J|}) \cap \mathbb{L}^\infty$,for some finite disjoint subsets $I, J \in \mathbb{N}$. Then*

$$Cov\left(f\left(X_i, i \in I\right), g(X_j, j \in J)\right) \leq Lip(f)Lip(g) \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \left|Cov(X_i^k, X_j^l)\right|$$

where $(BL(\mathcal{H}^u; u > 0)$ is the set of bounded Lipschitz functions $f : \mathcal{H}^u \to \mathbb{R}$ and $\mathbb{L}^\infty$ is the set of bounded functions.

Lemme 2.5 *(Kallabis and Newmann (2006))[16]*
Let $X_1, ..., X_n$ the real random variables such that $\mathbb{E}(X_j) = 0$and $\mathbb{P}\left(\mid X_j \mid \leq M\right) = 1$ for all$j = 1, ..., n$and some$M < \infty$, Let $\sigma_n^2 = Var\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i\right)$.
Assume,furthermore, that there exist $K < \infty$ and $\beta > \infty$ such that, for all u-uplets $(s_1, ..., s_u) \in \mathbb{N}^u$, $(t_1, ..., t_v) \in \mathbb{N}^v$ with $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$. the following inequality is fulfilled :

$$\mid cov(X_{s_1}...X_{s_u}, X_{t_1}...X_{t_v}) \mid \leq K^2 M^{u+v-2} v e^{-\beta(t_1 - s_u)}.$$

. Then,

$$\mathbb{P}\left(\mid \sum_{j=1}^{n} X_j \mid > t\right) \leq exp\left\{-\frac{t^2/2}{A_n + B_n^{1/3} t^{5/2}}\right\}$$

for some :

$$A_n \leq \sigma_n^2$$

and

$$B_n = \left(\frac{16nK^2}{9An(1 - e^-\beta) \vee 1}\right)\frac{2(K \vee M)}{1 - e^-\beta}.$$

Proof of lemma 2.1

$$\Delta_i = \frac{1}{nh_H \mathbb{E}[K_1]}\chi(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n$$

where

$$\chi(X_i, Y_i) = K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - \mathbb{E}[K_1 H_1]$$

$X_i \in \mathcal{H}, Y_i \in \mathbb{R}$, clearly we have : $\mathbb{E}(\Delta_i) = 0$ and :

$$|\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)| = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

Moreover, we can write :

$$\| \chi \|_\infty {}^2 \leq 2C \| K \|_\infty \| H \|_\infty$$

and

$$Lip(\chi) \leq C(h_K^{-1} \| H \|_\infty Lip(K) + h_H^{-1} \| K \|_\infty Lip(H))$$

Now, to apply Lemma2.5, we have to evaluate the variance term $Var(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i)$ and the covariance term $cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v})$, for all $(s_1, ..., s_u) \in \mathbb{N}^u$,$(t_1, ..., t_v) \in \mathbb{N}^v$ with $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$.

Firstly, for the covariance term, we consider the following cases : - If $t_1 = s_u$. By using the fact that $\mathbb{E}[| K_1 H_1 |] = O(h_H \phi_x(h_K))$ and $\mathbb{E}[| K_1 |] = O(\phi_x(h_K))$ we have :

$$\begin{aligned} | Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) | &\leq \left(\frac{C}{nh_H \mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v} \mathbb{E}\chi \mid (X_1, Y_1) \mid^{u+v} \\ &\leq \left(\frac{C \| K \|_\infty \| H \|_\infty}{nh_H \mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v} \mathbb{E}[| K_1 H_1 |] \\ &\leq h_H \phi_x(h_K) \left(\frac{C}{nh_H \phi_x(h_K)}\right)^{u+v} \end{aligned} \tag{11}$$

- If $t_1 > s_u$, we use the quasi-association, under (H5), we get :

2. For any function f we denote by $\| f \|_\infty$ the supremun norm.

$$
\begin{aligned}
\mid Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) \mid &\leq \left(\left(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H) \right) (n h_H \mathbb{E}[K_1])^{-1} \right)^2 \\
&\times \left(\frac{C}{n h_H \mathbb{E}[K_1]} \right)^{u+v-2} \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} \lambda_{s_i, t_j} \\
&\leq \left(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H) \right)^2 \left(\frac{C}{n h_H \mathbb{E}[K_1]} \right)^{u+v} v \lambda_{t_1 - s_u} \\
&\leq \left(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H) \right)^2 \left(\frac{C}{h_H \phi_x(h_K)} \right)^{u+v} v e^{-\alpha(t_1 - s_u)}
\end{aligned} \tag{12}
$$

- On the other hand, by (H6) we have :

$$
\begin{aligned}
\mid Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) \mid &\leq \left(\frac{C \parallel K \parallel_\infty \parallel H \parallel_\infty}{n h_H \mathbb{E}[K_1]} \right)^{u+v-2} (\mid \mathbb{E}[\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}] \mid + \mathbb{E} \mid \Delta_{s_u} \mid \mathbb{E} \mid \Delta_{t_1} \mid \\
&\leq \left(\frac{C \parallel K \parallel_\infty \parallel H \parallel_\infty}{n h_H \mathbb{E}[K_1]} \right)^{u+v-2} \left(\frac{C}{n h_H \mathbb{E}[K_1]} \right)^2 \\
&\times \; h_H (sup_{i \neq j} \mathbb{P} \left((X_i, X_j) \in B(x, h_K) \times B(x, h_K) + \mathbb{P} \left(X_1 \in B(x, h_K \right.\right. \\
&\leq \left(\frac{C}{h_H \phi_x(h_K)} \right)^{u+v} (h_H \phi_x(h_K))^2
\end{aligned}
$$

Furthermore,taking a $\gamma-power$ of (12), $(1-\gamma)-power$ of (13), with $1 = 4 < \gamma < 1 = 2$, we obtain an upper-bound of the tree terms as follows : for $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$

$$
cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) \mid \leq h_H \phi_x(h_K) \left(\frac{C}{n h_H \phi_x(h_K)} \right)^{u+v}
$$

Secondly, for the variance term $Var(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i)$, we put, for all $1 \leq i \leq n$, Thus, $Var(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i)$

$$\begin{aligned}
\mid Var(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u},\Delta_{t_1}...\Delta_{t_v})\mid &= \left(\frac{1}{nh_H\mathbb{E}[K_1]}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(K_iH_i,K_jH_j)\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{nh_H\mathbb{E}[K_1]}\right)^2 Var(K_1H_1)}_{I}\\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{nh_H\mathbb{E}[K_1]}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}Cov(K_iH_i,K_jH_j)}_{II}
\end{aligned} \quad (14)$$

For the first term,

$$Var(K_1H_1)=\mathbb{E}\left(K_1^2H_1^2\right)-\left(\mathbb{E}(K_1H_1)\right)^2$$

Then,

$$\mathbb{E}(K_1^2H_1^2)=\mathbb{E}\left[K_1^2\mathbb{E}[H_1^2\mid X_1]\right]$$

Thus, under (H2) and (H3), and by integration on the real component y we get,

$$\mathbb{E}[H_1^2\mid X_1]=O\left(h_H\right)$$

As,for all $j\geq 1$:

$$\mathbb{E}[K_1^j]=O\left(\phi_x(h_K)\right)$$

Then,

$$\mathbb{E}[K_1^2H_1^2]=O\left(h_H\phi_x(h_K)\right)$$

It follows that :

$$\left(\frac{1}{n(h_H\mathbb{E}[K_1])^2}\right)^2 Var(K_1H_1)=O(nh_H\phi_x(h_K)) \quad (15)$$

Now, let us evaluate the asymptotic behavior of the sum in the second term of (14). For this, we use the technique developed by Masry [20]. Indeed, we need the following decomposition :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}Cov(K_iH_i,K_jH_j) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,0<|i-j|\leq m_n}^{n}Cov(K_iH_i,K_jH_j)}_{I}\\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|>m_n}^{n}Cov(K_iH_i,K_jH_j)}_{II}
\end{aligned}$$

where (m_n) is a sequence of positive integer which goes to infinity as $n \to \infty$ From Assumptions (H1), (H3) and (H6), we have, for $i \neq j$

$$\begin{aligned} I &\leq nm_n \left(max_{i\neq j} \mid \mathbb{E}(K_i H_i K_j H_j) \mid + (\mathbb{E}(K_1 H_i))^2 \right) \\ &\leq Cnm_n \left(h_H^2 \phi_x^2(h_K) + (h_H \phi_x(h_K))^2 \right) \\ &\leq Cnm_n \left(h_H^2 \phi_x^2(h_K) \right) \end{aligned} \tag{16}$$

Since both kernels H and K are bounded and Lipschitz, we get

$$\begin{aligned} II &\leq (h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H))^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\ &\leq C(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H))^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\ &\leq Cn(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H))^2 \lambda_{m_n} \\ &\leq Cn(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H))^2 e^{-\alpha m_n} \end{aligned} \tag{17}$$

Then, by (16) and (17), we get

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_i H_i, K_j H_j) \leq C \left(nm_n (h_H^2 \phi_x^2(h_K)) + n \left(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H) \right)^2 e^{-\alpha m_n} \right)$$

By choosing

$$m_n = \log \left(\frac{(h_K^{-1} Lip(K) + h_H^{-1} Lip(H))^2}{\alpha h_H^2 \phi_x^2(h_K)} \right)$$

we get :

$$\frac{1}{h_H \phi_x(h_K)} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_i H_i, K_j H_j) \to\to 0, asn \to \infty \tag{18}$$

Finally, by combining results (14), (15) and (18), we get :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \right) = O\left(\frac{1}{nh_H \phi_x(h_K)} \right)$$

So, the variables $\Delta_i, i = 1, ..., n$ satisfy the conditions of Lemma 5.3.2 for : $K_n = \frac{C}{nh_H\sqrt{\phi_x(h_K)}}$, $M_n = \frac{C}{nh_H\phi_x(h_K)}$ and $A_n = Var\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i\right)$ Thus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)| > \eta\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right) &= \mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^n \Delta_i| > \eta\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)\\
&\leq exp\left\{-\frac{\eta^2\log n}{nh_H\phi_x(h_K)Var\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i\right) + \frac{\log^{5/6} n}{nh_H\phi_x(h_K)^{(7/6)}}}\right\}\\
&\leq exp\left\{-\frac{\eta^2\log n}{C + \frac{\log^{5/6} n}{nh_H\phi_x(h_K)^{(7/6)}}}\right\}\\
&\leq C' exp\left\{-C\eta^2\log n\right\}
\end{aligned}$$

by (H7). Finally, for a suitable choice of η, Borel-Cantelli's lemma allows to finish the proof of this Lemma.

Proof of corollary 2.1 we have :

$$\{|\widehat{F}_D^X| \leq 1/2\} \subseteq \{|\widehat{F}_D^X - 1| > 1/2\}$$

therefore

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X| \leq 1/2\} &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X - 1| > 1/2\}\\
&\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X - \mathbb{E}\widehat{F}_D^X| > 1/2\}
\end{aligned}$$

for $\mathbb{E}\widehat{F}_D^X = 1$, we apply the result of Lemma 2.1 we show that :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^X < 1/2) < \infty.$$

Proof of lemma 2.2 we have :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widehat{f}_N^X(y) - f^X(y) &= \frac{1}{h_H\mathbb{E}K_1}\left[\mathbb{E}K_1H_1^{(1)}\left(\frac{y - Y_i}{h_H}\right) - h_Hf^X(y)\right]\\
&= \frac{1}{h_H\mathbb{E}K_1}\mathbb{E}\left(K_1\left[\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right)/X\right) - h_Hf^X(y)\right]\right)
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right)/X\right) &= \int_R H^{(1)}\left(\frac{y - u}{h_H}\right)f^X(u)du\\
&= h_H\int_R H^{(1)}(t)f^X(y - h_Ht)dt.
\end{aligned}$$

consequently

$$\left|\mathbb{E}\left(H_1\left(h_H^{-1}(y-Y_i)\right)/X\right)-h_Hf^X(y)\right| \leq h_H\int_R H^{(1)}(t)\left|f^X(y-h_Ht)-f^X(y)\right|dt.$$

l'hypothèse (H3) entraîne que

$$\left|\mathbb{E}\left(H_1\left(h_H^{-1}(y-Y_i)\right)/X\right)-h_Hf^X(y)\right| \leq A_Xh_H\int_R H^{(1)}\left(h_K^{b_1}+|t|^{b_2}h_H^{b_2}\right)dt.$$

hypothesis (H4) and Corollary 2.11 cause proof the lemma 2.2

Proof of lemma 2.3
The proof is a direct application of Lemma 2.1 when we replace $\chi(.,.)$ by

$$\chi(X_i)=K\left(h_K^{-1}d(x,X_i)\right)-\mathbb{E}[K_1],\forall X_i\in\mathcal{H}.$$

Bibliographie

[1] Attaoui S., Laksaci. A and Ould Saïd. E (2015). Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes. *Functional Statistics and Applications, Contributions to Statistics*, 10.1007/978-3-319-22476-3-1

[2] Bosq, D. (2000). Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications. *Lecture Notes in Statistics, 149. New York : Springer.*

[3] Bulinski A. and Suquet, C. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54, 215-226.

[4] Bulinski A.Shabanovich, E. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively dependent random elds. (in Russian). *Fundam. Appl. Math.*4, 479-492

[5] Dabo-Niang, S., Laksaci, A. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *Pub. Instit. Statist.* Univ. Paris 3 :27-42.

[6] Dedecker, J., Doukhan, P., Lang, G., León R., J. R., Louhichi, S., and Prieur, C. (2007) Weak dependence : with examples and applications. *Lecture Notes in Statistics.*

[7] De Gooijer, J., Gannoun, A. (2000). Nonparametric conditional predictive regions for time series. Comput. *Statist. Data Anal.* 33 :259-257.

[8] Douge, L. (2010). Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. *Ann. I.S.U.P.* 54, 51-60.

[9] Doukhan, P., Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stoch. Proc. Appl.* 84, 313-342.

[10] Ezzahrioui, M., Ould-Saïd, E. (2005). Asymptotic normality of nonparametric estimators of the conditional mode for functional data. *Technical report*, No.249, LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale.

[11] Ezzahrioui, M., Ould-Saïd, E. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data. *Preprint*, LMPA No 277, Univ. du Littoral Côte d'Opale.

[12] Fan, J., Yao, Q., Tong, H. (1996). Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems. *Biometrika* 83 :189-206.

[13] Ferraty, F. Laksaci, A., Vieu, P. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 340, 389-392.

[14] Ferraty,F, A. Laksaci and P. Vieu,(2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

[15] Ferraty, F., Tadj, A., Laksaci, A., Vieu, P. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Infer.* 140 :335-352.

[16] Kallabis, R. S and Neumann, M. H. (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli* 12, 333-350.

[17] Laksaci, A. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. Ann. I.S.U.P. 51, 69-80.

[18] Laksaci, A. and B. Mechab, Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales.*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **55**(2010), 1, 35-51.

[19] Laksaci, A., Lemdani, M., Ould-Saïd, E. (2009). A generalized L1- approach for a kernel estimator of conditional quantile with functional regressors : consistency and asymptotic normality. Statist. Probab. Lett. 79, 1065-1073.

[20] Masry, E : Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes IEEE. *Trans. Inform. Theory* 32, 254-267 (1986)

[21] Matula, P. (1992). A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* 15, 209-213.

[22] Mechab, W., Laksaci, A. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron*, 10.1007/s40300-016-0084-9.

[23] Newman, C. M. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables : In Inequalities in Statistics and Probability, *IMS Lect. Notes-Monographs Series*, 5, 127-140.

[24] Rosenblatt, M. (1969). Conditional probability density and regression estimators. In : Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II.* New York and London : Academic Press.

[25] Roussas, G. G. (1999). Positive and negative dependence with some statistical applications In : Asymptotics, Nonparametrics and Time Series (S. Ghosh,Ed) pp. 757-788. *Marcell Dekker, Inc., New York.*

[26] Tabti. H and Aït Saidi.A (2016)Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure

[27] Youndjé, E. (1993). Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Ph.D. Thesis, Rouen University (in French).

[28] Youndjé, E. (1996). Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Rev. *Roumaine Math. Pures Appl.* 41 :535-566.

Chapitre 3

Rate of pointwise consistency of the nonparametric conditional distribution function estimate for quasi-associated data

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans International Journal of Mathematics and Computation

RATE OF POINTWISE CONSISTENCY FOR NONPARAMETRIC OF THE CONDITIONAL DISTRIBUTION FUNCTION ESTIMATE WITH FUNCTIONAL VARIABLES FOR : QUASI-ASSOCIATED DATA

HAMZA DAOUDI[1] and BOUBAKER MECHAB[2]

[1,2] Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques
Univ. Djillali Liabès, L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
[1] Univ. Ibn Khladoun. Dept.Math, L.P 78, Tiaret 14000, Algeria
E-mail [1] : Daoudiham63@gmail.com
E-mail [2] : Mechaboub@yahoo.fr

Abstract : The purpose of the present paper is to investigate by the kernel method a nonparametric estimate of the conditional distribution function of a scalar response variable given a random variable taking values in a separable real hilbert space when the observations are quasi-associed dependent. Under some general conditions, we establish the pointwise almost complete consistencies with rates of this estimator. The principal aim is the investigate of the convergence rate of the proposed estimator.

AMS 2000 Subject Classification : 62G05, 62G20
Key words : the conditional distribution function, kernel estimation, Probabilities of small balls, quasi-associated data.

3.1 Introduction

The estimation of the conditional distribution function in a functional framework was introduced by [15]. They constructed a dual kernel estimator for the conditional distribution function and specified the almost complete convergence rate of this estimator when the observations are independent and identically distributed. The case of α-mixing observations was studied by [14]. An example of an application on conditional median prediction, as well as the determination of prediction intervals, was considered in this article. Several authors have treated the estimation of the conditional distribution function as a preliminary study of the estimation of conditional quantile. For example, [12] have studied the asymptotic normality of this estimator in both cases (i.i.d. and α-mixing). [11] have studied the properties of conditional quantile for functionally dependent data with application to the climatic El Nino Phenomenon. The asymptotic results of this paper are almost complete convergence and asymptotic normality in the case i.i.d. we refer to [5] for a linear approach of conditional quantile in functional statistics.
The associated random variables play an important role in a wide variety of areas, including reliability theory, mathematical physics, multivariate statistical analysis, life sciences and in percolation theory. Many works were treated data under positive and negative dependant random variables, one can quote, [23] and [21].
The concept of quasi-association is a special case of weak dependence introduced by [9] for real-valued stochastic processes. To the best of our knowledge, there is few papers dealing with the nonparametric estimation for quasi-associated random variables. We quote, [8] studied a limit theorem for quasi-associated hilbertian random variables, [1] studied asymptotic results of a nonparametric conditional cumulative distribution estimator in the single functional index modeling for time series data, [26] studied the estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure, [22] studied Nonparametric relative regression for associated random variables.
The main contribution of this work is the study of the estimator of the conditional distribution function of [14] in case of quasi-associated data. the almost-complete convergence (a.co.) [1] is established (with speed) of a kernel estimator for the conditional distribution function of a real random variable conditioned by a functional explanatory variable. Note that, like all asymptotic statistics nonfunctional parametric, our result is related to the phenomenon of concentration of the probability measure of the explanatory variable and regularity of the functional space of the model. In this article, we discuss the asymptotic bias and dispersion of the conditional distribution function in quasi-associated case. we recall the definition of association :

1. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real r.v.'s ; we say that z_n converges almost completely (a.co.) to zero if, and only if, $\forall\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|z_n| > \epsilon) < \infty$. Moreover, we say that the rate of almost complete convergence of z_n to zero is of order u_n (with $u_n \to 0$) and we write $z_n = O_{a.co.}(u_n)$ if, and only if, $\exists\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|z_n| > \epsilon u_n) < \infty$.

Définition 3.1 *A sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of real random vectors variables is said to be Quasi-Association (QA), if for any disjoint subsets I and J of $\mathbb{N}$ and all bounded Lipschitz functions $f : \mathbb{R}^{|I|d} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^{|J|d} \to \mathbb{R}$ satisfying*

$$Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq Lip(f)Lip(g)\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left|Cov(X_i^k, X_j^l)\right|$$

where X_i^k denotes the k^{th} component of X_i,

$$Lip(f) = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||_1} \text{ with } ||(x_1, ..., x_k)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_k|.$$

The paper is organized as follows : the next section we present our model. Section 3 is dedicated to fixing notations and hypotheses. We state our main results in section 4. The next section aims to apply the result to the estimator of the conditional hazard function. Finally, the proofs of the auxiliary results are in the section 6.

3.2 The model

Consider $Z_i = (X_i, Y_i)_{1\leq i\leq n}$ be a n quasi-associated random identically distributed as the random $Z = (X, Y)$, with values in $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{H}$ is a separable real Hilbert space with the norm $\|\ .\ \|$ generated by an inner product $< .,. >$.
We consider the semi-metric d defined by $\forall x, x' \in \mathcal{H}/d(x, x') =\| x - x' \|$. In the following x will be a fixed point in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{N}_x$ will denote a fixed neighborhood of x and $\mathcal{S}$ will be fixed compact subset of $\mathbb{R}$.
For Y given $X = x$, exists for any $x \in \mathcal{N}_x$. We intend to estimate the conditional distribution function $F^x(y)$ using n dependent observations $(X_i, Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ draw from a random variables with the same distribution with $Z := (X, Y)$. We introduce the kernel type estimator $\widehat{F}^x$ of F^x defined by :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

where K is the kernel, H is a given distribution function and $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) is a sequence of positive real numbers.

3.3 Notations and hypotheses

All along the paper, when no confusion will be possible, we will denote by C and/or C' some strictly positive generic constants whose values are allowed to change. The variable

x is a fixed point in $\mathcal{H}$, $\mathcal{N}_x$ is a fixed neighborhood of x. We assume that the random pair $Z_i = \{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}\}$ is stationary quasi-associated processes. Let λ_k the covariance coefficient defined as :

$$\lambda_k = \sup_{s \geq k} \sum_{|i-j| \geq s} \lambda_{i,j}$$

where

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, X_j^l) \mid + \sum_{k=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, Y_j) \mid + \sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(Y_i, X_j^l) \mid + cov(Y_i, Y_j) \mid .$$

X_i^k denotes the k^{th} component of X_i defined as $X_i^k := < X_i, e^k >$.
For $h > 0$, let $B(x, h) := \{x' \in \mathcal{H}/d(x', x) < h\}$ be the ball of center x and radius h.
To establish the almost complete convergence of the estimator $\widehat{F^x}$ we need to include the following assumptions :

(**H1**) $\mathbb{P}(X \in B(x, h)) = \phi_x(h) > 0$ and the function $\phi_x(h)$ is a differentiable at 0.

(**H2**) The conditional density $f^x(y)$ satisfies the Hölder condition, that is : $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S}^2$

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C \left(d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2} \right), \quad b_1 > 0,\, b_2 > 0.$$

(**H3**) The kernel H is a differentiable function and H' is a positive, bounded, Lipschitzian continuous function such that :

$$\int |t|^{b_2} H'(t)dt < \infty \quad and \int H'^2(t)dt < \infty.$$

(**H4**) K is a bounded continuous Lipschitz function such that :

$$C\mathbb{I}_{[0,1]}(.) < K(.) < C'\mathbb{I}_{[0,1]}(.)$$

where $\mathbb{I}_{[0,1]}$ is a indicator function.

(**H5**) The sequence of random pairs $(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}$ is quasi-associated with covariance coefficient λ_k, $k \in \mathbb{N}$ satisfying :

$$\exists \alpha > 0, \exists C > 0, \text{such that } \lambda_k \leq Ce^{-\alpha k}.$$

(**H6**) For all pairs (i, j), the joint distribution functions

$$\Psi_{i,j}(h) = \mathbb{P}\left[(X_i, X_j) \in B(x, h) \times B(x, h)\right]$$

satisfy

$$0 < \sup_{i \neq j} \Psi_{i,j}(h) = O(\phi_x^2(h_k)).$$

(**H7**) The bandwidths h_K and h_H are a sequences of positive numbers satisfying :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log^5 n}{n h_H^j \phi_x(h_K)} = 0, j = 0, 1.$$

3.4 Main result : Pointwise almost complete convergence

Théorème 3.1 *Under hypotheses (H1)-(H7), we have :*

$$|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2}$$

Proof
The proof of Theorem 3.1 is based on the following decomposition :

$$\begin{aligned}\widehat{F}^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left((\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)) - (F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y))\right) \\ &+ \frac{F^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right)\end{aligned} \tag{3}$$

we can write :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\widehat{F}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

where

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1(x))}\sum_{i=1}^n K_i(x)H_i(y). \tag{4}$$

and

$$\widehat{F}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1(x))}\sum_{i=1}^n K_i(x), \tag{5}$$

where

$$K_i(x) = K\left(h_K^{-1}d(x, X_i)\right) \qquad \text{and} \qquad H_i(y) = H\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right). \tag{6}$$

The proof of theorem 3.1 is based on the following lemmas :

Lemme 3.1 *Under hypotheses (H1)-(H4) and (H6), we have :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}(\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)) = O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7}$$

Corollaire 3.1 *Under hypotheses (H1)-(H4) and (H6), we have :*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(|\ \widehat{F}_D^x\ | < 1/2\right) < \infty. \tag{8}$$

Lemme 3.2 *Under hypotheses (H1)-(H6), we have :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}(F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)) = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right). \tag{9}$$

Lemme 3.3 *Under hypotheses (H1)-(H3) and (H6) , we have :*

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{10}$$

3.5 Application on the conditional hazard function

In this section, we applied our main result to study the convergence of the estimator of the conditional hazard function $\widehat{h}^x$ defined as follows :

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)} \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

where $\widehat{f}^x(y)$ is the estimator of the conditional density defined by

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{h_H^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))H'(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))} \tag{12}$$

where H' is the derivative of H.
Our result is given in what follows :

Théorème 3.2 *Under hypotheses (H1)-(H7) and under hypotheses of Theorem 2.1, we have :*

$$|\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O_{a.co}\left(\left(\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{13}$$

3.6 Auxiliary results and proofs

First of all, we state the following lemmas.

Lemme 3.4 *([8]) Let $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a quasi-associated sequence of random variables with values in $\mathcal{H}$. Let $f \in BL(\mathcal{H}^{|I|}) \cap \mathbb{L}^\infty$ and $g \in BL(\mathcal{H}^{|J|}) \cap \mathbb{L}^\infty$,for some finite disjoint subsets $I, J \in \mathbb{N}$. Then*

$$Cov\left(f\left(X_i, i \in I\right), g(X_j, j \in J)\right) \le Lip(f)Lip(g)\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left|Cov(X_i^k, X_j^l)\right|$$

where $(BL(\mathcal{H}^u; u > 0)$ is the set of bounded Lipschitz functions $f : \mathcal{H}^u \to \mathbb{R}$ and $\mathbb{L}^\infty$ is the set of bounded functions.

Lemme 3.5 *([16])*
Let $X_1, ..., X_n$ the real random variables such that $\mathbb{E}(X_j) = 0 and\ \mathbb{P}\left(| X_j | \leq M\right) = 1$ for $all j = 1, ..., n and\ some M < \infty$, Let $\sigma_n^2 = Var\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i\right)$.
Assume,furthermore, that there exist $K < \infty$ and $\beta > \infty$ such that, for all u-uplets $(s_1, ..., s_u) \in \mathbb{N}^u$, $(t_1, ..., t_v) \in \mathbb{N}^v$ with $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$.
The following inequality is fulfilled :

$$| cov(X_{s_1}...X_{s_u}, X_{t_1}...X_{t_v}) | \leq K^2 M^{u+v-2} v e^{-\beta(t_1 - s_u)}.$$

Then

$$\mathbb{N}\left(| \sum_{j=1}^n X_j | > t\right) \leq \exp\left\{-\frac{t^2/2}{A_n + B_n^{1/3} t^{5/2}}\right\}$$

for some :

$$A_n \leq \sigma_n^2$$

and

$$B_n = \left(\frac{16nK^2}{9An(1-e^-\beta) \vee 1}\right) \frac{2(K \vee M)}{1-e^-\beta}.$$

Proof of lemma 3.1. We put

$$\Delta_i = \frac{1}{nh_H \mathbb{E}[K_1]} \chi(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n$$

where

$$\chi(X_i, Y_i) = K(h_K^{-1} d(x, X_i)) H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - \mathbb{E}[K_1 H_1]$$

$X_i \in \mathcal{H}, Y_i \in \mathbb{R}$. Clearly, we have : $\mathbb{E}(\Delta_i) = 0$ and

$$|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

Moreover, we can write :

$$\| \chi \|_\infty\ ^2 \leq 2C \| K \|_\infty \| H \|_\infty$$

and

$$Lip(\chi) \leq C\left(h_K^{-1} \| H \|_\infty Lip(K) + h_H^{-1} \| K \|_\infty Lip(H)\right).$$

Now, to apply Lemma 3.5, we have to evaluate :
the variance term $Var(\sum_{i=1}^n \Delta_i)$ and the covariance term $cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v})$, for all $(s_1, ..., s_u) \in \mathbb{N}^u$, $(t_1, ..., t_v) \in \mathbb{N}^v$ with $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$. Firstly, for the covariance term, we consider the following cases :

2. For any function f we denote by $\| f \|_\infty$ the supremun norm.

- If $t_1 = s_u$. By using the fact that $\mathbb{E}[| K_1H_1 |] = O(\phi_x(h_K))$ and $\mathbb{E}[| K_1 |] = O(\phi_x(h_K))$ we have :

$$\begin{aligned} | Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) | &\leq \left(\frac{C}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v} \mathbb{E}\chi \mid (X_1, Y_1) \mid^{u+v} \\ &\leq \left(\frac{C \parallel K \parallel_\infty \parallel H \parallel_\infty}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v} \mathbb{E}[| K_1H_1 |] \\ &\leq \phi_x(h_K)\left(\frac{C}{n\phi_x(h_K)}\right)^{u+v} \end{aligned} \tag{14}$$

- If $t_1 > s_u$, we use the quasi-association, under (H5), we get :

$$\begin{aligned} | Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) | &\leq ((h_K^{-1}Lip(K) + h_H^{-1}Lip(H))(n\mathbb{E}[K_1])^{-1})^2 \left(\frac{C}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v-2} \sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{v} \\ &\leq (h_K^{-1}Lip(K) + h_H^{-1}Lip(H))^2 \left(\frac{C}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v} v\lambda_{t_1-s_u} \\ &\leq (h_K^{-1}Lip(K) + h_H^{-1}Lip(H))^2 \left(\frac{C}{\phi_x(h_K)}\right)^{u+v} ve^{-\alpha(t_1-s_u)}. \end{aligned}$$

- On the other hand, by (H6) we have :

$$\begin{aligned} | Cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) | &\leq \left(\frac{C \parallel K \parallel_\infty \parallel H \parallel_\infty}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v-2} (| \mathbb{E}[\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}] | + \mathbb{E} \mid \Delta_{s_u} \mid \mathbb{E} \mid \Delta_{t_1} \mid \\ &\leq \left(\frac{C \parallel K \parallel_\infty \parallel H \parallel_\infty}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^{u+v-2} \left(\frac{C}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^2 \\ &\times \ h_H(\sup_{i\neq j} \mathbb{P}\left((X_i, X_j) \in B(x, h_K) \times B(x, h_K) + (\mathbb{P}(X_1 \in B(x, h_K))\right. \\ &\leq \left(\frac{C}{h_H\phi_x(h_K)}\right)^{u+v} (\phi_x(h_K))^2. \end{aligned}$$

(

Furthermore, taking a $\gamma - power$ of (15), $(1-\gamma) - power$ of (16), with $1 = 4 < \gamma < 1 = 2$, we obtain an upper-bound of the tree terms as follows : for $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$

$$cov(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) \mid \leq h_H\phi_x(h_K)\left(\frac{C}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{u+v}. \tag{17}$$

Secondly, for the variance term $Var(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i)$, we put, for all $1 \leq i \leq n$, Thus, $Var(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i)$

$$\mid Var(\Delta_{s_1}...\Delta_{s_u}, \Delta_{t_1}...\Delta_{t_v}) \mid = \left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^2 Var(K_1H_1)}_{I} + \underbrace{\left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1]}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j)}_{II}. \qquad (18)$$

For the first term,

$$Var(K_1H_1) = \mathbb{E}(K_1^2H_1^2) - (\mathbb{E}(K_1H_1))^2$$

then,

$$\mathbb{E}(K_1^2H_1^2) = \mathbb{E}[K_1^2 E[H_1^2 \mid X_1]].$$

Thus, under (H2)and (H3) and by integration on the real component y we get

$$\mathbb{E}[H_1^2 \mid X_1] = O(h_H).$$

As for all $j \geq 1$:

$$\mathbb{E}[K_1^j] = O\left(\phi_x(h_K)\right).$$

Then,

$$\mathbb{E}[K_1^2H_1^2] = O(\phi_x(h_K)).$$

It follows that :

$$\left(\frac{1}{n(\mathbb{E}[K_1])^2}\right)^2 Var(K_1H_1) = O(n\phi_x(h_K)). \qquad (19)$$

Concerning the covariance term in (18), we us the following decomposition

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, 0<|i-j|\leq m_n}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j)}_{I} \\ &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, |i-j|>m_n}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j)}_{II}\end{aligned}$$

where (m_n) is a sequence of positive integer which goes to infinity as $n \to \infty$. From Assumptions (H1), (H3) and (H6), we have, for $i \neq j$

$$\begin{aligned} I &\leq nm_n\left(max_{i\neq j} \mid \mathbb{E}(K_iH_iK_jH_j) \mid + (\mathbb{E}(K_1H_1))^2\right) \\ &\leq Cnm_n\left(\phi_x^2(h_K) + (\phi_x(h_K))^2\right) \\ &\leq Cnm_n(\phi_x^2(h_K). \end{aligned} \qquad (20)$$

Since both kernels H and K are bounded and Lipschitz, we get :

$$
\begin{aligned}
II &\leq \left(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H)\right)^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\
&\leq C\left(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H)\right)^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\
&\leq Cn\left(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H)\right)^2 \lambda_{m_n} \\
&\leq Cn\left(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H)\right)^2 e^{-\alpha m_n}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Then, by (20) and (21), we get

$$
\sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_iH_i, K_jH_j) \leq C\left(nm_nh_H^2\phi_x^2(h_K) + n(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H))^2 e^{-\alpha m_n}\right).
$$

By choosing

$$
m_n = \log\left(\frac{(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H))^2}{\alpha\phi_x^2(h_K)}\right),
$$

we get :

$$
\frac{1}{\phi_x(h_K)} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov\left(K_iH_i, K_jH_j\right) \to 0, asn \to \infty. \tag{22}
$$

Finally, by combining results (18),(19) and (22), we get

$$
Var\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right) = O\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).
$$

So, the variables $\Delta_i, i = 1, ..., n$ satisfy the conditions of Lemma 3.5 for :

$$
K_n = \frac{C}{n\sqrt{\phi_x(h_K)}}, M_n = \frac{C}{n\phi_x(h_K)} and A_n = Var(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i)
$$

Thus,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| > \eta\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right) &= \mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i| > \eta\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right) \\
&\leq \exp\left\{-\frac{\eta^2\log n}{n\phi_x(h_K)Var\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right) + \frac{\log^{5/6} n}{(n\phi_x(h_K))^{(7/6)}}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{\eta^2\log n}{C + \frac{(\log n)^{5/6}}{n\phi_x(h_K)^{(7/6)}}}\right\} \\
&\leq C'\exp\left\{-C\eta^2\log n\right\}
\end{aligned}
$$

by (H7). Finally, for a suitable choice of η, Borel-Cantelli's lemma allows to finish the proof of this Lemma.

Proof of corollary 3.1. We have

$$\{|\widehat{F}_D^X| \leq 1/2\} \subseteq \{|\widehat{F}_D^X - 1| > 1/2\}$$

therefore

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X| \leq 1/2\} &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X - 1| > 1/2\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^X - \mathbb{E}\widehat{F}_D^X| > 1/2\} \end{aligned}$$

for $\mathbb{E}\widehat{F}_D^X = 1$, we apply the result of Lemma 3.1 we show that :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^X < 1/2) < \infty.$$

Proof of lemma 3.2. we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\widehat{F}_N^X(y) - F^X(y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}K_i H_i(y) - F^X(y) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}K_1} \left[\mathbb{E}K_1 H_1 \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - F^X(y) \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}K_1} \mathbb{E}\left(K_1 \left[\mathbb{E}\left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) - F^X(y) \right] \right) \end{aligned} \tag{23}$$

we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) &= \int_R H \left(\frac{y - u}{h_H} \right) f^X(u) du \\ &= \int_R H^{(1)}(t) F^X(y - h_H t) dt. \end{aligned}$$

Otherwise,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) - F^X(y) \right| &= \left| \int_R H^{(1)}(t) F^X(y - h_H t) dt - F^X(y) \right| \\ &\leq \int_R H^{(1)}(t) \left| F^X(y - h_H t) - F^X(y) \right| dt. \end{aligned}$$

So, by (H2) we get

$$\left|\mathbb{E}\left(H_1\left(h_H^{-1}(y-Y_i)\right)/X\right)-F^X(y)\right| \quad \leq \quad A_X\int_R H^{(1)}\left(h_K^{b_1}+|t|^{b_2}h_H^{b_2}\right)dt. \tag{24}$$

This inequality is uniform in y, replacing in (23) and simplifying the term ($\mathbb{E}K_1$) we find

$$\mathbb{E}\widehat{F}_N^X(y)-F^X(y)\leq A_X\left(h_K^{b_1}\int_R H^{(1)}(t)dt+h_H^{b_2}\int_R |t|^{b_2}H^{(1)}(t)dt\right).$$

Finally, the hypothesis (H4) and Corollary 3.1 cause proof the lemma 3.2.

Proof of lemma 3.3. The proof is a direct application of Lemma 3.1 when we replace $\chi(.,.)$ by

$$\chi(X_i)=K\left(h_K^{-1}d(x,X_i)\right)-\mathbb{E}[K_1],\forall X_i\in\mathcal{H}.$$

Proof of Theorem 3.2. is based on the following decomposition :

$$\widehat{h}^x(y)-h^x(y)=\frac{1}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{f}^x(y)-f^x(y)\right]+\frac{h^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{F}^x(y)-F^x(y)\right]. \tag{25}$$

Then, Theorem 3.2) can be deduced from both theorem, Theorem 2.1 and Theorem 3.1.

Acknowledgment

The authors are also grateful to anonymous referees for his(her) comments which have contributed to nicer presentation of this work.

Bibliographie

[1] Attaoui S., Laksaci. A and Ould Saïd. E (2015). Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes. *Functional Statistics and Applications, Contributions to Statistics*, 10.1007/978-3-319-22476-3-1

[2] Bosq, D. (2000). Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications. *Lecture Notes in Statistics, 149. New York : Springer.*

[3] Bulinski A. and Suquet, C. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54, 215-226.

[4] Bulinski A. Shabanovich, E. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively dependent random elds. (in Russian). *Fundam. Appl. Math.*4, 479-492

[5] Cardot, H., Crambes, C., Sarda, P. (2004). Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 339, 141-144.

[6] Dabo-Niang, S., Laksaci, A. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *Pub. Instit. Statist.* Univ. Paris 3 :27-42.

[7] Dedecker, J., Doukhan, P., Lang, G., León R., J. R., Louhichi, S., and Prieur, C. (2007) Weak dependence : with examples and applications. *Lecture Notes in Statistics.*

[8] De Gooijer, J., Gannoun, A. (2000). Nonparametric conditional predictive regions for time series. Comput. *Statist. Data Anal.* 33 :259-257.

[9] Douge, L. (2010). Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. *Ann. I.S.U.P.* 54, 51-60.

[10] Doukhan, P., Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stoch. Proc. Appl.* 84, 313-342.

[11] Ezzahrioui, M., Ould-Saïd, E. (2005). Asymptotic normality of nonparametric estimators of the conditional mode for functional data. *Technical report*, No.249, LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale.

[12] Ezzahrioui, M., Ould-Saïd, E. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data. *Preprint*, LMPA No 277, Univ. du Littoral Côte d'Opale.

[13] Fan, J., Yao, Q., Tong, H. (1996). Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems. *Biometrika* 83 :189-206.

[14] Ferraty, F. Laksaci, A., Vieu, P. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 340, 389-392.

[15] Ferraty,F, A. Laksaci and P. Vieu,(2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

[16] Ferraty, F., Tadj, A., Laksaci, A., Vieu, P. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Infer.* 140 :335-352.

[17] Kallabis, R. S and Neumann, M. H. (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli* 12, 333-350.

[18] Laksaci, A. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. Ann. I.S.U.P. 51, 69-80.

[19] Laksaci, A. and B. Mechab, Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales.*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **55**(2010), 1, 35-51.

[20] Masry, E : Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes IEEE. *Trans. Inform. Theory* 32, 254-267 (1986)

[21] Matula, P. (1992). A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* 15, 209-213.

[22] Mechab, W. Laksaci, A. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron*, 10.1007/s40300-016-0084-9.

[23] Newman, C. M. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables : In Inequalities in Statistics and Probability, *IMS Lect. Notes-Monographs Series*, 5, 127-140.

[24] Rosenblatt, M. (1969). Conditional probability density and regression estimators. In : Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II.* New York and London : Academic Press.

[25] Roussas, G. G. (1999). Positive and negative dependence with some statistical applications In : Asymptotics, Nonparametrics and Time Series (S. Ghosh,Ed) pp. 757-788. *Marcell Dekker, Inc., New York.*

[26] Tabti. H and Aït Saidi.A (2016)Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure

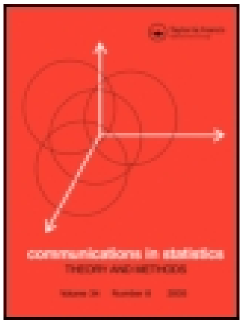
[27] Youndjé, E. (1993). Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Ph.D. Thesis, Rouen University (in French).

[28] Youndjé, E. (1996). Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Rev. *Roumaine Math. Pures Appl.* 41 :535-566.

Chapitre 4

Asymptotic normality of a conditional hazard function estimate in the single index for quasi-associated data

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans Communications in Statistics-Theory and Methods.



Communications in Statistics - Theory and Methods

ISSN: 0361-0926 (Print) 1532-415X (Online) Journal homepage: http://www.tandfonline.com/loi/lsta20

Asymptotic normality of a conditional hazard function estimate in the single index for quasi-associated data

Daoudi Hamza, Boubaker Mechab & Chikr Elmezouar Zouaoui

Asymptotic Normality of a Conditional Hazard Function Estimate in the Single Index for Quasi-Associated Data

Hamza Daoudi[1], Boubaker Mechab[2] and Zouaoui Chikr Elmezouar[3]

[1,2] Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques
Univ. Djillali Liabès, L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
[1] Univ. Ibn Khladoun. Dept.Math, L.P 78, Tiaret 14000, Algeria
E-mail [1] : Daoudiham63@gmail.com
E-mail [2] : Mechaboub@yahoo.fr
[3] Department of Mathematics, College of Science,
King Khalid University, Abha, 61413, Saudi Arabia
E-mail chikrtime@yahoo.fr

Corresponding author : Daoudiham63@gmail.com

Abstract : The main goal of this paper is to study the estimation of the conditional hazard function of a scalar response variable Y given a hilbertian random variable X in functional single-index model. We construct an estimator of this nonparametric function and we study its asymptotic properties, under quasi-associated structure. Precisely, we establish the asymptotic normality of the constructed estimator. We carried out simulation experiments to examine the behavior of this asymptotic property over finite sample data.

Keywords Asymptotic normality ; Conditional hazard function ; Single-functional index model ; Quasi-association ; Nonparametric kernel estimation.
Mathematics Subject Classification 60G25 ; 62G05 ; 62G08 ; 62G20 ; 62N02.

4.1 Introduction

In recent decades, the statistical analysis of the functional data has attracted a lot of attention in the statistical mathematics. Such kind of data are used in a variety of fields including econometrics, epidemiology, environmental science and many others. The monograph of Ferraty and Vieu (2006) is the first precursor in nonparametric functional statistics estimation. They focus in the estimation of the kernel method for conditional models and they established many asymptotic properties of regression, conditional quantile and conditional density estimator have been obtained. In this context, of functional nonparametric analysis, a lot of works are devoted to the estimations of the conditional hazard function in both : independent or dependent data. The first results were obtained by Ferraty et al. (2003). They studied the almost complete convergence (with rate) of this model in several situations, including censored and/ or dependent variables. For this topic, in the context of strong mixing dependence. Quintela-del-Río (2008) has shown that the kernel estimator presented by Ferraty et al. (2003) cited above is strongly consistent and asymptotically normally distributed. A generalization of these results in the spatial data case was obtained by Laksaci and Mechab (2010). More specifically, they studied the almost complete convergence of an adapted version of this estimator. The same authors have treated the L^2-convergence rate by giving the exact expression involved in the leading terms of the quadratic error and the asymptotic normality of the construct estimator (see, Laksaci and Mechab (2014)).

The quasi-association setting is a special case of weak dependence introduced by Doukhan and Louhichi (1999) for real-valued stochastic processes. It was applied by Bulinski and Suquet (2001) to real valued random fields and it generalizes the positively associated variables introduced by Esary et al. (1967). The quasi-association dependency unifies both concepts (negative and positive association). Recall that, there are a lot of works dealing with the statistical analysis of positive and negative dependent random variables, we cite for example, Bulinski and Shabanovich (1998) and Newman (1984) and the references therein. Recently, there are few papers dealing with the nonparametric estimation for quasi-associated random variables. We quote, Douge (2010) studied a limit theorem for quasi-associated for random variables taking their values in a Hilbert space. Attaoui et al. (2015) studied the asymptotic results for an M-Estimator of the regression function for quasi-associated processes. Laksaci and Mechab (2016) studied the nonparametric relative regression for associated random variables.

On the other hand, the functional index model plays a major role in statistics. The interest of this approach comes from its use to reduce the dimension of the data by projection in fractal space. The literature on this topic is closely limited, the first asymptotic properties in the index functional single-model were obtained by Ferraty et al. (2003). They established the almost complete convergence, in both independent and dependent cases, of the link regression function of this model. Based on the cross validation procedure, Aït Saïdi et al. (2008) proposed an estimator of this parameter, where the functional single-index is unknown. Recently, Attaoui et al. (2011) consider the nonparametric estimation of the conditional density in the single functional model. They established its pointwise and uniform almost complete convergence (a.co.) rates. In the same topic, Attaoui and Ling (2016) proved the asymptotic results of a nonparametric conditional cumulative distribution estimator for time series data. More recently, Tabti and Aït Saïdi (2018) studied the almost complete convergence of the conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked by functional single-index structure.

The main result of this paper is to prove the asymptotic normality of the kernel estimator of the conditional hazard function in the functional single-index model. We prove the obtained asymptotic variance is estimable in practice by plug-in method which allows constructing confidence intervals of this estimator. The easily implementation of our result is also proved by Monte Carlo study.

Our paper is organized as follows : In Section 2, we present our model. We introduce the assumptions for our main result which is given in Section 3. An application to the confidence bands construction is discussed in Section 4. Section 5 is devoted to some simulation study. The proofs of the preliminary results is detailed in the last Section.

4.2 The model

First we give a definition of quasi-association for random variables with values in a separable Hilbert space.

Définition 4.1 *Let $(\mathcal{H}, < .,. >)$ a separable Hilbert space with a orthonormal basis $e_k, k \geq 1$. A sequence $(X_n)n \in \mathbb{N}$ of real random variables taking values in $\mathcal{H}$ is said to be quasi-associated, with respect to the basis e_k if for any $d \geq 1$, the d-dimensional sequence $\{(< X_i, e_{j1} >, ..., < X_i, e_{jd} >), i \in \mathbb{N}\}$ is quasi-associated.*

Consider $Z_i = (X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ be a n quasi-associated random identically distributed as the random $Z = (X, Y)$, with values in $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{H}$ is a separable real Hilbert space with the norm $\| . \|$ generated by an inner product $< .,. >$.
We consider the semi-metric d_θ associated to the single-index $\theta \in \mathcal{H}$ defined by $\forall x, x' \in \mathcal{H} : d_\theta(x, x') := |< x - x', \theta >|$. Under such topological structure and for a fixed functional θ, we suppose that the conditional probability distribution of Y given $< X, \theta >=< x, \theta >$ exists and denoted by $F_\theta(y, x) = F(y| < x, \theta >)$, is given by :

$$F(y| < x, \theta >) = \mathbb{P}(Y \leq y| < X, \theta >=< x, \theta >), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Moreover we suppose that $F(y| < x, \theta >)$ has a continuous density $f_\theta(y, x) = f(y| < x, \theta >)$ with respect to the measure of Lebesgue over $\mathbb{R}$.
The conditional hazard functional of Y given $< X, \theta >=< x, \theta >$, denoted by $h_\theta(y, x) = h(y| < x, \theta >)$, is given by : for $F(y| < x, \theta >) < 1$

$$h(y| < x, \theta >) = \frac{f(y| < x, \theta >)}{1 - F(y| < x, \theta >)}, \forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}.$$

The functional index θ appears as a filter allowing the extraction of the part of X explaining the response Y and represents a functional direction which reveals pertinent explanation of the response variable. In other words, we assume that the F is differentiable with respect to x and θ such that $< \theta, e_1 >= 1$, where e_1 is the first vector of an orthonormal basis of $\mathcal{H}$. Clearly, concerning the identifiability of this model, we have for all $x \in \mathcal{H}$:

$$h_1(.| < x, \theta_1 >) = h_2(.| < x, \theta_2 >) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \text{ and } h_1 = h_2.$$

To estimate the conditional distribution function and the conditional density we consider the following functional kernel estimators :

$$\widehat{F}_\theta^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i)) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

where K is the kernel, H is a given distribution function and $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) is a sequence of positive real numbers.
We put

$$K_i(\theta, x) = K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i)) \qquad \text{and} \qquad H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i))$$

we can write

$$\widehat{F}_\theta^x(y) = \frac{\widehat{F}_N(\theta, y, x)}{\widehat{F}_D(\theta, x)}$$

with

$$\widehat{F}_N(\theta, y, x) = \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(\theta, x)]} \sum_{i=1}^n K_i(\theta, x) H_i(y)$$

and for

$$\widehat{F}_D(\theta, x) = \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(\theta, x)]} \sum_{i=1}^n K_i(\theta, x).$$

We define the kernel estimator $\widehat{f}_\theta^x(y)$ of $f_\theta^x(y)$ by :

$$\widehat{f}_\theta^x(y) = \frac{h_H^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i)) H'(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\displaystyle\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i))}, \; y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

where H' is the derivative of H.
We can write

$$\widehat{f}_\theta^x(y) = \frac{\widehat{f}_N(\theta, y, x)}{\widehat{F}_D(\theta, x)}$$

where

$$\widehat{f}_N(\theta, y, x) = \frac{1}{nh_H \mathbb{E}[K_1(\theta, x)]} \sum_{i=1}^{n} K_i(\theta, x) H_i'(y).$$

Finally, the estimator of the conditional hazard function is $\widehat{h}_\theta^x(y)$ defined by

$$\widehat{h}_\theta^x(y) = \frac{\widehat{f}_\theta^x(y)}{1 - \widehat{F}_\theta^x(y)}, \forall y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

4.3 Notations and hypotheses

All along the paper, when no confusion will be possible, we will denote by C or/and C' some strictly positive generic constants whose values are allowed to change. The variable x is a fixed point in $\mathcal{H}$, $\mathcal{N}_x$ is a fixed neighborhood of x. We assume that the random pair $Z_i = \{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}\}$ is stationary quasi-associated processes.
Let λ_k the covariance coefficient defined as :

$$\lambda_k = sup_{s \geq k} \sum_{|i-j| \geq s} \lambda_{i,j}$$

where

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, X_j^l) \mid + \sum_{k=1}^{\infty} \mid cov(X_i^k, Y_j) \mid + \sum_{l=1}^{\infty} \mid cov(Y_i, X_j^l) \mid + cov(Y_i, Y_j) \mid .$$

X_i^k denotes the k^{th} component of X_i defined as $X_i^k := < X_i, e^k >$.
For $h_K > 0$, let $B_\theta(x, h_K) := \{x' \in \mathcal{H} / d_\theta(x', x) < h_K\}$ be the ball of center x and radius h_K.
Now, we will state the following assumptions that are necessary to show our main result :

(**H1**) $\mathbb{P}(X \in B_\theta(x, h_K)) = \phi_\theta(x, h_K) > 0$ and there exists a function $\beta_\theta(x, .)$ such that :

$$\forall \in [0,1], \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\phi_\theta(x, s h_K)}{\phi_\theta(x, h_K)} = \beta_\theta(x, s).$$

(**H2**) For $j = 0, 1$. $F_\theta^{(j)}(y, x)$ satisfy the following Hölder-type conditions : $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x^2$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S}^2$

$$|F_\theta^{(j)}(y_1, x_1) - F_\theta^{(j)}(y_2, x_2)| \leq C_{\theta,x} \left(d_\theta^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2} \right), \quad b_1 > 0,\, b_2 > 0.$$

where $\mathcal{S}$ is a fixed compact subset of $\mathbb{R}$.

(**H3**) H is a cumulative distribution has derivative H' such that $\int |t|^{b_2} H'(t) dt < \infty$ and $\int H'^2(t) dt < \infty$.

(**H4**) K is a kernel function such that : there exist two constants C and C' with

$$C\mathbb{I}_{[0,1]}(.) < K(.) < C'\mathbb{I}_{[0,1]}(.)$$

where $\mathbb{I}_{[0,1]}$ is the indicator function on $[0,1]$ and its derivative K' is such that $-\infty < C < K'(t) < C' < 0$ for $0 \le t \le 1$.

(**H5**) The bandwidths (h_K, h_H) satisfied :
(i) $\lim_{n\to\infty} h_K = 0$, $\lim_{n\to\infty} h_H = 0$ and $\lim_{n\to\infty} (h_H^{b_2} + h_K^{b_1})\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)} = 0$.

(**H6**) The sequence of random pairs $(X_i, X_j), i \in \mathbb{N}$ is quasi-associated with covariance coefficient λ_k, $k \in \mathbb{N}$ satisfying :

$$\exists \alpha > 0, \exists C > 0, \text{ such that } \lambda_k \le Ce^{-\alpha k}.$$

(**H7**) $0 < \sup_{i\neq j} \mathbb{P}\left[(X_i, X_j) \in B_\theta(x,h_K) \times B_\theta(x,h_K)\right] = O\left(\phi_\theta^2(x,h_K)\right)$.

Comments on the assumptions : Assumption (H1) is the concentration property of the explanatory variable in small balls under single-index topological structure. The function $\beta_\theta(x,.)$ plays a fundamental role in all asymptotic, in particular for the variance term. The condition (H2) is used to control the regularity of the functional space of our model and these are needed to evaluate the bias term of the convergence rates. The hypotheses (H3) and (H4) are technical conditions on the cumulative function H and the kernels K, H' and K'. Assumption (H5) is also classical in the functional estimation in finite or infinite dimension spaces, in particular, is used to eliminate the term bias in the result of asymptotic normality. The hypothesis (H6) is a structural condition used for the quasi-associated data. To establish the asymptotic normality of our model under quasi-association, we need the assumption (H7), which describes the asymptotic behavior of the joint distribution of the couple (X_i, X_j).

4.4 Main result : asymptotic normality

Théorème 4.1 *Under hypotheses (H1)-(H7), we have, for any $x \in \mathcal{A}$*

$$\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\left(\widehat{h}(\theta,y,x) - h(\theta,y,x)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\sigma_h^2(\theta,x)) \quad \textit{as } n \quad \to \infty \tag{4}$$

where

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{H},\ f(\theta,y,x)(1 - F(\theta,y,x)) \neq 0\}\ , \sigma_h^2(\theta,x) = \frac{C_2 h(\theta,y,x)}{C_1^2(1 - F(\theta,y,x))}\int H'^2(t)dt,$$

with

$$C_j = K(1) - \int_0^1 (K^j)'(s)\beta_\theta(x,s)ds, \quad for\ j = 1,2.$$

and $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ means the convergence in distribution.

Proof. The proof of Theorem 4.1 is based on the following decomposition and the lemmas bellow :

$$\widehat{h}(\theta,y,x)-h(\theta,y,x)=\frac{1}{\widehat{F}_D(\theta,x)-\widehat{F}_N(\theta,y,x)}\left[\widehat{f}_N(\theta,y,x)-f(\theta,y,x)\right]-$$
$$\frac{h(\theta,y,x)}{\widehat{F}_D(\theta,x)-\widehat{F}_N(\theta,y,x)}\left[\widehat{F}_D(\theta,x)-\widehat{F}_N(\theta,y,x)+F(\theta,y,x)-1\right].$$

Lemme 4.1 *Under hypotheses of Theorem 4.1, we have :*

$$\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\left(\widehat{f}_N(\theta,y,x)-\mathbb{E}(\widehat{f}_N(\theta,y,x))\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}(0,\sigma_f^2(\theta,x)),\quad n\to\infty \tag{5}$$

where

$$\sigma_f^2(\theta,x)=\frac{C_2 f(\theta,y,x)}{C_1^2}\int H'^2(t)dt.$$

Lemme 4.2 *(see, Attaoui et al. (2015)) Under the hypotheses (H1)-(H5), we have :*

$$\mathbb{E}(\widehat{f}_N(\theta,y,x))-f(\theta,y,x)=O(h_H^{b_2})+O(h_K^{b_1}),\quad n\to\infty.$$

Lemme 4.3 *Under hypotheses of Theorem 4.1, we have :*

$$\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\left[\widehat{F}_D(\theta,x)-\widehat{F}_N(\theta,y,x)+F(\theta,y,x)-1\right]\to 0 inprobability,\quad n\to\infty$$

Corollaire 4.1 *Under hypotheses of Theorem 4.1, we have*

$$\left[\widehat{F}_D(\theta,x)-\widehat{F}_N(\theta,y,x)\right]\longrightarrow 1-F(\theta,y,x) inprobability. \tag{6}$$

4.5 Confidence bands

A usual application of asymptotic normality is to establish confidence bands for the estimates. Our goal in this section is the application of our asymptotic normality result (Theorem 4.1) to build the confidence intervals for the true value of $h(\theta,y,x)$ for a given curve $< X,\theta >=< x,\theta >$. In nonparametric estimation, the asymptotic variance depends on certain unknown functions. In our case, we have

$$\sigma_h^2(\theta,x)=\frac{C_2 h(\theta,y,x)}{C_1^2(1-F(\theta,y,x))}$$

where $h(\theta,y,x),F(\theta,y,x),C_1$ and C_2 are unknown a priori and have to be estimated in practice. Then one can obtain a confidence bands even if $\sigma_h^2(\theta,x)$, is functionally specified. Now a plug-in estimate for the asymptotic standard deviation $\sigma_h^2(\theta,x)$, can be easily obtained using the estimators $\widehat{h}_\theta^x(y), \widehat{F}_\theta^x(y), \widehat{C}_1$ and $\widehat{C}_2$ of $h(\theta,y,x), F(\theta,y,x), C_1$ and C_2 respectively, that is

$$\widehat{\sigma}_h^2(\theta,x) = \frac{\widehat{C}_2\widehat{h}_\theta^x(y)}{\widehat{C}_1^2(1-\widehat{F}_\theta^x(y))}.$$

We estimate empirically the constants C_1 and C_2, as follows :

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d_\theta(x,X_i)), \quad \widehat{C}_2 = \frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\sum_{i=1}^n K^2(h_K^{-1}d_\theta(x,X_i))$$

where $\phi_\theta(x,h_K) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{|<x-X_i,\theta>|<h_K\}}$.

Now the asymptotic confidence band at asymptotic level $1-\zeta$ for $h(\theta,y,x)$ is given by

$$\left[\widehat{h}_\theta^x(y) - u_{1-\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\widehat{\sigma}_h^2(\theta,x)}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right)^{1/2}, \quad \widehat{h}_\theta^x(y) + u_{1-\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\widehat{\sigma}_h^2(\theta,x)}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right)^{1/2}\right]$$

where $u_{1-\frac{\zeta}{2}}$ denotes the $1-\frac{\zeta}{2}$ quantile of the standard normal distribution.

4.6 Proofs

Proof of lemma 4.1. We denote

$$Z_{ni}(\theta,y,x) = \frac{\sqrt{\phi_\theta(x,h_K)}}{\sqrt{nh_H}\mathbb{E}(K_1(\theta,x))}(\Gamma_i(\theta,y,x) - \mathbb{E}\Gamma_i(\theta,y,x))$$

where

$$\Gamma_i(\theta,y,x) = K(h_K^{-1}d_\theta(x,X_i))H_i'(y) - \mathbb{E}[K_1(\theta,x)H_1'], 1 \le i \le n$$

and

$$S_n := \sum_{i=1}^n Z_{ni}(\theta,y,x) \tag{7}$$

Therefore,

$$S_n = \sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}(\widehat{f}_N(\theta,y,x) - \mathbb{E}(\widehat{f}_N(\theta,y,x)).$$

Thus, our claimed result is, now :

$$S_n \to \mathcal{N}(0,\sigma_f^2(\theta,x))$$

To do that, we use the basic technique of Doob (1959). Indeed, we consider $p = p_n$ and $q = q_n$ two sequences of natural numbers tending to infinity, such that

$$p = O(\sqrt{n\phi_\theta(x,h_K)}), \qquad q = o(p)$$

and we split S_n into

$$S_n = T_n + T'_n + \xi_k \text{ with } T_n = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \text{ and } T'_n = \sum_{j=1}^{k} \eta_j$$

where

$$\eta_j = \sum_{i \in I_J} Z_{ni}(\theta, y, x), \qquad \xi_j = \sum_{i \in I_J} Z_{ni}(\theta, y, x), \qquad \zeta_k = \sum_{i=k(p+q)+1} Z_{ni}(\theta, y, x)$$

with

$$\begin{aligned} I_j &= (j-1)(p+q)+1, ..., (j-1)(p+q)+p, \\ J_j &= (j-1)(p+q)+p+1, ..., j(p+q). \end{aligned}$$

Observe that, for $k = \frac{n}{p+q}$, (where [.] stands for the integral part), we have $\frac{kq}{n} \to 0$ and $\frac{kp}{n} \to 1$, $\frac{q}{n} \to 0$, which imply that $\frac{p}{n} \to 0$ as $n \to \infty$. Now, our asymptotic result is based on :

$$\mathbb{E}(T'_n)^2 + \mathbb{E}(\zeta_n)^2 \to 0 \tag{8}$$

and

$$T_n \to \mathcal{N}(0,1). \tag{9}$$

Proof of (8).
By stationarity, we get

$$\mathbb{E}(T'_n)^2 = kVar(\zeta_1) + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} \mid Cov(\zeta_i, \zeta_j) \mid \tag{10}$$

and

$$kVar(\zeta_1) \le qkVar(Z_{n1}(\theta, y, x)) + 2k \sum_{1 \le i < j \le q} Cov(Z_{ni}(\theta, y, x), Z_{nj}(\theta, y, x)) \tag{11}$$

the fact that $\frac{kq}{n} \to 0$ allows us to get

$$\begin{aligned} qkVar(Z_{n1}(\theta, y, x)) &= \phi_\theta(x, h_K) qk \frac{1}{n(\mathbb{E}(K_1(\theta, x)))^2} Var(\Gamma_1(\theta, y, x)) \\ &= O\left(\frac{kq}{n}\right) \to 0, \ as \ n \to \infty. \end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$k \sum_{1 \le i < j \le q} \mid Cov(Z_{ni}(\theta, y, x), Z_{nj}(\theta, y, x)) \mid = \frac{k\phi_\theta(x, h_K)}{nh_H(\mathbb{E}(K_1(\theta, x)))^2} \sum_{1 \le i < j \le q} Cov(\Gamma_i(\theta, y, x), \Gamma_j(\theta, y, x)).$$

For this last covariance, we write

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x)) &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ 0<|i-j|\leq m_n}}^{q} Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x))\\ &\quad+\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ |i-j|>m_n}}^{q} Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x))\\ &=: I+II\end{aligned}$$

where (m_n) is a sequence of positive integer which goes to infinity as $n\to\infty$.
For the first term I, we use (H1), (H3) and (H7), to prove that, for $i\neq j$

$$\begin{aligned} I &\leq qm_n\left(\max_{i\neq j}\left|\mathbb{E}[\Gamma_i(\theta,y,x)\Gamma_j(\theta,y,x)]\right| + (\mathbb{E}[\Gamma_1(\theta,y,x)])^2\right)\\ &\leq qm_n\Big(\max_{i\neq j}\left|\mathbb{E}[H_i'K_i(\theta,x)H_j'K_j(\theta,x)]]\right| + (\mathbb{E}\left[H_1'K_1(\theta,x)\right])^2\Big)\\ &\leq Cqm_n\Big(h_H^2\phi_\theta^2(x,h_K)+(h_H\phi_\theta(x,h_K))^2\Big)\\ &\leq Cqm_nh_H^2\phi_\theta^2(x,h_K).\end{aligned}$$

On the other hand, for (II), we use the fact that the kernels H and K are bounded and Lipschitz, to show that

$$\begin{aligned} II &\leq \left(h_K^{-1}\mathrm{Lip}(K)+h_H^{-1}\mathrm{Lip}(H)\right)^2\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ |i-j|>m_n}}^{q}\lambda_{i,j}\\ &\leq Cq\left(h_K^{-1}\mathrm{Lip}(K)+h_H^{-1}\mathrm{Lip}(H)\right)^2\lambda_{m_n}\\ &\leq Cq\left(h_K^{-1}\mathrm{Lip}(K)+h_H^{-1}\mathrm{Lip}(H)\right)^2 e^{-\alpha m_n}.\end{aligned}$$

Combining these inequalities, we get

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x)) \leq C\left(qm_nh_H^2\phi_\theta^2(x,h_K)+qn\left(h_K^{-1}\mathrm{Lip}(K)+h_H^{-1}\mathrm{Lip}(H)\right)^2 e^{-\alpha m_n}\right)$$

By choosing $m_n=\log\left(\dfrac{\left(h_K^{-1}\mathrm{Lip}(K)+h_H^{-1}\mathrm{Lip}(H)\right)^2}{\alpha h_H^2\phi_\theta^2(x,h_K)}\right)$, we get

$$\frac{1}{qh_H\phi_\theta(x,h_K)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x)) \to 0,\ \text{as } n\to\infty. \tag{12}$$

Thus, we obtain,

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(\Gamma_i(\theta,y,x),\Gamma_j(\theta,y,x)) \mid = o(qh_H\phi_\theta(x,h_K)).$$

Then

$$k\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(Z_{ni}(\theta,y,x),Z_{nj}(\theta,y,x)) \mid = o\left(\frac{kq}{n}\right) \to 0,\ as\ n\to\infty. \tag{13}$$

From (10)-(13), we obtain

$$kVar(\xi_i) \to 0,\ as\ n\to\infty. \tag{14}$$

The stationarity of the observations $(X_i,Y_i)_i$ allows to write that

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(\xi_{ni},\xi_{nj}) \mid &= \sum_{i=1}^{k-1}(k-i) \mid Cov(\xi_{n1},\xi_{n(i+1)}) \mid \\
&\leq k\sum_{i=1}^{k-1} \mid Cov(\xi_{n1},\xi_{n(i+1)}) \mid \\
&\leq k\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{(l,j)\in J*J_i+1} Cov(Z_{nl}(\theta,y,x),Z_{nj}(\theta,y,x))
\end{aligned}$$

Since, for all $(i,j)\in J_i * J_j$ we have $|i-j|\geq p+1>p$, then

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(\xi_{ni},\xi_{nj}) \mid &\leq k\frac{C\phi_\theta(x,h_K)(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2}{nh_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x))^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=2p+q+1,|i-j|>p}^{v}\lambda_{i,j} \\
&\leq \frac{Ckp\phi_\theta(x,h_K)(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2}{nh_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x))^2}\lambda_p \\
&\leq \frac{Ckp(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2}{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}e^{-\alpha p} \\
&\leq \frac{Ckp}{nh_H^3\phi_\theta^3(x,h_K)}e^{-\alpha p} \to 0.
\end{aligned}$$

Hence, by combining this last result and (13), we get

$$\mathbb{E}(T_1')^2 \to 0\ as\ n\to\infty. \tag{15}$$

Now, for the sequence ζ_k, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\zeta_k)^2 &\leq (n-k(p+q))Var(Z_{n1}(\theta,y,x)) + 2\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(Z_{ni}(\theta,y,x), Z_{nj}(\theta,y,x)) \mid \\
&\leq pVar(Z_{n1}(\theta,y,x)) + 2\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq k} \mid Cov(Z_{ni}(\theta,y,x), Z_{nj}(\theta,y,x)) \mid \\
&\leq \frac{p\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H\mathbb{E}(K_1(\theta,x))^2} Var(Z_{n1}(\theta,y,x)) \\
&\quad \underbrace{+ \frac{C\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H\mathbb{E}(K_1(\theta,x))^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} \mid Cov(\Gamma_i(\theta,y,x), \Gamma_j(\theta,y,x)) \mid}_{o(1)} \\
&\leq \frac{Cp}{n} + o(1).
\end{aligned}$$

Then,

$$\mathbb{E}(\zeta_k)^2 \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

It suffices to combining this last with (8) to complete the proof of (9).
Proof of (11).
The proof of convergence in (11) is based in the following two results

$$\mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k \eta_j}) - \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid \to 0 \tag{16}$$

and

$$kVar(\eta_1) \to \sigma_f^2, k\mathbb{E}(\eta_1^2 \mathbb{I}_{\{\eta_1>\epsilon\}}\sigma_f(\theta,x)). \tag{17}$$

Proof of (16).

$$\begin{aligned}
\mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k \eta_j}) - \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid &\leq \mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k \eta_j}) - \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j})\mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid \\
&+ \mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j}) - \prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid \\
&= \mid Cov(e^{it\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j}, e^{it\eta_k}) \mid + \mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j}) \\
&- \prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid
\end{aligned} \tag{18}$$

and successively, we have

$$\mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k \eta_j}) - \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(e^{it\eta_j}) \mid \leq \mid Cov(e^{it\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j}, e^{it\eta_k}) \mid + \mid Cov(e^{it\sum_{j=1}^{k-2} \eta_k - 1}, e^{it\eta_j}) \mid$$

$$+\cdots+\mid Cov(e^{it\eta_2},e^{it\eta_1})\mid . \qquad (19)$$

Next, we use the quasi-associated property to get

$$\mid Cov(e^{it\eta_2},e^{it\eta_1})\mid \leq C(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x))^2}\sum_{i\in I_1}\sum_{j\in I_2}\lambda_{i,j}.$$

It follows that

$$\mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k\eta_j})-\prod_{j=1}^k\mathbb{E}(e^{it\eta_j})\mid \leq Ct(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x))^2}$$

$$\times[\sum_{i\in I_1}\sum_{j\in I_2}\lambda_{i,j}+\sum_{i\in I_1\cup I_2}\sum_{j\in I_3}\lambda_{i,j}+\cdots+\sum_{i\in I_1\cup\ldots\cup I_{k-1}}\sum_{j\in I_k}\lambda_{i,j}.$$

Observe that for every $2\leq l\leq k-1$, $(i,j)\in I_l * I_{l+1}$, we have $|i-j|\geq q+1>q$, then

$$\sum_{i\in I_1\cup\ldots\cup I_{k-1}}\sum_{j\in I_k}\leq p\lambda_q.$$

Therefore, the inequality (18) becomes

$$\begin{aligned}
\mid \mathbb{E}(e^{it\sum_{j=1}^k\eta_j})-\prod_{j=1}^k\mathbb{E}(e^{it\eta_j})\mid &= Ct^2(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x)])^2}kp\lambda_q\\
&= Ct^2(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{h_H(\mathbb{E}[K_1(\theta,x)])^2}kpe^{-\alpha q}\\
&= Ct^2(h_K^{-1}Lip(K)+h_H^{-1}Lip(H'))^2\frac{1}{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}kpkpe^{-\alpha q}\\
&= Ct^2\frac{kp}{nh_H^3\phi_\theta^3(x,h_K)}kpe^{-\alpha q}\to 0.
\end{aligned}$$

Proof of (17).
Using the same ideas as those used in (10). We have

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}kVar(\eta_1) &= \lim_{n\to\infty}kpVar(Z_{n1}(\theta,y,x))\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H(\mathbb{E}K_1(\theta,x))^2}Var(\Gamma_1(\theta,y,x)).
\end{aligned}$$

By a simple calculation, we prove that

$$\frac{1}{h_H\phi_\theta(x,h_K)}\mathbb{E}(K_1^2(\theta,x))\to K_1(\theta,x)^2-\int_0^1(K^2)'(s)\beta_\theta(x,s)ds+o(1),$$

$$\frac{\mathbb{E}(K_1^2(\theta,x)H_1'^2)}{h_H\mathbb{E}(K_1^2(\theta,x))}\to f(\theta,y,x)\int H'^2(t)dt$$

and

$$\frac{\mathbb{E}(K_1^2(\theta,x)H_1')}{h_H\mathbb{E}(K_1^2(\theta,x))} \to f(\theta,y,x).$$

We conclude that

$$\frac{\phi_\theta(x,h_K)}{nh_H(\mathbb{E}K_1^2(\theta,x))}Var(\Gamma_1(\theta,y,x)) \to \sigma_f^2(x).$$

Consequently

$$kVar(\eta_1) \to \sigma_f^2(x).$$

For the second part of (17), we use the fact that $|\eta_1| \leq Cp \mid Z_{n1}(\theta,y,x) \mid \leq \frac{Cp}{\sqrt{n\phi_\theta(x,h_K)}}$ and Tchebychev's inequality, to get

$$\begin{aligned} k\mathbb{E}(\eta_1^2 \mathbb{I}_{\{\eta_1>\epsilon\}}\sigma_f(\theta,x)) &\leq \frac{Cp^2k}{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\mathbb{P}(\eta_1 > \epsilon\sigma_f(\theta,x)) \\ &\leq \frac{Cp^2k}{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\frac{Var(\eta_1)}{\epsilon^2\sigma_f^2(x)} \\ &= O\left(\frac{p^2}{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\right). \end{aligned}$$

Which completes the proof of Lemma 4.1.

Proof of Lemma 4.3. Firstly, recall that, it is shown in Tabti and Aït Saïdi (2018) that

$$\mathbb{E}(\widehat{F}_N(\theta,y,x)) - F(\theta,y,x) = O(h_H^{b_2}) + O(h_K^{b_1}).$$

So, by (H5), we obtain

$$\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\left(\mathbb{E}(\widehat{F}_N(\theta,y,x)) - F(\theta,y,x)\right) \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

As $\mathbb{E}(\widehat{F}_D(\theta,x)) = 1$ then, all it remain to prove that

$$nh_H\phi_\theta(x,h_K)Var\left(\widehat{F}_D(\theta,x) - \widehat{F}_N(\theta,y,x))\right) \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

The latter is a direct consequence of the following assertions

$$Var\left(\widehat{F}_D(\theta,x)\right) = O\left(\frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right),$$

$$Var\left(\widehat{F}_N(\theta,y,x)\right) = O\left(\frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right)$$

and

$$Cov\left(\widehat{F}_D(\theta,x), \widehat{F}_D(\theta,x)\right) = O\left(\frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right).$$

The proofs of the three facts are similar and very close to the proof of (12). Thus, for sake of shorteners, we give only the proof of the first one. Indeed,

$$\begin{aligned} Var\left(\widehat{F}_D(\theta,x)\right) &= \left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(\theta,x)]}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(K_i(\theta,x),K_j(\theta,x)) \\ &= \left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(\theta,x)]}\right)^2 Var(K_1(\theta,x)) \\ &+ \left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(\theta,x)]}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n} Cov(K_i(\theta,x),K_j(\theta,x)). \end{aligned} \tag{20}$$

For the first term,

$$Var(K_1(\theta,x)) = \mathbb{E}\left(K_1^2(\theta,x)\right) - \left(\mathbb{E}(K_1(\theta,x))\right)^2$$

then,

$$\mathbb{E}[K_1^2(\theta,x)] = O\left(\phi_\theta(x,h_K)\right).$$

It follows that :

$$\left(\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1](\theta,x)}\right)^2 Var(K_1(\theta,x)) = O\left(\frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right). \tag{21}$$

Now, let us evaluate the asymptotic behavior of the sum in the second term of (20). For this, we need the following decomposition :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n} Cov(K_i(\theta,x),K_j(\theta,x)) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,0<|i-j|\leq m_n}^{n} Cov(K_i(\theta,x),K_j)(\theta,x)}_{I} \\ &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|>m_n}^{n} Cov(K_i(\theta,x),K_j)(\theta,x)}_{II} \end{aligned}$$

where (m_n) is a sequence of positive integer which goes to infinity as $n \to \infty$ From Assumptions (H1), (H4) and (H7), we have, for $i \neq j$

$$\begin{aligned} I &\leq nm_n\left(max_{i\neq j} \mid \mathbb{E}(K_i(\theta,x)K_j(\theta,x)) \mid +(\mathbb{E}(K_1(\theta,x)))^2\right) \\ &\leq Cnm_n\left(\phi_\theta^2(x,h_K)+\phi_\theta^2(x,h_K)\right) \\ &\leq Cnm_n\left(\phi_\theta^2(x,h_K)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Since the kernels K is bounded and Lipschitzian, we get

$$\begin{aligned} II &\leq (h_K^{-1}Lip(K))^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\ &\leq C(h_K^{-1}Lip(K))^2 \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1_{|i-j|>m_n}}^{v} \lambda_{i,j} \\ &\leq Cn(h_K^{-1}Lip(K))^2 \lambda_{m_n} \\ &\leq Cn(h_K^{-1}Lip(K))^2 e^{-\alpha m_n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Then, by (22) and (23), we get

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_i(\theta,x), K_j(\theta,x)) \leq C\left(nm_n(\phi_\theta^2(x,h_K)) + n\left(h_K^{-1}Lip(K)\right)^2 e^{-\alpha m_n}\right)$$

by choosing

$$m_n = \log\left(\frac{(h_K^{-1}Lip(K))^2}{\alpha\phi_\theta^2(x,h_K)}\right)$$

we get

$$\frac{1}{\phi_\theta(x,h_K)} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} Cov(K_i(\theta,x), K_j(\theta,x)) \to 0, \ as\ n \to \infty. \tag{24}$$

Finally, by combining results (20), (21) and (24), we get :

$$Var\left(\widehat{F}_D(\theta,x)\right) = O\left(\frac{1}{n\phi_\theta(x,h_K)}\right).$$

Acknowledgements. The authors would like to thank the Associate-Editor and thee anonymous reviewers for their valuable comments and suggestions which improved substantially the quality of this paper.

Bibliographie

[1] Aït Saidi, A., Ferraty, F., Kassa, R. (2008). Cross-validated estimation in the single functional index model. *Statistics.* 42 : 475-494.

[2] Attaoui, S., Laksaci, A., Ould-Saïd, E. (2011). A note on the conditional density estimate in the single functional index model. *Statist. Probab. Lett.* 81 : 45-53.

[3] Attaoui, S., Laksaci, A., Ould-Saïd, E. (2015). Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes. *Functional Statistics and Applications, Contributions to Statistics*, 10.1007/978-3-319-22476-3-1.

[4] Attaoui, S., Ling, N. (2016). Asymptotic results of a nonparametric conditional cumulative distribution estimator in the single functional index modeling for time series data with applications. *Metrika.* 79 : 485-511 DOI 10.1007/s00184-015-0564-6.

[5] Bulinski, A., Suquet, C. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54 : 215-226.

[6] Bulinski, A., Shabanovich, E. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively dependent random fields. (in Russian). *Fundam. Appl. Math.* 4 : 479-492.

[7] Douge, L. (2010). Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. *Ann. I.S.U.P.* 54 : 51-60.

[8] Doukhan, P., Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stoch. Proc. Appl.* 84 : 313-342.

[9] Esary, J., Proschan, F., Walkup, D. (1967). Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.* 38 : 1466-1476.

[10] Ferraty, F., Peuch, A., Vieu, P. (2003). Modèle à indice fonctionnel simple. *C. R. A. S.Mathématiques Paris.* 336 : 1025-1028.

[11] Ferraty, F., Vieu, P. (2006).*Nonparametric functional data analysis : theory and practice*, Springer Series in Statistics, New York.

[12] Laksaci, A., Mechab, B. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 55 : 35-51.

[13] Laksaci, A., Mechab, B. (2014). Conditional hazard estimate for functional random fields. *Journal of Statistical Theory and Practice*. 8 : 192-200.

[14] Mechab, W., Laksaci, A. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron*, 10.1007/s40300-016-0084-9.

[15] Newman, C. M. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables : In Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lect. *Notes-Monographs Series*. 5 : 127-140.

[16] Quintela-del-Río, A. (2008). Hazard function given of functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *J. Nonparametr. Stat.* 20 : 413-430.

[17] Tabti, H., Ait Saïdi, A. (2018). Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure. *Commu. Stat. Theory and Methods*. 47 : 816-838.

Chapitre 5

Application sur des données simulées

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'évaluer le comportement de nos résultats de la normalité asymptotique sur des données d'un échantillon fini. Plus précisément, notre objectif principal est de montrer la facilité de la mise en œuvre de la fonction de risque conditionnel et d'examiner l'influence du degré de dépendance sur cette propriété asymptotique.

5.2 Données

Nous générons des observations fonctionnelles en considérant le modèle non paramétrique fonctionnel suivant :

$$Y_i = r(X_i) + \epsilon_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

où les ϵ_i sont générés selon une distribution normale $\mathcal{N}(0, 0.5)$. Il est bien documenté que le processus linéaire est une variable quasi associée qui satisfait à la condition (H7). Ainsi, nous générons le régresseur fonctionnel quasi-associé comme suit :

$$X_i(t) = \sum_{j=i+1}^{i+m} Z_j(t) \quad \text{Où } Z_j(t) = a_j t^2 + b_j * t + c_j \qquad t \in [0, 1]$$

et $(a_j)_j$ (resp. $(b_j)_j$ et $(c_j)_j$) sont indépendantes et réparties de manière identique sous la forme $\mathcal{N}(0, 1)$ (resp. $\mathcal{N}(-1, 0.5)$) et $\mathcal{N}(1, 0.5)$). Les courbes de X_i sont discrétisées dans la même grille, composée de 100 points en $[0, 1]$ et sont tracées dans la Figure 1 pour trois valeurs de $m = 1$ (cas indépendant), $m = 4$ (cas de dépendance moyenne) et $m = 10$ (cas de dépendance forte).

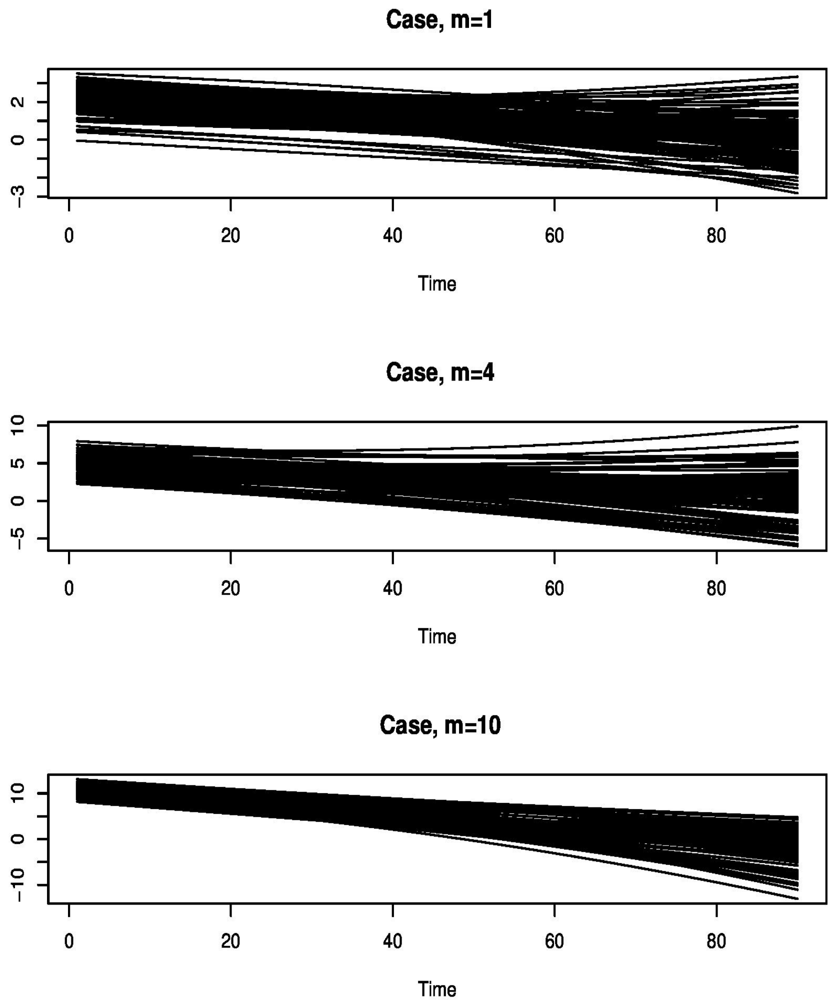


Figure 5.1 courbes d'échantillon de 100

De plus, la variable scalaire Y_i est calculée par l'opérateur de régression :

$$r(x) = 5 \int_0^1 \exp\{x(t)\}\, dt.$$

Observez que nous pouvons déduire de la distribution de l'erreur (ϵ_i) la fonction de distribution conditionnelle théorique de Y donnée $X = x$ qui est explicitement donnée par la distribution de ϵ_i décalée de $r(x)$.
Ainsi, la fonction de risque conditionnel théorique peut être facilement déterminée.

5.3 Résultats

Pour illustrer la normalité asymptotique de cette fonction nous fixons une courbe, $x = X_0$ et $y = Y_0$ à partir des données générées et on fait varier le m degré d'indépendance sur n-échantillons de la même donnée de m et nous calculons pour chaque échantillon la quantité :

$$\sqrt{nh_H\phi_\theta(x,h_K)}\widehat{\sigma}_{h_K}^{-1}(\theta,x)\left(\widehat{h}(\theta,y,x)-h(\theta,y,x)\right) \tag{2}$$

où $\widehat{\sigma}_{h_K}$ est l'estimation de l'écart type donnée dans la section précédente. Ensuite, nous testons la normalité sur l'échantillon obtenu. Décrivons maintenant la détermination pratique des paramètres impliqués dans la quantité mentionnée. Tout d'abord, le θ paramètre fonctionnel est sélectionné par rapport à l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur de covariance empirique :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X_n})^t(X_i-\bar{X_n}) \text{ où} \bar{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i. \tag{3}$$

Alors que les paramètres de lissage h_H et h_K sont choisis par la méthode de validation croisée sur le nombre de voisins les plus proches. Nous choisissons le noyau quadratique pour K exprimé par :

$$K(t)=\frac{3}{2}(1-t^2)\mathbb{I}_{[0,1]}. \tag{4}$$

Dans la figure suivante, nous donnons le tracé QQ de l'échantillon obtenu par rapport à une distribution normale standard pour les différentes valeurs de $m=1,4$ et 8.

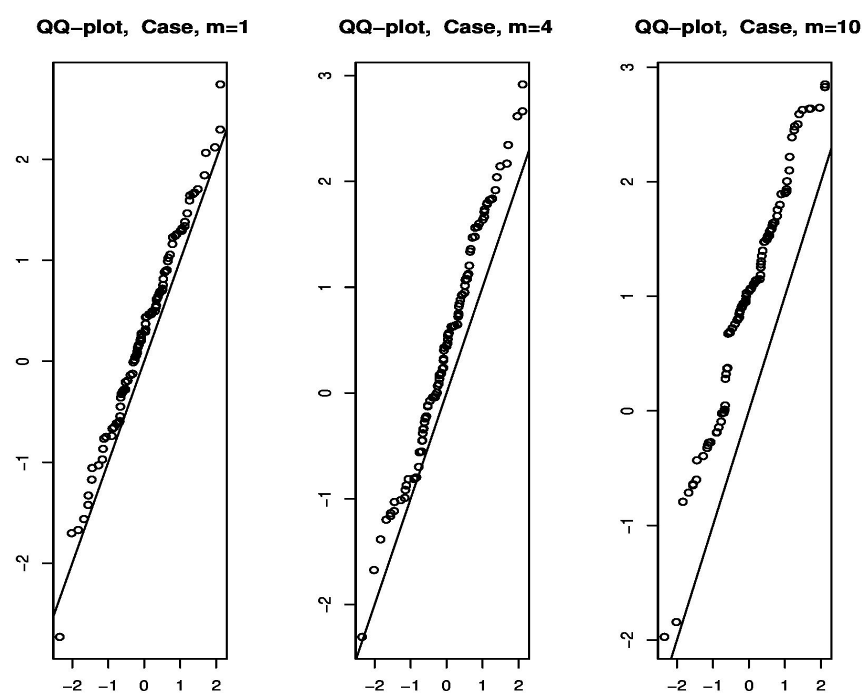


Figure 5.2 Le graphique QQ de l'échantillon obtenu

Il est clair que notre estimateur est facilement implémenté dans la pratique et il a un bon comportement. De plus, le taux de convergence de la normalité asymptotique est fortement lié à la corrélation des données. En particulier, il diminue par rapport aux valeurs de m. Une telle affirmation est confirmée par les résultats du tableau 1, où nous résumons la valeur p du test de Kolmogorov-Smirnov, pour les différentes valeurs de m

m	1	4	10
p-value	0.88	0.67	0.43

Table 1 : la valeur p du test de Kolmogorov-Smirnov

Conclusion et Perspectives

1. Conclusion

Cette contribution porte sur l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle dans la présence d'une variable explicative fonctionnelle, dont nous avons considéré un estimateur par l'approche du noyau et sous des conditions de dépendance entre les variables.

Comme résultats asymptotiques nous avons établi la convergence presque complète de l'estimateur de la densité et de la fonction de répartition ainsi que de l'estimateur de la fonction de hasard dans un cadre d'une variable réponse scalaire conditionnée à une variable fonctionnelle avec une structure de données quasi-associées. Nous avons établi de même la normalité asymptotique de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle construit par la méthode de l'index modèle et sous l'hypothèse d'association (quasi-associée). Il est clair que nos résultats théoriques obtenus couvrent tous les différents types de convergence stochastique comme il s'agit d'une convergence presque complète qui est la plus forte des convergences.

De plus, notre estimateur possède de bonnes propriétés asymptotiques dans tous les cas de notre étude. Ainsi, l'aspect non paramétrique est bien exploité dans ce travail par les hypothèses précédentes. Concernant les hypothèses, on peut les diviser en trois catégories, des hypothèses structurales, des hypothèses sur la variable explicative et des hypothèses techniques. Nos vitesses de convergence sont en deux parties :

partie biais et partie dispersion. On trouvera les conditions sur la dimensionnalité du modèle dans la partie biais. Tandis que, la dimensionnalité de la variable explicative est juste dans la partie dispersion.

2. Perspectives

Les méthodes d'estimation non paramétrique ont été proposées comme alternative à la méthode de prévision. Cependant, les résultats théoriques de l'estimation à noyau est montrés et utilisés dans le domaine de statistique, mais reste encore beaucoup d'étude à faire, nous proposons quelques questions ouvertes qui restent à développer pour de futures recherches.

– Tout d'abord, nous procédons actuellement à la finalisation d'un travail de recherche sur la normalité asymptotique de l'estimateur de la densité cas quasi associé non indexé par le paramètre fonctionnel.

– les résultats obtenus dans cette thèse par la méthode du noyau peuvent être généralisés par d'autres méthodes plus fiable telles que la méthode locale linéaire et la méthode des plus proches voisins.

– Tous les résultats obtenus peuvent être considérés pour des estimateurs récursifs en ajoutant d'autres hypothèses structurales et de régularité de domaine.

– Le travail sur les données incomplètes en présence d'une variable explicative fonctionnelle n'est pas encore abordé, ce qui nous permettra d'adapter nos résultats pour le cas de manquant aléatoirement pour la variable réponse.

– Le choix de la semi métrique et le paramètre de lissage reste toujours un problème ouvert dans le domaine de la statistique fonctionnelle donc on peut généraliser les résultats existants en utilisant des autres familles de semi métriques et des autres choix du paramètre de lissage pour avoir un estimateur de variance optimale.

–

Bibliographie Générale

Bibliographie

[1] A. Ahmedou, J. M. Marion et B. Pumo. (2016). Generalized linear model with functional predictors and their derivatives. *J. Multivariate Anal.* 146, 313-324.

[2] A. Aït Saïdi, F. Ferraty et R. Kassa. (2008). Cross-validated estimation in the single functional index model. *Statistics.* 42 , 475-494.

[3] G. Aneiros-Pérez et P. Vieu. (2008). Nonparametric time series prediction : a semi-functional partial linear modelling. *J. Multivariate Anal.* 99 (5), 834-857.

[4] S. Attaoui, A. Laksaci et E. Ould-Saïd. (2011). A note on the conditional density estimate in the single functional index model. *Statist. Probab. Lett.* 81, 45-53.

[5] S. Attaoui, A. Laksaci et E. Ould-Saïd. (2015). Asymptotic Results for an M-Estimator of the Regression Function for Quasi-Associated Processes. *Functional Statistics and Applications, Contributions to Statistics.* 10.1007/978-3-319-22476-3-1.

[6] S. Attaoui et N. Ling. (2016). Asymptotic results of a nonparametric conditional cumulative distribution estimator in the single functional index modeling for time series data with applications, *Metrika.* 79, 485Ű511.

[7] E. Bongiorno, A. Goia, E. Salinelli et P. Vieu. (2014). An overview of IWFOS'2014. In : Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics. *Esculapio, Bologna.* 1-6.

[8] D. Bosq. (2000). *Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications.* Lecture Notes in Statistics, 149. New York : Springer.

[9] D. Bosq et D. Blanke. (2007). *Inference and Prediction in Large Dimensions.* Wiley Series in Probability and Statistics John Wiley & Sons.

[10] D. Bosq et J. P. Lecoutre. (1987). *Théorie de l'estimation fonnctionnelle.* Economica.

[11] A. Bulinski et C. Suquet. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54, 215-226.

[12] A. Bulinski et E. Shabanovich. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively dependent random fields. (in Russian). *Fundam. Appl. Math.* 4, 479-492

[13] H. Cardot, C. Crambes et P. Sarda. (2004). Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 339, 141-144.

[14] D. Chen, P. Hall et H. G. Müller. (2011). Single and multiple index functional regression models with nonparametric link. *Ann. Statist.* 39 (3), 1720-1747.

[15] A. Cholaquidis, R. Fraiman, J. Kalemkerian et P. Llop. (2016). An nonlinear aggregation type classifier. *J. Multivariate Anal.* 146, 269-281.

[16] A. Cuevas. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J. Statist. Plann. Inference.* 147, 1-23.

[17] S. Dabo-Niang. (2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux difusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 334, 213-216.

[18] S. Dabo-Niang. (2004). Kernel density estimator in an infnite dimensional space with a rate of convergence in the case of difusion process. *Applied Math. Lett.* 17, 381-386.

[19] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* 51, 27-42.

[20] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 344, 49-52.

[21] S. Dabo-Niang et A. Laksaci. (2007). Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. *Pub. Instit. Statist. Univ. Paris.* 3, 27-42.

[22] J. Dedecker, P. Doukhan, G. Lang, R. J. R. León, S. Louhichi et C. Prieur. (2007) Weak dependence : with examples and applications.*Lecture Notes in Statistics.*

[23] J. De Gooijer et A. Gannoun. (2000). Nonparametric conditional predictive regions for time series. Comput. *Statist. Data Anal.* 33, 259-257.

[24] L. Douge. (2010). Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. *Ann. I.S.U.P.* 54, 51-60.

[25] P. Doukhan et S. Louhichi. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stoch. Proc. Appl.* 84, 313-342.

[26] J. Esary, F. Proschan et D. Walkup. (1967). Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.* 38, 1466-1476.

[27] G. Estévez-Pérez. (2002). On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation. *Statist. Probab. Lett.* 57, 231-241.

[28] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río et P. Vieu. (2002). Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. *J. Statist. Plann. Inference.* 104, 1-30.

[29] M. Ezzahrioui et E. Ould-Saïd. (2005). Asymptotic normality of nonparametric estimators of the conditional mode for functional data. *Technical report*, No.249, *LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale.*

[30] M. Ezzahrioui et E. Ould-Saïd. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data. *Preprint*, No 277, *LMPA, Univ. du Littoral Côte d'Opale.*

[31] J. Fan, Q. Yao et H. Tong. (1996). Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems. *Biometrika* 83, 189-206.

[32] F. Ferraty, A. Laksaci et P. Vieu. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 340, 389-392.

[33] F. Ferraty, A. Laksaci et P. Vieu. (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.* 9, 47-76.

[34] F. Ferraty, A. Tadj, A. Laksaci et P. Vieu. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Infer.* 140, 335-352.

[35] T. Gasser, P. Hall et B. Presnell. (1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. R. Stat. Soc.Ser. B, Stat. Methodol.* 60, 681-691.

[36] L. Horváth et G. Rice. (2015). An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves. *Rev. Mat. Complut.* 28 (3), 505-548.

[37] T. Hsing et R. Eubank. (2015). *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators.* Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester.

[38] R. S. Kallabis et M. H. Neumann. (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli.* 12, 333-350.

[39] A. Laksaci. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. *Ann. I.S.U.P.* 51, 69-80.

[40] A. Laksaci et B. Mechab. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 55(1), 35-51.

[41] E. Masry. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes IEEE. *Trans. Inform. Theory.* 32, 254-267.

[42] P. Matula. (1992). A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* 15, 209-213.

[43] W. Mechab et A. Laksaci. (2016). Nonparametric relative regression for associated random variables. *Metron.* 10.1007/s40300-016-0084-9.

[44] H. G. Müller. (2005). Functional modelling and classification of longitudinal data. *Scand. J. Stat.* 3, 223-240.

[45] C. M. Newman. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables : In Inequalities in Statistics and Probability, *IMS Lect. Notes-Monographs Series*. 5, 127-140.

[46] A. Quintela-del-Río. (2008). Hazard function given of functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *J. Nonparametr. Stat.* 20, 413-430.

[47] J. O. Ramsay et B. W. Silverman. (2002). *Applied functional data analysis ; Methods and case studies*. Springer-Verlag, New York.

[48] J. O. Ramsay et B. W. Silverman. (2005). *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, New York.

[49] M. Rosenblatt. (1969). Conditional probability density and regression estimators. In : Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II.* New York and London : Academic Press.

[50] G. G. Roussas. (1999). Positive and negative dependence with some statistical applications In : Asymptotics, Nonparametrics and Time Series (S. Ghosh,Ed) pp. 757-788. *Marcell Dekker, Inc., New York.*

[51] H. Tabti et A. Aït Saïdi. (2016). Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure. *Commu. Stat. Theory and Methods*. 47(4), 816-838.

[52] E. Youndjé. (1993). Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Ph.D. Thesis, Rouen University (in French).

[53] E. Youndjé. (1996). Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Rev. *Roumaine Math. Pures Appl.* 41, 535-566.