N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE DE DOCTORAT

Présentée par :

SEKKAL Noussaiba

Domaine : Mathématiques Informatique
Filière : Mathématiques
Intitulé de la formation :Statistique, Mathématiques appliquées à l'économie et à la finance

Intitulée

Equilibrium in a Complete Market

Soutenue le : 05/11/2019
Devant le jury composé de :

Président :
Mr GHERIBALLAH Abdelkader Professseur à L'Université S.B.A
Examinateurs :
Mr GUENDOUZI Toufik Professeur à L'Université SAIDA
Mr BENCHIKH Tawfik Professeur à L'Université S.B.A
Mr MECHAB Boubaker Maitre de Conférence A à L'Université S.B.A
Directeur de thèse :
Mme LIMAM-BELARBI Faiza Professeur à L'Université S.B.A

Année universitaire : 2019/2020.

À vous mes chers parents, je dédie ce modeste travail qui est le fruit de vos interminables conseils ; assistance et soutient moral, en témoignage de ma reconnaissance et mon affection, dans l'éspoir que vous en serez fiers.

*À mes sœurs **Esmaâ**, **Meriem** et **Selma** ... À mon frère **Abderrahmene** ... À mes chèrs neuveux (je vous aimes).*

*À toute ma grande famille des deux côtés **SEKKAL** & **FANDI**.*

*À tous ceux qui m'ont enseigné pendant toute ma vie scolaire je cite en particulier Mme **ABDELHAK Khadidja** mon enseignante de primaire.*

~ *MERCI* ~

Remerciements

Tous les éloges et les remerciements sont à **ALLAH** l'un, le seul créateur et gouverneur de cet univers. Envers qui nous sommes reconnaissant de ce que nous sommes devenus et pour tout ce qu'il nous a accordé bien qu'il ne puisse jamais être remercié assez.

Je remercie vivement ma directrice de thèse **Prof. LIMAM-BELARBI Faiza** pour m'avoir fait confiance et m'a proposé ce thème, puis pour sa fraîcheur d'esprit, pour sa gentillesse, sa disponibilitée et sa rigueur.

Je remercie également **Mme SEMRED Nawel** Docteur à la Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion à l'université Djilali Liabès Sidi Bel Abbès. Elle m'a fait découvrir le monde de la Bourse. Cette expérience m'a permis de tisser des liens entre théorie mathématique et applications pratiques.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur **GHERIBALLAH Abdelkader** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury. Je suis très honoré de sa présence.

Mes vifs remerciements à Monsieurs **GUENDOUZI Toufik** , **BENCHIKH Tawfik** et **MECHAB Boubaker** qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury. Je les remercie vivement pour l'attention qu'ils ont accordée à ce travail.

Je remercie les membres du Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès. J'ai toujours trouvé soutien et encouragement.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amies et collègues qui m'ont apporté leur et support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Ce travail n'aurait pu arriver à terme sans le soutien, la prière et l'encouragement familial.

Merci à tous ceux qui ont contribuè, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction

Comme les mathématiques sont omniprésentes en tant qu'outil dans toutes les sciences : physique, chimie, biologie, informatique, et bien sur la finance qui a poussé les mathématiciens à développer certaines de leurs théories pour le meilleur mais aussi pour le pire quand la croyance en un modèle se confronte à la réalité. Plus précisément la finance de marché (market finance) qui s'appuie sur des mathématiques complexes ; Les spécialistes de la finance ont en effet recours, depuis quelques années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrale stochastique, ...) pour la description des phénomènes et la mise au point de méthodes de calcul. En réalité, l'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente : c'est en tentant de bâtir une « théorie de la spéculation » que Bachelier [2] a découvert, au début du siècle l'objet mathématique appelé aujourd'hui " Mouvement Brownien ". Mais elle a pris une dimension nouvelle à partir de 1973, avec les travaux de Fisher Black et Myron Scholes [4] et Merton [26] sur l'évaluation "pricing" et la couverture des options. Depuis, tandis que se développaient les marchés d'options, les méthodes de Black-Scholes et Merton ont été perfectionnées, tant au niveau de la généralité que de la clarté et de la rigueur mathématique et la théorie paraît suffisamment avancée pour l'utiliser.

Sur un marché financier l'objectif de chaque investisseur est d'optimiser leur portefeille et consommation, pour cela il peut acheter et vendre des actifs financiers. les variations des prix de ces actifs peuvent être modélisées par le processus continu dirigé par le Mouvement Brownien comme référence, on peut citer [25],[20] ou [21], On suppose que l'information minimale dont disposent les agents pour résoudre leur problème d'optimisation est celle obtenue par l'observation du processus précédent, il semble clair que les agents sont informés de façon identique, leur stratégie va naturellement dépendre de cette information privée. Notre objectif est d'étudier la réalisation de l'équilibre dans un marché complet sur l'intervalle d'investissement total [0,T], cette théorie est fondée dans les années cinquante par le modèle d'*Arrow* et *Derbeu* et était évolué aprés, on peut citer [6] [3], pour cela nous construisons une mesure de probabilité neutre au risque pour cet initié, le marché est ainsi viable pour lui. L'existence d'un théorème de représentation de martingale pour la filtration élargie implique que le marché est aussi complet.

Le présent manuscrit comporte quatre chapitres et est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction de notations et définitions en finance qui sont utilisées le long de ce travail, en particulier à l'étude du problème du marché financier.

Dans le deuxième chapitre, on introduit le marché financier complet.

Le troisième chapitre est consacré à l'approche utilisée pour la réalisation de ce travail.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on présente les résultats fondamentaux de ce travail et qui ont fait l'objet d'une publication internationale et on termine par une application en utilisant le langage **R**.

Chapitre 1

L'Équilibre sur un Marché Financier

1.1 Introduction historique

La notion de marché financier, ou de bourse , est connue depuis l'Antiquité. L'Encyclopédie fait remonter l'origine de la bourse à la Rome Antique qui vit se développer les premières sociétés de capitaux formées par les Chevaliers puis par les Publicains. Les parts de ces sociétés étaient diffusées par l'intermédiaire des « *Argentarii* » sous la *Collegia mercatorum*. D'après Braudel [16] , la bourse est née dès le $14^{ème}$ siècle sous l'impulsion des italiens. Ces derniers ont redécouvert le principe de la mise en commun des capitaux. Dès 1075, des contrats de «*Societas Maris* » apparaissent à Venise. Ces contrats impliquent que l'associé qui reste à Venise apporte les deux tiers du capital nécessaire à l'expédition tandis que celui qui commerce n'en fournit que le tiers en plus de son activité hautement risquée à l'époque. A l'issue de l'expédition, la société est dissoute et les gains sont partagés. Par la suite , on voit apparaître des «*loca*» qui correspondent à des parts de bateaux. Au $13^{ème}$ siècle, la ville de Gènes émet des emprunts gagés sur les resssources de l'impôt sur le sel. Une étape décisive est réellement franchie au début du $15^{ème}$ siècle avec la reconnaissance aux associés du droit de ne plus être responsables que pour une somme égale à celle qu'ils ont investie dans la « compagnie ». C'est en quelque sorte l'ancêtre de la SARL.

La première bourse en tant que lieu physique réservé aux transactions portant sur des titres est créée par les italiens à Anvers en 1460. Dans ce centre d'affaire, ce sont tous les commerçants qui s'y rencontrent afin de négocier des effets de commerce, des letters de change, ou encore des engagements de livraison de marchandises. La bourse d'Anvers est devenue le centre financier le plus important en Europe jusqu'à la fin de $16^{ème}$ siècle. Le premier bâtiment date de 1518 tandis qu'un nouveau bâtiment dédié exclusivement aux marchés financiers fut construit en 1531. La première cote imprimée date de 1592. La bourse porte à son fronton l'inscription « *Ad usum mercatorum cujusque gentis ac linguae*» (à lusage des marchands de tous les pays et de toutes les langues).

NB : Ce marché s'appelle « bourse », du nom d'une riche famille marchande flamande du $14^{ème}$ siècle, les Van Den Börse, qui possédait un hôtel particulier devant lequel se réunissaient, dans le but de réaliser des affaires, des marchands venus de toute l'Europe.

La fin du $16^{ème}$ siècle marque un transfert des richesses en Europe. Les marchés anglais et hollandais en particulier vont prendre un essor considérable grâce à leur puissance maritime. La compagnie hollandaise des Indes Orientales (1602) fut ainsi la première société financée par la vente d'actions au public, échangées entre particuliers avec un cours déterminé par l'offre et la demande. À l'époque, on investissait car on «flairait» la bonne affaire. Les notions de coût du capital et le financement de l'entreprise n'étaient pas évoqués.

Dans la première partie du $17^{ème}$ siècle les bulbes de tulipes, importés de Turquie, constituent des produits facilement négociables et très prometteurs. Dans les années 1636-1637 un véritable vent de folie va s'emparer des investisseurs qui surenchérissent pour acheter des bulbes de tulipes dont les cours vont atteindre des sommets avant de s'effondrer, créant ainsi la ruine de nombreux particuliers qui y avaient investi leur fortune. C'est le premier Krach boursier.

1.2 Évolution des marchés

Dès le début du $18^{ème}$ siècle les gouvernements utilisent le marché boursier pour contracter des dettes auprès du public au moyen de rentes, ce qui leur revient moins cher que de le faire auprès des banques. Ces rentes sont les ancêtres des actuelles obligations. En 1773, à Londres, les agents de changes (brokers, comme ils se nomment) inscrivent sur la porte du bâtiment dans lequel ils se réunissent le nom de leur activité : *Stock Exchange*. En 1792 se crée à Manhattan le bourse de New York, le *New York Stock Exchange*, plus connue sous le nom de *Wall Street*.

Pendant le $19^{ème}$ siècle, les bourses, emmenées par la révolution industrielle, sont caractérisées par une forte croissance. Les premières grandes sociétés à rentrer en Bourse sont les sociétés de chemein de fer, les entreprises de construction de canaux, la sidérurgie, les banques, puis le pétrole, la chimie, en fonction de l'évolution de la révolution industrielle. Le milieu du $19^{ème}$ siècle voit également la naissance des premiers marchés à terme de marchandises (CBOT : *Chicago Board of Trade* en 1848, CME : *Chicago Mercantile Exchange* en 1874). À la charnière du $20^{ème}$ siècle, les rentes perpétuelles émises par l'État connaissent un peu partout dans le monde une popularité très forte. Cette popularité diminuera en raison de l'inflation galopante qui arrivera avec la première guerre mondiale.

La première guerre mondiale s'achève grâce au soutien logistique et en armement des État-Unis et marque ainsi le passage du leadership anglais à celui américain. À *Wall Street*, la fin des années 20 est marquée par l'envolée des cours, néanmoins les prémisses d'un retournement se font sentir. On constate que la majorité des nouveaux titres introduits sur le marché sont destinés à racheter d'autres titres. Les entreprises n'augmentent plus leur capital pour se développer mais pour acquérir d'autres titres tandis que les taux d'intérêt ne cessent de progresser (de 4% à 7,6% en l'espace de deux années)... Et le jeudi 24 octobre 1929, ce qui devait arriver arriva : les cours s'effondrent (-12,8%). A la clôture de ce *black Thursday*, 13 millions de titres ont été échangés. Ce volume record sera battu le mardi 29 avec 16 millions de titres négociés. Au 1^{er} janvier 1930, les principaux titres ont perdu 25% de leur valeur. Les économies américaine et mondiale mettront de nombreuses années pour s'en relever.

Après la seconde guerre mondiale, New York et Tokyo (Kabuto Cho) sont les principaux centres boursiers de la planète. La vie des marchés est notamment marquée par l'effondrement du système de change de *Bretton Woods* 1944 et l'augmentation du cours du pétrole. Les principaux marchés financiers progressent pour atteindre des nouveaux sommets en 1987. Les années 80 sont devenues synonymes de l'argent facile, des golden boys et du surendettement. Et ce qui devait arriva ... Le lundi 19 octobre 1987, un deuxième krach surgit à l'annonce du commerce extérieur américain supérieur à celui prévu et d'une remontée des taux d'intérêt. Le principal indice boursier de *Wall Street*,(DJIA : le *Dow Jones Industrial Average*), s'effondre de 22,6% entraînant toutes les places financières de la planète dans sa chute. La chute fut spectaculaire mais contrairement à 1929, cette crise boursière n'est pas transformée en crise économique. Les banques centrales sont intervenues pour éviter une asphyxie de l'économie par un manque de liquidités. Les pertes enregistrées en ce lundi noir ont été effacées en moins de deux ans.

Depuis les marchés ont connu des cycles de croissance plus ou moins régulière. De nombreuses entreprises se sont introduites en bourse. Les volumes de transaction ont augmenté de manière exponentielle. La fin des années quatre-vingt-dix a été marquée par la montée des valeurs issues des secteurs des nouvelles technologies. Ceci a conduit à l'apparition d'une bulle spéculative, dite bulle Internet, qui s'est rapidement dégonflée en 2000 et 2001.

Sur le plan de l'organisation des marchés, la fin du $20^{ème}$ siècle fut marquée par la dématérialisation des titres. Les marchés à la criée ont peu à peu cédé leur place aux marchés électroniques. Cette mutation des marchés financiers trouve son origine d'une part dans la saturation du traitement manuel des transactions et d'autre part dans la diversification internationale des portefeuilles. L'informatisation des bourses et les transactions transfrontalières ont conduit à une concurrence accrue entre les différentes bourses de valeurs mobilières. Ainsi, on assiste depuis les années quatre-vingt-dix à la création de plateformes électroniques, *Electronic Communication Networks* ou *Alternative Trading Systems* (Archipelago, Island,Posit,...), pour attirer les volumes de transactions. Cette concurrence conduit également à un mouvement de concentrations de différentes bourses de valeur. La bourse de *Wall Street* et la bourse électronique Nasdaq ont récemment racheté des ECN tandis qu'en Europe, les bourses du Danemark, de Finlande, de Suède et des pays baltes se sont regroupées pour former la bourse OM Group tandis qu'Euronext est le résultat de la fusion des bourses de Belgique, de France, des Pays-Bas, du Portugal et du marché dérivé du Royaume Uni.

1.3 Caractéristiques générales du marché financier

1.3.1 Définition du marché financier

Le marché financier est un lieu de rencontre de l'offre et de la demande des capitaux à long terme.
Par opposition au marché monétaire, dans lequel les agents économiques négocient entre eux leurs besoins et leurs excédents de capitaux à court terme, le marché financier est le lieu de négociation des échanges de capitaux à long et moyen terme matérialisés par des instruments appelés valeurs mobilières.

Pour comprendre le marché correctement, il est nécessaire de le diviser en marché primaire et en marché secondaire.

Le marché primaire :

C'est le marché des émissions des valeurs mobilières, le marché primaire met en présence d'une part les agents économiques disposant d'un excédent d'épargne et souhaitant le placer ; et d'autre part les opérateurs qui ont des besoins de financement, et qui créent à ce titre, différentes valeurs mobilières. Il s'agit des actions, obligations, des obligations convertible en actions à l'image des bons de privatisation et des certificats d'investissements. Sont aussi assimilés à des valeurs mobilières les droits d'attribution et de souscription.

Le marché secondaire : la bourse

C'est le marché sur lequel sont échangées des valeurs mobilières déjà émises (sur le marché primaire). Sur ce marché les investisseurs ayant déjà acheté des titres doivent pouvoir liquider rapidement leur positions, dans des conditions de sécurités optimales.

Le marché secondaire peut être décomposé en :

– Les bourses reconnus :(cote de la bourse) : sur lesquelles se négocient les titres inscrits à la cote. L'inscription à la cote de bourse permet aux sociétés d'accroître la liquidité pour leurs titres, leur degré de visibilité dans l'économie, leur prestige et leur notoriété.
– Le marché hors cote : (hors bourse) : c'est le marché sur lequel se négocient tout les titres non inscrits à la cote d'une bourse.

1.3.2 Rôle du marché financier :

En canalisant l'épargne des investisseurs sur les différentes valeurs mobilières, le marché financier joue un rôle important sur le plan économique en permettant à l'État (trésor), aux entreprises publiques semi-publiques ainsi qu'aux sociétés privées de trouver les ressources longues nécessaires au financement de leurs programmes de développement.

– **Le marché primaire** : joue un rôle de conciliation des besoins des prêteurs et des emprunteurs, ainsi que la procuration des fonds nouveaux aux agents à besoins de financement par l'émission de titres.
– **Le marché secondaire** permet :
  - D'assurer la liquidité des titres
  - D'encaisser la rémunération attachée à un placement
  - Réaliser de la croissance externe en acquérant des actions suffisantes pour prendre participation dans le capital d'autres entreprises.

1.3.3 Acteurs du marché financier :

a) Les émetteurs :

Les émetteurs sont les agents, publics ou privés, à la recherche de ressources destinées à financer leurs investissements, on peut faire la distinction entre :

∗ Les entreprises : elles sont dans l'obligation d'investir régulièrement pour financer leur développement économique. Face à ce besoin, elles ne disposent pas nécessairement des ressources internes suffisantes. Elles sont donc amenées à rechercher d'autres sources de financement notamment les emprunts.

Les emprunts peuvent être obtenus auprès d'une banque ou un groupe de banques "le syndicat", ou d'un établissement spécialisé (crédit-bail). Ils peuvent également être placés par le biais d'émission d'obligations ou de titres à court et moyen terme : billet de trésorerie (pour les entreprises non financières), certificats de dépôt (banques), bon à moyen terme négociable.

* L'Etat : Le solde budgétaire de l'État permet de déterminer sa situation financière. Si les recettes de l'État sont supérieures à ses dépenses, le budget est donc en excédent. Par contre, si les dépenses sont supérieures aux recettes, le solde budgétaire est déficitaire. L'État doit donc trouver des ressources pour financer son activité.

Dans cette mesure, les administrations publiques (Étas et collectivités territoriales) ne peuvent que recourir à l'emprunt vue qu'elles ne peuvent pas se financer par l'émission d'actions.

Les investisseurs recherchent les titres émis par l'Etat car ils sont connus à faible risque, d'ailleurs les chances de faillite du gouvernement sont peu probables. Ces titres entrent en grand nombre dans les portefeuilles des OPCVM obligataires, les fonds de pension et les compagnies d'assurance.

* Les collectivités locales : le financement des collectivités locales combine le recours aux fonds publics (impôts) et à l'emprunt. A côté de l'emprunt bancaire, les collectivités locales émettent également des titres obligataires qui offrent une sécurité analogue à celle des émissions de l'Etat.

* Les agences de notation : une agence de notation est une entreprise commerciale qui attribue une note aux émetteurs des titres négociés sur le marché. Cette note évalue la solvabilité de l'émetteur, c'est-à-dire sa capacité à rembourser les emprunts émis. La note est attribuée à la demande de l'émetteur lui-même, ou à l'initiative de l'agence.

  La note obtenue conditionne la capacité d'un émetteur à trouver des investisseurs prêts à acheter leurs titres, et le taux de rémunération qu'il va devoir offrir pour attirer les investisseurs. La note la plus élevée est généralement attribuée aux Etats des pays développés.

b) Les intermédiaires :

∗ Les investisseurs institutionnels : ce sont des organismes qui détiennent du fait de leur activité une épargne abondante. Cette catégorie d'investisseurs est constituée : des compagnies d'assurance, des caisses de retraite, des caisses de dépôt et aussi des OPCVM, qui placent une partie de leurs ressources en valeurs mobilières, afin de faire face aux engagements qu'ils ont pris vis-à-vis de leur clientèle.

∗ Les banques : elles mènent une mission d'intermédiaire entre les agents à besoin de financement et ceux à excédent de financement.

∗ Les intermédiaires boursiers : Se sont des sociétés d'intermédiation, personnes physiques ou morales qui interviennent sur les marchés boursiers et qui assurent toutes les opérations à effectuer sur une bourse de valeurs mobilières. Elles assurent l'émission des titres (actions, obligations et valeurs assimilés), la négociation (achat, vente de titres), le conseil et la gestion de portefeuille. On peut citer :

  ◇ *Firmes de courtiers (brokers)* : ce sont des intervenants sur les marchés organisés, le broker est un intermédiaire financier chargé de mettre en relation les prêteurs et les emprunteurs. Pour les titres il agit sur le marché primaire en garantissant la bonne fin d'une émission, mais également sur le marché secondaire en continuant de mettre en contact les différents intervenants.

  ◇ *Teneurs de marché(Market Maker)* : (dealers) ce sont des entreprises, généralement une banque d'investissement, ou une personne qui se charge de transmettre en continu des prix à l'achat et à la vente soit uniquement à sa clientèle, soit, à l'ensemble du marché, y compris donc à ses concurrents. On dit aussi qu'il « cote ».

  ◇ *Membres d'une Bourse* : ce sont des spécialistes. La dénomination dépend du lieu et du type de concurrence (monopole, etc.)...

1.4 L'équilibre économique général

Cette section est consacré à l'étude du fonctionnement d'un marché financier. Il s'agit d'une toute première approche où nous ferons abstraction de l'incertitude qui caractérise l'environnement des agents économiques. Nous utiliserons ce que Laffont [22] appelle le "modèle microéconomique de base" où consommateurs et producteurs, échangent et produisent des biens économiques. Les cinq premiers chapiters de [24] constituent une excellente introduction à ce modèle.

L'analyse microéconomique standard repose sur un modèle de référence dont nous fournissons ici, une présentation très succinte. Dans ce modèle L'économie comprend :
- L biens économiques repérés par l'index $l = 1, \ldots, L$,
- J unités de production repérées par l'index $j = 1, \ldots, J$, et
- I individus repérés par l'index $i = 1, \ldots, I$.

Les biens économiques sont échangés sur des marchés. L'ensemble des prix auxquels ces biens sont échangés est identifié à un vecteur colonne dont la $l$ème composante est p_l et qui sera noté $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l, \ldots, p_L)'$. Comme l'écriture des vecteurs colonnes prend de place, nous le définissons par son (transposé)$'$.

Chaque unité de production, ou "producteur", est caractérisée par trois éléments :

1. une technique de production définie par un ensemble de production $\mathcal{Y}^j \subset \mathbb{R}^L$ lui même défini par l'inégalité :

$$f^j(\mathrm{y}^j) \leq 0$$

   où $\mathrm{y}^j = (y_1^j, y_2^j, \ldots, y_l^j, \ldots, y_L^j)'$ est un vecteur colonne dont la $l$ème composante est y_l^j. L'égalité $f^j(\mathrm{y}^j) = 0$ définit les combinaisons productives efficaces, situées à la frontière de l'ensemble $\mathcal{Y}^j$ et la fonction $f^j(\cdot)$ est la fonction de production. Nous convenons de comptabiliser positivement les *outputs* et négativement les *inputs*. Autrement dit, y_l^j sera positif s'il s'agit d'un *output* et négatif s'il s'agit d'un *input* ;

2. une règle de gestion : gérer une entreprise veut dire choisir une technique de production, c'est-à-dire acheter les *inputs* nécessaires, mettre en œuvre le processus de production et vendre les *outputs*. Le profit du producteur, noté Π^j, n'est autre que le produit scalaire $\mathrm{p}'\mathrm{y}^j = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l^j$. Dans le cas où le producteur est un *price-taker*, il choisira parmi les combinaisons efficaces $\mathrm{y}^j \in Y^j$, celle -notée y^{j*}- qui maximise son profit. C'est la règle de gestion qui s'impose

dans la mesure où la vente du vecteur $(\mathrm{y}^{j*} - \mathrm{y}^{j})$ serait profitable si y^j était une production efficace différente de y^{j*} ;

3. une règle de répartition des bénifices (ou des pertes) : nous nous limitons ici à considérer le cas où les entreprises font l'objet d'une appropriation privée. Nous désignerons par θ^{ij} la fraction de l'entreprise j détenue par l'individu i. Bien entendu, la somme des parts de l'entreprise j qui sont détenues par ses "actionnaires" doit être égale à l'unité ($\sum_{i=1}^{I} \theta^{ij} = 1$ pour $j = 1, \ldots, J$).

Chaque individu -ou consommateur- exprime des préférences sur des paniers de consommation assimilables à des vecteurs colonnes $\mathrm{c}^i = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_l^i, \ldots, c_L^i)'$ dont la $l$ème composante c_l^i représente la consommation du bien l par l'individu i. Les paniers de consommation appartiennent à l'orthant positif $\mathbb{R}_+^L$. Les préférences de l'individu i sont définies par une relation binaire $\preceq^i$ qui est un préordre complet et continu. L'expression $c \preceq^i \gamma$ veut dire que le panier γ est préféré au sens large (ou, si l'on préfère, est strictement préféré ou jugé équivalent) au panier c. Dire que $\preceq^i$ est un préordre sur X^i veut dire que la relation est réflexive et transitive. Le préordre est complet si et seulement si quel que soit le couple de paniers de consommation considérés, ou bien le premier est préféré au second, ou bien le second l'est au premier. Un préordre total est continu si pour toute consommation ($\mathrm{c}^i = \{c_l^i\}_{l=1 \grave{a} L}$) les ensembles $\{\mathrm{y}=\{\mathrm{y}_l\}_{l=1 \grave{a} L} : \mathrm{y} \preceq c^i\}$ et $\{\mathrm{x}=\{\mathrm{x}_l\}_{l=1 \grave{a} L} : c^i \preceq \mathrm{x}\}$ sont fermés. Chaque préordre $\preceq^i$ peut, dans ces conditions, être représenté par une fonction d'utilité $u^i(\cdot)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui est continue et définie, à une transformation strictement croissante près, sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^L$. Il est alors équivalent de dire que l'individu i préfère un panier à un autre ou de dire que l'utilité du premier panier est supérieure à celle du second. Formellement nous avons l'équivalence suivante :

$$\forall c \in \mathbb{R}_+^L, \forall \gamma \in \mathbb{R}_+^L, c \preceq^i \gamma \Leftrightarrow u^i(c) \leq u^i(\gamma).$$

Comme cet individu est rationnel, il choisira celui des paniers de consommation c^i qui maximise sa satisfaction $u^i(\mathrm{c}^i)$.

Il est, néanmoins, interdit de se mettre en faillite à l'occasion du choix des paniers de sorte que chaque individu ne retiendra que des consommations appartenant à son ensemble budgétaire $\mathcal{B}^i$ c'est-à-dire des consommations qu'il peut se procurer en utilisant exclusivement ses ressources initiales repérées par le vecteur colonne $\mathrm{w}^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots, w_l^i, \ldots, w_L^i)'$ et ses "droits au profit" $(\theta^{ij}\Pi^j, j = 1, \ldots, J)$. Formellement l'ensemble budgétaire $\mathcal{B}^i$ de l'individu i est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{B}^i(\mathrm{p}) = \{\mathrm{c}^i : \mathrm{c}^i \in \mathbb{R}_+^L \;\; et \;\; \mathrm{p}'\mathrm{c}^i \leq \mathrm{p}'\mathrm{w}^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij}\Pi^j.\}$$

formule où $\mathrm{p}'\mathrm{w}^i$ désigne la valeur de la dotation initiale et $\sum_{j=1}^{J} \theta^{ij}\Pi^j$ celle des droits aux profits.

Une économie de propriété privée (ε) est donc définie par les resources initiales des consommateurs $\{w_l^i,\; i = 1, I\;;\; l = 1, L\}$ leurs préférences c'est-à-dire leurs fonctions d'utilité $\{u^i(\cdot),\; i = 1, I\}$, les parts de sociétés qu'ils détiennent $(\theta^{ij}, i = 1, I; j = 1, J)$ et les ensembles de production $\mathcal{Y}^i \subset \mathbb{R}^L$ (ou les fonctions de production associées $\{f^j(\cdot),\; j = 1, J\}$).

Si les agents économiques, qu'ils soient producteurs ou consommateurs, ont un *comportement concurrentiel*, c'est-à-dire si chacun considère les prix comme donnés, on peut définir un équilibre de l'économie, un optimum de Pareto et montrer l'équivalence, sous certaines hypothèses, entre ces deux notions que nous allons maintenant définir avec précision. Un équilibre concurrentiel de l'économie (ε) est défini par la donnée

- de J programmes de production $\mathrm{y}^{*j} = (y_1^{*j}, y_2^{*j}, \ldots, y_l^{*j}, \ldots, y_L^{*j})'$,
- de I paniers de consommation $\mathrm{c}^{*i} = (c_1^{*i}, c_2^{*i}, \ldots, c_l^{*i}, \ldots, c_L^{*i})'$ et
- d'un système de prix $\mathrm{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_l^*, \ldots, p_L^*)'$ tels que :
  - chaque vecteur y^{*j} maximise le profit Π^j dans l'ensemble de production $\mathcal{Y}^j$, ou, si l'on préfère :
  $$\mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{y}^{*j} = \Pi^{*j} = \max_{y^j \in \mathcal{Y}^j} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{y}^j$$
  Si l'on utilise la fonction de production, on écrira le programme sous la forme suivante :
  $$\mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{y}^{*j} = \Pi^{*j} = \max\; \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{y}^j \;\; s.c. \;\; f^j(y^j) = 0$$
  - chaque vecteur c^{*i} maximise l'utilité du consommateur sur l'ensemble budgétaire

$\mathcal{B}^i(\mathrm{p}^*)$ soit :

$$u^i(\mathrm{c}^{*i}) = \max_{\mathrm{c}^i \in \mathcal{B}^i(p^*)} u^i(\mathrm{c}^i)$$

Ou, de façon plus explicite :

$$c^i \in \mathbb{R}_+^L \; et \; \mathrm{p}^{*\prime} c^i \leq \mathrm{p}^{*\prime} w^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_j^j \Pi^{*j}$$

– l'offre est égale à la demande sur chaque marché : pour le bien l nous avons l'égalité entre, d'une part, le total des I consommations et, d'autre part, la somme du total des I dotations et du total des J productions correspondantes :

$$\sum_{i=1}^{I} c_l^{*j} = \sum_{i=1}^{I} w_l^i + \sum_{j=1}^{J} y_l^{*j} \quad (l = 1, \ldots, L)$$

Nous retiendrons, pour établir l'existence d'un équilibre de propriété privée, les trois hypotèses suivantes :

(H1) Chaque fonction d'utilité $u^i(\cdot)$ ne dépond que de c^i. Elle est continue, strictement croissante et strictement concave.

(H2) La dotation initiale en bien l de l'agent i est strictement positive ($\mathrm{w}^i > 0$ pour tout i).

(H3) Chaque ensemble de production Y^j est fermé et convexe ; en outre, il y a libre disponibilité des biens -c'est-à-dire que chaque ensemble Y^j contient le cône $\{-\mathbb{R}_+^L\}$- et irréversibilité de la production, -c'est-à-dire que l'on a l'implication suivante : $\{\mathrm{y}^j \in \mathrm{Y}^j$pour tout j et $y^1 + y^2 + \ldots + y^J = 0\} \Rightarrow \mathrm{y}^j = 0$ pour tout j-

Théorème 1.1 ***(existence)**[5]. Sous les hypotèses (H1),(H2) et (H3) il existe au moins un système de prix d'équilibre.*

Remarque : soit λ un nombre rèel strictement positif. Si $((\{\mathrm{c}^{*i}\}_{i=1 à I}),(\{\mathrm{y}^{*j}\}_{j=1 à J}), \mathrm{p}^*)$ est un équlibre alors $((\{\mathrm{c}^{*i}\}_{i=1 à I}),(\{\mathrm{y}^{*j}\}_{j=1 à J}), \lambda \mathrm{p}^*)$ l'est aussi. Les prix sont donc définis à un facteur d'échelle positif. A partir de maintenant, nous supposerons que les prix appartiennent au simplexe unité $\Delta^{L-1} = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}_+^L$ et $\sum_{l=1}^{L} p_l = 1\}$.

<u>DÉMONSTRATION :</u> La démonstration de ce théoème en nous limitant à considérer le cas d'une économie d'échange. Notre présentation suit celle de Dana et Jeanblanc-Picqué [9]. On trouvera une démonstration complète dans Ekeland [14], chapitre 4 ou dans Derbeu [11],chapitre 5.

Comme le font remarquer dans [9](p.197 et suiv.) les démonstrations d'existence d'un équilibre général peuvent être classées en trois groupes :

- les démonstrations fondées sur l'utilisation d'un théorème de point fixe ou sur des arguments analogues : elles ont été établies dans les années cinquante, notamment par Derbeu [11] ;
- les algorithmes de calcul de point fixe (Scarf [30]) ;
- les travaux de topologie différentielle (travaux de Derbeu, Dierker, Balasko, Mas-Colell et Smale).

Nous présentons ici la méthode de Derbeu [11] telle qu'elle a été simplifiée par Dana et Jeanblanc-Picqué [9](p.198 et suiv). Nous nous limitons à l'étude de l'existence de l'équilibre concurrentiel d'une économie d'échange qui sera défini par la donnée :

- des ressources initiales des consommateurs $\{w_l^i,\ i = 1, I;\ l = 1, L\}$;
- de I paniers de consommation $\mathrm{c}^{*i} = (c_1^{*i}, c_2^{*i}, \ldots, c_l^{*i}, \ldots, c_L^{*i})'$ qui appartiennent à $\mathbb{R}_+^L$ et
- d'un système de prix $\mathrm{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_l^*, \ldots, p_L^*)'$ tels que :
  - chaque vecteur c^{*i} maximise l'utilité du consommateur sur l'ensemble budgétaire $\mathcal{B}^i$ soit :
  $$u^i(\mathrm{c}^{*i}) = \max_{\mathrm{c}^i \in \mathcal{B}^i(\mathrm{p}^*)} u^i(c^i)$$
  avec :
  $$\mathcal{B}^i(\mathrm{p}^*) = \{\mathrm{c}^i : \mathrm{c}^i \in \mathbb{R}_+^L\ et\ \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{c}^i \leq \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{w}^i\}$$
  - l'offre est égale à la demande sur chaque marché : pour le bein l nous avons l'égalité entre, d'une part, le total des I consommations et, d'autre part, le total des I dotations correspondantes.

$$\sum_{i=1}^{I} c_l^{*j} = \sum_{i=1}^{I} w_l^i \quad (l = 1, \ldots, L)$$

Nous n'aurons besoin, pour établir l'existence d'un équilibre, que des deux premières hypothèses posées dans ce chapitre, soit :

(H1) Chaque fonction d'utilité $u^i(\cdot)$ ne dépend que de c^i. Elle est croissante, continue et srictement concave.

(H2) La dotation initiale en bien l de l'agent i est strictement positive ($w_l^i > 0$).

La démonstration comprend quatre étapes :

1. La première étape consiste à observer que l'ensemble budgétaire $\mathcal{B}^i(\mathrm{p})$ est un ensemble convexe et compact. Comme chaque agent maximise sa fonction d'utilité qui est par hypothèse, croissante, continue et strictement concave, il choisit un panier de biens unique noté $D^i(\mathrm{p}) = \{\mathcal{D}_l^i(\mathrm{p})\}_{l=1 à L}$. Comme les fonctions d'utilité sont croissantes, la contrainte budgétaire est saturée quand le maximum de satisfaction est atteint de sorte que nous pouvons écrire :

$$\mathrm{p}'\mathcal{D}^i(\mathrm{p}) = \mathrm{p}'\mathrm{w}^i \ \ pour \ \ tout \ \ i$$

   Nous appellerons demande excédentaire agrégée le vecteur z à L composantes défini par l'égalité suivante :

$$\mathrm{z}(\mathrm{p}) = (z_1(\mathrm{p}), \ldots, z_l(\mathrm{p}), \ldots, z_L(\mathrm{p}))\prime \quad z_l(\mathrm{p}) = \sum_{i=1}^{I} p_l(\mathcal{D}_l^i(\mathrm{p}) - w_l^i)$$

   La démonstration de ces premiers résultats est facile et sans doute connue de la plupart des lecteurs. On trouvera le détail des démonstrations dans Ekeland ([14] pp. 129-130).

2. En deuxième lieu, la demande excédentaire agrégée, qui est une application de $\mathbb{R}_{++}^L$ dans $\mathbb{R}^L$ possède les propriétés suivantes :

   (i) c'est une fonction homogène et de degré zéro c'est à dire que, quel que soit le vecteur de prix p strictement positif, et quel que soit le scalaire α strictement positif, nous avons :

$$\mathrm{z}(\alpha\mathrm{p}) = \alpha\mathrm{z}(\mathrm{p})$$

   Nous nous limiterons donc à considérer un vecteur de prix dont la somme des composantes est normalisée à l'unité ; autrement dit le vecteur p appartiendra au simplexe unité $\Delta^{L-1} = (p \in \mathbb{R}_+^L \;\; et \;\; \sum_{l=1}^{L} p_l = 1)$.

(ii) elle est continue sur $\mathbb{R}_{++}^L$;

(iii) elle satisfait à la loi de Walras, c'est-à-dire que nous avons pour tout système de prix p strictement positif :

$$\mathrm{p}'\mathrm{z}(\mathrm{p}) = 0$$

(iv) pour toute suite de vecteurs de prix $\{\mathrm{p}_n\}$ convergeant, quand n tend vers $+\infty$, vers un vecteur p dont une coordonnée est nulle ($p_m = 0$), la suite $\|\mathrm{z}(\mathrm{p}_n)\|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$;

(v) z(p) est bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur w, strictement positif, tel que l'on ait :

$$\mathrm{z}(\mathrm{p}) \geq -\mathrm{w} \;\; pour \;\; tout \;\; \mathrm{p} \in \mathbb{R}_{++}^L$$

L'établissement des propriétés de la demande excédentaire est aisé et connu de la plupart des lecteurs. On trouvera le détail des démonstrations des cinq propriétés dans Ekland ([14] pp. 132-138).

3. La troisième étape consiste à établir le lemme de Gale-Nikaido-Derbeu qui s'énonce ainsi : soit D un sous-ensemble convexe et fermé du simplexe unité Δ^{L-1} et $\mathrm{f}(\cdot)$ une fonction continue de D dans $\mathbb{R}^L$ telle que le produit scalaire p′f(p) s'annule pour tout vecteur p appartenant à Δ^{L-1} alors, il existe un élément p^* appartenant à D tel que le produit scalaire $\mathrm{p}'\mathrm{f}(\mathrm{p}^*)$ est négatif ou nul pour tout vecteur p appartenant à Δ^{L-1} ; de façon plus concise nous écrivons :

$$\begin{aligned} \forall D \;\; &\in \Delta^{L-1}, \forall \mathrm{f}(\cdot) \in \mathrm{C}[D \to \mathbb{R}^L], \forall \mathrm{p} \in \Delta^{L-1}, \mathrm{p}'\mathrm{f}(\mathrm{p}) = 0, \\ &\Rightarrow \exists \mathrm{p}^* \in \Delta^{L-1} : \forall \mathrm{p} \in \Delta^{L-1}, \mathrm{p}'\mathrm{f}(\mathrm{p}^*) \leq 0 \end{aligned}$$

La démonstration du lemme de Gale-Nikaido-Derbeu est fondée sur le théorème de Kakutani qui s'énonce de la façon suivante : soit D un sous-ensemble convexe compact et non vide de $\mathbb{R}^L$ et F une correspondance de D dans D à valeurs convexes, non vides et de graphe fermé. Alors F a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe x appartenant à D tel que x appartienne à $\mathrm{F}(x)$. Nous allons d'abord considérer la correspondance F : $f(D) \to P(D)$ définie par la relation suivante :

$$\mathrm{F(z)} = \{\mathrm{p} \in D : \mathrm{p'z} = Max\{\mathrm{q'z}|\mathrm{q} \in D\}\}$$

puis la correspondance de l'ensemble $D \times f(D)$ dans lui-même, définie de la façon suivante :

$$\varphi : (\mathrm{p}, \mathrm{z}) \rightsquigarrow (\mathrm{F(z)}, f(\mathrm{p}))$$

Cette correspondance φ est non vide, à valeurs convexes et de graphe fermé. D'après le thérème de Kakutani, il existe $(\mathrm{p}^*, \mathrm{z}^*)$ tel que $\mathrm{p}^* \in \mathrm{F}(\mathrm{z}^*)$ et que $\mathrm{z}^* \in f(\mathrm{p}^*)$ nous avons donc :

$$\mathrm{p'f(p^*)} = \mathrm{p'z^*} \leq \mathrm{p^{*\prime}z^*} = \mathrm{p^{*\prime}f(p^*)} = 0 \;\; pour \;\; tout \;\; \mathrm{p} \in D$$

4. A la dernière étape, on démontre le théorème propement dit qui s'énonce alors sous la forme suivante : sous les hypothèses (H1) et (H2) il existe un équilibre. Si le lemme de Gale-Nikaido-Derbeu pouvait s'appliquer au simplexe Δ^{L-1} et à la fonction z cette dernière étape serait immédiate.
   Malheureusement la demande excédentaire agrégée z n'est pas continue au bord du simplexe de sorte qu'il faut considérer une suite d'ensemble qui sont contenus dans le simplexe et auxquels le lemme s'appliquera. Il suffira alors d'obtenir le résultat désiré par passage à la limite. Considérons donc la suite de sous-ensemble $D_n = \{\mathrm{p} \in \Delta^{L-1}|p_l \geq 1/n, l = \{1, \ldots, L\}\}$; la restriction de la demande agrégée au sous-ensemble D_n est continue et on peut lui appliquer le lemme de Gale-Nikaido-Derbeu ; d'après ce lemme, il existe donc un élément p_n^* de D_n tel que

$$\mathrm{p'z(p_n^*)} \leq 0 \;\; pour \;\; tout \;\; \mathrm{p} \in D_n$$

   Nous voulons désormais établir que le vecteur p^* est strictement positif.
   Pour ce faire, nous allons d'abord observer que la suite $\mathrm{z(p_n^*)}$ est bornée inférieurement par -w (se reporter à la cinquième propriète de la demande agrégée). Par ailleurs, l'inégalité précédente nous permet d'écrire, en l'appliquant au vecteur prix de composantes égales à $1/n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'\mathrm{z}(\mathrm{p}_n^*) &= (1/n)(\textstyle\sum_{l=1}^{L} z_k(\mathrm{p}_n^*)) \leq 0 \\ &\Rightarrow z_1(\mathrm{p}_n^*) \leq -(\textstyle\sum_{l=2}^{L} z_k(\mathrm{p}_n^*)) \leq \textstyle\sum_{l=2}^{L} w_k \end{aligned}$$

de sorte que la suite $\{z_1(\mathrm{p}_n^*)\}$ est bornée supérieurement. On peut utiliser le même raisonnement pour montrer que les suites $\{z_k(\mathrm{p}_n^*)\}_{k=2\grave{a}L}$ sont, comme la précédente bornées supérieurement. On peut, dès lors, affirmer que le vecteur p^* est strictement positif, car, s'il ne l'était pas, la quatrième propriété de la demande agrégée serait violée. La suite $\{\mathrm{p}_n^*\}$ admet donc une valeur d'adhérence p^* strictement positive. Comme la suite des ensembles D_n est croissante, pour tout $\mathrm{p} \in D_n$ l'inégalité

$$\mathrm{p}'\mathrm{z}(\mathrm{p}_n^*) \leq 0$$

prévaut pour tout n, de sorte que par passage à la limite, nous avons :

$$\mathrm{p}'\mathrm{z}(\mathrm{p}^*) \leq 0 \;\; \textit{pour tout} \;\; \mathrm{p} \in \Delta^{L-1}$$

et, finalement nous obtenons l'inégalité vectorielle $\mathrm{z}(\mathrm{p}^*) \leq 0$. Comme $\mathrm{p}^{*\prime}(\mathrm{p}^*) = 0$, nous avons bien $\mathrm{z}(\mathrm{p}^*) = 0.\square$

Le théorème 1.1 nous permet de décrire une économie de propriété privée mais il ne nous permet pas d'en tirer de conclusion quant à l'intétrêt de cette forme d'organisation. Pour pouvoir le faire, il nous faut établir l'équivalence entre équilibre de propriété privée et optimum de Pareto.

Rappelons, à ce propos, qu'une allocation est constituée de deux groupes de vecteurs : l'ensemble des paniers de consommation des individus (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\mathrm{c}^i, i = 1, \ldots, I$) et l'ensemble des plans de production (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\mathrm{y}^j, j = 1, \ldots, J$). Une allocation est réalisable si et seulement si :

- $\mathrm{c}^i \in \mathbb{R}_+^L$ pour tout i (les plans de consommation sont admissibles) ;
- $\mathrm{y}^j \in \mathcal{Y}^j$ pour tout j (les programmes de production sont réalisables) ;
- pour chaque bien l le total des consommations est inférieur ou au plus égal à la

somme du total des dotations et du total des productions correspondantes, soit :

$$\sum_{i=1}^{I} c_l^{*j} \leq \sum_{i=1}^{I} w_l^i + \sum_{j=1}^{j} y_l^{*j} \quad (l = 1, \ldots, L)$$

Un optimum de Pareto est une allocation réalisable $(c^{*1}, c^{*2}, \ldots, c^{*I}; y^{*1}, y^{*2}, \ldots, y^{*J})$ telle qu'il n'existe pas d'autre allocation réalisable qui permette d'améliorer (au sens large) l'utilité de chaque consommateur, l'amélioration étant stricte pour au moins l'un d'entre eux. Formellement

$$\forall i \in [1, I] \cap \mathbb{N}, u^i(\mathrm{c}^i) \leq u^i(\mathrm{c}^{*i}) \text{ et } \exists\, i_0 \in [1, I] \cap \mathbb{N} : u^{i_0}(c^{i_0}) < (c^{*i_0})$$

Une façon commode d'énoncer l'équivalence entre équilibre de propriété privée et optimum de Pareto. Nous retenons ici présentation de Laffont [22].

Théorème 1.2 *[5] Si chaque fonction d'utilité u^i est strictement croissante en chacun de ses arguments un équilibre de propriété privée est un optimum de Pareto.*

<u>DÉMONSTRATION :</u> La démonstration de ce théorème en nous limitant au cas d'une économie d'échange. Notre présentation suit celle de Varian[31]. On trouvera une démonstration complète dans Derbeu [11], chapitre 6.
Nons considérons un équilibre de propriété privé $(\mathrm{c}^{*i}, \mathrm{w}^i, \mathrm{p}^*)$ et supposons,*ab absurdo*, que cet équilibre ne soit pas Pareto-optimal. Il existrait, dans ces conditions, une autre allocation (x^{*i}) réalisable que les agents préfèreraient à (c^{*i}) de sorte que l'on aurait l'inégalité suivante :

$$\mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{x}^{*i} > \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{c}^{*i} \;\; \textit{pour } i = 1, \ldots, I$$

et en sommant membre à membre les I équations précédentes :

$$\sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{x}^{*i} > \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{c}^{*i} \;\; \textit{pour } i = 1, \ldots, I \tag{1.1}$$

Or nous avons, puisque (x^{*i}) est réalisable, l'égalité suivante

$$\sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{x}^{*i} \leq \sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{w}^{*i} \;\; \textit{pour } i = 1, \ldots, I \tag{1.2}$$

Mais, puisque $(\mathrm{c}^{*i}, \mathrm{w}^i, \mathrm{p}^*)$ est un équilibre concurrentiel nous avons aussi l'égalité ci-dessous :

$$\sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{c}^{*i} = \sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{w}^{*i}$$

d'où en couplant cette égalité et l'inégalité (1.2)

$$\sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{x}^{*i} \leq \sum_{i=1}^{I} \mathrm{p}^{*\prime}\mathrm{c}^{*i}$$

qui contredit l'inégalité (1.1). □

Le théorème 1.2. énonce que les prix d'équilibre sont des signaux qui permettent de coordonner, de façon satisfaisante, les décisions individuelles. Chaque agent économique résoud son programme de maximisation en considérant les prix comme des données et en choisissant un panier de consommation (ou un programme de production) tel que ses taux marginaux de substitution (de transformation) soient égaux aux rapports de prix. A l'équilibre, tous les taux marginaux sont donc égaux entre eux. Les égalités correspondantes, couplées aux équations définissant les équilibres des marchés, caractérisent, en "univers convexe" les optimums de Pareto. En univers non-convexe, l'intuition du rôle joué par les prix est moins naturelle, même si le résultat demeure valide. Comme l'indique Laffont [22], il faut alors raisonner par l'absurde : si l'équilibre concurentiel est dominé par une allocation réalisable, la valeur d'équilibre du panier de biens du consommateur i dans cette nouvelle allocation est supérieure à la valeur de ses ressources (sinon il l'aurait acheté). Cela est vrai pour chaque consommateur ; il est donc nécessaire d'avoir plus de biens dans cette nouvelle allocation qu'il n'est possible d'en avoir dans une allocation réalisable.

L'énoncé de la "réciproque" du théorème précédent est plus compliqué parce que les hypothèses nécessaires à l'existence de l'équilibre concurrentiel sont beaucoup plus fortes que celles nécessaires à l'existence d'un optimum de Pareto. On peut retenir le suivant :

Théorème 1.3 *[5] Si les hypothèses (H1) à (H3) sont satisfaites, et étant donnée une allocation Pareto-optimale* $(c^{*1}, c^{*2}, \ldots, c^{*I}; y^{*1}, y^{*2}, \ldots, y^{*j})$*, alors il existe un système* *de prix strictement positifs* ($p^* \in \mathbb{R}^L_+$) *tel que :*

1. c^{*i} *maximise l'utilité du consommmateur sur l'ensemble budgétaire* $\mathcal{B}^i(p^*)$ ($i = 1, \ldots, I$).
2. y^{*j} *maximise le profit* Π^j *dans l'ensemble de production* $\mathcal{Y}^j$ ($j = 1, \ldots, J$).

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce théorème en nous limitant au cas d'une économie d'échange. Notre présentation suit celle de Dana et Jeanblanc-Picqué [9]. On trouvera une démonstration complète dans Derbeu [11], chapitre 6.□
En définitive, l'analyse microéconomique standard nous permet d'affirmer, sous des hypothèses, il est vrai, assez restrictives que :

(a) l'équilibre concurrentiel de propriété privée est économiquement efficace puisque c'est un optimum de Pareto (*cf.* théorème 1.2.). Il peut, néanmoins, ne pas être socialement désirable s'il correspond à une distribution trop inégalitaire des revenus.

(b) quel que soit l'optimum de Pareto que l'on cherche à atteindre − et l'on retiendra alors l'optimum de Pareto "socialement préféré" − il est possible de le "décentraliser" sous la forme d'un équilibre concurrentiel de propriété privée (*cf.* théorème 1.3.).

Ces deux théorèmes constituent la justification d'un mode d'organisation −l'équilibre concurrentiel de propriété privée− et d'une règle de gestion −la rehcerche du maximum du profit−, qui détermine le choix des investissements.
Pour être pleinement convaincant l'argument précédent doit être complété par une démonstration de l'unicité et de la stabilité d'un équilibre concurrentiel de proporiété privée. Il faut alors poser des hyothèses supplémentaires. On peut établir l'unicité, par exemple, quand les conditions hicksiennes de stabilité parfaite sont réunies (hypothèse de substituabilité brute). C'est ce que nous supposerons ici, pour simplifier au maximum ce rappel du modèle microéconomique standard. En revanche, l'étude de la stabilité de l'équilibre ne sera pas entreprise ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Henderson et Quandt [19]. En définitive, nous retiendrons l'hypothŝe suivante, où la demande globale de bien l, notée $\mathcal{D}_l(p)$, est la somme des demandes élémentaires émanant des consommateurs et des producteurs :

(H4) (**Substituabilité brute**) Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial p_h}(p)$ de chaque fonction de demande globale $\mathcal{D}_l(p)$ du bien l sont strictement positives pour $h \neq l$.

Théorème 1.4 *(**unicité**)[5] Sous les hypothèses (H1) à (H4) il y a existence et unicité du système de prix d'équilibre.*

<u>DÉMONSTRATION :</u> Une démonstration simplifiée de ce théorème en nous limitant à considérer le cas d'une économie d'échange. Notre présentation suit celle de Malinvaud [24]. On trouvera une démonstration plus générale dans Derbeu [11].
Nous nous référons ici à la présentation de Malinvaud [24]. La démonstration est effectuée *ab absurdo*. Supposons qu'il existe deux vecteurs de prix d'équilibre p^* et p^{**} non colinéaires. Définissons l'entier m comme correspondant au minimum des ratios $(p_l^*/p_l^{**})_{l=1,\ldots,L}$, soit :

$$m = \underset{l=1,\ldots,L}{\text{Argmin}} \left\{ \frac{p_l^*}{p_l^{**}} \right\}$$

Nous avons alors les inégalités

$$p_l^* \geq \frac{p_m^*}{p_m^{**}} p_l^{**} \quad \textit{pour tout } l$$

Considérons le vecteur q^* défini par les égalités suivantes :

$$q_l^* = \frac{p_m^*}{p_m^{**}} p_l^{**} \quad \textit{pour tout } l$$

L'hypothèse de substituabilité brute impose que la demande agrégée du bien m soit plus élevée avec le système de prix q^*, qu'elle ne l'est avec le système de prix p^* ce qui est contradictoire avec le fait qu'elle serait égale à $w_l = \sum_{i=1}^{I} w_l^i$.□

Pour bien saisir la signification de cette démonstration, on peut considérer une déformation continue du vecteur de prix p^* telle qu'aucun des prix ne croisse jamais, que le prix du bien m demeure constant et que l'état final corresponde au vecteur q^*. La demande de bien m ne décroîtra jamais ; au contraire, elle devra croître à certains moments quisqu'au moins un des prix des biens autres que m doit décroître.

Remarque 1.1 *Pour conclure, nous pouvons dire que Chaque structure de marché diffère de l'autre selon les avantages et les inconvénients qu'elle peut tirer de ces di-*

mensions. C'est pour cela on ne peut pas parler d'une structure optimale d'un marché, mais on peut parler d'une structure plus avantageuse que l'autre.
Donc la performance d'un marché financier est liée à sa capacité de définir des dimensions qui favorisent son équilibre entre l'offre et la demande et réalisent la liquidité du marché tout en tenant compte des comportements et des désirs des différents intervenants.

Chapitre 2

Le Marché Financier Complet

2.1 Actions et Marché Monétaire

Dans notre model, nous traitons un marché financier composé de $N+1$ actifs financiers. L'un de ces actifs est instantanément sans risque, et sera appelé *marché monétaire*. Les N actifs sont risqués et seront appelés *actions* (bien que dans les applications de ce modèle, ils sont souvent des matières premières ou de monnaies, plutôt que des actions ordinaires). Ces actifs financiers ont des prix continus qui évoluent continuellement dans le temps et sont entrainés par un mouvement Brownien D-dimensionnel : $W(t) = (W^{(1)}(t), \ldots, W^{(D)}(t))', \quad 0 \leq t \leq T$. En particulier $W(t)$ est donc un vecteur colonne. Nous supposons que $W(0) = 0$ presque sûrement. Toute activité économique sera supposé se dérouler sur un horizon fini $[0, T]$, où T est une constante positive. Notre hypothèse selon laquelle les prix des actifs ne connaissent pas des sauts imoportants. Cela revient à affirmer qu'il n'y a pas de "surprise" sur le marché : le prix d'une action à l'instant t peut être parfaitement prédit à partir de la connaissance de son prix à des instants strictement inférieurs à t. Nous adoptons cette hypothèse afin de simplifier les mathématiques ; l'hypothèse selon laquelle les prix des actifs sont déterminés par un mouvement Brownien n'est guère plus qu'une façon pratique de formuler cette condition.

Définition 2.1 *Notre marché financier se modélise par un quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}, S)$ *où :*

– Ω *est un ensemble (en général infini non d'enombrable), qui code "toutes les his-*

toires du monde possibles" sur la durée [0,T], muni d'une tribu $\mathcal{F}$,

- *pour tout $t \in$ [0, T],$\mathcal{F}_t$ est une tribu qui contient toutes les informations disponibles à l'instant t; la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est une filtration, c'est-à-dire que, pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,*

$$\mathcal{F}(t) \triangleq \sigma\{\sigma\{W(s)\} \cup \mathcal{N}; \quad 0 \leq s \leq t\}, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{2.1}$$

$\mathcal{N}$: est la classe de tous les évenements de $\mathcal{F}$ que le marché considère comme impossibles,

- *$\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$,appelée probabilité historique, elle est en général inconnue,*

  NB : on supposera toujours les filtrations complètes,
- *S est un processus stochastique mesurable adapté sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\in[0,T]})$, appelé processus de prix, que l'on détaille ci-dessous.*

Remarque 2.1 *Les événements impossibles du marché sont évidemment de probabilité nulle et donc nécessairement,*

$$\forall N \in \mathcal{N}, \ \ \mathbb{P}(N) = 0.$$

Il faut interprèter le $\mathcal{F}(t)$ $\sigma-$algèbre comme *l'information disponible aux investisseurs au moment t*, dans le sens que si $\omega \in \Omega$ est la véritable état de la nature et si $A \in \mathcal{F}(t)$, alors à l'instant t tous les investisseurs savent si $\omega \in A$. Notez que $\mathcal{F}(0)$ ne contient que les ensembles de mesure un et les ensembles de mesure zéro, donc chaque variable aléatoire $\mathcal{F}(0)$-mesurable est presque sûrement constante.

2.1.1 Le mouvement Brownien standard

Définition 2.2 *Le mouvement Brownien est dit **standard** si :*

- *$W(0) = 0$*
- *Pour tout $s \geq 0$ et pour tout $t > s$, $W(t) - W(s)$ à pour loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

2.1.2 Processus des prix

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet,et $\mathcal{F}(t)$ la filtration augmentée et engendrée par $W(\cdot)$.

Nous avons maintenant un *marché monétaire* a un prix $S_0(t)$ à l'instant t, avec $S_0(0) = 1$. Le processus de prix $S_0(\cdot)$ est continu, strictement positif et $\{\mathcal{F}(t)\}$-adapté, avec une variation totale finie sur $[0, T]$. Étant de variation finie, $S_0(\cdot)$ peut être décomposé en parties absolument continues $S_0^{ac}(\cdot)$ et singulièrement continues $S_0^{sc}(\cdot)$. On peut alors définir

$$r(t) \triangleq \frac{\frac{d}{dt} S_0^{ac}(t)}{S_0(t)}, \quad A(t) \triangleq \int_0^t \frac{dS_0^{sc}(u)}{S_0(u)}, \tag{2.2}$$

de sorte que

$$dS_0(t) = S_0(t)[r(t)dt + dA(t)], \qquad \forall t \in [0, T], \tag{2.3}$$

ou encore

$$S_0(t) = \exp\left\{\int_0^t r(u)du + A(t)\right\}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Dans le cas particulier où $S_0(\cdot)$ est lui même absolument continu, afin que $A(\cdot) \equiv 0$, le prix du marché monétaire devient

$$S_0(t) = \exp\left\{\int_0^t r(u)du\right\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Le processus du taux sans risque $r(\cdot)$ est aléatoire et dépendant du temps,mais $r(t)$ est $\mathcal{F}(t)$-mesurable, de sorte que le taux sans risque actuel est connu de tous les investisseurs.

Ensuite, Nous avons aussi N *actions* avec des prix d'actions $S_1(t), \ldots, S_N(t)$ à l'instant t et avec $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ des constantes positives. Les processus $S_1(\cdot), \ldots, S_N(\cdot)$ sont continus, strictement positives, et satisfont aux équations différentielles stochastiques

$$dS_n(t) = S_n(t)\left[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}(t)dW^{(d)}(t)\right], \quad \forall t \in [0, T], n = 1, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Ayant comme solution :

$$S_n(t) = S_n(0)\exp\left\{\int_0^t \sum_{d=1}^D \sigma_{nd}(s)dW^{(d)}(s) + \int_0^t \left[b_n(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^D \sigma_{nd}^2(s)\right]ds + A(t)\right\}, \quad \forall t \in [0,T], \quad n = 1,\ldots,N. \tag{2.6}$$

Le processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ étant un processu càdlàg, i.e. continu à droite et ayant une limite à gauche, $S_{t^-} := \lim_{s\to t, s<t} S_s$.

On désigne par processus de prix actualisés, le processus $\frac{S_n(\cdot)}{S_0(\cdot)}$ défini par

$$\frac{S_n(t)}{S_0(t)} = \left(1, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \ldots, \frac{S_n(t)}{S_0(t)}\right), \quad \forall t \in [0,T],$$

Par conséquant, le processus singulèrement continu $A(\cdot)$ n'entre pas dans les *prix d'action actualisé*

$$\frac{S_n(t)}{S_0(t)} = S_n(0)\exp\left\{\int_0^t \sum_{d=1}^D \sigma_{nd}(s)dW^{(d)}(s) + \int_0^t \left[b_n(s) - r(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^D \sigma_{nd}^2(s)\right]ds\right\}, \quad \forall t \in [0,T], \quad n = 1,\ldots,N. \tag{2.7}$$

Dans certaines applications, les actions ont *des processus de taux de dividende* associés.Nous les modélisons comme des processus à valeur réelle $\delta_n(\cdot)$, où $\delta_n(t)$ est le taux de versement du dividende par Dinar investi dans l'action à l'instant t. En ajoutant le processus de taux de dividende à (2.6) nous pouvons définir les *processus de rendement* (par action) par $Y_n(0) = S_n(0)$ et

$$dY_n(t) = S_n(t)\left[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{d=1}^D \sigma_{nd}(t)dW^{(d)}(t) + \delta_n(t)dt\right], \quad n = 1,\ldots,N, \tag{2.8}$$

ou d'une manière équivalente,

$$Y_n(t) = S_n(t) + \int_0^t S_n(u)\delta_n(u)du, \forall t \in [0,T], \quad n = 1,\ldots,N. \tag{2.9}$$

Nous avons mis $Y_0(t) = S_0(t), 0 \leq t \leq T$.

Nous formalisons cette discussion avec la définition suivante

Définition 2.3 *Un marché financier se compose de :*

1. *un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *;*
2. *une constante positive* T*, appelée échéance ;*
3. *un mouvement Brownien standard D-dimensionnel* $\{W(t), \mathcal{F}(t); 0 \leq t \leq T\}$ *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *, où* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *est l'augmentation (par les ensembles nuls) de la filtration engendrée par* $W(\cdot)$ *;*
4. $r(\cdot)$ *est un processus de taux sans risque progressivement mesurable satisfant* $\int_0^T |r(t)| dt < \infty$ *presque sûrement ;*
5. $b(\cdot)$ *est un processus de taux du rendement moyen N-dimensionnel, progressivement mesurable satisfant* $\int_0^T \|b(t)\| dt < \infty$ *p.s. ;*
6. $\delta(\cdot)$ *est un processus de taux du dividende N-dimensionnel, progressivement mesurable satisfant* $\int_0^T \|\delta(t)\| dt < \infty$ *p.s. ;*
7. $\sigma(\cdot)$ *est un processus de volatilité évalué par une matrice* $(N \times D)$*, progressivement mesurables satisfant* $\sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \int_0^T \sigma_{nd}^2(t) dt < \infty$ *p.s. ;*
8. *un vecteur de cours initiaux des actions positifs et constants* $S(0) = (S_1(0), \ldots, S_N(0))'$ *;*
9. $A(\cdot)$ *est un processus de variation finie progressivement mesurable, et singulièrement continu, dont la variation totale sur [0,t] est noté par* $\check{A}(t)$*.*

Nous référons ce marché financier comme $\mathcal{M} = (r(\cdot), b(\cdot), \delta(\cdot), \sigma(\cdot), S(0), A(\cdot))$*.*

Remarque 2.2 *Les conditions initiales des prix des actifs ne sont pratiquement pas pertinentes. À des fins d'investissement, la caractéristique essentielle d'un actif est son taux de variation de prix et le paiement de dividendes par rapport aux prix actuel, et ces taux relatifs sont saisis par* $r(\cdot), b(\cdot), \sigma(\cdot), \delta(\cdot), A(\cdot)$*. Ainsi, pour simplifier la notation nous avons prix la liberté de déclarer* $S_0(0) = 1$*. Nous aurions également pu fixer les prix initiaux des actions à un, mais ont choisi de ne pas le faire par ce que certaines des formules développées plus tard sont plus informatives lorsque la dépendance de* $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ *est explicitement affiché.*

2.2 Stratégie Financière

Dans cette section, on modélise les décisions du portefeuille pour un investisseur confronté au marché de la Définition 2.3. Passant par une décision en temps discret, qui concerne finalement à notre cas continu.
C'est Black et Scholes (et Merton) qui ont amorcé en 1975 la théorie de valorisation et de couverture d'un actif. Schématiquement la valeur d'un actif financier est donnée par la valeur d'un portefeuille de réplication de cet actif. Dans cette section nous développons cette théorie.

2.2.1 Stratégie de portefeuille

Dans toute la suite, nous ferons les hypothšes suivantes sur le marché.

– le marché est liquide, on peut vendre ou acheter à tout instant ;
– Il n'y a pas de coûts de transaction pour la vente ou l'achat de titres ;
– Les ventes à découvert illimité sont acceptées et les actifs sont indéfiniment fractionnables ;
– À tout instant, il existe des vendeurs et des acheteurs pour tous les titres du marché.

C'est donc un marché parfaitement sans friction.

Définition 2.4 *Une **stratégie de portefeuille** est la donnée des processus* $(\eta_n(t), n = 0, \ldots, N)$ *représentant les quantités investies dans chacun des titres.*
*Une **stratégie simple** est la donnée d'un ensemble fini de dates de trading*

$$\Theta = \{t_k, k = 1, \ldots, K; 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T\}$$

et de N + 1 processus $(\eta_n(t), n = 0, \ldots, N)$ *qui donnent la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps*

$$\eta_n(t) = h_0^n \mathbf{1}_{[0,t_1]}(t) + \cdots + h_k^n \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + \cdots + h_{K-1}^n \mathbf{1}_{]t_{K-1},t_K]}(t)$$

où les variables (liquidative) h_k^n *sont* $\mathcal{F}_{t_k}$*-mesurables.*

La valeur financière du portefeuille η est notée $V(\eta)$. À la date t, elle vaut

$$V_t(\eta) = \eta(t)S(t) = \sum_{n=0}^{N} \eta_n(t)S_n(t).$$

2.2.2 Autofinancement

L'**autofinancement** est une condition importante pour l'évaluation d'actifs. Pour (Θ, η) une stratégie simple de trading, entre les dates t_k et t_{k+1} un investisseur place h_k^n unités dans l'actif S_n. Juste avant la date de renégociation, la valeur de son portefeuille est :$h_k.S_{t_{k+1}}$. À l'instant t_{k+1} l'investisseur forme un nouveau portefeuille, c'est-à-dire une répartition différente des poids des actifs. Si aucune somme n'est investie ou déinvestie, à l'instant t_{k+1}, la valeur du portefeuille est $h_{k+1}.S_{t_{k+1}}$. Et il y a autofinancement si

$$h_k.S_{t_{k+1}} = h_{k+1}.S_{t_{k+1}} \Rightarrow V_{t_k}(\eta) + h_k.S_{t_{k+1}} - S_{t_k} = V_{t_{k+1}}(\eta).$$

Supposons maintenant que $\eta(\cdot) = (\eta_0(\cdot), \ldots, \eta_N(\cdot))'$ est un processus $\{\mathcal{F}(t)\}$-adapté défini sur tout [0,T], pas seulement les points de partitions $t_0, \ldots, t_K$. Et les variations d'un portefeuille autofinançant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. On peut résumer cela ainsi ;

Définition 2.5 *Soit (Θ, η) une stratégie simple de trading autofinançante. Alors la valeur du portefeuille s'écrit comme l'intégrale stochastique par rapport aux prix des actifs S_n de la stratégie simple η . Soit :*

$$V_t(\eta) = \eta(t)S(t), \quad et \quad V_t(\eta) - V_0(\eta) = \int_0^t \eta(u).dS(u). \tag{2.10}$$

De façon plus générale, si η est un processus $\{\mathcal{F}(t)\}$-adapté, S étant des processus d'Itô, alors une stratégie η est autofinançante si (2.11) est satisfaite (ce qui suppose que l'intégrale stochastique est bien définie).

Avec les paramètres concernant la dynamique des actifs, on obtient

$$\begin{aligned} dV_t(\eta) &= \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t) dS_n(t) \\ &= \eta_0(t)S_0(t)r(t)dt + \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t)S_n(t)b_n(t)dt + \sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D} \eta_n(t)S_n(t)\sigma_{nd}(t)dW^{(d)}(t) \\ &= \eta_0(t)S_0(t)r(t)dt + \eta(t)S(t)b(t)dt + \eta(t)S(t)\sigma(t)dW(t). \end{aligned}$$

Il reste à éliminer $\eta_0(t)$ via l'autre équation pour en déduire que la valeur du portefeuille est solution de l'équation

$$dV_t(\eta) = V_t(\eta)r(t)dt + (\eta S)(t).(b(t) - r(t)\tilde{1})dt + (\eta S)(t).\sigma(t)dW(t) \tag{2.11}$$

avec

- $\tilde{1}$ est le vecteur dont toutes les composantes sont égale à 1 (N-dimensionnel) ;
- $\pi_n(t) = (\eta_n(t)S_n(t), n = 1, \ldots, N)$ soit le vecteur qui d'écrit les montants investis en titres risqués.

Réciproquement, un processus $V(t)$, solution de l'équation (2.11)est la valeur financière d'un portefeuille autofinançant, correspondant à un investissement de $(\eta_n(t))_{n=1}^{N}$ dans les actifs risqués et de $\frac{1}{S_0(t)}(V_t(\eta) - \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t)S_n(t))$ dans le titre sans risque.

Remarque 2.3 *L'équation diférentielle linéaire (2.11) ayant une unique solution, la connaissance de l'investissement initial et de la quantité investie dans les actifs risqués suffit à caractériser complétement la valeur d'un portefeuille autofinançant.*

Exemples de stratégies de portefeuille

◇ Stratégie statique : Le gestionnaire investit une partie de sa richesse initiale dans h_0 actions, et place le reste à la banque et ne renégocie pas son portefeuille avant l'horizon de gestion T. A toute date la valeur liquidative du portefeuille est la solution de l'équaition différentielle stochastique suivante :

$$dV(t) = h_0 dS(t) + (V(t) - h_0 S(t))r(t)dt$$

.

◇ Stratégie à temps fixe proportionnelle : Le gestionnaire décide, quelles que soient les conditions de marché, de maintenir le montant investi dans le titre risqué à 50% de la valeur du portefeuille, c'est à dire que $\eta(t)S(t) = \frac{1}{2}V(t)$. La valeur du portefeuille est alors la solution d'une équation différentielle stochastique :

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \frac{1}{2}V(t)\left(\frac{dS(t)}{S(t)} - r(t)dt\right)$$

◇ Stratégie à temps variable : Le gestionnaire décide de renégocier dès que le cours de l'action a varié de plus de 2%. Il peut adopter la même règle concernant les quantitées que précédemment. Les dates de renégociation sont donc des temps aléatoires, en fait des temps d'arrêt qui représentent les temps de passage successifs du titre risqué au-dessus et en dessous des barrières proportionnelles à 2%.

Dans la pratique des marchés, il est important de distinguer un ordre d'achat d'un ordre de vente. En effet, dans l'ordre de vente le prix est fixé dès que l'ordre est passé, alors que dans l'ordre d'achat le prix va dépendre des prix proposés par les autres vendeurs, c'est à dire des conditions du marché.

2.2.3 Arbitrage et Viabilité du Marché

Définition 2.6 *Une opportunité d'arbitrage est une stratégie de portefeuille η auto-finançante telle que*

i $V_0(\eta) = 0$,

ii $V_T(\eta) \geq 0$ *et* $\{V_T(\eta) \neq 0\} \notin \mathcal{N}$.

Dans les modèles continus, des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sont nécessaires pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage, car il existe des intégrales stochastiques qui sont des arbitrages.

⋆ Pour qu'un système de prix soit consistant, le marché considéré ne doit pas offrir d'opportunité d'arbitrage

⋆ On parle d'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A)

Hypothèse fondamentale (AOA)

il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage parmi les stratégies de portefeuille **admissibles**. On dit que le marché est **viable**.
Ainsi attendre jusqu'à l'instant $T_x = \inf\{t \geq 0, W_t = x > 0\}$ est une stratégie d'arbitrage en horizon infini. La difficulté est de définir la notion d'admissibilité d'une stratégie.
Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies admissibles qui doit :
– contenir les stratégies constantes,
– être stable par recollement,
– être assez riche pour évaluer de nombreux produits dérivés,
– n'être pas trop gros pour éviter les OA.
Et voici un exemple :

$$\mathcal{A} = \left\{ \eta ; \mathbb{E} \int_0^T [(\eta_0(t)S_0(t))^2 + |\eta(t)S(t)|^2] dt < \infty \right\}$$

– Vecteurs constants dans $\mathcal{A} \Rightarrow$ prix S_n de chaque titre de base de carré intégrable sur [0,T], à volatilité bornée.
– Auquel cas tous les processus prévisibles bornés sont dans $\mathcal{A}$.
– r, b, σ bornés : hypothèse suffisante.

Conséquences de l'hypothèse d'AOA

Si l'hypothèse d'AOA est vérifiée, alors :
– il y a unicité de l'actif sans risque (le taux r est bien défini)
– il y a unicité des prix
– (Admis) il existe une probabilité, appelée **probabilité martingale** ou **probabilité risque neutre**, équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.
NB : de plus, si le marché est complet, alors cette nouvelle probabilité est unique.

Proposition 2.1 ***(Contraintes sur les rendements sous AOA)***

1. *La valeur présente d'un protefeuille admissible ayant des flux positifs dans le futur est positive à toute date intermédiaire.*

2. *Deux portefeuilles admissibles qui ont la même valeur à la date T p.s. ont la même valeur financière à toute date intermédiaire t p.s.*

PEUVE :Montrons ces proprités très utiles dans la pratique

$\Rightarrow$ Soit η une stratégie admissible telle que $V_T(\eta) \geq 0$ p.s.

Désignons par A l'ensemble A $= \{V_0(\eta) < 0\}$

Soit λ la stratégie autofinançante $\in \mathcal{A}$, correspondant à un investissement initial de $V_0(\eta)$ dans l'actif S_0. S'il n'y a pas de transaction entre 0 et T, en T la valeur de cette stratégie est $V_T(\lambda) = V_0(\eta)\frac{S_0(T)}{S_0(0)} \leq 0$.

La stratégie Δ qui vaut 0 sur A^c et $\eta - \lambda$ sur A est admissible ; c'est une opportunité d'arbitrage si A n'est pas négligeable ($A \notin \mathcal{N}$) car :

$$\begin{aligned} V_0(\Delta) &= 0 \\ V_T(\Delta) &= \tilde{1}_A[V_T(\eta) - V_T(\lambda)] \\ V_T(\eta) - V_T(\lambda) &> 0 \quad \text{sur} \quad \text{A} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On montre de même que si $V_T(\eta) \leq 0$ p.s. alors $V_0(\eta) \leq 0$ p.s. Cette propriété entraîne bien sûr l'égalité de la valeur présente de deux portefeuilles ayant mêmes flux terminaux, puisque leur différence est une stratégie de portefeuille admissible.

Le raisonnement ci-dessus s'adapte sans difficulté à toute date intermédiaire t.

Remarque 2.4 *Les rendements des titres du marché ne sont pas quelconques, ils traduisent l'idée que plus un titre est risqué, plus son rendement doit être élévé, pour justiér qu'il soit conservé dans les stratégies de portefeuille.*

2.3 Processus de Gain et de Portefeuille

Définissons le processus de gains associé à (2.8) par la condition initiale $G(0) = 0$ et l'équation differetielle stochastique

$$dG(t) = \sum_{n=0}^{N} \eta_n(t) dY_n(t) \tag{2.12}$$

Rappellant (2.3),(2.8) nous pouvons réécrire (2.12) comme suit :

$$dG(t) = [\pi_0(t) + \pi'(t)\tilde{1}](r(t)dt + dA(t)) + \pi'(t)[b(t) + \delta(t) - r(t)\tilde{1}]dt + \pi'(t)\sigma(t)dW(t), \tag{2.13}$$

Définition 2.7 *Considérer un marché financier $\mathcal{M} = (r(\cdot), b(\cdot), \delta(\cdot), \sigma(\cdot), S(0), A(\cdot))$ comme dans la Définition 2.3. Un processus de portefeuille $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ de ce marché tel que $\pi_0(\cdot)$ un processus à valeur rèelle, $\{\mathcal{F}(t)\}$-mesurable, et $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_N(\cdot))'$ processus à valeur dans $\mathbb{R}^N$ et $\{\mathcal{F}(t)\}$-mesurable sachant que*

$$\int_0^T |\pi_0(t) + \pi'(t)\tilde{1}|[|r(t)|dt + d\check{A}(t)] < \infty, \tag{2.14}$$

$$\int_0^T |\pi'(t)(b(t) + \delta(t) - r(t)\tilde{1})|dt < \infty, \tag{2.15}$$

$$\int_0^T \|\sigma'(t)\pi(t)\|^2 dt < \infty \tag{2.16}$$

se tiennent presque sûrement.
Le *processus de gains* $G(\cdot)$ associé à $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ est

$$\begin{aligned} G(t) \triangleq\ & \textstyle\int_0^t [\pi_0(s) + \pi'(s)\tilde{1}](r(s)ds + dA(s)) + \int_0^t \pi'(s)[b(s) + \delta(s) \\ & -r(s)\tilde{1}]ds + \textstyle\int_0^t \pi'(s)\sigma(s)dW(s), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{2.17}$$

L'intégrale $b(\cdot) + \delta(\cdot) - r(\cdot)\tilde{1}$ trouvé dans (2.17) est appelé *le processus de la prime de risque* ; sa nième composante est considéré comme la compensation en termes de taux de croissance moyen, reçues par un agent prêt à courir le risque d'investir dans la nième action.
Il développe que $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ est un processus de portefeuille autofinancé. Ainsi pour spécifier un portefeuille autofinancé, il suffit de spécifier $\pi(\cdot)$. On se référa parfois à $\pi(\cdot)$ seul en tant que processus de portefeuille.
Un processus de portefeuille $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ est soumis à peu de restrictions. En particulier, $\pi_0(\cdot)$ peut prendre des valeurs négatives, ce qui correspond à un emprunt sur le marché monétaire. L'investisseur est soumis au même "taux d'intérêt", qu'il soit emprunteur ou prêteur. Enfin la position $\pi_n(\cdot)$ en action n peut être négative, pour $n = 1, \ldots, N$; Cette vente à découvert de stocks est autorisés sur les marchés rèels, sous réserve de certaines restrictions.

2.4 Changement de probabilité

2.4.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une probabilité $\mathbb{P}_0$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{F} \;\; \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_0(A) = 0$$

Théorème 2.1 *$\mathbb{P}_0$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si, et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}_0(A) = \int_A Z(w)d\mathbb{P}(w), \tag{2.18}$$

Z est appelée densité de $\mathbb{P}_0$ par rapport à $\mathbb{P}$ et parfois notée $\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}$.

L'équivalence à démontrer est évidente dans un sens, la réciproque est une version du théorème de Radon-Nikodym (cf. par exemple [7],tome1).
Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_0$ sont dites équivalentes si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si $\mathbb{P}_0$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, de densité Z, alors $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_0$ sont équivalentes si et seulement si $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

2.4.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un Mouvement Brownien Standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, indexé par l'intervalle de temps [0,T]. Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov (cf. [20], [8], chapitre 8).

Théorème 2.2 *Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(Z_0)_{0\leq t\leq T}$ défini par :*

$$Z_0 = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right\}$$

soit une martingale.
Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}_0$ de densité Z_0 par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(W_0)_{0\leq t\leq T}$ défini par $W_0(t) = W(t) + \int_0^t \theta_s ds$, est un Mouvement Brownien Standard.

Remarque 2.5 *Une condition suffisante pour que $(Z_0)_{0\leq t\leq T}$ soit une martingale est que l'on ait*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right) < \infty$$

(cf. [20], [7]).

2.4.3 Théorème de représentation des martingales Browniennes

Soit $(W(t))_{0\leq t\leq T}$ un Mouvement Brownien Standard construit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. Rappelons que si $(\varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T \varphi^2 dt) < \infty$, le processus $(\int_0^T \varphi_s dW_s)$ est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

Théorème 2.3 *Soit $(M_0(t))_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Il existe un processus adapté $(\varphi(t))_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}\int_0^T \varphi(s)^2 ds < \infty$ et :*

$$M_0(t) = M_0(0) + \int_0^t \varphi(s) dW_0(s) \;\; p.s. \forall t \in [0, T]$$

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien.
Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T \varphi_s dW(0)_s$$

où (φ_t) est une processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T \varphi^2(s) ds) < \infty$. Il suffit pour cela de considérer la martingale $M_0(t) = \mathbb{E}(U|\mathcal{F}_t)$.

2.5 La Complétude de marché

2.5.1 La probabilité de risque neutre

Définition 2.8 *Une probabilité $\mathbb{P}_0$ est appelée probabilité risque-neutre ou probabilité martingale si $\mathbb{P}_0$ est équivalente à $\mathbb{P}$ et si le prix actualisée $\frac{S_n(t)}{S_0(t)} = e^{-rt}S_n(t)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_0$*

La condition d'équivalence entre $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}$ signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$, si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors $\mathbb{P}_0(A) > 0$ et vice versa. Autrement dit, ce que $\mathbb{P}$ prédit avec une probabilité strictement positive, $\mathbb{P}_0$ le prédit aussi et la réciproque est vraie. Le nom *martingale* vient naturellement de la propriété martingale du prix actualisé. Le mot risque-neutre vient du fait que le rendement des actifs est égal au taux d'intérêt r sous $\mathbb{P}_0$.

On vient ainsi de voir l'existence d'une probabilité risque-neutre dans le modéle de Black-Scholes. Ce résultat d'existence est en fait très général dans les modèles en temps continu et découle de la condition d'AOA. Il est connu sous le nom de premier théorème fondamental de la finance et souligne l'importance du concept de probabilité martingale. Ici, nous admettrons l'existence d'une probabilité risque-neutre comme caractérisation de la condition d'AOA.

(AOA) Il existe une probabilité risque-neutre.

Remarque 2.6 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on se convainc aisément et on peut le montrer, qu'il n'y a qu'une manière de rendre le processus de prix actualisé martingale, en faisant de $W_0(t) = W(t) + \int_0^t \theta_s ds$ un mouvement Brownien. Ceci implique l'unicité d'une probabilité risque-neutre, à savoir la probabilité $\mathbb{P}_0$ définie en (2.18).*

On a ainsi deux univers de probabilité parallèles. L'espace de probabilité original $(\Omega, \mathbb{P})$ où le processus de prix est originellement défini et en parallèle un monde risque-neutre défini par l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}_0)$ où le rendement de l'actif est r, le taux sans risque. Alors que le premier espace sert à modéliser les prix et le second espace servira pour la valorisation d'options.

2.5.2 Evaluation et couverture par arbitrage

Considérons un produit dérivé (on dit aussi actif contingent) représenté par son flux (ou payoff) terminal, B_T , une variable aléatoire F_T-mesurable, K : le prix d'exercice (strike dans la terminologie anglo-saxonne) est le prix fixé à l'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option : les cas typiques étant représentés par les options européennes $B_T = h(S_T)$ où h est une fonction mesurable. Par exemple $h(s) = (s - K)_+$ pour un call, $h(s) = (K - s)_+$ pour un put. La question cruciale est de donner un "juste" prix à ce produit dérivé. Pour répondre à cette question, plaçons nous pour fixer les idées du côté du vendeur. A la vente de ce produit dérivé, il reçoit en contrepartie une prime (prix de l'option) de la part de l'acheteur. Il peut alors investir la prime dans un portefeuille d'actifs de manière à avoir une valeur de portefeuille qui va dans le même sens des flux qu'il risque de payer.
La gestion d'un produit dérivé obéit donc aux opérations suivantes :

- suivre régulièrement le prix du produit dérivé dans le marché.
- gérer un portefeuille autofinançant, de valeur V_t en t, dont la valeur initiale est la prime de l'option.
- surveiller le $P\&L$ (profit et perte) final, i.e. la différence entre la valeur du portefeuille et le montant du flux à payer (pour le vendeur), soit $V_T - B_T$. On parle aussi de "tracking error".

L'objectif du gestionnaire d'options est de réduire le $P\&L$ final afin d'avoir la variance la plus faible possible. Le "meilleur" portefeuille est appelé portefeuille de couverture. En particulier, s'il est possible de trouver un $P\&L$ final de risque nul, i.e. un portefeuille autofinançant de valeur terminale, le payoff de l'option, alors par la condition d'AOA, on pourra définir à toute date le prix de l'option comme la valeur du portefeuille autofinançant. On dit encore que l'option est (parfaitement) réplicable par une stratégie de portefeuille autofinançant, appelé portefeuille de couverture (parfaite) et le prix est appelé prix d'arbitrage. Les questions se posent ensuite de construire un tel portefeuille de couverture et d'avoir une formule pour le prix ? Nous allons répondre à ces problèmes de valorisation et couverture par le principe d'évaluation risque-neutre.

Le problème de la valorisation et couverture d'une option de flux B_T se formule mathématiquement en la recherche d'une stratégie de portefeuille autofinançant η tel que $V_T(\eta) = B_T$. Si cela est possible, on dit que l'actif contingent B_T est attaignable ou réplicable (par la stratégie η). Dans la suite, on considére des modèles où tous les actifs contingents (avec une condition d'intégrabilité appropriée) sont attaignables. On dit que le marché est *complet*. On admettra la caractérisation suivante de la complétude de marché, énoncé comme un théorème fondamental de la finance :

Marché complet $\equiv$ unicité d'une probabilité risque-neutre

On se fixe désormais l'unique probabilité $\mathbb{P}_0$ risque-neutre et on s'intéresse aux options de flux B_T satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}|B_T| < +\infty$, i.e. $B_T \in L^1(\mathbb{P}_0, \mathcal{F}_T)$. En marché complet, le flux B_T est attaignable (réplicable), i.e. il existe une stratégie de portefeuille η $\mathbb{P}_0-$admissible tel que $V_T(\eta) = B_T$. D'après la proposition 2.1.(2), on peut définir de mainère unique le prix d'arbitrage $M_0(t) = M_0(B_T)$ en t de B_T comme la valeur $V_t(\eta)$ de ce portefeuille. η est le portefeuille de couverture. On obtient la règle suivante d'évaluation risque-neutre :

Théorème 2.4 *En marché complet, le prix d'arbitrage d'une option de flux B_T est donné à la date t par :*

$$M_0(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\left[e^{-r(T-t)}B_T|\mathcal{F}_t\right] \tag{2.19}$$

Son prix à la date $t = 0$ est

$$M_0(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\left[e^{-rT}B_T\right]$$

<u>PREUVE :</u> La valeur du portefeuille actualisée $\frac{V_\eta(t)}{S_0(t)} = e^{-rt}V_\eta(t)$ d'une stratégie η $\mathbb{P}_0-$admissible est une martingale sous $\mathbb{P}_0$. Si le portefeuille η réplique le flux B_T , i.e. $V_T(\eta) = B_T$, on a donc :

$$e^{-rt}V_t(\eta) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[e^{-rT}V_T(\eta)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[e^{-rT}B_T|\mathcal{F}_t],$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$M_0(t) = V_t(\eta) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[e^{-r(T-t)}B_T|\mathcal{F}_t]. \qquad \square$$

Chapitre 3

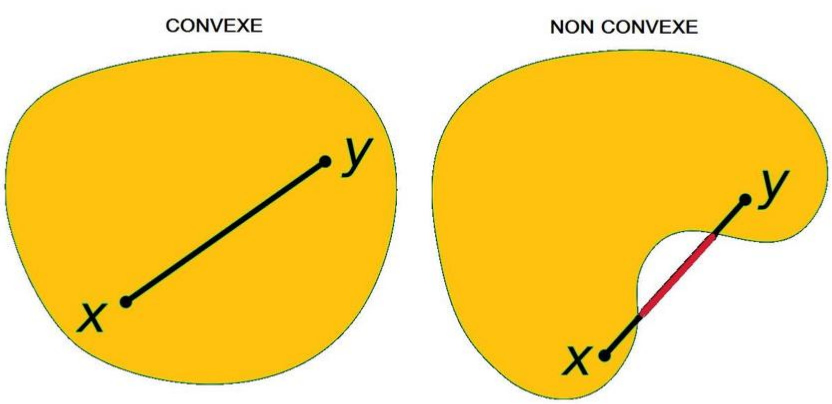
L'Optimal du Convexe Dual

3.1 Convexité

3.1.1 Ensembles convexes

Définition 3.1 *Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble C de E est dit convexe si quels que soient $x,y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. On note $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y / 0 \leq \lambda \leq 1\}$.*
Donc C est convexe si et seulement si

$$\forall \ x, y \ \in \ C \qquad [x,y] \subset C$$



Imaginons que le complémentaire de C dans E est opaque : l'ensemble C est convexe si et seulement si de tout point de C on voit tous les autres points de C.

Exemples d'ensembles convexes :

Les variétés affines de E (c'est-à-dire un sous ensemble V tel que pour tous x,y $\in$ V et $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait $\lambda x + (1-\lambda)y \in$ V), en parituclier un point, une droite, un hyperplan (c'est-à-dire le sous-ensemble de E d'équation $\ell(x) = a$ où ℓ est une forme linéaire sur E et a un nombre réel).
Sont également convexes : les demi-espaces ouverts (d'équation $\ell(x) < a$), les demi-espaces fermés ($\ell(x) \leq a$), les boules (si l'espace vectoriel est normé).
Un sous-ensemble fini de E contenant plus d'un point n'est pas convexe.

Propriétés 3.1 *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, c'est-à-dire les parties convexes de $\mathbb{R}$.*
Les ensembles convexes ont d'importantes propriétés de stabilité : toute intersection d'ensemble convexes est un ensemble convexe ; en particulier, tout ensemble défini par un nombre quelconque d'équations linéaires et d'inéquations linéaires larges ou strictes est un ensemble convexe. Tout ensemble convexe fermé est caractérisé par un système d'inéquations linéaires larges.
Les ensembles convexes sont également stables par translation, multiplication par un scalaire, et plus généralement toute transformation affine de E dans un autre espace vectoriel F.

Une première conséquance de cette propriété est que si C et D sont deux ensembles convexes de E et λ, μ deux nombres réels, alors $\lambda C + \mu D$ est encore un ensemble convexe. Une deuxième conséquence est que l'image réciproque d'un ensemble convexe par une transformation affine est un ensemble convexe :

$$x, y \in f^{-1}(C) \Rightarrow f([x,y]) = [f(x), f(y)] \subset C \Rightarrow [x,y] \subset f^{-1}(c).$$

Tout produit cartésien d'ensembles convexes est convexe (évident).
Réciproquement, si $C \subset E_1 \times \ldots \times E_n$ est convexe alors ses projections sur $E_1, \ldots, E_n$ sont convexes (puisque chaque projection est un opérateur linéaire).

Donc :

$$(C_1 \times \ldots \times C_n \text{ est convexe }) \Leftrightarrow (C_1 \; convexe, \ldots, C_n \; convexe)$$

Propriété 3.1 *Toute union croissante d'ensemble convexes est convexe.*
Donc la limite inférieure $\cup_k \cap_{i \geq k} C_i$ d'une suite C_i d'ensembles convexes est convexe.

`Une propriété remarquable` des ensembles convexes : leur multiplication par les scalaires positifs est distributive par rapport à l'addition des scalaires, c'est-à-dire :

$$\forall \;\; \lambda, \mu \geq 0 \;\; : \lambda C + \mu C \; = \; (\lambda + \mu) C \tag{3.1}$$

3.1.2 Combinaisons Convexes

Définition 3.2 *On dit que la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est une combinaison convexe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E si on a*

$$\forall \;\; i = 1, \ldots, n \quad \lambda_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Théorème 3.1 *Un sous-ensemble C de E est convexe si et seulement si il contient toute combinaison convexe de ses éléments.*

Démonstration :
Soit C un convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de C et $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_n$.
Pour montrer que z appartient à C nous supposons (quitte à changer la numérotation) que λ_1 est strictement positif (puisque $\sum_{i=1}^{n} = 1$, l'un au moins des coefficients λ_i est strictement positif). Puisque C est convexe on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
y_1 = \quad & \left(\tfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) x_1 + \left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right) x_2 \in C \\
y_2 = \quad & \left(\tfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right) y_1 + \left(\tfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right) x_3 \in C \\
y_3 = \quad & \left(\tfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}\right) y_2 + \left(\tfrac{\lambda_4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}\right) x_4 \in C \\
& \vdots \\
y_{n-1} = \quad & \left(\tfrac{\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}{1}\right) y_{n-2} + \tfrac{\lambda_n}{1} x_n \in C
\end{aligned}$$

On vérifie que $y_{n-1} = z$ ce qui démontre la proposition "seulement si" du théorème. La réciproque est évidente puisque $\lambda x + (1-\lambda)y,\ 0 \leq \lambda \leq 1$, est une combinaison convexe de x et y. $\square$

3.1.3 Fonctions convexes

Définition 3.3 *Soit f une fonction d'éfinie sur l'espace vectoriel réel E à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *On dit que f est convexe si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

(1) *Pour tout entier n et toute combinaison convexe* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *d'éléments de E, on a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

(2) *Pour tout* $\lambda \in]0,1[$ *et tous* $x,y \in E$

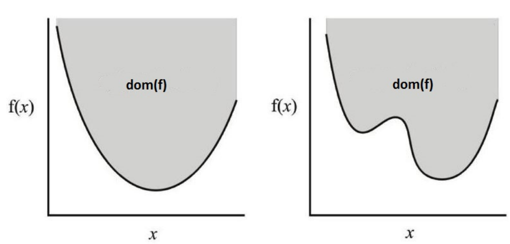
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(3) *L'épigraphe epi(f) de f est un sous-ensemble convexe de* $E \times R$ *:*

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} / f(x) \leq \lambda\}$$

Pour toute fonction f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, *on appelle domaine de f et on note dom(f) l'ensemble :*

$$dom(f) = \{x \in E / f(x) < +\infty\}$$



Fonction convexe Fonction non convexe

Remarque que notre définition des fonctions convexes comme fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nous dispense d'avoir à préciser à chaque fois leur domaine de définition. En effet partons d'une fonction f_0 définie sur un convexe C et elle-même convexe au sens des inégalités (3) (qui ne sont alors définies que pour x,y $\in$ C) ;
on peut alors étendre la définition de f_0 à E tout entier en posant :

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & si \;\; x \in C \\ +\infty & si \;\; x \notin C \end{cases}$$

La fonction f, de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, ainsi définie est alors convexe au sens de la définition (3.3)

Exemples de fonctions convexes :

Les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}$:

- $G_0 = \begin{cases} e^x & si \;\; x \geq 0 \\ +\infty & si \;\; x < 0 \end{cases}$
- $G_1 = \begin{cases} \frac{1}{x^p} & si \;\; x > 0 \\ +\infty & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$ (avec p $\geq$ 0)
- $G_2 = \begin{cases} x^p & si \;\; x \geq 0 \\ +\infty & si \;\; x < 0 \end{cases}$ (avec p $\geq$ 1)

Définition 3.4 *on dit une fonction f de E dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est concave si -f est convexe.*

Propriétés 3.2 *Une fonction est convexe et concave si et seulement si elle est affine :*

$$\Big(\sum \lambda_i = 1\Big) \Rightarrow \Big(f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i)\Big)$$

Une fonction f est concave si son hypographe hyp(f) est convexe :

$$hyp(f) = \{(x, y) \in E \times R / f(x) \geq \lambda\}$$

Exemples de fonctions convexes :

Les fonctions suivantes sont concaves sur $\mathbb{R}$:

- $G_4 = \begin{cases} 1 - e^{-x} & si \;\; x \geq 0 \\ -\infty & si \;\; x < 0 \end{cases}$
- $G_5 = \begin{cases} Logx & si \;\; x > 0 \\ -\infty & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$
- $G_6 = \begin{cases} x^q & si \;\; x \geq 0 \\ -\infty & si \;\; x < 0 \end{cases}$ (avec $0 \leq q \leq 1$)

3.1.4 Opérations sur les fonctions convexes

Par définition une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe : à toute propriété de stabilité des ensembles convexes va donc correspondre une propriété de stabilité des fonctions convexes pour l'opération correspondante.

a) Supermum :

Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de fonctions convexes, alors son supermum f :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$

est une fonction convexe.(En effet l'épigraphe de f est l'intersection des épigraphes des fonctions f_i.)

Exemple :
Soit C un sous-ensemble de l'espace de Hilbert E de produit scalaire $<,>$. Alors la fonction support de C est la fonction convexe

$$\vartheta_C(x) = \sup_{y\in C} < x, y >$$

Elle est convexe.

3.2 Dualité min-max

La notion de dualité introduite dans cette section est très générale. On suppose donnés deux ensembles X et Y quelconques, qui ne doivent donc pas être des espaces vectoriels.

3.2.1 Introduction d'un problème dual

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation

$$(P) \quad \inf_{x \in X} f(x),$$

que l'on appelle problème primal et dont les solutions sont appelées *solutions primales*. De manière à introduire un problème dual de (P), on cherchera à représenter f(x) comme un supremum :

$$f(x) = \sup_{y \in Y} g(x, y), \tag{3.2}$$

où $g : X \times Y \to \underline{\mathbb{R}}$ sera appelée *la fonction de couplage* entre variables x et y. Par exemple, si $f \in \overline{Conv}(\mathbb{R}^n)$, elle est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines (proposition 3.28). Un autre exemple, plus pratique, est donné ci-dessous (l'exemple 13.1) et nous verrons à la section 13.2, une procédure permettant d'écrire f de cette manière. Lorsque f s'écrit comme ci-dessus, le problème primal devient

$$(P) \quad \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} g(x, y)$$

Insistons sur le fait que cette écriture veut dire que l'on cherche à minimiser la fonction $x \longmapsto \sup_{y \in Y} g(x, y)$.

On appelle *problème dual* de (P) relatif à g le problème noté (D) et défini par

$$(D) \quad \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} g(x, y). \tag{3.3}$$

On a donc simplement inversé l'ordre dans lequel les extremums en $x \in X$ et en $y \in Y$ sont pris. Ses solutions sont appelées *solutions duales*. Le problème dual consiste donc à minimiser ce que l'on appelle la fonction duale κ associée à g :

$$\kappa : y \longmapsto \kappa(y) := -inf_{x \in X} g(x, y)$$

On gardera à l'esprit que, pour chaque $y \in Y$, il faut résoudre un problème de

minimisation pour connaître la valeur $\kappa(y)$ de la fonction duale !
Les problèmes

$$\inf_{x\in X} g(x,y) \text{ et } \sup_{y\in Y} g(x,y)$$

sont appelé respectivement problème interne primal en $y \in Y$ et *problème interne dual* en $x \in X$. Dans certains contextes, ils portent parfois le nom de *problèmes de Lagrange*. On note respectivement

$$\overline{X}(y) \quad \text{et} \quad \overline{Y}(x)$$

leur ensemble de solutions. On peut souvent représenter f comme en (13.1) au moyen de différentes fonctions g. A chacune d'elles correspond un problème dual différent. Il n'y a donc pas unicité du problème dual.

Exemple 3.1 *Considérons le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité*

$$\inf_{x\in X c(x)=0} f(x),$$

dans lequel $c : X \to \mathbb{R}^m$. *Ce problème peut s'écrire sous la forme*

$$\inf_{x\in X} \tilde{f}(x),$$

si on définit $\tilde{f} = f\mathcal{I}_{X_c}$ où $X_c\{x : c(x) = 0\}$. L'observation essentielle est que l'on peut écrire $\tilde{f}$ comme un supremum :

$$(\tilde{f})(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^m} (f(x) + y^{\perp}c(x)).$$

Nous reviendrons sur cette dualisation à la section 13.4.1. □

Les algorithmes de résolution de (P) par dualité cherchent à résoudre le problème dual (D). Ils génèrent une suite $\{y_k\} \subset$ l'itéré suivant y_{k+1} étant obtenu à partir de l'itéré courant y_k et des informations recueillies en résolvant le problème interne primal suivant (éventuellement de manière approchée)

$$\inf_{x\in X} g(x, y_k) \tag{3.4}$$

Pour que cette approche soit efficace, il faut que les conditions suivantes soient remplies.

(D_1) En résolvant (D) on résout aussi (P). Il faut donc que les deux problèmes aient un lien entre eux, ce qui n'est pas manifeste pour l'instant. Ce que l'on peut en dire dans le cadre général ci-dessus est donné à la section 13.1.2. Le concept-clé est celui de point-selle.

(D_2) Il est plus facile de résoudre (D) que (P). Pour cela, il est essentiel que, quel que soit y_k fixé, le problème interne primal (13.3) ait (en général) une solution et soit beaucoup plus simple à résoudre que le problème original. En effet, ce problème doit être résolu un grand nombre de fois (pour chaque itéré y_k).

(D_3) On aura intérêt à ce que les solutions du problème interne primal $\inf_x g(x, \bar{y})$ soient solutions du problème primal.

Comme tout dépend de la fonction g, son choix sera guidé par les trois remarques ci-dessus. Dans l'exemple 13.1, on voit que le problème interne primal est un problème sans contrainte, ce qui n'est pas le cas du problème original. C'est un avantage.

3.2.2 Liens entre problèmes primal et dual, point-selle

La proposition suivante donne une relation entre les valeurs optimales primale et duale. Il s'agit d'un résultat très général puisqu'il ne fait aucune hypothèse sur X, Y et g.

Proposition 3.1 ***(dualité faible)*** *On a*

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} g(x, y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} g(x, y) \tag{3.5}$$

<u>DÉMONSTRATION :</u> On a

$$\inf_{x \in X} g(x, y') \leq g(x', y'), \quad \forall x' \in X, \ \ \forall y' \in Y.$$

En prenant le supremum en $y' \in Y$, on obtient

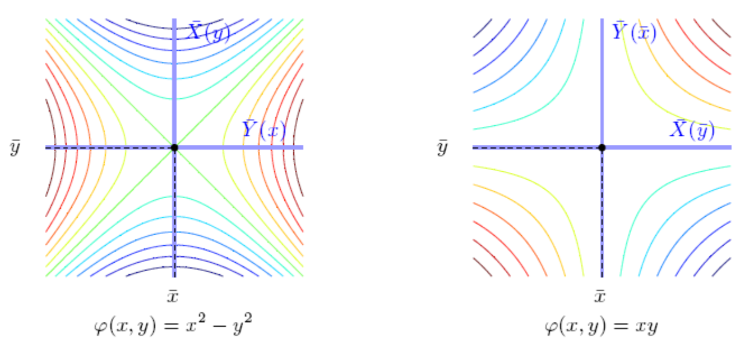
$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} g(x, y) \leq \sup_{y \in Y} g(x', y), \quad \forall x' \in X.$$

Le membre de gauche est indépendant de x', on peut donc prendre l'infimum en $x' \in X$ à droite et garder l'inégalité. Ceci conduit au résultat. $\square$
L'existence de solutions primale et duale et l'égalité en (3.5) sont étroitement liés à l'existence de point-selle de g.

Définition 3.5 *Soient X et Y deux ensembles et $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est un point-selle de g sur $X \times Y$ si on a*

$$g(\bar{x}, y) \leq g(\bar{x}, \bar{y}) \leq g(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y. \tag{3.6}$$

Donc $x \mapsto g(x, \bar{y})$ atteint un minimum en $\bar{x}$ et $y \mapsto g(\bar{x}, y)$ atteint un maximum en $\bar{y}$. Dans la définition du point-selle, on ne s'intéresse qu'aux valeurs prises par g aux points (x, y) qui se trouvent sur les droites $\{\bar{x}\} \times Y$et $X \times \{\bar{x}\}$. La définition est illustrée à la figure suivante dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$. On y a tracé les courbes de niveaux de deux fonctions g. Le tracé de gauche correspond à la fonction $g(x, y) = x^2 - y^2$ dont le graphe se présente comme une selle, convexe suivant l'axe des abscisses et concave suivant l'axe des ordonnées : il y a un unique point-selle $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, $\bar{X}(y)$ représente les solutions de $\inf_x$ g(x,y) et $\bar{Y}(x)$ représente les solutions de $\sup_y g(x, y)$. Le tracé de droite est un peu moins trivial et correspond à la fonction $g(x, y) = xy$: on a toujours le même unique point-selle $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, mais les ensembles de solutions ne sont plus des courbes puisque $\bar{X}(y)$ n'est non vide que si $y = \bar{y}$ (c'est l'ensemble $\mathbb{R}$) et $\bar{Y}(x)$ n'est non vide que si $x = \bar{x}$ (aussi l'ensemble $\mathbb{R}$).



Exemples de fonction φ avec point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$ = (0,0).

Proposition 3.2 *Un couple de points $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est point-selle de g sur $X \times Y$ si et seulement si $\bar{x}$ est solution du problème primal, $\bar{y}$ est solution du problème dual et on a*

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in Y} g(x,y) = \inf_{x\in Y} \sup_{y\in Y} g(x,y). \tag{3.7}$$

Dans ces conditions, la valeur en (3 :7) est $g(\bar{x}, \bar{y})$.

<u>DÉMONSTRATION :</u> D'après l'inégalité de dualité faible (3,5) et la définition même des problèmes primal et dual, quel que soit le couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, on a

$$\inf_{x\in X} g(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} g(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} g(x,y) \leq \sup_{y\in Y} g(\bar{x},y). \tag{3.8}$$

Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est un point-selle de g, alors les membres à l'extrême gauche et à l'extrême droite dans (3.8) sont tous deux égaux à $g(\bar{x}, \bar{y})$. On en déduit que l'on a égalité partout dans (3.8), c'est-à-dire que $\bar{x}$ est solution primale (par l'égalité de droite), que $\bar{y}$ est solution duale (par l'égalité de gauche) et qu'il n'y a pas de saut de dualité (par l'égalité du milieu).

<u>Réciproquement</u>,si $\bar{x}$ est solution du problème primal, si $\bar{y}$ est solution du problème dual et s'il n'y a pas de saut de dualité, on a égalité partout dans (3.8). Dès lors (les inégalités à gauche et à droite ci-dessous proviennent de la définition de l'infimum et du supremum)

$$g(\bar{x},\bar{y}) \geq \inf_{x\in X} g(x,\bar{y}) = \sup_{y\in Y} g(\bar{x},y) \geq g(\bar{x},\bar{y}). \tag{3.9}$$

On a donc égalité partout dans cette dernière relation. □

Chapitre 4

Optimal consumption and portefolio of an equilibrium in a complete market

Ce chapitre fait l'objet d'une publication accepté dans *International Journal of Statistics and Economics*

Statistics and Economics, February 2019, Volume :20, Issue Number :2, Pages 16-28
ISSN (0975-556X)

Optimal consumption and portefolio of an equilibrium in a complete market

F. LIMAM-BELARBI and N. SEKKAL
Laboratory of Statistic and Processus Stochastic
University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria

e-mail : *faiza_belarbi@yahoo.fr* and *sekkal.N@hotmail.fr*

Abstract. The aim of this paper is to investigate the equilibrium problem of a complete financial market. The objective is to maximize the portfolio. The dual convex of the utility function is used for the solution of maximization.
Mathematics Subject Classification. 91B50, 91B28, 91B26, 91B16.
Keywords. Equilibrium : general theory, Portfolio optimization, complete markets model, Utility theory.

4.1 Introduction

The equilibrium problem of a complete financial market is to construct a model (a money market and several stocks) in which the prices of securities are determined by the law of supply and demand, maximizing the utility function of consumption over the finite temporal horizon $[0, T]$.
Existence of equilibrium in continuous-time finance models with a single agent has been established in a number of papers ([3], [18], [6], [12], [28]).
To achieve the purpose of this research, the exponential utility functions are used with a new approach called the Dual Convex Method, and all optimal solutions are found in an explicit form for more details on this approach, see ([17]). In section 2 and 3, the following concepts and functions are defined : the financial market, the

notion of utility functions and the convex dual function (Legendre transform) of the utility function. Section 4 is devoted to the description of the exogenous process and section 5 to the description of the endogenous ones. Section 6 solves the optimal consumption and the investment problem for an agent who receives an endowment process. Equilibrium is defined and characterized in section 7, and finally, in sections 8 and 9, the main results with applications are presented.

4.2 The Financial Market

We seek to construct a complete and standard financial market with a process price of money market $S_0(.)$ with $S_0(0) = 1$ and

$$dS_0(t) = S_0(t)[r(t)dt + dA(t)],$$

as well as N stocks price process $S_1(.), \ldots, S_N(.)$, with $S_n(0)$ positive constant for each n, and

$$dS_n(t) = S_n(t)[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{j=1}^{D} \sigma_{nj}(t)dW^{(j)}(t)], \quad n = 1, \ldots, N.$$

Here $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))'$ is a standard d-dimensional Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $r(t) \in \mathbb{R}$ is the risk-free rate process satisfying $\int_0^T |r(t)|dt < \infty$ almost surely, $b(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))' \in \mathbb{R}^d$ is the vector of stock-appreciation rates and $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq 1}$ is the matrix of stock-volatilities satisfying $\sum_{n=1}^{N} \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}^2(t)dt < \infty$ a.s.We also assume that the matrix $\sigma(t)$ is nonsingular for Lebesgue-almost all $t \geq 0$. We denote by $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}, t \geq 0$; the filtration generated by the Brownian motion (augmented by the null sets), $A(t)$ is the finite-variation process. Furthermore, $|.|$ denotes the Euclidean norm for vectors and the corresponding matrix norm for matrices and prime denotes the transposed. We then introduce the martingale

$$\theta(t) := \sigma^{-1}(t)[b(t) - r(t)\tilde{1}], \qquad \tilde{1} = (1, \ldots, 1)'$$

$$Z_0(t) := \exp\left\{-\int_0^t \theta'(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \theta(s) \parallel^2 ds\right\}.$$

For a standard market, we define the standard martingale measure $\mathbb{P}_0$ on $\mathcal{F}$ by

$$\mathbb{P}_0(A) := \mathbb{E}\left[Z_0(T)\mathbb{I}_A\right], \ \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

We consider that $\mathbb{P}_0$ and $\mathbb{P}$ are equivalent on $\mathcal{F}_T$ and the drifted Brownian motion

$$W_0(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

According to Girsanov theorem, W_0 is a standard Brownian motion under $\mathbb{P}_0$ and

$$H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}.$$

For this model, the following condition will be imposed

Condition 4.2.1 *(i) We have*

$$\mathbb{E}_0[\max_{0\leq t\leq\ T}(\frac{1}{s_0(t)})] < \infty.$$

(ii) There exist constants $0 < \delta_0 < \triangle_0 < \infty$ *such that we have almost surely*

$$\delta_0 \leq H_0(t) \leq \triangle_0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

We refer to this financial market as $\mathcal{M} = (r(.), b(.), \delta(.), \sigma(.), S(0), A(.))$.

4.3 Utility Functions

In this section we develop the utility functions and their priorities ; we also develop the convex dual of an utility function.

Definition 4.1 *An utility function is a concave, nondecreasing, upper semicontinuous function* $U : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *satisfying :*

(i) *The half-line dom*$(U) \triangleq \{x \in \mathbb{R}; U(x) > -\infty\}$ *is a nonempty subset of* $[0, \infty)$;

(ii) *U' is continuous, positive, and strictly decreasing on the interior of $dom(U)$, and*

$$U'(\infty) \triangleq \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0. \tag{4.1}$$

We set

$$\bar{x} \triangleq inf\{x \in \mathbb{R}; U(x) > -\infty\} \tag{4.2}$$

so that $\bar{x} \in [0, \infty)$ and either $dom(U) = [\bar{x}, \infty)$ or $dom(U) = (\bar{x}, \infty)$.
We define

$$U'(\bar{x}+) \triangleq \lim_{x\to\bar{x}} U'(x), \tag{4.3}$$

so that $U'(\bar{x}+) \in (0, \infty]$.
For example

$$U(x) \triangleq \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

The *Arrow-Pratt index of risk aversion*, $J(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = x$. Other utility functions are $U(x - \bar{x})$,where $\bar{x}$ is a positive constant.

Definition 4.2 *Let U be an utility function. The convex dual of U is the function*

$$\tilde{U}(y) \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}}\{U(x) - xy\}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Except for the presence of some minus signs, $\tilde{U}$ is the Legendre Fenchel transform of U ([29], [13]). Indeed, if we define the convex function

$$f(x) \triangleq -U(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

then the Legendre Fenchel transform of f is

$$f^*(y) \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - f(x)\} = \tilde{U}(-y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Lemma 4.3.1 *[21] Let $\tilde{U}$ be the convex dual of U. Then $\tilde{U} : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ is convex, nonincreasing, lower semicontinuous, and satisfies*

i)

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y), & y > 0, \\ U(\infty) := \lim_{x\to\infty} U(x), & y = 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases}$$

ii) The derivative $\tilde{U}'$ is defined, continuous, and nondecreasing on $(0, \infty)$, and

$$\tilde{U}'(y) = -I(y), \quad 0 < y < \infty.$$

iii) For all $x \in \mathbb{R}$,

$$U(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \tilde{U}(y) + xy \right\}.$$

iv) For fixed $x \in (\bar{x}, \infty)$, the function $y \mapsto \tilde{U}(y) + xy$ is uniquely minimized over $\mathbb{R}$ by $y = U'(x)$; i.e.,

$$U(x) = \tilde{U}(U'(x)) + xU'(x).$$

4.4 Agents, Endowments and Utility Functions

Our market consists of a finite number K of agents.

We define an aggregate endowment by : $\{\epsilon(t) \triangleq \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(t); 0 \leq t \leq T\}$ with $\epsilon_k(t)$ is an exogenous endowment processes for $(k = 1, \ldots, K)$; and define aggregate subsistence consumption as : $\bar{c} \triangleq \sum_{k=1}^{K} \bar{c}_k$, such as : $\bar{c}_k \triangleq \inf\{c \in \mathbb{R}, U_k(c) > -\infty\}$ and $\bar{c}_k \geq 0$ for $k = 1, \ldots, K$.

Finally, the agents have a common discount rate $\beta : [0, T] \to \mathbb{R}$ which is a nonrandom Lebesgue-integrable function, bounded from below. Agent k will attempt to maximize his expected discounted utility from consumption processus c_k

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} U_k(c_k(t))dt.$$

The endowment processes $\{\epsilon_k(.)\}_{k=1}^K$, the utility functions $\{U_k(.)\}_{k=1}^K$, and the discount rate $\beta(.)$ are the primitives of our equilibrium model, from these primitives we will construct our equilibrium market when U_k is a function of both time and consumption. Before constructing this latter, there are some conditions that are often imposed on primitives as follows :

Condition 4.4.1 *(i) For each $k = 1, \ldots, K$, the function $U_k(.)$ is of class C^3 on $(\bar{c}_k, \infty)$, satisfies $U_k''(c) < 0$ for all $c > \bar{c}_k$, and the quantity*

$$\lim_{c \downarrow \bar{c}_k} \frac{U_k'''(c)}{(U_k''(c))^2}$$

exists and is finite.
(ii) For each $k = 1, \ldots, K$, we have

$$\epsilon_k(t) \geq \bar{c}_k, \qquad 0 \leq t \leq T$$

almost surely.
(iii) There exist constants $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$ such that

$$\bar{c} + \gamma_1 \leq \epsilon(t) \leq \gamma_2, \quad 0 \leq t \leq T$$

almost surely.

4.5 Consumption and Portfolio Processes

Once an equilibrium market has been constructed, each agent k can choose a consumption process $c_k : [0,T] \times \Omega \to [0, \infty)$ and the portfolio process $\pi_k : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^N$. These are both $\{\mathcal{F}_{(t)}\}$-progressively measurable ; $\pi_k(.)$ satisfies

$$\int_0^T |\pi(t)'(b(t) + \delta(t) - r(t)\tilde{1})| dt < \infty,$$

$$\int_0^T \|\sigma(t)'\pi(t)\|^2 dt < \infty$$

and c_k satisfies $\int_0^T c_k(t)dt < \infty$ almost surely.
The U_K structure implies that agent k is interested by the consumption process $c_k(.)$ satisfying $c_k(t) \geq \bar{c}_k, \qquad 0 \leq t \leq T$ a.s.
The wealth process $X_k(.) = X_k^{\pi k}$ is given by

$$\frac{X_k(t)}{S_0(t)} = \int_0^t \frac{\epsilon_k(u) - c_k(u)}{S_0(u)} du + \int \frac{1}{S_0(u)} \pi_k'(u)\sigma(u)dW_0(u), \; 0 \leq t \leq T. \tag{4.8}$$

We take $X_k(0) = 0$.

Definition 4.3 *[21] A consumption/portfolio process pair (c_k, π_k) is admissible for the k^{th} agent if the corresponding wealth process $X_k(.)$ of (4.8) satisfies*

$$\frac{X_k(t)}{S_0(t)} + \mathbb{E}[\int_t^T \frac{\epsilon_k(u)}{S_0(u)} du|\mathcal{F}(t)] \geq 0, \qquad 0 \leq t \leq T \qquad \textit{almost surely.} \tag{4.9}$$

The class of admissible pairs (c_k, π_k) is denoted by $\mathcal{A}_k$.

Remark 4.1 *From this, (4.8), and (4.9) with $t = T$, it develops that $c_k(\Delta)$ must satisfy the budget constraint*

$$\mathbb{E}_0 \int_0^T \frac{c_k(t)}{S_0(t)} dt \leq \mathbb{E}_0 \int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{S_0(t)} \tag{4.10}$$

Theorem 4.1 *[21] Suppose that we have constructed a complete, standard financial market satisfying Condition 4.4.1(i). Let $c_k(.)$ be a consumption process in this market that satisfies (4.10) with equality, namely*

$$\mathbb{E}_0 \int_0^T \frac{c_k(t)}{S_0(t)} dt = \mathbb{E}_0 \int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{S_0(t)} dt. \tag{4.11}$$

Then there exists a portfolio process $\pi_k(.)$ such that $(c_k, \pi_k) \in \mathcal{A}_k$, and the corresponding wealth process is given by

$$X_k(t) = \frac{1}{H_0(t)} \mathbb{E}\left[\int_t^T H_0(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.12}$$

4.6 The Individual Optimization Problems

Problem 4.1 *Discover an optimal pair* $(\hat{c}_k; \hat{\pi}_k)$ *for the problem of maximizing expected discounted utility from consumption*

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)} U_k(c_k(t))dt,$$

over consumption/portfolio process pairs in the set

$$\mathcal{A}' \triangleq \{(c_k, \pi_k) \in \mathcal{A}_k; \mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} min[0, U_k(c_k(t))]dt > -\infty\}. \tag{4.13}$$

We know that $c_k(t) \geq \bar{c}_k$ and $\mathbb{E}\int_0^T H_0(t)c_k(t)dt \leq \mathbb{E}\int_0^T H_0(t)\epsilon_k(t)dt$. We see that this problem is interesting only if the feasibility condition

$$\mathbb{E}\int_0^T H_0(t)\epsilon_k(t)dt \geq \bar{c}_k.\mathbb{E}\int_0^T H_0(t)dt \tag{4.14}$$

is satisfied.
To settle this problem, we define the non-increasing, continuous function $I_k :(0, \infty] \rightarrow [\bar{c}_k, \infty)$ which, when restricted to $(0, U'(\bar{c}_k))$, is the (strictly decreasing) inverse of $U'_k : (\bar{c}_k, \infty) \rightarrow (0, U'_k(\bar{c}_k))$. On the interval $[U'(\bar{c}_k), \infty]$, $e^{-\int_0^t \beta(u)du} U'_k(.)$ is $y \mapsto I_k(ye^{\int_0^t \beta(u)du})$.
We define

$$\mathcal{X}_k(y) \triangleq \mathbb{E}\int_0^T H_0(t) I_k(ye^{\int_0^t \beta(u)du} H_0(t))dt, \quad 0 < y < \infty. \tag{4.15}$$

4.7 Equilibrium and the Representative Agent

Theorem 4.2 *[21] If* $\mathcal{M}$ *is an equilibrium market, then*

$$\epsilon(t) = \sum_{k=1}^{K} I_k(\frac{1}{\lambda_k} e^{\int_0^t \beta(u)du} H_0(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.16}$$

where $\lambda_k \in [0, \infty)$, $k = 1, \ldots, K$, *satisfy the system of equations*

$$\mathbb{E}\int_0^T H_0(t)[I_k(\frac{1}{\lambda_k}e^{\int_0^t \beta(u)du}H_0(t)) - \epsilon_k(t)]dt = 0, \qquad k = 1, \ldots, K. \tag{4.17}$$

Conversely, if $\mathcal{M}$ *is a standard, complete financial market satisfying Condition 4.4.1and there exists a vector* $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_K\} \in [0, \infty)^K$ *satisfying (4.2) and (4.17), then* $\mathcal{M}$ *is an equilibrium market.*

In either case, the optimal consumption processes for the individual agents are given by

$$\hat{c}_k(t) = I_k(\frac{1}{\lambda_k}e^{\int_0^t \beta(u)du}H_0(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad k = 1, \ldots, K. \tag{4.18}$$

corollary 4.7.1 $\mathcal{M}$ *is a complete standard financial market satisfying the condition 4.4.1 is an equilibrium market if and only if its state price density process* $H_0(.)$ *is given by (*$H_0(t) = e^{-\int_0^t \beta(u)du}\mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda}), (0 \leq t \leq T)$*, where* $\tilde{\Lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_K) \in [0, \infty)^K \setminus (0, \ldots, 0)$*, is a solution to the system of equations*

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}\mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda})[I_k(\frac{1}{\lambda_k}\mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda})) - \epsilon_k(t)]dt = 0 \quad k = 1, \ldots, K \tag{4.19}$$

In this case, the optimal consumption process for the k^{th} *agent is*

$$\hat{c}_k(t) = I_k(\frac{1}{\lambda_k}\mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda})), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.20}$$

4.8 Main Results

The first result

Theorem 4.3 *(exponential utility with subsistence consumption) :*
With our function, the solution of the system of equations (4.19) and (4.20) is given by :

$$\log \lambda_k = \frac{\mathbb{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(u)du} \mathrm{e}^{-\epsilon(t)}[\epsilon(0) - \epsilon(t) - \bar{c}_k + \epsilon_k(t)]dt}{\mathbb{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(u)du} \mathrm{e}^{-\epsilon(t)}dt} \tag{4.21}$$

and the optimal of consumption processus :

$$\hat{c}_k(t) = \log \lambda_k - \epsilon(0) + \epsilon(t) + \bar{c}_k \quad k = 1, \ldots, K$$

Proof. Let $U_k(c) = 1 - e^{-(c-\bar{c}_k)}$, for $c > \bar{c}_k$, $k = 1, \ldots, K$, where $\bar{c}_k$ is a nonnegative constant. Then

$$U'(c; \tilde{\Lambda}) = \mathcal{H}(c; \tilde{\Lambda}) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k e^{-(c-\bar{c})}, \quad c > \bar{c}.$$

We normalize $\tilde{\Lambda}$ by setting $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = e^{\epsilon(0)-\bar{c}}$, a strictly positive quantity because of (Condition (4.4.1(iii)) then $\mathcal{H}(\epsilon(0); \Lambda) = 1$
We have equation (4.19)

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} \mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda})[I_k(\frac{1}{\lambda_k}\mathcal{H}(\epsilon(t); \tilde{\Lambda})) - \epsilon_k(t)]dt = 0$$

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}[-\log(\frac{1}{\lambda_k} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}) + \bar{c}_k - \epsilon_k(t)]dt = 0$$

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}[-\log \frac{1}{\lambda_k} - \log e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))} + \bar{c}_k - \epsilon_k(t)]dt = 0$$

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}[\log \lambda_k - (\epsilon(0) - \epsilon(t)) + \bar{c}_k - \epsilon_k(t)]dt = 0$$

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))} \log\lambda_k dt = \mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}[\epsilon(0)-\epsilon(t)-\bar{c}_k+\epsilon_k(t)]dt$$

$$\log\lambda_k = \frac{\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}[\epsilon(0)-\epsilon(t)-\bar{c}_k+\epsilon_k(t)]dt}{\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}dt}$$

$$\log\lambda_k = \frac{\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{-\epsilon(t)}[\epsilon(0)-\epsilon(t)-\bar{c}_k+\epsilon_k(t)]dt}{\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du} e^{-\epsilon(t)}dt}$$

■

We have

$$H_0(t) = \mathcal{H}(\epsilon(t);\tilde{\Lambda}) = e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))} \tag{4.22}$$

and the optimal consumption process is

$$\hat{c}_k(t) = I_k(\frac{1}{\lambda_k}\mathcal{H}(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})) = -\log\frac{1}{\lambda_k}e^{(\epsilon(0)-\epsilon(t))}+\bar{c}_k = \log\lambda_k-\epsilon(0)+\epsilon(t)+\bar{c}_k \quad k=1,\dots,K$$

For each agent, $\hat{c}_k > \bar{c}_k$ for all t, almost surely. The equilibrium market coefficients become :

1. $r(t) = \beta(t) + J(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})\nu(t) + \frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2 K(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})$,
   $r(t) = \beta(t) + \epsilon(t)\nu(t) - \epsilon(t)\frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2$,
   $r(t) = \beta(t) + \epsilon(t)[\nu(t) - \frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2]$,
2. $\theta(t) = J(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})\rho(t)$
   $\theta(t) = \epsilon(t)\rho(t)$,
3. $A(t) = \int_0^t J(\epsilon(s);\tilde{\Lambda})d\xi(s)$
   $A(t) = \int_0^t \epsilon(s)d\xi(s)$.

With : $J(c;\tilde{\Lambda}) = -cU''(c;\tilde{\Lambda})/U'(c;\tilde{\Lambda})$, $\quad K(c;\tilde{\Lambda}) = -cU'''(c;\tilde{\Lambda})/U'(c;\tilde{\Lambda})$,
and :

$U'(c;\tilde{\Lambda}) = e^{\epsilon(0)-\epsilon(t)}$,
$U''(c;\tilde{\Lambda}) = -e^{\epsilon(0)-\epsilon(t)}$,
$U'''(c;\tilde{\Lambda}) = e^{\epsilon(0)-\epsilon(t)}$.

The second result

Theorem 4.4 $(K = 2, U_1(c) = \log c, U_2(c) = 1 - e^{-c})$ *: In this case, we have*

$$U'(c,\tilde{\Lambda}) = \mathcal{H}(c,\tilde{\Lambda}) = \frac{\lambda_1}{c}[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}c\, e^{-c}]$$

and the optimal consumption rates become

$$\hat{c}_1(t) = \frac{\epsilon(t)}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\epsilon(t)e^{-\epsilon(t)}}, \quad \hat{c}_2(t) = -\log(\frac{\lambda_1}{\lambda_2\epsilon(t)} + e^{-\epsilon(t)});$$

With :

$$\hat{c}_k(t) = I_k(\frac{1}{\lambda_k}\mathcal{H}(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})).$$

The positive constants λ_1 and λ_2 are uniquely determined by (4.19) with $k = 1$:

$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}\mathcal{H}(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})[I_1(\frac{1}{\lambda_1}\mathcal{H}(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})) - \epsilon_1(t)]dt = 0$

$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}\lambda_1 dt - \mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}\frac{\lambda_1}{\epsilon(t)}[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\epsilon(t)e^{-\epsilon(t)}]\epsilon_1(t)dt = 0$

$\mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}dt = \mathbb{E}\int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)du}[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\epsilon(t)e^{-\epsilon(t)}]\frac{\epsilon_1(t)}{\epsilon(t)}dt$
and the normalization condition $(\mathcal{H}(\epsilon(0),\tilde{\Lambda}) = 1)$ gives

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon(0)}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\epsilon(0)e^{-\epsilon(0)}}$$

With the vector $\tilde{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in (0,\infty)^2$ thus determined, the formulae

1. $r(t) = \beta(t) + J(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})\nu(t) + \frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2 K(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})$,
2. $\theta(t) = J(\epsilon(t);\tilde{\Lambda})\rho(t)$,

3. $A(t) = \int_0^t J(\epsilon(s); \tilde{\Lambda}) d\xi(s)$.

With : $J(c;\tilde{\Lambda}) = -cU''(c;\tilde{\Lambda})/U'(c;\tilde{\Lambda}), \quad K(c;\tilde{\Lambda}) = -cU'''(c;\tilde{\Lambda})/U'(c;\tilde{\Lambda})$,
and :
$U'(c;\tilde{\Lambda}) = \frac{\lambda_1}{c} + \lambda_2 e^{-c}$,
$U''(c;\tilde{\Lambda}) = -\frac{\lambda_1}{c^2} - \lambda_2 e^{-c}$,
$U'''(c;\tilde{\Lambda}) = \frac{2\lambda_1}{c^3} + \lambda_2 e^{-c}$.

4.9 Data and Application with R

To both application, we consider data from this sources :

https ://www.ase.com.jo/en/bulletins/monthly/new/2017-04-02

Months2017	Company								
	Banks	Insurance	Real Estate	Health Care Services	Hotels and Tourism	Commercial Services	Food and Beverages	Tobacco and Cigarettes	Textiles, Leathers and Clothings
April	22621257	1669942	33795493	392468	10095133	3514540	1711721	11009401	3400827
May	21844900	661421	32567875	254508	5621097	2354639	1185402	16911687	3922181
June	13594215	354723	19974510	1074199	4693687	860891	255554	17377690	2861546
July	14420824	1157921	24219440	869242	12426350	3539889	594304	25833534	2798023
August	18644938	1588761	20756184	133943	8025942	1084456	1245781	23826569	1555486
September	13792724	1172150	15515748	46459	6089624	1027808	208830	2329923	3328851
October	12407372	1546185	21180812	99502	5614900	1667680	361734	12189440	3931186
November	25769792	2900496	15843270	303462	4391184	1696534	826509	7066985	3133471
December	20796111	1295214	19298358	427838	1464767	2549383	14952771	4144847	2859095

TABLE 4.1 – Value traded by different companies with Jordanian Dinar

Months 2017	Banks	Insurance	Real Estate	Health Care Services	Hotels and Tourism	Commercial Services	Food and Beverages	Tobacco and Cigarettes	Textiles, Leathers and Clothings
April	-4,26%	-1,17%	-2,19%	3,15%	-0,30%	-3,71%	-3,60%	-3,50%	-6,56%
May	-0,84%	-1,95%	-2,11%	2,06%	-0,85%	2,82%	-0,98%	15,77%	0,02%
June	-0,21%	0,10%	0,03%	-0,46%	-1,47%	1,97%	0,56%	-2,57%	-1,71%
July	-0,19%	-0,87%	-2,20%	4,13%	-1,45%	0,45%	-3,51%	-4,45%	0,10%
August	0,50%	0,46%	-1,96%	5,29%	-1,16%	-0,32%	-0,71%	6,59%	-6,24%
September	-1,54%	-0,83%	-2,23%	-1%	-0,09%	0,74%	1,03%	-3,28%	-2,22%
October	-1,28%	-1,69%	-2,29%	0,38%	-2,96%	3,57%	-2,27%	5,09%	-4,24%
November	1,61%	1,34%	-2,75%	1,20%	0,65%	0,55%	0,48%	9,25%	3,99%
December	0,74%	-0,03%	-1,64%	2,35%	2,53%	5,71%	0,80%	6,21%	1,26%

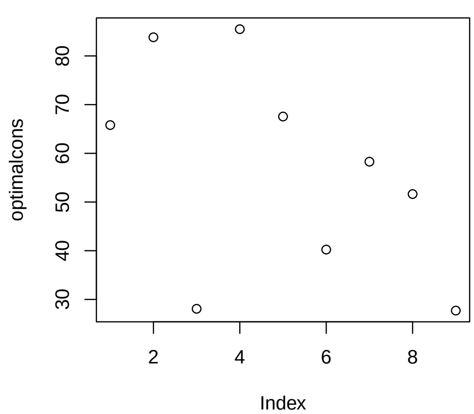
TABLE 4.2 – Change

The first application

In this application the endowment unite is million Jordanian Dinar

```
(%Programme)
Endowment<-c(22.621257,21.844900,13.594215,14.420824,18.644938,
13.792724,12.407372,25.769792,20.796111,1.669942,0.661421,
0.354723,1.157921,1.588761,1.172150,1.546185,2.900496,
1.295214,33.795493,32.567875,19.974510,24.219440,20.756184,
15.515748,21.180812,15.843270,19.298358,0.392468,
0.254508,1.074199,0.869242,0.133943,0.046459,0.099502,
0.303462,0.427838,10.095133,5.621097,4.693687,12.426350,
8.025942,6.089624,5.614900,4.391184,1.464767,3.514540,
2.354639,0.860891,3.539889,1.084456,1.027808,1.667680,
1.696534,2.549383,1.711721,1.185402,0.255554,0.594304,
1.245781,0.208830,0.361734,0.826509,14.952771,11.009401,
16.911687,17.377690,25.833534,23.826569,2.329923,
12.189440,7.066985,4.144847,3.400827,3.922181,2.861546,
2.798023,1.555486,3.328851,3.931186,3.133471,2.859095)

Change<-c(-4.26,-0.84,-0.21,-0.19,0.50,-1.54,-1.28,1.61,0.74,-1.17,
-1.95,0.10,-0.87,0.46,-0.83,-1.69,1.34,-0.03,-2.19,-2.11,0.03,-2.20,
-1.96,-2.23,-2.29,-2.75,-1.64,3.15,2.06,-0.46,4.13,5.29,-1,0.38,1.20,
2.35,-0.30,-0.85,-1.47,-1.45,-1.16,-0.09,-2.96,0.65,2.53,-3.71,2.82,
1.97,0.45,-0.32,0.74,3.57,0.55,5.71,-3.60,-0.98,0.56,-3.51,-0.71,
1.03,-2.27,0.48,0.80,-3.50,15.77,-2.57,-4.45,6.59,-3.28,5.09,9.25,
6.21,-6.56,0.02,-1.71,0.10,-6.24,-2.22,-4.24,3.99,1.26)
Consumption<-Endowment*(1-Change/100)
n<-length(Endowment)
E=matrix(Endowment,nrow=sqrt(n),ncol=sqrt(n))
C=matrix(Consumption,ncol=sqrt(n),nrow=sqrt(n))
CH<-matrix(Change,ncol=sqrt(n),nrow=sqrt(n))
epsilont<-rowSums(E)
epsilon0<-E[1,]
```

```
meanc<-matrix(rep(colMeans(C)),n,nrow=sqrt(n),ncol=sqrt(n))

for (j in 1:sqrt(n)) { for (i in 1:sqrt(n)) {if(C[i,j]>=meanc[i,j])
C[i,j]<-C[i,j] else C[i,j]<-NA}}     %Condition 4.4.1(i)

for (j in 1:sqrt(n)){for (i in 1:sqrt(n)) {if(E[i,j]>=meanc[i,j])
E[i,j]<-E[i,j] else E[i,j]<-NA}}     %Condition 4.4.1(ii)

cbark<-apply(1-exp(-(C-meanc)),na.rm=TRUE,2,min) beta<-0.2

D<-colSums(exp(-beta)*exp(-epsilont)*(epsilon0-epsilont-cbark+E),
    na.rm=TRUE)
N<-sum(exp(-beta)*exp(-epsilont))
loglamda<-D/N
optimalcons=loglamda-epsilon0+epsilont+cbark

optimalcons    %(The optimal consumption for 9 agents)
[1] 65.80298 83.83246 28.07628 85.49204 67.55870 40.23892 58.28709
    51.63494  27.71063
```



The second Application

We suppose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ obviously $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}) = 1$

The endowment unite in this example is Jordanian Dinar

```
%programme
Endowment<-c(22621257,21844900,13594215,14420824,18644938,
13792724,12407372,25769792,20796111,1669942,661421,354723,
1157921,1588761,1172150,1546185,2900496,1295214,33795493,
32567875,19974510,24219440,20756184,15515748,21180812,
15843270,19298358,392468,254508,1074199,869242,133943,46459,
99502,303462,427838,10095133,5621097,4693687,12426350,8025942,
6089624,5614900,4391184,1464767,3514540,2354639,860891,3539889,
1084456,1027808,1667680,1696534,2549383,1711721,1185402,255554,
594304,1245781,208830,361734,826509,14952771,11009401,16911687,
17377690,25833534,23826569,2329923,12189440,7066985,4144847,
3400827,3922181,2861546,2798023,1555486,3328851,3931186,
3133471,2859095)

n<-length(Endowment)
E<-matrix(Endowment,nrow=sqrt(n),ncol=sqrt(n))
epsilon<-rowSums(E)
C_1=(epsilon)/(1+epsilon*exp(-epsilon))
C_2=-log((1/epsilon)+exp(-epsilon))

C_1                 %(represents the wealth)
[1] 88210782 85323710 61047015 85859527 76862060 43512117 58998811
61931703 67788384

C_2                 %(represents the consumption)
[1] 18.29524 18.26196 17.92715 18.26822 18.15752 17.58855 17.89303
17.94154 18.03190
```

4.10 Conclusion

This paper analyzed the model of equilibrium in the interval $[0, T]$ and the exponential utility function was chosen to maximize the investment with the dual convex method and to have an optimal pair (consumption / portfolio).

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on a étudié le problème d'équilibre pour un marché financier complet. L'objective est de maximiser le portefeuille. L'approche utilisée est la méthode de convexe dual pour la fonction d'utilité exponentielle.

Etude dans un proche avenir du même problème mais pour un marché financier incomplet.

Summary

This thesis is devoted to equilibrium in a complete financial market in continuous time which is the optimization of the consumption of the investor to obtain a maximum portfolio with prices determined by a Brownian Motion on the interval [0,T], the method used is the dual convex for the exponential utility function.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'équilibre sur un marché financier complet en temps continu qui est tout simplement l'optimisation de la consommation d'investisseur pour obtenir un portefeuille maximal avec des prix déterminés par un Mouvement Brownien sur l'intervalle [0,T], la méthode utilisée est le convexe dual pour la fonction d'utilité exponentielle.

ملخص

هذه الأطروحة مكرّسة لتحقيق التوازن في سوق مالية كاملة في وقت مستمر أي تحسين استهلاك المستثمرين للحصول على أقصى محفظة مع الأسعار التي تحددها الحركة البراونية على الفاصل الزمني [T , 0] .

Bibliographie

[1] Arrow, K.J. Debreu, G. *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Econometrica 22(3), 265-290 (1954).

[2] Bachelier, L. *Théorie de la spéculation.* thèse, Annales scientifiques de l'école normale supérieur, Série 3, (17) : 21-86, janvier 1900.

[3] Bick, A. *On viable diffusion price processes of the market portfolio.* Journal of Finance (45) : 673-689, 1990.

[4] Black, F. and Scholes, M. *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy, (81) : 637-654, May-June 1973.

[5] Chauveau, T. *L'équilibre d'un marché financier.* Lavoisier , 2004.

[6] Cox, J. C. and Ross, S. A. *An intertemporal general equilibrium model of asset prices.* Econometrica (53) : 363-384, 1985.

[7] Dacunha-Castelle, D. and Duflo, M. *Probabilités et statistiques, tome 1, Problèmes à temps fixe*, Masson, 1982.

[8] Dacunha-Castelle, D. and Duflo, M. *Probabilités et statistiques, tome 2, Problèmes à temps mobile*, Masson, 1983.

[9] Dana, R. A. and Jeanblanc, M. *Marchés financiers en temps continu : valorisation et équilibre.* Économica, Paris. 1994.

[10] Dana, R. A. and Jeanblanc, M. *Financial Markets in Continus Time*, Springer ,2007.

[11] Derbeu, G. *Théorie de la valeur*, Dunod, Paris. 1966.

[12] Duffie, D. and Skiadas, C. *Continuous-time security pricing : A utility gradient approach.* Journal of Mathematical Economics (23) : 107-131, 1994.

[13] Ekeland, I. and Temam, R. *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, Amsterdam and American Elsevier, New York,1976.

[14] Ekeland, I. *Éléments d'économie mathématique*, Collection "Méthodes" Hermann, Paris. 1979.

[15] El Karoui, N. and Gobet, E. *Les outils stochastiques des marchés financiers*,L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 2011

[16] Braudel, F. *Civilisation matérielle, économie et capitalisme, Armand Colin,* $XV^e - XVIII^e$ *siècles.*

[17] Hammad, M. and Limam-Belarbi, F. *Optimal consumption and investment with lévy processes for power utility functions.* International Journal of Statistics and Economics, 18(3) : 1-8, 2017.

[18] He, H. and Leland, H. *On equilibrium asset price processes*, Review of Financial Studies (6) : 593-617, 1995.

[19] Henderson, J. M. and Quandt, R. E. *Microéconomie, formulation mathématique élémentaire*, Trad par D. Godard et F. Eldin avec la collaboration de J.-L Faure et J.-L Viora. Dunod, Paris. 1967.

[20] Karatzas, I. and Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New-York, 1988.

[21] Karatzas, I. and Shreve, S. *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Verlag, New York, 1998.

[22] Laffont, J. J. *Cours de théorie microéconomique, Volume 2, Économie de l'Incertain et de l'Information.* Économica, Paris. collection « Economie et Statistiques Avancées ». 1991.

[23] Le Saout, E. Théodore, J. F. *Introduction aux Marchés Financiers.* ECONOMICA , 2006.

[24] Malinvaud, E. *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, Paris. quatrième édition 1982.

[25] MERTON, R. C. *Optimum consumption and portfolio rules in a continous time model1*, J.Econom.Theory, 373-413 ,1971.

[26] MERTON, R. C. *Theory of rational option pricing.* The Bell Journal of Economics and Management Science, 4 :141-183, 1973.

[27] MOULIN, H. and FOGELMAN-SOULIÉ, F. *La convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann, Paris. Collection Méthodes 1979.

[28] Raimondo, R. C. *Market clearing, utility functions, and securities prices*, Economic Theory (25) : 265-285, 2005.

[29] Rockafellar, R. *Convex Analysis, Princeton University Press*, Princeton, NJ, 1970.

[30] Scarf, H. *On the Computation of Equilibrium Prices*, In Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher 1967.

[31] Varian, H. R. *Microeconomic analysis*, W.W.Norton , New York, London. 1992.