



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Par :

Monsieur BOUAMAMA Mohamed

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Intitulé de la thèse

Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM

Soutenue le : 25/07/2019

Devant le Jury Composé de :

BOUKHOULDA Farouk Benallel	Professeur	Président	UDL Sidi Bel Abbès
REFASSI Kaddour	Professeur	Directeur de thèse	UDL Sidi Bel Abbès
MEGUENI Abdelkader	Professeur	Co-directeur de thèse	UDL Sidi Bel Abbès
BOUZIANE Mohamed Mokhtar	MCA	Examineur	Université de Mascara
GHAZI Abdelkader	MCA	Examineur	Université de Mascara
SERIER Mohamed	MCA	Examineur	C.U.Relizane

Année Universitaire: 2018-2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont les plus chers au monde:

A mes très chers parents, que dieu les protège et les garde pour nous inchallah.

A mes très chers frères et sœurs

*A mon très cher neveu **Mohamed Adam** et ma très chère nièce **Aya***

*A toute la famille **BOUAMAMA** et **ACHOUR**. Ainsi qu'a tous mes amis.*

M^r. Mohamed BOUAMAMA

Remerciement

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire mécanique des solides et structures LMSS.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur le Professeur

***Kaddour REFASSI** pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant et d'actualité, pour sa disponibilité et son soutien pendant toutes ces années de recherche. J'ai beaucoup appris de lui et j'en apprendrai encore.*

*Je remercie vivement mon co-encadreur, le Professeur **Abdelkader MEGUENI**, directeur du laboratoire LMSS qui s'est montré très disponible et à l'écoute de mes idées et mes questions malgré ses charges et d'avoir la gentillesse d'apporter généreusement son aide.*

*Je remercie le Professeur **BOUKHOULDA Farouk Benallel**, De m'avoir aidée et encouragée et d'avoir accepté de présider le jury.*

*J'adresse mes remerciements à Messieurs les Docteurs **BOUZIANE Mohamed Mokhtar**, **GHAZI Abdelkader** et **SERIER Mohamed** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à ma famille, tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches. Je remercie spécialement **Mr .Abbes EL MEICHE**,*

*, **Mr .Abdelhak EL HANNANI**, tous mes collègues et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail de doctorat.*

ملخص

يتناول هذا العمل دراسة السلوكيات الديناميكية واستقرار الحزم في المواد المترجة وظيفيا. من المفترض أن تتغير خصائص المادة للحزم بشكل مستمر من خلال السمك وفقاً لقانون الطاقة ; المادتين التي عملنا بهما هما المعادن والسيراميك. تبدأ هذه الدراسة بتحليل مفصل لتأثير التدرج المادي وسمكها. يتم الحصول على الحلول التحليلية للسلوك الديناميكي الحر تحت شروط الحدود المختلفة.

في الجزء الثاني ، نهتم بالاستقرار الديناميكي للحزمة بالمواد المترجة وظيفيا ، مع الأخذ بعين الاعتبار التخمد الداخلي والقص العرضي الذي تم تصميمه بواسطة شعاع تيموشينكو. يتم تطوير معادلات الحركة العامة باستخدام مبدأ لاجرانج المرتبط بصيغة العناصر المحدودة لوصف الترددات الخاصة وكذلك ترددات النظام الديناميكي المخمد.

تتم مقارنة النتائج العددية المتحصل عليها عن طريق تلك المتوفرة في المراجع. يتم إعطاء أمثلة توضيحية لإظهار تأثير التخمد الداخلي على هامش الاستقرار لهذا النوع من حزمة من المواد المترجة وظيفيا.

الكلمات المفتاحية: الحزم ، المواد المركبة المترجة وظيفيا، السلوك الديناميكي ، التخمد الداخلي ، القص العرضي ، الترددات الخاصة ، ترددات مخددة

Résumé

Ce travail a pour objet l'étude des comportements dynamiques et la stabilité des poutres en matériau fonctionnellement gradué (FGM). Les propriétés matérielles de la poutre sont supposées être variées de façon continue à travers l'épaisseur selon la loi de puissance (P-FGM) ; les deux matériaux avec lesquels on a travaillé sont les métaux et les céramiques.

Cette étude commence par une analyse détaillée de l'effet de la graduation matérielle et de l'épaisseur de la couche FGM sur les fréquences propres de la poutre sandwich. Des solutions analytiques du comportement dynamique libre sont obtenues sous différentes conditions aux limites.

Dans la seconde partie, nous sommes intéressés à la stabilité dynamique de la poutre en FGM avec prise en compte de l'amortissement interne et de cisaillement transversal, modélisé par la poutre de Timoshenko. Les équations globales de mouvements sont développées en utilisant le principe de Lagrange associé à une formulation par éléments finis pour décrire les fréquences propres ainsi que les fréquences amorties de système dynamique.

Les résultats numériques obtenus sont comparés par ceux disponibles dans la littérature. Des exemples illustratifs sont donnés pour montrer l'influence des amortissements internes sur la marge de stabilité de ce genre de poutres en FGM.

Mots clés : Poutres, Matériaux Composites en FGM, Comportement Dynamique, Amortissement Interne, Cisaillement Transversal, Fréquences Propres, Fréquences Amorties.

Abstract

This work deals with the study of dynamic behaviors and the stability of beams in functionally graded material (FGM). The material properties of the beam are assumed to be continuously varied across the thickness according to the power law (P-FGM); the two materials we worked with are metals and ceramics.

This study begins with a detailed analysis of the effect of the material gradation and the thickness of the FGM layer on the eigenfrequencies of the sandwich beam. Analytical solutions of free dynamic behavior are obtained under different boundary conditions.

In the second part, we are interested in the dynamic stability of the FGM beam, taking into account internal damping and transverse shearing, modeled by Timoshenko's beam. The global equations of motion are developed using the Lagrange principle associated with a finite element formulation to describe the natural frequencies as such damped frequencies of dynamic system.

The numerical results obtained are compared by those available in the literature. Illustrative examples are given to show the influence of internal damping on the stability margin of this kind of FGM beams.

Keywords: Beams, FGM Composite Materials, Dynamic Behavior, Internal Damping, Transverse Shear, Eigenfrequencies, Damped Frequencies.

Sommaire

<i>Dédicace</i>	i
<i>Remerciement</i>	ii
<i>ملخص</i>	iii
Résumé.....	v
Abstract.....	iii
Sommaire.....	vi
Listes des figures.....	vii
Liste des Tableaux.....	viii
Liste des symboles.....	ix
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Définition d'un matériau composite.....	5
I.3. Bref historique.....	5
I.4. Constituants des matériaux composites.....	6
I.5. Avantages et inconvénients.....	10
I.6. Champs d'utilisation.....	11
Les composites trouvent leurs principales applications dans :.....	11
I.7. Les matériaux composites structuraux.....	13
I.7.1. Monocouches.....	13
I.7.2. Stratifiés.....	13
I.8. Matériaux Sandwichs.....	14
I.8.1. Éléments constituant les matériaux sandwichs.....	15
I.8.2. Conception des structures sandwichs.....	17
I.9. Modélisation des structures composites.....	18
I.10. Conclusion.....	20
Chapitre II : Matériaux composites en FGM	21
II.1. Introduction.....	21
II.2. Bref historique.....	21
II.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	22
II.4. Champs d'utilisation.....	23
II.4.1. Champ d'aérospatiale.....	23
II.4.2. Dans la médecine.....	24
II.4.3. Dans l'industrie.....	24
II.4.4. Articles de sports.....	24
II.4.5. Autres champs d'applications.....	25
II.5. Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés.....	25
II.5.1. Procédé de poudre sèche.....	25
II.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	26
II.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting).....	27
II.5.4. Coulage en bande.....	28
II.5.5. Pressage à chaud.....	29
II.5.6. Processus de frittage.....	29
II.5.7. Processus d'infiltration.....	30
II.5.8. Projection thermique.....	30
II.6. Propriétés matérielles des poutres FGM.....	30
II.7. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	31
II.7.1. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	32
II.7.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	33
II.8. Conclusion.....	34

Chapitre III : Théories des poutres	24
III.1. Introduction	35
III.2. Définition d'une poutre	35
III.3. Conditions aux limites d'une poutre	35
III.4. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres	36
III.4.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)	37
III.4.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT)	38
III.4.3. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT).....	40
III.5. Conclusion.....	44
Chapitre IV : Vibration libre des poutres en FGM	40
IV.1. Introduction	45
IV.2. Vibration libre non amortie des poutres en FGM	45
IV.2.1. Modélisation d'une poutre en FGM par la théorie classique de Bernoulli (CBT)...	45
IV.2.2. Tenseur des déformations.....	46
IV.2.3. Tenseur des contraintes	46
IV.2.4. Equation d'équilibre de la poutre en FGM.....	47
IV.2.5. Les solutions mathématiques.....	51
IV.2.6. Fréquences naturelles et modes propres.....	53
IV.3. Vibration libre amortie des poutres en FGM.....	55
IV.3.1. Modélisation de la poutre par élément finis	58
IV.3.2. Calcul des valeurs propres.....	60
IV.4. Conclusion.....	62
Chapitre V : Résultats et commentaires	40
V.4. Introduction	63
V.5. Vibration libre des poutres sandwich en FGM	63
V.5.1. Propriétés matérielles de la poutre FGM.....	63
V.5.2. Propriétés des matériaux	64
V.5.3. Résultats numériques	65
V.6. Étude de stabilité de la poutre en FGM.....	72
V.6.1. Résultats numériques	72
V.7. Conclusion.....	76
Conclusion Générale	77
Références Bibliographiques	78

Listes des figures

<i>Figure I. 1. Matériau composite en général</i>	6
<i>Figure I. 2. Différentes familles des matrices</i>	8
<i>Figure I. 3. Principaux matériaux de renfort</i>	9
<i>Figure I. 4. Matériau composite monocouche</i>	13
<i>Figure I. 5. Matériau composite stratifié</i>	14
<i>Figure I. 6. Schéma d'un sandwich</i>	15
<i>Figure I. 7. Matériaux sandwichs à âmes pleines</i>	16
<i>Figure I. 8. Matériaux sandwichs à âmes creuses avec nid d'abeilles et âme ondulée</i>	17
<i>Figure I. 19. Les différentes échelles d'étude d'un stratifié</i>	19
<i>Figure II. 1. Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels</i>	22
<i>Figure II. 2. La distribution composante des matériaux</i>	23

Figure II. 3. Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM	26
Figure II. 4. Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale.....	27
Figure II. 5. Installation du coulage centrifuge verticale	28
Figure II. 6. Système de processus de coulage en bande	29
Figure II. 7. Géométrie d'une poutre en FGM.....	31
Figure II. 8. La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.....	32
Figure II. 9. La variation du module de Young dans une poutre E-FGM.....	33
Figure II. 10. La variation du module de Young dans une poutre S-FGM	34
Figure III. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.	37
Figure III. 2. Cinématique de Timoshenko	39
Figure III. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	41
Figure IV. 1. Poutre en FGM de Timoshenko avec DIVD	55
Figure IV. 2. Schéma d'amortissement	56
Figure IV. 3. Modèles rhéologiques standards classiques	57
Figure IV. 4. Modèle d'EF de la poutre de Timoshenko à 4 DDL	58
Figure V. 1. Géométrie d'une poutre sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes....	64
Figure V. 2. Géométrie d'une poutre sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes....	64
Figure V. 3. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 0.1$	69
Figure V. 4. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 1$	69
Figure V. 5. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 10$	70
Figure V. 6. La comparaison entre les Fréquences naturelles d'une poutre bi-encasté en FGM avec les fréquences naturelles d'une poutre en aluminium pour ($p=0.1$).....	71
Figure V. 7. La comparaison entre les Fréquences naturelles d'une poutre bi-encasté en FGM avec les fréquences naturelles d'une poutre en allumine pour ($p=0.1$).....	71
Figure V. 8. Géométrie de poutre en FGM.....	72
Figure V. 9. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=5$	73
Figure V. 10. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=10$	74
Figure V. 11. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=15$	74
Figure V. 12. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=20$	75

Liste des Tableaux

Tableau I. 1. Propriétés de quelques éléments de renfort	10
Tableau III. 1. Principales conditions aux limites pour les poutres	36
Tableau IV. 1. Les vecteurs propres	54
Tableau V. 1. La variation des fréquences unidimensionnelles pour différentes conditions aux limites et différents indice de fractions volumiques	66
Tableau V. 2. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encasté-encasté (C-C).....	67

Tableau V. 3. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich appuyé-appuyé (S-S).....	67
Tableau V. 4. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encastré-appuyé (C-S)	68
Tableau V. 5. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encastré-libre (C-F).....	68
Tableau V. 6. Propriétés matérielle de la poutre en FGM.....	72
Tableau V. 7. Comparaison des fréquences naturelles non amortie	73

Liste des symboles

$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contraintes
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformations
E_{ij}	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
G_{xz}	Module de cisaillement transversal
u	Déplacement suivant X
w	Déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche
u^0	Déplacement au milieu de la section suivant X
w^0	Déplacement au milieu de la section suivant Y
θ	Rotation suivant X
$w^{0,x}$	Rotation de la section
G_{xz}	Module de cisaillement transversal
T_{xz}	Contrainte de cisaillement
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$f'(z)$	Fonction de cisaillement
b	Largeur de la poutre
h	Hauteur de la poutre
L	Longueur de la poutre
ℓ	Longueur élémentaire de la poutre
δW_{ext}	Le travail extérieur
δW_{int}	Le travail intérieur
A_{11}, B_{11}, D_{11}	Coefficients de rigidités
M	Le moment de flexion
N	L'effort normal
ε_0	La déformation normale
K_x	La courbure de flexion

$W(x)$	Amplitude de la vibration
t	Temps
ω_n	Fréquence naturelle de la poutre FGM
$\bar{\omega}_n$	Fréquence naturelle non dimensionnelle de la poutre FGM
ω_d	Fréquence amortie de la poutre FGM
f_v	Forces extérieurs volumiques
f_s	Forces extérieurs surfaciques
ρ	Densité massique
ξ_j	Rapport des coefficients de rigidité
β_n	Nombre d'onde
I_1	Fonction de la fraction volumique
p	Indices de fraction volumique
\dot{u}	vitesse transversale de la poutre
c_b	coefficient d'amortissement en flexion
c_s	coefficient d'amortissement en cisaillement
η_s	Facteur d'amplification en cisaillement
η_b	Facteur d'amplification en flexion
β	coefficient d'amortissement interne visqueux globale
κ	Facteur correcteur de cisaillement
$[M]$	Matrice de masse
$[K]$	Matrice de rigidité
$[C]$	Matrice d'amortissement
T	Énergie cinétique
V	Énergie potentielle
\mathcal{R}	Fonction de dissipation de Rayleigh
\mathcal{L}	Fonction de Lagrangien

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La technologie moderne est la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication réduit. Aucun matériau simple ne combine pas toutes ces caractéristiques, pour atteindre cet objectif, il faut utiliser des matériaux composites.

Un matériau composite est composé d'au moins deux matériaux non-miscibles. L'objectif est de pouvoir utiliser les propriétés de chaque matériau à leur maximum et d'obtenir un mélange qui est plus performant qu'un matériau traditionnel homogène. Les matériaux composites fabriqués avec des fibres, de verre ou de carbone avec une matrice en époxy sont très communs dans l'industrie aéronautique et spatiale où le poids est un paramètre critique. Ils sont également utilisés dans l'industrie du sport et de la haute performance de plus en plus, dans les voiliers de compétition par exemple. En effet, les fibres de carbone par exemple, possèdent un quotient résistance en tension sur poids et un quotient module de rigidité sur poids plus élevé que l'acier et l'aluminium et ceci les rends très intéressants à utiliser.

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie grâce à leurs performances ; par exemple, une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à hautes températures. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface. Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel (FGM).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisés par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels. Des recherches ont été établies afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se

sont concentrées principalement sur les secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal.

Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir une haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Plusieurs recherches ont été menées sur le comportement mécanique et thermique des FGM (Tanigawa 1995 ; Suresh and Mortensen 1998 ; Matsunaga 2009 ; Reddy 2001 ; Kettaf 2013). (Fuchiyama et Noda 1995) ont étudié le transfert de chaleur par conduction transitoire et la contrainte thermique par la MEF avec des propriétés du matériau qui varient graduellement.

Le plus simple FGM, deux matériaux différents changent graduellement de l'un à l'autre. La plus part des familles du FGM sont composées graduellement de céramique réfractaire à un métal. Typiquement, les FGMs sont construites à partir d'un mélange de céramique et de métal ou une combinaison de différents matériaux. Actuellement les FGMs sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes. En raison de la large application du FGM, plusieurs études ont été effectuées pour analyser les comportements et comprendre les mécaniques et les mécanismes des structures FGM.

Des études approfondies théoriques et expérimentales ont été réalisées et publiées, sur la mécanique de rupture (Bae et Wang 1995 ; Marur 1995), la répartition des contraintes thermiques (Williamsson et Dake 1995).

L'étude du comportement de tels matériaux est très nécessaire afin de prétendre leur attitude et d'estimer leur durée de vie pour en avoir des pièces robustes et fiables.

A cause de leur géométrie spéciale, les poutres sont largement utilisées comme composant structural dans plusieurs applications de construction.

L'importance de développer une analyse sur le comportement vibratoire des poutres est liée à l'utilisation des poutres comme des éléments de base dans la réalisation des structures, et de déterminer les effets de la variation des conditions aux limites, ainsi que la variation du matériau sur les fréquences naturelles et les modes propres de structure.

Un grand nombre d'études peut être trouvé dans la littérature sur le sujet de vibration des poutres en FGM. (Öz 2000) a calculé les fréquences naturelles d'une poutre Euler-Bernoulli avec une masse concentrée en utilisant la méthode des éléments finis avec différentes conditions aux limites. (Alshorbagy, Eltaher and Mahmoud 2011) ont étudié les caractéristiques des poutres Euler-Bernoulli pour la vibration libre des poutres FGM à la fois axialement et transversalement à travers l'épaisseur de la poutre, (Aydogdu and Taskin 2007) ont étudié la vibration libre des poutres FGM simplement appuyé avec Le module de Young varie dans le sens de l'épaisseur de la poutre selon la loi exponentielle. En utilisant la Méthode de Navier pour obtenir des fréquences propres. Différentes théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur et des théories classiques (CBT) de la poutre ont été utilisées dans cette étude. (Chakraborty and Gopalakrishnan 2003) ont employé la fonction de loi de puissance, et la fonction exponentielle pour décrire la distribution des propriétés.

Les problèmes des vibrations des structures sont devenus l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile, etc.), dont la réduction de ces vibrations est un facteur indispensable afin d'améliorer les performances des structures. Dans ce contexte, l'amortissement soit interne ou externe est un sujet de recherche actuel et intéresse plusieurs chercheurs. Dans notre projet on cible l'amortissement interne pour des nouveaux types de matériaux appelée FGM. Des études approfondies théorique et expérimentale ont été réalisées et publiées sur l'amortissement des poutres et sandwich ; citeront (Van de Vegte and de Silva 1976) qui ont proposé une technique de conception d'amortisseur d'absorbeurs basée sur le contrôle modale permettant de contrôler les vibrations des poutres. (Hujare and Sahasrabudhe 2014) ont étudié l'effet de l'épaisseur appropriée du matériau d'amortissement contraints sur le facteur de perte modale de la poutre sandwich vibrantes. (Horel 2013) a développé un modèle analytique fiable permettant de déterminer les fréquences naturelles et les facteurs de perte de structures composites sandwichs à âme en nid d'abeille contenant des couches viscoélastiques dans ses peaux. ; (Assarar 2009); (Boudaoud 2000) ont proposé des formulations analytiques et élément finis pour la modélisation simple du comportement modale des structures sandwich à amortissement actif-passif ; (Capsoni, Maria Viganò and Bani-Hani 2013) ont fait une analyse de la réponse dynamique de la poutre en aluminium avec amortissement interne visqueux en utilisant le modèle de kelvin Voigt; (Tsai, Tsau and Chen 2009) ont étudié les effets de l'amortissement interne, la longueur et l'emplacement du segment amorti sur la vibration de la poutre.

Le présent travail de la thèse consiste à étudier la vibration libre des poutres en matériaux à gradients de propriétés « FGM ». Pour ce fait, notre thèse s'articule autour de deux parties essentielles. La première présente une étude bibliographique et la deuxième partie contient l'étude analytique du travail.

La partie d'étude bibliographique comprend trois chapitres :

- On va présenter dans le premier chapitre des généralités sur les matériaux composites en décrivant leurs domaines d'utilisations, types et classification ;
- le deuxième chapitre décrit d'une manière générale les matériaux composites en FGM ainsi que leurs domaines d'utilisation, leurs concepts et leurs caractéristiques.
- Puis, le troisième chapitre propose une modélisation analytique des poutres basant sur différentes théories notamment (théorie CBT, FSDBT,....)
- Le quatrième chapitre est composé de deux sections ; la première partie présente un modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli en FGM soumise à des vibrations libres non amortie. Cette étude est basée sur l'établissement des équations d'équilibres pour différentes conditions aux limites. La deuxième section cible la modélisation par éléments finis afin d'analyser la stabilité dynamique d'une poutre de Timoshenko en FGM par l'inclusion de l'amortissement interne visqueux.
- Quand au cinquième chapitre, nous avons validé les fréquences propres du présent modèle avec ceux de la littérature. une étude sur le comportement dynamique et la stabilité des poutres en FGM est également établi.
- En fin, ce travail se termine par une conclusion générale sur le comportement vibratoire des poutres en FGM ainsi que des perspectives envisagées à l'avenir.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs (constructeurs). Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Les chercheurs sont le plus souvent amenés à optimiser les solutions déjà utilisées, mais dans certains cas, ils doivent complètement repenser le problème et envisager de " nouveaux matériaux ". En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est l'aboutissement à un matériau composite. Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques aux matériaux de renfort : la rigidité, la résistance à la rupture, la dureté, etc.

Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques du composite tel que: le comportement thermique, la tenue à la température, la tenue au feu, la résistance à l'abrasion, les propriétés électriques, etc.

I.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes. Leur association est complémentaire et permet d'aboutir à un matériau dont les performances recherchées seront supérieures à celles des composants pris séparément. Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée renfort ou matériau renforçant, est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue, appelée matrice ([Gornet 2008](#)).

I.3. Bref historique

Historiquement, le concept de renforcement fibreux est très ancien, comme indiqué dans les références bibliques à des briques d'argile de paille renforcées dans l'Égypte ancienne.

Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au 19^{ème} siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). La résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du 20^{ème} siècle.

Le premier bateau en fibre de verre a été construit en 1942 ; des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les avions et les composants électriques à ce moment.

L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950.

Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970.

Dupont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, et les industries biomédicales.

Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 1990, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température (Isaac 1994).

Les applications des composite comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des aéronefs et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids (Sehoul 2017).

I.4. Constituants des matériaux composites

Le matériau composite est constitué d'une protection appelée « matrice » et de l'ossature appelée « renfort » (Figure. 1.1). Les renforts fibreux sont disposée de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations (Berthelot 2012).

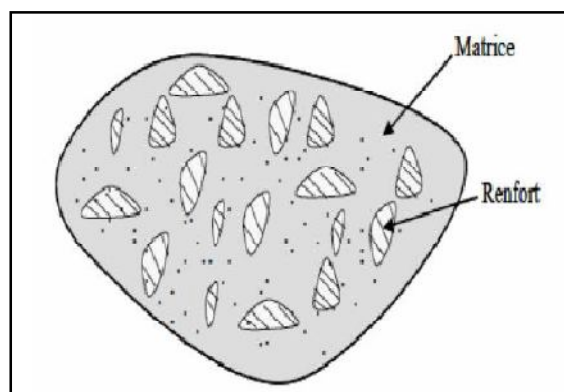


Figure I. 1. Matériau composite en général

Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée « interface ». Cette zone assure la compatibilité renfort- matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif.

Suivant les caractéristiques de la matrice et des renforts, on distingue généralement deux grandes familles :

a) Composites grandes diffusions (GD)

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins (Elmeiche 2013).

b). Composites hautes performances (HP)

Principalement utilisés dans l'aéronautique, médical, sports et loisirs, sont d'un coût élevé.

Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD.

➤ **Matrice**

Pour lier les fibres ensemble, on utilise généralement des matrices qui se classent comme suit (Figure I.2) :

La matrice est l'un des constituants de base des matériaux composites, elle a pour rôle de :

- donner la forme désirée au produit,
- assurer la cohésion des fibres renforts pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble,
- répartir les charges mécaniques et les contraintes encaissées,
- apporter la tenue chimique de la structure,
- protéger les renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques).

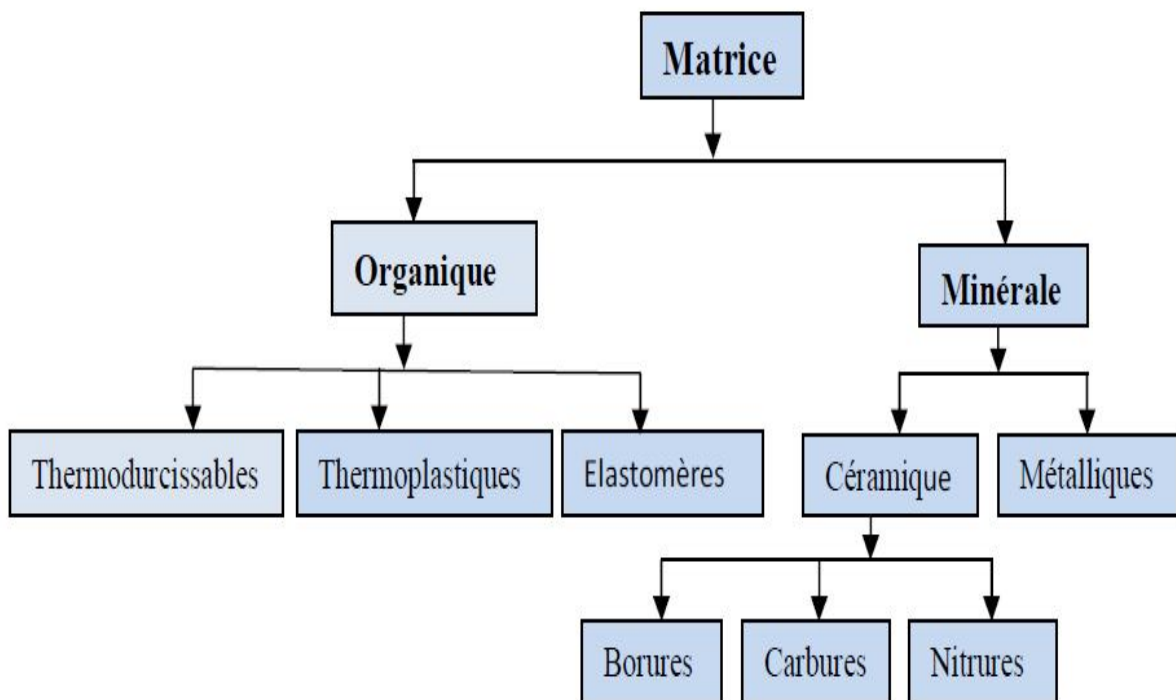


Figure I. 2. Différentes familles des matrices (Elmeiche 2013)

On utilise généralement des matrices qui se classent en trois grandes catégories : les résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques et les matrices métalliques (Gendre 2011).

➤ Renfort

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique.
- l'architecture du renfort.

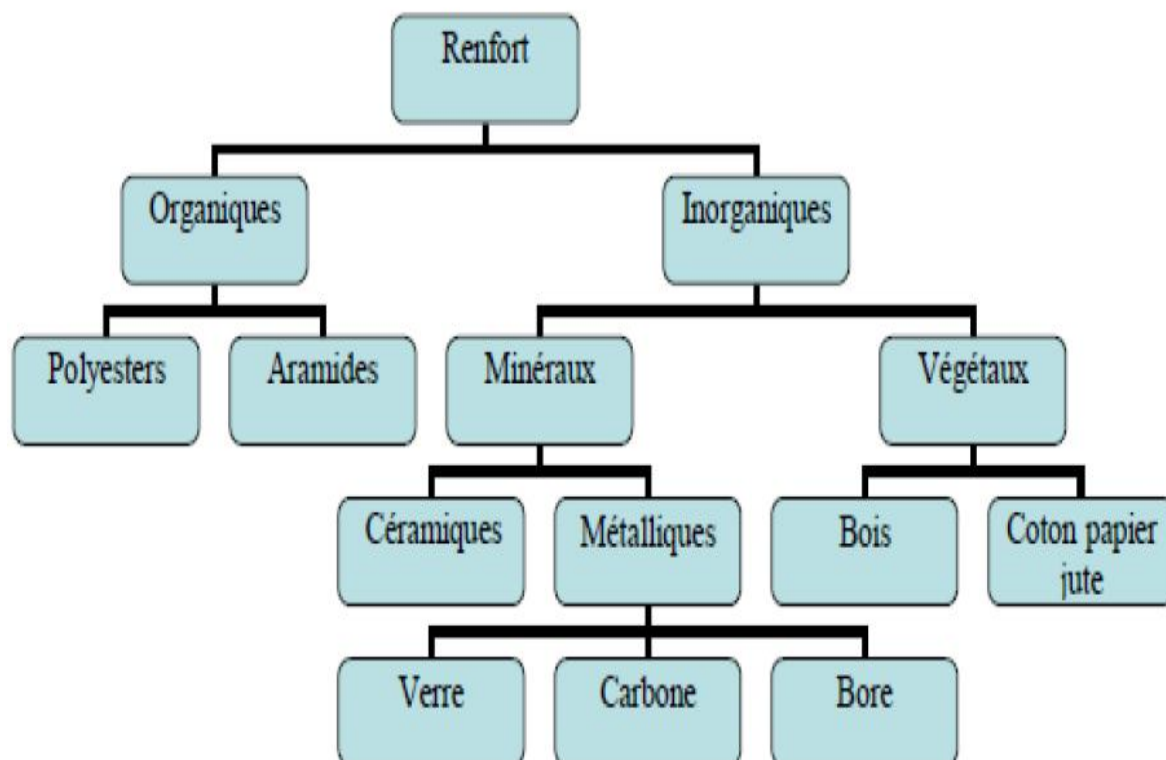


Figure I. 3. Principaux matériaux de renfort (Elmeiche 2013)

▪ Fibres de verre

Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2 mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).

▪ Fibres de carbone

Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg.

Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple poly acrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 °C à 200 °C), puis pyrolyse (1500-2500 °C). Selon la température et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).

Les fibres de polymère les plus connues sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles servent essentiellement à fabriquer des câbles.

▪ **Fibres métalliques**

Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à

1100 °C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15 mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200 µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC) (Cailletaud 2005).

Tableau I. 1. Propriétés de quelques éléments de renfort (Marzano et Celle 2014)

Matériau	Module de Young (GPa)	Résistance en traction (MPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Température d'utilisation max (°C)	Allongement à rupture (%)
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar	130	3600	1450	200	2
Carbone	400	2000	1900	2500	/
Bore	400	3500	2650	700	0,8
SiC	480	2300	3200	900	0,5
SiC	840	21000	3200	1600	2,5

I.5. Avantages et inconvénients

Les Composites ont des avantages uniques par rapport aux matériaux monolithiques, comme :

- ✓ Grande résistance à la fatigue
- ✓ Tenue à la température élevée
- ✓ Haute rigidité
- ✓ Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant.
- ✓ Ils sont bien sûr insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques...

- ✓ Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- ✓ On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande. Ils offrent de grandes possibilités de maniement.
- ✓ Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale. Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion...

Par ailleurs, ces matériaux ont des inconvénients :

- ✓ Vieillissement au contact de l'eau
- ✓ Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts. Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.
- ✓ La détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- ✓ La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

I.6. Champs d'utilisation

Les composites trouvent leurs principales applications dans :

- **Secteur d'automobile**

Le secteur de l'automobile utilise des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais il devrait intégrer massivement les composites thermoplastiques.

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception.

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclabilité.

- **Secteur ferroviaire**

Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermodurcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique.

Dans le secteur ferroviaire, la facilité de conception et le bon comportement au feu sont les principaux atouts des matériaux composites.

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût élevé par rapport à les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

- **Construction civile**

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes.

- **Construction industrielle**

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour la construction industrielle standard, les matériaux composites ont un prix encore trop élevé et leur caractérisation en milieu corrosif est insuffisamment connue.

- **Secteur médical**

Les applications des composites au secteur médical et de la sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part.

L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

- **Construction électrique**

Le secteur de la construction électrique et électronique utilise massivement des composites « grande diffusion », essentiellement sous forme de semi-produits SMC comprimés.

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites ([Berreur 2002](#)).

- **Les équipements de sports et loisirs**

Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%.

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sport.

La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en polyamide.

I.7. Les matériaux composites structuraux

I.7.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Figure. I.4). Taux de déséquilibre très grand.

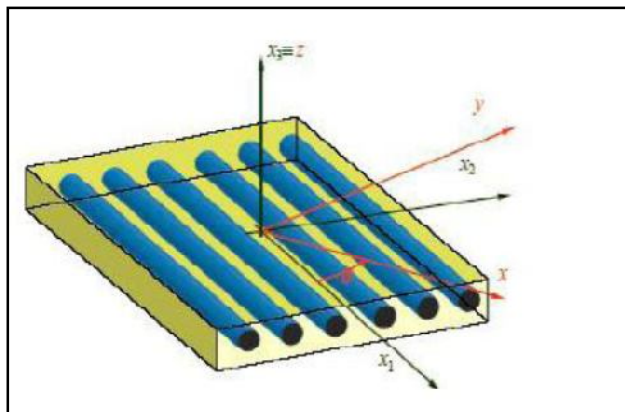


Figure I. 4. Matériau composite monocouche

I.7.2. Stratifiés

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la figure I.5, qui forme les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).

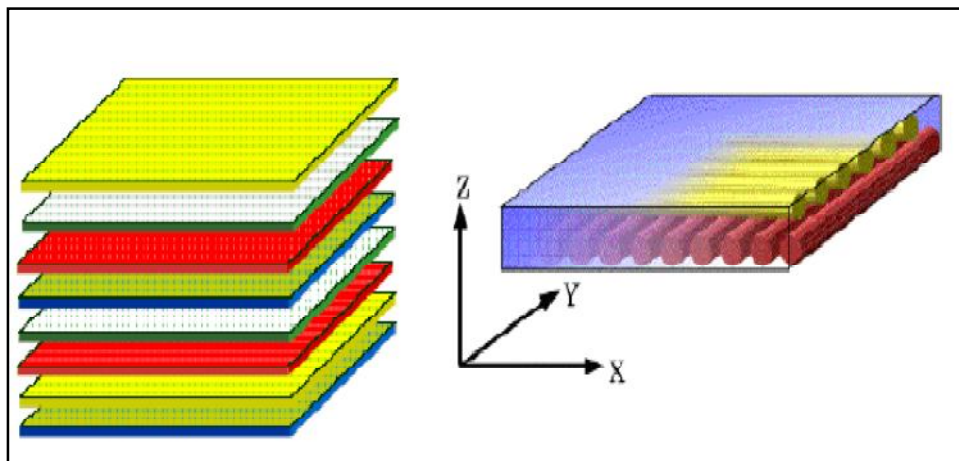


Figure I. 5. Matériau composite stratifié

I.8. Matériaux Sandwichs

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure. I.6) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance).

Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble (Zenkert 1997).

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes

d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases.

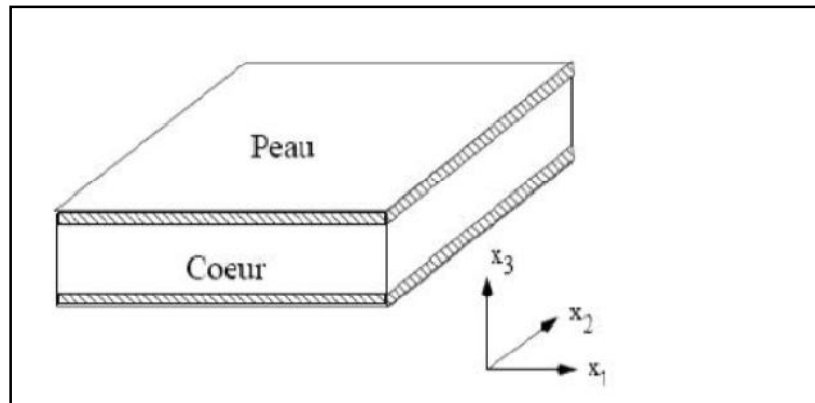


Figure I. 6. Schéma d'un sandwich

I.8.1. Éléments constituant les matériaux sandwichs

1. Peaux :

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

2. Âme :

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.

- Balsa : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- Nid d'abeille : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' Nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

- Les âmes pleines : parmi laquelle on retrouve : Le Balsa ou bois cellulaires, diverses mousses cellulaires, des résines chargées de microsphères creuses de verres appelés mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

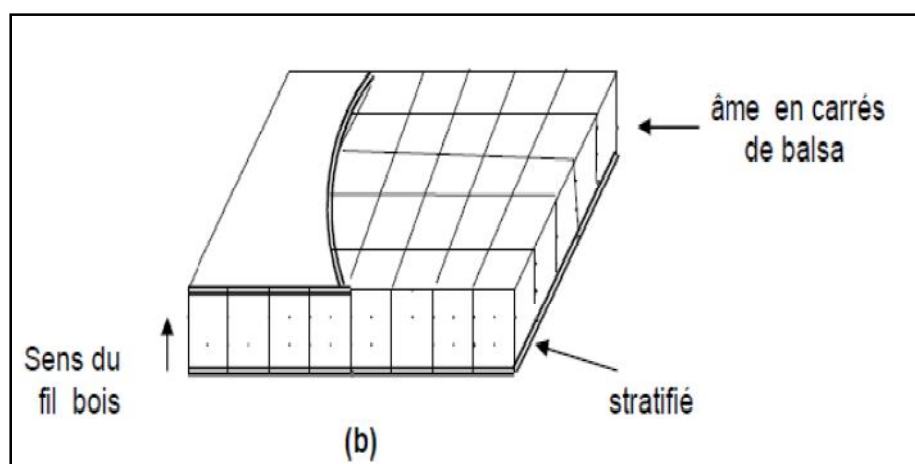


Figure I. 7. Matériaux sandwichs à âmes pleines

- Les âmes creuses (Berthelot 1999), essentiellement de type nid d'abeilles (Figure I.8) elles sont :
 - ✓ Des alliages métalliques légers
 - ✓ Des papiers kraft
 - ✓ Du papier polyamide, type papier Nomex.

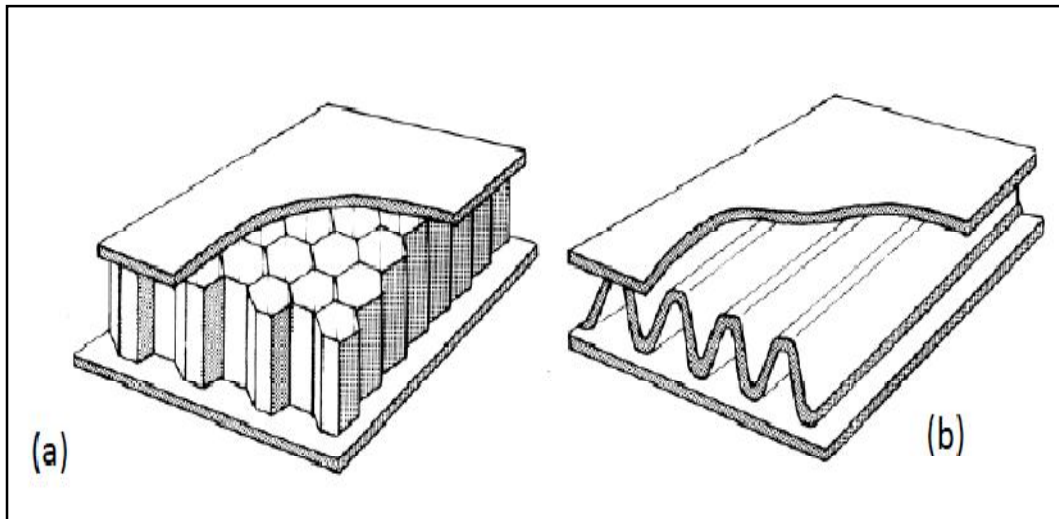


Figure I. 8. Matériaux sandwichs à âmes creuses avec nid d'abeilles et âme ondulée

I.8.2. Conception des structures sandwichs

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un «sandwich» sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles. Généralement, la conception est basée sur le théorème des poutres homogènes et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

Sélection des matériaux âme : le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.

- ✚ Résistance en flexion : Généralement, les structures sandwichs sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité $\langle EI \rangle$ plus élevé.
- ✚ Résistance aux chocs : La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme. Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme.

- ✚ Résistance à la compression : Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques.

- ✚ Résistance au décollement (pelage) : Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwiches à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au cisaillement de l'âme.

- ✚ Isolation : La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications. Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

- ✚ Absorption d'eau : L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwichs peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwichs seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux.

I.9. Modélisation des structures composites

Nous venons de voir que de nombreux composites possèdent une structure à plusieurs niveaux : les constituants élémentaires (fibres et matrice) sont assemblés pour former des fils ou des plis, qui sont eux-mêmes tissés ou empilés pour former des pièces... L'organisation géométrique ainsi obtenue peut être très sophistiquée, plus encore que pour les matériaux

traditionnels. Pour modéliser (ou simplement décrire) une structure composite, il est donc important de préciser à quelle échelle on se place.

Dans le cas des composites à fibres longues, on distingue généralement trois échelles, illustrées sur la figure I.9 en prenant l'exemple d'une pièce stratifiée à base de plis unidirectionnels :

- L'échelle « **micro** » ou échelle des constituants élémentaires, où l'on modélise les fibres et la matrice ; sa taille caractéristique est le diamètre d'une fibre (quelques microns) ;
- L'échelle « **méso** » ou échelle des constituants intermédiaires tels qu'un fil ou un pli ; à cette échelle, on ne distingue plus les fibres et la matrice au sein des fils et des plis (c'est-à-dire qu'on modélise ces derniers par des milieux homogènes), et sa taille caractéristique est le diamètre d'un fil ou l'épaisseur d'un pli (quelques dixièmes de millimètre) ;
- L'échelle « **macro** » ou échelle de la pièce, qu'il s'agisse d'un tissu, d'un stratifié ou d'un assemblage plus complexe ; à cette échelle, on ne modélise aucun constituant élémentaire ni intermédiaire (c'est-à-dire qu'on modélise la pièce par un milieu homogène), et sa taille caractéristique est généralement de l'ordre du centimètre, voire beaucoup plus.

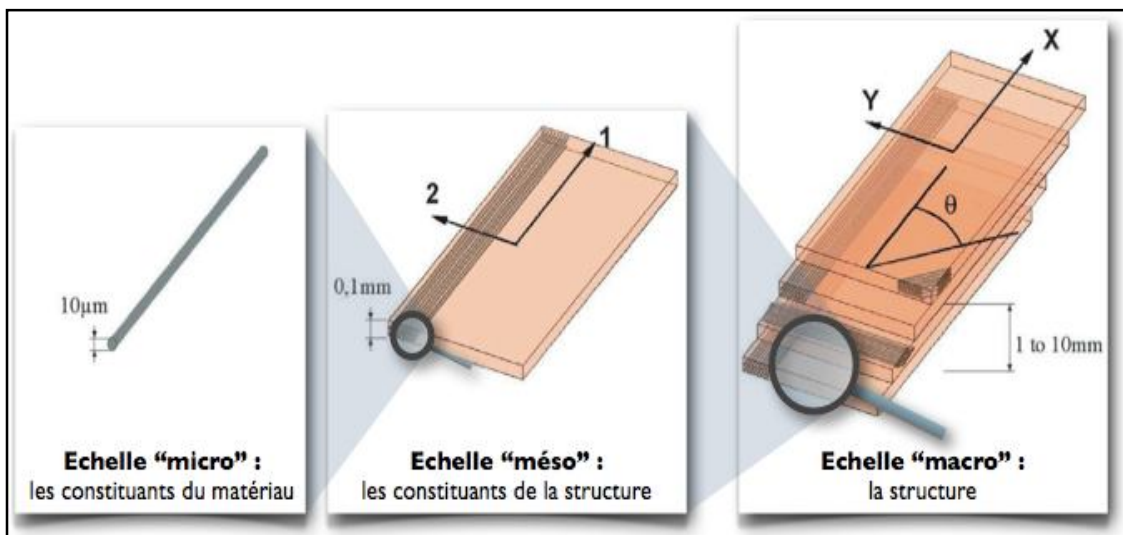


Figure I. 9. Les différentes échelles d'étude d'un stratifié (Gendre 2011).

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les matériaux composites, Les différents constituants de ces matériaux ont été présentés, ainsi que leurs différents types, leurs propriétés, et leurs domaines d'application.

Les matériaux composites apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, et liberté de formes. Cependant l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et de contraintes à ce niveau.

Une technique a été élaboré par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles; elle consiste à utiliser un matériau à gradient évalué "FGM".

Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés « FGM » tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Chapitre II : Matériaux composites en FGM

II.1. Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisés par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément.

II.2. Bref historique

Les FGM sont apparus en **1984** par M. Niino et ses collègues à Sendai dans une université Japonaise dont le but de réaliser un engin spatial dont un revêtement pouvant résister à des conditions thermiques très sévères. L'idée est alors de concevoir un matériau ayant d'excellentes propriétés mécaniques et qui peut répondre à des exigences environnementales. Le résultat est l'obtention d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique.

En **1987**, un programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Grâce à l'union de chercheurs, des institutions publiques et de l'industrie, une enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale à base d'un matériau FGM.

Le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée dans la navette dans l'atmosphère terrestre et la protection intérieure contre un réchauffement étaient les défis majeurs. D'où la nécessité d'utilisation d'un revêtement céramique pour protéger le fuselage contre des températures qui se développent à la surface. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure, appelée matériau à gradient fonctionnel.

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon.

En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

II.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure II.1 (Koizumi 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives (Bachir Bouiadjra 2015).

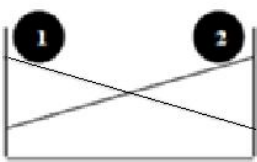
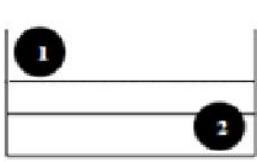
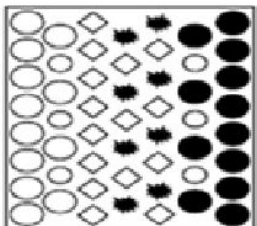
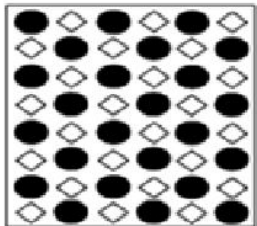
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure II. 1. Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1997)

(Uchida 2004) a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure II.2). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

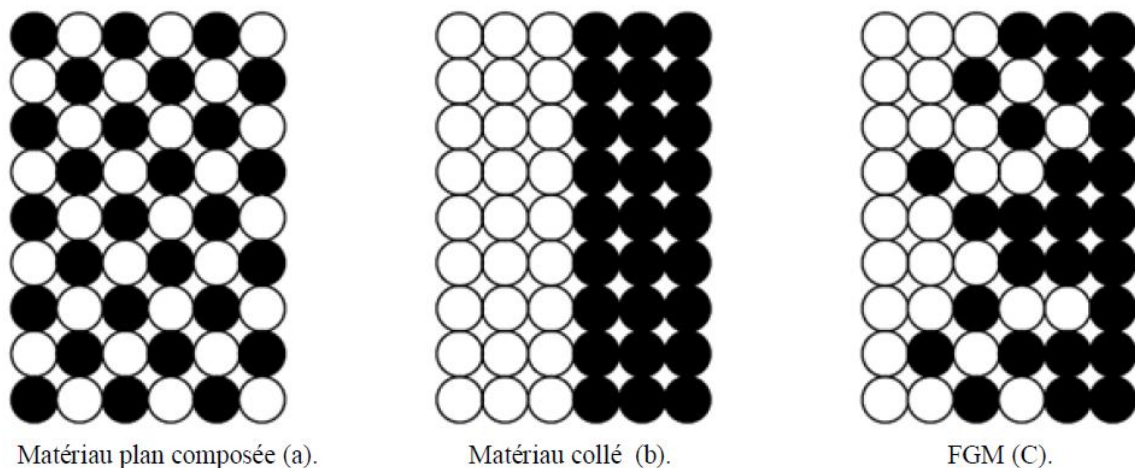


Figure II. 2. La distribution composante des matériaux (Uchida 2004).

II.4. Champs d'utilisation

En raison du développement technologique, il est nécessaire que la capacité avancée des matériaux devienne une priorité dans le domaine de l'ingénierie pour des systèmes plus performants. FGMs sont des matériaux relativement nouveaux et sont étudiés pour être utilisés dans des applications à haute température. Les FGMs sont utilisés dans une grande variété d'applications dans la pratique de l'ingénierie qui nécessite que la performance des matériaux varie avec les emplacements dans le composant (Gayen 2013). Les applications les plus utilisées sont les suivantes :

II.4.1. Champ d'aérospatiale

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils

soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution. En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

(Bhatt 1989) a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine.

II.4.2. Dans la médecine

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

(Kumar et Maruno 2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité.

II.4.3. Dans l'industrie

Un rouleau en céramique adapté pour diverses applications dans les industries hybrides constitué de nitrure de silicium comme matériau de base. Ce matériau possède d'excellentes propriétés mécaniques, idéal pour les applications de support de charge. Dans de nombreux cas, les composants entiers sont réalisés en carbure de tungstène, pour une application nécessitant des propriétés de résistance à l'usure. Avec un gradient, l'utilisation de carbures coûteux peut être réduite au minimum, réduisant ainsi le coût total du composant.

II.4.4. Articles de sports

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités (Niino 2004). Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes

vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came (Hopkinson. 2006 ; Saiyath ibrahim 2015 ; Benferhat 2017).

II.4.5. Autres champs d'applications

Il existe autres domaines d'application les FGMs

- Champ optique (fibre optique, lentille etc.)
- Champ d'électronique (capteur, semi-conducteur à bande graduée, substrat, etc.)
- Champ chimique (Échangeur de chaleur, récipient de réacteur, tuyau (pipe) de chaleur etc.)
- Champ de biomatériaux (peau artificielle, Système de délivrance de médicaments, prothèses, etc.)
- Marchandises (Matériaux de construction, bon sport, Carrosserie etc.)
- Conversion de l'énergie (Générateur thermoélectrique, convertisseur thermo-ionique, piles à combustible, cellules solaires etc.)
- Optoélectronique
- Piézo-électricité

II.5. Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés

II.5.1. Procédé de poudre sèche

PM (powder metallurgy) est une technologie apparente pour la fabrication du FGM et elle est de plus en plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM utilisant des matériaux solides.

Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés en trois étapes de base à savoir : le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition spatiale de préconçue comme dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure II.3.

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes (Ramachandran 2015 ; EL-Wazery 2012 ; Saiyathibrahim 2015).

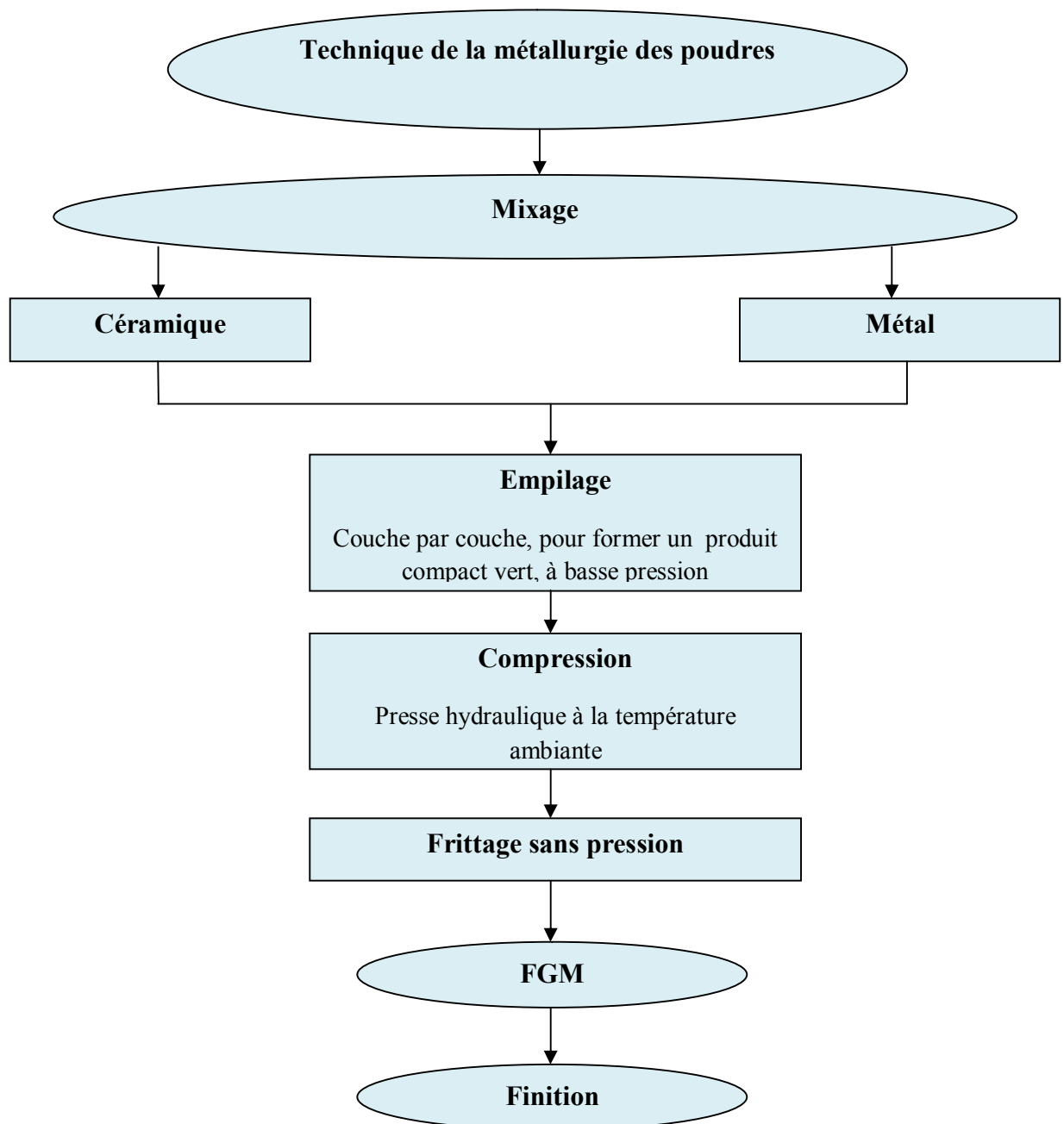


Figure II. 3. Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM (Saiyathibrahim 2015)

II.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine est une poudre basée sur une méthode de mise en forme traditionnelle appliquée dans l'industrie céramique. En général le coulage en barbotine est un procédé de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Le gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des

grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite (Katayama 2011).

II.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting)

La force centrifuge peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique qui contient une autre phase solide. En général, la fabrication du FGM par le procédé de centrifugation est classée en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide.

Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge (CSPM). Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenu par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac. D'un autre côté, si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice.

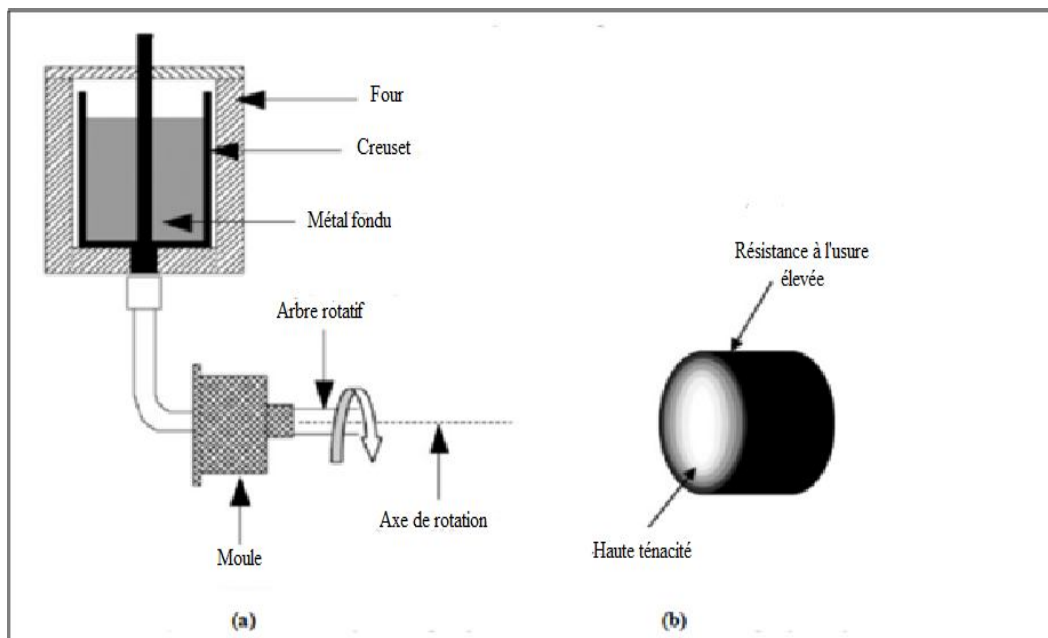


Figure II. 4. Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale
 (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) (Saiyathibrahim 2015)

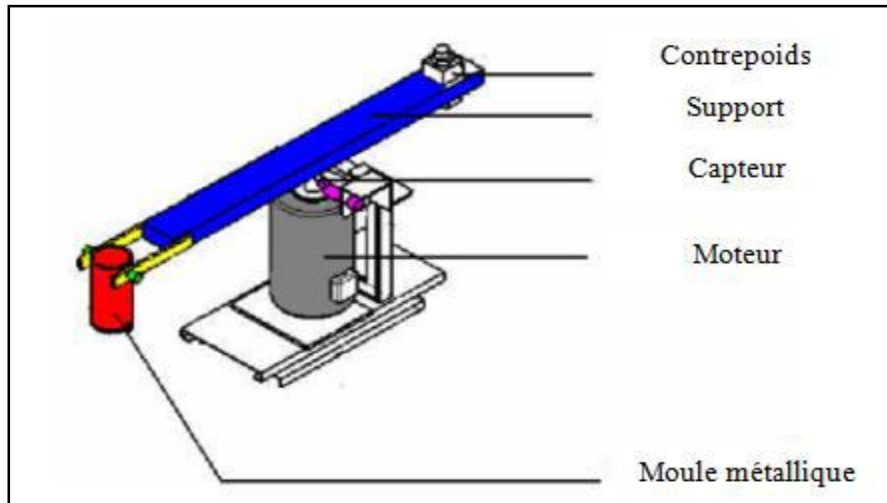


Figure II. 5. Installation du coulage centrifuge verticale

II.5.4. Coulage en bande

Le procédé de coulé de bande est représenté sur la figure II.6. L'épaisseur de la bande coulée est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μ m et 1mm. Les bandes minimales inférieures à 1 μ m pourraient être produites.

Les différentes étapes de coulage en bande sont :

1. élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant
2. le séchage du corps vert ou de la bande
3. la consolidation de la matière dense de bande

Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés; des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres.

Les bandes d'épaisseur appliquée est de l'ordre de 200 μ m. La densification de la bande est obtenue par frittage. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique-céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent.

(Dumont 2001) ont fabriqué un FGM en MoSi₂/Al₂O₃ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction auto-entretenue à haute température (SHS). Après déliantage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites (Dumont 2001).

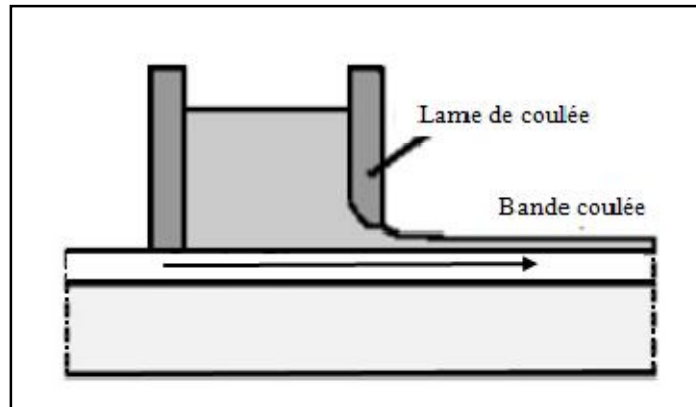


Figure II. 6. Système de processus de coulage en bande (Saiyathibrahim 2015)

II.5.5. Pressage à chaud

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud (Li 2003). À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200°C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure (Ramachandran 2015 ; Wu 2005 ; Jamaludin 2013).

II.5.6. Processus de frittage

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certaines des poudres métalliques légères, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent. Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés (Watari 2003 ; Jamaludin 2013).

II.5.7. Processus d'infiltration

Infiltration est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la force d'action capillaire. Le taux d'infiltration est dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peuvent être contrôlés en ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide.

D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue (Cho 2004 ; Jamaludin 2013).

II.5.8. Projection thermique

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM (Jamaludin 2013).

II.6. Propriétés matérielles des poutres FGM

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les propriétés matérielles, le module de Young, la densité et le coefficient de poisson, sont variés de façon continue dans le sens de l'épaisseur « h » de la poutre.

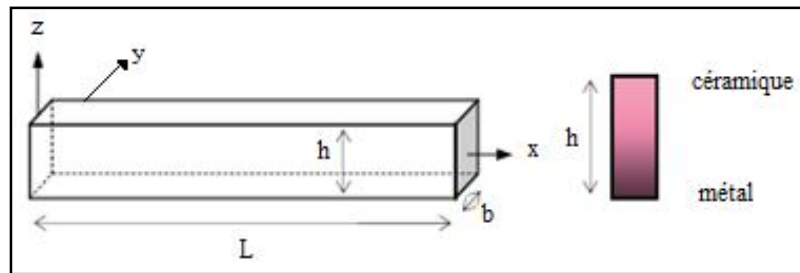


Figure II. 7. Géométrie d'une poutre en FGM

II.7. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique P-FGM est assurée par une loi de fonction puissance sous la forme (Chi et Chung 2006):

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (II.1)$$

Où

$g(z)$: Fraction volumique.

p : indice de fraction volumique.

h : épaisseur de la poutre.

z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995) :

$$E(z) = g(z).E_1 + [1 - g(z)].E_2 \quad (II.2)$$

Où : E_2 et E_1 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ; densité ou coefficient de poisson) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la poutre FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure II.8, il apparaît clairement que le module de Young par exemple

change et diminue rapidement près de la surface inférieure pour « $p > 1$ », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $p < 1$ ».

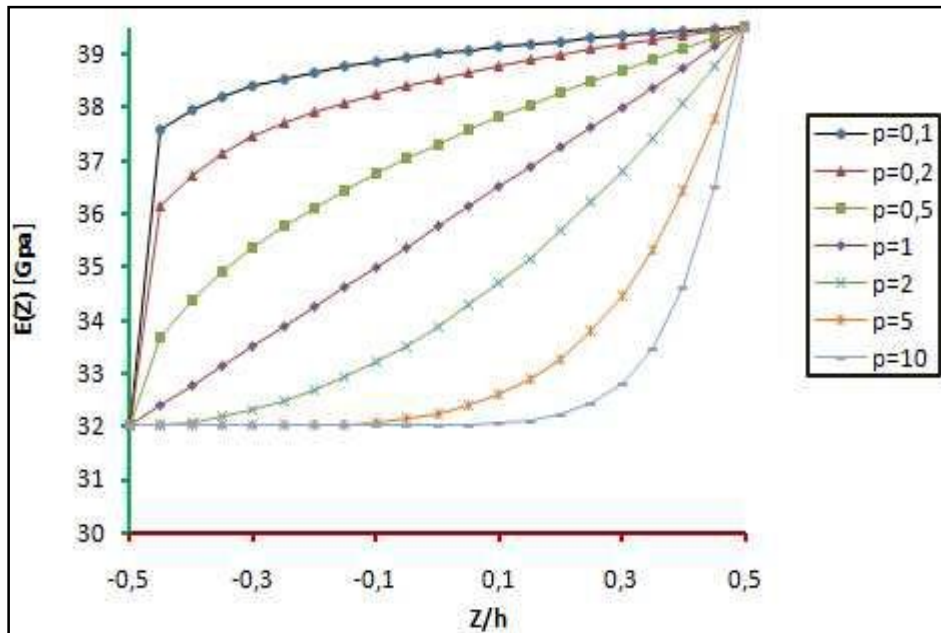


Figure II. 8. La variation du module de Young dans une poutre P-FGM

II.7.1. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = A e^{B\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (II.3)$$

Avec : $A = E_2$ et $B = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la figure II.9.

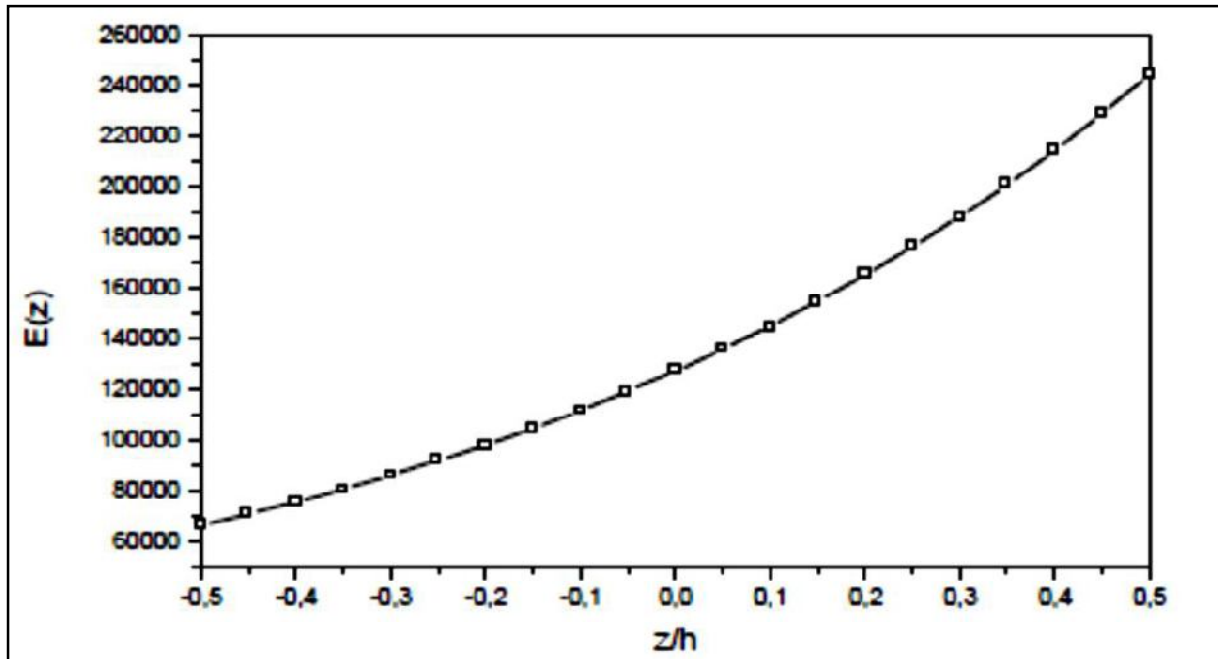


Figure II. 9. La variation du module de Young dans une poutre E-FGM

La variation du module de Young se fait à l'aide d'une seule fonction qui domine la distribution du matériau dans la poutre E-FGM.

II.7.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, (Chi et Chung 2006) ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq +\frac{h}{2} \tag{II.4}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{II.5}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (\text{II.6})$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II.7})$$

La figure II.10 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

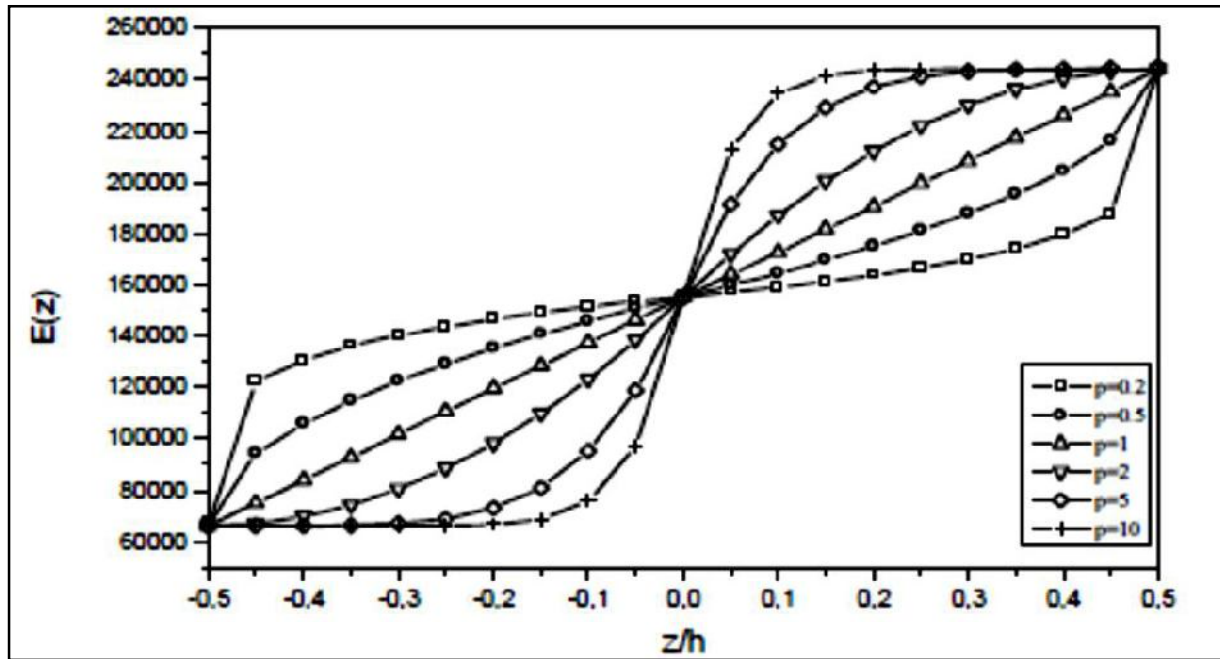


Figure II. 10. La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d’application, l’histoire de leur développement.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d’application.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l’épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

Chapitre III : Théories des poutres

III.1. Introduction

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses: barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). L'analyse du comportement et la conception des ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

Nous sommes intéressés uniquement, dans ce chapitre, à l'analyse vibratoire des structures de type « poutre ».

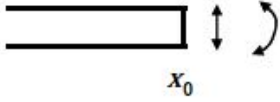
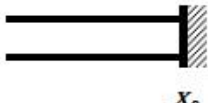
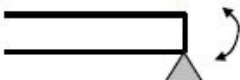
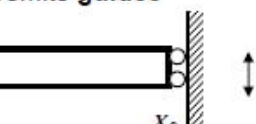
III.2. Définition d'une poutre

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

III.3. Conditions aux limites d'une poutre

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous.

Tableau III. 1. Principales conditions aux limites pour les poutres

<p>extrémité libre</p>  <p>x_0</p>	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation \Rightarrow le moment de flexion et la force de cisaillement s'annulent en x_0</p>	$M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité encastée</p>  <p>x_0</p>	<p>les déplacements transversal et angulaires sont nuls en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité simplement supportée</p>  <p>x_0</p>	<p>le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre \Rightarrow le moment de flexion est donc nul en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité guidée</p>  <p>x_0</p>	<p>le déplacement transversal est libre et la rotation est bloquée \Rightarrow la force de cisaillement est donc nulle en x_0</p>	$\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

III.4. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

- L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres (Coffignal 2001) est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

III.4.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

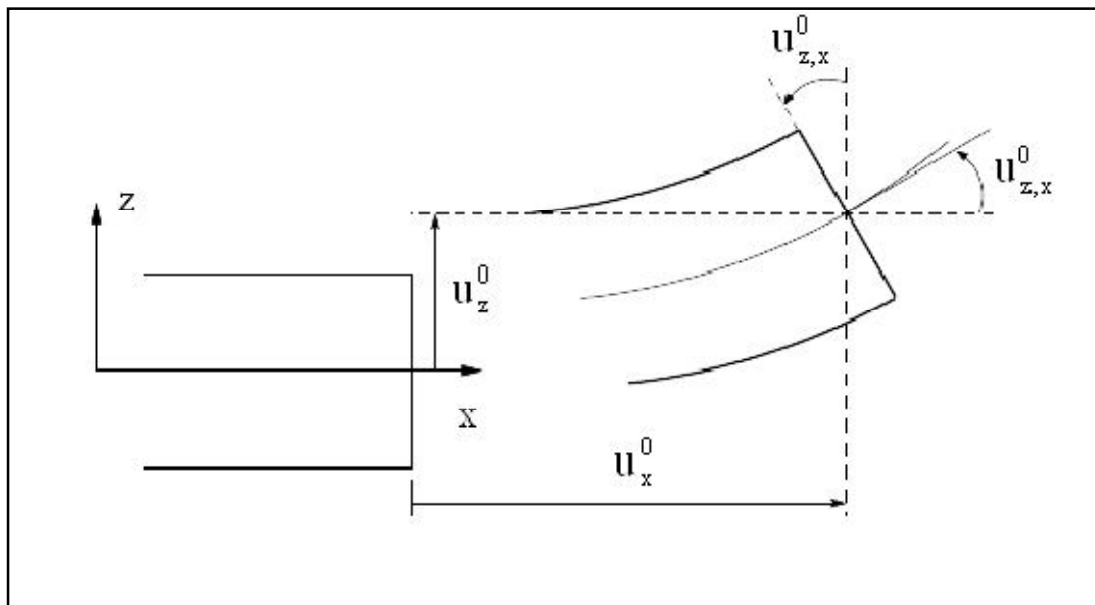


Figure III. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \tag{III.1}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \tag{III.2}$$

$u(x, z)$: représente le déplacement suivant X

$w(x, z)$: Le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w_{,x}^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

III.4.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure III.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. (Timoshenko 1972).

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction (z) est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

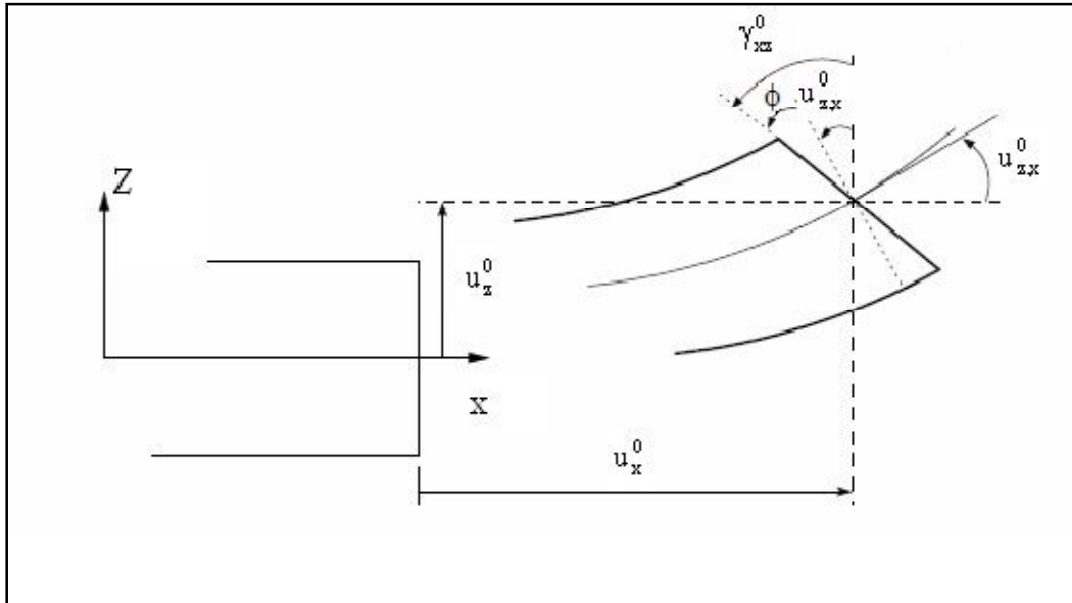


Figure III. 2. Cinématique de Timoshenko (Dufort 2001)

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) + z \varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (III.4)$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) + z \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (III.5)$$

$\gamma_{xz}^0(x)$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = \varphi^0(x) - w_{,x}^0(x) \quad (III.6)$$

$\varphi^0(x)$: C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (III.7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \varphi^0(x) \quad (\text{III.8})$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($k = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

III.4.3. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT)

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure III.3). La fonction (z)

représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

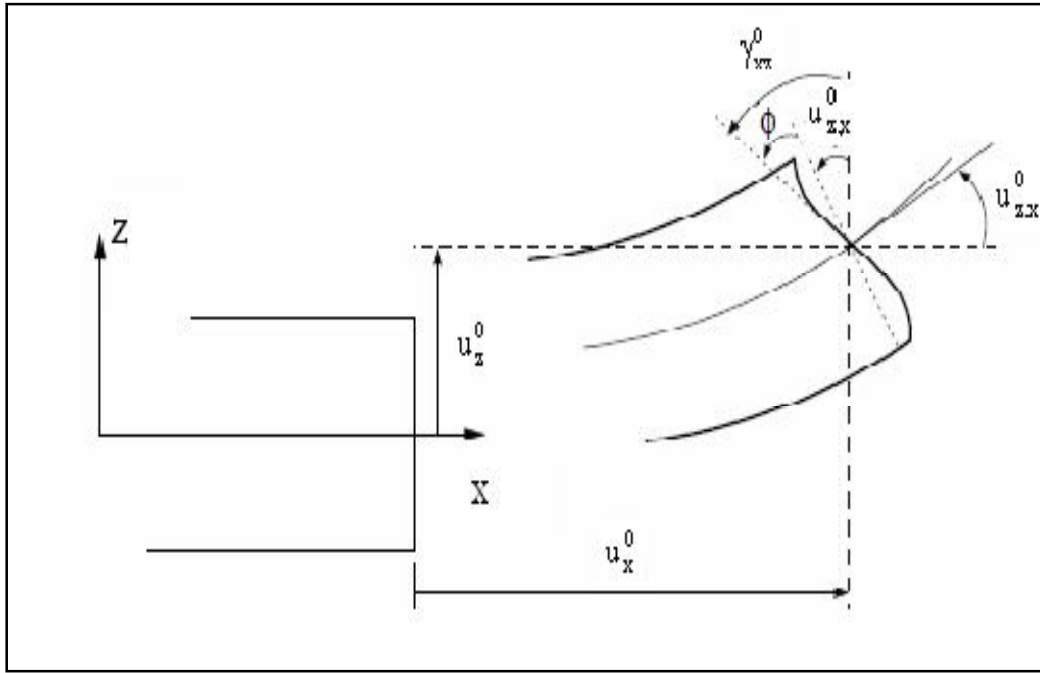


Figure III. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor (Nguyen 2004), La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme (Lo 1977):

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\psi(x) + z^2\zeta(x) + z^3\phi(x) \tag{III.9}$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (z).

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + f(z)\phi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \tag{III.10}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + f'(z)\phi^0(x) + w'_{,x}(x) \tag{III.11}$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\phi^0(x) \tag{III.12}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{III.13})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (III.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche de (Ambartsumyan 1969) :

$$f(z) = \frac{1}{2}z \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}z^2 \right) \quad (\text{III.14})$$

- L'approche de (Reissner 1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \right) \quad (\text{III.15})$$

- L'approche de (Aydogdu 2005) :

$$f(z) = z \alpha \frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha} \quad (\text{III.16})$$

- L'approche de (Levinson 1980), (Murthy 1981) et (Reddy 1984) :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (\text{III.17})$$

Dans le modèle de (Reddy 1984), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de (Touratier 1991) :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (\text{III.18})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, (Afaq 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-\frac{2z^2}{h^2}} \quad (\text{III.20})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de (Touratier 1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

III.5. Conclusion

Dans cette partie de la thèse ; nous avons présenté des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

**Chapitre IV : Vibration libre des poutres en
FGM**

IV.1. Introduction

L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente et pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour des besoins de conception et de dimensionnement des structures répondant aux meilleures conditions de fonctionnement, de sécurité, d'économie, et d'isolation acoustique.

Face à ces exigences, les matériaux FGM paraissent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée.

Les poutres sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique, ce qui a rendu nécessaire l'étude de leur comportement statique/dynamique.

Donc le comportement vibratoire non linéaire des poutres mérite bien d'être étudié puisque aucune des solutions exactes obtenues ne considère tous les états frontières possibles, les facteurs géométriques, les différents types de matériaux, les effets de déformation dus au cisaillement et l'effet thermique. Par conséquent, cette insuffisance d'informations nous poussé d'investir dans ce domaine.

IV.2. Vibration libre non amortie des poutres en FGM

IV.2.1. Modélisation d'une poutre en FGM par la théorie classique de Bernoulli (CBT)

On considère une poutre de longueur « L » et d'épaisseur « h », avec une largeur constante « b », soumise à une vibration libre transversale. On suppose que la poutre a un comportement élastique linéaire.

L'étude sera menée dans l'hypothèse des petites perturbations, les déplacements suivant les axes « x » et « z » d'un point arbitraire dans la poutre et noté respectivement par :

$u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$.

La composante plane du déplacement $u(x, z, t)$ peut être décomposée en trois termes :

1. Le déplacement en membrane $u_0(x, t)$;
2. Le déplacement introduit par la rotation de la section dû à la flexion telle qu'il est défini par la théorie classique des poutres d'Euler Bernoulli ;

3. Le déplacement dû au gauchissement des sections transverse ;

$$u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z)\varphi(x, t) \tag{IV.1}$$

Notre travail est basé sur la théorie classique des poutres alors on prend $f(z)=0$.

Donc le champ de déplacement de n'importe quel point de la poutre s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ w(x, z, t) = w(x, t) \end{cases} \tag{IV.2}$$

Tel que : $U(M)$: Le champ de déplacement d'un point « M ».

$u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$: Le déplacement suivant l'axe « x » et l'axe « z » respectivement.

$u(x, t)$: La composante de déplacement suivant l'axe « x » au niveau de l'axe neutre de la poutre.

$w(x, t)$: La composante de déplacement suivant l'axe « z » au niveau de l'axe neutre de la poutre.

IV.2.2. Tenseur des déformations

Dans l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations) le tenseur de déformations est s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial z} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} \end{cases} \tag{IV.3}$$

IV.2.3. Tenseur des contraintes

Un solide élastique est souvent caractérisé par une relation linéaire entre les tenseurs contraintes et déformations. Cette dépendance est appelée loi de Hooke :

$$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\} \tag{IV.4}$$

Avec :

$$Q : \text{Le terme de coefficients de rigidité} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}$$

Où :

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad Q_{55} = G_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

La relation contraintes-déformation peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} & 0 \\ 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.5)}$$

IV.2.4. Equation d'équilibre de la poutre en FGM

Nous pourrions établir les équations d'équilibre à partir du principe des travaux virtuels. L'équilibre statique peut être décrit par la somme du travail intérieur (δW_{int}) et le travail extérieur (δW_{ext}) développé par le champ du déplacement du point considéré. Le travail virtuel de tous les efforts (intérieurs et extérieurs) s'exerçant sur le système est nul (Mechab 2009).

$$\delta w_{ext}(\delta u) + \delta w_{int}(\delta u) = 0 \quad \forall(\delta u) \quad \text{(IV.6)}$$

Le travail des efforts intérieurs s'écrit :

$$\delta w_{int}(\delta u) = -\sum \int \sigma \varepsilon dv \quad \text{(IV.7)}$$

A partir des équations (IV.7) et (IV.3) des contraintes et des déformations virtuelles, le travail des forces intérieures s'écrit :

$$\delta w_{int} = -\int \int \int_0^L \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dv \quad \text{(IV.8)}$$

$$\delta w_{int} = -\int \int \int_0^L \sigma_{xx} (\delta u_{0,x} - z \delta w_{,xx}) dx dy dz \quad \text{(IV.9)}$$

$$\delta w_{\text{int}} = -\int \int \int_0^L \sigma_{xx} \delta u_{0,x} dx dy dz + \int \int \int_0^L \sigma_{xx} z \delta w_{,xx} dx dy dz$$

$$\delta w_{\text{int}} = -\int_0^L N(x) \delta u_{0,x} dx + \int_0^L M(x) \delta w_{,xx} dx \quad (\text{IV.10})$$

Tel que :

$N(x)$: L'effort normal au point x ;

$$N(x) = \int \int \sigma_{xx} dy dz \quad (\text{IV.11})$$

$M(x)$: Le moment de flexion au point x ;

$$M(x) = \int \int \sigma_{xx} z dy dz \quad (\text{IV.12})$$

Lorsque « b » est constant les équations (IV.11) et (IV.12) devient :

$$N(x) = b \int \sigma_{xx} dz \quad (\text{IV.13})$$

$$M(x) = b \int \sigma_{xx} z dz \quad (\text{IV.14})$$

• **L'effort normal**

En remplaçant les équations (IV.3) et (IV.5) dans (IV.13) est on n'obtient :

$$N(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} \epsilon_{xx} dz$$

$$N(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz$$

$$N(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} dz - b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz$$

$$N(x) = b \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz - b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz$$

$$N(x) = bA_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - bB_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{IV.15})$$

• **Moment de flexion**

$$M(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{E(z)}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} dz$$

$$M(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz$$

$$M(x) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z \frac{\partial u_0}{\partial x} dz - b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz$$

$$M(x) = b \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz - b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 dz$$

$$M(x) = bB_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - bD_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{IV.16})$$

Tel que :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2) dz \quad (\text{IV.17})$$

On écrit les deux expressions (IV.15) et (IV.16) sous forme matricielle suivant :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = b \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Avec :

- ❖ La déformation normale est donnée par : $\varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$
- ❖ La courbure de flexion est donnée par : $\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Le travail des efforts extérieurs s'écrit :

$$\delta w_{ext}(\partial u) = \int_V f^V \partial U dV + \int_S f^S \partial U dS \tag{IV.19}$$

$$w_{ext} = \iiint \rho(z) \ddot{w} \delta w dx dy dz$$

$$w_{ext} = b \int_0^L \rho(z) \ddot{w} \delta w dx dz$$

$$w_{ext} = b \int_0^L I_1 \ddot{w} \delta w dx \tag{IV.20}$$

Tel que :

$$I_1: \text{Fonction de la fraction de volume, } I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz$$

En remplaçant les équations (IV.10) et (IV.20) dans (IV.6) est on obtient :

$$b \int_0^L I_1 \ddot{w} \delta w dx - \int_0^L N(x) \delta u_{0,x} dx + \int_0^L M(x) \delta w_{,xx} dx = 0 \tag{IV.21}$$

En effectuant les intégrations par partie sur l'équation (IV.21), s'écrit:

$$b \int_0^L I_1 \ddot{w} \delta w dx - \int_0^L N(x)_{,x} \delta u dx + \int_0^L M(x)_{,xx} \delta w dx = 0 \tag{IV.22}$$

Après on déduit les équations d'équilibres suivantes :

$$\begin{cases} N(x)_{,x} = 0 \\ M(x)_{,xx} + bI_1 \ddot{w} = 0 \end{cases} \tag{IV.23}$$

En remplaçant les termes de $N(x)$ et $M(x)$ dans (IV.23) est on trouve les équations différentielle suivantes:

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = 0 \\ B_{11} \frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + I_1 \ddot{w}(x,t) = 0 \end{cases} \tag{IV.24}$$

Après on obtient l'équation générale suivante :

$$\xi_j \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + w(\ddot{x},t) = 0 \tag{IV.25}$$

Tel que :

$$\xi_j = \frac{1}{I_1} \left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \quad j = S - FGM; P - FGM; E - FGM$$

IV.2.5. Les solutions mathématiques

Les solutions de l'équation (IV.25) seront obtenues en gardant la même géométrie de la poutre (h , b et L et constante) pour différents types de FGM (S-FGM, P-FGM et E-FGM) et différentes conditions aux limites (S-S, C-C, C-S, C-F).

$$w(x, t) = w(x) e^{i\omega t} \tag{IV.26}$$

ω : est la fréquence naturelle de la poutre FGM.

La substitution de l'équation (IV.26) dans l'équation (IV.25) conduit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \mu^2 w(x) = 0 \tag{IV.27}$$

Tel que :

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{\xi_j}$$

Avec :

$$j = S - FGM; P - FGM; E - FGM$$

Afin de résoudre l'équation (IV.27), on utilise un changement de variable :

$$w(x) = C e^{Rx} \tag{IV.28}$$

L'équation (IV.27), peut être écrite comme suit :

$$(R^2 - \mu^2) C e^{Rx} = 0 \tag{IV.29}$$

Cette dernière représente une équation du 4^{ème} ordre dont la variable est notée « R ».

La solution de l'équation (IV.29) s'écrira comme suit :

$$\begin{cases} R_1 = -i\sqrt{\mu} \\ R_2 = -\sqrt{\mu} \\ R_3 = i\sqrt{\mu} \\ R_4 = \sqrt{\mu} \end{cases}$$

L'expression (IV.28) devient :

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{R_i \cdot x} = C_1 e^{R_1 \cdot x} + C_2 e^{R_2 \cdot x} + C_3 e^{R_3 \cdot x} + C_4 e^{R_4 \cdot x}$$

$$w(x) = C_1 e^{-i\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x} + C_3 e^{i\sqrt{\mu}x} + C_4 e^{\sqrt{\mu}x} \quad (IV.30)$$

En utilisant les formules d'Euler pour transformer l'expression (IV.30) sous formes trigonométriques:

$$e^{-i\sqrt{\mu} \cdot x} = \cos(\sqrt{\mu} \cdot x) - i \sin(\sqrt{\mu} \cdot x)$$

$$e^{-\sqrt{\mu} \cdot x} = \cosh(\sqrt{\mu} \cdot x) - \sinh(\sqrt{\mu} \cdot x)$$

$$e^{i\sqrt{\mu} \cdot x} = \cos(\sqrt{\mu} \cdot x) + i \sin(\sqrt{\mu} \cdot x)$$

$$e^{\sqrt{\mu} \cdot x} = \cosh(\sqrt{\mu} \cdot x) + \sinh(\sqrt{\mu} \cdot x)$$

Alors l'équation générale d'amplitude est donnée comme suit :

$$w_n(x) = A_1 \cos(B_n x) + A_2 \sin(B_n x) + A_3 \cosh(B_n x) + A_4 \sinh(B_n x) \quad (IV.31)$$

Tel que:

B_n : est le nombre d'onde ;

$$B_n = \sqrt[4]{\frac{\omega_n^2}{\xi_j}}$$

La vibration transversale de la poutre peut être alors écrite comme suit :

$$w_n(x, t) = [A_1 \cos(B_n x) + A_2 \sin(B_n x) + A_3 \cosh(B_n x) + A_4 \sinh(B_n x)] \cdot e^{i\omega_n t} \quad (IV.32)$$

IV.2.6. Fréquences naturelles et modes propres

Dans notre étude on considère les poutres quatre différents modes d'appuis, c.-à-d., une poutre encastrée aux deux extrémités (C-C), une deuxième poutre articulée en extrémité et encastrée en autre (C-S), une troisième poutre articulée aux deux extrémités (S-S), et une quatrième poutre encastrée - libre (C-F).

1. C - C : poutre encastrée – encastrée :

$$\begin{cases} w_n(\tau) = w_n'(\tau) = 0 & \tau = 0 \\ w_n(\tau) = w_n'(\tau) = 0 & \tau = 1 \end{cases} \quad (IV.33)$$

2. C - S : poutre encastrée – appuyée :

$$\begin{cases} w_n(\tau) = w_n'(\tau) = 0 & \tau = 0 \\ w_n(\tau) = w_n''(\tau) = 0 & \tau = 1 \end{cases} \quad (IV.34)$$

3. S - S : poutre appuyée – appuyée :

$$\begin{cases} w_n(\tau) = w_n''(\tau) = 0 & \tau = 0 \\ w_n(\tau) = w_n''(\tau) = 0 & \tau = 1 \end{cases} \quad (IV.35)$$

4. C - F : poutre encastrée – libre :

$$\begin{cases} w_n(\tau) = w_n'(\tau) = 0 & \tau = 0 \\ w_n''(\tau) = w_n'''(\tau) = 0 & \tau = 1 \end{cases} \quad (IV.36)$$

Les fréquences naturelles et les modes propres sont déterminés pour chaque cas physique considéré dans cette étude (C-C, C-S, S-S, C-F) et les constantes (A1, A2, A3, A4) devant être appliquées à l'équation d'amplitude modale $w_n(x)$, ils sont résumés au tableau ci-dessous :

Tableau IV. 1. Les vecteurs propres

Conditions aux limites	A_1	A_2	A_3	A_4	γ
C - C	$-\gamma$	-1	γ	1	$\frac{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}$
C - S	$-\gamma$	-1	γ	1	$\frac{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}$
S - S	0	1	0	0	$-$
C - F	$-\gamma$	1	γ	-1	$\frac{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)}$

β_n est multiplié par « L » (la longueur de la poutre) afin de fournir une valeur sans dimensions.

Donc La vibration transversale devient :

$$w_n(\tau) = A_1 \cdot \cos(\beta_n L \cdot \tau) + A_2 \cdot \sin(\beta_n L \cdot \tau) + A_3 \cdot \cosh(\beta_n L \cdot \tau) + A_4 \cdot \sinh(\beta_n L \cdot \tau) e^{i\omega_n t} \tag{IV.37}$$

Tel que :

$$\tau = \frac{x}{L} \quad \tau \in [0,1]$$

Pour chaque mode, la fréquence naturelle est donnée par :

$$\omega_n = \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\xi_j} \quad j = S - FGM; P - FGM; E - FGM \tag{IV.38}$$

IV.3. Vibration libre amortie des poutres en FGM

Dans cette partie, on considère une poutre de Timoshenko avec DIVD (Figure IV.1).

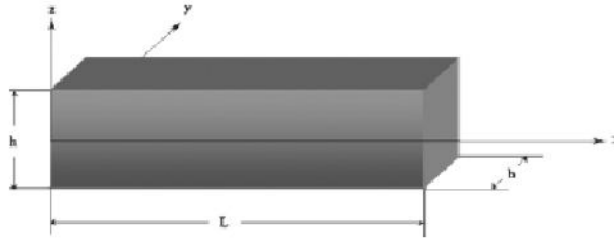


Figure IV. 1. Poutre en FGM de Timoshenko avec DIVD

Les équations transversales du mouvement de telle poutre peut être facilement établie en appliquant le principe de Hamilton au lagrangien \mathcal{L} et la fonction de dissipation de Rayleigh \mathcal{R} du système.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} - \mathcal{R}) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V - \mathcal{R}) dt = 0 \tag{IV.39}$$

Le lagrangien \mathcal{L} du système est déterminé par la somme de l'énergie cinétique totale (T) de la poutre (y compris l'effet de l'inertie rotative), l'énergie potentielle V due à la flexion et a la déformation de cisaillement. L'énergie cinétique prend la forme suivante:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_1 \dot{u}^2 + I_2 \dot{\theta}^2 \right] dx \tag{IV.40}$$

Selon le module d'élasticité $E(z)$, le module d'élasticité de cisaillement $G(z)$ et le facteur de correction de cisaillement (k), l'énergie potentielle peut être exprimée comme suit:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} \theta^2 + \kappa A_{55} (u' - \theta)^2 \right] dx \tag{IV.41}$$

En général, l'amortissement traduit la dissipation d'énergie du système vibratoire. Il est l'un des facteurs les plus difficiles à quantifier en dynamique des structures et en raison de ses origines diverses. L'amortissement est présent naturellement et est souvent introduit pour contrôler les vibrations. Les concepteurs ont donc besoin de méthodes robustes de prédiction pour optimiser le choix des dispositifs ou des matériaux qui améliorent le comportement de la structure. La figure (IV.2) permet de distinguer quatre mécanismes différents d'amortissement (Sino 2007 ; Osinski 1998) :

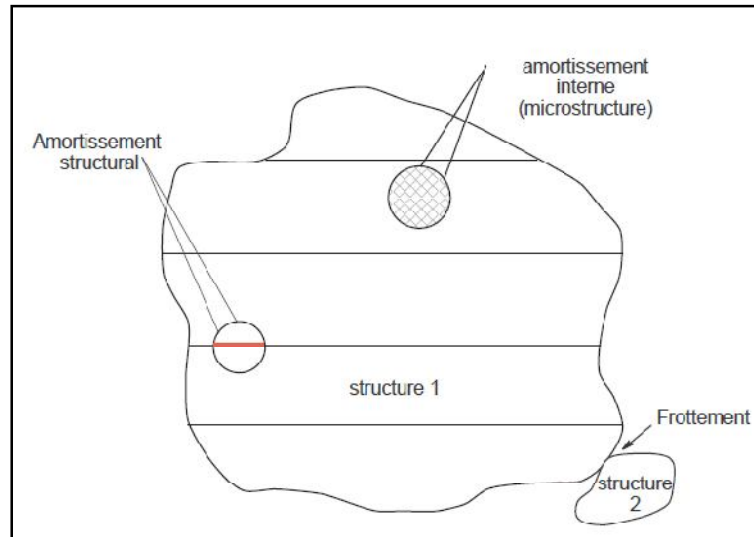


Figure IV. 2. Schéma d'amortissement

- Amortissement interne (amortissement dû au matériau) : Ce type d'amortissement inclut toutes les manières possibles de dissipation d'énergie liée seulement à la structure interne du système vibratoire.
- Amortissement structural : Cette désignation traduit l'énergie dissipée produite aux surfaces de contact des éléments avec des interfaces permanentes (ex : accouplement-arbre).
- Amortissement par friction dans les interfaces glissantes (sliding joints) présent lors d'un mouvement relatif entre les surfaces en contact (paliers glissants).
- Amortissement hydrodynamique et aérodynamique : Le mouvement d'un système dans un liquide ou gaz est amorti par ces milieux.

Ces amortissements sont généralement modélisés à partir de deux modèles de comportement : visqueux et hystérétique

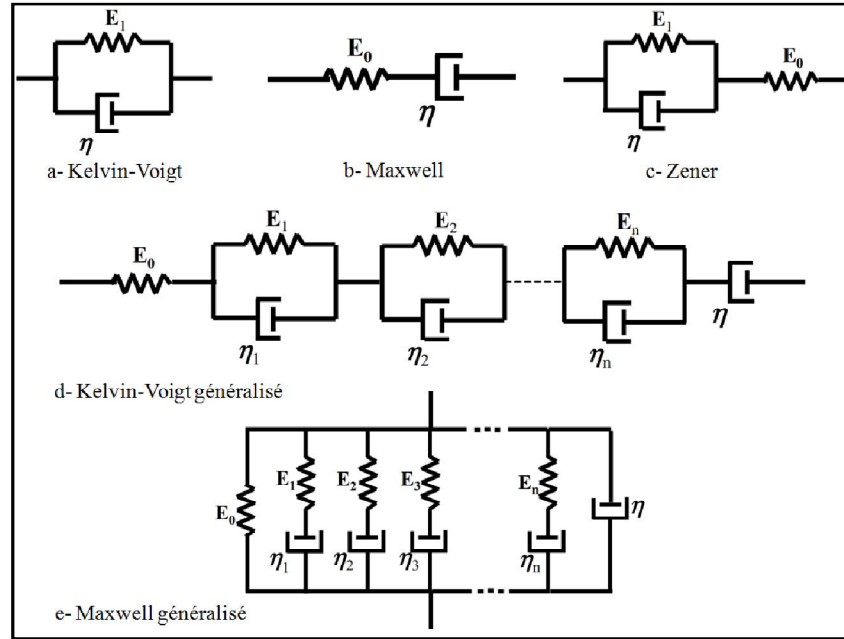


Figure IV. 3. Modèles rhéologiques standards classiques (Bilasse 2010)

Notre travail est basé sur le modèle de Kelvin-Voigt qui exprime le comportement mécanique d'un solide visqueux. Ce modèle peut être représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort Hookéen mis en parallèle comme l'indique le schéma précédent (Figure IV.3-a). Le modèle d'amortissement choisi produit des forces de ralentissement et de dissipation résultant des effets d'amortissement pendant le mouvement. La distribution de l'amortissement interne visqueux DIVD est provient de l'amortissement de la vitesse de déformation de Kelvin-Voigt, où les contraintes de cisaillement et les contraintes de flexion supplémentaires dissipatives τ_{xy}^d et σ_y^d sont linéairement proportionnelles à la vitesse de déformation à travers les coefficients c_s et c_b , conduisant aux relations contrainte-déformation suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x^\ell + \sigma_y^d = E(z)\epsilon_x + c_b \dot{\epsilon}_x \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^\ell + \tau_{xy}^d = G(z)\gamma_{xy} + c_s \dot{\gamma}_{xy} \end{cases} \quad (IV.42)$$

Ainsi, la fonction de dissipation de Rayleigh peut être obtenue par l'expression suivante:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L \eta_b D_{11} \dot{\theta}^2 + \eta_s \kappa A_{55} (\dot{u}' - \dot{\theta})^2 \right\} dx = -\frac{1}{2} (\dot{T} + \dot{V}) \quad (IV.43)$$

Les coefficients d'amortissement en flexion et en cisaillement sont supposés proportionnels aux modules élastiques $E(z)$ et élastiques au cisaillement $G(z)$ par deux facteurs d'amplification interne indépendants, comme le montre dans l'équation suivante :

$$c_b = \eta_b E(z) \quad c_s = \eta_s G(z) \tag{IV.44}$$

Les fonctions lagrangiennes et de Rayleigh pourraient être écrit sous la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_1 \dot{u}^2 + I_2 \dot{\theta}^2 - D_{11} \left[\theta'^2 + \frac{A_{55} \kappa}{D_{11}} (u' - \theta')^2 \right] \right\} dx \tag{IV.45}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\eta_b \kappa D_{11} \dot{\theta}'^2 + \eta_s \kappa A_{55} (\dot{u}' - \dot{\theta}')^2 \right] dx \tag{IV.46}$$

IV.3.1. Modélisation de la poutre par élément finis

Afin d'étudier la réponse dynamique de la poutre de Timoshenko modélisé par DIVD, l'approche classique de MEF est adoptée pour résoudre numériquement les mouvements vibratoires avec une variation linéaire du déplacement $u(x)$ et de la rotation $\theta(x)$, ce qui donne quatre degrés de liberté (DDL) (figure IV.4).

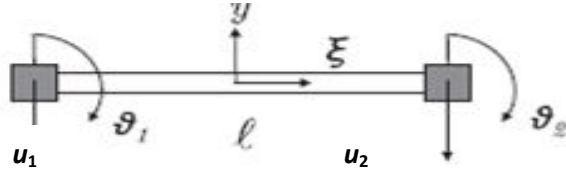


Figure IV. 4. Modèle d'EF de la poutre de Timoshenko à 4 DDL

La coordonnée sans dimension ξ et le vecteur de déplacements nodaux sont :

$$\xi = 2x / l \quad U_e = [u_1, \theta_1, u_2, \theta_2]^T \tag{IV.47}$$

Le vecteur de déplacement généralisé $s_e(x, t)$ peut être exprimé comme suit:

$$S_e(x, t) = \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = N(x) U_e(t) \tag{IV.48}$$

Où $N(x)$ représente la matrice des fonctions de forme, ce qui suppose le formulaire suivant:

$$N(x) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \quad (IV.49)$$

En appliquant l'équation de Lagrange combinée avec la fonction de la dissipation d'énergie de Rayleigh, pour la poutre en FGM de Timoshenko à 4 DDL, le système d'équations résultant d'EF prend la forme suivante:

$$[M_e] \{\ddot{u}_e\} + [C_e] \{\dot{u}_e\} + [K_e] \{u_e\} = \{0\} \quad (IV.50)$$

$[M_e]$, $[C_e]$ et $[K_e]$ représentent respectivement les matrices élémentaires de masse, d'amortissement et de raideur. Les matrices ci-dessus peuvent être évaluées en prenant la configuration suivante:

- La Matrice de masse :

$$M_e = \frac{\ell}{6} \begin{bmatrix} 2I_1 & \rho & I_1 & 0 \\ 0 & 2I_2 & 0 & I_2 \\ I_1 & 0 & 2I_1 & \rho \\ 0 & I_2 & 0 & 2I_2 \end{bmatrix} \quad (IV.51)$$

- La Matrice de rigidité :

$$[K_e] = \frac{1}{2\ell} \begin{bmatrix} 2.\kappa.A_{55} & \kappa.A_{55}.\ell & -2.\kappa.A_{55} & \kappa.A_{55}.\ell \\ \kappa.A_{55}.\ell & \kappa.A_{55}.\frac{\ell^2}{2} + 2.D_{I'} & -\kappa.A_{55}.\ell & \kappa.A_{55}.\frac{\ell^2}{2} - 2.D_{11} \\ -2.\kappa.A_{55} & -\kappa.A_{55}.\ell & 2.\kappa.A_{55} & -\kappa.A_{55}.\ell \\ \kappa.A_{55}.\ell & \kappa.A_{55}.\frac{\ell^2}{2} - 2.D_{11} & -\kappa.A_{55}.\ell & \kappa.A_{55}.\frac{\ell^2}{2} + 2.D_{11} \end{bmatrix} \quad (IV.52)$$

- La Matrice d'amortissement :

$$[C_e] = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} 2.\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell^2} & \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & -2.\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell^2} & \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} \\ \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & 2.\eta_b.\frac{D_{11}}{\ell^2} + \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{2} & -\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & 2.\eta_b.\frac{D_{11}}{\ell^2} - \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{2} \\ -2.\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell^2} & -\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & 2.\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell^2} & -\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} \\ \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & -2.\eta_b.\frac{D_{11}}{\ell^2} + \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{2} & -\eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{\ell} & 2.\eta_b.\frac{D_{11}}{\ell^2} + \eta_s.\kappa \frac{A_{55}}{2} \end{bmatrix} \quad (IV.53)$$

Tel que:

$$I_1 = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) dz$$

$$I_2 = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 dz$$

$$D_{11} = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E(z) \cdot z^2}{(1 - \nu(z)^2)} dz$$

$$A_{55} = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E(z) \cdot z^2}{(1 + \nu(z))} dz$$

IV.3.2. Calcul des valeurs propres

Les vibrations libres de la poutre en FGM est une solution de l'équation (IV.50), dans laquelle le terme d'amortissement [C] est égal à 0, sous la forme :

$$[M] \ddot{u} + [K] u = 0 \quad (IV.54)$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est donné par :

$$u = \phi e^{i\omega t} \quad (IV.55)$$

Reportant (4.55) dans (4.54), il vient :

$$[K - \omega^2 M] \phi = 0 \quad (IV.56)$$

L'existence des solutions non triviale ($\phi \neq 0$) nécessite l'exécution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\det [K - \omega^2 M] = 0 \tag{IV.57}$$

L'élargissement du déterminant donnera une équation algébrique de n degré en ω^2 pour un système de n degrés de liberté. Les matrices $[K]$ et $[M]$ étant définies positives, il en résulte que l'équation (IV.57), possède n racines réelles ω_i^2 , ou n est la dimension des matrices $[K]$ et $[M]$, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont des valeurs propres de système (IV.56).

D'autre part, le système d'équations du mouvement de la poutre en FGM encastrier-libre de Timoshenko, soumis par une vibration libres amorties prend la forme de l'Equation (IV.50).

En conséquence, en introduire $v = \phi e^{i\omega t}$ dans l'Equation (IV.50) donne le problème de la valeur propre quadratique (Tisseur and Meerbergen 2001) suivant:

$$[\omega^2 M + \omega C + K] \phi = 0 \tag{IV.58}$$

La solution de l'équation (IV.58) fournit les valeurs propres quadratiques ω_i et les vecteurs propres associés ϕ_i . Les valeurs propre quadratique nécessite d'identifier ω_i et les vecteurs associés non-nuls ϕ_i ($i=1; \dots; 2n$), satisfaisant ainsi l'équation caractéristique associée suivante:

$$\det [\omega^2 M + \omega C + K] = 0 \tag{IV.59}$$

Considérant les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.60}$$

L'Equation (IV.58) se transforme comme :

$$[A - \omega B] \phi = 0 \tag{IV.61}$$

En conséquence, les 2n valeurs propres associées peuvent être déterminées par l'équation caractéristique:

$$\det(A - \omega B) = 0 \tag{IV.62}$$

La solution de l'équation (IV.58) produit 2n valeurs propres (c'est-à-dire fréquences propres) ω_i et 2n vecteurs propres correspondants ϕ_i ($i = 1, \dots, 2n$), qui représentent les modes de vibration du système. Comme le problème considéré ici est non classique, Les fréquences propres se produisent dans les complexes conjugués de la forme:

$$\omega_i = Real(\omega_i) + i \times im(\omega_i) \tag{IV.63}$$

Considérant la première valeur propre ω_1 , qui est associée à la premier mode de vibration de la poutre, en adoptant une annotation commune à celle utilisée pour le système (DDL), la partie réelle et imaginaire de ω_1 peut être identifiée par la relation ultérieure (Capsoni, Maria Viganò and Bani-Hani 2013):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Reel(\omega_1) + i \times im(\omega_1) \\ \omega_1 &= -\omega_{N,1} \zeta_1 + i \omega_{N,1} \left(\sqrt{1 - \zeta_1^2} \right) = -\omega_{N,1} \zeta_1 + i \omega_{d,1} \end{aligned} \tag{IV.64}$$

Tel que :

$\omega_{N,1}$: représente la fréquence naturelle

ζ_1 : Le facteur d'amortissement modal

$\omega_{d,1}$: La fréquence naturelle amortie

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle mathématique pour analysé des vibrations libres amorties et non amorties des poutres en FGM. Dans la première partie, les équations de mouvement sont obtenues par l'utilisation du principe des travaux virtuels en utilisant la théorie classique d'Euler Bernoulli. La résolution de ce dernier est faite par la méthode de séparation des variables et les fréquences naturelles sont obtenues pour différentes conditions aux limites. Dans la deuxième partie, Les équations de mouvement sont obtenues en appliquant le principe de Hamilton combiné avec la fonction de Rayleigh, basé sur le modèle de Kelvin-Voigt, en utilisant la théorie du premier ordre de Timoshenko.

Les résultats présentés au chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de ces développements théoriques dans le système dynamique libre.

Chapitre V : Résultats et commentaires

V.7. Introduction

Il existe plusieurs théories pour décrire le comportement des structures de type poutre.

La plus ancienne est celle d'Euler-Bernoulli dite théorie classiques (CBT) ou la contrainte transversale de cisaillement est négligée. L'autre théorie bien connue est la théorie de (Timoshenko et Gere 1972) ou la théorie de déformation au cisaillement du premier ordre (FSDBT) dans laquelle la distribution de la contrainte transversale de cisaillement par rapport à la coordonnée d'épaisseur est supposée constante. Ainsi, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser l'erreur en raison de cette hypothèse. Et puis, on trouve les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé qui considèrent le gauchissement des sections transversales et satisfont l'état de contrainte de cisaillement transversal nul dans les surfaces supérieures et inférieures de la section transversale.

Cette étude est basée sur deux cas différents ; dans le premier, nous allons étudier les vibrations transversales d'une poutre sandwich en FGM pour différentes conditions aux limites. Les propriétés matérielles comme le module de Young et de cisaillement, coefficient de poisson, etc. varient selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la poutre. On va déterminer le champ de déplacement d'après les expressions de la théorie classique (Théorie d'Euler Bernoulli). Le deuxième, nous allons étudier l'effet d'amortissement sur les fréquences propres et la stabilité de la poutre en FGM.

V.8. Vibration libre des poutres sandwich en FGM

La structure sandwich a été développée et utilisée depuis 50 ans à cause de sa grande rigidité en flexion, de poids spécifique faible et des qualités d'isolation importante, des bonnes caractéristiques en vibration, et excellentes propriétés contre la fatigue.

La construction en sandwich FGM existe généralement en deux types : peaux FGM –noyau homogène et peaux homogènes – noyau FGM. Dans ce chapitre on considère le deuxième type (poutre sandwich avec peaux homogènes – noyau FGM) pour cette étude on va examiner et analyser la réponse en fréquence de la poutre sandwich en FGM avec différentes conditions aux limites et fraction volumique.

V.8.1. Propriétés matérielles de la poutre FGM

Considérons le cas d'une poutre sandwich en FGM, d'épaisseur uniforme composée de trois couches hétérogènes rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme

montré en figure V.1. Les faces supérieures et inférieures se situent à $z = \pm h/2$, et les cotés de la poutre sont parallèles aux axes x et y .

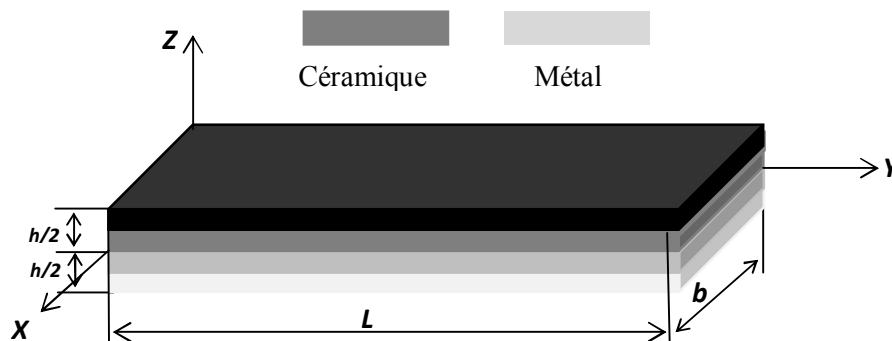


Figure V. 1. Géométrie d'une poutre sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes.

La poutre sandwich est composée de trois couches élastiques, nommées, couche « 1 », couche « 2 », et couche « 3 » de la face inférieure à celle supérieure de la poutre. Les coordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et la face supérieure sont dénotés par $h_1 = -h/2$, h_2 , h_3 , et $h_4 = h/2$, respectivement. Le rapport d'épaisseur dans chaque couche du bas en haut est dénoté brièvement par les combinaisons de trois chiffres « 1-0-1 », « 2-1-2 » comme il est montré en figure V.2.

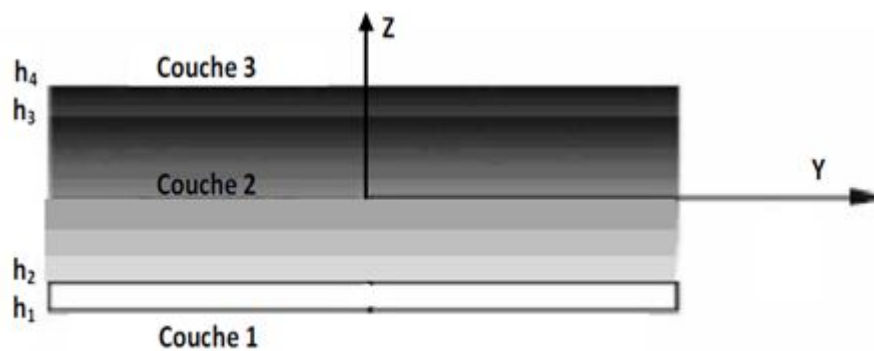


Figure V. 2. Variation matérielle suivant l'épaisseur de la poutre sandwich avec peaux homogènes et cœur en FGM.

V.8.2. Propriétés des matériaux

Les propriétés du FGM varient de façon continue en fonction de la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur. Une fonction de loi de puissance est utilisée couramment pour décrire cette variation de propriétés matérielle. Les structures sandwiches FGMs sont discutées comme suit.

- **Poutre sandwich à cœur P- FGM et à peaux homogènes**

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = 0 \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{V.1})$$

$$V^{(2)} = \left(\frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^p \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{V.2})$$

$$V^{(3)} = 1 \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{V.3})$$

Où $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) dénote la fonction de la fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de la fraction volumique ($0 \leq p \leq +\infty$), qui indique la variation matérielle à travers l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, tel que le module de Young E , et le coefficient de Poisson ν et la densité de masse ρ , peuvent être exprimés par la loi des mélanges (Marur 1999) comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (\text{V.4})$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n

P_1 et P_2 sont les propriétés matérielle des faces supérieure et inférieure de la couche 3 et 1 respectivement, dans cette étude, on suppose que le coefficient de poisson est constant (Delale et Erdogan 1983).

V.8.3. Résultats numériques

Considérant le cas d'un cœur en FGM et les 2 peaux rigides et homogènes. Dans lesquels le module de Young et la densité de masse de la couche «1» sont $E_c = 380 \text{ GPa}$ $\rho_c = 3800 \text{ kg / m}^3$ (P_1 , Alumine) dans la face supérieure et $E_m = 70 \text{ GPa}$ $\rho_m = 2708 \text{ kg / m}^3$ (P_2 , Aluminium) dans la face inférieure, Pour différentes conditions aux limites.

Tableau V. 1. La variation des fréquences non dimensionnelles pour différentes conditions aux limites et différents indice de fractions volumiques pour $L/h=20$

Différentes conditions aux limites	Type	$\overline{\omega_1}$	p=0	p=0.5	p=1	p=2	p=5	p=10
C-C	0-1-0	solution exact (présent)	12.4302	10.5840	9.5685	8.7317	8.3138	8.0677
		(Simsek 2010)	12.4142	10.5713	9.5554	8.7186	8.3006	8.0556
		(Nguyen 2015)	12.2243	10.4269	9.4319	8.5977	8.1446	7.8860
	1-2-1	solution exact (présent)	9.6507	9.0283	8.7312	8.5100	8.4430	8.4771
		(Nguyen 2015)	9.5451	8.9243	8.6264	8.3959	8.3047	8.3205
	C-S	0-1-0	solution exact (présent)	8.5661	7.2938	6.5940	6.0173	5.7293
--- --- ---- -			--- --- -	--- --- -	--- ---	--- --- -	--- ---	--- ---
--- --- ---- -			--- --- -	--- --- -	--- ---	--- --- -	--- ---	--- ---
1-2-1		solution exact (présent)	6.6507	6.2217	6.0170	5.8645	5.8183	5.8418
		--- --- ---- -	--- --- -	--- --- -	--- ---	--- --- -	--- ---	--- ---
S-S		0-1-0	solution exact (présent)	5.4834	4.6690	4.2210	3.8518	3.6675
	(Simsek 2010)		5.4777	4.6646	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547
	(Nguyen 2015)		5.4603	4.6506	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	1-2-1	solution exact (présent)	4.2573	3.9827	3.8516	3.7541	3.7245	3.7395
		(Nguyen 2015)	4.2445	3.9695	3.8387	3.7402	3.7081	3.7214
	C-F	0-1-0	solution exact (présent)	1.9534	1.6633	1.5037	1.3722	1.3065
(Simsek 2010)			1.9525	1.6627	1.5029	1.3714	1.3057	1.2671
(Nguyen 2015)			1.9496	1.6602	1.5011	1.3696	1.3034	1.2646
1-2-1		solution exact (présent)	1.5166	1.4188	1.3721	1.3374	1.3268	1.3322
		(Nguyen 2015)	1.5145	1.4165	1.3700	1.3350	1.3241	1.3292

Pour vérifier la précision de la présente méthode, les fréquences non dimensionnelles de la poutre sandwich en FGM avec différentes conditions aux limites et indice de fraction volumique ont été comparées par (Simsek 2010) et (Nguyen 2015).

Les résultats sont présentés dans le tableau V.1. On peut remarquer que les résultats étaient dans un bon accord qui démontrait la précision de notre modèle.

Les fréquences naturelles de la poutre sandwich dans les différentes conditions aux limites avec les différents indices de volume ($p=0.1$, $p=1$ et $p=10$) sont présentées dans les tableaux ci-dessous :

Tableau V. 2. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encasté-encasté (C-C) pour $L/h=10$

p	$\overline{\omega}_n$	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1	1-8-1	0-1-0
0.1	$\overline{\omega}_1$	29.425	29.635	30.048	30.216	29.763	26.368
	$\overline{\omega}_2$	81.112	81.707	82.828	83.291	82.042	72.684
	$\overline{\omega}_3$	153.01	160.14	162.37	163.28	160.83	142.49
1	$\overline{\omega}_1$	29.807	30.178	30.869	31.381	32.558	33.380
	$\overline{\omega}_2$	82.164	83.160	85.093	86.504	89.750	93.254
	$\overline{\omega}_3$	161.07	163.02	166.81	169.58	175.94	182.82
10	$\overline{\omega}_1$	30.488	31.466	33.217	34.484	37.500	41.073
	$\overline{\omega}_2$	84.043	86.739	91.564	95.059	103.37	113.22
	$\overline{\omega}_3$	164.75	170.04	179.50	186.35	202.64	221.95

Tableau V. 3. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich appuyé-appuyé (S-S) pour $L/h=10$

p	$\overline{\omega}_n$	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1	1-8-1	0-1-0
0.1	$\overline{\omega}_1$	12.980	13.072	13.255	13.329	13.129	11.631
	$\overline{\omega}_2$	51.922	52.291	53.020	53.317	52.517	46.527
	$\overline{\omega}_3$	116.82	117.65	119.29	119.96	118.16	104.69
1	$\overline{\omega}_1$	13.148	13.308	13.617	13.843	14.362	14.922
	$\overline{\omega}_2$	52.595	53.233	54.470	55.374	57.451	59.694
	$\overline{\omega}_3$	118.34	119.77	122.55	124.59	129.26	134.31
10	$\overline{\omega}_1$	13.449	13.881	14.653	15.212	16.542	18.119
	$\overline{\omega}_2$	53.798	55.524	58.612	60.849	66.170	72.744
	$\overline{\omega}_3$	121.04	124.92	131.87	136.91	148.88	163.07

Tableau V. 4. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encasté-appuyé (C-S) pour $L/h=10$

p	$\bar{\omega}_n$	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1	1-8-1	0-1-0
0.1	$\bar{\omega}_1$	20.278	20.422	20.707	20.510	20.510	18.171
	$\bar{\omega}_2$	65.713	66.181	67.104	67.499	66.467	58.886
	$\bar{\omega}_3$	137.10	138.08	140.00	140.79	138.67	122.86
1	$\bar{\omega}_1$	20.541	20.790	21.273	21.626	22.437	23.314
	$\bar{\omega}_2$	66.566	67.373	68.939	70.082	72.711	75.551
	$\bar{\omega}_3$	138.88	140.56	143.83	146.22	151.70	157.63
10	$\bar{\omega}_1$	21.010	21.684	22.891	23.764	25.842	28.305
	$\bar{\omega}_2$	68.088	70.272	74.181	77.013	83.746	91.725
	$\bar{\omega}_3$	142.06	146.61	154.77	160.68	174.73	191.38

Tableau V. 5. Les fréquences naturelles de la poutre sandwich encasté-libre (C-F) pour $L/h=10$

p	$\bar{\omega}_n$	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1	1-8-1	0-1-0
0.1	$\bar{\omega}_1$	4.624	4.657	4.722	4.748	4.677	4.144
	$\bar{\omega}_2$	28.979	29.186	29.593	29.758	29.312	25.969
	$\bar{\omega}_3$	81.144	81.721	82.861	83.324	82.075	72.713
1	$\bar{\omega}_1$	4.684	4.741	4.851	4.931	5.116	5.316
	$\bar{\omega}_2$	29.355	29.711	30.402	30.906	32.065	33.318
	$\bar{\omega}_3$	82.196	83.193	85.127	86.539	89.785	93.291
10	$\bar{\omega}_1$	4.791	4.945	5.220	5.419	5.893	6.455
	$\bar{\omega}_2$	30.026	30.990	32.714	33.962	36.932	40.451
	$\bar{\omega}_3$	84.076	86.773	91.600	95.096	103.41	113.26

Les tableaux (V.2~V.5) illustrent les variations des trois premières fréquences naturelles pour les quatre conditions aux limites (C-C, S-S, C-S et C-F) de la poutre avec les différents indices de fractions volumiques (0.1, 1 et 10) pour les diverses combinaisons de matériaux. La première observation est que les fréquences propres sont proportionnelles à l'indice de fraction volumique (p), cela signifie que les fréquences de la structure sont importantes quand il y a un rapport de céramique plus élevé ; on peut également remarquer que le rapport d'épaisseur devient plus important lorsque la variation des fréquences propres et des modes de vibration plus élevés.

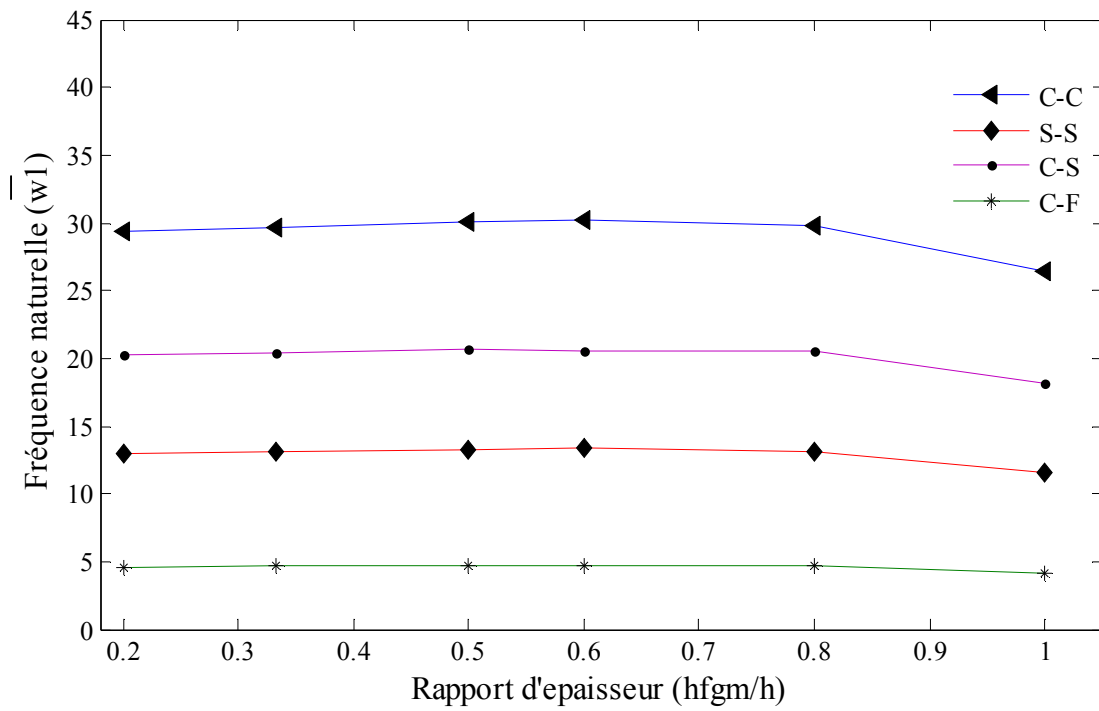


Figure V. 3. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 0.1$

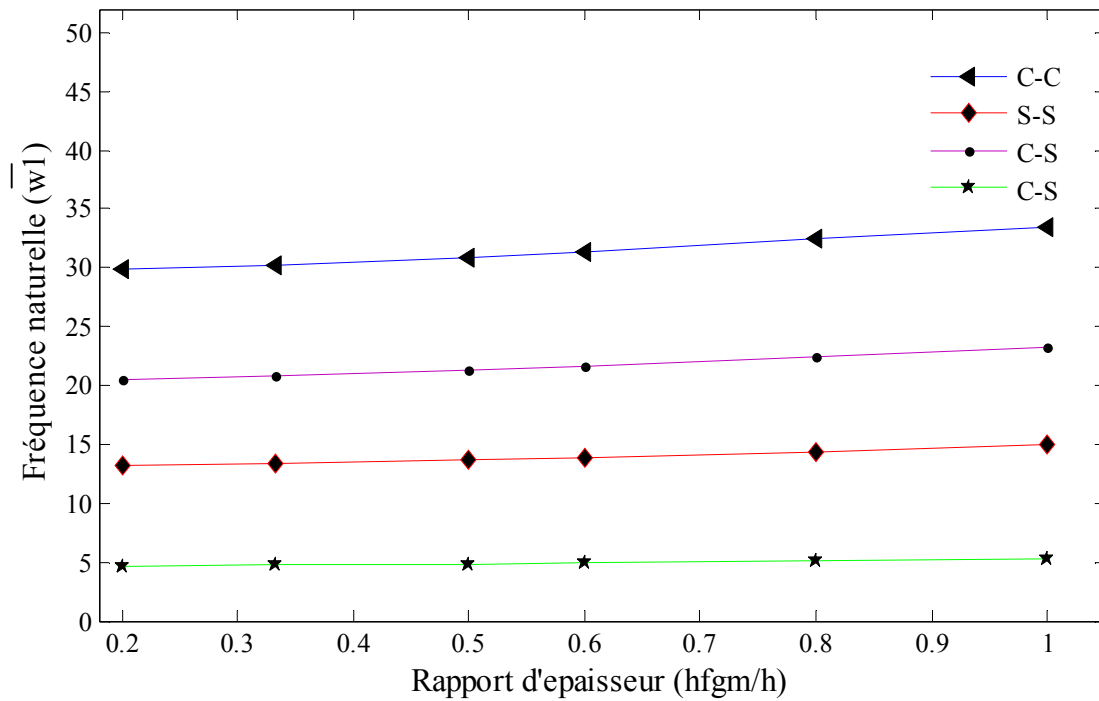


Figure V. 4. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 1$

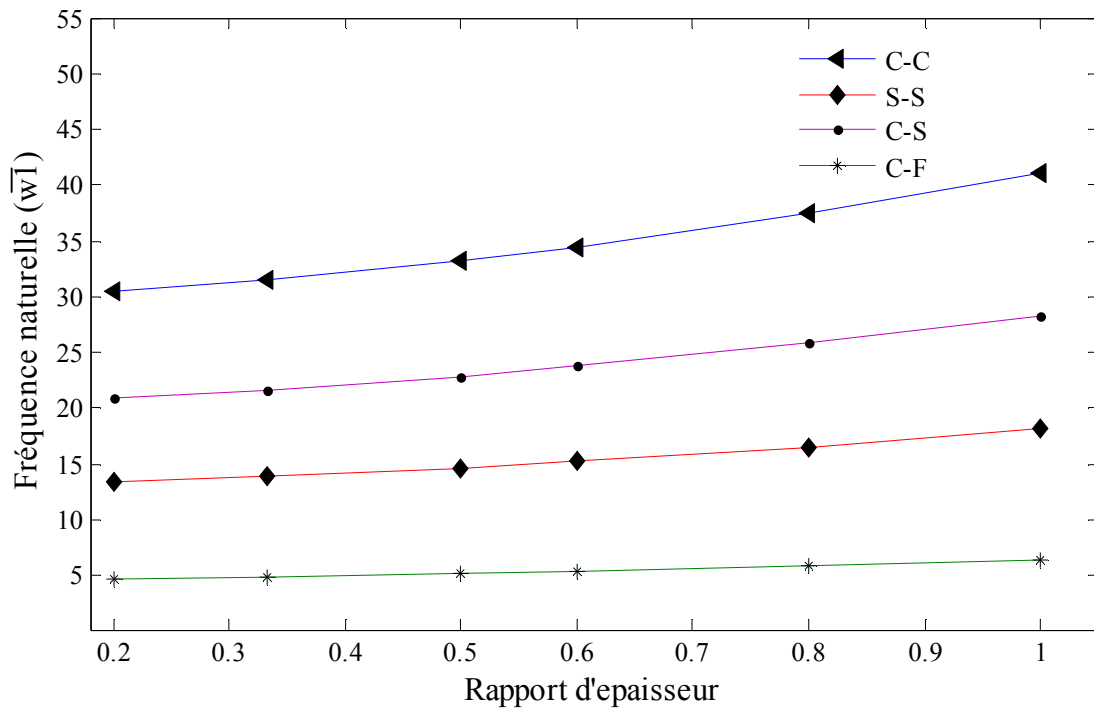


Figure V. 5. Fréquences naturelles de poutre sandwich pour $p = 10$

Les fréquences propres de la poutre sandwich correspondant au rapport d'épaisseur FGM pour l'indice de fraction volumique faible 0,1, 1 et 10 sont détectées sur les figures V.3 à V.5, respectivement, on a remarqué que le rapport de variation de fréquence sous des conditions aux limites encasté-encasté est important par rapport aux autres ensembles (C-S, S-S et C-F), cette importance est diminuée quand la rigidité de la poutre est diminuée.

Sur les mêmes figures, on constate que pour l'indice de fraction volumique faible ($p < 1$), les fréquences naturelles sont plus grandes lorsque l'épaisseur de la couche FGM (h -FGM) atteint la marge de 60% de l'épaisseur totale (h -total) et faible lorsque la h -FGM est égale à 100% de h -total, Cette réduction est rapide lorsque le rapport d'épaisseur est entre 0,8 et 1. Pour l'indice de fraction volumique est supérieur ($p \geq 1$), les fréquences propres sont maximales lorsque l'épaisseur de la poutre est purement en FGM et minimale lorsque h -FGM prend des petits valeurs, il est bien observé sur les figures V.4 et V.6 que les fréquences naturelles sont proportionnelles à l'épaisseur de FGM et prend une valeur plus importante lorsque l'épaisseur de FGM est supérieure.

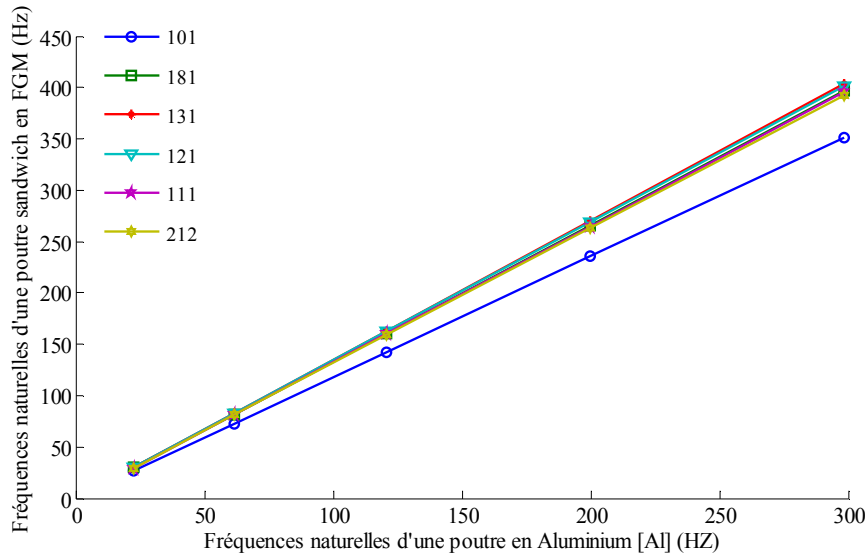


Figure V. 6. La comparaison entre les Fréquences naturelles d'une poutre bi-encasté en FGM avec les fréquences naturelles d'une poutre en Aluminium pour ($p=0.1$)

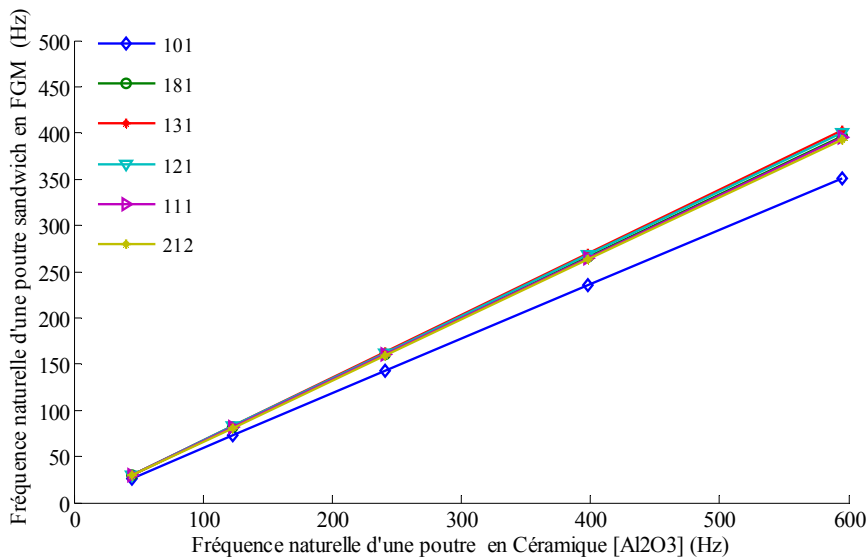


Figure V. 7. La comparaison entre les Fréquences naturelles d'une poutre bi-encasté en FGM avec les fréquences naturelles d'une poutre en Allumine pour ($p=0.1$)

Les figures V.6 et V.7 montrent que les fréquences propres de la poutre sandwich FGM (pour toutes les conditions aux limites) sont proportionnelles à la fréquence propre des matériaux de base (céramiques, métal). La droite pour la poutre (0-1-0) présente la plus petite pente tandis que celle correspondante a (1-3-1) présente la plus grand pente.

V.9. Étude de stabilité de la poutre en FGM

Dans cette étude nous supposons une poutre encadré- libre en FGM du modèle de Timoshenko avec la distribution d'amortissement visqueux interne. La poutre est de longueur (L), largeur ($b=0.02m$), et l' hauteur ($h=0.02m$) voir la figure 5.8.

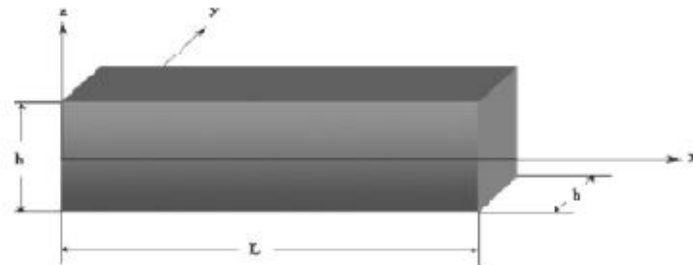


Figure V. 8. Géométrie de poutre en FGM

Les propriétés matérielles de FGM varient continuellement dans le sens de l'épaisseur (h) en raison de la variation progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal).

V.9.1. Résultats numériques

Dans cette partie, l'analyse des vibrations des poutres en FGM encadrer-libre par la théorie de Timoshenko avec DIVD est effectuée pour discussion en prend ($\eta_b = \eta_s = \beta$).

β : est le temps de relaxation qui représente le caractéristique mécanique d'amortissement interne du matériau (coefficient d'amortissement interne globale).

Les propriétés matérielles comme le module de Young et de cisaillement, coefficient de poisson, sont varient selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la poutre.

Tableau V. 6. Propriétés matérielle de la poutre en FGM

Propriétés	Unité	Aluminium (Al)	Alumine (Al_2O_3)
E	GPa	70	380
ρ	kg/m ³	2700	3800
ν	-	0.23	0.23

Tableau V. 7. Comparaison des fréquences naturelles non amortie

p	Céramique 100%	0.5	1	5	10	Métal 100%
05 éléments	3.6011	3.1637	2.9963	2.6655	2.4553	1.8336
10 éléments	3.5888	3.1529	2.9860	2.6564	2.4469	1.8273
100 éléments	3.5845	3.1492	2.9825	2.6533	2.4440	1.8251
(Elmeiche 2016)	3.5858	3.0434	2.7483	2.3698	2.2898	1.8258

Le tableau V.7 présente une comparaison des résultats des fréquences propre de la poutre encastré- libre en FGM du modèle de Timoshenko pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport L/h . Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats analytiques proposés par (A.Elmeiche 2016). On peut constater que les résultats de cette théorie montrent un bon accord avec ceux obtenus par les autres théories de cisaillement des poutres pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance (p). On remarque aussi que lorsque le nombre d'élément n augmente les valeurs de la pulsation propre se converge vers des valeurs fiables.

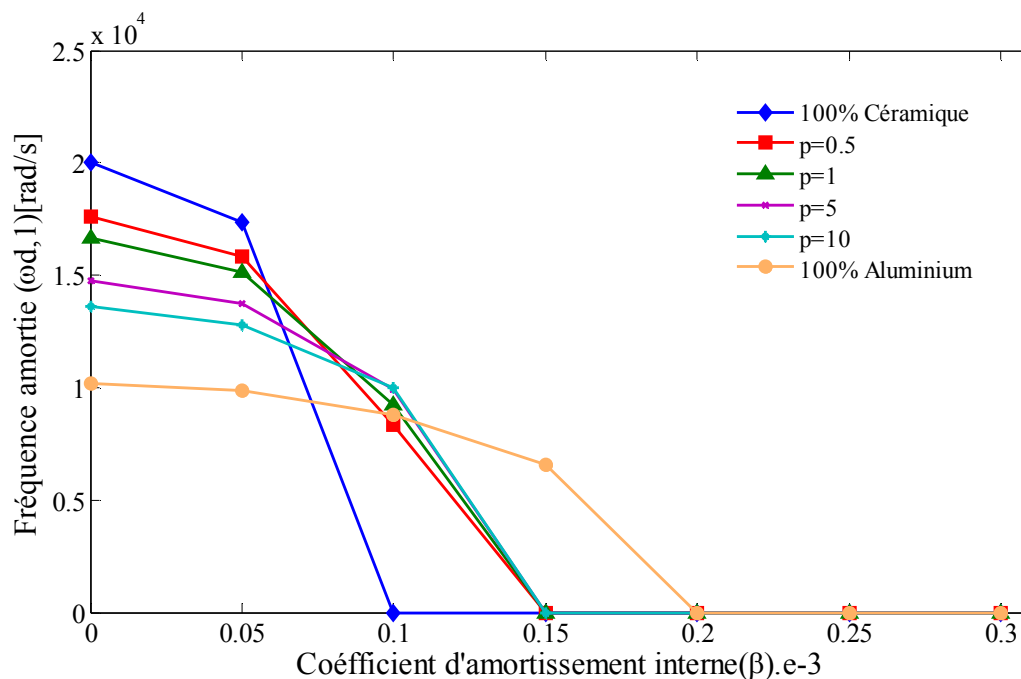


Figure V. 9. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=5$

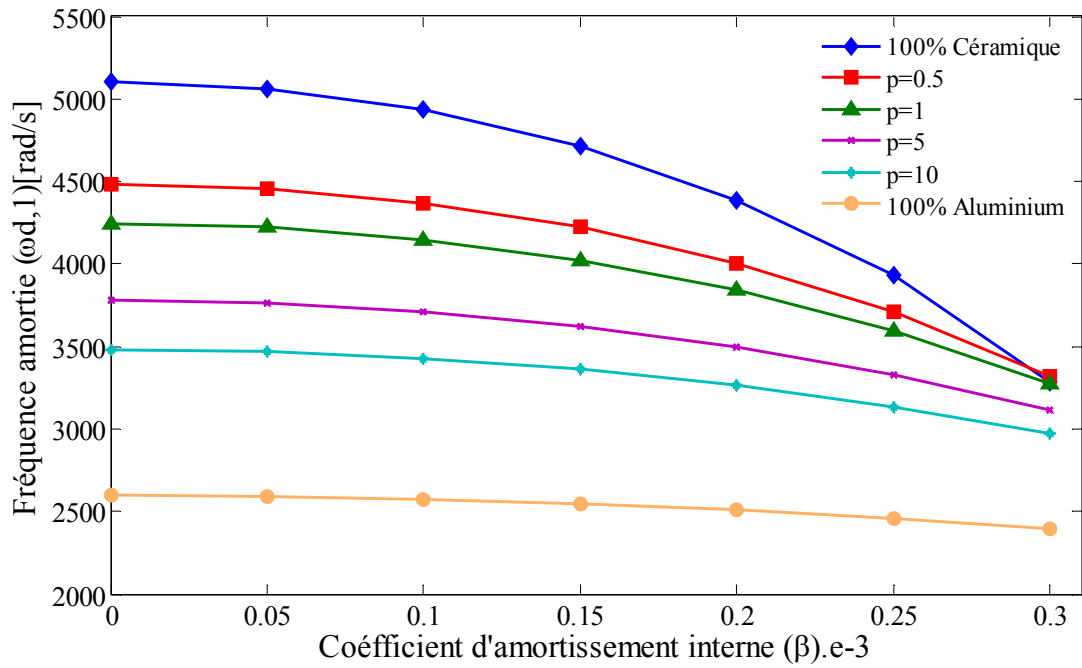


Figure V. 10. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=10$

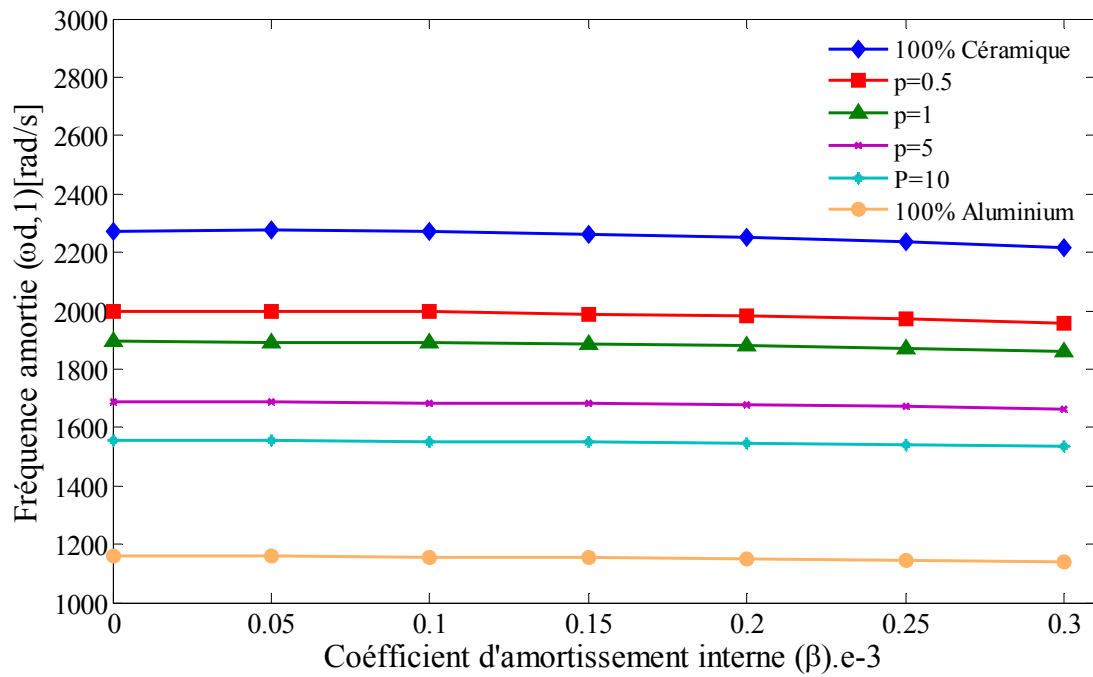


Figure V. 11. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=15$

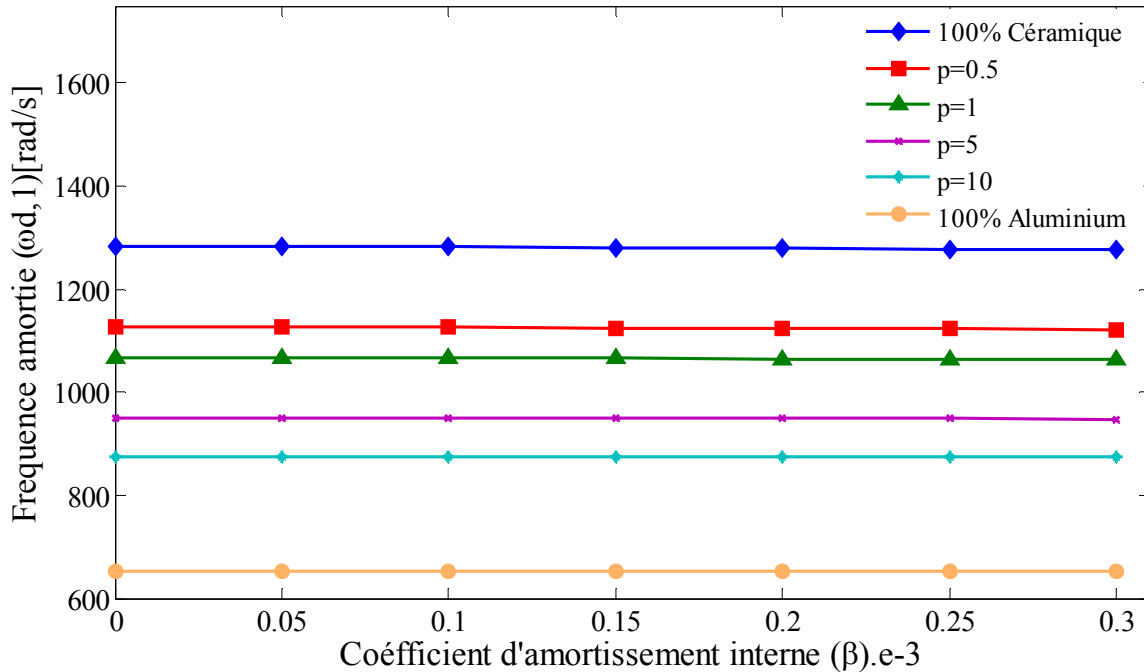


Figure V. 12. Effet du coefficient d'amortissement interne sur la fréquence amortie pour $L/h=20$

Les figures (V.9 à 5.12) montrent une analyse sur la première fréquence amortie pour quatre courbes différentes qui correspondent à quatre valeurs de rapport de dimension (L/h), en variant le coefficient d'amortissement interne β et la fraction volumique du matériau (p).

L'introduction de l'amortissement interne dans le système vibratoire induit une variation supplémentaire dans les fréquences vibratoires de la poutre en FGM, l'augmentation de coefficient d'amortissement β implique une diminution de la fréquence amortie, ce changement devient très crucial pour les poutres qui présentent une grande raideur et un faible taux d'élanement (L/h).

Il est noté aussi que la modification des propriétés de rigidité mène à une altération dans le système dynamique amorti. L'accroissement de l'indice de la fraction volumique (p) génère une réduction sur la valeur des fréquences amortie, cette diminution des fréquences devient remarquable quand on réduit le rapport d'élanement (L/h) de la poutre.

Lorsque le système est considéré comme un problème non-amorti, les fréquences amorties de la poutre en FGM prennent la valeur des fréquences propres, mis en évidence par la valeur d'amortissement $\beta = 0$.

On peut également en déduire que l'augmentation de facteur d'amortissement interne β dans les poutres courtes ($L/h=5$), comme indiquant la figure V.9, déstabilise les valeurs numériques, à partir desquels le mouvement vibratoire est fortement amorti car la fréquence d'oscillation

libre du système amorti disparaît. Par conséquent, l'évolution du facteur d'amortissement interne β , conduit à la détermination de l'amortissement critique modal associé à toute forme de système vibratoire libre.

V.10. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre nous avons examiné les vibrations libres des poutres sandwich en FGM en supposant que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur avec une distribution de puissance (P-FGM). Nous avons analysés l'influence des fractions volumiques des matériaux de base (céramique et aluminium) sur les fréquences propres non amorti. Les résultats numériques ont été présentés avec divers états de frontières de la poutre.

Dans la seconde partie, une étude de stabilité dynamique est présentée afin de mieux interpréter l'influence de l'amortissement interne sur les fréquences naturelles d'une poutre en FGM.

Conclusion générale

Conclusion Générale

Les structures en FGMs représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur géométrie pour obtenir des propriétés optimales.

Dans ce travail, nous avons présenté une recherche théorique sur les vibrations libres amorties et non amorties des poutres fonctionnellement graduées « FGM » à base d'Al/AL₂O₃, en utilisant les modèles d'Euler Bernoulli et de Timoshenko. Les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de cette poutre selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Plusieurs paramètres physiques et géométriques sont traités pour analyser le comportement dynamique et la stabilité des poutres en FGM. Les principales conclusions de cette recherche sont :

- Le changement des fréquences propres dépend de la combinaison des fractions volumiques des matériaux céramique-métal.
- Les fréquences fondamentales non amorties d'une poutre sandwich avec un cœur en FGM sont maximales quand l'épaisseur (h_{FGM}) atteint les 60% de l'épaisseur totale de la poutre pour « $p < 1$ » et de 100% pour « $p \geq 1$ ».
- les fréquences amorties sont inversement proportionnelles au coefficient d'amortissement interne (β).
- Le rapport d'élanement (L/h) a un effet notable sur la variation des fréquences fondamentales amorties.
- L'efficacité de l'amortissement interne peut être manipulée en fonction du choix de la répartition matérielle et le rapport d'élanement (L/h) dans les poutres en FGM.

Des perspectives de ce travail seront :

- Prendre en compte l'effet de l'amortissement externe sur le comportement dynamique des poutres en FGM.
- Améliorer au mieux le modèle numérique pour étudier d'autres problèmes liés à la géométrie et la stabilité dans les poutres tournantes.
- Solliciter la poutre par des forces extérieures.

Références Bibliographiques

Ambartsumyan, S. A. 1969. "Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression". *Inzh. Zhur. MTT*, 3, 51-61.

Afaq K.S., Karama M. and Mistou S. 2003. "Un nouveau modèle raffiné pour le structures multicouches". In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*. Pages 289-292. Strasbourg.

Alshorbagy, Amal E., M.A. Eltaher, and F.F. Mahmoud. 2011. "Free Vibration Characteristics Of A Functionally Graded Beam By Finite Element Method". *Applied Mathematical Modelling* 35 (1): 412-425. doi:10.1016/j.apm.2010.07.006.

Assarar, M. 2009. "Analyse De L'amortissement Des Composites Sandwichs =Damping Analysis Of Sandwich Composites". HAL archives, Toulouse France.

Aydogdu, M. 2005. "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method". *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(11), 1740-1755. doi:10.1016/j.ijmecsci.2005.06.010.

Aydogdu, Metin, and Vedat Taskin. 2007. "Free Vibration Analysis Of Functionally Graded Beams With Simply Supported Edges". *Materials & Design* 28 (5): 1651-1656. doi:10.1016/j.matdes.2006.02.007.

Bachir Bouiadjra, R. 2015. "Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques épaisses en Composite sur Fondations Elastiques". Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.

Bao, G. and Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), pp.2853-2871. doi:10.1016/0020-7683(94)00267-z.

Bhatt, R., 1989. "Oxidation Effects on the Mechanical Properties of SiC Fiber-Reinforced Reaction-Bonded Silicon Nitride Matrix Composites,". NASA TM-102360, NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH.

Boch, P., Chartier, T., and Huttepain, M. 1986. "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites". *Journal of the American Ceramic Society*. 69(8), C-191. doi:10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x.

Boudaoud, H. 2000. "Modélisation De L'amortissement Actif-Passif Des Structures Sandwichs TH". PHD, Université Paul Verlaine-Metz.

Berreur, L., de Maillard, B., et Nösperger, S. 2002. L'industrie française des matériaux composites. Etude stratégique (Rapport de synthèse) réalisée par Nodal consultants pour le compte de la Digitip/SIM, 14.

Berthelot, J. M. 1999. Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures. &, 245, 172.

Berthelot, Jean-Marie. 2012. *Matériaux Composites*. Paris: Éd. Tec & doc.

- Benferhat, R.** 2017. "Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés". (Doctoral dissertation).
- Bhatt, R. T.** (2001). Feasibility of actively cooled silicon nitride airfoil for turbine applications demonstrated. In Research and Technology, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 34.
- Cailletaud, G., Tijani, M., Bugat, S., Forest, S., and Tran, Q. D.** 2005. Mécanique des matériaux solides.
- Capsoni, Antonio, Giovanni Maria Viganò, and Khaldoon Bani-Hani.** 2013. "On Damping Effects In Timoshenko Beams". *International Journal Of Mechanical Sciences* 73: 27-39. doi:10.1016/j.ijmecsci.2013.04.001.
- Chakraborty, A., and S. Gopalakrishnan.** 2003. "A Spectrally Formulated Finite Element For Wave Propagation Analysis In Functionally Graded Beams". *International Journal Of Solids And Structures* 40 (10): 2421-2448. doi:10.1016/s0020-7683(03)00029-5.
- Chi, Shyang-Ho, and Yen-Ling Chung.** 2006. "Mechanical Behavior Of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load—Part I: Analysis". *International Journal Of Solids And Structures* 43 (13): 3657-3674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.
- Cho, K. M., Choi, I. D., and Park, I. M.** 2004. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. In Materials Science Forum (Vol. 449, pp. 621-624). Trans Tech Publications.
- Coffignal, Gérard.** "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>.
- Delale, F., and F. Erdogan.** 1983. "The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane". *Journal Of Applied Mechanics* 50 (3): 609. doi:10.1115/1.3167098.
- Dufort, L., S. Drapier, and M. Grédiac.** 2001. "Closed-Form Solution For The Cross-Section Warping In Short Beams Under Three-Point Bending". *Composite Structures* 52 (2): 233-246. doi:10.1016/s0263-8223(00)00171-9.
- Dumont, Anne-Laure, Jean-Pierre Bonnet, Thierry Chartier, and José M.F. Ferreira.** 2001. "Mosi2/Al2o3 FGM: Elaboration By Tape Casting And SHS". *Journal Of The European Ceramic Society* 21 (13): 2353-2360. doi:10.1016/s0955-2219(01)00198-4.
- Elmeiche, Abbas.** 2013. "Vibrations libres des structures en FGM". Thèse de Magister. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbas.
- Elmeiche, Abbas, Abdelkader Megueni, and Abdelkader Lousdad.** 2016. "Free Vibration Analysis Of Functionally Graded Nanobeams Based On Different Order Beam Theories Using Ritz Method". *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 60 (4): 209-219. doi:10.3311/ppme.8707.
- EL-Wazery, M. S.** 2013. "Electrical And Mechanical Performance Of Zirconia-Nickel Functionally Graded Materials". *International Journal Of Engineering* 26 (4 (A)). doi:10.5829/idosi.ije.2013.26.04a.06.

Fuchiyama, T., and Noda, N. 1995. "Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material". *JSAE review*, 16(3), 263-268.

Gayen, D. (2013). *Finite element based vibration and stability analysis of functionally graded rotating shaft system under thermal environment. Thèse de doctorat.*

Gendre, L. 2011. Matériaux composites et structures composites. *ENS Cachan-Université Paris-Saclay.*

Gornet, L. (2008). *Généralité sur les matériaux composites.* Engineering school, HAL.

Horel, F. 2013. "Modélisation Analytique De L'Amortissement Des Poutres Composites Sandwich Contenant Des Couches Viscoélastiques". Phd, école polytechnique de Montréal.

Hopkinson, N., Hague, R., and Dickens, P. (Eds.). 2006. "Rapid manufacturing: an industrial revolution for the digital age". John Wiley & Sons.

Hujare, Pravin P., and Anil D. Sahasrabudhe. 2014. "Effect Of Thickness Of Damping Material On Vibration Control Of Structural Vibration In Constrained Layer Damping Treatment". *Applied Mechanics and Materials* 592-594: 2031-2035. doi:10.4028/www.scientific.net/amm.592-594.2031.

Isaac M. Daniel and Ori Ishai. 1994." *Engineering Mechanics of Composite Materials* ", Oxford university press.

Jamaludin, S. N. S., Mustapha, F., Nuruzzaman, D. M., Basri, S. N. (2013). "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828-840.

Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., and Nakashima, K. (2011). Fabrication of Al₂O₃-W functionally graded materials by slipcasting method. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing.

Kettaf, F.Z., Houari, M. S. A., Benguediab, M. and Tounsi, A. 2013. "Thermal Buckling Of Functionally Graded Sandwich Plates Using A New Hyperbolic Shear Displacement Model". *Steel And Composite Structures*. 15 (4): 399-423. doi:10.12989/scs.2013.15.4.399.

Koizumi, M. 1997. "FGM Activities In Japan". *Composites Part B: Engineering* 28 (1-2): 1-4. doi:10.1016/s1359-8368(96)00016-9.

Kumar, R.Roop, and S Maruno. 2002. "Functionally Graded Coatings Of HA-G-Ti Composites And Their In Vivo Studies". *Materials Science And Engineering: A* 334 (1-2): 156-162. doi:10.1016/s0921-5093(01)01792-0.

Levinson, M. 1980. "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mechanics Research Communications*. 7(6), 343-350. doi:10.1016/0093-6413(80)90049-x.

Lo, K. H., R. M. Christensen, and E. M. Wu. 1977. "A High-Order Theory Of Plate Deformation—Part 1: Homogeneous Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 44 (4): 663. doi:10.1115/1.3424154.

Marzano, M., & Celle, P. (2014). *Les matériaux composites. Rapport technique, Association Nationale pour la Formation Automobile.*

Marur, P. (1999). *Fracture behaviour of functionally graded materials*. Ph. D. Thesis, dissertation. Auburn University, Alabama.

Matsunaga, H. 2009. "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory". *Composite Structures*, 90, 76–86. doi:10.1016/j.compstruct.2009.02.004.

Mechab, I. 2009. "Etude des structures composites en utilisant les theories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique." Thesis, University of Sidi Bel Abbes.

Murthy, M. V. V. 1981. "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates".

Nguyen, Trung-Kien, T. Truong-Phong Nguyen, Thuc P. Vo, and Huu-Tai Thai. 2015. "Vibration And Buckling Analysis Of Functionally Graded Sandwich Beams By A New Higher-Order Shear Deformation Theory". *Composites Part B: Engineering* 76: 273-285. doi:10.1016/j.compositesb.2015.02.032.

Nguyen, Viet Tung. 2004. "Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques". Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech.

Niino, M., and Kisara, K. 2004. "The Present Status of the Functionally Graded Materials, and Future Prediction". *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 51(4), 242-249. doi:10.2497/jjspm.51.242

Öz, H.R. 2000. "Calculation Of The Natural Frequencies Of A Beam–Mass System Using Finite Element Method". *Mathematical And Computational Applications* 5 (2): 67-76. doi:10.3390/mca5020067.

Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. 2015. Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.

Reddy, J. N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719.

Reddy, J.N, and Cheng. Z. Q. 2001. "Three-Dimensional Thermomechanical Deformations Of Functionally Graded Rectangular Plates". *European Journal Of Mechanics - A/Solids*. 20(5): 841-855. doi:10.1016/s0997-7538(01)01174-3.

Reissner, E. 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ". *Journal Of Applied Mechanics*, A69-A77.

Saiyathibrahim, A., Mohamed, N. S. S., and Dhanapal, P. (2015). Processing techniques of functionally graded materials—a review. In International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology (pp. 98-105).

Sehoul, M. 2017. "Etude Du Comportement Mécanique Des Plaques Composite En Utilisant Des Théories De Déformations De Cisaillement Non-Polynomiales, ". Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.

- Şimşek, Mesut.** 2010. "Fundamental Frequency Analysis Of Functionally Graded Beams By Using Different Higher-Order Beam Theories". *Nuclear Engineering And Design* 240 (4): 697-705. doi:10.1016/j.nucengdes.2009.12.013.
- Suresh, S,** and A Mortensen. 1998. "Fundamentals Of Functionally Graded Materials". IOM Communications, London.
- Uchida, Y.,** Kato, K., Higa, S., Hayashi, N., and Uchida, Y. 2004. "Air Purification Using Titanium Functionally Graded Materials Produced by Progressive Lamination Method". *Transactions-Materials Research Society Of Japan*, 29, 2713-2716.
- Tanigawa, Y.** (1995). Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials. *Applied Mechanics Reviews*, 48(6), p.287. doi: 10.1115/1.3005103.
- Timoshenko, S. P.** and Gere, J. M. (1972). *Mechanics of Materials*. van Nordstrand Reinhold Company. New York.
- Tisseur, Françoise,** and Karl Meerbergen. 2001. "The Quadratic Eigenvalue Problem". *SIAM Review* 43 (2): 235-286. doi:10.1137/s0036144500381988.
- Touratier, M.** 1991. "An Efficient Standard Plate Theory". *International Journal Of Engineering Science* 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-y.
- Tsai, Ting-Chiang,** Jia-Hau Tsau, and Chun-Sheng Chen. 2009. "Vibration Analysis Of A Beam With Partially Distributed Internal Viscous Damping". *International Journal Of Mechanical Sciences* 51 (11-12): 907-914. doi:10.1016/j.ijmecsci.2009.09.039.
- Van de Vegte, J.,** and C.W. de Silva. 1976. "Design Of Passive Vibration Controls For Internally Damped Beams By Modal Control Techniques". *Journal Of Sound And Vibration* 45 (3): 417-425. doi:10.1016/0022-460x(76)90396-5.
- Watari, Fumio,** H. Kondo, Shingo Matsuo, Rika Miyao, Atsuro Yokoyama, Mamoru Omori, and Toshio Hirai et al. 2003. "Development Of Functionally Graded Implant And Dental Post For Bio-Medical Application". *Materials Science Forum* 423-425: 321-326. doi:10.4028/www.scientific.net/msf.423-425.321.
- Williamson, R. L.,** B. H. Rabin, and J. T. Drake. 1993. "Finite Element Analysis Of Thermal Residual Stresses At Graded Ceramic-Metal Interfaces. Part I. Model Description And Geometrical Effects". *Journal Of Applied Physics* 74 (2): 1310-1320. doi:10.1063/1.354910.
- Wu, A.H.,** W.B. Cao, C.C. Ge, J.F. Li, and A. Kawasaki. 2005. "Fabrication And Characteristics Of Plasma Facing Sic/C Functionally Graded Composite Material". *Materials Chemistry And Physics* ,91(2-3): 545-550. doi:10.1016/j.matchemphys.2004.12.038.
- Zenkert, D.** (1997). *The Handbook of Sandwich Construction*, Engineering Materials Advisory Service Ltd, London.