

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

**BACHIRI ATTIA**

Intitulé de la thèse

Contribution à l'étude des structures en Matériaux  
composites avancés: Approche mathématique

|                                |                           |     |                 |
|--------------------------------|---------------------------|-----|-----------------|
| Soutenu le : .... / ... / .... | Composition du jury :     |     |                 |
| <b>Président</b>               | TOUNSI Abdelouahed        | Pr  | U.D.L SBA       |
| <b>Directeur de thèse</b>      | BOURADA Mohamed           | MCA | U.D.L SBA       |
| <b>Co-Directeur de thèse</b>   | BENYOUCEF Samir           | Pr  | U.D.L SBA       |
| <b>Examinateur</b>             | BESSAIM Aicha             | MCA | U de MASCARA    |
| <b>Examinateur</b>             | HOUARI Mohammed Sid Ahmed | Pr  | U de MASCARA    |
| <b>Examinateur</b>             | BOUSAHLA Abdelmoumen Anis | MCA | C.U de Relizane |

Année universitaire 2019-2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## REMERCIEMENTS

A l'issue de ce travail de doctorat, je tiens à remercier toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de cette thèse, et en particulier:

Monsieur **BOURADA Mohamed**, MCA, Directeur du laboratoire LMH du département de génie civil et de travaux publics de l'Université de SIDI BELABBES. Directeur de cette thèse, pour son acceptation d'encadrement, ainsi que pour toute l'aide et les conseils prodigués tant sur le plan scientifique que sur le plan personnel durant l'élaboration de cette thèse.

Monsieur **BENYOUCEF Samir**, Professeur de l'Université de SIDI BELABBES Son soutien, son encadrement durant l'élaboration de cette thèse, ainsi que son assistance et ses conseils objectifs, qui m'ont été grandement profitables, Je lui reste redevable pour la réalisation de ce travail,

Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur de l'Université de SIDI BELABBES, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je lui en suis sincèrement reconnaissant,

Messieurs **HOUARI Mohammed Sid Ahmed**, Professeur de l'Université de MASCARA, et **BOUSAHLA Abdelmoumen Anis**, MCA du centre universitaire de RELIZANE, Madame **BESSAIM Aicha**, MCA de l'Université de MASCARA pour leur disponibilité et d'avoir trouvé le temps de se pencher sur mon manuscrit et d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Qu'ils veuillent bien accepter mes chaleureux remerciements,

Cette thèse de doctorat n'aurait peut-être pas abouti sans l'aide et les encouragements des personnes suivantes, que je tiens à associer à ces remerciements: **MAHMOUDI Abedelkader**, **BOURADA Fouad**.

Je tiens à remercier également tous les enseignants et secrétaires du laboratoire LMH du département de génie civil et des travaux publics de l'Université de Sidi Belabbes pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés de différentes manières.

Enfin, je ne peux oublier de mentionner ici, ma famille et mes amis, qui m'ont non seulement toujours encouragé et soutenu, mais surtout supporté dans tous les moments difficiles.

## DEDICACE

*À la mémoire de ma chère mère,  
À la mémoire de mon petit fils Ahmed Rafik,*

*À ma famille,  
À ma femme,  
À mon petit fils Farouk Abdelhak,*

*À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.*

نتناول في هذه الدراسة السلوك الحراري الديناميكي للوحات ذات المواد المتدرجة وظيفيا المرتكزة على أساسات مرنة ذات معاملين، يتم حل المسألة بواسطة نظرية جديدة لتشوه القص، حقل الإنزياح المستعمل في هذه النظرية يشتمل على تكامل رياضي غير محدد وأربع مجاهيل يتوجب تعيينها، نفترض أن اللوحة ترتكز على مساند بسيطة وتعرض الى نوعين من حقل حراري يتغير من خلال سمك اللوحة، نفترض أيضا أن الخصائص الميكانيكية للوحة تتدرج خلال سمك اللوحة حسب القانون الأسي، معادلات التوازن التفاضلية والشروط الحدية للمسألة يتم حلها رياضيا بواسطة مبدأ الإنزياح الافتراضي ومقاربة نافيه، يتم عرض دراسة عددية لنظرية تشوه القص الحالية للسلوك الحراري الديناميكي للوحات المتدرجة وظيفيا المرتكزة على أساسات مرنة ذات معاملين تهدف أساسا الى إثبات نجاعة هذه النظرية وإظهار تأثير: معامل الزمن، معاملات الأساس المرن، والإنزياح الجانبي على السلوك الانحنائي للوحات المتدرجة وظيفيا.

الكلمات المفتاحية : نظرية تشوه القص ذات أربع مجاهيل، الانحناء، أساس مرن، اللوحات المتدرجة وظيفيا، حمل توافقي حراري، تكامل، ديناميكي حراري.

### Résumé

Ce travail porte sur l'étude du comportement thermodynamique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur fondations élastiques à deux paramètres. Une solution analytique basée sur une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement est présentée. Le champ de déplacement utilisé dans la présente théorie raffinée contient une forme d'intégrale indéterminée et ne nécessite que quatre inconnues. La plaque est supposée simplement appuyée et soumise à deux différents champs de température à travers l'épaisseur. Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont supposées varier à travers l'épaisseur selon une distribution simple de la loi exponentielle. Les équations gouvernantes et les conditions aux limites sont dérivées selon le principe des travaux virtuels et l'approche de Navier est adoptée pour dériver des solutions analytiques. Une étude numérique détaillée de la présente nouvelle théorie raffinée est réalisée pour examiner l'influence de paramètre du temps, des paramètres de la fondation et de la flèche sur le comportement flexionnel de la plaque FG.

**Mots clés :** théorie de déformation de cisaillement à quatre variables, flexion, fondation élastique, plaque FG, harmonique, chargement thermique, thermodynamique.

### Abstract

This work deals with the study of the thermodynamic behaviour of functionally graded material plates resting on two-parameter elastic foundation. An analytical solution based on a new shear refined deformation theory is presented. The displacement field used in the present refined theory contains undetermined integral forms and involves only four unknowns to derive. The plate is assumed simply supported and subjected to two different temperatures fields across its thickness. The mechanical characteristics of the plate are assumed to be varied across the thickness according to a simple exponential law distribution. The governing equations and boundary conditions are derived using the principle of virtual displacements and Navier solution technique is adopted to derive analytical solutions. A detailed numerical study of the present new refined theory is carried out to examine the influence of the time's parameter, foundation's parameters and deflection on the bending response of the FG plate.

**Key words:** four variable shear deformation theory; bending; elastic foundation; FG plates; harmonic thermal load; integral; thermodynamic.

# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION GENERALE

|  |   |
|--|---|
| <b>1. Introduction</b>                             | 1 |
| <b>2. But et objectifs de la thèse</b>             | 2 |
| <b>3. Méthodologie et organisation de la thèse</b> | 3 |

## CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

|  |    |
|--|----|
| <b>I.1 Introduction</b>                                    | 5  |
| <b>I.2 FGMs et les composites</b>                          | 5  |
| <b>I.3 Historique sur les FGMs</b>                         | 6  |
| <b>I.4 Domaines d'application</b>                          | 7  |
| <b>I.5 Méthodes et techniques de mise en œuvre des FGM</b> | 8  |
| <b>I.6 Caractéristiques matérielles des FGMs</b>           | 9  |
| <b>I.7 Méthodes d'Homogénéisation des FGMs</b>             | 10 |
| I.7.1 Loi exponentielle E-FGMs                             | 11 |
| I.7.2 Loi des puissances P-FGMs                            | 12 |
| I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM            | 12 |
| I.7.4 Schéma de Mori-Tanaka (MT-FGMs)                      | 13 |
| <b>I.8 Loi de comportement matériel de l'élasticité 3D</b> | 14 |
| <b>I.7 Conclusion</b>                                      | 18 |

## CHAPITRE II : RAPPEL SUR LES THEORIES DES PLAQUES

|   |    |
|---|----|
| <b>II.1 Introduction</b>  | 19 |
| <b>II.2 Théorie des plaques bidimensionnelles</b>                     | 20 |
| II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT)                            | 20 |
| II.2.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) | 21 |
| II.2.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT)                   | 24 |
| <b>II.3 Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)</b>     | 29 |
| <b>II.4 théorie quasi-tridimensionnelles</b>                          | 30 |
| <b>II.5 Conclusion</b>  | 31 |

## CHAPITRE III: APERÇU LITTERAIRE SUR LES TRAVAUX ANTERIEURS

|   |    |
|---|----|
| <b>III.1 Introduction</b>   | 32 |
| <b>III.2 Les travaux basés sur les théories des plaques bidimensionnelles</b> | 32 |
| III.2.1 Modèles CPT   | 32 |

|  |           |
|--|-----------|
| III.2.2 Modèles FSDT   | 34        |
| III.2.3 Modèles HSDT   | 37        |
| <b>III.3 Les travaux basés sur le modèle tridimensionnel (Élasticité 3D)</b> | <b>40</b> |
| <b>III.4 Les travaux basés sur le modèle quasi-3D</b>                        | <b>41</b> |
| <b>III.5 Conclusion</b>  | <b>44</b> |

## **CHAPITRE VI: COMPORTEMENT THERMODYNAMIQUE DES PLAQUES FG SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>IV.1 Introduction</b>   | <b>45</b> |
| <b>IV.2 Modèles de fondations</b>  | <b>45</b> |
| <b>IV.2.1 Model de Winkler</b>   | <b>45</b> |
| <b>IV.2.2 Model de Pasternak</b>   | <b>46</b> |
| <b>IV.3 Formulation théorique de la présente théorie</b>                   | <b>46</b> |
| IV.3.1 Propriétés des matériaux  | 47        |
| IV.3.2 Théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des plaques FG. | 48        |
| IV.3.2.1 Hypothèses de la présente théorie                                 | 48        |
| IV.3.2.2 Cinématique et équations constitutives                            | 49        |
| IV.3.2.3 Équations gouvernantes  | 51        |
| <b>IV.4 Champs de température</b>  | <b>56</b> |
| IV.4.1 Distribution harmonique   | 56        |
| IV.4.2 Autres distribution de température                                  | 57        |
| <b>IV.5 Solution approchée pour une plaque simplement appuyée.</b>         | <b>58</b> |
| <b>IV.6 Conclusion</b>   | <b>61</b> |

## **CHAPITRE V: DISCUSSION DES RESULTATS ET ANALYSE**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>V.1 introduction.</b>                | <b>62</b> |
| <b>V.2 Résultats &amp; discussions.</b> | <b>62</b> |
| <b>V.3 Etude paramétrique.</b>          | <b>68</b> |
| <b>V.4 Conclusion</b>                   | <b>77</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES</b> | <b>78</b> |
|--|-----------|

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> | <b>80</b> |
|------------------------------------|-----------|

## LISTE DES TABLEAUX

### CHAPITRE V

|              |   |    |
|--------------|---|----|
| Tableau IV-1 | Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnus utilisés dans l'étude comparative.  | 63 |
| Tableau IV-2 | Effet de l'indice de puissance $k$ et les paramètres de fondations élastiques sur le déplacement transversal adimensionnel $\bar{w}$ d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ).                      | 64 |
| Tableau IV-3 | Effet de l'indice de puissance $k$ et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ).                   | 65 |
| Tableau IV-4 | Effet de l'indice de puissance $k$ et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle en plan $\bar{\tau}_{xy}$ d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ). | 66 |
| Tableau IV-5 | Effet de l'indice de puissance $k$ et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ).            | 67 |



## LISTE DES FIGURES

### CHAPITRE I

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Figure I-1 | Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal, Jha et al.(2013).   | 6  |
| Figure I-2 | Les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés.  | 8  |
| Figure I-3 | Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.  | 9  |
| Figure I-4 | Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de E-FGMs   | 11 |
| Figure I-5 | Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.   | 12 |
| Figure I-6 | Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.   | 13 |
| Figure I-7 | Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs  | 14 |
| Figure I-8 | Définition des matériaux isotropes et anisotropes.  | 15 |
| Figure I-9 | Les composantes des contraintes et des déformations dans le système des coordonnées cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGMs. | 15 |

### CHAPITRE II

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figure II-1 | Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous L'hypothèse de Kirchhoff, Belarbi et al. (2015).  | 21 |
| Figure II-2 | Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin Belarbi et (2015).  | 23 |
| Figure II-3 | Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) Carrera et al. (2008). | 23 |
| Figure II-4 | État non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CPT, FSDT et HSDT.  | 25 |

### CHAPITRE IV

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figure IV-1 | Approximation Winkler   | 46 |
| Figure IV-2 | Plaque FGM reposant sur une fondation élastique, a) Modèle Winkler, b) Modèle Pasternak | 47 |
| Figure IV-3 | Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.                | 58 |

### CHAPITRE V

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figure V-1  | Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur fondations élastique.  | 62 |
| Figure V -2 | Evolution du déplacement transversal $\bar{w}$ au cours de temps "t" de la plaque FGM pour différentes valeurs de l'exposant de température $\eta$ ( $\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )              | 68 |
| Figure V -3 | Evolution de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ au cours de temps "t" de la plaque FGM pour différents valeurs de l'exposant de température $\eta$ ( $\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )           | 68 |
| Figure V -4 | Evolution de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ au cours de temps "t" de la plaque FGM pour différents valeurs de l'exposant de température $\eta$ ( $\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ ) | 69 |
| Figure V -5 | Variation du déplacement transversal $\bar{w}$ en fonction de la fréquence naturelle $\omega$ ( $t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )  | 70 |

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| Figure V -6  | Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction de la fréquence naturelle $\omega$ ( $t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )  | 71 |
| Figure V -7  | Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ fonction de la fréquence naturelle $\omega$ ( $t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )   | 71 |
| Figure V -8  | Variation du déplacement transversal $\bar{w}$ de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction du rapport $a/h$ pour différents valeurs de paramètre de Pasternak ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{r} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2, K_w = 100$ ) | 72 |
| Figure V -9  | Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque FG reposant sur fondation élastique pour différentes valeurs de paramètre de Winkler ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{r} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2$ )                | 73 |
| Figure V -10 | Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FG pour différentes valeurs de paramètres de fondations élastiques ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{r} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2$ )                        | 73 |
| Figure V -11 | Variation de déplacement transversal $\hat{w}$ de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction de rapport $a/h$ pour différentes valeurs de chargement thermique (sans l'effet dynamique $\omega = 0, t_2 = 100$ )                                    | 74 |
| Figure V -12 | Variation de déplacement transversal $\bar{w}$ de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction de rapport $b/a$ pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique)   | 75 |
| Figure V -13 | Variation de la contrainte transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique)   | 76 |
| Figure V -14 | Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique)  | 76 |

# Liste des notations

|  |  |
|--|--|
| $h$  | Epaisseur de la structure                                      |
| $a$  | La largeur de la plaque  |
| $b$  | La longueur de la plaque                                       |
| $p$  | Paramètre du matériau  |
| $V(z)$   | Fraction volumique en fonction de l'épaisseur                  |
| $E(z)$   | Module de Young en fonction de l'épaisseur                     |
| $G(z)$   | Module de Cisaillement en fonction de l'épaisseur              |
| $\rho(z)$  | La densité   |
| $\nu(z)$   | Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur              |
| $\alpha(z)$  | Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur |
| $P_m$  | Propriétés matérielles de Métal                                |
| $P_c$  | Propriétés matérielles de céramique                            |
| $u$  | Déplacement suivant $x$  |
| $v$  | Déplacement suivant $y$  |
| $w$  | Déplacement suivant $z$  |
| $w_0$  | Déplacement transversal dû au flexion                          |
| $\theta$   | Déplacement transversal dû au cisaillement                     |
| $(u_0, v_0, w_0)$  | Les déplacements au niveau du plan moyen ( $z=0$ )             |
| $\varphi_x, \varphi_y$   | Les rotations autour des axes $x$ et $y$ , respectivement.     |
| $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$                      | Les composants des contraintes                                 |
| $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ | Les composants des déformations                                |
| $i, j$   | Nombres naturelles   |
| $f(z)$   | La fonction de forme (fonction de gauchissement)               |
| $g(z)$   | fonction de cisaillement                                       |
| $\int$   | Intégrale indéterminée   |

|  |   |
|--|---|
| $k_1, k_2$   | Des coefficients dépendent de la géométrie                  |
| $A', B'$   | Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier) |
| $\lambda$  | Nombre d'onde selon $x$                                     |
| $\mu$  | Nombre d'onde selon $y$                                     |
| $\delta$   | Variation   |
| $\delta U$   | L'énergie de déformation de la plaque                       |
| $\delta K$   | L'énergie cinétique de la plaque                            |
| $\delta U_F$   | La variation de l'énergie de déformation de la fondation    |
| $f_e$  | Densité de la force de réaction de la fondation             |
| $k_w$  | Paramètre de Winkler  |
| $k_p$  | Paramètre de Pasternak                                      |
| $\partial/\partial x$  | Dérivée partielle par rapport à $x$                         |
| $\partial/\partial y$  | Dérivée partielle par rapport à $y$                         |
| $g'(z)$  | La première dérivée de la fonction $g(z)$                   |
| $Q_{ij}$   | Les coefficients de rigidité                                |
| $A$  | La surface supérieure de la plaque                          |
| $T$  | Le chargement thermique                                     |
| $(\dot{\quad})$  | La dérivée première par rapport au temps                    |
| $(\ddot{\quad})$   | La dérivée seconde par rapport au temps                     |
| $\nabla$   | Opérateur Laplacien   |
| $N$  | Effort normal résultant                                     |
| $M, M^b$   | Moment de flexion résultant                                 |
| $M^s, S^s$   | Efforts d'ordre élevé                                       |
| $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$                               | Composantes de moment d'inertie                             |
| $(A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$ | Composantes de rigidité                                     |
| $A_{ij}^s$   | Composantes de rigidité du au cisaillement                  |
| $(N^T, M^{bT}, M^{sT})$  | Les forces et moments résultantes dû à la charge thermique  |
| $(A^T, B^T, C^T, A_a^T, B_a^T, C_a^T, E_a^T, F_a^T)$           | Coefficients de la force généralisée thermique              |

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| $\bar{t}$                          | paramètre arbitraire de température  |
| $\eta$                             | l'exposant de température  |
| $T^+, T^-$                         | Température des surfaces supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement. |
| $\sum$                             | La somme   |
| $m$                                | Nombre de mode selon $x$   |
| $n$                                | Nombre de mode selon $y$   |
| $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$ | Paramètres arbitraires   |
| $K_w, K_p$                         | Paramètre de la fondation sous forme adimensionnelle                               |
| $D$                                | Rigidité flexionnelle de la plaque   |
| $\omega$                           | Fréquence naturelle  |
| $\bar{w}, \hat{w}$                 | Déplacement transversal adimensionnelle  |
| $\bar{\sigma}_x$                   | Contrainte axiale adimensionnelle  |
| $\bar{\tau}_{xz}$                  | Contrainte de cisaillement adimensionnelle   |
| $\{\Delta\}$                       | Vecteur des Paramètres arbitraires   |
| $[K]$                              | La matrice de rigidité   |
| $a_{ij}$                           | Coefficients de la matrice de rigidité   |
| $[M]$                              | La matrice masse   |
| $\{F\}$                            | Composantes du vecteur de force  |
| $\{ \}$                            | Vecteur colonne  |
| $[ ]$                              | Matrice  |

# Introduction générale

I.1 Introduction

I.2 But et objectifs de la thèse

I.3 Méthodologie et organisation de la thèse

## I.1 Introduction

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base d'un matériau. A cet effet, l'innovation dans cette discipline implique l'évolution du monde de l'industrie. Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports et les applications aérospatiales. Récemment, ils ont été utilisés dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton). Les ingénieurs civils ont exploité les avantages d'utilisation des matériaux composites et spécialement les plastiques renforcés par des fibres de verre dans la réparation du béton.

Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice enrobe des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Par conséquent, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage du à la transition brutale de composition (*l'effet prédominant de cisaillement transverse*) liée principalement à leur hétérogénéité, en particulier dans un environnement à haute température.

La nécessité de surmonter ce problème d'hétérogénéité des structures composites, conduit alors à la naissance des matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials: en anglais) qui s'introduisent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Un groupe de recherche Japonais Koizumi (1997) qui, en 1984, ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches dans le domaine des FGM sont activement menées dans différents pays du monde.

Ce sont des matériaux composites avancés ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant générant des changements des propriétés des

matériaux, en éliminant les discontinuités au niveau des interfaces et, par conséquence, les caractéristiques des matériaux constitutants seront préservées. Ils permettent donc d'allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre aux cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant dans les trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc.

De nos jours, afin d'étudier le comportement mécanique, dynamique, thermique, instabilité, etc. des structures en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles, plusieurs investigations ont été accomplies dans ce domaine afin de résoudre le problème en question. De plus, la précision dans la détermination des contraintes de cisaillement transverses est nécessaire lors de la conception des structures en FGM. La détermination des contraintes (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différence entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées, Houari et al. (2011).

## **I.2 But et objectifs de la thèse**

Dans cette thèse, la théorie des plaques à quatre variables développée par Meksi et al (2017), Bourada et al (2016), Fahsi et al (2017), Zine et al (2018), Ait Sidhoum et al (2017), Sekkal et al (2017-a), Bellifa et al (2017), est étendue pour étudier le comportement thermodynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. En effet, les études



sur le problème thermodynamique des plaques FGM sont très limitées dans la littérature et la plupart d'entre elles se sont consacrées à l'étude de l'état quasi-statique. De ce raisonnement, l'étude de la réponse thermodynamique des plaques FGM devrait être étudiée pour bien comprendre et mieux optimiser leur conception dans les différents domaines d'applications. Pour ce faire, deux types de chargement thermiques sont considérés. D'une part, le chargement thermique est supposé varier d'une façon linéaire, non linéaire ou combinée à travers l'épaisseur. D'autre part, on considère un chargement thermique harmonique variant selon une loi exponentielle.

Des exemples numériques sont présentés afin de montrer l'efficacité de la théorie développée. Les effets de plusieurs variables telles que les rapports géométriques, l'indice exposant de température, le paramètre arbitraire de température, la fréquence fondamentale sur la distribution des contraintes et les déplacements dans les plaques FGM en fonction de temps, et d'autres paramètres sont abordés.

### **I.3 Méthodologie et organisation de la thèse**

Pour atteindre notre objectif, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (également appelés matériaux à gradient de propriétés ou matériaux fonctionnellement gradués) ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse est présentée.

Le premier chapitre présente une synoptique sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre discute les théories des plaques, leur historique de développement, les hypothèses sur lesquelles sont fondées, les limitations de chaque théorie et les améliorations qu'ont visé à enrichir les cinématiques de différentes théories.

Le troisième chapitre se focalise sur une recherche bibliographique détaillée consacrée aux travaux réalisés dans le domaine des structures en FGM, aux théories qui leur sont appliquées et aux méthodes de résolution utilisées pour solutionner les problèmes engendrés.

Le quatrième chapitre est consacré à la formulation théorique du problème thermodynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée. Aussi, la méthode de résolution du problème est présentée en détail.

Dans le cinquième chapitre nous présenterons les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche en utilisant le code Maple version 18. Ces résultats seront confrontés à ceux de travaux publiés permettant ainsi la validation des résultats obtenus. Des interprétations seront présentées et discutées. Ce chapitre contient également une étude paramétrique permettant de mettre l'accent sur quelques paramètres influant la réponse thermodynamique des plaques FGM.

Enfin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux est présentée. Elle permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement thermodynamique des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

# Chapitre I :

## **Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés**

I.1. Introduction.

I.2. FGMs et les composites.

I.3. Commentaires et perspectives historiques.

I.4. Domaines d'application.

I.5. Méthodes et techniques de mise en œuvre des FGM.

I.6. Caractéristiques matérielles des FGMs.

I.7. Méthodes d'Homogénéisation des FGMs.

I.7.1 Loi exponentielle E-FGMs.

I.7.2 Loi des puissances P-FGMs.

I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.

I.7.4 Schéma de Mori-Tanaka MT-FGMs.

I.8 Loi de comportement matériel de l'élasticité 3D.

I.9 Conclusion.

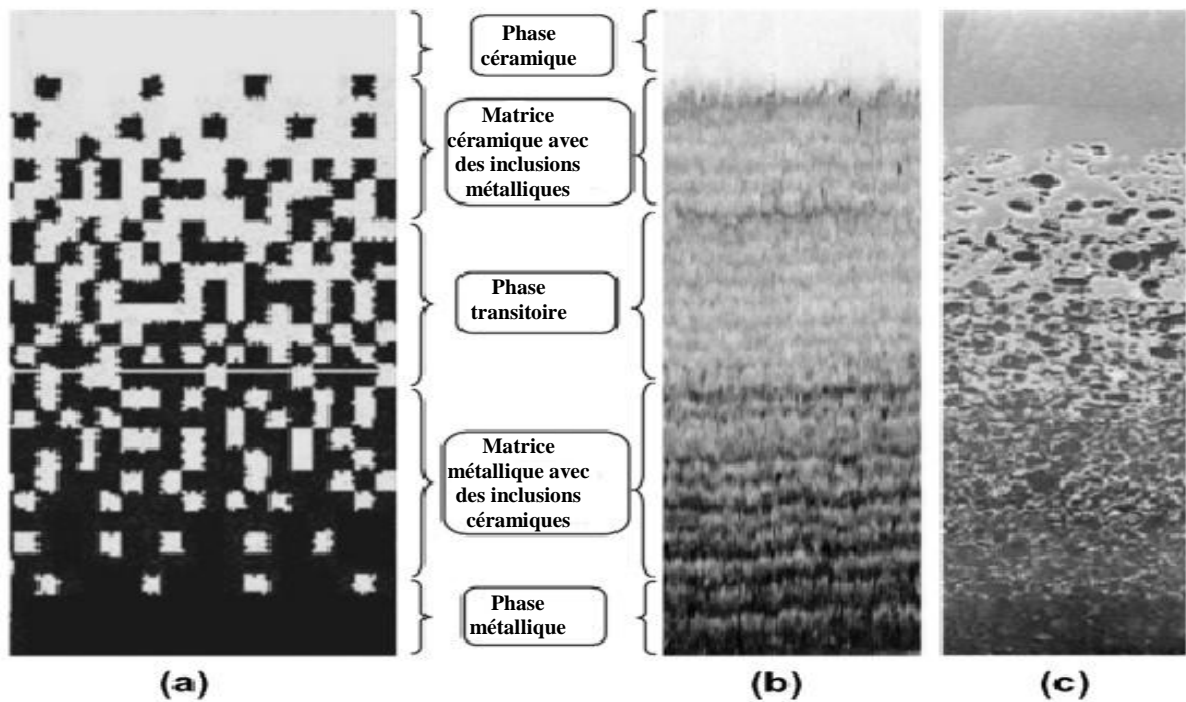
## **I.1. Introduction**

La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants, caractérisés par les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, Les avancées industrielles mènent à l'apparition d'une nouvelle classe des matériaux dits « matériaux composites ». De plus, pour obtenir des matériaux spécifiques propices, les chercheurs et les industriels ont contribué à l'introduction d'une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches.

## **I.2. FGMs et Composites**

En général, Les matériaux à gradient de propriétés FGM ou dits « Functionally graded materials », sont des matériaux composites constitués de deux différents matériaux de base, céramique et métal, dans lesquelles leurs propriétés mécaniques et thermiques sont variées d'une façon continue, quelconque et sans interruption dans l'épaisseur du matériau (Figure I.1). Cette variation est atteinte par les fractions volumiques en fonction de ces deux composantes, afin de former un matériau dense et homogène dans l'épaisseur, cette complétant permet d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances techniques est supérieur à la performance de ces composantes prisent séparément. Dans cet onglet et face aux problèmes liés aux matériaux classiques tels que le vieillissement, la corrosion, l'exposition à la haute température et les phénomènes de dégradation, on considère les matériaux à gradient de propriétés comme des matériaux optimaux dans l'environnement dans lesquels sont placés.

Les matériaux à gradient de propriétés sont considérés comme une nouvelle classe améliorée des matériaux composites, les multicouches et les stratifiés ont des caractéristiques discrètes à travers les interfaces entre les plis constituants. Par conséquent, leurs composants (fibres et matrice) sont plus exposés au délaminage/rupture dû au chargement thermique/mécanique dans les conditions extrêmes. Cela est du aux des différentes valeurs des paramètres tels que le coefficient de dilatation thermique, le coefficient de Poisson et le module de Young discontinus à travers l'épaisseur, en plus de ça, la présence des contraintes résiduelles et inter-laminaires (concentrations des contraintes) entre les plis contribue à la propagation des fissures qui conduisent à l'endommagement des multicouches ou des stratifiés.



**Figure I.1** Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal, Jha et al.(2013).

Nous pouvons résoudre ou réduire ces problèmes par une variation continue de leurs matériaux constituants à travers l'épaisseur, cette graduation permet d'éliminer la concentration des contraintes, de réduire les contraintes thermiques résiduelles et de résister contre les extrêmes conditions de service.

### I.3. Historique sur les FGMs

Les matériaux à gradient de propriétés existent dans la nature et dans les différentes configurations. Nous citons à titre d'exemple le bois, le bambou, les os et les dents. Avec le progrès de l'industrie, cette classe des matériaux est élaborée par un groupe de chercheurs japonais à Sendai, Tokyo, notamment Dr. NIno et al. dans le laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 (Koizumi et al.1993), le but été de développer des matériaux qui résistent à haute température, par une combinaison variée à travers l'épaisseur des matériaux, une face métallique arrive à l'autre face céramique, ils les ont utilisées comme une barrière thermique dans les structures spatiales et aéronautiques où elles sont placées dans un environnement thermique extrême.

Dans la fin des années 80 et début des années 90, l'état Japonais a lancé des programmes de recherche sur ces matériaux sous titre : « *Fundamental Study on the Relaxation of Thermal Stress for High Temperature Materials by the Tailoring of Graded Structures* » avec un budget important, sous la direction de l'agence nationale des sciences et de la technologie. Leurs

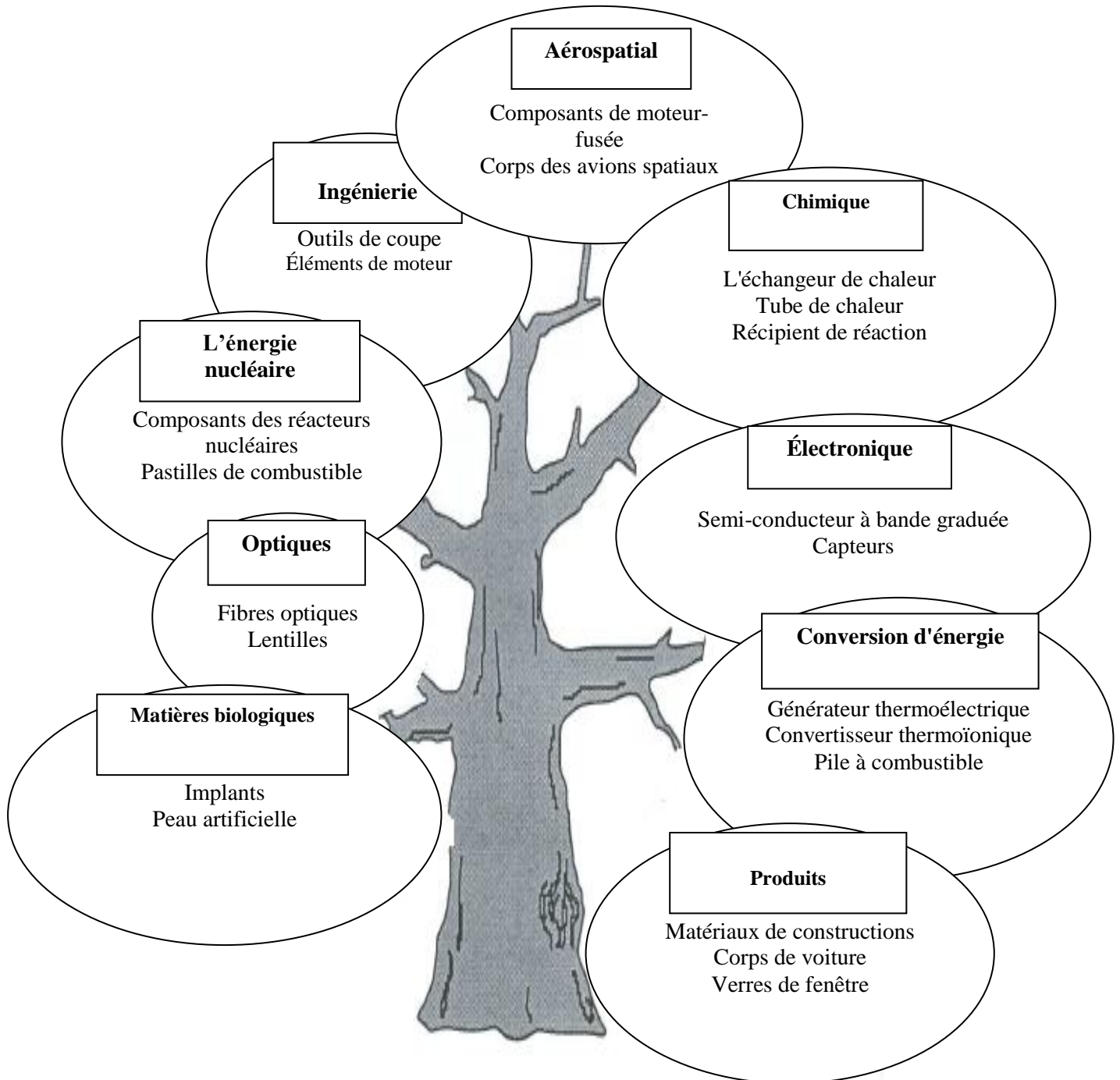
objectifs été le développement des matériaux à gradient de propriétés sous différentes architectures et configurations pour résister vis-à-vis des environnements à haute température, tels que les réacteurs de fusion, le lanceur des fusées et les structures aéronautiques, ensuite et en collaboration avec plusieurs laboratoires de recherches et universités, beaucoup de colloques et des séminaires internationaux ont été organisés dans le but de discuter les avantages, les techniques de la mise en œuvres, l'extension vers d'autres domaines d'applications et la modélisation des matériaux à gradient de propriétés, (Kiyoshi et al. 2001).

Dans le second temps, au début des années 90, après une évolution rapide de cette classe des matériaux, nombreux travaux citent les différentes techniques d'élaborer les FGMs en utilisant des configurations compatibles, les matériaux souvent utilisés sont : les alliages de magnésium, aluminium, cuivre, titane, tungstène, acier, etc...., et les céramiques d'une structure avancée comme : zircon, alumine, silicium-carbure et tungstène-carbure. Le champ d'application de ces matériaux est élargi et étendu vers plusieurs domaines d'industrie notamment le domaine énergétique où plusieurs programmes de recherches ont été lancé sous le nom « Research on energy conversion materials with functionally gradient structure » , (Kiyoshi et al. 2001).

À partir de l'année 2000, une bibliothèque volumineuse est réservée aux nouveaux processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés ainsi leurs domaines d'application, et le plus important, leurs modélisations théoriques et numériques. Tout ça est discuté à l'échelle technologique très avancée, (Kiyoshi et al. 2001). Pour des informations supplémentaires, les ouvrages de Kiyoshi et al. (2001). et Miyamoto et al. (1997) citent explicitement l'évolution historique des matériaux à gradient de propriétés.

#### **I.4. Domaines d'application**

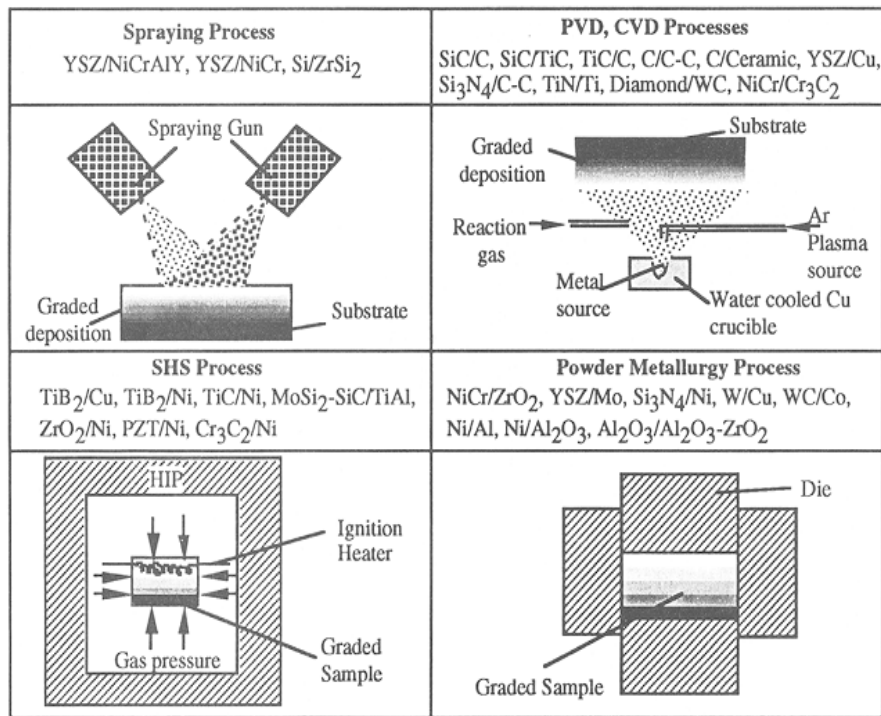
Les matériaux à gradient de propriétés offrent des caractéristiques performantes pour plusieurs utilisations dans l'industrie et la technologie qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGMs présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. En comparaison aux matériaux classiques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier. Dans des cas de service, le gradient de température peut être important. L'utilisation des matériaux FGMs (céramique-métal) est sans aucun doute la solution adéquate; d'une part, pour éliminer la concentration des contraintes thermiques, et d'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que : l'isolation thermique et la hygrothermique dans le matériau. La figure I.2 illustre les différents domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés selon Jha et al. (2013).



**Figure I.2** Les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés.

### I.5 Méthodes et techniques de mise en œuvre des FGM

Comme décrit précédemment, un matériau à gradient de propriétés est caractérisé par la variation continue de leurs propriétés à travers l'épaisseur du matériau. En générale, les constitutions de base d'un FGM sont : les céramiques et les métaux. Alors l'élaboration d'un matériau dense et gradué à partir de ces deux matériaux dépend des techniques et les méthodes de fabrication. La figure I.3 montre les méthodes les plus populaires dans le domaine de fabrication des FGMs.



**Figure I.3.** Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.

Une qualité idéale pour élaborer un FGM nécessite une technologie avancée, l'autre part de concept des FGMs est basée sur le développement des processus de fabrication. Plusieurs chercheurs ont contribué des techniques plus avancées depuis la naissance de cette classe des matériaux (Jha et al.2013), (Kieback et al. 2003), dans la suite, nous citons la plupart des méthodes de la mise en œuvre des FGMs :

- 1) Technique de dépôt par évaporation (chimique ou électrique),
- 2) Métallurgie des poudres,
- 3) Méthode au centrifuge,
- 4) Méthode de fabrication solide libre,
- 5) Projection au plasma,
- 6) synthèse de Frittage à haute température,
- 7) Méthode de placage à laser.

Pour plus d'informations, Kieback et al. (2013) font une synthèse détaillée sur les techniques et les méthodes d'élaborations des matériaux à gradient de propriétés.

## I.6 Caractéristiques matérielles des FGMs

Le choix des composantes de base d'un matériau à gradient de propriétés, est adapté en fonction des propriétés physiques de chaque constituant. Les FGMs sont communément constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal. La majeure partie des



éléments chimiques dans le tableau de Mandeliev sont les métaux. D'une façon générale, les métaux procèdent plusieurs avantages, sont ordinairement très bons conducteurs de la chaleur et de l'électricité, ils sont plus souvent durs, rigides et déformables plastiquement. Un nombre important procèdent une température de fusion très élevée. Les métaux plus communément utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Les céramiques résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr ...) avec des éléments non métalliques dont le plus courant est l'Oxygène. Elles sont utilisées typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.). Ils sont caractérisés généralement par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées. Les céramiques sont en général, des matériaux très durs et ils sont largement utilisés comme abrasifs.

Les céramiques ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques sont importants.

### **I.7 Méthodes d'Homogénéisation des FGMs**

Les matériaux à gradient de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes ou non homogènes à cause de leurs structures microscopiques ou/et macroscopiques. Dans le premier temps, nous allons présenter les différents modèles d'homogénéisation permettant de prédire le comportement équivalent d'un matériau à gradient de propriétés, et de déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser les structures en FGMs comme des structures homogènes à l'échelle macroscopique.

D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques :

- a) techniques d'homogénéisation analytiques,
- b) techniques d'homogénéisation numériques.

Pour la première classe, il s'agit de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau FGMs en utilisant des modèles mathématiques, ces modèles permettent d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases constituant le matériau hétérogène.

Les modèles analytiques sont basés sur le choix d'un volume élémentaire représentatif pour prédire correctement les propriétés physiques effectives.

Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux en basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les

propriétés matériels et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de Siboni et al. (1991) et de Bary et al. (2009).

Une présentation détaillée a été faite par Akbarzadeh et al. (2015) pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGMs. Parmi les modèles d'homogénéisation dans la littérature, quelques modèles micromécaniques standards pourraient être mentionnés.

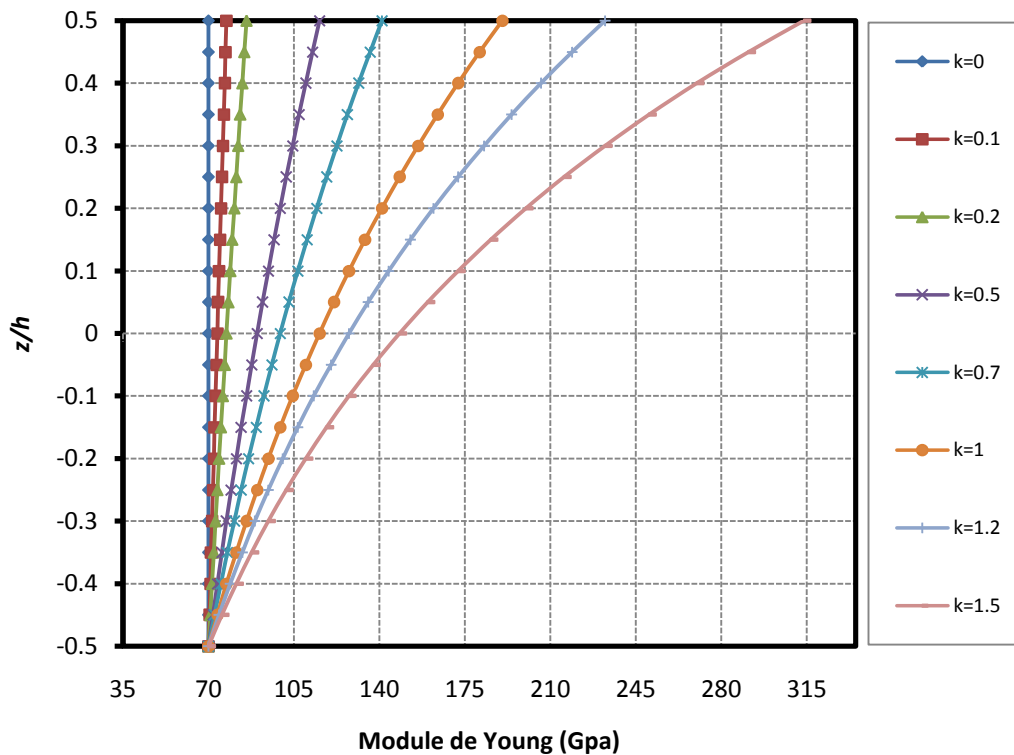
- 1) Loi exponentielle ;
- 2) Loi des puissances;
- 3) La distribution sigmoïde;
- 4) Schéma de Mori-Tanaka.

### I.7.1 Loi exponentielle E-FGMs

Dans cette méthode, la fraction volumique est donnée sous forme d'une fonction exponentielle à travers l'épaisseur (Figure I.4):

$$E(z) = E_0 e^{k\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)} \quad (I.1)$$

Où  $E_0$  présente le module d'Young de la face homogène de la plaque, et « k » c'est l'indice de la variation matérielle à travers l'épaisseur de la plaque. Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur (Akbarzadeh et al.2015).



**Figure I.4** Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de E-FGMs

### I.7.2 Loi des puissances P-FGMs

La loi des puissances est souvent introduite par plusieurs chercheurs pour évaluer le module d'Young, dans les cas statiques ou dynamiques, elle est utilisée pour estimer le module d'Young des plaques minces, modérément épaisses et épaisses (Reddy et al. 2000)

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (I.2)$$

Où  $k$  est un paramètre matériel, les indices  $m$  et  $c$  sont les modules élastiques de la face intérieure «métal» et la face supérieure «céramique» respectivement. La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.5, Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

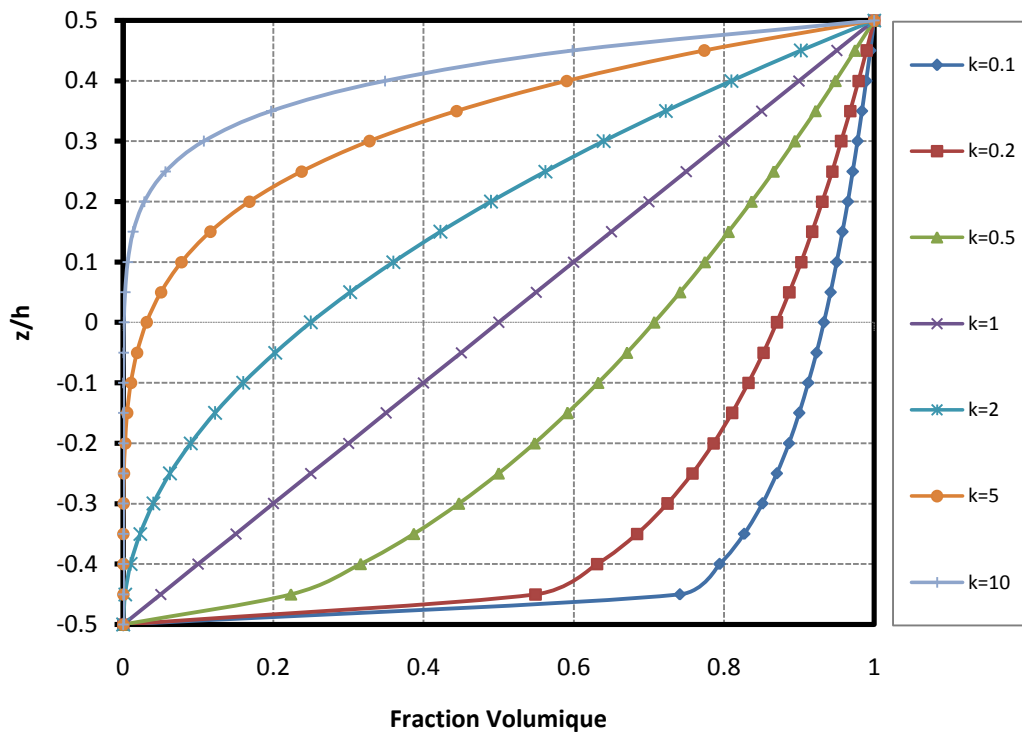


Figure I.5 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et Chung (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{z}{h} \right)^k \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3.a)$$

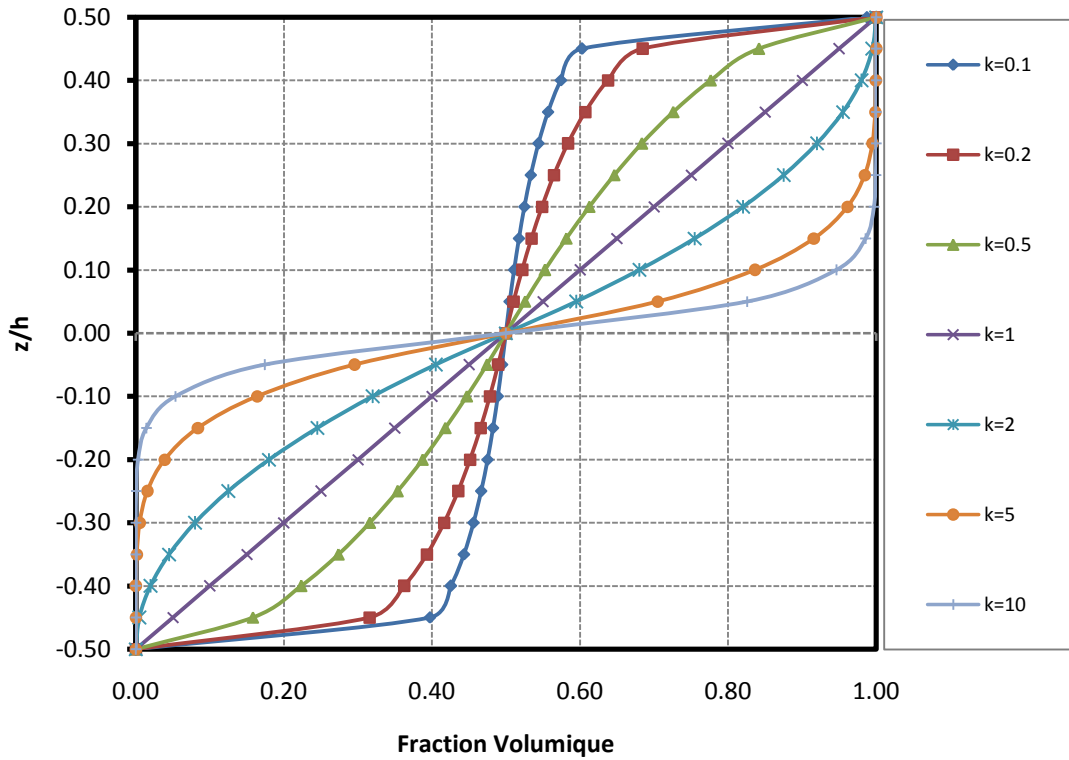
$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right)^k \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par (Bao et wang 1995):

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La Figure I.6 montre une variation de la fraction volumique sigmoïde.



**Figure I.6** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

#### I.7.4 Schéma de Mori-Tanaka (MT-FGMs)

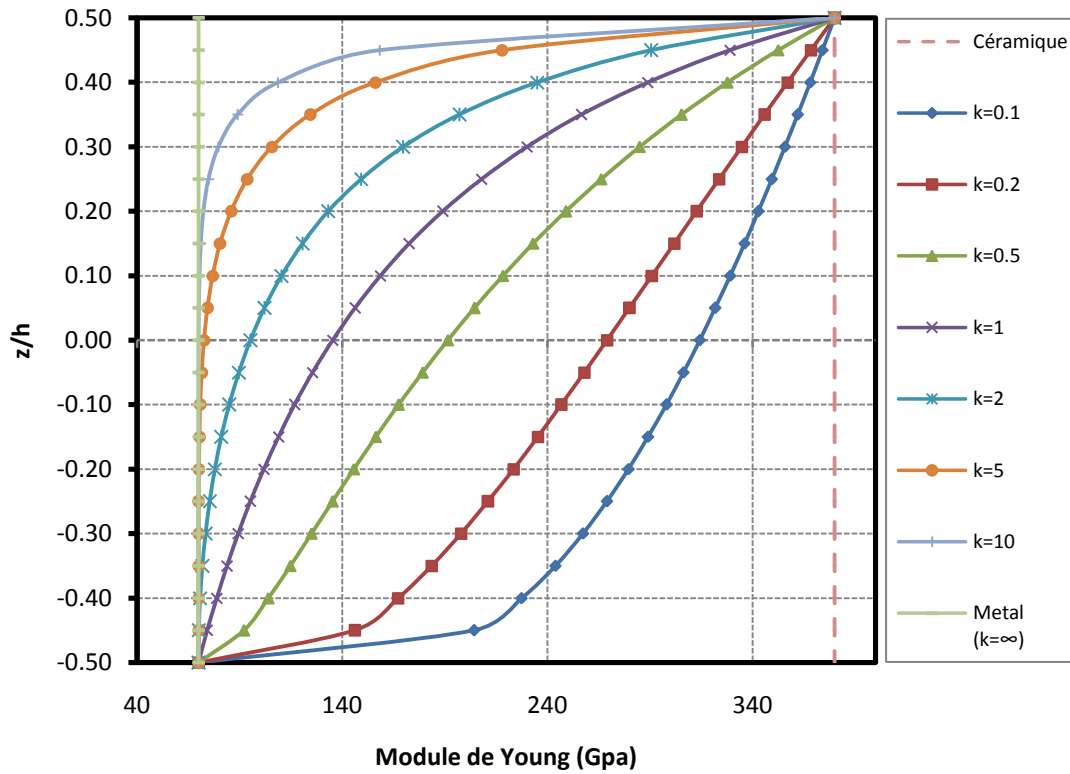
En premier lieu, Mori et al. (1973) ont proposé une approche pour calculer les contraintes internes moyennes dans la matrice d'un matériau précipité. Par la suite, Benveniste (1987) a reformulé cette méthode pour l'appliquer aux matériaux composites. Dans le cas d'un matériau à deux phases, le module d'Young est exprimé par la relation suivante :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{E_c}{E_m} - 1 \right) (1 + \nu) / (3 - 3\nu)} \right) \quad (\text{I.5})$$

Avec  $V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k$  c'est la fraction volumique de la céramique.

Puisque les effets de la variation de coefficient de Poisson ( $\nu$ ) sur la réponse des plaques en FGMs sont faibles, ce paramètre matériel est pris constant pour la simplification (Yang et al.2005), (Kitipornchai et al. 2006).

La Figure I.7 montre une variation de la fraction volumique par le modele de Mori-Tanaka.



**Figure I.7** Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs

### I.8 Loi de comportement matériel de l'élasticité 3D

Dans un système des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (Figure I.8), il est coutumier d'écrire l'état de déformation par six composantes de contraintes et de déformations. A savoir, trois composantes normales et trois du cisaillement. Une relation linéaire entre les contraintes et les déformations est connue comme la loi de Hooke généralisée, et elle est exprimée comme :

$$\sigma_k = C_{kj} \varepsilon_j \text{ avec } k=1,2,\dots,6 \quad (I.6)$$

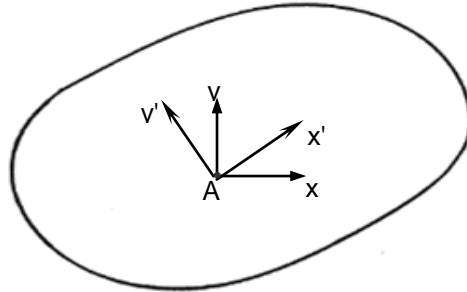
Où  $C_{kj}$  sont connus comme les coefficients élastiques. Notant que l'Eq (I.4) est une abréviation de la forme du tenseur adéquate de la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ avec } k=1,2,\dots,6 \quad (I.7)$$

Quand  $C_{kj}$  sont en fonction d'une position, le matériau est hétérogène, et quand ils sont constants partout dans le matériau, le matériau est homogène. Nous notons que  $C_{kj}$  sont des entrées dans le  $k^{\text{ème}}$  rangée et  $j^{\text{ème}}$  colonne d'une matrice carré de  $(6 \times 6)$ . Cependant,  $C_{kj}$  ne sont

pas les composantes du tenseur de deuxième ordre. Aussi, la notation en un seul indice pour les composantes des contraintes et des déformations sont basées sur la convention,

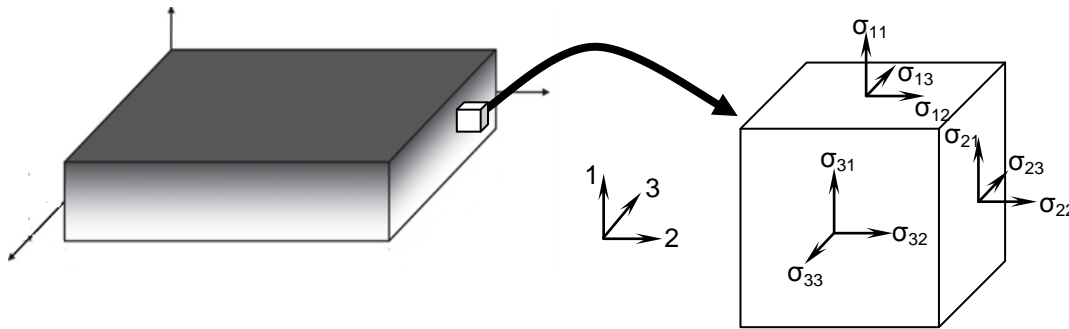
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}. \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (I.8)$$



$m$  : une propriété matérielle mesurée par respect de système  $(x, y)$   
 $m'$  : une propriété matérielle mesurée par respect de système  $(x', y')$   
 Un matériau isotrope :  $m = m'$ , un matériau anisotrope :  $m \neq m'$

**Figure I.8** Définition des matériaux isotropes et anisotropes.

Ici  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  présentent les contraintes normales, et  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  présentent les contraintes du cisaillement ;  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les contraintes en plan et  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  sont les contraintes hors plan (c.-à-d., transversal), (Figure I.9). Une terminologie semblable est utilisée pour les composantes des déformations.



**Figure I.9** Les composantes des contraintes et des déformations dans le système des coordonnées cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGMs.

Les trente-six coefficients  $C_{ij}$  ne sont pas tous indépendants de l'un à l'autre. Le nombre des constantes indépendantes dépend de la constitution matérielle. En premier, nous montrons que  $C_{kj}=C_{jk}$ , ils sont symétriques pour les matériaux pour lesquels la fonction de la densité d'énergie de déformation  $U_0$  est définie par :

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_k} = \sigma_k \quad (I.9)$$

Pour illustrer ceci, nous considérons la densité d'énergie de déformation du matériau comme :

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_k d\varepsilon_k \quad (\text{I.10})$$

Substituant l'équation (I.6) dans l'équation (I.10) et nous l'intégrons, nous obtenons :

$$U_0 = \frac{1}{2} C_k \varepsilon_k \varepsilon_j \quad (\text{I.11})$$

En remplaçant  $U_0$  d'Éq. (I.11) dans l'Éq. (I.9), nous arrivons à l'expression ;

$$\sigma_k = \frac{1}{2} (C_{kj} + C_{jk}) \varepsilon_j \quad (\text{I.12})$$

Nous comparons les expressions (I.12) et (I.6), nous concluons que  $C_{kj}=C_{jk}$ . À cause de cette symétrie, il y a seulement (21) constantes élastiques indépendantes pour les matériaux anisotropes. L'Eq (I.6) peut exprimer par la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

En général, les coefficients élastiques  $C_{ij}$  relient les composantes cartésiennes de déformations et de contraintes dépendent de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  utilisées. Nous faisons la référence à un autre système des coordonnées cartésiennes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , les coefficients élastiques sont  $\bar{C}_{ij}$ , et en général  $\bar{C}_{ij} \neq C_{ij}$ . Si  $\bar{C}_{ij} = C_{ij}$ , alors ils sont indépendants de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et le matériau dit un matériau isotrope.

Quelques matériaux anisotropes peuvent posséder des symétries matérielles et leurs comportements constitutifs décrivent avec moins de (21) constantes. Quand les coefficients élastiques en un point ont les mêmes valeurs pour chaque paire de systèmes des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  qu'ils sont l'image inverse de l'un à l'autre dans un certain plan, ce plan est appelé plan de symétrie élastique. Les matériaux avec un plan de symétrie élastique sont appelés les matériaux monocliniques, et le nombre des coefficients élastiques pour les tels matériaux réduits à (13). Si le plan de symétrie est  $x_3=0$ , les relations constitutives deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & Sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Notons que les contraintes de cisaillement hors plan  $\sigma_4, \sigma_5$  sont indépendantes de contraintes normales et de cisaillement en plan.

Si un système matériel a trois plans mutuellement perpendiculaires à un plan de symétrie élastique, alors le nombre de coefficients élastiques indépendants est réduit à neuf. De tels matériaux sont connus sous le nom d'orthotrope. La relation contraintes-déformations pour un matériau orthotrope est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Les coefficients de  $C_{ij}$  pour un matériau orthotrope sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z) \\ C_{12} = C_{23} = C_{31} &= \lambda(z) \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Où

$$\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.17})$$

$E, G$  Sont les modules d'Young et de cisaillement respectivement.



## **I.9 Conclusion**

Ce chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour étudier notre problématique, nous avons présenté un bref historique sur les matériaux à gradients de propriétés et leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, domaines d'application, leurs modes de la mise en œuvre et les modèles de l'homogénéisation de ce type des matériaux, et finalement, décrire les lois de constitution matérielle. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés FGM permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

# Chapitre II :

## **Rappel sur les théories des plaques**

II.1 Introduction

II.2 Théorie des plaques bidimensionnelles :

II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT)

II.2.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

II.2.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT)

II.3 Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

II.4 théorie quasi-tridimensionnelles

II.5 Conclusion

## II.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que *Love* utilisa les hypothèses de *Gustav Kirchhoff*, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'*Euler-Bernoulli* pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de *Kirchhoff-Love*). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par *Mindlin* à partir des travaux de *Rayleigh* (1877), *Timoshenko* (1921), *Reissner* (1945-a), *Reissner* (1945-b), *Reissner* (1975) et *Uflyand* (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Depuis la fondation des matériaux à gradient de propriétés, les théories particularisées à analyser des structures en ces matériaux sont établies à nouveau et elles sont regroupées en deux grandes familles, l'approche de monocouche équivalente (ESL<sup>1</sup>), approche par-couche (LW<sup>2</sup>), notre travail est basé sur l'étude des plaques, ces dernières ne sont pas l'exclusivité dans le domaine de génie civil, elles sont employées également en aéronautique, aérospatial, constructions navale, automobile et nucléaire. La majorité des théories présentées ici se sont des extensions des théories analysant les plaques isotropes ou composites en utilisant l'approche de monocouche équivalente. À ce stade, diverses théories ont été proposées, et prennent un axe important dans la mécanique des structures. De la théorie simplifiée de *Love-Kirchhoff*, certaines se sont des améliorations, d'autres sont des théories plus précises. Aujourd'hui, les recherches sur les plaques en FGM ont acquis un intérêt appréciable,

On peut les regrouper en trois principaux groupes selon l'approche adoptée, en se limitant sur l'approche de monocouche équivalente (ESL):

- a) Théories des plaques FGM bidimensionnelles,
- b) Théories des plaques FGM tridimensionnelles,
- c) Approches Quasi-tridimensionnelles des plaques FGM.

---

<sup>1</sup> Equivalent Single Layer Approach

<sup>2</sup> Layer-Wise Approach

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques FGM.

## II.2 Théorie des plaques bidimensionnelles

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ( $\varepsilon_z = 0$ ), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une petite épaisseur par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

- 1) Les théories classiques des plaques FGM,
- 2) Les théories de premier ordre des plaques FGM,
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques FGM.

### II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT)

La théorie classique de plaque est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff (1850-a), (1850-b), puis elle a été poursuivie par Love en (1934) au début du XXe siècle, pour plus d'information et le détail historique voir (Ventsel et Krauthammer 2001). Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donnée des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses (Belarbi 2015). L'hypothèse principale de la théorie CPT est que les lignes normales au plan médium avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Fig II.1). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse (CT) ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) et les déformations/contraintes normales ( $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ ).

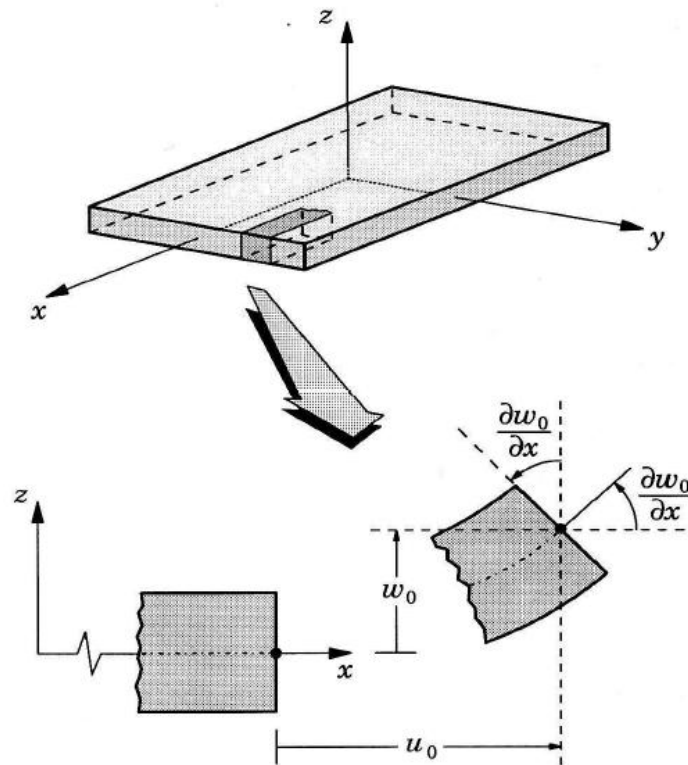
La cinématique de cette théorie peut s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

$u_0, v_0$  et  $w_0$  : sont les composantes des déplacements dans le plan moyen.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$  : sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions.

Cependant, cette théorie n'est pas adéquate pour l'analyse des plaques épaisses à cause de la négligence de l'effet du cisaillement transverse. Cet effet joue un rôle très important sur le comportement de ces structures. En plus, la théorie classique des plaques en FGMs sous-estime la flèche de déplacement et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses en FGMs (Reddy 2004).



**Figure II.1** Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff, Belarbi et al. (2015).

### II.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie du premier ordre (FSDT) peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CPT). Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse suivante de Reissner-Mindlin: les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l'effet du cisaillement transverse), (Fig II.2). Ils ont également supposé que la contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes (l'hypothèse de déformation plane). Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \phi_x \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \phi_y \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{II .2}$$

$\phi_x, \phi_y$  sont les rotations de la normale autour des axes (x, y), respectivement

À partir de l'équation (II.2), nous remarquons que les composantes de déplacements plans ( $u, v$ ) varient d'une manière linéaire suivant l'axe  $z$ , tandis que la composante de déplacement transversal ( $w$ ) est constante. Cela va conduire à un état de contrainte/déformation de cisaillement transverse constant sur toute l'épaisseur de la plaque (Fig II.3), alors que, selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), les contraintes de cisaillement transverse sont plutôt quadratiques à travers l'épaisseur (Hu et al. 2008). Cette déficience est corrigée par l'introduction de ce qu'on appelle le facteur de correction de cisaillement transverse ( $k$ ).

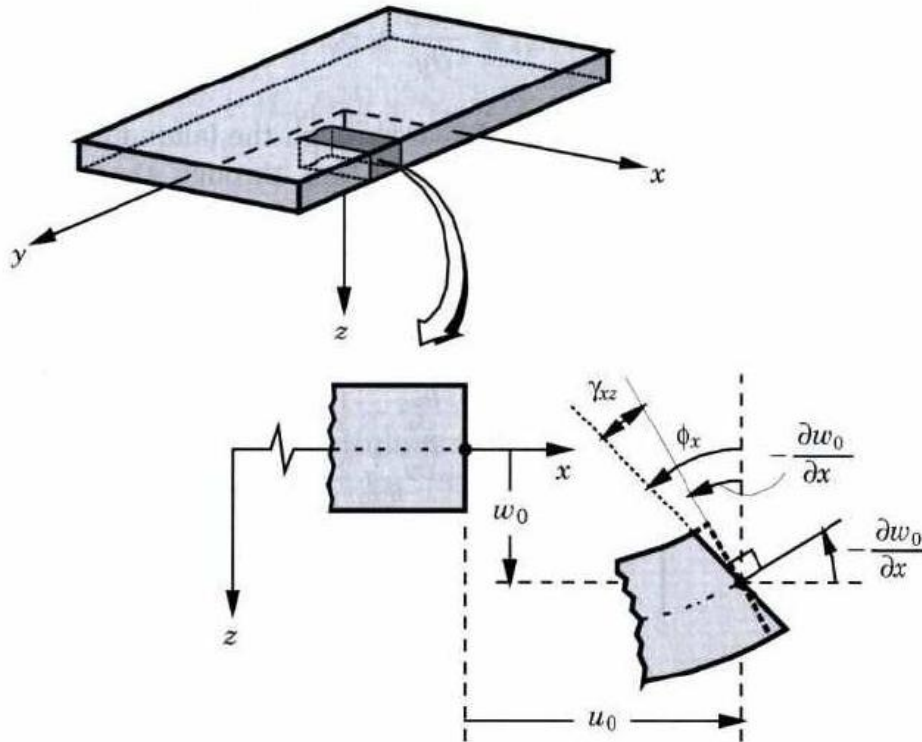
Le facteur ( $k$ ) est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin (Mindlin (1951)), en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces libres. Pour déterminer  $k$ , Mindlin considère le problème de la propagation des ondes dans une plaque infinie, problème pour lequel on connaît une solution exacte par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Il a trouvé que ce facteur dépendant du coefficient de poisson  $\nu$  et les valeurs les plus généralement admises pour  $k$  varient linéairement de  $k = 0.76$  pour  $\nu = 0$  à  $k = 0.91$  pour  $\nu = 0.50$  dans le cas d'un matériau isotrope.

En suivant cette observation et en choisissant  $k$  de façon à évaluer la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope infinie déterminée par la théorie de l'élasticité et la théorie de Mindlin, nous pouvons montrer que le facteur  $k$  est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 telle que :

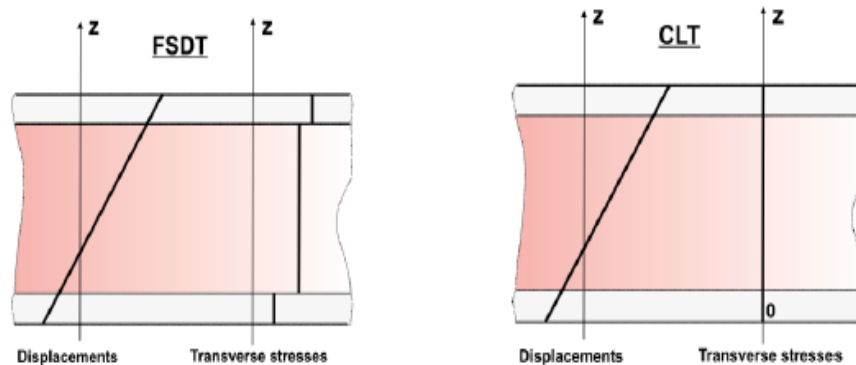
$$k^3 - 8k^2 + \frac{8(2 - \nu)k}{1 - \nu} - \frac{8}{1 - \nu} = 0 \tag{II .3}$$

Les résultats de Reissner-Mindlin qui supposent une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, donnent :

$$k = \frac{5}{6} \tag{II .4}$$



**Figure II.2** Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin Belarbi et (2015).



**Figure II.3** Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) Carrera et al. (2008).

A ce jour le facteur  $k$ , lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet de discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger son influence sur les résultats. Pour des informations supplémentaires sur ce sujet, il y a plusieurs auteurs citant les méthodes pour déterminer le facteur de correction de cisaillement dans le cas des plaques en FGMs, On peut citer notamment les travaux de Mena et al. (2012), Nguyen et al. (2008), Thai et al. (2013-a). La contribution la plus significatif constitue une première approche pour déterminer le facteur de correction de cisaillement: est basée sur le principe d'équivalence énergétique, On fait notamment, déduire le

facteur de correction de cisaillement à partir de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle par l'analogie avec le modèle de plaque correspond.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.2.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT)

A fin de s'affranchir de limitations liées aux théories de déformation en cisaillement du premier ordre qui considèrent une variation constante de déformation transverse à travers l'épaisseur de la plaque, et qui nécessitent des facteurs arbitraires de correction, les théories d'ordre supérieur ont été développées. Elles impliquent des termes d'ordre élevé correspondent au développement de Taylor dans les champs des déplacements, chaque terme additionnel correspond à une variable dépendante. Contrairement aux théories du premier ordre, ces théories sont fondées sur une variation cubique (ou plus) des déplacements dans le plan afin d'obtenir une variation parabolique (ou plus) des déformations de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque. Dans le cas général, selon Carrera (2002), les théories d'ordre supérieur sont basées sur la formulation unifiée de Carrera (CUF), dont les champs de déplacements sont de la forme suivante :

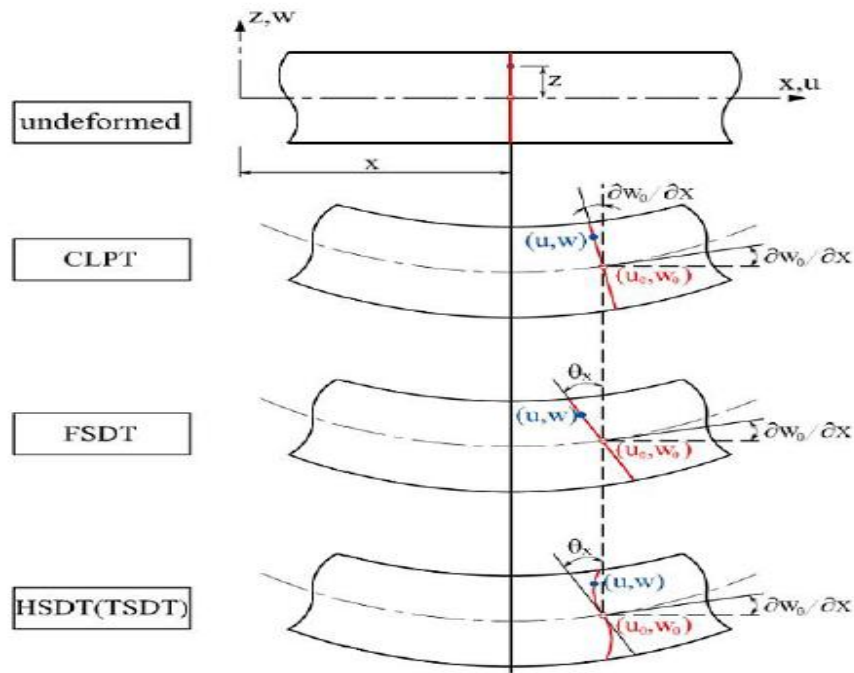
$$u_i(x, y, z, t) = u_{i0}(x, y, t) + zu_{i1}(x, y, t) + z^2u_{i2}(x, y, t) + \dots + z^N u_{iN}(x, y, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II .5})$$

Avec (N) représente les ordres de développements utilisées dans les variables de déplacements.

Les champs de déplacements relatifs à la théorie HSDT se sont reportés sur la Figure II.4

Dans cette théorie la précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre d'inconnus supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendants dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin).





**Figure II.4** État non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories  
CPT, FSDT et HSDT

Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications ont été proposées. Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque.

Généralement, afin d'augmenter la précision des résultats, une croissance dans le degré du polynôme de l'équation (II.5) peut être une alternative. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte Plusieurs simplifications : Atman et al. (2010) sur les plaques FG et Mahi et al. (2014) sur les plaques Sandwich en FGM, ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement de la façon suivante :  $u_{i4} = u_{i2} = u_{3(1,2\dots N)} = 0$  et  $u_{\alpha(3)}$ ,  $\alpha = \{1,2\}$ , dépendent à  $u_{\alpha 1}$  et à  $w_{,\alpha}$ . Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une fonction de cisaillement (Benyoucef et al. 2010). L'expression (II.5) devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

Avec  $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$  et  $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$  noté que  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  sont respectivement les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x,  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$ . Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (Reddy 1984) est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse de Touratier (1991) s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme co-sinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.9})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Atmane et al. (2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{z \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II.10})$$

Généralement ces modèles adoptés pour étudier la mécanique des plaques en FGMs ont les mêmes cinq inconnus, citons la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDPT) de (Reddy 2000), théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDPT) (Zenkour et al. 2013), théorie de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDPT) (Atmane et al. 2010), (Chikh et al. 2017).

Plus récemment et afin de minimiser le nombre des inconnues de la théorie d'ordre supérieur des plaques simplement appuyées et le rendre plus rentable en terme de temps de calcul, Bourada et al. (2016), Meksi et al. (2017), Menasria et al. (2017), ont proposé une formulation avec un intégrale indéterminée dans le champ de déplacement dont la solution de Navier est utilisée pour déterminer cette intégrale. En effet, les rotations autour des axes  $y$  et  $x$   $\phi_x, \phi_y$  sont exprimées comme suit :

$$\phi_x = \int \theta(x, y) dx \text{ et } \phi_y = \int \theta(x, y) dy.$$

À l'aide de la solution de Navier, le champ de déplacement devient:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

Avec  $k_1 = \lambda^2, k_2 = \mu^2$  (II.12.a)

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, B' = -\frac{1}{\mu^2}$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{II.12.b})$$

En utilisant cette théorie, Meksi et al (2017) ont étudié la flexion, la vibration et le flambement des plaques sandwich. Bourada et al (2016) ont analysé le flambage des plaques isotropes et orthotropes. Fahsi et al (2017) ont étudié les comportements de flambage mécanique et thermique de plaques FG reposant sur des fondations élastiques. Zine et al (2018) ont présenté une étude de l'analyse de flexion et des vibrations libres des plaques et de coques multicouches. Ait Sidhoum et al (2017) ont présenté une analyse des vibrations libres des plaques FGM. Sekkal et al (2017-a) ont développé une analyse des vibrations libres et flambage des plaques sandwich

à gradient fonctionnel (FG). L'effet de la déformation normale surnommée effet d'étirement est également investigué par les mêmes auteurs (Sekkal et al (2017-b)). Bellifa et al (2017) ont étudié le flambement des plaques FG. Mahmoudi et al (2018) ont étudié l'influence des modèles micromécaniques sur les vibrations libres des plaques à gradation fonctionnelle simplement appuyés reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak.

Shimpi (2002), Shimpi et Patel (2006), et d'autres auteurs ont proposé un raffinement de la théorie d'ordre supérieur en utilisant quatre inconnus au lieu des cinq dans le cas classique appelé RSDPT (Refined Shear Deformation Plate Theory), cette théorie a une formulation simple basée sur la décomposition de déplacement transversal en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement. En effet, on exprime les rotations de la normale en fonction de déplacement transversal, de tel sort, le champ de la cinématique s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.13}$$

Cette simplification mène à un nombre réduit des équations de mouvement en termes d'inconnus, dans les recherches actuelles sur ce sujet, nous trouvons plusieurs contributions basées sur l'amélioration de la fonction de cisaillement  $f(z)$  pour donner une bonne satisfaction de la condition de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque, dans l'analyse statique, dynamique et aussi bien dans le cas thermomécanique.

Fonction de cisaillement Trigonométrique (Tounsi et al. 2013):

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)
 \tag{II.14}$$

Fonction de cisaillement polynomiale (Houari et al. 2011)

$$f(z) = z \left( -\frac{1}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right)
 \tag{II.15}$$

Fonction de cisaillement hyperbolique (Daouadji et al. 2012)

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} \operatorname{htanh} \left( \frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.16})$$

### II.3 Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Dans les études du comportement des plaques épaisses, le challenge est de décrire de façon précise le champ de contraintes à travers l'épaisseur, surtout les contraintes de cisaillement évitant les omissions dues à l'application des théories classiques et mêmes de premier ordre. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc plus en plus nécessaire, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Les équations différentielles régissent la flexion dans le cas tridimensionnelle sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

où  $f_i$ ,  $\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}$  et  $\rho$  sont respectivement les forces volumiques, les composantes du vecteur accélération et la masse volumique.

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique

puissante pour obtenir des résultats avec la précision désirée et satisfaisante (Uymaz et Aydogdu 2007).

#### II.4 Théorie quasi-tridimensionnelles

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, l'approche quasi-tridimensionnelle est devenue une alternative importante en introduisant l'effet de déformation normale transverse, afin de définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire.

De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur ( $z$ ) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles concèdent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée (équation II.5) initialement proposée par Carrera Carrera et al. (2001), Carrera et al. (2003), Carrera et al. (2005), et récemment évoluée par Demasi : Demasi (2009-a), Demasi (2009-b), Demasi (2009-c), Demasi (2009-d), et Demasi (2009-e).

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al. (2011-a) et Carrera et al. (2011-b) font l'objet.

En effet, Thai et Kim (2013-b) ont présenté une théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGMs. Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire  $g(z)$ , la cinématique devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, z)
 \end{aligned}
 \tag{II.18}$$

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes théories des plaques existantes dans la bibliographie pour les études des plaques en matériaux fonctionnellement gradués et qui sont en fait des extensions et des développements des modèles classiques présentés par Love-Kirchhoff pour les plaques minces et par Mindlin-Reissner pour les plaques épaisses, des améliorations considérables ont été effectuées par de nombreux chercheurs au niveau des champs de déplacements et des déformations de ces théories afin de décrire correctement les différents comportements des plaques FG et par conséquent améliorer la précision des résultats désirés par rapport aux modèles de l'élasticité tridimensionnelle qui sont plus proches de la réalité. L'approche tridimensionnelle vise à donner des résultats plus précis, utilisés notamment comme référence, mais peu d'auteurs ont adopté cette approche à cause de son coût en termes de temps de calcul et en capacité de mémoire pour le stockage de la base des données requise qui est plus importante que celle dans l'analyse bidimensionnelle.

Parmi les différentes théories de plaques comme CPT, FSDT, TSDT, HSDT, employées pour l'analyse des plaques FG, les FSDT et HSDT ont été largement utilisées. Certaines modifications ont également été incorporées dans les FSDT et HSDT par les recherches de temps en temps pour obtenir le résultat précis dans le domaine en temps réel. Nous avons également présenté le modèle unifié de Carrera, qui est un modèle plus générale à partir duquel sont fondées les théories d'ordre supérieur et les théories quasi-3D. Le succès des théories quasi-3D dans l'étude de différents comportements des plaques FG réside à sa capacité de prendre en compte l'effet d'étirement à la fois avec la réduction de nombre des fonctions inconnues de champ de déplacement, ce qui en fait une solution optimale par rapport à l'élasticité tridimensionnelle.

# Chapitre III :

## **Aperçu littéraire sur les travaux antérieurs**

III.1 Introduction

III.2 Les travaux basés sur les théories des plaques bidimensionnelles

III.2.1 Modèle CPT

III.2.2 Modèle FSDT

III.2.3 Modèle HSDT

III.3 Les travaux basés sur le modèle tridimensionnel (Élasticité 3D)

III.4 Les travaux basés sur le modèle quasi-3D

III.5 Conclusion



### III.1 Introduction

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations, thermiques, mécaniques, aussi bien le problème de flambement (thermique et mécanique) des plaques en FGM. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. Birman et Byrd, (2007) ont publié une recherche exhaustive sur les travaux dédiés au développement des FGM couvrant la période 1997-2007. Jha et al. (2013) ont présenté un article très intéressant contient un examen critique des études publiées dans le domaine des matériaux fonctionnellement gradués en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment sur les problèmes thermo élastiques et vibrations libres des plaques FG. Cependant, ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies, une tentative sera faite pour transmettre les conclusions importantes de chaque travail sans rentrer dans les détails exhaustifs.

### III.2 Les travaux basés sur les théories des plaques bidimensionnelles

#### III.2.1 Modèle CPT

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche, Ces hypothèses impliquent l'annulation de la déformation normale et du cisaillement et, par conséquent, elles négligent les effets de cisaillement et de déformation normale. La CPT est le modèle monocouche équivalente (ESL) le plus simple et il est seulement approprié pour les plaques et coques minces FG où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables. Cette théorie a été adoptée par plusieurs auteurs pour étudier le comportement des plaques FG.

Woo et al. (2006) ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires issues de la CPT avec des hypothèses de *Von-Karman* ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode de série. Une étude comparative entre le modèle orthotropique et isotropique des plaques FGM a été conduit par Abrate (2008), il a noté que le comportement en vibrations libres de la plaque FG est identique à celui d'une plaque homogène présentant la même forme et les mêmes conditions aux limites ce qui signifie qu'il n'est pas nécessaire de développer des techniques ou des logiciels spéciaux pour leur analyse. La vibration libre des

plaques en FGM avec diverses conditions aux limites sur fondations élastiques a été analysée par Chakraverty et Pradhan (2014-a) en utilisant la théorie classique et la méthode de *Rayleigh-Ritz*. Les mêmes auteurs (2014-b) ont confirmé leur précédent travail par la prise en considération de l'effet d'un environnement thermique. Kaci et al. (2013) ont étudié le problème de flexion cylindrique non linéaire des plaques FG avec une formulation sigmoïde des propriétés matérielles, la non linéarité géométrique a été considérée en utilisant les hypothèses de *Von-Karman*.

Feldman et Aboudi (1997) ont étudié le flambement élastique des plaques FG sous une charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches micromécaniques et structurelles. Les équations régissant les dérivées de la CPT ont été résolues analytiquement pour la charge de flambement des plaques FG avec différentes conditions aux limites. Javaheri et Eslami (2002-a) ont employé la CPT pour étudier le comportement en flambement des plaques FG sous quatre types des charges thermiques et des charges de compression (Javaheri et Eslami (2002-b)). Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode de la bande finie au lieu de la solution de *Navier*. Mohammadi et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions aux limites arbitraires (par exemple des plaques de type Levy). Les équations régissant les dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues en utilisant l'approche de la solution de type Levy. Le flambement des plaques en FGM soumise à une compression non uniforme a été analysé par Mahdavian (2009) en utilisant la théorie classique et la solution de série de Fourier. Alinia et Ghannadpour (2009) ont utilisé la théorie classique avec les hypothèses de *Von-Karman* pour étudier la réponse non linéaire des plaques en FGM soumise à des pressions transversales. Par le principe de minimisation de l'énergie potentielle, les auteurs ont obtenu une solution analytique pour une plaque simplement appuyée. Baser sur la théorie classique, Kiani et al. (2011) ont présenté une solution analytique de la température critique de flambement des plaques FG encastées sur fondations élastiques soumise à trois types des charges thermiques. Ghannadpour et al. (2012) ont examiné aussi le flambement thermique des plaques en FGM en utilisant la théorie classique (CPT). Cependant, la charge de flambement a été calculée par la méthode des bandes finies au lieu de la solution de *Navier*.

En plus des plaques FG, la CPT est également plus utilisée pour des coques FG en raison de sa simplicité. Loy et al. (1999) ont étudié les vibrations libres des coques cylindriques FG simplement appuyées en utilisant le CPT et la méthode de *Rayleigh-Ritz*. Une approche similaire

a été adoptée par Arshad et al. (2007) pour étudier les caractéristiques de la vibration des coques cylindriques FG sous trois différents types des lois de la fraction de volume. Les caractéristiques de vibration des coques cylindriques FG sous diverses conditions aux limites ont été examinées par Pradhan et al. (2000) en utilisant la méthode de Rayleigh et la CPT. Ce problème a été réexaminé par Naeem et al. (2010) en utilisant la méthode *Ritz*. Les vibrations forcées non linéaire des coques FG doublement courbées peu profondes ont été étudiées par Alijani et al. (2011) en utilisant la CPT avec des hypothèses de *Von-Karman* et la discrétisation multi-modale de Galerkin. Du et al. (2014) ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation harmonique sur la base de la CPT avec les hypothèses de *Von-Karman* combinées avec un procédé à échelle multiple. Du et Li (2013) ont étudié la réponse de vibration non linéaire des coques cylindriques FG dans des environnements thermiques suivant une approche similaire. Ebrahimi et Najafizadeh (2014) ont étudié la vibration libre des coques cylindriques FG en utilisant la CPT en liaison avec les méthodes de la quadrature différentielle généralisée et la quadrature intégrée généralisée.

Shen (2002,2004) ont étudié le comportement post flambement des coques cylindriques FG sous compression axiale (2002) ou sous pression latérale (2003) ou sous augmentation uniforme de la température (2004) en utilisant la CPT avec les hypothèses de *Von-Karman*. Les deux déformations non linéaires pré-flambement ainsi que les imperfections géométriques initiales ont été inclus dans l'analyse post flambement en utilisant une théorie de la couche limite du flambement des coques. Le chemin d'équilibre post flambement et la charge de flambement thermique sont déterminés en utilisant une technique de perturbation singulière. Woo et al. (2003) ont étudié le comportement post flambement des plaques FG et des coques cylindriques peu profondes sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la CPT et les hypothèses de *Von-Karman*. Mirzavand et Eslami (2008) ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des coques cylindriques imparfaites FG sous une compression axiale dans un environnement thermique en utilisant deux modèles différents pour les imperfections géométriques initiales. Les résultats indiquent que les imperfections géométriques et la dépendance à la température des propriétés des matériaux jouent un rôle majeur pour dicter le point de bifurcation des coques cylindriques imparfaites FG sous une compression axiale.

### III.2.2 Modèle FSDT

En raison de sa simplicité la FSDT a été largement utilisée pour modéliser les plaques FG. Parmi les premiers qui ont adapté la FSDT sur les plaques FG sont Praveen et Reddy (1998) où ils ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous chargements thermiques

et mécaniques à l'aide de la méthode des éléments finis et de la FSDT avec les hypothèses de *Von-Karman*. Yang et al. (2005) ont étudié l'influence du caractère aléatoire des propriétés des matériaux et des paramètres de rigidité de la fondation sur la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la FSDT et une technique de perturbation.

Della et Venini (2004) ont présenté une famille hiérarchique des éléments finis pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la FSDT et une formulation variationnelle. Toutefois, le couplage étirement-flexion a été ignoré dans leur travail. Kim et al. (2008) ont étudié le comportement non linéaire en flexion des plaques et des coques FG en utilisant la FSDT avec une définition complète du tenseur contrainte de Green.

Chen (2005) a étudié la vibration non linéaire des plaques FG soumises à une action combinée de la compression initiale dans le plan et les contraintes de flexion à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de *Von-Karman*. La fréquence non linéaire des plaques simplement appuyées a été obtenue en utilisant la méthode de Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La FSDT avec les hypothèses de *Von-Karman* a également été employée par Alijani et al. (2011) pour étudier la vibration non linéaire des plaques FG simplement appuyées dans un environnement thermique. La vibration libre des plaques FG reposant sur fondations élastiques a été étudiée par Fallah et al. (2013) en utilisant la FSDT et une approche semi-analytique qui est basée sur une combinaison de la série de puissance infinie et la méthode de Kantorovich. Lanhe (2004) et Bouazza et al. (2010), (2011), ont dérivé les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées sous deux types des charges thermiques en utilisant la FSDT et la solution de *Navier*. La relation contrainte-déplacement non linéaire de *Von-Karman* est utilisée pour prendre en compte le flambement dû à la charge thermique. L'analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires FG avec une formulation sigmoïdes de la variation de la fraction de volume (S-FGP) est étudiée par Fekrar et al. (2011) en utilisant la FSDT, la méthode de minimisation a été utilisée pour obtenir la température critique. Ganapathi et al. (2006) ont employé la FSDT et la méthode des éléments finis pour étudier le flambement des plaques obliques FG sous charges de compression. Yaghoobi et Yaghoobi (2013) ont étudié le flambement des plaques sandwiches FG reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques, la FSDT et la méthode des séries de puissance de Frobenius ont été adoptées.

Pour étudier la nature du facteur de correction de cisaillement de la FSDT dans les structures en FGM, Nguyen et al. (2008) ont adopté les équations d'équilibre dans le calcul des

contraintes de cisaillement transversal et des forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques FG simplement appuyées et des panneaux sandwichs FG encastres indiquent que la valeur du facteur de correction de cisaillement des plaques FG n'est pas le même que celui des plaques homogènes. On peut citer notamment le travail de Menaa et al. (2012), où ils ont proposé des expressions analytiques pour déterminer le facteur de correction de cisaillement dans le cas des poutres en matériaux à gradient de propriétés, les résultats montrent que le facteur de correction de la FSDT de la poutre FGM est influé significativement par l'indice de puissance. Les références (Chow 1971), (Hosseini et al. 2010), présentent des informations additionnelles sur la procédure de l'obtention de facteur de correction de cisaillement à travers l'épaisseur, basant sur des considérations dynamiques.

La FSDT basée sur la surface neutre a également été adoptée par Singha et al. (2011) pour étudier le comportement non linéaire de la flexion des plaques FG sous chargement transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que la méthode de l'énergie a été adoptée pour obtenir les expressions du facteur de correction de cisaillement.

Thai et choi (2013-a) ont présenté une théorie simple de la déformation de cisaillement du premier ordre pour l'analyse de flexion et les vibrations libres des plaques FG où le déplacement transversal est divisé en composante de flexion et en composante de cisaillement, conduisant à une réduction du nombre des inconnus du problème à quatre contre cinq à la FSDT conventionnelle.

Zhao et al. (2009), Zhao et Liew (2009,2011), et Lee et al. (2009,2010) ont développé un modèle de maillage sur la base de la FSDT et de la méthode des éléments libres de *Kp-Ritz*. Ce modèle a été appliqué à des plaques et coques FG à travers différents problèmes, par exemple, flexion géométriquement non linéaire (2009), la vibration (2009), flambement thermique (2009), flexion thermique (2009), post flambement thermique (2010) et le flambement thermomécanique (2011).

Reddy et al. (1999) ont utilisé la théorie FSDT pour des analyses de flexion et d'étirement des plaques FGM annulaires et circulaires axisymétriques, Ils ont exprimé également des solutions classiques basées sur la théorie de la plaque de Kirchhoff. Valizadeh et al. (2013) ont utilisé la théorie FSDT et des éléments finis iso-paramétriques pour étudier la réponse statique et dynamique des plaques FGM dans un environnement thermique. Boudierba et al. (2016) ont utilisé une FSDT simple pour la réponse de flambement thermique des plaques sandwichs FG avec diverses conditions aux limites.

Récemment, Shahbazzabar et Arteshyar (2018) étendent le modèle FSDT pour l'analyse du flambement des plaques de FG sous chargement uniforme dans le plan et reposant entièrement ou partiellement sur fondations élastiques de type Pasternak, en faisant la méthode des éléments en quadrature différentielle (DQEM) pour présenter l'influence de différentes conditions aux limites. La FSDT est utilisée également par Nguyen et al. (2018) pour étudier le comportement thermodynamique non linéaire des plaques poreuses en FGM sous charges thermique et mécanique reposant sur fondations élastiques de Pasternak, la non linéarité géométrique est également considérée en utilisant la formulation déplacement-déformation de Von Karman.

Bien récemment, Trabelsi et al. (2019) ont développé des éléments finis à quatre nœuds de coque pour résoudre le problème de flambement thermique des plaques et des coques cylindriques FG en considérant une théorie modifiée basée sur la FSDT. L'idée de base du modèle proposé consiste à supposer une distribution parabolique des déformations de cisaillement transverses sur l'épaisseur de la coque et imposer la condition de nullité des contraintes de cisaillement transverses sur les surfaces supérieure et inférieure de la coque.

### III.2.3 Modèle HSDT

Parmi les premiers, Nelson et Lorch (1977) ont développé le champ cinématique de la théorie de cisaillement d'ordre élevé en introduisant neuf inconnus de déplacement, Lo et al. (1977) avec onze inconnus, Bhimaraddi et Stevens (1984) avec cinq inconnus même pour Reddy (1984) avec cinq inconnus, Kant et Pandya (1988) avec sept inconnus, Kant et Khare (1997) avec neuf inconnus et Talha and Singh (2010) avec onze inconnus. D'autres théories d'ordre supérieur sont basées sur la formulation unifiée de Carrera (CUF) citées dans les références Tornabene (2009), Neves (2012-a), Neves et al. (2012-b), Neves et al. (2013), Tornabene et al. (2013), Viola et al. (2013-a), Viola et al. (2013-b), Fazzolari et Carrera (2013) et Tornabene et al. (2013) et ont été les utilisés aussi pour étudier des structures en FGM. Toutes ces théories sont intéressantes soit pour une présentation correcte de la cinématique où les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, soit pour éviter l'introduction des facteurs de correction, mais il faut distinguer que ces théories imposent un nombre important de paramètres des déplacements supplémentaires (trois variables pour la théorie de Kirchhoff, et cinq pour celle de Mindlin-Reissner). Ceci pose un inconvénient sérieux lors de l'application des conditions aux limites sur les frontières et la formulation de leurs modèles numériques (notamment la méthode des éléments finis). Tout ça influe directement sur le taux de calcul et l'efficacité de la théorie choisie.

Ferreira et al. (2005), ont utilisé les fonctions à base radiales multi quadriques par collocation pour analyser la flexion statique d'une plaque FG simplement appuyée, en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre. Les résultats obtenus sont en bon concordance avec ceux obtenus par la méthode meshless (sans maillage) alternative.

Une solution analytique de la réponse statique des plaques et des coques à double courbure FG, est présentée par Oktem et al. (2012) sur la base d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), l'objectif de cette investigation était la comparaison entre les modèles homogène (isotrope) et orthotropique des plaque FGM, le modèle analytique a été validé par la confrontation des résultats issus analytiquement à ceux obtenus via une simulation par éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS. Taj et al. (2013) ont utilisé la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre pour formuler des éléments finis iso-paramétriques de type Lagrangienne de forme rectangulaire de sept degré de liberté par nœud assurant une continuité  $C^0$ . Ces éléments sont employés pour l'analyse thermo-élastique des plaques FG.

Plusieurs auteurs ont exploité la théorie raffinée d'ordre supérieur (RPT) développée par Shimpi (2002) et l'étendue pour étudier les plaques FGM. Tounsi et al. (2013), Houari et al. (2011), Taibi et al. (2015), Boudjerba et al. (2013), ont étudié le comportement des plaques sandwiches FGM en utilisant la RPT, présentant des améliorations considérables dans la fonction de cisaillement. Meiche et al. (2011), hadji et al. (2011), ont étudié le problème des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM, à l'aide d'une formulation mathématique basé sur la RPT, tout en utilisant des fonctions de gauchissements différents. Meziane et al. (2014) ont fait une comparaison entre deux modèles des fonctions de cisaillement sinusoïdale et polynomiale pour les vibrations libres des plaques FGM reposant sur fondations élastiques avec différentes conditions aux limites, Benachour et al. (2011) ont étudié les vibrations libres des plaques FGM en utilisant la même théorie avec la méthode de *Ritz* pour présenter les différentes conditions d'appuis. Thai et al. (2011) ont utilisé la RPT pour étudié les vibrations libres et la flexion statique des plaques FG reposant sur fondations élastiques, les différentes conditions aux limites ont été considérées en appliquant l'approche de Levy.

Bourada et al. (2012), (2015), ont utilisé la RPT pour obtenir la température critique de flambement des plaques sandwiches en FGM, l'effet de différentes conditions d'appuis a été également étudié. Bousahla et al. (2016) ont utilisé cette théorie pour analyser le flambement thermique d'une nouvelle classe des plaques rectangulaires FGM. Boudjra et al. (2013) ont étudié l'influence de la position de l'axe neutre des plaques FGM reposant où non sur fondations

élastiques de type Pasternak sur la température critique de flambement. Bouazza et al. (2016) ont abordé le même problème pour les plaques FGM reposant sur fondations élastiques en considérant l'effet d'échelle. Bouazza et al. (2017) ont utilisé la RPT pour étudier le flambement des plaques FGM sous un chargement mécanique transversal.

Abdeaziz et al. (2011), Merdaci et al. (2011), ont dérivé des solutions analytiques basées sur la RPT en utilisant l'approche de *Navier* comme méthode de résolution des équations de mouvements pour la flexion statique des plaques sandwiches FG. En se basant sur la RPT, Ameer et al. (2011) ont étudié la flexion statique des plaques FG à l'aide des fonctions: trigonométriques, polynomiales, respectivement. Le même problème a été étudié par Daouadji et al. (2012) en utilisant une fonction de cisaillement hyperbolique. L'effet de la position de l'axe neutre a été étudié par Said et al. (2014) sur la flexion statique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques.

En utilisant la même théorie, Beldjelili et al. (2016) ont étudié la flexion hygro-thermo-mécanique des plaques S-FGM reposant sur fondations élastiques. En utilisant cette théorie, Zidi et al. (2014) ont étudié le comportement de flexion hygro-thermo-mécanique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques en utilisant une fonction polynomiale de cisaillement. Encore une fois, Attia et al. (2015) ont étudié la vibration libre des plaques FG avec des caractéristiques mécaniques dépendant de la température à l'aide d'une formulation basée sur cette nouvelle théorie.

La RPT a été adaptée pour les poutres FGM par plusieurs auteurs citant par exemple: Khelifa et al. (2015), Boukhelf et al. (2017), Larbi et al. (2013) ont étudié l'effet de la position de l'axe neutre sur la réponse des poutres FGM sous chargement transversal, Bachiri et al. (2018) ont étudié l'effet de la porosité sur les vibrations libres et la flexion statique des poutres FG reposant sur fondations élastiques. Thai et al. (2012) ont étudié les vibrations libres et la flexion des poutres FG, où ils ont fait des comparaisons des résultats obtenus par la RPT avec ceux obtenus en utilisant d'autres théories. Un élément fini quadrilatéral à quatre nœuds à l'aide des fonctions d'interpolation lagrangienne et hermitienne, et basé sur la cinématique de la RPT a été développé par Thai et Choi (2013-c) pour le problème des vibrations libres et la flexion des plaques FG en considérant différentes conditions aux limites.

Nguyen et al. (2016) ont étudié le comportement thermodynamique non linéaire des plaques et coques FG épaisses en utilisant la théorie du troisième ordre (TSDT), la plaque FGM est supposée reposer sur fondations élastiques et soumise à des charges thermiques et d'amortissement, les auteurs ont utilisé la fonction des contraintes et l'hypothèse de *Volmir* avec



---

les méthodes *de Runge–Kutta* de quatrième ordre et de *Galerkin* pour résoudre les équations de mouvements.

### III.3 Les travaux basés sur le modèle tridimensionnel (Élasticité 3D)

Plusieurs auteurs ont été, en outre, consacrés leurs recherches en particulier pour donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximées pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités. Vel et Batra (2004) ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire libres et forcées des plaques FGM simplement appuyées, en utilisant la méthode des séries de puissance. Des solutions précises pour les fréquences naturelles, les déplacements et les contraintes sont comparés à celles prédites par les modèles *ESL*. Vel (2010) a étendu le travail précédent (2004) pour les coques FG.

Zankour (2006) a étudié des plaques en FGM épaisses basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle de propriétés matérielles à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel). Uymaz et Aydogdu (2007) ont proposé une solution approchée par une série des études en utilisant les polynômes de *Chebyshev* et la méthode de *Ritz*, mêmes problèmes ont été traités par Li et al. (2008) qui introduisent la méthode de *Ritz* comme une stratégie de résolution. Huang et al. (2008). Amini et al. (2009) ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh (2009-a) a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles (*QDM*), et la solution des séries pour obtenir des solutions semi-analytiques pour la fréquence naturelle des plaques de type *Levy*.

Lu et al. (2009) ont adopté la méthode de l'état de l'espace pour dériver des solutions exactes pour la fréquence naturelle des plaques simplement appuyées. La *DQM* a également été adoptée par Malekzadeh et al. (2009-b) pour étudier la réponse de la vibration libre 3D des plaques annulaires FG en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Une solution d'élasticité tridimensionnelle pour les plaques FG simplement appuyées, soumise à une charge transversale est développé par Kashtalyan (2004). Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont supposés varie selon la loi exponentielle à travers l'épaisseur, la solution générale de *Plevako* a été utiliser pour résoudre les équations de mouvement. Le même auteur en (2009) a présenté une solution 3D pour l'analyse des plaques sandwiches avec noyau FG et soumis à une charge transversale. Les solutions 3D exactes de la vibration libre des plaques rectangulaires FG avec des conditions aux limites générales ont également été fournies par Jin et al. (2014) en utilisant la méthode de *Rayleigh Ritz*.

### III.4 Les travaux basés sur le modèle quasi-3D

De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures Matsunaga (2009), Talha et Singh (2010), Reddy (2011), ces théories sont lourdes et coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important des inconnus.

Talha et Singh (2010) ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres en utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. Jha et al. (2013) ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement, cette approche donne des résultats très satisfaisants par rapport à ceux fournis par l'élasticité 3D, mais l'inconvénient est toujours dans le taux très élevé de calcul. Reddy (2011) présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre des inconnus élevé nécessite un large système des équations qui conduit aux difficultés de résolution.

Neves et al. (2012-a), (2012-b), (2013) ont traité des problèmes des plaques FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par Zenkour (2007), Mantari et Guedes (2012), Mantari et Guedes (2013), elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre.

Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. Bessaim et al. (2013), Belabed et al. (2014), fekrar et al. (2014), Hebali et al. (2014), ont élargi cette théorie pour étudier les problèmes de flexion et vibrations libres des plaques sandwiches en FGM, effet de la position de l'axe neutre sur la flexion des plaques FGM, la flexion thermomécanique et le flambement thermique des plaques FGM. Benahmed et al. (2017) a utilisé cette nouvelle théorie quasi-3D pour expliquer les interactions mécaniques des plaques souples avec différentes distributions des propriétés matérielles. La vibration libre de sandwich avec une feuille de face FGM et un noyau FGM ainsi qu'un sandwich avec une feuille de face homogène et un noyau FGM a été analysée à l'aide de cette nouvelle théorie de plaque quasi-3D par Bennoun et al. (2016).

Mantari (2015) a développé une nouvelle théorie quasi 3D basé sur la cinématique unifiée de Carrera (CUF), les fonctions de forme de cisaillement ont été exprimées de la sorte à prendre en compte les idées de base tirées du document de Zenkour (2013-c). Le modèle mathématique a contenu des paramètres correcteurs qui ont été sélectionnée pour fournir des résultats précis des contraintes et déplacements moyen. Mahmoudi et al. (2017) ont utilisé cette nouvelle théorie quasi 3D en utilisant une autre fonction de déformation de cisaillement appropriée dans le cas du comportement thermomécanique de différents types des plaques sandwiches FGM, le modèle de Voigt a été adopté pour décrire les caractéristiques mécaniques des plaques sandwiches en FGM.

Abualnour et al. (2018) ont présentés une nouvelle théorie de déformation de cisaillement en tenant compte l'effet d'étirement (stretching effect) pour l'analyse des vibrations libres des plaques FGM simplement appuyées. Le comportement dynamique et statique des nano-poutres en FGM sont investigués par Bouafia et al. (2017) en utilisant une théorie non-locale quasi-3D dans laquelle les effets de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur sont introduits. Sekkal et al. (2017-b) ont réalisé une étude numérique détaillée pour examiner le flambement et les vibrations libres des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D HSDT, l'inconvénient de cette théorie était le choix du facteur de correction pour la fonction de cisaillement  $g(z)$ . Les études comparatives et de validation montrent que les théories avec moins d'inconnues peuvent atteindre la même précision du HSDT conventionnel qui a plus de variables inconnues.

Akavci et tanrikulu (2015) ont développé une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement et déformation normale (quasi 3D) pour étudier le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduées. Les propriétés mécaniques ont été formulées par trois différentes distributions à travers l'épaisseur: loi de puissance, Mori-Tanaka, loi exponentielle. La solution de *Navier* a été choisie comme méthode de résolution des équations de mouvement.

Une théorie trigonométrique d'ordre élevée et de déformation normale (quasi 3D) a été développée par Zencour (2013-c), (2013-d), le problème de la flexion sous chargement transversale uniforme représenté par les doubles séries de *Fourier* a été étudié pour les plaques FG (2013-c) et les plaques sandwiches FG (2013-d). Cette théorie contient quatre variables inconnus, ce qu'elle fait rendre bénéfique en terme de temps de calcul par rapport aux autres théories quasi 3D.

Un modèle sinusoïdal raffiné (SPT) de *Touratier* tenant compte de la déformation normale transversale a été mis au point pour l'analyse thermo-élastique des plaques FG par Xiaohui et

Zhen 2018. Contraire aux autres modèles, les déformations thermiques dans l'épaisseur et dans le plan dues aux charges thermiques sont introduites dans le champ de déplacement du modèle SPT et par conséquent influencer la précision des contraintes axiales et de cisaillement dans le plan de la plaque.

Plus récent, Shantaram et Atteshamuddin (2019) ont étudié le comportement statique des plaques FG sous chargement mécanique en utilisant un nouveau modèle quasi 3D. La théorie est appelée théorie du cisaillement du cinquième ordre et de déformation normale (FOSNDT). Les propriétés du matériau sont considérées variables dans le sens de l'épaisseur en utilisant la loi de puissance. Dans cette théorie, les composantes de déplacement axial et transversal impliquent respectivement des fonctions de forme du cinquième et du quatrième ordre pour évaluer les déformations de cisaillement et les déformations normales et par conséquent la théorie a comporté neuf inconnues. Les solutions analytiques sont obtenues en mettant en œuvre les doubles séries de *Fourier*.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre à caractère bibliographique, on peut relever quelques aspects importants pour l'étude du comportement des plaques FGM sous différents chargements et conditions aux limites. L'adaptation de différentes théories : classiques, de premier ordre et d'ordre élevé sur les plaques FGM a été avec succès. Néanmoins, le domaine scientifique des plaques FGM manque d'études expérimentales, ce qui peut aider à une comparaison appréciable avec les résultats des formulations mathématiques, y compris les résultats des théories des plaques. Cependant, des points importants restent à citer et ils sont résumés ci-après :

- Parmi les différentes théories de plaques comme CPT, FSDT, TSDT, HSDT, employées pour l'analyse des plaques FG, les FSDT et HSDT ont été largement utilisées. Certaines modifications ont également été incorporées dans FSDT et HSDT par les recherches de temps en temps pour obtenir le résultat précis dans le domaine en temps réel.
- Les solutions analytiques 3D pour les plaques en FGM sont très utiles car ils fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision des diverses théories 2D des plaques et formulations éléments finis, mais leurs méthodes de résolution impliquent des complexités mathématiques et sont très difficiles et fastidieuses à résoudre.
- Dans la plupart des théories 2D développées pour prédire la réponse des plaques FGM, l'effet de la déformation de cisaillement transversal a été pris en compte, et celle envisageant de prendre en compte l'effet à la fois de cisaillement transversal et la déformation normale (Thickness stretching effect) surnommée plus tard les théories quasi-3D.
- Après avoir examiné une grande partie de la recherche sur les FGM disponible dans la littérature, il est évident que la quasi-totalité de la recherche a été menée purement analytique ou de la simulation numérique.
- Utilisation de l'amélioration des modèles théoriques 2D qui semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D devraient être poursuivis dans l'intérêt du coût de calcul et des analyses efficaces.
- Les études traitant le comportement thermodynamique des plaques FG sont très rares dans la littérature, malgré l'importance de ce problème dans le contexte de conception des plaques FG vis à vis un environnement thermique.

# Chapitre IV :

## **Comportement thermodynamique des plaques FG sur fondations élastiques**

IV.1 Introduction

IV.2 Modèles de fondations

IV.2.1 Model de Winkler

IV.2.2 Model de Pasternak

IV.3 Formulation théorique de la présente théorie

IV.3.1 Propriétés des matériaux :

IV.3.2 Théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des plaques FG.

IV.3.2.1 Hypothèses de la présente théorie

IV.3.2.2 Cinématique et équations constitutives

IV.3.2.3 Équations gouvernantes

IV.4 Champs de température

IV.4.1 Distribution harmonique :

IV.4.2 Autres distribution de température

IV.5 Solution approchée pour une plaque simplement appuyée.

IV.6 Conclusion

## IV.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, une nouvelle théorie d'ordre supérieur avec uniquement quatre inconnus, pour l'analyse de comportement thermodynamique des plaques en matériaux à gradient de propriétés. Cette théorie a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transversale dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans le cas des structures plaques tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres .

Cette théorie sera exploitée pour l'étude du problème thermodynamique des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés sur fondation élastique. Il est à signaler que les études littéraires traitant ce cas du problème sont vraiment très rares, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent consacré aux travaux antérieur.

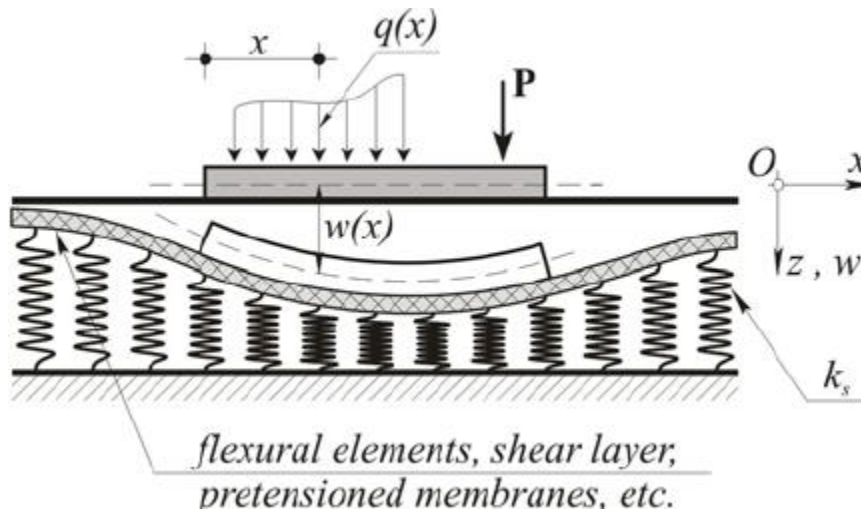
## IV.2 Modèles de fondations

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le génie civil. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques. Le modèle le plus simple de la fondation élastique est celui de Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement entre l'un et l'autre, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque.

### IV.2.1 Model de Winkler.

Il consiste à substituer le sol par une infinité de ressorts élastiques juxtaposés et de même constante de raideur. Cette constante  $k_w$ , caractérise le sol: elle exprime la proportionnalité entre la contrainte verticale appliquée et le tassement, et est appelée module de réaction du sol.

Cette méthode simplificatrice permet une bonne approximation des déformées d'une poutre posée sur le sol ou d'un radier. Cependant, il est important d'insister sur le mot approximation. En effet, le principe de calcul proposé par Winkler néglige d'une part, l'interaction inévitable de deux ressorts juxtaposés (l'effet de Poisson du sol) et d'autre part, la zone externe à la fondation qui influence le tassement global (Sofiyev 2012). Selon Winkler (1867), seule la zone située sous le radier se tasse comme indiqué sur la figure suivante.



**Figure IV.1** : Approximation Winkler

Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (1954) qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases). (Benyoucef et al. 2010, Meksi et al. 2015, Bodaghi et Saidi 2011, Kiani et al. 2011, Morimoto et Tanigawa 2007, Huang 2008).

#### IV.2.2 Model de Pasternak

Le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle  $k_p$  du sol en plus de la rigidité normale (ou de Winkler)  $k_w$  (Foroughi et Azhari 2014), Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

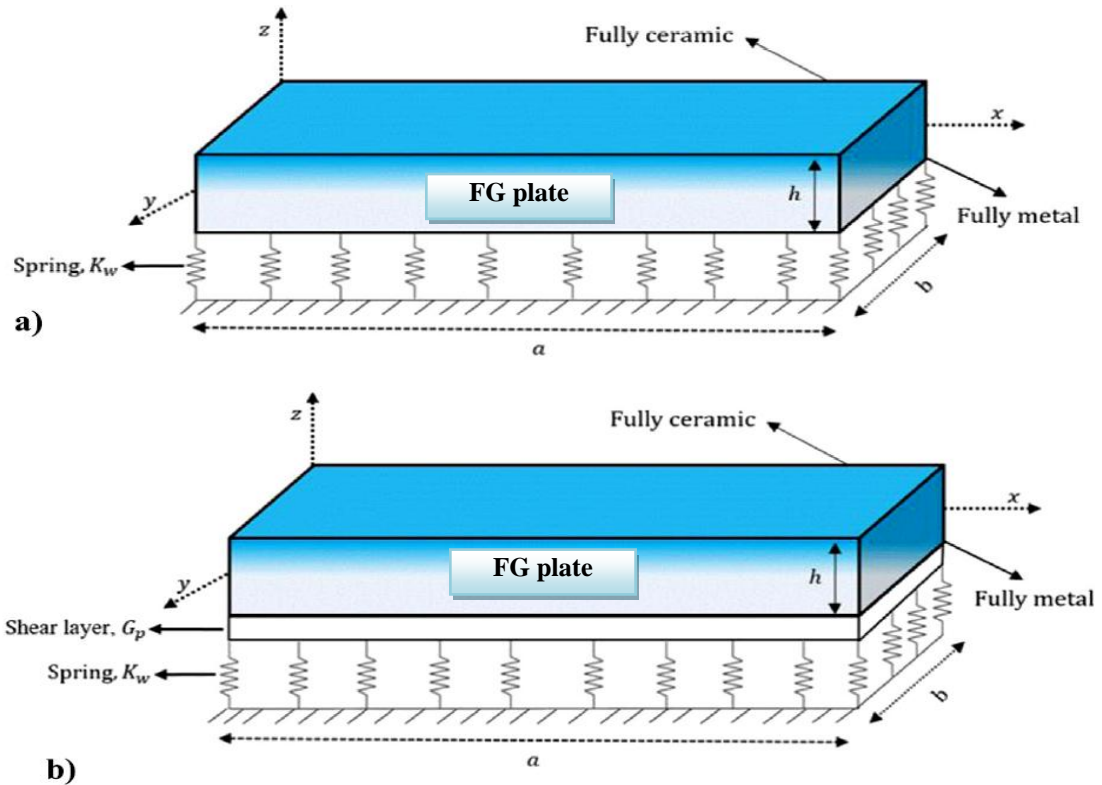
$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (\text{IV.1})$$

Avec :  $f_e$  [N/m] la charge linéique s'appliquant sur le radier,  $k_p$  le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m],  $k_w$  le module de réaction du sol [Pa/m] et  $w$  la déformée du terrain.

#### IV.3 Formulation théorique de la présente théorie

Considérons une plaque rectangulaire en matériau composite avancé (FGM) d'une longueur, largeur et épaisseur égales à ( $a$ ,  $b$  et  $h$ ), respectivement.





**Figure IV.2** Plaque FGM reposant sur une fondation élastique, a) Modèle Winkler, b) Modèle Pasternak

La plaque repose sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler  $k_w$  et une rigidité de cisaillement de Pasternak  $k_p$ , Selon la figure IV.2 indiquée ci-dessus.

Le système global de coordonnées cartésiennes est choisi est représenté sur la figure IV.2. Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme :  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  et  $-h/2 \leq z \leq h/2$ .

### IV.3.1 Propriétés des matériaux

Les FGM sont des matériaux composites avancés constitués généralement par la céramique et le métal. Il y'a quelques modèles micromécaniques dans la littérature qui expriment la variation des propriétés matérielles dans les FGM. Dans ce qui suit, nous allons retenir la loi suivante qui décrit la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur Zenkour et Sobhi (2013) :

$$P(z) = P_m e^{\beta \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k} \quad (IV.2)$$

$$\beta = \ln\left(\frac{P_c}{P_m}\right)$$

Où  $P$  est la propriété matérielle effective de la plaque en FGM,  $P_c$  et  $P_m$  sont les propriétés des faces supérieures et inférieures de la plaque FGM. Notant que  $P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les propriétés correspondant au métal et à la céramique de la plaque FGM. Et  $k$  est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

### IV.3.2 Théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des plaques FG

Contrairement à la théorie de déformation de cisaillement conventionnelle (Zenkour et Sobhi 2013), le nombre d'inconnus de la présente théorie est seulement quatre (04). En plus, cette théorie ne nécessite pas un coefficient de correction de cisaillement est satisfait la condition de contraintes de cisaillement nulles aux bords de la plaque.

#### IV.3.2.1 Hypothèses de la présente théorie

Les hypothèses retenues pour la présente théorie s'énoncent comme suit :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, par conséquent, les contraintes générées sont infinitésimales ;
- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable en comparaison avec les contraintes en plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Les déplacements «  $u$  » et «  $v$  » dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement consistent en composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$\begin{aligned} U &= u_0 + u_b + u_s \\ V &= v_0 + v_b + v_s \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées être similaires à celles données par la théorie classique des plaques. Ainsi, les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  sont données par :

$$\begin{aligned} u_b &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v_b &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \tag{IV.4}$$

Les troisièmes composantes sont celles de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, en avec  $\phi_x, \phi_y$  qu'ils sont les rotations de la section transversale autour des axes  $YY'$  et  $XX'$  respectivement, à une variation parabolique de déformation de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la

plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure). Les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  sont données comme suit :

$$\begin{aligned} u_s &= -f(z)\phi_x \\ v_s &= -f(z)\phi_y \end{aligned} \quad (IV.5)$$

La fonction de forme  $f(z)$  (fonction de gauchissement) est donnée par :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)z - \frac{\pi}{z} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \quad (IV.6)$$

### IV.3.2.2 Cinématique et équations constitutives

$u_0, v_0, w_0, \phi_x$  et  $\phi_y$  Sont les inconnus du problème.

En considérant que

$$\phi_x = \int \theta(x, y) dx \text{ et } \phi_y = \int \theta(x, y) dy.$$

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement de la présente théorie sinusoïdale d'ordre supérieur peut être obtenu en utilisant les équations (IV.2)-(IV.5) comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier et le champ de déplacement peut être réécrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Où les coefficients  $A'$  et  $B'$  (définis en fonction du type de solution adoptée),  $k_1$  et  $k_2$  sont exprimés comme suit:

$$k_1 = \lambda^2, k_2 = \mu^2 \quad (IV.8.a)$$

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, B' = -\frac{1}{\mu^2}$$

$$\text{Avec} \quad \lambda = \frac{m\pi}{a}, \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{IV.8.b})$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation, (IV.8), comme suit:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.9.a})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.9.b})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 y} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

et

$$g'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.10.b})$$

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)T \\ \varepsilon_y - \alpha(z)T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xy})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique,  $T$  représente la distribution de température.

En utilisant l'équation (IV.11), les coefficients  $Q_{ij}$  de la matrice précédente peuvent s'écrire comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \quad (\text{IV.12.a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} \quad (\text{IV.12.b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (\text{IV.12.c})$$

### IV.3.2.3 Équations gouvernantes

En vue d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre et de mouvement, ainsi que les conditions aux limites de la plaque FGM, le principe énergétique d'Hamilton est utilisé. Le principe d'Hamilton est donné par sa forme analytique comme suit, Moya et al. (1992):

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta U_F - \delta K) dt \quad (\text{IV.13})$$

$\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation ;  $\delta U_F$  est la variation de l'énergie potentielle de fondations;  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation da la plaque FGM est calculée par :

$$\delta U = \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \quad (\text{IV.14})$$

En substituant les équations (IV.9) et (IV.11) dans (IV.14), puis en intégrant suivant la direction de l'épaisseur, la variation de l'énergie de déformation devient :

$$\begin{aligned}
 \delta U = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \right. \\
 - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\
 - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \\
 \left. + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Où  $A$  est la surface en plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de la plaque et les résultantes des contraintes  $N, \mathbf{M}$ , et  $S$  sont définies par :

$$\begin{pmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{pmatrix} dz \tag{IV.16.a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \tag{IV.16.b}$$

En utilisant les équations (IV. 9), (IV. 11) dans l'équation (IV. 16), les efforts résultants peuvent être formulés de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{pmatrix}, S = A^s \gamma \tag{IV.17}$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{IV.18.a}$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t \tag{IV.18.b}$$

où

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{IV.18.c}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV.18.d}$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \mathbf{H}^s = \tag{IV.18.e}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}^S & H_{12}^S & 0 \\ H_{12}^S & H_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^S \end{bmatrix},$$

$$S = \{S_{yz}^S, S_{xz}^S\}^t, \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, A^S = \begin{bmatrix} A_{44}^S & 0 \\ 0 & A_{55}^S \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18.f})$$

Où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc., représentent les coefficients de rigidité de la plaque FGM et sont données par :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{pmatrix} \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (\text{IV.19.a})$$

et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S) \quad (\text{IV.19.b})$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(\nu+1)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.19.c})$$

Les efforts et les moments résultants dus à la charge thermique prennent la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{\nu-1} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.20})$$

Notant que :  $N_y^T = N_x^T$ ,  $M_y^{bT} = M_x^{bT}$  et  $M_y^{sT} = M_x^{sT}$ .

La variation de l'énergie potentielle de la fondation est donnée par :

$$\delta U_F = - \int_A f_e \delta w dA \quad (\text{IV.21})$$

Avec  $f_e$  est la réaction de la fondation appliquée à la plaque. Pour une fondation de type Pasternak, cette réaction est exprimée sous la forme suivante :

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (\text{IV.22})$$

Si la fondation est modélisée selon Winkler, le coefficient  $k_p$  dans l'équation (IV.22) vaut alors Zero.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\delta K = \int_V [[\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}]\rho(z)] dV \quad (IV.23)$$

En substituant les déplacements  $u, v, w$  par leurs expressions respectives (équation IV.7), on peut écrire alors:

$$\begin{aligned} \delta K = \int_A \left[ \int_z \left\{ \left( \dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} + K_1 A' f \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) \left( \delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + K_1 A' \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} + K_2 B' f \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) \left( \delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + K_2 B' f \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (\dot{w}_0)(\delta \dot{w}_0) \right\} \rho(z) dz dA \right] \quad (IV.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta K = \int_A \left[ \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \right. \right. \\ \left. \left. - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + J_1 \left( k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right\} \right] dA \quad (IV.25) \end{aligned}$$

$\rho(z)$  est la masse volumique donnée par l'équation IV-1 ; et  $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les moments d'inertie suivant l'épaisseur de différent ordre définis par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f(z), z^2, zf(z), f(z)^2) \rho(z) dz \quad (IV.25.b)$$

En En introduisant les expressions de «  $\delta U$  », «  $\delta U_F$  » et «  $\delta K$  » obtenues à partir des équations (IV-15), (IV-21) et (IV-25) dans l'équation (IV-13), puis intégrant par parties, et en



collectant les termes  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$  les équations de mouvement de la plaque seront obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + k_w w_0 - k_p \nabla^2 w_0 &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - \\
 I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) & \\
 \delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= \\
 -J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) &
 \end{aligned} \tag{IV.26}$$

Substituant l'équation (IV.17) dans l'équation (IV.26), nous obtenons le système d'équation d'équilibre et du mouvement en terme des déplacements  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + \\
 2B_{66} d_{122} w_0 + k_1 A' B_{11} s d_{111} \theta - k_2 B' & \\
 B_{12}^s d_{122} \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + d_1 N_x^T - I_0 \ddot{u}_0 + I_1 d_1 \ddot{w}_0 - k_1 A' J_1 d_1 \ddot{\theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.27.a}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 \\
 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + k_2 B' B_{22}^s d_{222} \theta \\
 - k_1 A' B_{12}^s d_{112} \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + d_2 N_y^T - I_0 \ddot{v}_0 & \\
 + I_1 d_2 \ddot{w}_0 - k_2 B' J_1 d_2 \ddot{\theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.27.b}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) (d_{122} u_0 + d_{112} v_0) + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 \\
 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + k_1 A' D_{11}^s d_{1111} \theta \\
 + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} \theta + k_2 B' D_{22}^s d_{2222} \theta + d_{11} M_x^{bT} \\
 + d_{22} M_x^{bT} + k_w w_0 - k_p \nabla^2 w_0 - I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) + I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \\
 - J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.27.c}$$

$$\begin{aligned}
 & -k_1 A' B_{11}^s d_{111} u_0 - \left( k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right) d_{122} u_0 \\
 & - \left( k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right) d_{112} v_0 - k_2 B' B_{22}^s d_{222} v_0 \\
 & + k_1 A' D_{11}^s d_{1111} w_0 + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_0 \\
 & + k_2 B' D_{22}^s d_{2222} w_0 - k_1 A' d_{11} M_x^{ST} - k_2 B' d_{22} M_y^{ST} \\
 & - (k_1 A')^2 H_{11}^s d_{1111} \theta \\
 & - \left[ 2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right] d_{1122} \theta \\
 & - (k_2 B')^2 H_{22}^s d_{2222} \theta + (k_1 A')^2 A_{55}^s d_{11} \theta \\
 & + (k_2 B')^2 A_{44}^s d_{22} \theta + J_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) \\
 & + K_2 \left( (k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.27.d}$$

Où :  $\mathbf{d}_{ij}$ ,  $\mathbf{d}_{ijl}$ , et  $\mathbf{d}_{ijklm}$  sont les opérateurs différentiels suivant :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijkl} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \tag{IV.28}$$

Les équations (IV. 27. a), (IV. 27. b), (IV. 27. c) et (IV. 27. d) sont appelées les équations de mouvement. Il est clair que, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transversale est négligé ( $\theta = 0$ ), l'équation (IV. 27) conduit aux équations de mouvement de la plaque mince (théorie classique des plaques CPT).

#### IV.4 Champs de température

Dans ce travail, deux variantes du chargement thermique à travers l'épaisseur sont considérées.

La première, une variation selon la loi de puissance exponentielle qui donne un chargement harmonique. La seconde, le chargement thermique est supposé varie d'une façon uniforme, linéaire et non-linéaire.

##### IV.4.1 Distribution harmonique

La variation de température est supposée se produire dans la direction de l'épaisseur selon une forme de loi exponentielle. Donc la variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée comme suit :

$$T(x, y, z, t) = \hat{t}(z)\hat{T}(x, y, t) \quad (IV.29.a)$$

Sachant que :

$$\hat{t}(z) = T^- e^{\gamma \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^\eta}, \gamma = \ln\left(\frac{T^+}{T^-}\right), 0 \leq \eta \leq \infty \quad (IV.29.b)$$

Et

$$\hat{T}(x, y, t) = \bar{t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \quad (IV.29.c)$$

Avec :

$\bar{t}$  : est un paramètre arbitraire de température.

$T^+$  : Température de la surface supérieure de la plaque FGM.

$T^-$  : Température de la surface inférieure de la plaque FGM.

$\eta$  : Exposant de la température, noté que  $\eta = 0$  présente la température appliquée à la surface supérieure de la plaque, tandis que  $\eta = \infty$  quand la température est appliquée à la surface inférieure.

#### IV.4.2 Autres distribution de température

Pour illustrer le problème thermoélastique de la plaque FGM, un deuxième champ de température à travers l'épaisseur est présenté : Zidi et al. (2014) et Zenkour et Alghamdi (2008):

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, y, t) + \frac{z}{h} T_2(x, y, t) + \frac{f(z)}{h} T_3(x, y, t) \quad (IV.30.a)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \quad (IV.30.b)$$

En utilisant le champ de température définit par l'équation (IV.30.a), trois types de température à travers l'épaisseur sont considérés.

Distribution linéaire

$$T = \frac{z}{h} T_2 \quad (IV.31)$$

Distribution Non linéaire

$$T = f(z) T_3 \quad (IV.32)$$

Distribution Combinée

$$T = T_1 + \frac{z}{h}T_2 + \frac{f(z)}{h}T_3 \quad (\text{IV.33})$$

#### IV.5 Solution approchée pour une plaque simplement appuyée

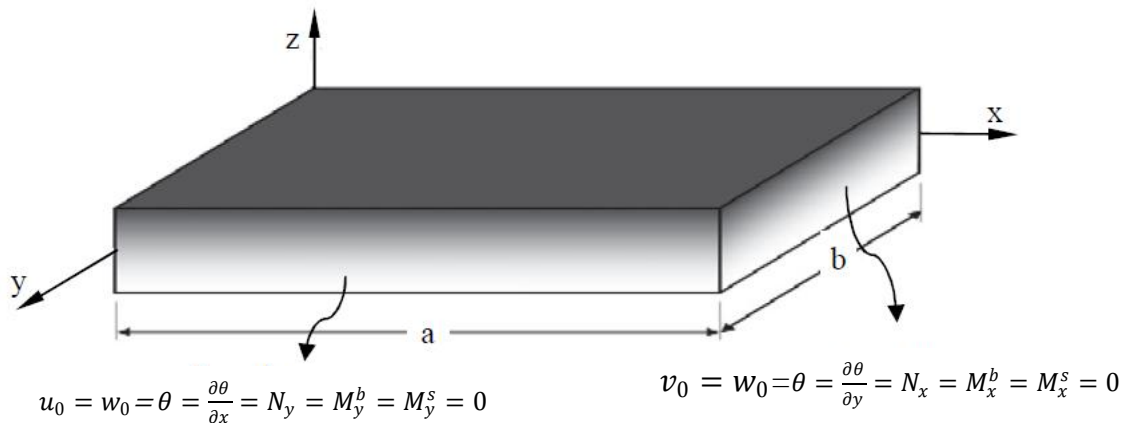
Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée de dimensions  $(a \times b)$ . Les expressions suivantes de déplacement  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_b, \theta)$  sont choisies d'une manière à satisfaire les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.

Pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre côtés, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent :

$$v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (\text{IV.34.a})$$

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (\text{IV.34.b})$$

La figure IV.2 suivante présente les conditions aux limites pour une plaque simplement appuyée



**Figure IV.3** Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermodynamique des plaques FGM, la solution peut être trouvée en écrivant les déplacements  $u, v, w_0$ , et  $\theta$  sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement thermique et les conditions aux limites, équation (IV.35) :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

Où :

$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \mu = \frac{n\pi}{b}$  Sont des constantes

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$  et  $X_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $(m, n)^{ième}$  mode propre.

Nous substituons l'équation (IV.35) dans l'équation (IV.27) à l'aide des équations (IV.29), et (IV.30), la solution analytique est obtenue sous forme matricielle :

$$[K]\{\Delta\} = \{F_1\} \quad (IV.36.a)$$

$$[K]\{\Delta\} = \{F_2\} \quad (IV.36.b)$$

$$\{\Delta\} = \{U, V, W, X\}^t \quad (IV.36.c)$$

Les vecteurs des forces généralisées apparaissent dans l'équation (IV.36) sont déterminées par

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} \lambda A^T \bar{t} \\ \mu A^T \bar{t} \\ -(\lambda^2 + \mu^2) B^T \bar{t} \\ -(\lambda^2 + \mu^2) C^T \bar{t} \end{Bmatrix} \quad (IV.37.a)$$

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} \lambda(A_a^T t_1 + B_a^T t_2 + C_a^T t_3) \\ \mu(A_a^T t_1 + B_a^T t_2 + C_a^T t_3) \\ -h(\lambda^2 + \mu^2)(B_a^T t_1 + D_a^T t_2 + E_a^T t_3) \\ -h(\lambda^2 + \mu^2)(C_a^T t_1 + E_a^T t_2 + F_a^T t_3) \end{Bmatrix} \quad (IV.37.b)$$

Les composantes des vecteurs forces généralisées sont exprimées par l'équation (IV.38) suivante

$$\{A^T, B^T, C^T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{\nu - 1} \alpha(z) T^{-1} e^{\gamma(\frac{z}{h} + 0.5)^n} \{1, z, f(z)\} dz \quad (IV.38.a)$$

$$\{A_a^T, B_a^T, D_a^T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{\nu - 1} \alpha(z) \left\{1, \frac{z}{h}, \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\} dz \quad (IV.38.b)$$

$$\{C_a^T, E_a^T, F_a^T\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{\nu - 1} \alpha(z) f(z) / h \left\{1, \frac{z}{h}, \frac{f(z)}{h}\right\} dz \quad (IV.38.c)$$

La matrice  $[K]$  est définie comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39.a})$$

Il est à noter que la matrice  $[K]$  combine les termes de la rigidité et de la masse.

Les coefficients  $a_{ij}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 - \omega^2 I_0 \\ a_{12} &= (A_{11} + A_{66})\lambda\mu \\ a_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 + \omega^2 I_1 \lambda \\ a_{14} &= k_1 A' B_{11}^s \lambda^3 + [k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \lambda \mu^2 - \omega^2 k_1 A' J_1 \lambda \\ a_{22} &= A_{22}\mu^2 + A_{66}\lambda^2 - \omega^2 I_0 \\ a_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{66})\mu\lambda^2 + \omega^2 I_1 \mu \\ a_{24} &= k_2 B' B_{22}^s \mu^3 + [k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \lambda^2 \mu - \omega^2 k_2 B' J_1 \lambda \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + D_{22}\mu^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 \mu^2 + k_w + k_p(\lambda^2 + \mu^2) - \omega^2 I_0 \\ &\quad + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{34} &= -k_1 A' D_{11}^s \lambda^4 - k_2 B' D_{22}^s \mu^4 - 2(k_1 A' + k_2 B')(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + \omega^2 J_2 \\ &\quad + I_2(\lambda^2 k_1 A' + k_2 B' \mu^2) \\ a_{44} &= (k_1 A')^2 H_{11}^s \lambda^4 + (k_2 B')^2 H_{22}^s \mu^4 \\ &\quad + [2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \lambda^2 \mu^2 + (k_1 A')^2 A_{55}^s \lambda^2 \\ &\quad + (k_2 B')^2 A_{44}^s \mu^2 + \omega^2 K_2 [(k_1 A')^2 \lambda^2 + (k_2 B')^2 \mu^2] \end{aligned} \quad (\text{IV.39.b})$$

## IV.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'établir les considérations de la présente théorie. Cette nouvelle théorie est une théorie de plaque d'ordre supérieur de déformation de cisaillement, a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exigent pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Le modèle possède un nombre réduit des inconnus (quatre) tandis que cinq ou plus dans les autres théories d'ordre supérieur, grâce à la formulation par l'intégrale déterminée par la solution de Navier introduit dans le champ du déplacement.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques en se basant sur la méthode de Navier en doubles séries de Fourier. Cette méthode nous offre des solutions aux problèmes d'une plaque FG épaisse simplement appuyé en analyse thermodynamique. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

# Chapitre V :

## **Discussion des résultats et analyse**

V.1 introduction.

V.2 Résultats & discussions.

V.3 Etude paramétrique.

V.4 Conclusion



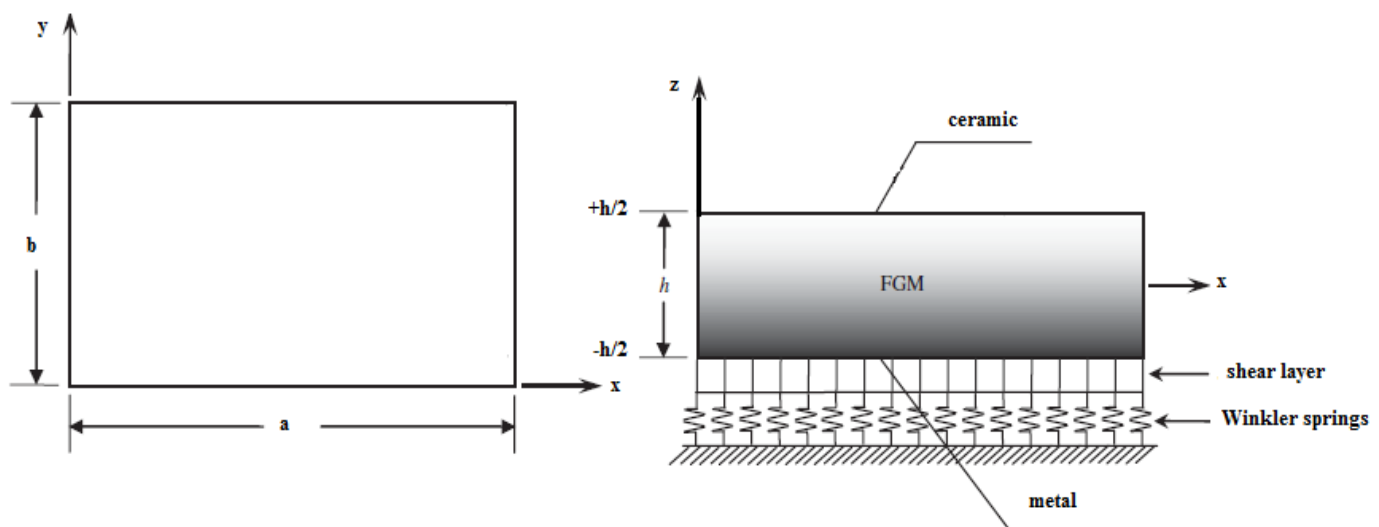
## V.1 Introduction

L'intérêt principal de cette section est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie développée dans ce travail, cette théorie est une théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, basée sur une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La plupart des théories d'ordre supérieur présentent une cinématique introduisant un nombre des inconnus élevé cinq, six ou plus. Il est a rappelé que le nombre d'inconnus de la présente théorie est seulement quatre.

Pour valider le présent modèle, ses résultats seront comparés avec d'autres de la littérature.

## V.2 Résultats et discussions

Les résultats obtenus seront comparés avec ceux déterminés analytiquement par Zenkour et Sobhi (2013-b) en utilisant différentes théories d'ordre élevé. Il s'agit d'étudier une plaque carrée r épaisse en FGM ( $\text{Al} / \text{ZrO}_2$ ) simplement appuyée avec un rapport d'épaisseur égale à 10 ( $a = 10h$ ) sous chargement thermodynamique reposant sur fondations élastiques comme il est reporté sur la figure V.1.



**Figure V.1** Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur fondations élastique.

Une fois l'exactitude de ce modèle est confirmée, nous présentons une étude paramétrique afin d'étudier l'influence des différents paramètres sur le comportement thermodynamique des plaques FG. La description des différents modèles de déplacement utilisés dans l'étude comparative est présentée dans le Tableau V-1. Les résultats obtenus sont illustrés dans les tableaux (V.2-5).

**Tableau V.1** Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnus utilisés dans l'étude comparative.

| Modèles          | Théories  | Nombre des fonctions inconnus |
|------------------|---|-------------------------------|
| TPT              | Théorie de déformations de cisaillement de troisième degré; (Zenkour et Sobhy 2013) | 5                             |
| SPT              | Théorie de déformations de cisaillement sinusoïdale; (Zenkour et Sobhy 2013)        | 5                             |
| Présente théorie | Présente théorie hyperbolique   | 4                             |

Les comparaisons sont faites avec les solutions disponibles dans la littérature. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus. Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont:

Métal (Aluminium, AL):  $E_M=70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu=0.3$ ;  $\rho_M= 2702 \text{ Kg/m}^3$ ;  $\alpha_M = 23,40.10^{-6} / K$ .

Céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ ):  $E_C = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\rho_C = 5700 \text{ kg/m}^3$ ;  $\alpha_c = 7,11.10^{-6} / K$ .

Dans tous les exemples, les paramètres de fondation sont présentés sous forme adimensionnelle:

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D} \quad \text{et} \quad K_p = \frac{k_p a^2}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Telle que D : c'est la rigidité flexionnelle de la plaque.

Pour des raisons de simplicité, nous avons utilisé les formes adimensionnelles suivantes :

$$\bar{w} = \frac{10D}{a^4} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t \right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{10^{-3}D}{a^3} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z, t \right), \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{10^{-3}D}{a^3} \tau_{xy} (0, 0, z, t), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{D}{a^2} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, z, t \right),$$

$$\hat{w} = \frac{h}{\alpha_0 t_2 a^2} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t \right), \quad \text{with} \quad \alpha_0 = 10^{-6} / K$$

**Tableau V.2** Effet de l'indice de puissance  $k$  et les paramètres de fondations élastiques sur le déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ).

| $K_w$      | $K_p$ | Théorie  | Céramique       | $k=1$          | $k=2$          | $k=5$          | $k=7$          | Métal           |
|------------|-------|----------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| <b>0</b>   | 0     | TPT*     | -1.01848        | 1.46576        | 1.97962        | 1.46897        | 0.97709        | -2.45429        |
|            |       | SPT*     | -1.01855        | 1.46580        | 1.97961        | 1.46945        | 0.97781        | -2.45441        |
|            |       | Présente | <b>-1.01852</b> | <b>1.46585</b> | <b>1.97979</b> | <b>1.46871</b> | <b>0.97659</b> | <b>-2.45435</b> |
|            | 50    | TPT*     | -1.17215        | 1.79723        | 2.50009        | 1.92594        | 1.29509        | -3.37363        |
|            |       | SPT*     | -1.17222        | 1.79727        | 2.50008        | 1.92657        | 1.29604        | -3.37379        |
|            |       | Présente | <b>-1.17219</b> | <b>1.79733</b> | <b>2.50031</b> | <b>1.92560</b> | <b>1.29443</b> | <b>-3.37372</b> |
| <b>200</b> | 0     | TPT*     | -1.04628        | 1.52267        | 2.06681        | 1.54316        | 1.02825        | -2.59775        |
|            |       | SPT*     | -1.04634        | 1.52271        | 2.06680        | 1.54367        | 1.02901        | -2.59786        |
|            |       | Présente | <b>-1.04632</b> | <b>1.52276</b> | <b>2.06699</b> | <b>1.54289</b> | <b>1.02773</b> | <b>-2.59781</b> |
|            | 50    | TPT*     | -1.20912        | 1.88354        | 2.64079        | 2.05551        | 1.38654        | -3.65075        |
|            |       | SPT*     | -1.20919        | 1.88359        | 2.64078        | 2.05619        | 1.38755        | -3.65092        |
|            |       | Présente | <b>-1.20916</b> | <b>1.88365</b> | <b>2.64102</b> | <b>2.05515</b> | <b>1.38583</b> | <b>-3.65084</b> |
| <b>300</b> | 100   | TPT*     | -1.45924        | 2.54884        | 3.80434        | 3.24035        | 2.24992        | -6.59491        |
|            |       | SPT*     | -1.45933        | 2.54888        | 3.80435        | 3.24143        | 2.25156        | -6.59520        |
|            |       | Présente | <b>-1.45929</b> | <b>2.54895</b> | <b>3.80468</b> | <b>3.23979</b> | <b>2.24877</b> | <b>-6.59507</b> |

\*TPT: Third order shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

\*SPT: Sinusoidal shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

**Tableau V.3** Effet de l'indice de puissance  $k$  et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2$ ,  $t=3$ ,  $\beta=1$ ,  $\bar{t}=1$ ).

| $K_w$      | $K_p$ | Théorie  | Céramique        | $k=1$          | $k=2$          | $k=5$          | $k=7$          | Métal           |
|------------|-------|----------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| <b>0</b>   | 0     | TPT*     | - 0.53820        | 0.51331        | 1.08122        | 1.89917        | 2.16577        | -0.31233        |
|            |       | SPT*     | - 0.53839        | 0.51360        | 1.08161        | 1.89961        | 2.16620        | -0.31255        |
|            |       | Présente | <b>- 0.53979</b> | <b>0.51561</b> | <b>1.08435</b> | <b>1.90137</b> | <b>2.16712</b> | <b>-0.31364</b> |
|            | 50    | TPT*     | - 0.54005        | 0.51638        | 1.08591        | 1.90352        | 2.16891        | -0.31620        |
|            |       | SPT*     | - 0.54022        | 0.51668        | 1.08630        | 1.90396        | 2.16934        | -0.31643        |
|            |       | Présente | <b>- 0.54189</b> | <b>0.51925</b> | <b>1.08992</b> | <b>1.90650</b> | <b>2.17080</b> | <b>-0.31806</b> |
| <b>200</b> | 0     | TPT*     | - 0.53854        | 0.51383        | 1.08201        | 1.89988        | 2.16627        | -0.31293        |
|            |       | SPT*     | - 0.53872        | 0.51413        | 1.08239        | 1.90032        | 2.16670        | -0.31316        |
|            |       | Présente | <b>- 0.54018</b> | <b>0.51623</b> | <b>1.08528</b> | <b>1.90221</b> | <b>2.16771</b> | <b>-0.31433</b> |
|            | 50    | TPT*     | - 0.54047        | 0.51718        | 1.08717        | 1.90476        | 2.16981        | -0.31737        |
|            |       | SPT*     | - 0.54067        | 0.51748        | 1.08756        | 1.90520        | 2.17025        | -0.31760        |
|            |       | Présente | <b>- 0.54240</b> | <b>0.52019</b> | <b>1.09143</b> | <b>1.90796</b> | <b>2.17186</b> | <b>-0.31939</b> |
| <b>300</b> | 100   | TPT*     | - 0.54347        | 0.52333        | 1.09766        | 1.91608        | 2.17835        | -0.32977        |
|            |       | SPT*     | - 0.54366        | 0.52366        | 1.09803        | 1.91648        | 2.17875        | -0.33000        |
|            |       | Présente | <b>- 0.54582</b> | <b>0.52749</b> | <b>1.10388</b> | <b>1.92125</b> | <b>2.18185</b> | <b>-0.33355</b> |

\*TPT: Third order shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

\*SPT: Sinusoidal shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

**Tableau V.4** Effet de l'indice de puissance  $k$  et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle en plan  $\bar{\tau}_{xy}$  d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2$ ,  $t=3$ ,  $\beta=1$ ,  $\bar{t}=1$ ).

| $K_w$      | $K_p$ | Théorie  | Céramique      | $k=1$          | $k=2$          | $k=5$          | $k=7$          | Métal          |
|------------|-------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>0</b>   | 0     | TPT*     | 0.67879        | 1.22841        | 1.53078        | 1.97462        | 2.12145        | 0.94544        |
|            |       | SPT*     | 0.67868        | 1.22857        | 1.53099        | 1.97485        | 2.12168        | 0.94532        |
|            |       | Présente | <b>0.67113</b> | <b>1.23943</b> | <b>1.54567</b> | <b>1.98561</b> | <b>2.12870</b> | <b>0.93900</b> |
|            | 50    | TPT*     | 0.67882        | 1.22785        | 1.52983        | 1.97392        | 2.12102        | 0.94550        |
|            |       | SPT*     | 0.67872        | 1.22801        | 1.53004        | 1.97415        | 2.12125        | 0.94538        |
|            |       | Présente | <b>0.67000</b> | <b>1.24139</b> | <b>1.54867</b> | <b>1.98837</b> | <b>2.13068</b> | <b>0.93662</b> |
| <b>200</b> | 0     | TPT*     | 0.67880        | 1.22831        | 1.53062        | 1.97451        | 2.12139        | 0.94545        |
|            |       | SPT*     | 0.67869        | 1.22847        | 1.53083        | 1.97474        | 2.12161        | 0.94533        |
|            |       | Présente | <b>0.67093</b> | <b>1.23976</b> | <b>1.54618</b> | <b>1.98606</b> | <b>2.12902</b> | <b>0.93863</b> |
|            | 50    | TPT*     | 0.67883        | 1.22770        | 1.52957        | 1.97371        | 2.12090        | 0.94552        |
|            |       | SPT*     | 0.67873        | 1.22787        | 1.52978        | 1.97395        | 2.12113        | 0.94540        |
|            |       | Présente | <b>0.66973</b> | <b>1.24189</b> | <b>1.54949</b> | <b>1.98915</b> | <b>2.13126</b> | <b>0.93591</b> |
| <b>300</b> | 100   | TPT*     | 0.67889        | 1.22658        | 1.52746        | 1.97189        | 2.11972        | 0.94572        |
|            |       | SPT*     | 0.67878        | 1.22675        | 1.52766        | 1.97212        | 2.11995        | 0.94559        |
|            |       | Présente | <b>0.66789</b> | <b>1.24583</b> | <b>1.55619</b> | <b>1.99631</b> | <b>2.13664</b> | <b>0.92828</b> |

\*TPT: Third order shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

\*SPT: Sinusoidal shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

**Tableau V.5** Effet de l'indice de puissance  $k$  et les paramètres de fondations élastiques sur la contrainte transversale adimensionnelle  $\bar{\tau}_{xz}$  d'une plaque FGM carrée, ( $\omega=2, t=3, \beta=1, \bar{t}=1$ ).

| $K_w$      | $K_p$ | Théorie  | Céramique       | $k=1$          | $k=2$          | $k=5$          | $k=7$          | Métal           |
|------------|-------|----------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| <b>0</b>   | 0     | TPT*     | -8.65324        | 8.59456        | 9.73805        | 5.76488        | 3.39858        | -9.90360        |
|            |       | SPT*     | -8.92962        | 8.88167        | 10.08127       | 5.91782        | 3.44330        | -10.21999       |
|            |       | Présente | <b>-8.42099</b> | <b>8.35365</b> | <b>9.45022</b> | <b>5.63176</b> | <b>3.35462</b> | <b>-9.63763</b> |
|            | 50    | TPT*     | -8.69556        | 8.64232        | 9.80068        | 5.81330        | 3.43147        | -9.97724        |
|            |       | SPT*     | -8.97330        | 8.93101        | 10.14613       | 5.96802        | 3.47735        | -10.29600       |
|            |       | Présente | <b>-8.46218</b> | <b>8.40009</b> | <b>9.51099</b> | <b>5.67871</b> | <b>3.38652</b> | <b>-9.70928</b> |
| <b>200</b> | 0     | TPT*     | -8.66089        | 8.60276        | 9.74854        | 5.77274        | 3.40387        | -9.91511        |
|            |       | SPT*     | -8.93752        | 8.89014        | 10.09213       | 5.92598        | 3.44878        | -10.23185       |
|            |       | Présente | <b>-8.42844</b> | <b>8.36163</b> | <b>9.46040</b> | <b>5.63938</b> | <b>3.35976</b> | <b>-9.64881</b> |
|            | 50    | TPT*     | -8.70575        | 8.65476        | 9.81761        | 5.82704        | 3.44092        | -9.99943        |
|            |       | SPT*     | -8.98381        | 8.94386        | 10.16366       | 5.98226        | 3.48714        | -10.31890       |
|            |       | Présente | <b>-8.47209</b> | <b>8.41218</b> | <b>9.52742</b> | <b>5.69202</b> | <b>3.39569</b> | <b>-9.73088</b> |
| <b>300</b> | 100   | TPT*     | -8.77461        | 8.75060        | 9.95769        | 5.95263        | 3.53012        | -10.23526       |
|            |       | SPT*     | -9.05488        | 9.04291        | 10.30867       | 6.11239        | 3.57957        | -10.56228       |
|            |       | Présente | <b>-8.53914</b> | <b>8.50537</b> | <b>9.66327</b> | <b>5.81375</b> | <b>3.48230</b> | <b>-9.96036</b> |

\*TPT: Third order shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

\*SPT: Sinusoidal shear deformation theory, (Zenkour et Sobhi 2013-b).

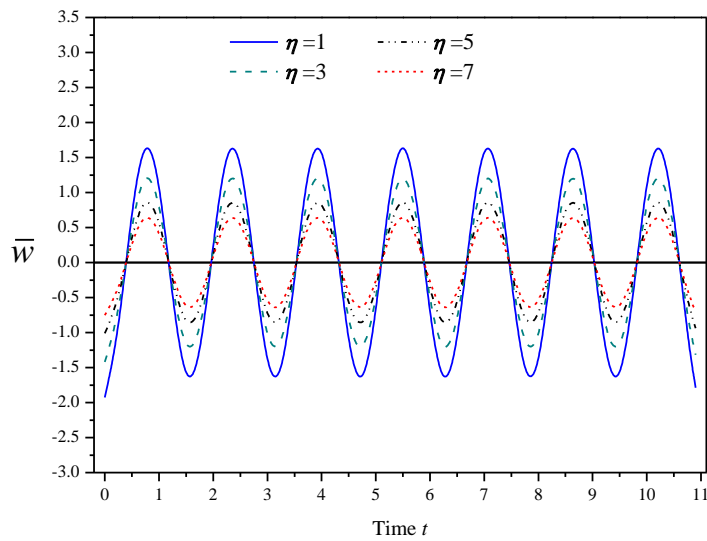
Les tableaux (V.2-5) présentent respectivement l'effet de l'indice de loi de puissance  $k$  et les paramètres de fondations élastiques sur le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), la contrainte longitudinale ( $\bar{\sigma}_x$ ), la contrainte de cisaillement dans le plan ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et la contrainte de cisaillement transversale ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) des plaques FGM reposant sur une fondation élastique.

Les résultats de la présente méthode sont comparés à ceux de Zenkour et sobhy (2013-b) à cinq variables. Ces comparaisons montrent que les résultats de la méthode actuelle sont en excellent accord avec les résultats de Zenkour et sobhy (2013-b). Nous pouvons en conclure que le modèle actuel est non seulement précis, mais aussi efficace et simple avec un nombre de variables plus bas, ce qui permet une utilisation facile avec une économie de temps de calcul.

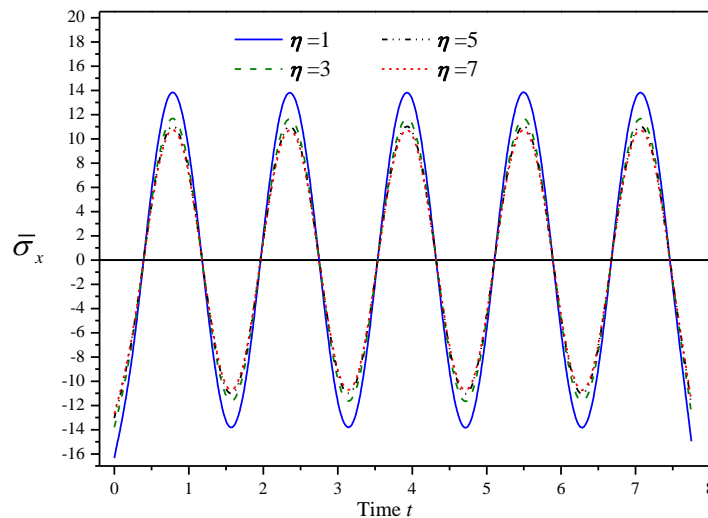
### V.3 Etude paramétrique

Dans cette section, une étude paramétrique est présentée pour étudier l'impact de quelques paramètres sur le comportement thermodynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques. Les résultats sont représentés sur les figures (V.2 -14) en utilisant la présente théorie raffinée de quatre variables développée dans le cadre de cette thèse dans le chapitre précédent.

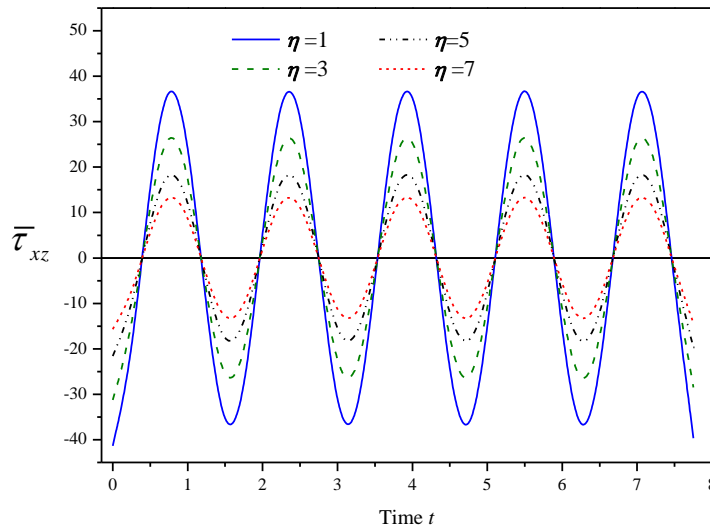
Les figures 2 à 4 illustrent respectivement le déplacement transversal  $\bar{w}$ , la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversale pour différentes valeurs de l'exposant thermique  $\eta$



**Figure V.2** Evolution du déplacement transversal  $\bar{w}$  au cours de temps “t” de la plaque FGM pour différentes valeurs de l'exposant de température  $\eta$  ( $\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )



**Figure V.3** Evolution de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  au cours de temps “t” de la plaque FGM pour différentes valeurs de l'exposant de température  $\eta$  ( $\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )



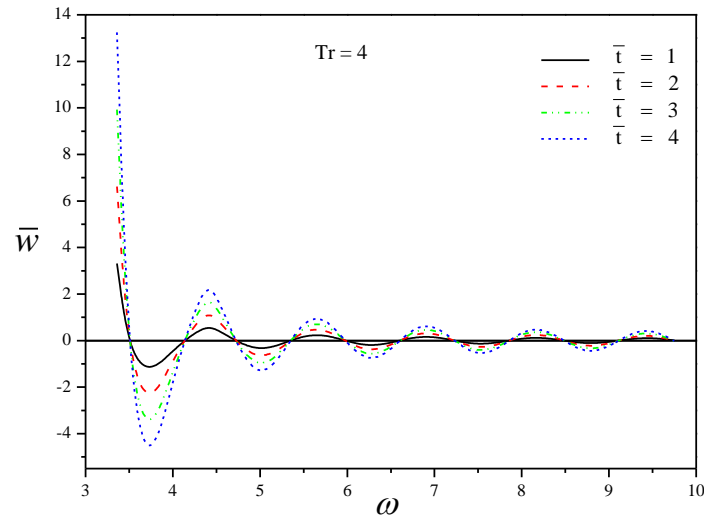
**Figure V.4** Evolution de la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  au cours de temps “t” de la plaque FGM pour différents valeurs de l’exposant de température  $\eta$

$$(\omega = 4, \bar{t} = 2, T^- = 25, T_r = 4, k = 1, K_w = 100, K_p = 10)$$

On voit sur ces figures que l’augmentation de l’exposant de température  $\eta$  conduit à une réduction des valeurs du déplacement transversal et des contraintes (axiale et transversale de cisaillement). Il convient de noter que les contraintes et le déplacement transversal atteignent leurs maxima au moment:  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$

Les figures V.5-7 montre la variation du déplacement transversal  $\bar{w}$ , de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  et de la contrainte transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  respectivement en fonction de la fréquence naturelle  $\omega$  pour différentes valeurs de paramètre arbitraire de température  $\bar{t}$ .



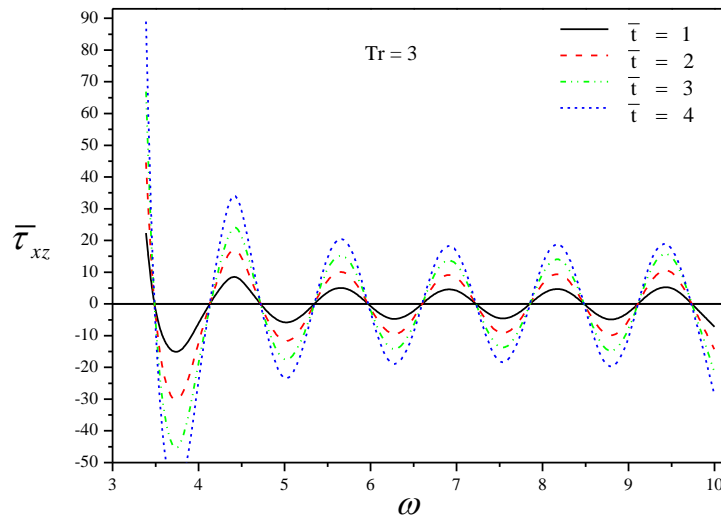


**Figure V.5** Variation du déplacement transversal  $\bar{w}$  en fonction de la fréquence naturelle  $\omega$

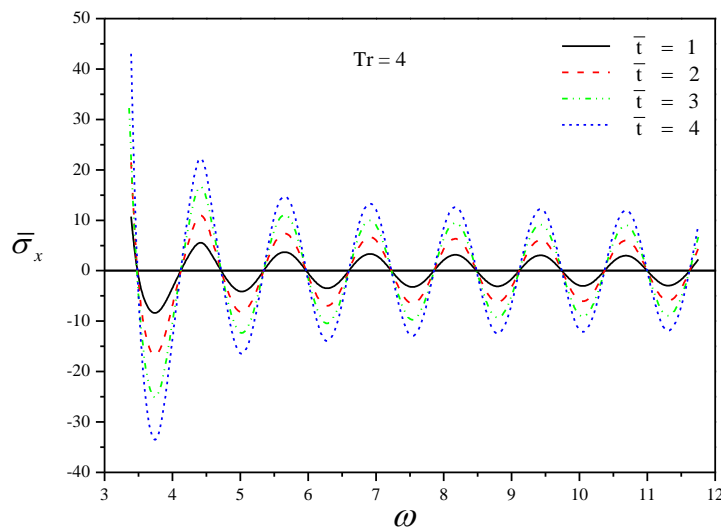
$$(t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10)$$

La figure V.5 montre une nette réduction des valeurs de déplacement transversal  $\bar{w}$  pour une légère augmentation des valeurs de la fréquence naturelle  $\omega$ . Ensuite, à partir d'une valeur de la fréquence naturelle égale à 4, la réduction des valeurs du déplacement transversal est moins rapide avec des valeurs s'approchant de zéro fur et à mesure de l'augmentation de  $\omega$ .

Pour les contraintes, qu'elles soient transversales  $\bar{\tau}_{xz}$  (Fig V.6) ou axiales  $\bar{\sigma}_x$  (Fig V.7), on retrouve la même observation. Sauf que, à partir d'une valeur de la fréquence naturelle  $\omega$  égale à 5, les contraintes conservent une allure sensiblement constante constant avec l'augmentation de  $\omega$ . Pour les trois réponses de la plaque, flèche  $\bar{w}$ , contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et contrainte transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$ , l'augmentation du paramètre arbitraire  $\bar{t}$  augmente cette réponse, quelle que soit la valeur de la fréquence naturelle  $\omega$ .

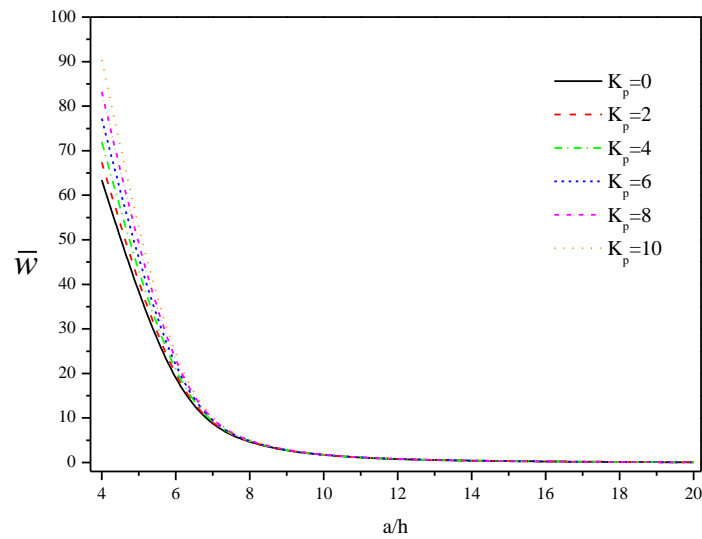


**Figure V.6** Variation de la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  en fonction de la fréquence naturelle  $\omega$  ( $t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )



**Figure V.7** Variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  fonction de la fréquence naturelle  $\omega$  ( $t = 5, \eta = 1, T^- = 25, k = 1, K_w = 100, K_p = 10$ )

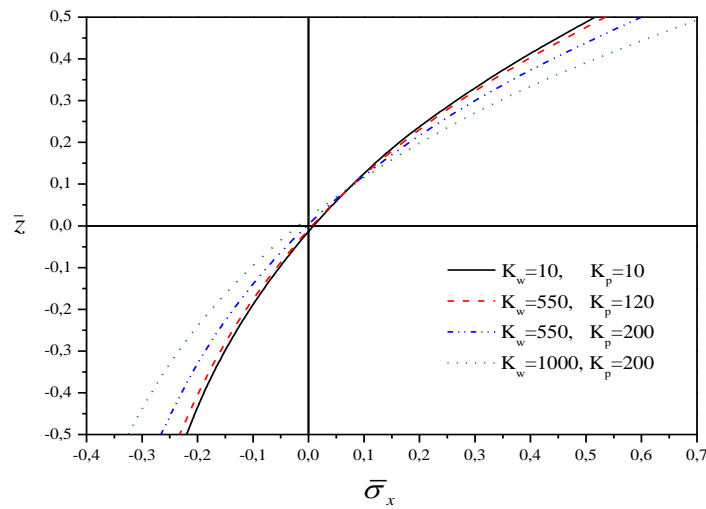
Différentes valeurs du paramètre de Pasternak. A partir de cette figure, on peut constater que l'augmentation des valeurs du rapport  $a/h$  entraîne une réduction du déplacement transversal  $\bar{w}$ . Cette réduction est plus significative pour des valeurs de  $a/h$  inférieures à 10. À partir de cette valeur, le déplacement transversal  $\bar{w}$  devient pratiquement constant. De plus, l'augmentation du paramètre de fondation élastique de Pasternak  $K_p$  entraîne une augmentation du déplacement transversal  $\bar{w}$ .



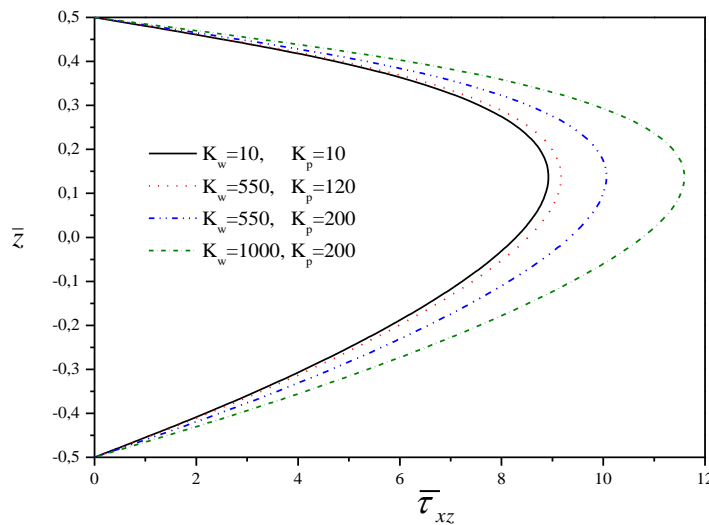
**Figure V.8** Variation du déplacement transversal  $\bar{w}$  de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction du rapport  $a/h$  pour différents valeurs de paramètre de Pasternak ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{t} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2, K_w = 100$ )

La figure V.9 montre la variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque de FGM reposant sur fondations élastiques pour différentes valeurs du paramètre de Winkler  $K_w$ . Comme le montre cette figure, les contraintes de compression maximales se produisent en un point de la surface supérieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface inférieure de la plaque FGM. On peut voir également sur cette figure que la fondation élastique augmente les contraintes axiales maximales.

La variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de paramètres de fondations élastiques est illustrée dans la figure V.10. Il est observé que l'augmentation des paramètres de fondation élastique augmente les contraintes de cisaillement transversales.



**Figure V.9** Variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque FG reposant sur fondation élastique pour différentes valeurs de paramètre de Winkler  
 ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{t} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2$ )



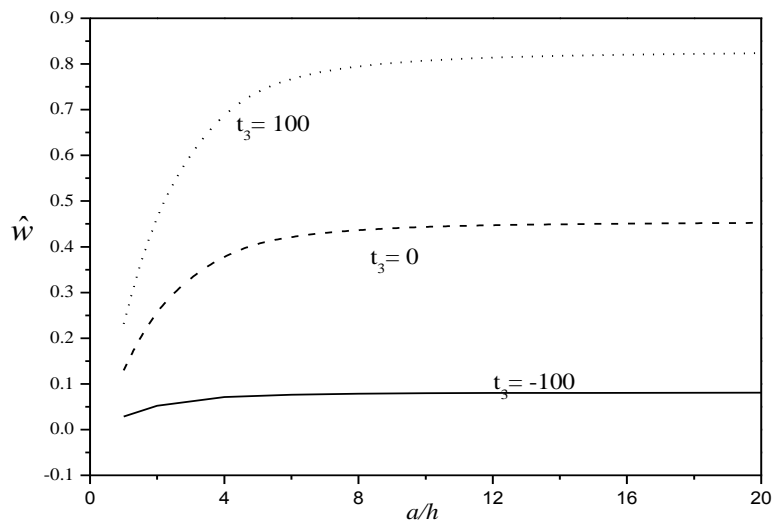
**Figure V.10** Variation de la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque FG pour différentes valeurs de paramètres de fondations élastiques  
 ( $t = 3, \eta = 1, \omega = 2, \bar{t} = 1, T^- = 25, k = 1, T_r = 2$ )

Dans les figures (V-11-14) une autre étude thermodynamique est présentée en utilisant le deuxième champ de distribution de température défini par l'équation (IV.39.a).

Dans la Figure V.11, nous présentons la variation du déplacement transversal  $\hat{w}$  de la plaque FG reposant sur fondations élastiques par rapport au rapport  $a/h$  pour différentes valeurs

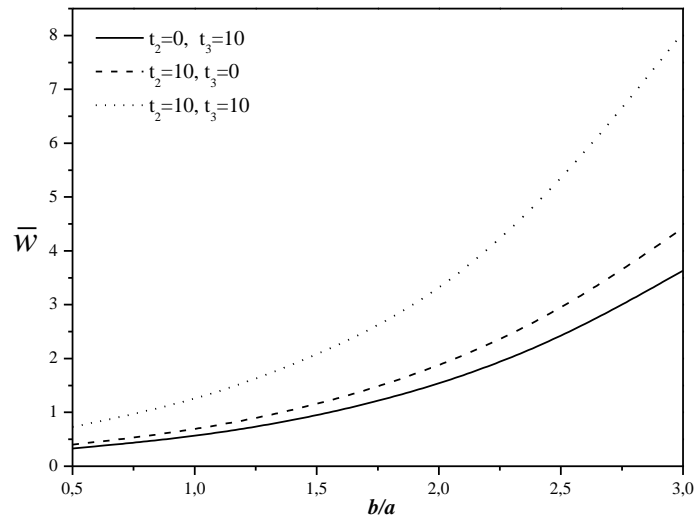
des charges thermiques et sans effet dynamique. Une charge non linéaire de la température sur l'épaisseur de la plaque est retenue avec trois valeurs de  $t_3 = 100, 0$  et  $-100$ .

On constate que l'effet du rapport  $a/h$  est plus claire sur le déplacement transversal  $\hat{w}$  d'une plaque avec distribution thermique uniforme  $t_3 = 100$ , et il a moins d'influence dans le cas de la distribution thermique non-uniforme  $t_3 = -100$ . Mais quand  $t_3 = 0$ , le déplacement transversal prend des valeurs intermédiaires entre la distribution uniforme et la distribution non-uniforme de température. Ce qu'il montre que les plaques FG épaisses et modérément épaisses sont plus sensibles à la distribution thermique uniforme et moins sensible à la distribution non uniforme de la température.



**Figure V.11** Variation de déplacement transversal  $\hat{w}$  de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction de rapport  $a/h$  pour différentes valeurs de chargement thermique (sans l'effet dynamique  $\omega = 0, t_2 = 100$ )

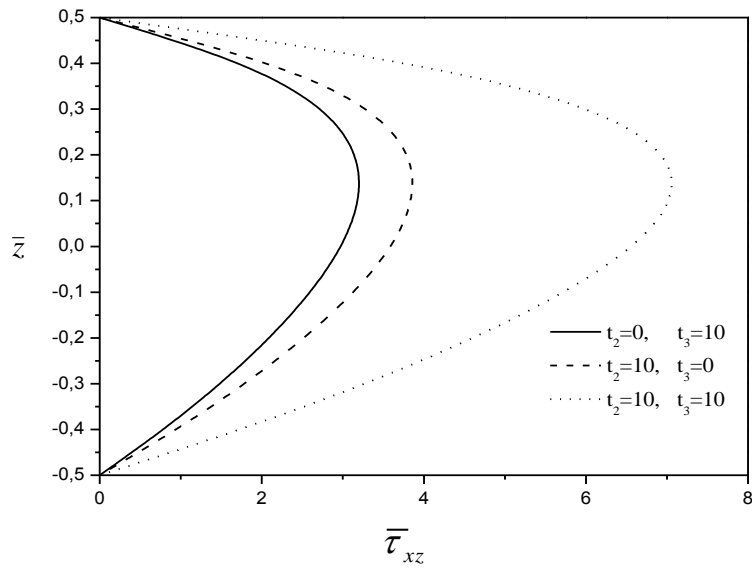
La figure V.12 décrit la variation de la flèche de la plaque FGM reposant sur fondations élastiques par rapport au rapport d'aspect  $b/a$  pour différentes valeurs des charges thermiques (avec l'effet dynamique). D'après cette figure, on voit que l'augmentation du rapport  $b/a$  fait augmenter la flèche de la plaque, quelle que soit la charge thermique. De plus, le cas du chargement thermique uniforme  $t_2 = 10, t_3 = 10$  donne des valeurs plus grandes de déplacement transversal par rapport aux deux autres.



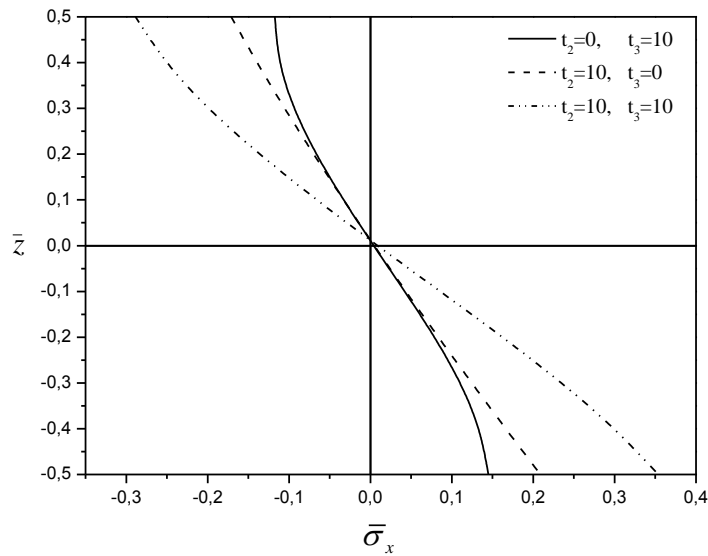
**Figure V.12** Variation de déplacement transversal  $\bar{w}$  de la plaque FG reposant sur fondation élastique en fonction de rapport  $b/a$  pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique).

La figure V.13 montre la variation de la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs des charges thermiques (avec l'effet dynamique). La valeur maximale n'apparaît pas en un point situé dans le plan médian de la plaque et sa magnitude est fortement influencée par la charge thermique.

Nous présentons également dans la figure V.14 la variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur fondations élastiques pour différentes valeurs des charges thermiques (avec l'effet dynamique). Comme le montre cette figure, les contraintes de compression maximales  $\bar{\sigma}_x$  se produisent en un point de la surface supérieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface inférieure des plaques FGM. En outre, cette figure révèle que la variation des contraintes est très sensible à la variation de la charge thermique.



**Figure V.13** Variation de la contrainte transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique)



**Figure V.14** Variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de chargement thermique (avec l'effet dynamique).

#### V.4 Conclusion

L'objectif souligné dans ce chapitre, en premier lieu était de valider et d'éprouver à travers des exemples et des tests traités : la pertinence, l'efficacité et la précision de notre nouveau modèle développé dans le titre de notre travail, ce modèle a démontré son efficacité, à travers les résultats obtenus et largement exposés, sur l'analyse du comportement thermodynamique des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés. La comparaison des résultats obtenus avec ceux de la littérature est très satisfaisante et permet de conclure la validité de notre nouvelle théorie.

En second lieu, une étude paramétrique a été mener afin de souligner l'impact de quelques paramètres qui peuvent influencer le comportement thermodynamique des plaques FG reposant sur fondations élastiques, où nous avons examiné l'effet de l'exposant de température  $\eta$ , les paramètres de fondations élastiques  $K_w, K_p$ , le paramètre arbitraire de la température  $\bar{t}$  et d'autres paramètres, il est avéré que ces paramètres influent significativement la flexion thermodynamique et la distribution des contraintes normales et transversales à travers l'épaisseur des plaques FGM reposant sur fondations élastiques .



Conclusion générale  
et  
PERSPECTIVES

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie (LMH) portant une contribution à l'étude du comportement thermodynamique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) reposant sur fondations élastiques et soumise à des champs de température : harmonique, linéaire, non linéaire, ou combiné.

Nous avons développé une méthode analytique en utilisant une nouvelle théorie d'ordre supérieur avec une fonction de forme hyperbolique permet de décrire une distribution parabolique des contraintes transversales à travers l'épaisseur de la plaque fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée. Les propriétés matérielles sont supposées varier à travers l'épaisseur selon une distribution exponentielle en termes des fractions volumiques des constituants. Comparés aux résultats trouvés dans la littérature, cette théorie a montré son efficacité comme les autres théories d'ordre élevé pour l'étude analytique des plaques FGM épaisses ou modérément épaisses.

La théorie proposée a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontré que les contraintes axiales et transversales aussi bien le déplacement transversal obtenues en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus ou plus) sur la réponse thermodynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques ont en bon accord. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple en termes de formulation mathématiques et de temps de calcul réduit par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé et qu'elle possède moins de variables et moins des équations d'équilibres.

Une étude paramétrique a été faite pour montrer les effets des différents paramètres tels que le rapport d'aspect géométrique de la plaque ( $a/b$ ), l'exposant de la température  $\eta$ , le

---

paramètre arbitraire de température  $\bar{t}$ , les paramètres du fondation élastique  $K_p, K_w$  et d'autres paramètres sur le comportement thermodynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques en utilisant le nouveau modèle de plaque ce qui a permis de tirer les points suivants :

- L'augmentation de l'exposant de température  $\eta$  conduit à une réduction des valeurs du déplacement transversal et des contraintes : axiale et transversale de cisaillement.
- L'augmentation du paramètre arbitraire  $\bar{t}$  augmente : la flèche  $\bar{w}$ , la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$ , quelle que soit la valeur de la fréquence naturelle  $\omega$ .
- L'augmentation des valeurs du rapport  $a/h$  entraîne une réduction du déplacement transversal  $\bar{w}$ . Cette réduction est plus significative pour des valeurs de  $a/h$  inférieures à 10. À partir de cette valeur, le déplacement transversal  $\bar{w}$  devient pratiquement constant.
- L'augmentation des paramètres de fondations élastiques  $K_p, K_w$  entraîne une augmentation du déplacement transversal  $\bar{w}$ , et des contraintes (axiale  $\bar{\sigma}_x$  et transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$ ).
- Les plaques FG épaisses et modérément épaisses sont plus sensibles à la distribution thermique uniforme que les plaques FG minces, et moins sensible dans le cas de la distribution non uniforme de la température.
- L'augmentation du rapport d'aspect  $b/a$  fait augmenter la flèche de la plaque FG, quelle que soit la charge thermique.

En perspective, il est prévu d'élaborer une démarche d'une simulation numérique via l'un des logiciels performants dans le domaine multi-physique tel que l'ABAQUS. Cette simulation peut servir à généraliser la méthode de validation des résultats et donne une autre forme d'outils traitent les différents comportements des plaques FGM notamment le cas thermodynamique. L'effet d'étirement sur le comportement thermodynamique doit être également abordé.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis les chargements de température.

Références  
bibliographiques

## A

- Abdelaziz H.H., Atmane H.A., Mechab I., Boumia L.A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., (2011), “Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory”, *Chin. J. Aeronaut*, 24, 434–448,
- Abrate S., (2008), “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Composites Part B*; 39 (1) 151–158.
- Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”, *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- Adair J.H., Touse S.A. & Melling P.J., (1987), “Chemically Derived Multilayer Ceramics”, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 66(10), 1490-94.
- Ait Sidhoum I., Boutchicha D., Benyoucef S., Tounsi A., (2017), “An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates”, *Steel. Compos. Struct., Int. J.*, 25(6), 735-745.
- Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Bedia E.A.A., (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6, 113-121.
- Akbarzadeh A.H., Abedini A., Chen Z.T., (2015), “Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates”, *Compos. Struct.* 119, 598–609,
- Akavci S., Tanrikulu A., (2015), “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Compos. Part B. Eng.* 83 ,203–215.
- Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M., (2011-a), “Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments”. *Nonlinear Dyn.*,66(3),251–70.
- Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F., (2011-b). “Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells”. *J. Sound. Vib.*,330(7),1432–54.
- Alinia M., Ghannadpour S., (2009), “Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates”, *Compos. Struct.*, 88(13), 354-9.
- Ameur M., Tounsi A., Mechab I., and Adda Bedia E.A., (2011), “A New Trigonometric Shear deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations”, *KSCE J. Civil Eng.*, 15(8),1405-1414.
- Amini M.H., Soleimani M., Rastgoo A., (2009), “Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation”. *Smart. Mater. Struct.* 18(8), 085015.
- Arshad S.H., Naeem M.N., Sultana N., (2007), “Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws”. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J.Mech Eng Sci*, 221(12),1483–95.
- Attia A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R., (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel. Compos. Struct. Int. J.*, 18(1), 187-212.

**B**

- Bachir B.R., Adda Bedia E.A. and Tounsi A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, 48, 547 – 567.
- Bachiri A., Bourada M., Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., (2018), “Thermodynamic effect on the bending response of elastic foundation FG plate by using a novel four variable refined plate theory”, *J. Therm. Stres.*, 41(8), 1042-1062.
- Bachiri A., Mahmoudi A., Bourada M., Benyoucef S., Tounsi A., (2018), “bending and free vibration of imperfect FGM beam resting on elastic foundation”, *Congrès National sur les Energies et Matériaux (CNEM) Naâma, 17-18 Décembre 2018*.
- Bary B., Ben Haha M., Adam E., Montarnal P., (2009), “Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes”. *Cem. Concr. Res.*, 39(10), 902–912.
- Bao G., Wang L., (1995), (1995), “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J. Sol. Struct.* 32(19), 2853–2871.
- Belabed Z., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., Bég O. A., (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Compos. Part B*, 60, 274–283.
- Belarbi, M.O., (2015), “Éléments Finis pour l’Analyse des Structures Sandwichs”, *these de doctorat de 3eme cycle, université de Biskra, Algérie*.
- Beldjelili Y., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smar. Struct. Syst. Int. J.*, 18(4), 755-786
- Bellifa H., Bakora A., Tounsi A., Bousahla A. A., Mahmoud S.R., (2017), “An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 25(3), 257-270.
- Benachour, A., Daouadji T.H., it Atmane A.H., Tounsi A. and Meftah S.A. , (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42, 1386-1394.
- Benahmed A., Houari M.S.A., Benyoucef S., Belakhdar K., Tounsi A., (2017), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”. *Geomech. Eng*, 12(1), 9-34,
- Bennoun M., Houari M.S.A., Tounsi A., (2016), “A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mat. Struct.* 23, 423–431.
- Benveniste Y., (1987), “A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials”. *Mech. Mat.*, 6, 147-157.
- Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Fekrar A., Ait Atmane H., Adda Bedia E.A., (2010), “Bending of thick functionallygraded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Mech. Compos. Mater.*, 46, 425–434 .
- Bessaim A., Houari M.S.A, Tounsi A., Mahmoud S.R., Adda Bedia E.A., (2013), “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *J. Sand. Struc. Mater.*, 15(6) 671–703.

- Bhimaraddi A., Stevens L., (1984), "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates", *ASME J. Appl. Mech.* 51, 195–198.
- Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., (1993). "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *J. Mater. Sci. Let.*, 12 (19), 1516-18.
- Boch P., Chartier T., Huttepain M., (1986), "Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, 69 ( 8), 191- 192.
- Bodaghi M., Saidi A., (2011), "Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation", *Arch. Appl. Mech.*, 81 (6), 765–80.
- Bouafia K., Kaci A., Houari M.S.A., Benzair A., Tounsi A., (2017), "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams". *Smart. Struct. Syst.*, 19(2), 115-126.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A., (2010), "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach", *Comput. Mater. Sci.*, 49(4), 865–70.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A., (2011), "Stability Analysis of Functionally Graded Plates Subject to Thermal Loads", *Advan. Struct. Mater.* 15, DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2 44.
- Bouazza M., Becheri T., A. Boucheta & Benseddiq N., (2016), "Thermal Buckling Analysis Of Nanoplates Based On Nonlocal Elasticity Theory With Four-Unknown Shear Deformation Theory Resting On Winkler-Pasternak Elastic Foundation", *Inter. J. Comput Meth. Eng. Scie. Mech.*, 17(5-6), 362-373.
- Bouazza M., Amara K. and Benseddiq N., (2017), Mechanical Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Using a New Refined Theory. *Jordan Journal of Civil Engineering*, 11(1), 64-79.
- Bouderba B., Houari M.S.A., Tounsi, (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations". *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85 – 104.
- Bouderba B., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2016), "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech. Int. J.*, 58, (3), 397-422.
- Boukhelf F., Bachir B. M., Boukhari A., Tounsi A., Adda Bedia. E.A., (2017), "Static analysis of P-FGM beams resting on the Winkler elastic foundations", *Math. Model. Eng. Prob.*, 4(1), 18-22.
- Bourada M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates". *J. Sandw. Struct. Mater.*, 14, 5–33.
- Bourada M., Kaci A., Houari M.S.A., and Tounsi, A., (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 409-423.
- Bourada F., Amara K., Tounsi A., (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 21, (6), 1287-1306.

Bousahla A.A, Benyoucef S., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2016), “On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion”, *Struct. Eng. Mech. Int. J.*, 60(2), 313-335.

## C

Carrera E., (2001), “Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells”, *Appl. Mech. Revs.* 54, 301-329,

Carrera E. (2002), “Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells”, *Arch. Comput. Meth. Eng.*, 9, 87-140.

Carrera E., (2003), “Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking”. *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10, 215-296.

Carrera E., Ciuffreda A., (2005), “A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems”, *Compos. Struct.* 69, 271-293.

Carrera E., Brischetto S., Robaldo A., (2008), “Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates”, *AIAA J.* 46, 194-203.

Carrera E., Brischetto S., (2008), “A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates”, *Appl. Mech. Revs.*, 62 (1) 010803.

Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M., (2011-a), “Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells”, *Comp. Part B. Eng.*, 42, 123-133.

Carrera E., Brischetto S., Nali P., (2011-b), “Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis”, *Wiley, New York, USA.*

Carrera E., Giunta G., Petrolo M., (2011-c), “Beam Structures: Classical and Advanced Theories”, *Wiley, New York, USA.*

Chakraverty S., Pradhan K., (2014), “Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method”, *Int. J. Appl. Mech.*, 6, (14), 1450043 (37 pages).

Chakraverty S., et Pradhan K., (2014), “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132–56.

Chen C.S., (2005), “Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate”, *Compos. Struct.*, 68(3), 295–302.

Chi. S.h., Chung Y.L., (2003), “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”, *Eng. Fract. Mech.*, 70 (10), 1227–1243.

Chikh A., Tounsi A., Hebali H., Mahmoud S.R., (2017), “Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT”, *Smart. Struct. Syst. Int. J.*, 19(3), 289-297.

Chow T.S., (1971), “On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load”, *Compos. Mat.*, 5, 306-319.



**D**

- Daouadji T. H., Henni A.H., Tounsi A., and Adda Bedia E.A., (2012), “A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates”, *Model. Simul. Eng.*, doi:10.1155/2012/159806.
- Della C.L., Venini P., (2004), “Finite elements for functionally graded Reissner– Mindlin plates”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*,193(9),705–25.
- Demasi L., (2009), “Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations”, *Compos. Struct.* 87, 1-11.
- Demasi L., (2009), “Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories”, *Compos. Struct.* 87, 183-194.
- Demasi L., (2009), “Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories”, *Compos. Struct.* 87, 195-205.
- Demasi L., (2009), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results”, *Compos. Struct.* 88,1-16.
- Demasi L., (2009), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation.: Part II: Layerwise theories”, *Compos. Struct.* 87,12-22.
- Du C., Li Y., Jin X., (2011), “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells”. *Thin-Walled Struct.*,78, 26–36.
- Du C., Li Y., (2013), “Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments”. *Compos. Struct.*,102:164–74.

**E**

- Ebrahimi M.J., Najafizadeh M.M., (2014), “Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells”. *Appl. Math. Model.*, 38(1),308–24.

**F**

- Fahsi A., Tounsi A., Hebali H., Chikh A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R., (2017), “A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Geo. Eng. Int. J.*, 13(3), 385-410.
- Fallah A., Aghdam M.M., , Kargarnovin M.H., (2013), “Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method”, *Arch Appl Mech*, 83(2),177–91.
- Fazzolari F.A., Carrera E., (2013), “Free vibration analysis of sandwich plates with anisotropic face sheets in thermal environment by using the hierarchical trigonometric Ritz formulation”, *Comp. Part B Eng.*, 50, 67-81,
- Fekrar A., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface”, *Meccanica* 49, 795–810.
- Fekrar A., Zidi M., Boumia L., Atmane H.A., Tounsi A., Abbas Bedia E.A., (2013), “Thermal buckling of AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally graded plates based on first order theory”, *Nature & Technology*, 8,12-16.
- Feldman E., Aboudi J., (1997), “Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading”, *Compos. Struct.* 38 (1-4) 29–36.

Ferreira A.J.M., Batra RC., Roque CMC., Qian LF., Martins P.A.L.S., (2005), “Static analysis offunctionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method”. *Compos. Struct.*, 69(4), 449–57.

Foroughi H., Azhari M., (2014), “Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method”, *Meccanica*, 49, 981–993.

Fukushima T., Kuroda S. & Kitahara S., (1990), “Gradient Coatings Formed by Plasma Twin Torches and those Properties”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, p. 145-50.

## G

Ganapathi M., Prakash T., Sundararajan N., (2006), “Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads”. *J. Eng. Mech.*, 132(8),902–5.

Ghannadpour S., Ovesy H., Nassirnia M., (2012), “Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method”, *Comput. Struct.*, 93(19), 108-109.

## H

Hadji L., Atmane H.A., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A., (2011), “Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory”. *Appl. Math. Mech.*, 32, 925–942.

Hebali H., Tounsi A., Houari M.S.A, Bessaim A., Adda Bedia E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”. *J. Eng. Mech. (ASCE)*, 140(2), 374–383.

Hosseini H.S, Damavandi T.H.R, Akhavan H., Omidi M., (2010), “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, *Appl. Math. Model.*, 34(5), 1276–91.

Houari M.S.A, Benyoucef S., Mechab I., Tounsi, A. and Adda bedia, E.A., (2011), “Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plate”, *J. Therm. Stres.*, 34(4), 315-334,

Hu H., Belouettar S., Ferry M.P., Daya E.M., (2008), “Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites”, *Comp. Struct.*, 84 (3) 282-292.

Huang Z.Y., Lu C.F., Chen W.Q., (2008), “Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations”, *Compos. Struct.* 85 (2), 95-104.

## J

Javaheri R, Eslami M.R., (2002-a), “Thermal buckling of functionally graded plates”. *AIAA. J.*, 40(1), 162–9.

Javaheri R, Eslami M.R., (2002-b), “Buckling of Functionally Graded Plates under In-plane Compressive Loading”, *J.Appl. Math. Mech.*, 82 (4), 277–283

Jha D.K., Kant T., Singh R.K., (2013), “A critical review of recent research on functionally graded plates”, *Compos. Struct.* 96, 833–849.

Jin G., Su Z., Shi S., Ye T., Gao S., (2013), “Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions”, *Compos. Struct.*, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>

## K

Kaci A., Bakhtia. K., Hebalia. H., Tounsia. A., (2013), “Mathematical solution for nonlinear cylindrical bending of sigmoid functionally graded plates”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 54( 1), 124–131.

Kant T., Pandya B., (1988), “A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates”, *Compos. Struct.* 9, 215–246.

Kant T., Khare R.K., (1997), “A higher-order facet quadrilateral composite shell element”, *Numer. Meth. Eng. Int. J.*, 40, 4477–4499.

Karama. M, Afaq K.S., Mistou S., (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solid. Struct.*, 40 (6), 1525-1546.

Khelifa Z., Daouadji T.H., Hadji L., Tounsi A., Adda Bedia E.A., (2015), “A New Higher Order Shear Deformation Model of Functionally Graded Beams Based on Neutral Surface Position”, *Trans, Indian. Inst. Met .*, DOI 10.1007/s12666-015-0540-x.

Kiani Y., Bagherizadeh E., Eslami M.R., (2011), “Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)”, *J. Appl. Math. Mech.*, 91(7), 581-593.

Kieback B., Neubrand A., Riedel H., (2003), “Processing techniques for functionally graded materials”, *Mater. Scien. Eng. A.* 362, 81–105.

Kim K.D., Lomboy G.R., Han S.C., (2008), “Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element”, *J. Compos. Mater.*, 42(5),485–511.

Kirchhoff G.R., (1850-a), “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe”, *J. Reine. Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88.

Kirchhoff G.R., (1850-b), “Über die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe”, *Poggendorffs Annalen*, 81, 258–264.

Kitipornchai S., J. Yang, K.M. (2006), “Liew. Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 1075-1095,

Kiyoshi I.C., (2001), “functionally graded materials in the 21<sup>st</sup> century, A Workshop on Trends and Forecasts , *Springer Science Business Media* , New York.

Koizumi M., (1997), “FGM activities in Japan”. *Compos. Part B*, 28 28 (1-2),1– 4.

## L

Lanhe W., (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”, *Compos. Struct.*, 64(2), 211–8.

Lee Y.Y., Zhao X, Liew K.M., (2009), “Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”. *Smart. Mater. Struct.*, 18(3),035007.

- Lee Y.Y., Zhao X., Reddy J.N., (2010). “Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads”. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 199(25-28), 1645–53.
- Li Q, Iu V.P, Kou K.P., (2008), “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates”, *J. Sound. Vib.*, 311(1–2), 498–515.
- Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M., (1977), “A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates”, *ASME J. Appl. Mech.* 44, 669-674.
- Lostec L., (1997), “Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L”, *Thèse Doctorat de l’université de Limoges*.
- Love A.E.H., (1888), “On the small free vibrations and deformations of elastic shells”, *London, Philosophical trans. of the Royal Society*.
- Love A.E.H., (1934), “A treatise on the mathematical theory of elasticity”, *Cambridge University Press*.
- Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”. *Int. J Mech Sci*, 4(3):309–24.
- Lu C.F., Lim C.W., and Chen W.Q., (2009), “Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 16, 576- 584.

## M

- Mahdavian M., (2009), “Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading”, *J. Solid Mech.* 1 (3), 213–225.
- Mahi A., Adda Bedia E.A., Tounsi A., (2014), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.* doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045.
- Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., Benachour A., Adda Bedia E.A, Mahmoud S.R., (2017), “A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, <https://doi.org/10.1177/1099636217727577>.
- Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., Benachour A., Adda Bedia E.A., (2018), “On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation”. *Earth Struc*, 14 (2), 117-128.
- Malekzadeh P., (2009-a), Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos. Struct.*, 89(3), 367–73.
- Malekzadeh P., Atashi M.M., and Karami G., (2009-b), “In-plane free vibration of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties under thermal environment”, *J.Sound Vib.*, 326, 837-851.
- Mantari J.L., Soares C.G., (2012), “Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates”. *Compos. Struct.* 94, 2561- 2575.
- Mantari J.L., Soares C.G., (2013), “A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates”, *Compos. Part B: Eng.* 45, 268 – 281.
- Mantari J.L., (2015), “A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation”. *Mech. Mater.*, 86, 31- 43.

- Matsunaga H., (2009), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos. Struct.* 87, 344-357,
- Meksi R., Benyoucef S., Mahmoudi A., Tounsi A., Adda Bedia E.A, Mahmoud S.R., (2017), "An Analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, , DOI: 10.1177/1099636217698443.
- Meiche N.E, Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E.A., (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Int. J. Mech. Sci.* 53 237 – 247.
- Meksi A., Benyoucef S. , Houari M.S.A., Tounsi A., (2015), "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Struct. Eng. Mech. Int. J.*, 53( 6), 1215-1240.
- Mena R., Tounsi A., Mouaici F., Mechab I., Zidi M., Adda Bedia E.A., (2012), "Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams". *Mech. Advan. Mater. Struc.*, 19, 641–652.
- Menasria A., Bouhadra A., Tounsi A., Bousahla A.A., Mahmoud S.R., (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct. Int. J.*, 25, (2), 157-175.
- Merdaci S., Tounsi A., Houari M.S.A., Mechab I., Hebali H., Benyoucef S., (2011), "Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates". *Arch. Appl. Mech.*, 81, 1507–1522.
- Meziane A. A. M., Abdelaziz. H.H. , and Tounsi A. , (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Mindlin R.D., (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38.
- Mistler R.E., (1973), "High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique", *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854.
- Miyamoto Y., Shiota, I., (1997), "Functionally Graded Materials", *ELSEVIER*.
- Mirzavand B., Eslami M.R., (2008), "Thermoelastic stability analysis of imperfect functionally graded cylindrical shells", *J. Mech. Mater. Struct.*, 3(8),1561–72.
- Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., (1999), "Functionally graded materials : design, processing, and applications", *Springer Science + Business Media, New York, 1st edition 1999*.
- Mohammadi M., Saidi A.R., Jomehzadeh E., (2010), "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Appl. Compos. Mater.* 17(2), 81–93.
- Mori T., Tanaka K., (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta. Metal.* 21, 571-574.
- Morimoto T., Tanigawa Y., (2007), "Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation", *Arch. Appl. Mech.*, 77(9), 653–74.
- Moya J.S., Herencia A.J.S., Requena J., Moreno R., (1992), « Functionally gradient ceramics by sequential slip casting », *Mater. Lets.*, 14 (5-6), 333-35.

## N

- Naeem M.N., Arshad S.H., Sharma C.B., (2010), “The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells”. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, 224(1),43–54.
- Nelson R.B., Lorch D.R., (1974), “A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME J. Appl. Mech.* 41, 177-184.
- Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Roque C.M.C., Cinefra M., Jorge R.M.N., (2012), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Comp. Part B: Eng.* 43, 711-725.
- Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Roque C.M.C., Cinefra M., Jorge R.M.N., (2012), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”. *Compos. Struct.* 94, 1814-1825,
- Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N., (2013), “Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Comp. Part B: Eng.* 44, 657-674.
- Nguyen T.K., Sab K., Bonnet G., (2008), “First-order shear deformation plate models for functionally graded materials”. *Compos. Struct.*, 83(1), 25–36.
- Nguyen D.D., Dao H.B., Pham H.C., (2016), “Nonlinear thermal dynamic response of shear deformable FGM plates on elastic foundations”, *J. Therm. Stres.*, 39(3), 278-297.
- Nguyen D.D., Quang V., Pham D.N., Trinh M.C., (2018), “Nonlinear dynamic response of functionally graded porous plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(4) (2018) 245-259.

## O

- Oktem A.S., Mantari J.L., Soares C.G., (2012), “Static response of functionally graded plates and doubly-curved shells based on a higher order shear deformation theory”, *Eur J Mech-A/Solids*, 36, 163–72.
- Ould Larbi L., Kaci A., Houari M.S.A. & Tounsi A., (2013), “An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams”, *Mech. Bas. Desig. Struct. Mach. Inter. J.*, 41(4), 421-433.

## P

- Pasternak P.L., (1954), “On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants”, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR*, 1–56.
- Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., (2000), “Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions”. *Appl Acoust.*, 61(1),111–29.
- Praveen, G.N., and Reddy, J.N., (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates”, *Inter. J. Solids Struct.*, 35(33), 4457-4476.
- Proner A., (1999). “Revêtement par projection thermique”. *Techniques de l'ingénieur*, M 1645, 3-20.

## R

- Rasheedat M.M., Esther T.T., (2017), “Functionally Graded Materials”, *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, DOI 10.1007/978-3-319-53756-6.
- Reddy J.N., (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”. *J. Appl. Mech.*, 51(4), 745–52.
- Reddy J.N., Wang C., Kitipornchai S., (1999), “Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates”. *Eur J. Mech.*, 18, 185–99.
- Reddy J.N., (2000), “Analysis of functionally graded plates”. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 47, 663-684.
- Reddy J.N., (2004), “Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis”, *CRC Press, Baton Rouge, Florida, USA*.
- Reddy J.N., (2011), “A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates”. *Int. J. Aeros Ligh Struct.* 1, 1-21.
- Reissner E., (1945-a), “Reflection on the theory of elastic plates”. *ASME J. Appl. Mech.* 38, 1453–1464.
- Reissner E., (1945-b), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- Reissner E., (1975), “On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation”, *Int. J. Solid. Struct.*, 11, 569–573.

## S

- Said A., Ameer M., Bousahla A.A., and Tounsi. A., (2014), “A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on winkler–Pasternak elastic foundations”, *Inter. J. Comput. Meth.*, 11(6), 1350098 (22 pages).
- Sarkar P.& Nicholson, P.S., 1996, “Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and application to Ceramics”, *J. Am. Ceram. Soc.*, 79(8), 1987-2002.
- Shahbazzabar A., Arteshyar K., (2018), “Buckling analysis of functionally graded plates partially resting on elastic foundation using the differential quadrature element method”. *Acta Mechanica Sinica*, doi.org/10.1007/s10409-018-0796-6
- Shantaram M.G., Atteshamuddin S.S., (2019), “A New Quasi-3D Model for Functionally Graded Plates”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(2), 367-380.
- Sekkal M., Fahsi B., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2017-a), “A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate” *Steel Compos. Struct.*, *Int. J.*, 25( 4), 389-401.
- Sekkal M., Fahsi B., Tounsi A., Mahmoud S.R., (2017-b), “A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate”, *Struct. Eng. Mech.*, 64(6), 737-749.
- Shen H.S., (2002), “Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments”, *Compos. Sci. Technol.*, (7– 8),977–87.
- Shen H.S., (2003), “Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments”, *Eng. Struct.*, 25(4),487–97.

- Shen H.S., (2004), "Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties", *Int. J. Solids. Struct.*, 41(7),1961–74.
- Shimpi R.P., (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA J.*, 40(1),137-146.
- Shimpi R.P., Patel H.G., (2006), "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory". *J Sou. Vib.*, 296(4), 979-999.
- Shiota I., and Miyamoto Y., "Functionally Grade Materials", *Proceedings of the 4th international symposium on Functionally Graded Materials", October 21-24, (1996).*
- Siboni G., Benveniste, Y., (1991), "A micro-mechanics model for the effective thermomechanical behavior of multiphase composite media". *Mech. Mater.*,11, 107– 122.
- Singha M., Prakash T., Ganapathi M., (2011), "Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load", *Fin. Elem. Anal. Des.*, 47(14), 453–60.
- Sofiyev A.H., Alizada A.N., Akin Ö., Valiyev A., Avcar M., Adiguzel S., (2012), "On the stability of FGM shells subjected to combined loads with different edge conditions and resting on elastic foundations", *Acta. Mech.*, 223, 189–204.
- Steffens H.D., Dvorak M., & Wewel M., (1990), "Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Applications", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 139-43.

## T

- Taj M.G., Chakrabarti A., Sheikh A.H., (2013), "Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, 37 (18), 8484–94.
- Taibi F.Z., S. Benyoucef, A. Tounsi, R. Bachir Bouiadjra, EA. Adda Bedia and SR Mahmoud, (2015) "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations". *J. Sandw. Struct. Mater.*, 17(2), 99–129.
- Talha M., Singh B.N., (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory". *Appl. Math. Model.*, 34, 3991-4011.
- Thai, H.T. et Choi D.H., (2011), "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation", *Compos. Scien. Techno.*, 71, 1850–1858.
- Thai H.T., Thuc P.V., (2012), "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories", *Inter. J. Mech. Scien.*, 62, 57–66.
- Thai H.T., Choi D.H., (2013-a), "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates". *Compos. Struct.*,101,332–40.
- Thai H.T., Kim S.E., (2013-b), "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 99, 172-180.
- Thai H.T., Choi D.H., (2013-c), "Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates", *Fini. Elem. Analy. Desig.*75,50-61.
- Timoshenko S., (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philos. Magaz.*, 41(series 46), 744–746,
- Tornabene F., (2009), "Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution". *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198, 2911–2935.



- Touratier M, (1991), “An efficient standard plate theory”. *Eng. Sci.*, 29(8), 901-916.
- Tounsi A., Houari M.S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A, (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aero. Sci. Tech.* 24, 209–220.
- Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Ferreira A.J.M., (2013), “Radial basis function method applied to doubly-curved laminated composite shells and panels with a General Higher-order Equivalent Single Layer formulation”. *Comp. Part B: Eng.*, 55, 642- 659.
- Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Carrera E., (2014), “Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method”, *Comp. Struct.*, 107, 675 – 697.
- Trabelsi S., Frikha A., Zghal S., Dammak F., (2019), “A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells”, *Eng. Struct.*, 178, 444–459.

## U

- Uflyand Y.S., (1948), “The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates”, *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech*, 12, 287–300.
- Uymaz B, Aydogdu M., (2007), “Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions”. *J. Reinf. Plast. Compos.*, 26(18),1847–63.

## V

- Vel S.S, Batra R.C., (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”. *J. Sound. Vib.*, 272(3–5),703–30.
- Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., (2013-a), “General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels”. *Compos. Struct.*, 95, 639-666.
- Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., (2013-b), “Static analysis of completely doublycurved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories. *Compos. Struct.*, 101, 59-93.
- Valizadeh N., Natarajan S., Gonzalez-Estrada O.A., Rabczuk T., Bui T.Q., Bordas S.P.A., (2013), “NURBS based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter”, *Compos. Struct.*, 99, 309–26,

## W

- Winkler E., (1867), “Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit”, *Dominicus, Prag*.
- Woo J., Meguid S.A., Liew K.M., (2003), “Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells”, *Acta Mech.*, 165(1–2),99–115.
- Woo J., Meguid S.A., Ong L.S., (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, *J. Sound. Vib.*,289(3), 595–611.

**X**

Xiaohui R., and Zhen W., (2018), “A refined sinusoidal model for functionally graded plates subjected to thermomechanical loading”, *J. Compos. Mater.*, DOI:10.1177/0021998318814158

**Y**

Yaghoobi H., Yaghoobi P., (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach”, *Meccanica*, 48(8), 2019–35.

Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S., (2005), “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Tech.* 65, 65–1175.

Yuki M., Murayama T., & Irisawa T., 1991, “Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 203-208.

**Z**

Zenkour A.M., (2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”. *Arch. Appl. Mech.*,77(4):197–214.

Zenkour A.M. and Alghamdi N.A., (2008), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Mater. Sci.*, 43, 2574–258.

Zenkour A.M., M.N.M.Allam, A.F.Radwan, (2013-a), “Bending of cross-ply laminated plates resting on elastic foundations under thermomechanical loading”. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 9, 239–251.

Zenkour A.M. and Sobhy M., (2013-b), “Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Aer. Sci. Tech.*, 29, 7–17.

Zenkour, A.M., (2013-c), “A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates”. *Appl. Math. Model.* 37, 9041– 9051.

Zenkour A.M., (2013-d), “four-unknown shear and normal deformations theory Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple”, *J. Sandw. Struct. Mater.* DOI: 10.1177/1099636213498886

Zhao X., Lee. Y.Y., and Liew K.M., (2009), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct*, 90(2), 161-171.

Zhao X., Liew K.M., (2009), “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*,198(33),2796–811.

Zhao X., Liew K.M., (2011), “An element-free analysis of mechanical and thermal buckling of functionally graded conical shell panels”. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 86(3),269–85.

Zidi M., Tounsi A., Houari M.S.A, Adda Bedia E.A., Bég O.A, (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aer. Sci. Tech.*, 34, 24-34.

- Zine A., Tounsi A., Draiche K., Sekkal M., Mahmoud S.R., (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 26(2), 125-137.
- Zygmuntowicza J., Miazgaa A., Konopkaa K., Kaszuwaraa W., (2016), "Structural and mechanical properties of graded composite Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Ni obtained from slurry of different solid content", *Procedia Structural Integrity*, 1, 305-312.