

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : BENADOUDA Mourad

Intitulé de la thèse

Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement gradué.

Soutenu le :... /... /..... Composition du jury :

BOURADA Mohamed	MCA	UDL SBA	Président
AIT ATMANE Hassen	Pr	UHBC Chlef	Directeur de thèse
TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Co-Directeur de thèse
BENYOUCEF Samir	Pr	UDL SBA	Examineur
HASSAINE DAOUADJI Tahar	Pr	U.Tiaret	Examineur
BENNAI Riadh	MCA	UHBC Chlef	Examineur

Année universitaire 2018-2019

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès, sous la supervision de Monsieur Abdelouahed TOUNSI, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbès.

J'adresse en premier lieu mes plus vifs sentiments de gratitude à mon encadreur, qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

Je tiens aussi à rendre hommage au BOURADA Mohamed à l'UDL de Sidi Bel, pour son intérêt à mon travail. Par conséquent, Je lui exprime mon honneur ainsi que ma gratitude d'être président de jury de ma soutenance.

Je remercie Messieurs BENYOUCEF Samir, HOUARI Mohamed Sid Ahmed, BENNAI Riadh de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je voudrais remercier tous les membres du laboratoire Matériaux et Hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès avec qui j'ai passé d'agréables moments.

A toute ma famille ; mes parents, mes frères et sœurs, à tous mes collègues

Résumé

Dans cette thèse, une théorie de déformation par cisaillement efficace est développée pour l'analyse de propagation d'ondes dans une poutre fonctionnellement gradué. Plus particulièrement, les porosités pouvant survenir dans les matériaux fonctionnels gradué (FGMs) au cours de leur fabrication sont considérées. La théorie de la déformation par cisaillement proposée est une méthode efficace car elle permet de montrer l'effet des composantes de flexion et de cisaillement et ceci est réalisé en divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement. Les propriétés du matériau sont supposées classées dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions volumiques des constituants; mais la règle du mélange est modifiée pour décrire et approcher les propriétés matérielles de poutres graduellement fonctionnelles avec des phases de porosité. Les équations régissant la propagation de l'onde dans la poutre fonctionnellement gradué sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton.

La relation de dispersion analytique de la poutre fonctionnellement gradué est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. Les effets des distributions de la fraction volumique, de la profondeur De la poutre, du nombre d'ondes et de la porosité sur la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement gradué sont discutés en détail. On peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple à prédire les caractéristiques de propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement gradué.

Mots clés: Propagation des ondes; poutre fonctionnellement gradué; porosité; les théories de la poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Abstract

In this these, an efficient shear deformation theory is developed for wave propagation analysis in a functionally graded beam. More particularly, porosities that may occur in Functionally Graded Materials (FGMs) during their manufacture are considered. The proposed shear deformation theory is efficient method because it permits us to show the effect of both bending and shear components and this is carried out by dividing the transverse displacement into the bending and shear parts. Material properties are assumed graded in the thickness direction according to a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents; but the rule of mixture is modified to describe and approximate material properties of the functionally graded beams with porosity phases. The governing equations of the wave propagation in the functionally graded beam are derived by employing the Hamilton's principle. The analytical dispersion relation of the functionally graded beam is obtained by solving an eigenvalue problem. The effects of the volume fraction distributions, the depth of beam, the number of wave and the porosity on wave propagation in functionally graded beam are discussed in details. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the wave propagation characteristics in the functionally graded beam.

Keywords: Wave propagation; Functionally Graded Beam; porosity; higher-order shear deformation beam theories.

ملخص

في هذه الأطروحة، تم تطوير نظرية تشوه القص الفعالة لتحليل انتشار الموجات في حزمة متدرجة وظيفياً. وبشكل

أثناء تصنيعها. نظرية تشوه القص المقترح FGM النظر في المسامية التي قد تحدث في المواد الوظيفية المتدرجة

هي طريقة فعالة لأنها تظهر تأثير مكونات الثني والقص ويتم ذلك عن طريق قسمة الإزاحة العرضية إلى أجزاء

الثني والقص. من المفترض أن يتم ترتيب خصائص المادة في اتجاه السمك وفقاً لتوزيع بسيط لقوة الطاقة من حيث

الكسور الحجرية للمكونات ؛ ولكن يتم تعديل قاعدة الخليط لوصف ونهج خصائص المواد للحزم الوظيفية بالتدرج

مع مراحل المسامية. يتم اشتقاق المعادلات التي تحكم انتشار الموجة في الحزمة المتدرجة وظيفياً باستخدام مبدأ

هاملتون.

يتم الحصول على علاقة التشتت التحليلي للحزمة المتدرجة وظيفياً عن طريق حل مشكلة ذات قيمة ذاتية. وتناقش

بالتفصيل آثار توزيعات الكسر بالحجم ، وعمق الحزمة ، ورقم الموجة ، والمسامية على انتشار الموجة في الحزمة

المتدرجة وظيفياً. يمكن الاستنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فحسب ، بل هي بسيطة أيضاً في التنبؤ بخصائص

انتشار الموجات في الحزمة المتدرجة وظيفياً.

كلمات البحث: انتشار الموجة شعاع متدرج وظيفياً ؛ المسامية. نظريات القص تشوه من رتبة أعلى.

Sommaire

Sommaire

Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xii
 Introduction generale	 1
Chapitre I : Effet de la propagation d'ondes dans les milieux solides	
I.1. Introduction	6
I.2. Différents Types D'ondes	7
I.2.1. Ondes Acoustiques.....	7
• Définition	7
• Equation générale des ondes acoustiques.....	7
• Domaines D'applications des Ondes Acoustiques	8
- Acoustique Musicale	8
- Acoustique Sous-Marine	8
I.2.2. Ondes élastiques (l'élastodynamique linéaire).....	9
• Définition	9
• Equation Général Des Ondes Elastiques.....	9
• Domaines D'applications des Ondes Elastiques	10
- Géophysique	10
- Contrôle Non Destructif.....	10
• <i>Les ultrasons</i>	11
➤ Historique	11
➤ Définitions des ondes ultrasonore	11
➤ Principes de base	12
➤ Différents types d'ondes	13
➤ Différents mouvements d'ondes.	15
➤ Paramètres de l'onde ultrasonore	15
➤ Apport des ultrasons pour caractériser les FGM	19
I.2.3. Ondes Electromagnétiques.....	20
• Définition	20
• Equation Générale Des Ondes Electromagnétiques	20
• Domaines D'applications Des ondes Eléctromagnetiques	21
- Furtivité Radar.....	21
- Antennes.....	21
- Optique	21
I.2.4. Ondes De Gravité	22
• Définition	22
• Equation De La Houle (L'onde De Gravité)	22
I.2.5. Propagation des ondes guidées	23
I.3. Equation générale de la propagation d'ondes élastique	24
I.3.1. Introduction	24

I.3.2. Formulation de L'équation Générale De La Propagation De L'onde Elastique Dans Les milieux Isotropes.....	25
I.4. Analyse Mathématique De L'équation De La Propagation Des Ondes Elastiques	31
I.4.1. Régime Harmonique	31
I.4.2. Solution Exacte De L'équation De La Propagation d'onde.....	32
• Cas 1D Formule De D'Alembert	32
• Cas 3D Equation D'onde Au Second Membre	32
- Introduction.....	32
- Application de la transformer de Fourier en 3D	33
I.5. Analyse Numérique de l'équation de la propagation des ondes.....	35
I.6. Paramètres de propagation des ondes :	36
I.6.1. Vitesse de propagation	36
I.6.2. Vitesse de phase.....	37
I.6.3. Vitesse de groupe :	38
I.7. Conclusion	39

Chapitre II : Présentation du matériau d'étude

II.1. Généralité sur matériaux fonctionnellement graduée.....	40
II.1.1. Introduction :	40
II.1.2. Définition des FGM :.....	40
II.1.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	42
II.1.4. Domaines d'application des matériaux FGM.....	44
❖ L'industrie aérospatiale	45
❖ L'industrie automobile	46
❖ Biomédical.....	46
❖ Défense	46
❖ Énergie.....	46
❖ Électrique / Électronique	47
❖ Marine.....	47
❖ Optoélectronique	47
❖ Sport.....	47
❖ Autres.....	47
II.1.5. Procédés de fabrication des matériaux FGMs :	48
❖ Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :	48
❖ Compaction sèche des Poudres :	49
❖ Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :	50
❖ Frittage et Infiltration :	50

❖ Dépôt par électrophorèse :	50
❖ Projection plasma :	51
❖ Implantation ionique :	51
II.1.6. Les types de FGM	51
II.1.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM :	53
II.1.8. Propriétés matérielles de la poutre FGM.....	54
❖ La fraction volumique P-FGM	54
❖ La fraction volumique S-FGM	56
II.1.9. Avantages et inconvénients des FGMs :	57
❖ Avantages de la FGM :	57
❖ Inconvénients de la FGM :	57
II.2. Conclusion	58

Chapitre III : Eléments de modélisation d'une poutre FGM

III.1. Introduction :	59
III.2. Les modèles classiques :	60
III.2.1. Premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres	60
❖ Principe de Saint venant:	60
❖ Principe de Navier Bernoulli généralisé :	60
III.3. Différents théories conventionnelles	62
III.3.1. La théorie classique des poutres :	62
III.3.2. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (Timoshenko):.....	63
III.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevée (HSDT) :	65
III.4. Différents théories raffinées	68
III.4.1. Formulation théorique	69
❖ Configuration géométrique	69
❖ La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT)	69
❖ La théorie d'ordre élevé à deux variables	70
✓Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables	71
✓Cinématique et équations constitutives	72
III.4.2. Champs de déformations	72
III.5. Principe d'Hamilton	73

III.6.	Equations constitutives en 3 D	74
III.6.1.	Tenseur des contraintes	74
III.6.2.	Tenseur des déformations	74
III.6.3.	Matrice de rigidité	75
III.6.4.	Matrice de flexibilité ou souplesse	75
III.7.	Loi de Hooke généralisée.....	76
III.8.	Matériaux anisotropes	78
III.8.1.	Introduction	78
III.8.2.	Matériau monoclinique	78
III.8.3.	Matériau orthotrope.....	80
III.8.4.	Matériau unidirectionnel : (transversalement isotrope).....	80
III.8.5.	Matériaux isotropes	81
III.9.	Conclusion.....	82

Chapitre IV : Etude Analytique de la propagation des ondes dans les poutres imparfaites

IV.1.	Introduction.....	83
IV.2.	Description d'un milieu poreux	84
IV.2.1.	Généralité :.....	84
IV.2.2.	Hypothèses sur le milieu poreux.....	87
➤	Continuité des phases	87
➤	Homogénéité.....	87
➤	Grande longueur d'onde	87
➤	Isotropie.....	87
IV.2.3.	Paramètres décrivant le milieu poreux	88
➤	Porosité α	88
➤	Tortuosité haute fréquence α_∞	89
➤	Facteur d'inertie α_0 (tortuosité basse fréquence).....	90
➤	Tortuosité thermique α_0	90
➤	Résistivité au passage du fluide σ	91
IV.2.4.	La porosité dans les matériaux composites	91
IV.2.5.	Effet de porosité sur le comportement statique et dynamique d'un matériau FGM	93
IV.2.6.	Présentation des différentes ondes se propageant dans un milieu poreux,	95

➤ Les ondes volumiques.....	95
➤ L'onde superficielle de Rayleigh	96
➤ Propagation d'ondes en milieu poreux	97
IV.3. Étude analytique d'une poutre FGM	98
IV.3.1. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une poutre FGM avec porosité	98
IV.3.2. Équations fondamentales.....	100
➤ Hypothèses de base et équations constitutives.....	100
➤ Équations de gouvernance :	101
IV.3.3. Relations de dispersion	103
IV.4. Conclusion :.....	105
Chapitre V : Discussion des résultats et étude paramétrique	
V.1. Introduction :.....	106
V.2. Résultats numériques et discussion	106
V.3. Propagation d'ondes dans les poutres FG :.....	106
V.3.1. Poutre parfait :.....	106
V.3.2. Poutre imparfait :	119
V.4. Conclusion.....	131
Conclusion générale.....	132
Références bibliographiques.....	134

Liste des Figures

Chapitre I

Figure I-1 : catégories d'onde acoustique.....	11
Figure I -2: Caractéristiques principales des ondes acoustiques.....	12
Figure I-3: schématisation d'un milieu élastique.....	13
Figure I-4: direction de propagation d'onde.....	14
Figure I -5: longueur d'onde.....	14
Figure I-6: Direction de vibration.....	14
Figure I-7: onde plane.....	15
Figure I-8: onde sphérique.....	15
Figure I-9: Comportement des ondes sonores incidentes à une interface.....	19
Figure I -10: Schématisme de la propagation des ondes élastiques dans les solides isotropes Ces deux représentations sont équivalentes pour le cas isotrope, elles ne le sont pas pour un solide anisotrope.....	30
Figure I -11: Schématisme D'un Solide Pour La Présentation Du Solution De Kirchhoff.....	33
Figure I -12: Vitesse de propagation d'une onde monochromatique.....	37
Figure I -13: propagation d'une onde le long d'une corde tendue.....	37
Figure I -14: a)Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe [Ait yahyia ,S .2015].....	39

Chapitre II

Figure II-1: Variation continue de la microstructure [Hirai T, 1996].....	42
Figure II-2: Les principaux domaines d'application des FGM.....	45
Figure II-3: Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande.....	49
Figure II-4: Géométrie d'une poutre FGM.....	54
Figure II-5: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM [Bao. G, et Wang. L. 1995,].....	55
Figure II-6: Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM[Delale. F, et Erdogan. F 1983].....	56
Figure II-7: Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM. [Delale. F, et Erdogan. F 1983,].....	56

Chapitre III

Figure III-1 : Schéma de principe de la théorie classique des poutres.....	62
Figure III-2 : Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).	64
Figure III-3 : La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.....	65
Figure III-4 : Illustration de la poutre d'ordre élevé.....	66
Figure III-5: La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé ...	67
Figure III-6: Géométrie de poutre composite.....	69
Figure III-7: Symétrie par rapport au plan X1-X2.....	78
Figure III-8: Matériau composite unidirectionnel.....	81

Chapitre IV

Figure IV 1: definitions de la matrice et des différentes porosités a l'échelle microscopique, d'après coussy [coussy o ,1991].	85
Figure IV 2: les différentes échelles spatiales du milieu poreux, d'après dormieux et bourgeois [dormieux , l et bourgeois e,2002].	85
Figure IV 3: presentation des différentes phases du milieu poreux, d'après coussy [coussy .o ,1991].	86
Figure IV 4: schéma des différentes porosités.	88
Figure IV 5: variation de norme et de direction de la vitesse d'un fluide inclus dans un pore.	90
Figure IV 6: diminution du cisaillement inter laminaire en fonction du taux de porosité [p. olivier et al, 1995].	92
Figure IV 7 : a. modules longitudinal et transversal en fonction du taux de porosité (composite a),	93
Figure IV 8: ondes volumiques, d'après graff [gra75]. ondes volumiques, d'après graff [gra75].	95
Figure IV 9: onde de Rayleigh, d'après graff [gra75]. – onde de Rayleigh, d'après graff [gra75].	96
Figure IV 10: coordonnées et géométrie de la poutre fonctionnellement gradue	98

Chapitre V

Figure V -1: les courbes de dispersion des différentes poutres en fgm parfait.	108
Figure V- 2: les courbes de la vitesse de phase des différentes poutres en fgm parfait.	110
Figure V- 3: les courbes de la vitesse groupe des différentes poutres en fgm parfait,	112
Figure V -4: les courbes de dispersion des différentes poutres en fgm parfait.	114
Figure V- 5: les courbes de la vitesse de phase dans la poutre fg parfait	116
Figure V- 6: les courbes de la vitesse de groupe dans la poutre fg parfait	118
Figure V -7: les courbes de fréquence des poutres fonctionnellement graduées imparfaits en fonction l'indice de loi de puissance	120
Figure V- 8: les courbes de la vitesse de phase des poutres fonctionnellement graduées imparfaits en fonction l'indice de loi de puissance	121
Figure V -9 : les courbes de la vitesse de groupe des poutres fonctionnellement graduées imparfaits en fonction l'indice de loi de puissance	123
Figure V -10: influence de la porosité sur la fréquence de la poutre fg imparfait pour différentes nombres d'ondes	125
Figure V -11: influence de la porosité sur la vitesse de phase de la poutre fg imparfait pour différentes nombres d'ondes	126
Figure V- 12: influence de la porosité sur la fréquence de la poutre fg imparfait pour différentes nombres l'indice de loi de puissance	129

Liste des Tableaux

Chapitre II

Tableau II-2 : comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique 41

Chapitre III

Tableau III-1 : Les théories des poutres..... 59

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. L'industrie moderne dans la mécanique de construction, l'aéronautique, le génie civil et plus généralement le domaine des transports sont à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique. Ces matériaux dite matériaux fonctionnellement graduée.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : Functionally Graded Materials) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc. Typiquement, les FGMs sont constituées d'un mélange de céramiques et d'une combinaison de différents métaux (Ait Amar Meziane et al., 2014, Ahouel et al., 2016, Barati et Shahverdi 2016). L'analyse des structures FGMS a connu un essor avec l'apparition

des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis qui est la méthode la plus répandue dans le domaine de calcul en site industriel. Parmi les phénomènes physiques qui agissent sur les structures pendant leur durée de vie le phénomène des vibrations et les conditions d'environnement.

Au cours des dernières années, il y a eu des rapports de recherche considérables sur le comportement mécanique, flambage, vibration libre, etc., sur les éléments structuraux des FGM. De nombreuses études sur les structures de la FGM ont été étudiées dans la littérature (Bouderba et al., 2013, Fekrar et al., 2014, Bousahla et al., 2014, Hebali et al. 2014, Hamidi et al., 2015, Meradjah et al. al., 2015, Larbi Chaht et al., 2015, Bounouara et autres 2016, Hebali et al., 2016, Chikh et al., 2016, Laoufi et autres, 2016, El-Haina et al. et al., 2017, Menasria et al., 2017, Meksi et al., 2017). Bourada *et al.* [Bourada. 2015] donnent une nouvelle théorie simple de déformations de cisaillement pour les poutres à gradient de propriétés. Carrera *et al.* [Carrera. 2010] étudient le problème de la réponse statique des plaques et coques multicouches en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Kiani *et al.* [Kiani. 2011] ont analysé le comportement statique et dynamique d'un panneau en FGM doublement incurvée reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Al-Basyouni *et al.* [Al-Basyouni. 2015] ont analysé la flexion et la vibration des micro-poutres à gradient de propriétés basées sur la théorie de contrainte doublée modifiée et la position de la surface neutre. Mahi *et al.* [Mahi. 2015] ont présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour la flexion et la vibration libre des plaques isotropes, en gradient de propriétés, sandwich et en composites stratifiées. Cinefra *et al.* [Cinefra. 2012] ont présenté un modèle raffiné basé sur la formulation unifiée du Carrera (CUF) pour l'analyse statique des plaques et coques en matériau à gradient de propriété (FGM), soumis à des charges mécaniques. Neves *et al.* [Neves. 2011] ont présenté une étude utilisant la méthode de collocation de fonction de base radiale pour analyser les déformations statiques des plaques à gradient de propriétés en utilisant une formulation de déformation de cisaillement sinusoïdale. Ravikiran *et al.* [Ravikiran. 2008] ont étudié le comportement statique des poutres à gradient de propriétés (FGM) métal-céramique à température ambiante. Neves *et al.* [Neves. 2012a] ont présenté une théorie hyperbolique originale de déformation de cisaillement sinusoïdale pour la flexion et la vibration libre des plaques à gradient de propriétés, la théorie prit en considération les déformations à travers l'épaisseur Hadji et al. [Hadji. 2015] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement exponentielle raffiné pour l'analyse de la vibration libre des poutres en FGM avec porosités. Bennoun et al. [Bennoun. 2016] donnent une nouvelle théorie raffinée de cinq variables pour l'analyse des vibrations des plaques sandwich à gradient de propriétés. Bresse (1859), Rayleigh (1880) et Timochenko (1921) ont été les premiers à inclure des effets raffinés tels que l'inertie rotatoire et la déformation par cisaillement dans la théorie des poutres. Sankar (2001) a présenté une solution d'élasticité pour la flexion des poutres à gradient fonctionnel en supposant que le module de Young de la poutre varie de façon exponentielle à travers l'épaisseur. Le coefficient de Poisson était considéré comme

constant, tandis que le module de Young était censé changer comme une fonction exponentielle. En utilisant la fonction de contrainte d'Airy, Zhong et Yu (2007) ont développé une solution analytique pour les poutres en porte-à-faux soumises à divers types de chargements mécaniques. Kadoli et al. (2008) ont étudié la réponse en flexion des poutres FG en utilisant une déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une méthode numérique.

Ould Larbi et al. (2013) ont présenté une théorie efficace de la poutre de déformation par cisaillement basée sur une position de surface neutre pour la flexion et la vibration libre des poutres FG. De même, Bourada et al. (2015) ont utilisé le concept de la position de surface neutre pour développer une théorie de poutre trigonométrique d'ordre supérieur simple et raffinée pour le comportement de flexion et de vibration des poutres FG.

Yaghoobi et Torabi (2013a) ont étudié la vibration post-flambage et non linéaire des poutres FG imparfaits. Yaghoobi et Torabi (2013b) ont examiné analytiquement la vibration de grande amplitude et le post-flambage des poutres FG reposant sur des fondations élastiques non linéaires. Yaghoobi et al. (2014) ont également étudié la réponse aux vibrations libres post-flambage et non linéaire des poutres FG reposant sur des fondations élastiques non linéaires sous chargement thermomécanique en utilisant la méthode d'itération variationnelle (VIM). Ait Atmane et al. (2015) ont étudié un modèle de déplacement par cisaillement computationnel pour l'analyse vibratoire des poutres fonctionnels gradue avec des porosités. Beldjelili et al. (2016) ont analysé la réponse de flexion hygro-thermo-mécanique des plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie des plaques trigonométriques à quatre variables.

La propagation des ondes élastiques est un domaine très vaste et d'un point de vue recherche il est très riche. Plusieurs thèmes de recherches peuvent être rencontrés tels que la modélisation d'un très grand nombre de phénomènes physiques (acoustiques, électromagnétiques, élastodynamique et même vibratoire) pour lesquels l'équation des ondes est un problème type.

Les études de propagation des ondes sont également importantes pour comprendre les caractéristiques dynamiques de la structure des FGM à des fréquences plus élevées en raison de leurs diverses applications dans le monde réel. La surveillance de la santé structurelle ou la détection des dommages est l'une de ces applications importantes. Comme la propagation des ondes traiter des fréquences plus élevées, des ondes de diagnostic peut être employées pour prédire la présence de défauts même minuscules, qui se produisent au début de l'endommagement et les propagent jusqu'à l'échec de la structure de la FGM. Dans de nombreuses structures d'aéronefs, les vibrations et les bruits indésirables transmettent de la source aux autres parties sous forme de propagation d'ondes, ce qui nécessite un contrôle ou une réduction, ce qui constitue une application importante des études de propagation des ondes. L'étude de la propagation des ondes dans les structures FGM a également reçu beaucoup d'attention de la part de divers chercheurs. Chen et al. (2007) ont étudié le comportement de dispersion des ondes dans des plaques à gradient fonctionnel avec des

propriétés de matériau variant dans la direction de l'épaisseur. Han et Liu (2002) ont étudié les ondes SH dans les plaques FG, où la variation de la propriété du matériau a été supposée être une fonction quadratique par morceaux dans la direction de l'épaisseur. Han et al. (2001) ont proposé une méthode analytico-numérique pour analyser les caractéristiques de l'onde dans les cylindres FG. Han et al. (2002) ont également proposé une méthode numérique pour étudier l'onde transitoire dans les plaques FG excitées par les charges d'impact. Sun et Luo (2011a) ont également étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique des plaques rectangulaires fonctionnelles à gradient fonctionnel avec des supports serrés complétés sous charge impulsive. Considérant les effets thermiques et les propriétés des matériaux dépendant de la température, Sun et Luo (2011b) ont étudié la propagation d'une plaque à gradient fonctionnel infini en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur

Cependant, dans la fabrication de FGM, des micro-vides ou des porosités peuvent se produire à l'intérieur des matériaux pendant le processus de frittage. Cela est dû à la grande différence de température de solidification des différents constituants matériels (Zhu et al., 2001). Wattanasakulpong et al. (2012) ont également abordé la question des porosités dans les échantillons de FGM latéraux fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures de FGM soumises à des chargements dynamiques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont étudié les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des poutres FG retenues élastiquement et présentant des porosités. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation des ondes afin de comparer différentes théories de cisaillement et la solution de porosités dans les plaques FG. Boukhari et al. (2016) a introduit une théorie de déformation par cisaillement efficace pour la propagation d'ondes de plaques matérielles graduellement fonctionnelles.

Il y'a plusieurs études sur les matériaux FGM qui sont donné par des chercheurs dans la littérature mais peu d'études traitent la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduées avec des porosités. Donc l'objectif de ce travail est d'étudier l'influence de nombreux paramètres sur la propagation des ondes d'une poutre FGM, poreuses, en utilisant une théorie raffinée. Les champs de déplacement des théories proposées sont choisis en fonction d'une variation cubique des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Les influences de l'indice de fraction volumique, de la profondeur de la fraction volumique de la poutre et de la porosité sur la dispersion et la vitesse de phase de la propagation de l'onde dans la poutre FG sont clairement discutées.

Le présent travail de thèse est organisé en cinq chapitres:

Le premier chapitre est consacré à une description générale du phénomène de la propagation des ondes élastiques dans les matériaux FGMS ; nous citons les différents types et équations générales de la propagation d'onde dans le milieu élastique et ainsi une analyse Mathématique

et numérique et des paramètres de la propagation des ondes telles que la vitesse, la vitesse de phase, vitesse de groupe doit être cité.

Dans le deuxième chapitre, une descriptive générale sur matériau d'étude à gradient de propriété FGM et les propriétés matérielles de ce matériau suivant l'épaisseur de la poutre et en fin des avantages et inconvénients des matériaux FGMs doit être cité.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les différentes théories pour l'analyse et la modélisation d'une poutre et une définition simple sur le principe d'Hamilton.

Dans le quatrième chapitre IV, pour la première partie nous avons donné une description d'un milieu poreux et aussi nous avons cité la propagation des différentes ondes dans un milieu poreux, et pour la deuxième partie on va procéder à une étude analytique et l'analyse de la vibration libre et de la propagation des ondes dans une poutre fonctionnellement graduées FGM en appliquant théorie de déformation de cisaillement du 3ème ordre TSDT.

Le dernier chapitre est consacré une discussion des résultats pour vérifier l'exactitude de la présente théorie TSDT. En plus, une étude paramétrique sera faite pour étudier les différents facteurs mis en jeu, tel que la porosité, nombre de propagation d'onde, l'inertie de la poutre et l'indice de loi de puissance.

Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I

Effet de la propagation d'ondes dans les milieux solides

I.1. Introduction

La propagation d'onde de toutes natures est l'un des phénomènes physiques les plus simples et les plus usuels auxquels nous sommes confrontés dans la vie courante (sons, vibrations, vagues, télécommunications, radar) et même à l'échelle de l'univers (ondes électromagnétiques, de gravité) et ainsi à celui de l'atome (émission, spontanée ou stimulée, interférences entre particules), ce sont l'émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen privilégié de connaissance du monde qui nous entoure. L'étude revient à la simulation numérique des phénomènes de propagation représentant donc une activité très répandue dans les divers domaines de la physique et de l'art de l'ingénieur, la variété et la complexité des problèmes posés, leur intérêt scientifique et industriel.

L'étude de la propagation d'ondes intéresse différents domaines liés au génie civil : génie parasismique, isolation vibratoire, contrôle non destructif, etc. Les problèmes de propagation d'ondes sont caractérisés par différents phénomènes [Bourbié T et al, 1986, Eringen A.C et al ,1975] : dispersion, diffraction, amortissement, conversions de type d'ondes, etc. Toutes ces caractéristiques sont rarement accessibles directement par l'expérience. Il est généralement nécessaire de recourir à des expérimentations modèles (matériaux modèles, essais à échelle réduite [Chazelas J.-L et al, 2003, Semblat J.-F et al ,1998], etc.) ou d'utiliser le calcul numérique et/ou des méthodes inverses [Bui H.D , 1993, Chammas R et al ,2003] afin de déterminer les paramètres caractérisant le matériau et les ondes qui s'y propagent. La validation des calculs de propagation d'ondes peut être réalisée en confrontant les résultats numériques à des résultats expérimentaux, mais la détermination conjointe des paramètres de comportement du matériau et des caractéristiques de propagation d'ondes est souvent peu aisée. La validation des modèles numériques de propagation d'ondes d'après des solutions analytiques est aussi envisageable dans le cas de milieux de géométrie et à comportement simples. Plusieurs méthodes numériques permettent de simuler les phénomènes de propagation d'ondes : différences finies [Moczo P et al , 1993, Virieux J., P-SV, 1986], éléments finis [Joly P, 1982, Semblat J.-F,1998], éléments de frontière [Bonnet M, 1999, Dangla P ,1989], éléments spectraux [Faccioli E et al , 1997, Komatitsch D et al ,1999]. Ces méthodes numériques présentent des avantages et des inconvénients différents.

La méthode des éléments finis est très puissante car elle permet de modéliser des géométries et des comportements complexes. Pour les problèmes de propagation d'ondes, elle présente toutefois deux inconvénients principaux : la réflexion d'ondes parasites sur les frontières du domaine maillé et la dispersion numérique des ondes. La dispersion numérique provoque une variation artificielle de la vitesse de propagation des ondes en fonction des

caractéristiques du modèle d'éléments finis. Ces deux aspects de la modélisation numérique par éléments finis de la propagation d'ondes seront abordés dans la suite.

I.2. Différents Types D'ondes

I.2.1. Ondes Acoustiques

- **Définition**

Ces ondes se propagent en milieu fluide et sont le support de la propagation du son, on cherche à calculer une distribution de pression.

- **Equation générale des ondes acoustiques**

Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être vues comme une dégénérescence des équations de l'élastodynamique linéaire (ondes élastiques) lorsque le coefficient de lamé tend vers 0. En fait, $\mu = 0$ caractérise le comportement élastique d'un fluide, l'autre coefficient de lamé, restant strictement positif. A partir des équations de Hooke pour un matériau linéaire isotrope écrite en notation indicelle par :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\varepsilon_{ij}(\vec{u}) \quad (\text{I-1})$$

Il est facile de voir que le tenseur des contraintes devient sphérique, c'est-à-dire proportionnel à la matrice identité on pose alors : $\sigma = -pI$ (I-2)

$$p = -\lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \quad (\text{I-3})$$

Où $p = p(x,t)$ est par définition la pression du fluide, de l'équation (I-1) on déduit :

Si on désigne Ω un ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 (borné ou non) rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dans un fluide dépend de la densité du fluide $\rho(x)$ au point x , la vitesse locale des ondes acoustiques est $c(x)$. L'équation qui régit les variations de la pression $p(x,t)$ du fluide en un point x et à l'instant t est l'équation des ondes suivante :

$$\left(1/\mu(x)\right) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \operatorname{div}(1/\rho(x)) \nabla P = g(x,t) \quad (\text{I-4})$$

$x \in \Omega, t > 0$ où $\mu(x) = \rho(x)c^2(x)$ pour un milieu homogène cette équation devient simplement :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 P = g \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (\text{I-5})$$

La fonction $g(x,t)$ est la source. Cette équation représente aussi les petites vibrations transversales d'une membrane homogène tendue. Elle s'appelle aussi l'équation des membranes vibrantes et la quantité que l'on calcule dans ce cas est le déplacement normal:

On doit joindre à cette équation pour qu'elle soit bien posée les conditions suivantes :

- *Des conditions initiales* : (deux car l'équation est d'ordre deux) :

$$P_0(x) = p(x, 0); \text{ Et } \frac{\partial P}{\partial t}(x, 0) = P_1(x)$$

- *Des conditions au limites* : posées sur le bord du domaine (par exemple homogènes)
- *Conditions de Dirichlet* : Si la condition de surface libre $P = 0$ sur $\partial \Omega$.
- *Conditions de Neumann* : Si on considère que le bord est rigide, les particules fluides

ne peuvent que glisser, ce qui signifie que la composante normale du déplacement est

nulle: $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ sur $\partial \Omega$

- *Condition d'impédance* : $\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$ sur $\partial \Omega$

En acoustique, l'équation (I-1) décrit la propagation d'une onde de pression qui se propage à une vitesse C , En 2D, on peut penser à la propagation d'une onde dans l'eau lorsqu'on jette un caillou. L'onde due à l'excitation ponctuelle (caillou) se propage suivant des cercles et s'atténue au cours du temps mais ne disparaît pas. Un exemple d'onde acoustique en 3D, c'est bien sûr le son qui se propage dans l'air, cette fois-ci l'onde acoustique passe et disparaît.

• Domaines D'applications des Ondes Acoustiques

- Acoustique Musicale

Une application particulièrement séduisante de modèles numériques de propagation d'ondes est la simulation sur ordinateur d'instruments de musique, le but est alors non seulement une meilleure compréhension du fonctionnement de ces instruments mais aussi aider à la facture d'instrument nouveau. Dans la pratique, une modélisation réaliste de ces instruments conduit à étudier en fait des problèmes d'interaction fluide structure, c'est-à-dire l'interaction entre une onde acoustique et une structure vibrante telle une membrane, une plaque ou une coque.

- Acoustique Sous-Marine

L'acoustique sous-marine a pour objet l'étude et l'utilisation de modèles mathématiques décrivant la propagation des ondes qui dépend des caractéristiques physiques locales du milieu pouvant évoluer au cours du temps. Les résultats de recherche dans ce domaine trouvent leurs applications directes en océanographie, biologie marine et géophysique.

I.2.2. Ondes élastiques (l'élastodynamique linéaire)

• Définition

Ces ondes se propagent dans les solides, l'inconnue est la distribution du champ des déplacements au sein de la structure.

• Equation Général Des Ondes Elastiques

Les équations du mouvement sont données par :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \text{div}(\sigma) = \rho \vec{g} \quad (\text{I-6})$$

Où $\vec{u}(x, t)$ est un vecteur représentant le déplacement d'une particule du point x à l'instant t , s est

le tenseur des contraintes, relié au tenseur des déformations $\varepsilon(\vec{u})$ par la loi de comportement du

matériau. Si on considère la loi de Hooke linéaire :

$$\sigma = C\varepsilon(\vec{u}) \Leftrightarrow C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{I-7})$$

$$\text{Avec } \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (\text{I-8})$$

Où C est un tenseur d'ordre 4, vérifiant des conditions de symétrie $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$

Pour un cas particulier des matériaux dits isotropes, c'est-à-dire dont les propriétés dans toutes les directions sont identiques. Dans ce cas, le milieu ne dépend plus que de deux paramètres, μ et λ , appelés coefficients de lamé.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{I-9})$$

Et la relation de Hooke devient simplement :

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \Leftrightarrow \sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (\text{I-10})$$

Où $\text{Tr}(\varepsilon)$ et I sont la matrice transposée du tenseur de déformation et la matrice identité.

L'équation (I-6) pour un milieu isotrope homogène ($\mu = \text{cte}$ et $\lambda = \text{cte}$) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \mu \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \vec{g} \quad (\text{I-11})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu \vec{\Delta} \vec{u} = \rho \vec{g} \quad (\text{I-12})$$

$$\text{La dernière équation provient de l'identité } \vec{\Delta} = \text{grad}(\text{div} \vec{v}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{v}) \quad (\text{I-13})$$

Où le deuxième rotationnel noté rot sans flèche est scalaire (2D) ou vectoriel avec flèche soit rot (3D). Cette équation décrit la propagation de deux types d'ondes se propageant à des vitesses différentes :

Les ondes de Pression P (Pressure), et les ondes de cisaillement S (*Shear*). Ces deux ondes correspondent aux opérateurs divergence et rotationnel. La divergence représente une variation de volume, en mouvement de compression ou de traction, alors que le rotationnel représente une déformation sans variation de volume, donc un cisaillement.

Posons $d = \text{div}(\vec{u})$ et $r = \text{rot}(\vec{u})$ Alors il est facile de voir que ces deux quantités obéissent à des équations d'ondes :

➤ Prenons la divergence de (I-11) et (I-12), alors on suppose les deux propriétés $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$ et $\text{div}(\text{rot}) = 0$, on voit que d vérifie l'équation des ondes scalaire:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - C_p^2 \Delta d = \text{div}(\vec{g}) \quad (\text{I-14})$$

Où $C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse des ondes p .

• Prenons le rotationnel de (I-11) et (I-12), alors en utilisant les deux propriétés $\text{rot}(\text{grad}) = 0$ et $\text{rot}(\text{rot}(r)) = -\Delta r$ car $(\text{div}(r) = \text{div}(\text{rot}(u)) = 0)$, on voit que r vérifie l'équation des ondes scalaires en 2D et vectorielle en 3D:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - C_s^2 \Delta r = \text{rot}(\vec{g}) \quad (\text{I-15})$$

Où $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ est la vitesse des ondes S .

• Domaines D'applications des Ondes Elastiques

- Géophysique

La géophysique s'intéresse à la propagation des ondes dans le sous-sol (éventuellement en milieu marin), ces ondes interviennent bien sûr dans des phénomènes naturels comme les séismes, mais elles sont aussi utilisées à des fins industrielles essentiellement dans l'industrie du pétrole par le développement des méthodes de prospection pétrolière par la sismique. Ces méthodes constituent un vaste champ d'application pour les méthodes numériques.

- Contrôle Non Destructif

Une autre application très répandue des ondes élastiques est le contrôle non destructif, le but est de détecter la présence d'un défaut dans une pièce métallique (typiquement fissure) sans casser cette dernière.

On utilise alors des ondes ultrasonores dont on mesure l'écho à la surface de la pièce. Un champ d'application privilégié d'une telle méthode est le contrôle des centrales nucléaires.

• Les ultrasons

➤ Historique

Les méthodes acoustiques sont avec l'inspection visuelle, les plus anciennes formes du contrôle non destructif. Le son est un moyen de détecter la présence des vides, fissures ou délaminations.

En 1920, le scientifique russe Sergei Y. Sokolov de l'institut électrotechnique de Leningrad, en ce qui était l'URSS s'est proposé d'abord d'utiliser la vitesse de l'onde ultrasonique (UPV) pour trouver les défauts dans les objets métalliques. Cependant ce n'est qu'en 1942 qu'un réel progrès a été réalisé par Firestone à l'université de Michigan et indépendamment par Sproule en Angleterre [NDT ressources center].

Après la seconde guerre mondiale, s'en est suivie une rapide évolution dans l'instrumentation du contrôle non destructif ; l'objectif principal étant la détection des défauts. En réponse à ce besoin des techniques de plus en plus sophistiquées utilisant les ultrasons ; courant de Foucault, radiographie... sont apparues.

C'est au début des années 1970 avec l'amélioration de la technologie, l'apparition de la mécanique de rupture et le développement de nouvelles lois pour prédire le taux d'évolution des fissures dans le béton sous chargement cyclique (fatigue) qu'un réel et majeur changement se produit dans le domaine du NDT.

➤ Définitions des ondes ultrasonore

Une onde ultrasonore est une vibration mécanique se propageant dans un milieu élastique (solide, liquide ou gaz) et dont la fréquence se trouve au-delà des fréquences audibles.

Son : onde vibratoire qui a besoin d'un milieu matériel pour se propager

On distingue trois catégories d'onde acoustique :

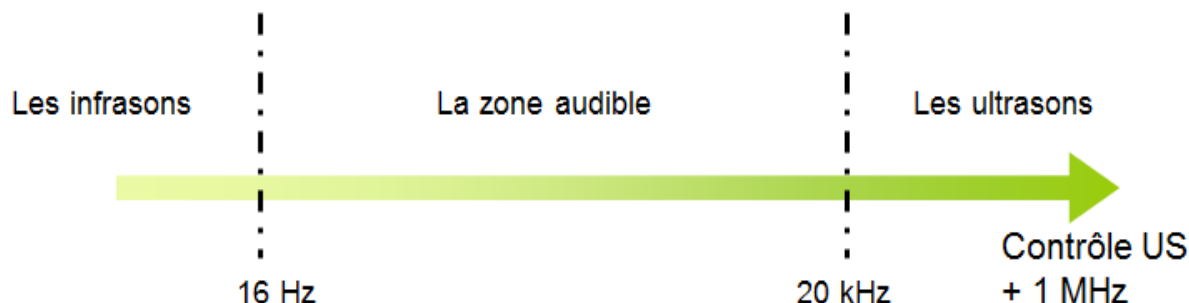
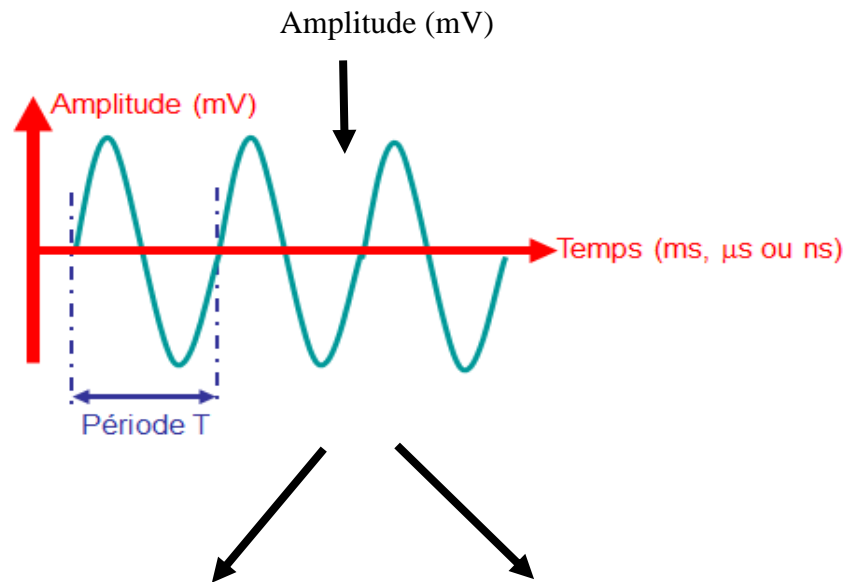


Figure I-1 : catégories d'onde acoustique



Fréquence de l'onde en Hertz (Hz) :
 $1/T$, avec T en seconde

Longueur d'onde (en m) λ :

Figure I -2: Caractéristiques principales des ondes acoustiques.

Les ondes ultrasonores présentent toutes les propriétés générales des ondes élastiques. Elles n'ont pas de propriété qui leur soit propre. L'intérêt des ultrasons réside dans la petitesse de leur longueur d'onde qui est souvent du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques des milieux qu'ils parcourent (diamètre des grains, hétérogénéités, défauts éventuels), ce qui leur permet de traverser facilement les matériaux solides et les fluides.

De plus, la petitesse de leur longueur d'onde leur confère une propagation assimilable à celle des ondes optiques, ce qui permet d'appliquer les lois relatives à l'optique physique (notamment lois de Snell- Descartes).

➤ Principes de base

Les ondes ultrasonores, vibrations élastiques de la matière, ont des propriétés liées aux caractéristiques élastiques du support matériel. Ainsi, dans les liquides ou les gaz, qui sont des milieux n'offrant aucune résistance au cisaillement, les ondes ultrasonores sont de type longitudinal, les particules matérielles se déplaçant, par rapport à leur position d'équilibre, parallèlement à la direction de propagation de l'onde, engendrant des fronts de compression et de décompression, eux-mêmes perpendiculaires à cette direction.

Les corps possèdent une certaine élasticité ; ils peuvent donc se déformer sous l'action de forces extérieures et reprendre leur forme initiale lorsque celles-ci sont supprimées.

Un milieu élastique peut être schématisé grossièrement par des petites masses élémentaires (figurant les particules) réparties régulièrement dans l'espace et reliées par des ressorts (figurant les forces de cohésion de la matière).

L'onde sonore est une onde mécanique qui nécessite un milieu matériel élastique et déformable pour se propager (**Figure I-3**).

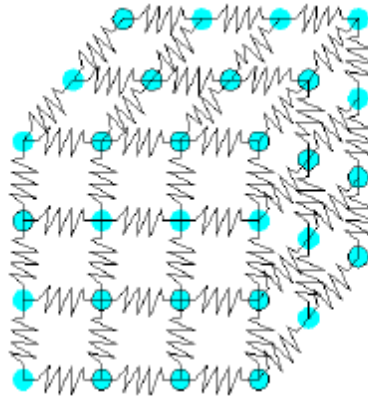


Figure I-3:schématisation d'un milieu élastique

L'existence de forces internes de cohésion dans tous les corps leur confère des aptitudes aux déformations. Ainsi, quand un élément d'un milieu matériel subit un ébranlement, son déplacement, grâce aux forces de cohésion intermoléculaires provoque le déplacement des éléments voisins de telle sorte que l'ébranlement se propage de proche en proche à travers tout le milieu, mais sans transport de matière.

➤ Différents types d'ondes

Ils existent trois types d'ondes dans un milieu élastique ;

- des ondes longitudinales,
- des ondes transversales
- des ondes de Rayleigh.

Les ondes longitudinales et transversales sont aussi appelées respectivement ondes de compression (P-waves) et ondes de cisaillement (S-waves), et sont caractérisées par la direction du mouvement de la particule ; pour les ondes de compression la direction du mouvement de vibration des particules est parallèle à la direction de la propagation (**Figure I-4**) tandis que pour les ondes de cisaillement la direction du mouvement des particules est perpendiculaire à la direction de la propagation (**Figure I-5**).

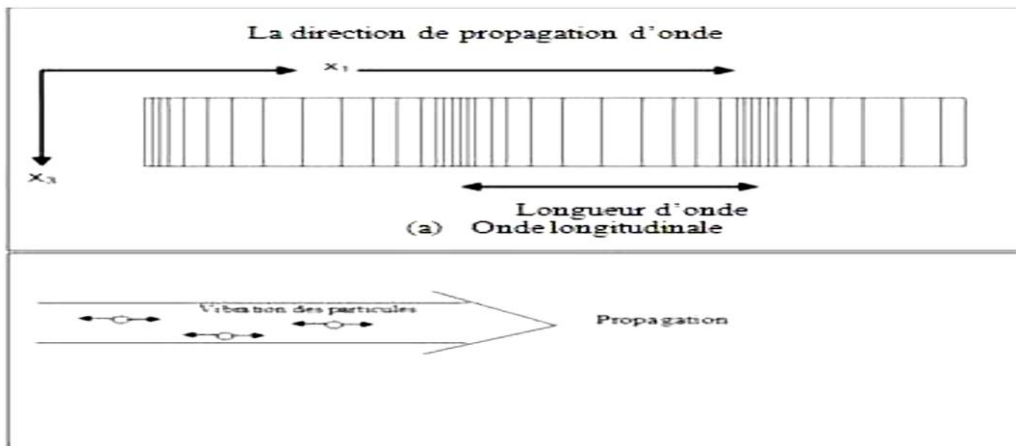


Figure I-4:direction de propagation d'onde

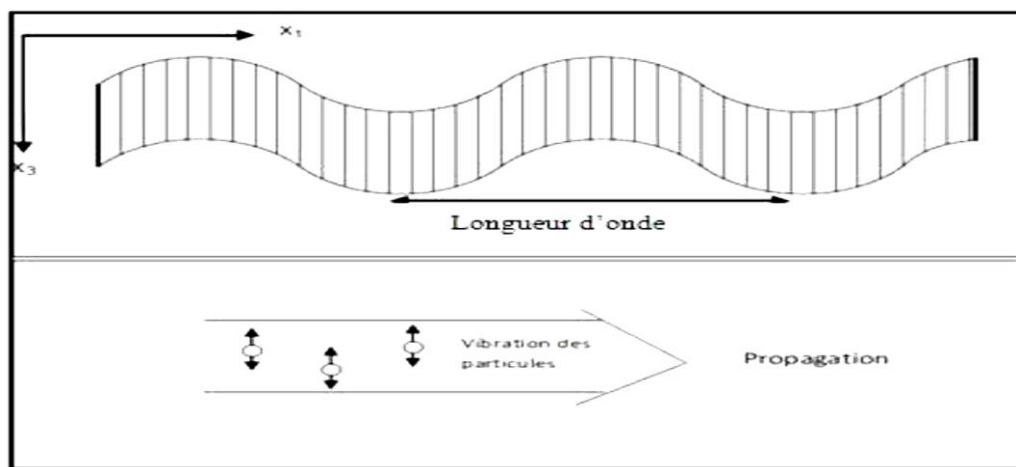


Figure I -5:longueur d'onde

Les ondes de Rayleigh sont des ondes de surface, se propageant à la surface des solides pour lesquelles le mouvement des particules est elliptique. La schématisation des ondes de surface la plus connue est la formation des rides à la surface d'une étendue d'eau, lorsqu'on jette un caillou (Figure I-6).

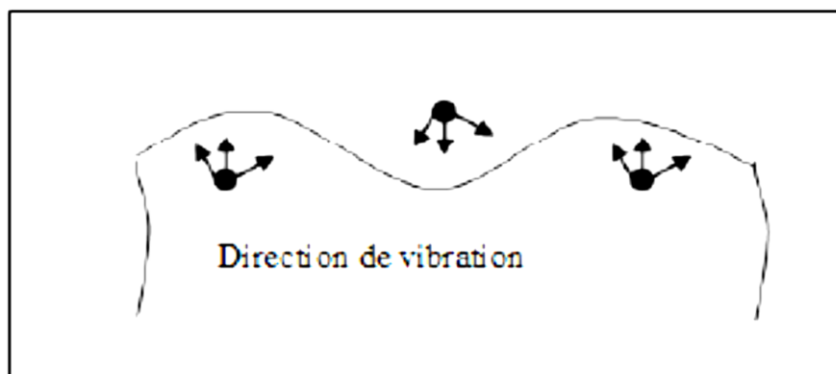


Figure I-6:Direction de vibration

➤ **Différents mouvements d'ondes.**

Ils existent trois sortes de mouvements d'ondes :

- Ondes planes : l'onde se propage suivant une direction unique ; les surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux (**Figure I-7**).
- Ondes sphériques : l'onde est générée par un point ou une sphère dont toute la surface vibre uniformément, l'amplitude de la vibration décroît en fonction de l'éloignement de la source (**Figure I-8**).
- Ondes cylindriques : la propagation des ondes est générée par un impact en un point de la surface du solide ; les ondes longitudinales et transversales s'éloignent dans un mouvement d'hémisphère alors que les ondes de surface s'éloignent du point d'impact en un mouvement cylindrique

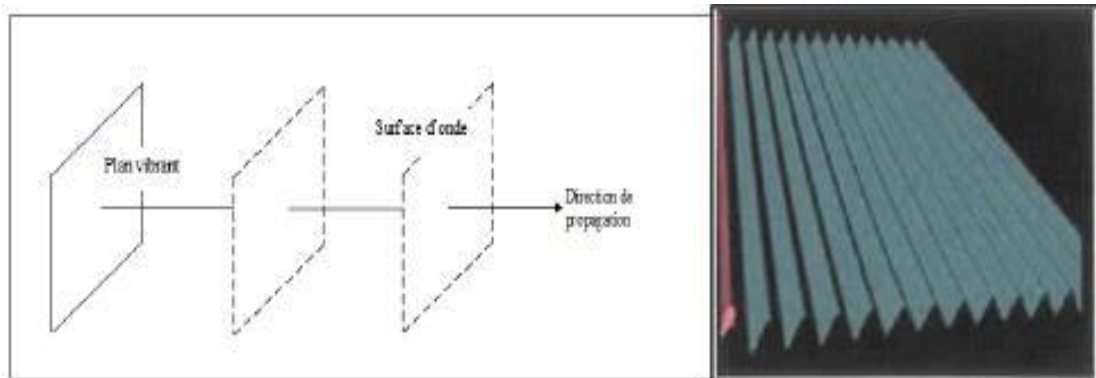


Figure I-7: onde plane

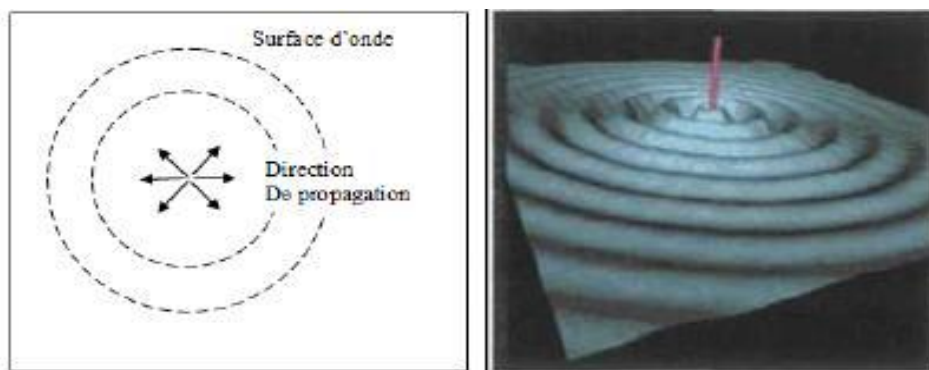


Figure I-8: onde sphérique

➤ **Paramètres de l'onde ultrasonore**

❖ **L'impédance acoustique**

Le comportement du milieu vis-à-vis des ultrasons est exprimé par une constante appelée impédance acoustique Z . Elle caractérise la qualité du matériau à transmettre les ondes ultrasonores. Elle est définie comme le produit de la densité et de la vitesse du son du milieu et donnée par la relation suivante :

$$Z = \rho c \quad (\text{I-16})$$

Où:

- c 'est la vitesse du son dans le milieu en m.s^{-1} ;
- ρ est la densité du milieu en kg.m^{-3} .

❖ La longueur de l'onde

La longueur d'onde ultrasonore dans un milieu est reliée à une fréquence donnée, elle est donnée par la relation suivante : $C = f \lambda$ (I-17)

- Où: - C est la vitesse du son dans le milieu en m.s^{-1} ;
- f est la fréquence d'émission en Hz.

❖ La pression et l'intensité

La pression acoustique varie selon la fréquence de l'onde ultrasonore. L'énergie délivrée dans le milieu dépend de ces variations de pression qui soumettent les particules du milieu à des mouvements vibratoires.

On appelle intensité ultrasonore l'énergie qui traverse perpendiculairement une unité de surface pendant une unité de temps. Elle est reliée à la pression acoustique par la formule suivante : $I = p^2 / \rho c$ (I-18)

Où:

- c 'est la vitesse du son dans le milieu en m.s^{-1} ;
- ρ est la densité du milieu en kg.m^{-3} ;
- P est appelée la pression d'onde acoustique exprimée en $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$.
- I est l'intensité ultrasonore en W.m^{-2} .

❖ Émission et réception de l'onde ultrasonore

L'intensité d'une onde acoustique qui se propage dans les différents milieux s'atténue le long de son parcours. Plusieurs facteurs contribuent à cette atténuation telle que l'absorption, la réfraction, la réflexion et la diffusion. L'émission d'impulsions ultrasoniques dans un solide produit deux effets : un effet thermique qui dépend de la puissance acoustique de l'onde et qui engendre une propagation de la chaleur dans le milieu et un effet mécanique qui est la transmission, la réflexion et la dispersion.

❖ Atténuation et coefficient d'atténuation d'une onde sonore

La propagation des ondes s'accompagne d'une atténuation géométrique liée à la géométrie du front d'onde, elle peut être définie comme la diminution de l'amplitude et une perte fréquentielle des hautes fréquences du signal propagé en fonction du milieu de propagation.

L'atténuation de l'énergie pendant la transmission d'ondes est due à plusieurs facteurs :

- Absorption d'énergie causée par le frottement intrinsèque du milieu ce qui conduit à la conversion de l'énergie mécanique en une énergie thermique.
- Réflexion, réfraction, diffraction et dispersion de l'onde sont des caractéristiques du milieu hétérogène comme le béton.

L'atténuation de l'onde ultrasonore est généralement caractérisée par le coefficient d'atténuation α qui détermine la variation de la pression acoustique après que l'onde ait parcouru une distance unitaire dans un milieu donné ;

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\text{I-19})$$

Où:

α_1 ; prend en compte la transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique

α_2 ; prend en compte la diminution de l'énergie des ondes dues aux phénomènes de réflexions et réfraction dans diverses directions.

Le coefficient d'atténuation α exprimé en dB/m et donné par la relation suivante

$$\alpha = \frac{\eta \omega^2}{2v_L^3 \rho} \quad (\text{I-20})$$

Où: η est le coefficient de viscosité exprimée en N.s.m⁻² ;

ρ est la densité du milieu en kg.m⁻³;

v_L est la vitesse longitudinale dans le milieu en m. s⁻¹.

❖ L'absorption et la dispersion

L'absorption des ultrasons dans les solides dépend beaucoup de la structure de ces derniers. Dans les milieux homogènes, l'absorption du son est due essentiellement au coefficient de viscosité et à la conductivité thermique. Comme dans les liquides, l'absorption est proportionnelle au carré de la fréquence sonore. Dans le cas des substances poly-cristallines c'est-à-dire des substances formées d'un grand nombre de petits cristaux séparés (les monocristaux), l'absorption du son est principalement déterminée par les dimensions relatives des cristaux et de la longueur d'onde. À haute fréquence, lorsque la longueur d'onde λ est petite par rapport à la taille des cristaux, l'absorption se fait dans chaque monocristal. Le coefficient d'absorption étant proportionnel au carré de la fréquence dans ce cas, il est égal à : [Brown et Goodman, 1971]:

$$\mu = \frac{8\eta \pi^2}{2\rho \lambda^2 c} \quad (\text{I-21})$$

Où:

- μ est le coefficient d'absorption en m^{-1} ;
- η est le coefficient de viscosité qui varie en fonction de la température en $kg.m^{-1}.s^{-1}$;
- ρ est la densité du milieu en $kg.m^{-3}$;
- c est la vitesse du son dans le milieu en $m.s^{-1}$;
- λ est la longueur de l'onde ultrasonore en m ;

❖ Réflexion et réfraction de l'onde ultrasonore

Lors du passage d'une onde ultrasonore à travers une interface séparant deux milieux de caractéristiques acoustiques différentes, une partie de l'onde incidente est réfléchiée et une autre est réfractée. L'énergie contenue dans l'onde réfractée est égale à l'énergie de l'onde incidente diminuée de celle contenue dans l'onde réfléchiée. Le mécanisme de réflexion d'une onde ultrasonore est un point important dans l'étude de propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu.

Soit une onde acoustique qui frappe, avec un angle d'incidence θ_i , par rapport à la verticale, l'interface séparant les milieux 1 et 2, tel qu'illustrée à la figure I-4. Cette dernière donne naissance à l'interface, à une onde réfléchiée et une onde transmise. Les directions de propagation de ces ondes font respectivement des angles θ_r et θ_t , avec la normale à l'interface ([Brown et Goodman, 1971], [Dognon, 1953], [Syrota, 1994] et [Banks étal, 1966]) [Samia Hannach 2015].

Soit les suffixes i, r et t se rapportant respectivement aux ondes incidentes, réfléchiées et transmises. La variation de pression incidente P_i , la pression réfléchiée P_r et la pression transmise P_t s'écrivent alors :

$$P_i + P_r = P_t \quad (I-22)$$

Sous l'incidence normale on a $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$

Le coefficient de réflexion R est défini par le rapport de la puissance réfléchiée sur la puissance incidente, il est exprimé par la relation

$$\text{suivante : } R = \frac{P_r}{P_i} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (I - 23)$$

Le coefficient de transmission T défini par le rapport de la puissance transmise sur la puissance réfléchiée, est donné par la relation suivante :

$$T = 1 - R = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (I-24)$$

Où Z_1 et Z_2 sont les impédances acoustiques des milieux 1 et 2 respectivement, exprimées en $kg.m.s^{-1}$ et données par l'équation IV. 1. Dans le cas où une onde ultrasonore arrive à l'interface

des milieux solides, sous incidence oblique plutôt que sous incidence normale, la partie transmise de l'onde est alors réfractée. De plus, si la source se trouve dans un milieu solide, une onde incidente longitudinale sera réfléchiée et réfractée à la frontière, pour donner naissance, dans chacun des milieux, à une onde longitudinale et à une onde transversale. Une onde incidente longitudinale Z_i , telle que représentée à la (**Figure I-9**), sera réfléchiée et réfractée à l'interface des milieux 1/2 pour donner naissance dans le milieu 1 à une onde longitudinale L_r et une onde transversale T_r et, dans le milieu 2, à une onde longitudinale L_t et une onde transversale T_t . Les angles de réflexion et de réfraction sont fonction des vitesses relatives dans les milieux respectifs.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{\sin \alpha_3}{\alpha_3} = \frac{\sin \alpha_4}{\alpha_4} \quad (\text{I-25})$$

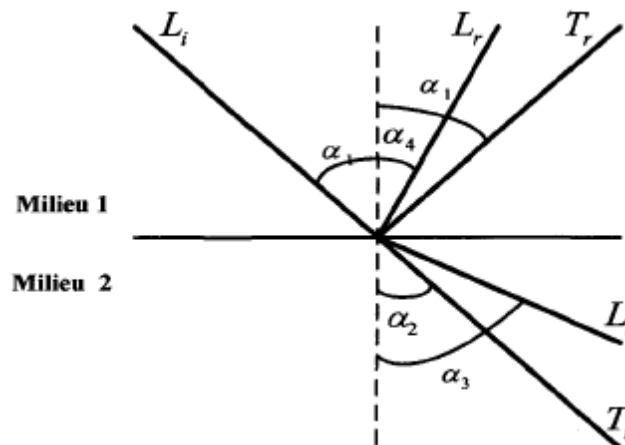


Figure I-9:Comportement des ondes sonores incidentes à une interface

➤ Apport des ultrasons pour caractériser les FGM

De nombreuses techniques sont employées pour caractériser les matériaux afin de déterminer leurs épaisseurs, leurs paramètres élastiques, leurs masses volumiques etc...

Les méthodes de caractérisation sont variées, certaines sont destructives, d'autres au contraire sont non destructives. Les méthodes ultrasonores, permettent de générer des ultrasons dans les pièces à contrôler selon deux voies :

- les méthodes avec contact utilisant un transducteur électroacoustique, générateur de vibrations mécaniques qui seront transmises à la pièce par couplage acoustique,
- les méthodes dites sans contact, qui permet de contrôler des pièces de géométrie complexe sans craindre de les endommager.

Différentes techniques permettent la génération et la détection des ondes ultrasonores sans contact, comme la génération laser et la détection interférométrique [R. E. Green. 2004] [P.

Babilotte et al , 2011]. La caractérisation des matériaux par ultrasons nécessite une étude du problème de propagation des ondes acoustiques de surface d'écrite dans plusieurs travaux de recherche, qui ont proposé des méthodes numérique et analytique pour caractériser les ondes dans les matériaux a gradient de propriétés [Yosra. Dammak 2016].

I.2.3. Ondes Electromagnétiques

- **Définition**

Ces ondes n'ont pas besoin de support pour se propager, les inconnues du problème sont essentiellement le champ électrique $E(x, t)$ et le champ magnétique $H(x, t)$, l'induction électrique $D(x, t)$ et l'induction magnétique $B(x, t)$

- **Equation Générale Des Ondes Electromagnétiques**

Dans un milieu que nous supposons diélectrique linéaire isotrope, un champ électromagnétique dans un domaine Ω est décrit par le champ électrique $\vec{E}(x, t)$ et le champ magnétique $\vec{H}(x, t)$ qui vérifient les équations de Maxwell :

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (\text{I-26})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot}(\vec{H}) + \vec{j}_s = 0 \quad (\text{I-27})$$

Où $\varepsilon(x) > 0$ est la permittivité diélectrique du milieu, $\mu(x) > 0$ est la perméabilité magnétique du milieu, $\sigma(x) \geq 0$ est la conductivité du matériau, \vec{j}_s est une courante source. La vitesse des ondes du milieu est donnée par la relation suivante : $C^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$

Le vide est un cas particulier des milieux homogènes, il est non conducteur donc $\sigma_0 = 0$ et $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1}$ et $\mu(x) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

Ce qui donne la fameuse valeur de la vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Lorsque la conductivité est positive, une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation c'est à dire qu'il y a un phénomène d'absorption.

Nous supposons par la suite que le milieu est non conducteur. Le champ électromagnétique vérifie alors les équations de Maxwell:

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (\text{I-28})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{H}) + \vec{j}_s = 0 \quad (\text{I-29})$$

On peut remarquer qu'en prenant la divergence de (I-18) avec la propriété ($\text{div}(\text{rot}) = 0$), cette dernière peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \text{div}(\mu \vec{H})}{\partial t} = 0 \quad (\text{I-30})$$

Par conséquent, si on suppose qu'à l'instant initial on a : $\text{div}(\mu \vec{H}_0) = 0$, cette propriété reste vraie pour tout instant: $\text{div}(\mu \vec{H}) = 0$

De même si on prend la divergence de (I-29), en supposant que $\text{div}(\vec{j}_s) = 0$ et que $\text{div}(\varepsilon \vec{E}_0) = 0$, Alors $\text{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0$.

• Domaines D'applications Des ondes Eléctromagnétiques

- Furtivité Radar

Les ondes électromagnétiques sont très utilisées pour la détection d'objets volants dans les applications militaires. Les problèmes de calcul numérique qui se posent sont de deux natures :

- Comment calculer la réponse d'un objet à une onde incidente ;
- Comment rendre cet objet furtif.

Le thème furtivité fait notamment appel à la modélisation de nouveaux matériaux absorbants (anisotropes, non linéaire...).

- Antennes

Les antennes sont une des technologies de base pour la communication à longue distance par ondes électromagnétiques, elles sont utilisées pour émettre, diriger et réfléchir les ondes. Le calcul des antennes pose notamment des difficultés liées à leur géométrie très complexe (antenne, plaquées, éléments filaires.)

- Optique

Les ondes électromagnétiques sont également largement utilisées en télécommunications pour transmettre de l'information par support optique (fibres optiques, optique intégrée).

La technologie pour la conception de guides d'ondes optiques est très pointue et fait largement appel à des matériaux nouveaux, tels que les supraconducteurs. L'intérêt des méthodes numériques dans ce domaine est croissant

I.2.4. Ondes De Gravité

• Définition

Il s'agit des ondes liées à la propagation de la houle, les modèles utilisés sont dérivés de la mécanique des fluides. Les applications concernent prioritairement l'industrie maritime notamment pour tout ce qui concerne les problèmes de stabilité des navires, de la tenue à la mer et de la résistance aux vagues.....

• Equation De La Houle (L'onde De Gravité)

Le modèle que nous allons présenter est censé décrire les mouvements de l'océan. Sa validité est soumise à un certain nombre d'hypothèses physiques licites quand on s'intéresse à la propagation de la houle :

- L'écoulement est irrotationnel ;
- Le fluide est incompressible ;
- Le fluide est non visqueux ;
- Les déplacements sont petits.

La première particularité du modèle tient dans la géométrie du domaine de propagation Ω supposé fixe et doit être nécessairement délimité par deux surfaces Γ_F , Γ_L :

- Γ_F représente le fond marin .
- Γ_L représente la surface moyenne de l'eau (ou surface libre) .
- $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_L$

L'écoulement étant irrotationnel, on en déduit que le champ des vitesses dans le fluide $v(x, t)$ qui dérive d'un potentiel $\Phi(x, t)$ s'écrivant comme suit : $v = -grad\Phi$

L'incompressibilité du fluide se traduit par : $div(v) = 0$

On en déduit que la fonction est harmonique dans un intervalle donné : $\Delta\Phi = 0$

La condition de glissement sur le fond se traduit par la condition de Neumann pour Φ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n / \Gamma_F} = 0 \quad (I-31)$$

C'est seulement au niveau de la condition aux limites sur la surface libre Γ_L que le temps intervient. Cette condition s'obtient à partir de la linéarisation de l'équation de Bernoulli qui traduit le fait que la pression à la surface du fluide est égale à la pression atmosphérique :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{Sur } \Gamma_L \quad (I-32)$$

Dans cette équation, g est l'accélération de pesanteur.

Cette condition appelée condition de surface libre. C'est la deuxième particularité de ce modèle qui est responsable sur la propagation de la houle. Signalons qu'on peut à partir de Φ décrire la déformation de la surface de l'eau sous l'effet de la houle comme la surface d'équation suivante :

$$x_2 = \eta(x_1, x_3, t) \quad (\text{I-33})$$

$$\eta(x_1, x_3, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_1, x_3, 0, t) \quad (\text{I-34})$$

I.2.5. Propagation des ondes guidées

Les ondes guidées se propageant dans un guide ainsi défini peuvent être décrites de manière modale ; l'existence des modes résulte du couplage des mouvements particuliers de compression-dilatation et de cisaillement aux parois du guide quand la longueur d'onde des ondes de volumes est du même ordre de grandeur que la section du guide.

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer les nombres d'onde des modes se propageant dans un guide. Une première méthode consiste à résoudre l'équation de dispersion correspondant à notre guide ; dans le cas de guides de géométrie simple, comme par exemple un cylindre homogène ou une plaque isotrope, les équations de dispersion sont connues de manière analytique respectivement comme les équations de Pochhammer et de Lamb [Royer.D et E. Dieulesaint 2000] ; on les résout numériquement afin d'obtenir les nombres d'onde à une fréquence donnée. Dans le cas des matériaux multicouches, on peut calculer les nombres d'onde en utilisant la méthode des matrices globales proposée par [LOWE 1995] pour des couches aussi bien anisotropes que viscoélastiques.

Une autre méthode permettant d'étudier la propagation des ondes guidées, particulièrement intéressante pour notre cas d'application, est la méthode SAFE (Semi- Analytic Finite Element). Elle consiste à utiliser des éléments finis dans une section droite du guide et d'exprimer de façon analytique la dépendance à la direction de propagation.

Dans le cas d'un maillage bidimensionnel de la section, le champ de déplacement en un point d'un triangle du maillage s'écrit sous la forme d'une interpolation par rapports aux noeuds, soit :

$$u(x, y) = N(x, y)U^i e^{j\omega t} \quad (\text{I-35})$$

où $N(x, y)$ est la matrice d'interpolation et U^i contient les composantes du déplacement particulière aux trois noeuds de l'élément i .

La relation entre déformation et déplacement écrite sous forme matricielle est :

$$\varepsilon = \left[L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$L_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad L_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad L_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{I-36})$$

En utilisant de plus la loi de Hooke, qui permet de relier le tenseur des contraintes à celui des déformations par : $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$,

(I-37)

Le principe des travaux virtuels donné par :

$$\int_V \delta u^T t dV = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV + \int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV, \quad (\text{I-38})$$

Prend alors la forme du système matriciel (I-39) :

$$(K_1 - i\beta K_2 + \beta^2 K_3) d - \omega^2 M d = f, \quad (\text{I-39})$$

avec ω la pulsation, d le déplacement, β les nombres d'ondes des modes se propageant dans le guide, f les forces extérieures et K_1, K_2, K_3 les matrices de rigidité issues de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires dépendantes des propriétés mécaniques locales.

I.3. Equation générale de la propagation d'ondes élastique

I.3.1. Introduction

Les modèles de base, qui s'appuient sur une physique simplifiée sont linéaires s'expriment par l'équation des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - C^2 \Delta U(\vec{x}, t) = 0 \quad (1-40)$$

Avec : $u(\vec{x}, t)$: Le champ de déplacement suivant la direction \vec{x}_k à l' instant t
 t : le temps.

C : la vitesse de l'onde. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$

Cette dernière équation s'applique directement aux ondes acoustiques mais constitue un modèle scalaire simplifié pour les autres types d'ondes.

La physique vient en général enrichir ces modèles de base et en accroître la complexité des conditions aux limites, termes non linéaires, termes intègro-différentiel et le couplage des modèles.

On peut distinguer deux types de problèmes associés à ces modèles :

- Les problèmes en temps (ou problèmes transitoires) et les problèmes en fréquence (ou problèmes harmoniques), dans le premier cas le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution.
- Dans le second cas et à titre d'exemple, la dépendance en temps est imposée a priori par l'intermédiaire de la source.

Elle est supposée périodique en temps, et même harmonique, on cherche alors une solution proportionnelle à

$\exp^{i\omega t}$ ou $\omega > 0$ désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence).

Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnu recherché est une fonction des seules variables spatiales (x, y, z) . Ainsi l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz .

$$\begin{aligned}
 U &= ue^{i\omega t} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -u\omega^2 e^{i\omega t} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} &= ue^{i\omega t} \\
 \Leftrightarrow -C^2 \Delta U - \omega^2 U &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1-41}$$

I.3.2. Formulation de L'équation Générale De La Propagation De L'onde

Elastique Dans Les milieux Isotropes

Dans ce paragraphe nous allons faire une démonstration de l'équation de la propagation déjà présentée. En cristallographie les matériaux peuvent être classés suivant leur type de symétrie, chaque système est directement associée à un tenseur de quatrième ordre appelé le tenseur des rigidité C_{ijkl} , reliant les déformations aux contraintes σ_{ij} , c'est la loi de Hooke qui s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \forall_{ij} = 1 \dots \dots \dots d \tag{I-42}$$

$$\text{Où } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] \quad (\text{I-43})$$

Nous avons l'équation de la propagation de la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla \sigma_{ij} = f_i \dots \dots \dots \forall_{ij} = 1 \dots \dots d \quad (\text{I-44})$$

Dans $\Omega \times [0, T]$.

- u_i représente le champ de déplacement dans le solide.
- ε est le tenseur de déformations.
- σ le tenseur de contraintes.
- Ω est ouvert de R^d .
- ρ est la masse volumique du milieu solide exprimée en $Kg \times m^{-3}$.
- C est le tenseur des coefficients d'élasticité exprimés en Pa .
- $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \dots \dots \forall i, j, k, l = 1 \dots \dots d$

En utilisant les propriétés des différents tenseurs, nous allons reformuler le système d'équation (I-42) sous une forme proche de la formulation mixte de l'équation des ondes présentée précédemment, donc on a :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla [\sigma_{ij}] = f_i$$

$$\text{Où } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla [C_{ijkl} \varepsilon_{kl}] = f_i \text{ avec } \nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ et } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] &= f_i \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] &= f_i \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} &= f_i \end{aligned} \quad (\text{I-45})$$

Si $f_i = 0$ (source nul)

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (\text{I-46})$$

Cette équation représente l'équation générale de la propagation d'une onde élastique dans un solide anisotrope ce système de trois équations différentielles de second ordre est généralisé en 3D.

Pour un milieu isotrope on a l'équation de lamé qui est le reflet de l'équilibre local des forces dans un milieu élastique pour un volume infinitésimal (dv), la loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{I-47})$$

Où

- ρ est la densité local
- u_i La composante i du déplacement de u ,
- σ_{ij} Est Le tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I-48})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I-49})$$

λ , μ sont les coefficients de lamé ils ne sont pas forcément constantes dans le milieu. En prendre : $\lambda = \text{cte}$ et $\mu = \text{cte}$.

Après substitution des deux équations (I-48) et (I-49) dans l'équation (I-47) on trouve :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{I-50})$$

L'équation (I-50) peut être écrite sous la forme :

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{I-51})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \text{graddiv}(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{\rho} \text{rotrot}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{I-52})$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (\text{I-53})$$

L'équation (I-53) représente le cas général de la propagation de l'onde élastique dans un solide isotrope homogène (le terme homogène signifie que le corps a une masse volumique constante) on peut remarquer que cette équation est valable dans le cas des coordonnées rectangulaires pour l'étendre au cas des coordonnées généralisées, on a le tenseur de rotation qui s'écrit sous la forme :

$$w = \frac{1}{2} \nabla \times u \Rightarrow w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I-54})$$

L'écriture de l'équation (I-52) en fonction du tenseur de rotation w nous donne :

$$\text{Soit } \Delta = \nabla \cdot u = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{kk} \quad (\text{I-55})$$

$$(\lambda + \mu) \nabla \Delta + \mu \nabla^2 u + \rho f = \rho \ddot{u} \quad (\text{I-56})$$

$$\text{Utilisant la propriété suivante : } \nabla^2 u = \nabla \nabla \cdot u - \nabla \times \nabla \times u \quad (\text{I-57})$$

$$\text{Avec } w = \frac{1}{2} \nabla \times u \quad (\text{I-58})$$

Après substitution on trouve l'équation de propagation en fonction du tenseur de rotation sous la forme :

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \Delta - 2\mu \nabla \times w + \rho f = \rho \ddot{u} \quad (\text{I-57})$$

$$\ddot{u} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla \Delta - 2 \frac{\mu}{\rho} \nabla \times w + f \quad (\text{I-58})$$

Cette équation est valable dans le cas des coordonnées généralisées. Dans les deux systèmes différentiels des deux équations (I-53) et (I-58), les trois composantes des déplacements sont couplées, on veut d'obtenir des équations découplées, pour cela on définit un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur ψ comme suit :

$$\text{Où } u = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (\text{I-59})$$

Etant donnée les relations suivantes :

$$\nabla \psi = 0, \quad \nabla \times (\nabla \phi) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0$$

$$\text{Et } f = \nabla g + \nabla \times B \text{ Avec } \nabla \cdot B = 0$$

La substitution de l'équation (I-59) dans l'équation (I-53) nous donne :

$$(\lambda + \mu) \nabla \Delta \cdot (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + \mu \nabla^2 (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + \nabla g + \nabla \times B = \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \ddot{\psi})$$

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi + \rho g - \rho \ddot{\phi} \right] + \nabla \times \left[\mu \nabla^2 \psi + \rho B - \rho \ddot{\psi} \right] = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi + \rho g = \rho \ddot{\phi} \quad (\text{I-60})$$

60)

$$\mu \nabla^2 \psi + \rho B = \rho \ddot{\psi} \quad (\text{I-61})$$

On peut aussi écrire ces deux équations sous la forme:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho g = 0 \quad (\text{I-62})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \psi - \rho B = 0 \quad (\text{I-63})$$

Dans le cas où les forces extérieures sont nulles et en revenant à l'équation (I-53), on peut trouver deux termes : $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot u$

Qui décrit une onde volumique longitudinale qui se propage avec une vitesse :

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{I-64})$$

Et le terme : $\frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla u$

Qui correspond aux ondes volumiques transversales qui se propagent avec la vitesse :

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{I-65})$$

Le déplacement des ondes transversales s'effectue selon deux directions perpendiculaires à la direction de propagation, ce qui implique l'existence de deux états de polarisation possibles.

La vitesse de propagation des ondes de compression est supérieure à celle des ondes de cisaillement, elle sont détectées en premier et c'est pour cette raison qu'on les appelle ondes P (*Primary Waves*), les ondes de cisaillement sont aussi appelées ondes S car elle se propagent plus lentement que les ondes P, et sont détectées en second (*Secondary Waves*).

La décomposition de l'équation (I-53) ayant pour résultat de remplacer une équation vectorielle par une autre équation scalaire, le nombre de grandeurs décrivant la propagation de l'onde est augmenté d'une unité. Aux trois composantes u_1, u_2, u_3 du déplacement se substituent quatre fonctions $\phi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Il est possible d'imposer une relation entre ces dernières, on a $\nabla \cdot \psi = 0$. Il est aussi possible de décomposer le vecteur de déplacement en un vecteur sans divergence \vec{u}_s et un vecteur rotationnel \vec{u}_p ,

$$\text{Avec } \vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \quad (\text{I-66})$$

$$\text{rot}(\vec{u}_p) = 0, \text{ div}(\vec{u}_s) = 0$$

En reportant dans l'équation (I-53) et en faisant apparaître les vitesses C_s et C_p , on obtient deux équations semblables aux deux équations (I-62) et (I-63) qui sont :

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - C_p^2 \nabla^2 u_p - g = 0 \quad (\text{I-67})$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 u_s - B = 0 \quad (\text{I-68})$$

Ces deux équations confirment l'indépendance de la propagation des deux composantes \vec{u}_s et \vec{u}_p avec les vitesses C_s et C_p

Supposons que \vec{a} est la direction de propagation de l'onde :

La propagation de l'onde longitudinale suivant une direction \vec{a} entraîne une variation de la distance entre les plans parallèles qui contiennent les atomes si bien que le volume occupé par un nombre donné d'atomes varie, en conséquence le rotationnel du vecteur déplacement est nul ($rot(\vec{u}_p) = 0$) mais pas sa divergence ($div(\vec{u}_p \neq 0)$). Lors de la propagation d'une onde transversale, les atomes se déplacent perpendiculairement à \vec{a} . Le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume.

Le Rotationnel du déplacement \vec{u}_s est différent de zéro ($rot(\vec{u}_s \neq 0)$), mais sa divergence est nulle ($div(\vec{u}_s = 0)$)

En concluant, un solide isotrope se décrit du point de vue de la propagation des ondes élastiques par deux sphères de rayons C_s et C_p ou de rayons $\frac{1}{C_s}$ et $\frac{1}{C_p}$, schématisées sur la

Figure (I-10) :

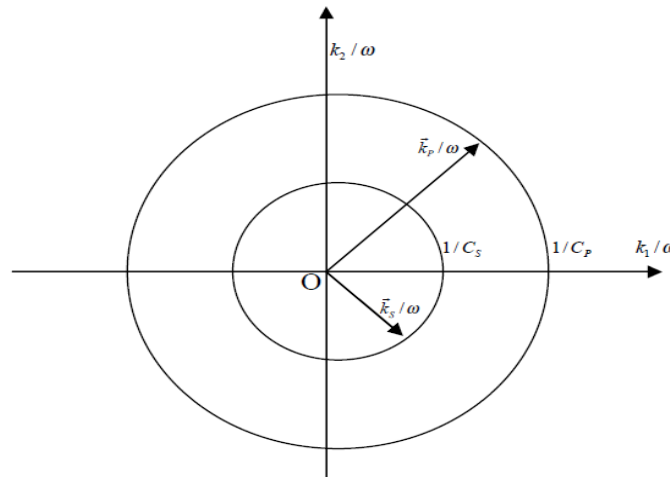


Figure I -10:Schématization de la propagation des ondes élastiques dans les solides isotropes Ces deux représentations sont équivalentes pour le cas isotrope, elles ne le sont pas pour un solide anisotrope.

Les deux équations (I-67) et (I-68) sont des équations d'onde à trois dimensions, où u_p représente une onde de compression puisque : ($div(\vec{u}_p \neq 0 = \Delta)$)

Avec :

$$\Delta = \nabla \cdot u = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{kk}$$

La vitesse de l'onde de compression $C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, est celle de l'onde u_s dans laquelle

n'interviennent que des glissements, la vitesse de ce dernier est : $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Les deux équations (I-67) et (I-68) qui régissent la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes homogènes, présentent une difficulté pour les résoudre, notamment

pour les cas 3D. Pour cette raison, on trouve dans ce domaine de la recherche un développement très avancé des méthodes numériques, pour connaître mieux le phénomène de la propagation des ondes,

I.4. Analyse Mathématique De L'équation De La Propagation Des Ondes Elastiques

Il est commun de distinguer deux types de problèmes associés a ces modèles : Les problèmes en temps (ou problèmes transitoire) et les problèmes en fréquences (ou problèmes harmonique). Dans le premier cas, le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution. Dans le second cas, la dépendance du temps est imposé a priori, par l'intermédiaire de la source par exemple, elle est supposé périodique dans le temps, et même harmonique on cherche une solution proportionnelle à $\exp(i\omega t)$ où $\omega > 0$ désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence). Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnue recherchée est une fonction des seules variables spatiales. Ainsi l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz.

Il convient de souligner que ces deux types de problèmes bien qu'issus d'une même modélisation physique, ont des propriétés mathématiques radicalement différentes et nécessitent le développement de méthodes adaptées, toute fois il existe un point commun entre ces problèmes : l'existence d'une dimension caractéristique qu'on appelle la longueur d'onde. Cette dimension est la longueur sur la quelle, la solution recherchée varie substantiellement (typiquement, la période d'une solution périodique).

Dans le cas d'une propagation en milieu hétérogène, il conviendra de parler de plusieurs longueurs d'onde, celle-ci pouvant varier d'une région à une autre, sa connaissance a bien entendu une influence fondamentale sur les propriétés de la solution et donc sur le choix d'une méthode numérique.

I.4.1. Régime Harmonique

Les problèmes de la propagation des ondes ce classent en deux grandes catégories qui sont :

- Les problèmes en temps (régime transitoire): trouver $u : (x,t) \rightarrow u(x, t)$
- Les problèmes en fréquence (régime harmonique) en cherchant la solution sous la forme $u(x,t) = u(x, \omega) \exp(-i\omega t)$ avec $\omega > 0$ et la Fréquence et on aboutit à l'équation

d'Helmholtz en régime établie.
$$-\nabla^2 u - \frac{\omega^2}{C^2} u = 0$$

I.4.2. Solution Exacte De L'équation De La Propagation d'onde

• Cas 1D Formule De D'Alembert

Si on prend l'équation générale de la propagation en 3D (I-50) dans le cas 1D, pour $i = j = 1$

on peut écrire cette dernière sous la forme suivante: $(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (I-69)

La solution est donnée par : $u(x,t) = h(x-Ct) + g(x+Ct)$

Si on suppose une vitesse constante et une source nulle, et si on s'intéresse au problème de Cauchy défini par le système d'équations suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (I-70)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x)$$

La solution du problème (I-70) pour $f = 0$, est donnée par la formule de d'Alembert suivante :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+Ct) + u_0(x-Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} u_1(s) dx \quad (I-71)$$

• Cas 3D Equation D'onde Au Second Membre

- Introduction

Les équations de propagation des ondes dans les solides (milieu continu) sont les résultats de certaines conditions imposées, par exemple les déplacements et les vitesses de propagations. Jusqu'à maintenant, nous avons considéré que le cas où la source est nulle (forces extérieures nulles). Dans ce paragraphe nous allons tenir compte des forces extérieures agissant sur le solide. La solution de ce type d'équations présente un domaine très riche d'investigation, plusieurs savants ont contribué pour la solution de ce problème telque Both poisson (1820), Kirchhoff (1883). Avec les conditions initiales de Cauchy, Kirchhoff présente une solution générale de ce problème, si on considère un volume v d'un matériau lié a une surface, comme il schématisé sur la Figure (I-11), La solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, z, t)}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 \phi(x, y, z, t) = f \quad (I-72)$$

Dans le cas général est donnée par la formule Kirchhoff suivante :

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \frac{1}{4\pi C^2} \int_v \frac{1}{r} [f] dv + \frac{1}{4\pi} \int_s \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right] - \left[\phi \right] \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} + \frac{1}{Cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \right) ds \quad (\text{I-73})$$

Avec: $\left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right] [\phi], \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$ sont des termes qui sont calculés à l'instant $t = t - r/C$.

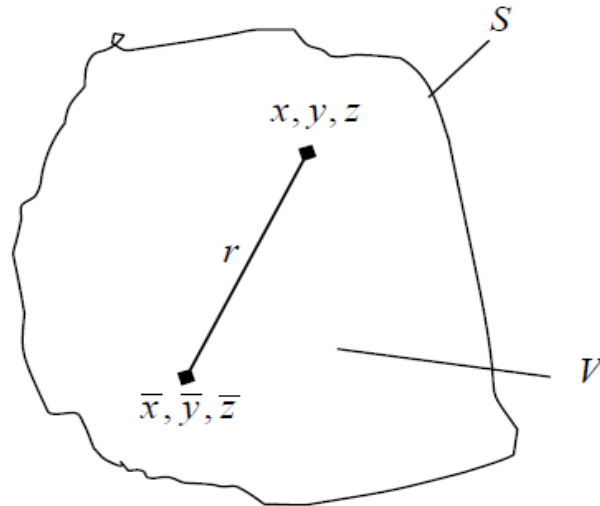


Figure I -11: Schématisation D'un Solide Pour La Présentation Du Solution De Kirchhoff

- Application de la transformée de Fourier en 3D

La solution proposé par Kirchhoff est généralement difficile à résoudre l'intégrale dans le cas tridimensionnel, pour cela on trouve une très grande application de la transformée de Fourier pour ce genre de problèmes.

Introduisons la transformée de Fourier du 4^{ème} ordre qui est définie par :

$$\bar{\Phi} k_1, k_2, k_3, \omega = \frac{1}{4\pi^2} \int_{v_4} \Phi x_1, x_2, x_3, \tau \exp i k_p x_p + \omega \tau dv_4 \quad (\text{I-74})$$

Avec : $P=1,2,3$ et $dv_4 = dx_1 dx_2 dx_3 d\tau$

L'inverse de la transformée de Fourier est donnée par:

$$\Phi x_1, x_2, x_3, \tau = \frac{1}{4\pi^2} \int_{v_4} \bar{\Phi} k_1, k_2, k_3, \omega \exp -i k_p x_p + \omega \tau d\bar{v}_4 \quad (\text{I-75})$$

$$d\bar{v}_4 = dk_1 dk_2 dk_3 d\tau \quad (\text{I-76})$$

Le symbole τ , correspond aux coordonnées spatiales, qui est définie par : $\tau = c_1 t$ En appliquant la formule de la transformée de Fourier à l'équation de propagation d'ondes nous allons obtenir l'équation caractéristique suivante:

$$\lambda + \mu k_p x_p \bar{u} + \mu k_q x_q \bar{u}_p - \rho c_p^2 \omega \bar{u}_p = \rho f_p \quad (\text{I-77})$$

Où le temps t est remplacé par $t = \frac{\tau}{c_1}$ déterminant de cette équation est donné par

$$\Delta = \left[\lambda + 2\mu \gamma^2 - \rho c_1^2 \omega^2 \right] \mu \gamma^2 - \rho c_1^2 \omega^2 \quad (\text{I-78})$$

$$\gamma^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (\text{I-79})$$

La solution de l'équation pour $p=1$ est:

$$\bar{u}_1 = \frac{\mu \gamma^2 - \rho c_1^2 \omega^2 \left[\lambda + 2\mu \gamma^2 - \rho c_1^2 \omega^2 \rho f_1 - \lambda + \mu k_1 \rho f_p k_p \right]}{\Delta} \quad (\text{I-80})$$

La solution générale de l'équation peut être trouvée facilement en remplaçant les indices de

$$\text{chacun des paramètres } \bar{f}_1, k_1 \text{ par } p, \text{ posons : } \beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \quad (\text{I-81})$$

$$\bar{u}_p = \frac{\beta^2 \gamma^2 - \omega^2 \bar{f}_p - \beta^2 - 1 k_p k_q \bar{f}_q}{c_1^2 \gamma^2 - \omega^2 \gamma^2 - \beta^2 \omega^2} \quad (\text{I-82})$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Fourier à cette dernière équation on trouve la solution générale de l'équation d'ondes en 3 D:

$$u_p = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\bar{v}_4} \frac{\beta^2 \gamma^2 - \omega^2 \bar{f}_p - \beta^2 - 1 k_p k_q \bar{f}_q}{c_1^2 \gamma^2 - \omega^2 \gamma^2 - \beta^2 \omega^2} \exp -i k_r x_r + \omega \tau \quad d\bar{v}_4 \quad (\text{I-83})$$

Avec: $p=1, 2, 3$ et $q=1, 2, 3$

Cette équation est la solution générale de l'équation d'ondes en trois dimensions. Pour le cas bidimensionnel, la troisième composante de f_q est nulle c-à-d $f_3 = 0$ et tous les facteurs entrant dans la solution, sont fonctions de x_1, x_2, \dots , et la transformée de Fourier dans l'espace, nous donne la solution en deux dimensions comme suit :

$$u_\alpha = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\bar{v}_3} \frac{\beta^2 \gamma^2 - \omega^2 \bar{f}_\alpha - \beta^2 - 1 k_\alpha k_\eta \bar{f}_\eta}{c_1^2 \gamma^2 - \omega^2 \gamma^2 - \beta^2 \omega^2} \exp -i k_\eta x_\eta + \omega \tau \quad d\bar{v}_3 \quad (\text{I-84})$$

Avec : $\gamma^2 = k_1^2 + k_2^2$ et $\eta = 1, 2$

Si on prend $x = x_1, y = x_2, u = u_1, v = u_2$ et si en plus $f_y = 0$ on peut écrire la solution en deux dimensions sous la forme suivante :

$$u = \frac{1}{c_1^2} \frac{1}{2\pi} \int_{v_3}^{\frac{3}{2}} \frac{\beta^2 k^2 + \eta^2 - \omega^2}{k^2 + \eta^2 - \omega^2} \frac{-\beta^2 - 1}{k^2 + \eta^2 - \beta^2 \omega^2} \bar{f}_x \exp -i kx + \eta y + \omega \tau \, dv_3 \quad (\text{I-85})$$

$$v = \frac{-\beta^2 - 1}{c_1^2} \frac{1}{2\pi} \int_{v_3}^{\frac{3}{2}} \frac{k\eta}{k^2 + \eta^2 - \omega^2} \frac{1}{k^2 + \eta^2 - \beta^2 \omega^2} \bar{f}_x \exp -i kx + \eta y + \omega \tau \, dv_3 \quad (\text{I-86})$$

I.5. Analyse Numérique de l'équation de la propagation des ondes

Les premières contributions de l'analyse numérique d'équations d'ondes remontent à moins de 40 ans. Le développement du calcul intensif pour la propagation des ondes a débuté dans les années 70 sous l'impulsion de l'industrie pétrolière. Plusieurs travaux ont été fait dans ce domaine on cite à titre d'exemple [K. S. Yee,1966] [J. Lysmer et B.L. Kuhlmeyer,1969] [R.M. Alford et al ,1974]:

Ces équations sont modélisées par des équations relativement simples (Systèmes hyperboliques linéaires de premier ou de second ordre). Ces équations cachent cependant, des phénomènes qui peuvent être très complexes et de natures très variées (Propagation, réflexion - transmission, diffraction, résonances, Guidage...).

Le domaine de la simulation numérique de ces équations est un Champ de recherche très actif en physique, en mathématiques et en méthodes numériques. Les domaines d'application industriels des phénomènes de propagation d'ondes ont un très grande champ d'application tel que :

- Secteur Pétrolier.
- Secteur Aéronautique et Spatial.
- Secteur Automobile.
- Secteur Militaire.
- Secteur Médical (Imagerie).
- Secteur Télécommunications.
- Secteur Energie.
- Secteur Composants.

La résolution du système d'équations (I-62), (I-63) peut se faire par différentes méthodes numériques. La méthode la plus utilisée est celle des différences finies d'ordre 2 de type saute-mouton [K. S. Yee,1966], cette méthode a des limites d'utilisation dans le traitement des milieux hétérogène, le développement actuel est d'aboutie a des méthode plus performants tel que :

- Méthodes des différences finis d'ordre élevé
- Méthode d'éléments finis d'ordre élevé.
- Méthode des volume et Galarkin discontinue.
- Traitement des potentiels retardé.
- Méthode des domaines fictifs.
- Raffinement de maillage et hybridation.
- Couplage multi physique.
- Développement des méthodes approchées.

I.6. Paramètres de propagation des ondes :

Des paramètres sont défini lorsque une telle onde se propagé dans un matériau élastique, à savoir les vitesses de propagation des ondes soit la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Dans un milieu homogène, la propagation dans une direction donnée d'une onde monochromatique (ou sinusoïdale) se traduit par une simple translation de la sinusoïde à une vitesse appelée vitesse de phase ou célérité. Dans un milieu non dispersif, cette vitesse ne dépend pas de la fréquence. En superposant des ondes monochromatiques de diverses fréquences (ou pulsations), on obtient des ondes plus complexes (Analyse spectrale). Lorsque la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, l'onde résultante subit aussi une translation globale de son profil, ceci sans déformation [Ait, Yahia ,S ,2015].

Dans un milieu dispersif ou lorsque les directions de propagation sont diverses (en dimension supérieure à 1, les composantes respectives se dispersent. Dans ce cas, il est souvent possible d'identifier des paquets d'ondes (ou groupes d'ondes) se déplaçant à une vitesse de groupe différente des vitesses de phase des composantes.

I.6.1. Vitesse de propagation

La vitesse de propagation d'une onde correspond à la vitesse de translation de son profil. Pour une onde harmonique monochromatique, elle est liée à sa longueur d'onde λ , à sa fréquence f et à sa période T par les égalités suivantes :

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{I-87})$$

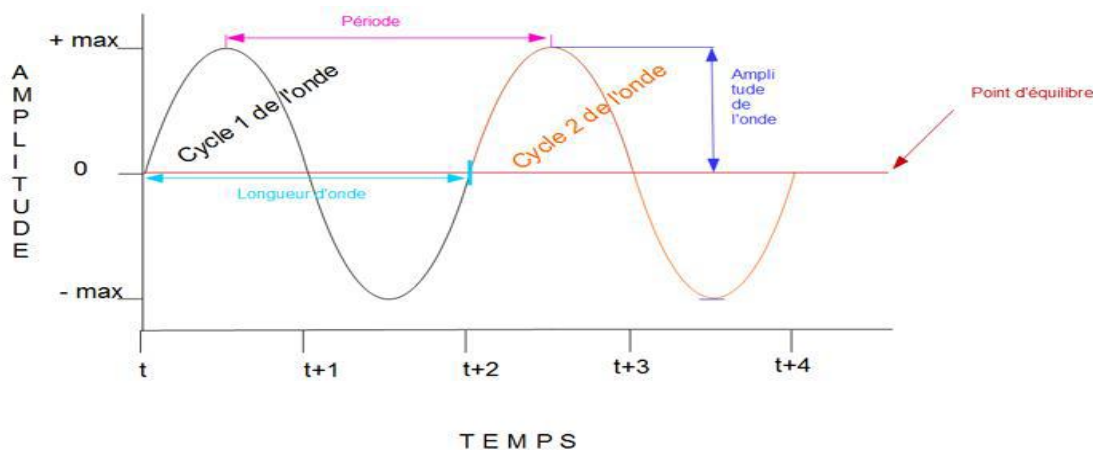


Figure I -12: Vitesse de propagation d'une onde monochromatique

Avec λ : la longueur d'onde (en m)

T : la période temporelle (en s)

v : la célérité de l'onde (en m.s⁻¹)

f : la fréquence temporelle (en Hz)

I.6.2. Vitesse de phase

La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace. En sélectionnant un point particulier de l'onde (par exemple la crête) Figure (I.13), ce point immatériel se déplace dans l'espace à la vitesse de phase. Elle s'exprime en fonction de

la pulsation de l'onde ω et du vecteur d'onde k :
$$v_{\phi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

En présente l'onde monochromatique dans l'espace et le temps par l'équation (I.88) :

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0) \tag{I-88}$$

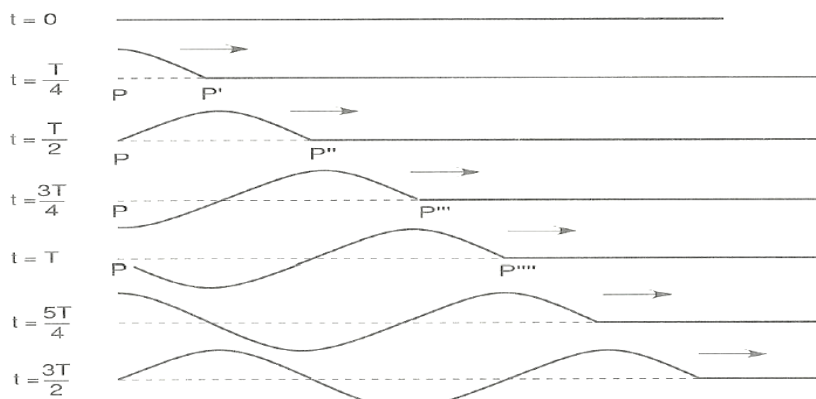


Figure I -13: propagation d'une onde le long d'une corde tendue

I.6.3. Vitesse de groupe :

D'après ce qui précède, la vitesse de phase d'une onde monochromatique est égale au rapport entre sa pulsation et son nombre d'onde (norme du vecteur d'onde).

Considérons le cas le plus simple d'une onde constituée de la superposition de deux ondes de pulsations voisines et d'amplitude unité (les phases, qui interviennent peu, sont ignorées) :

$$\phi(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (\text{I-89})$$

A l'aide d'une relation classique en trigonométrie selon laquelle une somme de cosinus est égale à un produit de cosinus (Formules de Simpson), il vient :

$$\phi(x, t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \quad (\text{I-90})$$

Ainsi, l'onde considérée est constituée du produit de 2 termes

Le premier est une onde monochromatique dont la vitesse de phase est : $v_\phi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$

Il intervient alors comme modulateur d'amplitude du premier terme.

Il se produit ainsi un phénomène de battement par lequel une sinusoïde de caractéristiques proches de celles des deux composantes est modulée en amplitude par une sinusoïde de pulsation inférieure. Pour des valeurs voisines des deux pulsations et des deux vecteurs

d'ondes des composantes, la vitesse de groupe est approximativement égale à : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Dans le cas général de la superposition de nombreuses ondes monochromatiques, cette vitesse de groupe concerne une enveloppe plus complexe qu'une sinusoïde. Il est possible de généraliser l'approche précédente aux paquets d'ondes dans un espace à plusieurs dimensions.

La relation qui exprime la pulsation en fonction du vecteur d'onde est la relation de dispersion. Lorsque la pulsation est directement proportionnelle au module du vecteur d'onde et que ces derniers sont tous colinéaires, alors la vitesse de phase est indépendante de la pulsation et la vitesse de groupe est égale à cette vitesse de phase commune. Dans le cas contraire, l'enveloppe de l'onde se déforme au cours de la propagation.

Le point de la **Figure.(I.14)** (a) avance à la vitesse de phase et (b) avance à la vitesse de groupe. Dans cet exemple, la vitesse de phase vaut le double de la vitesse de groupe.

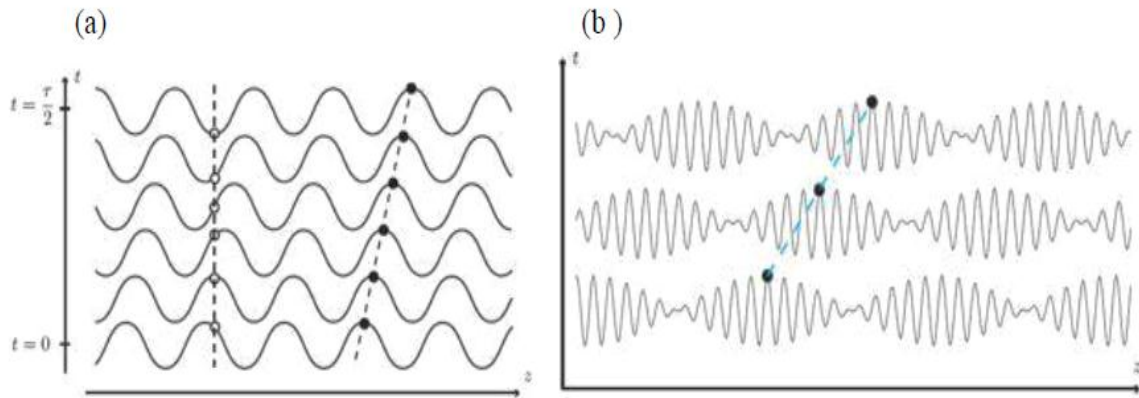


Figure I -14: a) Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe [Ait yahyia ,S .2015] .

I.7. Conclusion

Nous avons défini, dans ce chapitre, le phénomène de propagation des ondes élastiques dans les milieux dispersif et non dispersif ; ensuite nous avons cité quelques éléments de la propagation des ondes telles que la fréquence, la vitesse de phase et vitesse de groupe ; ainsi que les équations différentielles modélisant l'onde de propagation; le chapitre suivant portera les méthodes principaux de résolution des problèmes structuraux.

Chapitre II

Présentation du matériau d'étude

II.1. Généralité sur matériaux fonctionnellement gradués

II.1.1. Introduction :

Tous les nombreux secteurs (industriels ou aéronautique, génie civil, mécanique) doit être nécessaire en objectifs d'employer des matériaux innovants qui caractérisés par des performances techniques inégalées et des propriétés mécaniques élevées pour atteindre à une structure durable et plus rigide et de grande résistance à long terme. A cet effet une nouvelle classe des matériaux qui répondent aux objectifs précédents dits « matériaux composites ».

En générale les matériaux composites sont des associations des différents matériaux à la même pièce, mais le changement avec interruption des fractions de volume qui donne aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité, c'est-à-dire la constitution d'anisotropie des structures composites souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages. Donc ce problème doit être subit l'endommagement et des changements des propriétés mécaniques des structures. Par ailleurs le matériau composite traditionnel est incapable pour utiliser sous les environnements à hautes températures. A ce la il a encouragé les chercheurs dans littérature de découvrir un nouveau matériau qui permet de donner la solution de ce problème par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (**en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M"**).

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux environnements à haute température.

Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiales, biomécaniques, biomédical, automobiles et dans bien d'autres applications technologiques.

II.1.2. Définition des FGM :

Un matériau fonctionnellement gradué est une nouvelle classe de matériau composite dans le quel la microstructure des changements graduellement et continuellement des propriétés mécaniques de leur fractions de volume dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de l'élément.

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont des matériaux Appartienne dans la famille des composites d'ingénierie, ils sont fabriqués à partir de différents matériaux avec un changeant sans interruption les fractions de volume de continu de la composition, dans la

morphologie et effectivement dans la structure cristalline. Les matériaux à gradient de fonction (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce avec des caractéristiques homogènes. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Les domaines d'applications des pièces FGM sont nombreux. Nous pouvons citer par exemple le domaine aéronautique où les pièces FGM recherchées doivent résister à de fortes sollicitations thermiques et mécaniques, mais également le domaine biomédical où une pièce FGM peut allier les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure pour une prothèse articulaire de hanche.

Dans la plupart des activités de recherches et d'autre applications structurales ces matériaux FGMs sont généralement construits par un mélange de deux composants (le plus souvent en céramique et métal), en considération des avantages

Pour utiliser cette classe de FGMs, d'un côté si on doit faire une résistance plus élevée aux températures ou dégradations en place le contenu en céramique et d'autre côté si on doit faire des propriétés mécaniques comme la dureté plus élevée et haute force en place le contenu en métal. Une comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique est donnée dans le tableau ci-dessous :

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau II-1 : comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique

Le changement continu dans la composition et dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la (Figure II.1). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Fekrar Abdelkader, 2015].

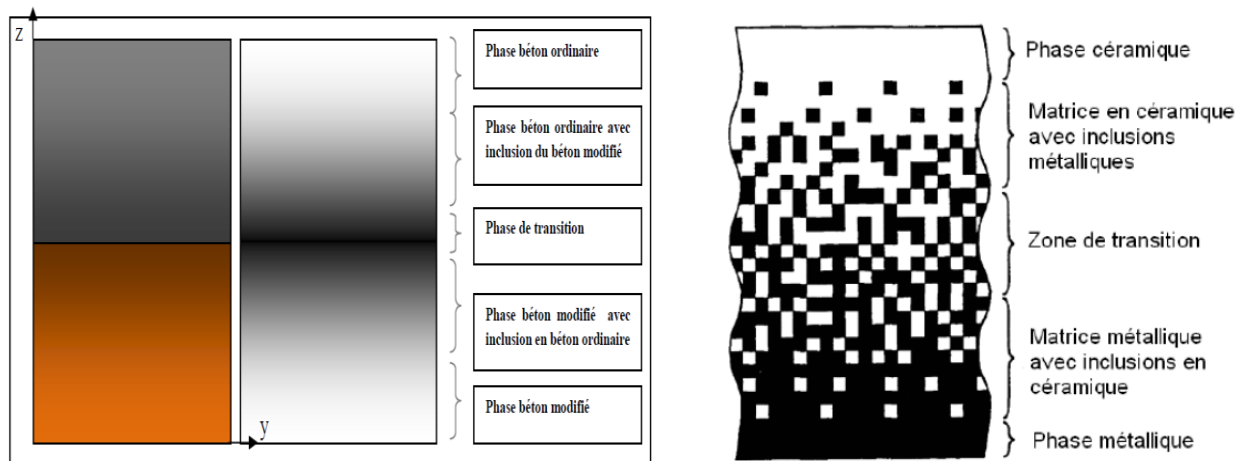


Figure II-1: Variation continue de la microstructure [Hirai T, 1996].

Les variations graduelles des fractions de volume des matériaux constitutifs et leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, ce qui permet d'éviter les problèmes des concentrations de contraintes aux niveaux des interfaces (provoquant le délaminage) des constituants et grâce à l'association des matériaux

Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la composition, varie de façon continue dans des directions préférées dans les FGMs.

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques,

II.1.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

On peut trouver les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) dans la nature et divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous etc. [Bellifa Hichem, 2014]

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie.

En 1984 et dans une université Japonaise en laboratoire national d'aérospatial à Sendai, un groupe de scientifiques M. Niino et ses collègues ont développé le concept de FGM pour la première fois. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion .Par ailleurs comme conséquence le groupe

scientifique ont prend en considération le changement continu des compositions et les propriétés physiques (porosité) des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) de telle sorte que la résistance mécanique et la conductivité thermique sont déférente [Fekrar Abdelkader, 2015]

En 1987, le gouvernement Japonais a déclaré un projet d'étude pour le développement des FGMs qui intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de Matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".c'est-à-dire que de chercher des matériaux pouvant travailler à des températures plus élève. A cet effet 17 laboratoires japonais de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Fekrar Abdelkader, 2015].Alors que ces matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

En 1987-1989, pour les essais des petites pièces de (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) ont été fabriqué par les chercheurs et soumis à une charge thermique. En conséquence ces pièces pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [H. Okamura, 1991]

En 1990-1991, des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. L'application des FGMs sont non seulement développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température mais ils sont aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique [H. Okamura,, 1991].Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé

pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

II.1.4. Domaines d'application des matériaux FGM

Les caractéristiques importantes de FGM ont fait privilégier dans presque tous les domaines humains de l'effort. Les FGM sont des matériaux légers, forts et durables. Les matériaux fonctionnellement gradués sont actuellement en cours appliqués dans un certain nombre d'industries, avec un énorme potentiel à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et l'application futuriste des FGM sont présentées dans cette section. Les domaines d'application actuels comprennent l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, optoélectronique et thermoélectronique. La **(Figure II-2)** montre les différents domaines d'application. FGM offre de grandes promesses dans les applications avec conditions de fonctionnement difficiles, ou par exemple, pour des revêtements résistants à l'usure pour la manipulation de grandes particules de minerai abrasif lourd dans l'industrie minière, pour les boucliers thermiques de fusée, pour les composants du moteur thermique, pour les tubes échangeurs de chaleur, pour les revêtements de plasma pour réacteurs de fusion dans les réacteurs nucléaires, pour les générateurs thermoélectriques, applications d'isolation électrique. Les matériaux fonctionnellement gradués sont également idéaux pour réduire la discordance dans les propriétés thermomécaniques dans la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le décollement. Les futures demandes pour les matériaux fonctionnellement gradués sont dans une telle application, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques extraordinaires sont nécessaires, et qui doit être capable de maintenir des environnements de travail sévères. Celles-ci domaines d'application potentiels futurs comprennent les applications, où la structure et les utilisations d'ingénierie nécessitent une combinaison de fonctions incompatibles, telles que la dureté et la ténacité. Les domaines d'application futurs des matériaux fonctionnels seront également étendus, lorsque les coûts de production de ces matériaux d'ingénierie importants sont réduits.

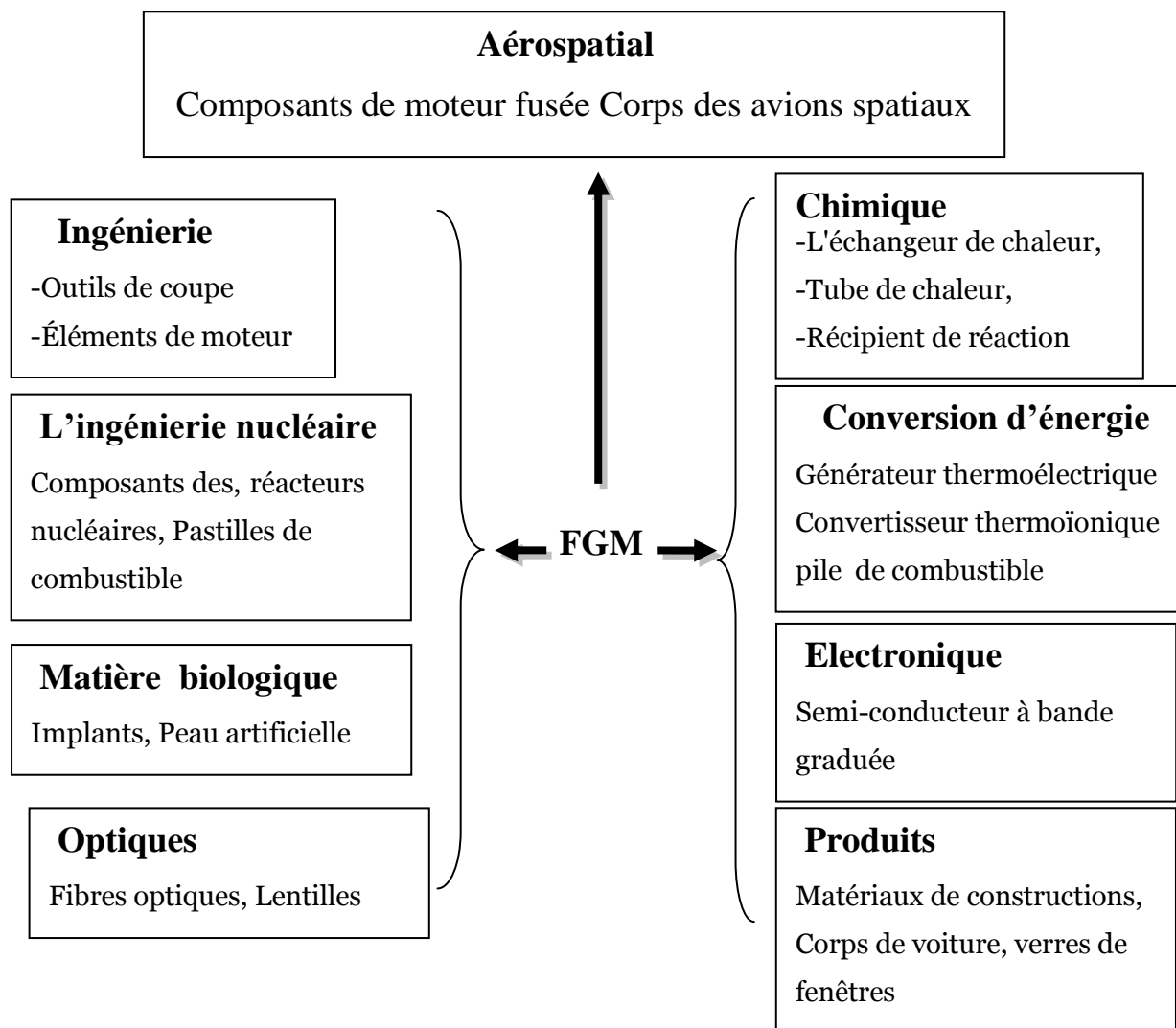


Figure II-2: Les principaux domaines d'application des FGM.

❖ L'industrie aérospatiale

L'application initiale où des matériaux fonctionnels ont été développés pour corps de plan d'espace. L'application de ce nouveau matériau est augmentée au fil des ans dans l'industrie aérospatiale. La plupart des équipements et structures aérospatiaux sont maintenant fabriqués matériaux fonctionnellement calibrés. Ceux-ci comprennent les composants du moteur de fusée, de la structure de l'engin spatial, les panneaux d'échange de chaleur, et certaines structures, telles que là les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de la caméra, les roues de turbine, la pale de turbine revêtements, les bouchons de nez, le bord d'attaque des missiles, et les navettes spatiales. Les matériaux fonctionnellement graduée sont également utilisés pour les murs structurels qui combinent thermique et propriétés d'isolation acoustique. Les automobiles sont une autre industrie, dans laquelle fonctionnellement matériaux classés ont été utilisés. Ceux-ci seront présentés dans la sous-section suivante.

❖ **L'industrie automobile**

L'utilisation des matériaux fonctionnellement graduée dans l'industrie automobile est encore limitée le moment, en raison du coût élevé de production de matériaux fonctionnellement graduée. Cependant, le matériau est utilisé dans des parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé actuel justifie son utilisation. Les présentes applications comprennent garnitures de cylindre de moteur pour pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour l'étincelle les bougies, les chambres de combustion, les arbres d'entraînement, les amortisseurs, les volants d'inertie, certaines pièces de carrosserie, la vitre et les freins de voiture de course. Aussi, les matériaux fonctionnellement calibrés sont utilisés dans les revêtements corporels améliorés pour les voitures, et que comprend les revêtements gradués avec des particules, telles que le dioxyde / mica.

❖ **Biomédical**

Le corps humain est constitué d'un certain nombre de matériaux fonctionnellement graduée, qui comprend les os et les dents. Ce sont les parties du corps humain les plus remplacées, comme un résultat de dommages à ces pièces, ou en raison du processus de vieillissement naturel. Les matériaux d'ingénierie biocompatibles sont utilisés pour leurs remplacements. Les pièces naturelles que ces matériaux remplacent sont des matériaux fonctionnels dans la nature. C'est pourquoi la majorité des matériaux fonctionnels dans l'industrie biomédicale sont utilisés pour les implants.

❖ **Défense**

Les matériaux fonctionnellement graduée sont utilisés dans l'industrie de la défense applications, telles que les gilets pare-balles, l'épée japonaise traditionnelle, et plaques d'armure. Un autre domaine d'application des matériaux fonctionnellement graduée est le corps des véhicules pare-balles.

❖ **Énergie**

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux calibrés, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Quelques-unes des applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie de l'énergie inclure la paroi interne des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour l'énergie conversion, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les récipients sous pression, électrode graduée pour la production de combustible oxyde solide, le piézo-électrique

fonctionnellement matériaux calibrés pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements de pale de turbine et les revêtements de barrière thermique.

❖ **Électrique / Électronique**

Les matériaux fonctionnellement graduée sont utilisés dans les industries électrique et électronique de nombreuses façons différentes. Ceux-ci comprennent dans la relaxation du stress sur le terrain dans le l'électrode et l'interface champ-espace , dans les diodes, dans les semi-conducteurs, pour isolateurs, et pour la production de capteurs. Le blindage thermique éléments dans la micro-électronique sont également fabriqués à partir du nanotube de carbone fonctionnellement matériaux calibrés.

❖ **Marine**

Les matériaux fonctionnellement graduée trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Les applications de matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine inclure dans l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes du sonar, le composite système de tuyauterie, et dans la coque de pression cylindrique.

❖ **Optoélectronique**

Les matériaux fonctionnellement graduée trouvent leur application dans l'industrie optoélectronique pour la production de pièces telles que celles fabriquées avec la fibre optique matériaux, la lentille, les lasers GRINSH, les photo détecteurs très efficaces, cellules solaires, le photo détecteur accordable, les supports de stockage magnétiques, et dans la production de semi-conducteurs avec un indice de réfraction variable.

❖ **Sport**

Des matériaux fonctionnellement graduée sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tels que les clubs de golf, raquettes de tennis et skis. Ceux-ci sont tous faits de matériaux gradués de manière fonctionnelle.

❖ **Autres**

L'application de matériaux gradués fonctionnellement comprend également, mais sans s'y limiter, outils de coupe et matrices pour améliorer la résistance thermique de l'outil de coupe et mourir, rasoir lames de fer-aluminure / acier inoxydable, dans l'équipement de sécurité, telles que Les bouteilles d'air anti-incendie, les portes ignifuges, les montures de lunettes et les casques. D'autres comprennent les tubes cryogéniques de l'IRM, les récipients

sous pression, les réservoirs de carburant, les malles pour ordinateur portable, les instruments de musique et les tables de radiographie. Les applications de Les mutilations génitales féminines au Japon ont également été présentées par Miyamoto . Les lecteurs peuvent consulter matériel pour d'autres lectures. Le domaine d'application des matériaux fonctionnels est devrait augmenter, si le coût de production de ce matériel est réduit à l'avenir.

II.1.5. Procédés de fabrication des matériaux FGMs :

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théorique par [Shen.H 2009] et [Kieb.A 2003]. Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaire jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGMs a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthode de production a été développée [Mort.A 95], [Hiari.T 96]. [Senouci .H et Maghrar .M, 2017].

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étape de la structure graduée à partir des matériaux précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (slip casting), coulage en bande (tape casting), dépôt par électrophorèse, compaction sèche des poudres, projection plasma, frittage en infiltration, implantation ionique

❖ Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

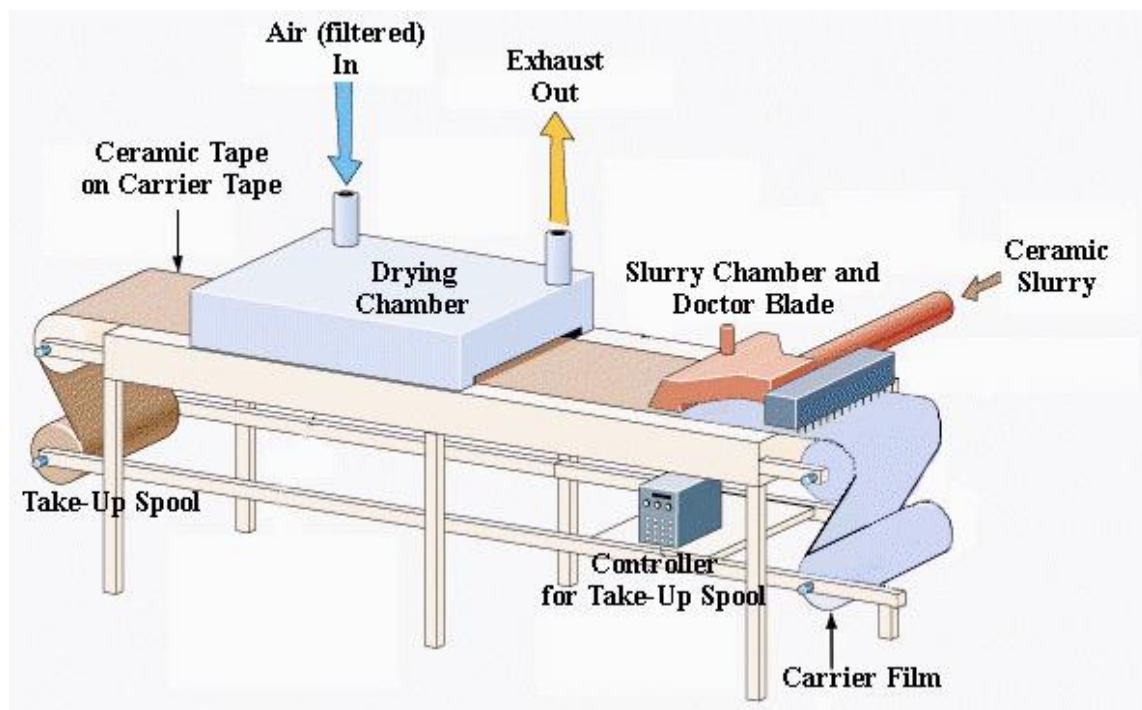


Figure II-3: Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mist.R 73] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch.P 86], [Boch.P 87].

❖ **Compaction sèche des Poudres :**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bish 93] [Senouci .H et Maghrar .M, 2017]. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection

plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM.

❖ **Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :**

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise »
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; [Moya.J 92].
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

❖ **Frittage et Infiltration :**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Teka.M 90].

❖ **Dépôt par électrophorèse :**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sark.P 96]. L'élaboration des FGMs peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Abdi.H 97].

❖ **Projection plasma :**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Stef.H 90].

❖ **Implantation ionique :**

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($< 1\mu m$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement d'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdi.H 97].

II.1.6. Les types de FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel sont avant tout des matériaux que l'on peut d définir comme des systèmes multiphasiques multi composants, présentant des interpénétrations moléculaires effectives entre eux, mais en rajoutant la notion de variation d'un des réseaux, chimiquement ou physiquement différent des autres, selon la section de l'échantillon. Ainsi, ces matériaux à gradient fonctionnel peuvent être schématisés par un empilement d'un nombre infini de couches, chacune étant une sous-couche à part entière avec sa propre composition, sa propre séparation de phase, et donc sa propre morphologie et ses propres propriétés. Le gradient peut alors présenter n'importe quel profil (linéaire, sinusoïdal, parabolique etc. ...) suivant l'application recherchée et la méthode de synthèse utilisée [Yosra. Dammak 2016].

Avec le développement des méthodes d'élaboration, les systèmes fonctionnels FGM peuvent être manufacturés comme substrat ou film dans des dispositifs à ondes acoustiques de surface, communément appelés SAW (Surface Acoustic Waves), basés sur l'intégration des matériaux piézoélectriques. Dans ce cas, la notion de matériaux à gradient fonctionnel est entendue aux matériaux piézoélectriques, appelés matériaux à gradient fonctionnel

piézoélectrique (FGPM). Des méthodes fiables sont nécessaires pour la mesure non destructive des propriétés des matériaux de la catégorie FGPM.

Il y a plusieurs procédés de fabrication des FGM et FGPM selon l'application désirée. Notamment pour les revêtements de surface, les méthodes de dépôt suivantes peuvent être utilisées [D. C. Hurley et al][M. Bruneau, C. Potel,] : CVD (dépôt chimique en phase vapeur), PVD (dépôt physique en phase vapeur), le sputtering, le dépôt par jet plasma... Cette dernière méthode est en plein développement et concerne la majorité des publications de ces dernières années. Les barrières thermiques sont la principale contrainte de ce type de revêtement. Shodja et al. ont étudié les contraintes électromécaniques dans un système FGM/substrat avec un échauffement au niveau du contact. Il apparaît que ce type de solution est plus résistant à la fatigue thermique et à la fatigue mécanique que les revêtements classiques.

L'autre famille de FGM est constituée des FGM massiques dont la fabrication se fait par d'autres techniques, par exemple la métallurgie des poudres (frittage) [G. M Crean, et A. Waintal ,1986].

Les métaux purs ont peu d'utilité dans les applications d'ingénierie à cause de leurs propriétés. Une application peut par exemple nécessiter un matériau dur et ductile, qui n'existe pas dans la nature avec ces propriétés. Pour résoudre ce problème, un métal est combiné avec d'autres métaux ou des couches métalliques selon l'application désirée : {métal/ métal}, {polymère/ métal}, {polymère/ céramique}, {polymère/ carbone}.

Le passage d'un système bicouche à un gradient de composition, du métal à la céramique, permet d'accommoder les différences physiques (CDT pour coefficient de dilatation thermique module d'Young, etc.) de ces deux matériaux permettant ainsi d'améliorer les propriétés thermiques et mécaniques de l'ensemble et de limiter l'apparition de contraintes résiduelles responsables de la délamination du dépôt. Par exemple, Khor et al, ont montré que la résistance aux chocs thermiques d'un dépôt à gradient de composition de NiCoCrAlY à ZrO₂ était cinq fois supérieure à celle d'un dépôt bicouche.

Les dépôts à gradient de propriétés évoluent donc d'un composé à l'autre, mais peuvent aussi évoluer d'une structure à l'autre, en passant par exemple d'un dépôt dense à un dépôt poreux ce qui permet une évolution graduelle des propriétés de la couche et notamment des caractéristiques élastiques et thermiques. On peut alors réaliser un dépôt à gradient de porosité entraînant, par exemple, une meilleure accommodation des contraintes, ou encore une augmentation de l'isolation thermique.

Deux voies principales sont utilisées pour la réalisation de FGM, soit en modifiant les conditions de projection (composition des gaz plasmagènes, intensité d'arc, distance de tir..), soit en faisant varier la nature et la composition des poudres initialement injectées.

Pour obtenir des dépôts à gradient de porosité, il y a ajout au sein de dépôt d'éléments qui seront ensuite éliminés par un traitement post thermique. Ces éléments sont couramment appelés des pyrogènes (composés organiques, métalliques, céramique fondant...) et sont très utilisés, par exemple dans l'élaboration de matériaux céramiques pour des applications médicales et en particulier pour l'élaboration d'os artificiels.

Une fois la couche réalisée, les éléments peuvent être éliminés, soit par pyrolyse, soit par sublimation entraînant l'apparition de pores ou de fissures. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir faire varier le taux de ces particules au sein de la poudre initiale du matériau à projeter permettant ainsi de contrôler le pourcentage de porosité et par la suite la variation du module de Young le long de la couche [J. J. Wortman, et R. A. Evans, 1965].

II.1.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (\text{II-1})$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (\text{II-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (**Figure.II-4**). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (\text{II-3})$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{II-4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

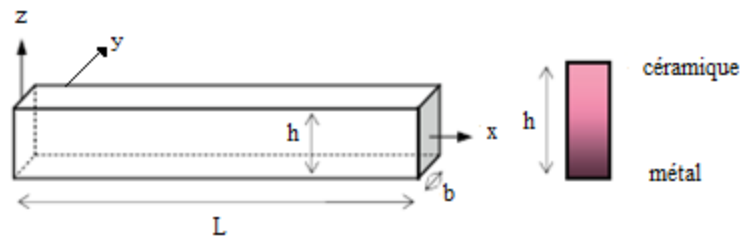


Figure II-4: Géométrie d'une poutre FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (**Figure II-4**). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit $E=E(z)$: et $\nu = \nu(z)$.

Jin and Batra [Jin,Z,H et Batra,R,C ;1996] , Ziou et *al.* [Ziou , H et al ;2016] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (PFGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

II.1.8. Propriétés matérielles de la poutre FGM

❖ La fraction volumique P-FGM

La rigidité de la poutre est supposée variable suivant sa hauteur 'h' ; la fraction volumique des matériaux P-FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance représentée par la relation [Ait Taleb, S ,2016].

$$g(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad (\text{II-5})$$

Où 'P' est un paramètre matériau et 'z' est dirigé suivant l'épaisseur 'h' de la poutre. Les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM [Bao. G, et Wang. L. 1995,]. Peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Ait Taleb, S ,2016].

$$E(Z)_{P-FGM} = E_{BO} + \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p (E_{BM} - E_{BO}) \quad (\text{II-6})$$

Telle que :

E_{BM} : Rigidité de la partie inférieure de la poutre FGM (béton modifié).

E_{BO} : Rigidité de la partie supérieure de la poutre FGM (béton ordinaire).

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (**Figure II.5**).

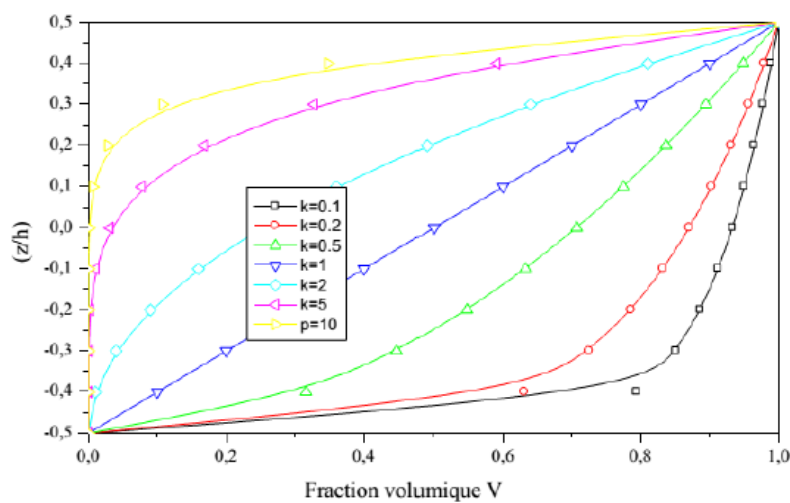


Figure II-5: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM [Bao. G, et Wang. L. 1995,].

❖ La fraction volumique E-FGM :

La majorité des chercheurs utilisent la fonction exponentielle [Bao. G, et Wang. L. 1995,], pour décrire les propriétés matérielles des matériaux E-FGM, qui s'écrit sous la forme de la relation ci-dessous :

$$E(Z)_{P-FGM} = E_{BM} e^{\beta(z+h/2)} \quad (\text{II-7})$$

$$\beta = 1/h \ln\left(\frac{E_{BO}}{E_{BM}}\right) \quad (\text{II-8})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la (**Figure II-6**).

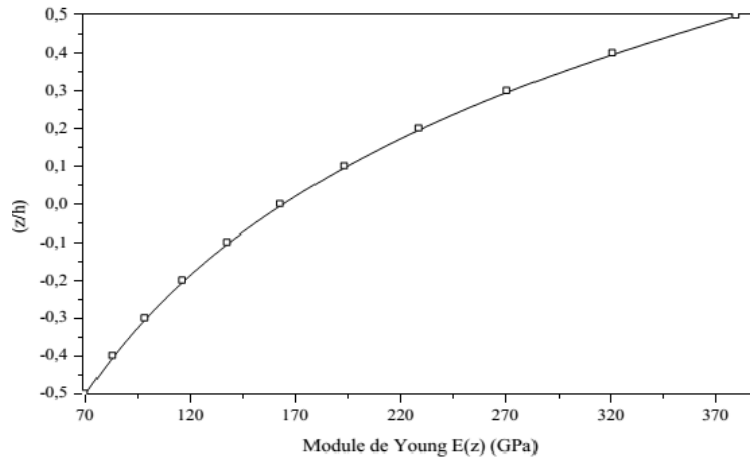


Figure II-6: Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM [Delale. F, et Erdogan. F 1983].

❖ La fraction volumique S-FGM

Pour définir la fraction de volume de la poutre S-FGM, deux fonctions de loi de puissance sont utilisées, ayant comme objectif l'assurance d'une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par les relations suivantes :

$$g_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{II-9}$$

$$g_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{II-10}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par la relation suivante, sa variation est représentée sur la (Figure II-7) :

$$E(z)_{P-FGM} = g_1(z) E_{BO} + (1 - g_1(z)) E_{BM} \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{II-11}$$

$$E(z)_{P-FGM} = g_2(z) E_{BO} + (1 - g_2(z)) E_{BM} \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{II-12}$$

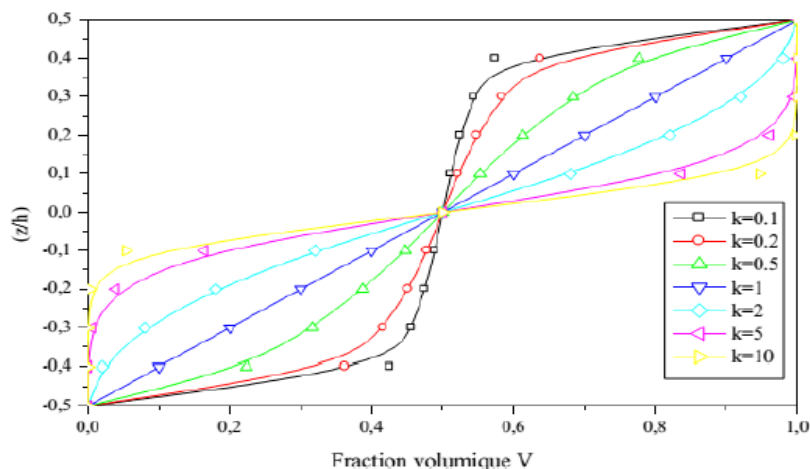


Figure II-7: Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM. [Delale. F, et Erdogan. F 1983,],

II.1.9. Avantages et inconvénients des FGMs :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

❖ **Avantages de la FGM :**

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement [Narot.P et al ,2011] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- ✓ Suppression de délaminage.
- ✓ Augmentation de la ténacité à la rupture.
- ✓ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

❖ **Inconvénients de la FGM :**

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant,

pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narot.P et al , 2011].

II.2. Conclusion

Avec la naissance d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel FGM) et son utilisation dans les différents domaines et leurs applications, dans ce chapitre nous avons défini le matériau à gradient fonctionnel « FGM », telle que l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Des structures innovantes sont créées grâce à la variation spatiale et progressive des propriétés de ce matériau. L'utilisation de ce matériau est connue dans de nombreux domaines d'application, et même dans les structures de génie civil. Dans le chapitre qui suit, en vas exposer les différentes théories qui régissent les déplacements dans les poutres.

Chapitre III

Eléments de modélisation d'une poutre FGM

- Théories de poutres
- Principe d'Hamilton

III.1. Introduction :

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension latérale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée des efforts et des déplacements. On présente ici les différentes théories des poutres. Les poutres représentent un élément très répandu pour modéliser les structures, soit en génie civil tel que les bâtiments, les ponts, les chemins de fer,...etc. soit en mécanique ou dans autres secteurs. En mécanique des structures,.

Les théories des poutres sont des modèles utilisés dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise trois modèles : [Aissani Khadidja.2017].

Le modèle 1	Le modèle 2	Le modèle 3
la théorie d'Euler-Bernoulli	la théorie de Timoshenko	La théorie d'ordre élevé
Elle néglige l'influence du cisaillement	Elle prend en compte l'effet du cisaillement, utilise le facteur de correction (le premier ordre).	Elle prend en compte l'effet du cisaillement

Tableau III-1 : Les théories des poutres

Les hypothèses principales sont les suivantes :

- l'axe de la poutre, x , est droit.
- la poutre se déforme dans le plan $x - z$, qui est plan principal d'inertie.
- la poutre transmet des efforts normaux en direction x , des cisaillements en direction z et des moments autour de l'axe y .

La construction d'une théorie de poutre consiste à reprendre, pour un milieu curviligne, le cheminement suivi pour le milieu continu. Les étapes successives du traitement sont donc la définition d'une cinématique, l'application des équations d'équilibre, l'introduction des lois de comportement. On en déduit des relations globales entre forces, couples, flèches et angles de rotation des sections. Dans le cas d'une poutre homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

En effet, toutes les méthodes de calculs développées dans le cours de résistance des matériaux dispensé au cours de notre cursus de formation sont valables pour autant que les proportions ou l'élanement entre la portée et la hauteur d'une poutre respectant les

conditions suivantes : $\frac{\text{longueur de la poutre}(L)}{\text{hauteur de la poutre}(h)} \geq 10$

Une poutre qui ne respecte pas l'élanement énoncé sus-dessus n'est plus sollicitée par de la flexion pure mais nécessite l'introduction du cisaillement transverse(CT).

III.2. Les modèles classiques :

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur (Reissner, 1961), [Yang, F et al .2002]. Les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées, la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée.

III.2.1. Premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres

❖ Principe de Saint venant:

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges.

❖ Principe de Navier Bernoulli généralisé :

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul .Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial.

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, infiniment voisines.
- Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre.

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff [Dhatt, 1969], qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à [Résiner, 1945], qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transverse constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transverse y sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes. Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre [Topdar, 2003]. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transverse, une fois introduits dans les modèles du 1^{er} ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluations dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre élevé ont été introduites au

début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre élevé à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres [Whitney, 1969]. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application. [Aissani Khadidja.2017].

III.3. Différents théories conventionnelles

III.3.1. La théorie classique des poutres :

La théorie classique des poutres (CBT) se base sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, selon lesquelles une section plane et normale au plan moyen de la poutre reste normale et perpendiculaire après déformation (**Figure III.1**).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné :

$$\text{Par } \begin{cases} U(x, y) = u_0 - z \cdot \frac{dw}{dx} \\ W(x) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

Avec : U, W : Les déplacements suivant les directions x, z respectivement.

u_0, w_0 : Les déplacements de la fibre moyenne suivant les directions x, z respectivement

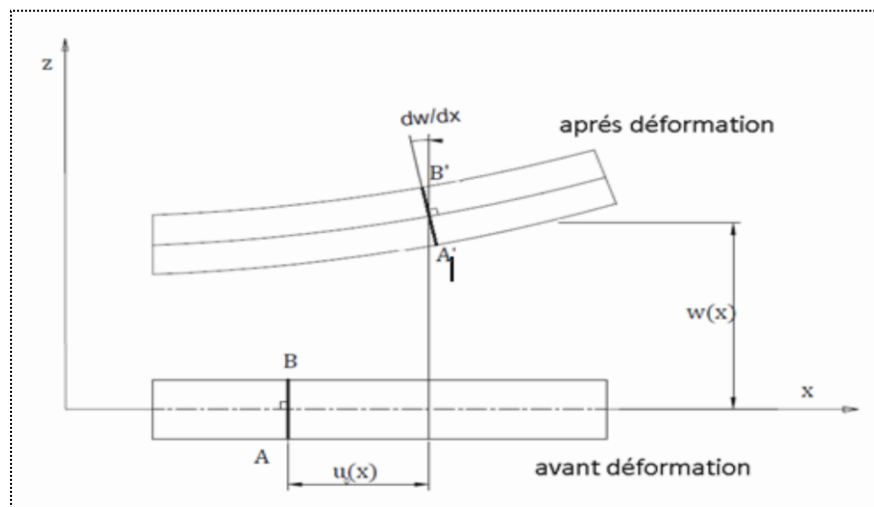


Figure III-1 : Schéma de principe de la théorie classique des poutres

$\frac{\partial w}{\partial x}$ est la rotation due à la flexion.

Sous ces hypothèses, les sections droites de la poutre ne subissent aucun glissement, en effet :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-2})$$

Donc il en résulte que le cisaillement est négligeable par les hypothèses de cette théorie.

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les poutres courtes.

III.3.2. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (Timoshenko) :

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) s'applique pour le cas des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (**Figure III.2**). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie peut être référée dans (Reissner, 1945 ; Mindlin, 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959), : [Aissani Khadidja, 2017]. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongée la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, et cela à travers ces hypothèses. L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne.

Le champ de déplacement pour un point $M(x, z)$ quelconque s'exprime en fonction de ces

inconnues : $u(x, z) = u_0(x) + z \cdot \frac{dw}{dx}$, $w(x, z) = w_0(x)$.

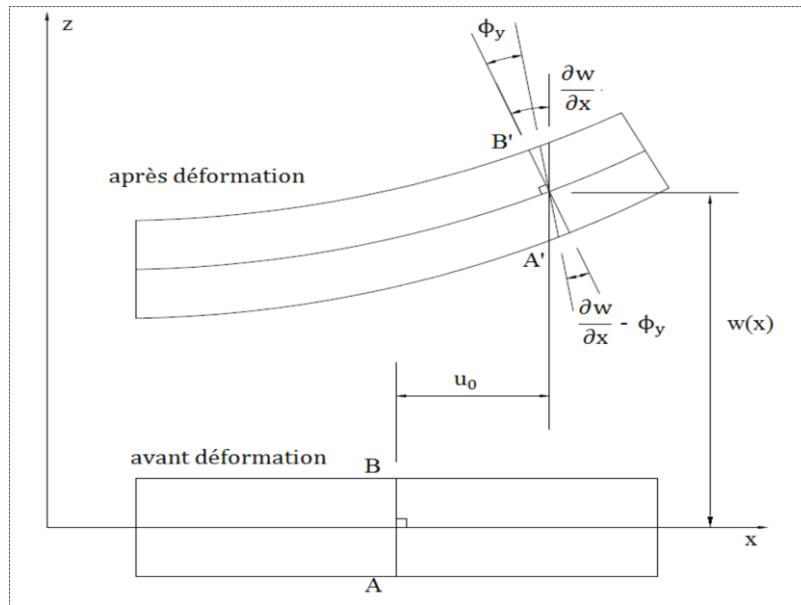


Figure III-2 : Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).

Où ϕ_y : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_y \\ \tau = \gamma \cdot G \end{array} \right. \quad \text{(III-3)}$$

Avec G : le module de cisaillement transverse.

Donc, cette théorie a corrigée le défaut de la théorie classique qui ne tient pas compte du cisaillement transverse, mais au même temps ces contraintes sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui n'est pas la réalité. Pour cela, les chercheurs ont trouvé des coefficients correcteurs notés "k" pour régler ce problème. Ces coefficients dépendent de la forme géométrique de la poutre considérée (par exemple, pour une poutre de section rectangulaire ($k=5/6$))

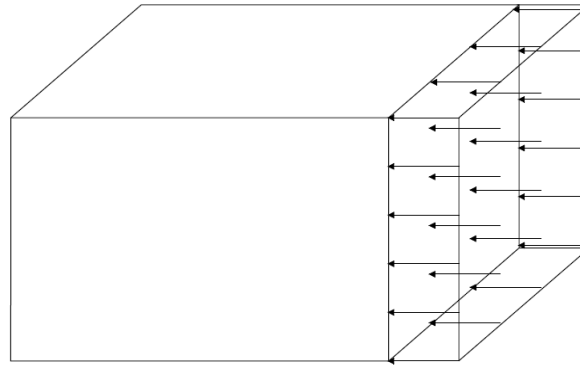


Figure III-3 : La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006 ; Davoodinik, 2005 ; Ugural, 1981). Un calcul plus exact (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006 ; Nowinski, 1978 ; Zhong et Yu, 2007 ; Chabraborty et al, 2003) des facteurs de correction sont obtenus en comparant l'énergie de cisaillement du 1er ordre avec l'énergie de cisaillement par contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

III.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevée (HSDT) :

À la différence de la théorie classique et la théorie de Timoshenko avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Par définition; le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de

la poutre perd sa planéité (**Figure III.4**). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

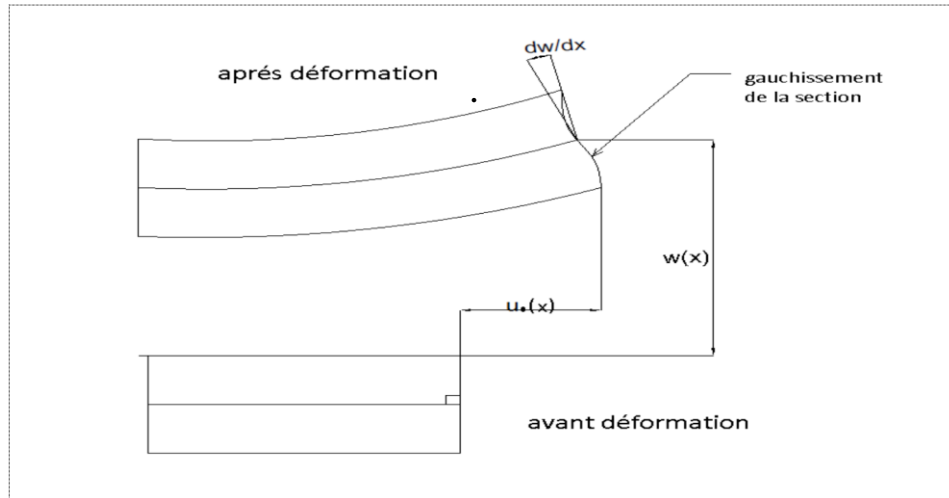


Figure III-4 : Illustration de la poutre d'ordre élevé

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suite:

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \cdot \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z) \varphi_y(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (III-4)$$

Avec : (u_0, w_0) et (φ_y) sont les déplacements en membrane et la rotation autour de l'axe y , respectivement, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$. Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, On doit avoir:

$$f'(z) = 0, \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (III-5)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions

cubiques qui répondent à la condition (**Figure III.5**) . Selon l'expression de la fonction de gauchissement.

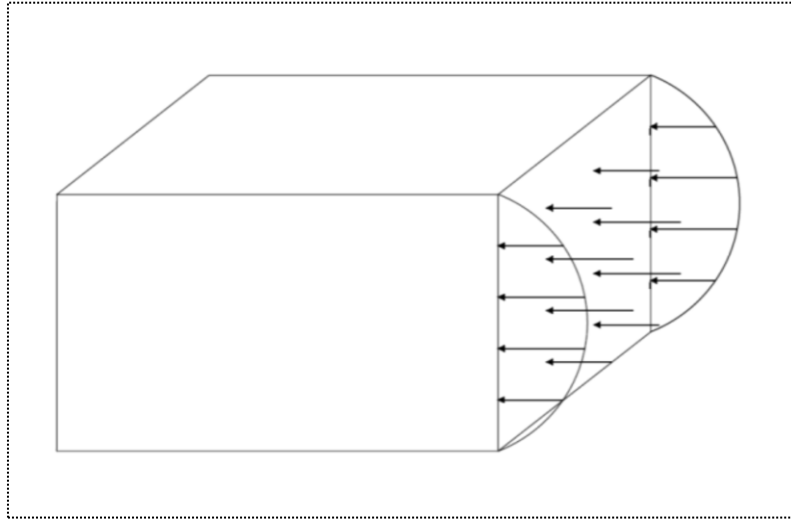


Figure III-5: La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d' (Ambartsumyan, 1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III-6})$$

- L'approche de (Reissner, 1945), Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-7})$$

- L'approche de [Reddy, 1997] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-8})$$

Dans le modèle de [Reddy, 1997] , le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La

distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

-L'approche de [Touratier, 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III-9})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots\right) \quad (\text{III-10})$$

III.4. Différents théories raffinées

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Récemment, El Meiche et al. [N. El Meiche et al ;2011] a développé une théorie nouvelle de plaque raffinée pour les plaques avec seulement quatre fonctions inconnues. Cependant, diverses théories d'ordre supérieur de déformation de cisaillement sont développées en utilisant cinq fonctions inconnues. Les théories bien connues de la plaque d'ordre supérieur avec cinq fonctions inconnues sont les suivantes : (i) théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre(TSDT) [Reddy JN;2000] , (ii) la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdal (SSDT) ([Zenkour AM;2006] ,[Zenkour AM;2009]) , et(iii) la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique (HSDT) ([Akavci SS,2007], [Benyoucef S et al, 2010], [Ait Atmane H et al, 2010]). En utilisant la même méthodologie présentée par El Meiche et al. [N. El Meiche et al ;2011] , cependant une théorie simple et efficace raffinée avec seulement quatre fonctions inconnues est développé pour la modélisation du comportement élastique de la flexion, flambement et en vibration libre des poutres composites sous différentes conditions aux limites. Les équations constitutives pour la poutre rectangulaire ont été obtenues en utilisant la loi de Hooke et la solution a été obtenue par la

minimisation de l'énergie potentielle totale. La théorie présentée est vibrationnelle, elle a une forte similitude avec la théorie d'ordre élevée des poutres dans de nombreux aspects, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Contrairement aux autres théories, le déplacement transversal est considéré comme étant l'effet combiné de la composante de flexion et de cisaillement. La théorie est appliquée à une poutre en matériau composite.

III.4.1. Formulation théorique

❖ Configuration géométrique

Considérons une poutre en matériau composite représentées dans la Figure III-6. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$. La poutre considérée pour l'analyse occupe la région : $0 \leq x \leq L$; $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$; $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$;

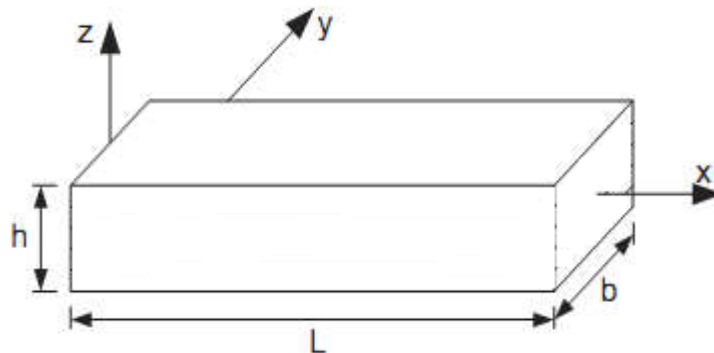


Figure III-6: Géométrie de poutre composite

Où x, y, z sont des coordonnées cartésiennes, L est la longueur de la poutre, b est la largeur et h est la hauteur totale de la poutre.

❖ La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT)

Le champ de déplacements dans la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT) à cinq variables définies par :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x \quad (\text{III-11a})$$

$$w = w_0(x, y) \quad (\text{III-11b})$$

Où u et w sont des déplacements dans les directions x et z , respectivement. Les déplacements u_0 et w_0 sont ceux d'un point du plan moyen ($x, z = 0$), θ_x est la rotation due à la flexion des plans yz , respectivement. $\psi(z)$ Représente la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre.

Le champ de déplacement de la théorie classique des poutres mince (classical thin beam theory CBT) est facilement obtenu en posant $\Psi(z) = 0$. Le déplacement de la théorie du premier ordre de cisaillement de déformation (first order shear deformation theory FBT) est obtenu en posant $\Psi(z) = z$. Bien que différentes fonctions de forme soient applicables, seuls ceux qui convertissent la théorie actuelle à la poutre de déformation de cisaillement parabolique correspondant à la théorie (PSDBT), la théorie des poutres de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDBT), la théorie des poutres de déformation de cisaillement de premier ordre (FBT) et la théorie des poutres de déformation exponentielle de cisaillement (ESDBT) sont employés dans la présente étude. Ceci est obtenu par le choix des fonctions de forme de la manière suivante :

$$\text{FBT: } f(z) = z, \quad (\text{III-12a})$$

$$\text{PSDBT: } f(z) = z \left(1 - 4z^2/3h^2\right) \quad (\text{III-12b})$$

$$\text{HSDBT: } f(z) = h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2) \quad (\text{III-12c})$$

$$\text{ESDBT: } f(z) = z \exp\left[-2(z/h)^2\right] \quad (\text{III-12d})$$

❖ La théorie d'ordre élevé à deux variables

La présente théorie a les caractéristiques suivantes :

- Il s'agit d'une théorie à base de déplacement qui inclut les effets de cisaillement transversal.
- Le nombre de fonction inconnue impliqué dans présente théorie n'est que de quatre. Même dans la théorie de Reissner et Mindlin (FBT), cinq fonctions inconnues sont impliquées.
- La théorie est cohérente variationnellement.

- La contrainte de cisaillement transversal de cisaillement zéro satisfait les conditions aux limites de contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre parfaitement.

- La théorie élimine la nécessité d'introduire le facteur de correction de cisaillement.

✓ Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

(i) Les déplacements sont très petits en comparaison à l'épaisseur h de la plaque et, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.

(ii) La composante du déplacement transversale (w) peut être dissociée en deux termes : le premier (w_b) représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que la dérivée de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le second terme (w_s), représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées x, y seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III-13})$$

(iii) La contrainte transversale normale σ_z est négligeable en comparaison à la contrainte dans le plan σ_x

(iv) Le déplacement u dans la direction (x) se compose d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. La composante du déplacement u dans les directions (x) peut être dissociée en trois termes :

$$U = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III-14})$$

La première composante u_0 représente le déplacement en membrane. La deuxième composante u_b , est la composante de la flèche similaire au déplacement donné par la théorie classique des poutres. L'expression de la composante u_b est donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III-15})$$

La troisième est la composante de cisaillement u_s , elle donne lieu, en collaboration avec w_s , une variation parabolique de déformations de cisaillement γ_{xz} , et donc à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure) de la poutre. L'expression du composant u_s est donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III-16})$$

✓ Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III-13) (III-14)

$$U = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III-17})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Où la fonction $f(z)$ appelée fonction de cisaillement et choisie de la forme.

$$f(z) = z - z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-18})$$

III.4.2. Champs de déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation (III-17), soit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-19})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Sur la base du champ de déplacement donnée dans l'équation (III-17), l'équation (III-19) devient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
\gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
\varepsilon_z = \varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_{xy} &= 0
\end{aligned} \tag{III-20}$$

Ou

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
k_x^s &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
g(z) &= 1 - f'(z) E t f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}
\end{aligned}$$

III.5. Principe d'Hamilton

Le principe de Hamilton est basé sur la minimisation de la fonctionnelle appelée Lagrangien du système, définie comme la différence entre l'énergie cinétique T du système et son énergie potentielle ψ . Dans le cas des systèmes continus, cette dernière quantité est classiquement appelée énergie de déformation élastique. Le principe d'Hamilton s'écrit entre deux instants t_1 et t_2 pour un système continu :

$$\int_{t_2}^{t_1} \delta(T - \psi + W) dt \tag{III-11}$$

Pour les petits mouvements des systèmes élastiques, l'énergie cinétique s'exprime sous la

$$\text{forme suivante } T = \int_v \frac{1}{2} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dv \tag{III-12}$$

L'énergie potentielle peut écrire comme suite :

$$\psi = \int_v \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{E\}^T \{D\}) dv \tag{III-13}$$

Le travail fait par une force P_s se définit de la façon suivante :

$$W = \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds \tag{III-14}$$

Partant des expressions présentées en équations (III-12 et III-13 et III-14), le principe d'Hamilton (équation III-11) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \left(\frac{1}{2} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} - \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{E\}^T \{D\}) \right) + \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds_1 - \int_s \{\delta \phi\}^T \mu ds_2 \right] dt$$

Le couplage entre les grandeurs électriques et mécaniques le principe de Hamilton devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \rho \{\delta \dot{U}\}^T \{\dot{U}\} - \{\delta \varepsilon\}^T [\bar{D}] \{\varepsilon\} + \{\delta \varepsilon\}^T [e] \{E\} + \{\delta E\}^T [e]^T \{\varepsilon\} + \{\delta E\}^T [\epsilon] \{E\} dv + \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds_1 - \int_s \{\delta \phi\}^T \mu ds_2 \right] dt = 0$$

III.6. Equations constitutives en 3 D

III.6.1. Tenseur des contraintes

En tout point P d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté σ_{ij} et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{III-15})$$

Par définition le tenseur des contraintes σ_{ij} est symétrique c.à.d.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}; \sigma_{31} = \sigma_{13}; \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

III.6.2. Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique défini par la théorie de linéarité (dite des petites déformations) par la formule :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III-16})$$

D'où : (\vec{u}) est le vecteur de déplacement du point P.

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{III-17})$$

III.6.3. Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (\text{III-19})$$

III.6.4. Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité peut être écrite sous la forme inverse :

$$\varepsilon = S\sigma \quad (\text{III-20})$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice S est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général comme suit :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

Avec :

$$S = C^{-1} \quad (\text{III-22})$$

III.7.Loi de Hooke généralisée

La relation qui exprime la linéarité entre les contraintes et les déformations s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{III-23})$$

Où : C_{ijkl} est un tenseur avec 81 constants élastiques. $C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ La symétrie du tenseur de contraintes donne :

$C_{ijkl} = C_{jikl}$ (Puisque $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). De la même façon, la symétrie du tenseur de déformations donne : $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ (Puisque $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$). Ainsi, le nombre des constantes indépendantes se réduit de 81 à 36. En raison de ce nombre réduit des constantes, la loi de Hook peut être écrite en notation contractée comme suit :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i,j=1,2,\dots,6) \quad (\text{III-24})$$

Où la notation contractée des contraintes et des déformations est définie par les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \sigma_3 &= \sigma_{33} \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} \varepsilon_4 = \varepsilon_{23} \\ \sigma_5 &= \sigma_{31} \varepsilon_5 = \varepsilon_{31} \\ \sigma_6 &= \sigma_{12} \varepsilon_6 = \varepsilon_{21} \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

On note ici que dans la notation contractée, les termes de la déformation de cisaillement sont définis comme précédemment :

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \quad (\text{III-26})$$

Les C_{ij} sont mentionnés par une variété de noms tels que : les constantes élastiques, module élastique et les coefficients de rigidité.

Pour que l'équation (III-24) ait une solution, il faut que : $|C_{ij}| \neq 0$

Le nombre des constantes élastiques indépendantes peut être encore réduit s'il existe une fonction de densité de l'énergie de déformation « W » tel que :

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (\text{III-27})$$

Avec la propriété :

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} \quad (\text{III-28})$$

Si la forme quadratique (III-27) existe de telle façon que la propriété (III-28) est vraie, alors « c_{ij} » est symétrique et le nombre des constantes est réduit en conséquence c'est-à-dire : $c_{ij} = c_{ji}$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

Cette matrice est symétrique avec 21 constantes indépendantes.

L'existence de la fonction W est basée sur la première et la deuxième loi de la thermodynamique.

Les résultats expérimentaux sont en accord avec cette théorie pour une réponse élastique du matériau.

La forme inversée de la loi de Hook s'écrit comme :

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (\text{III-30})$$

On note ici que : puisque la matrice de rigidité est symétrique, la matrice de souplesse l'est aussi.

Un matériau avec 21 constantes indépendantes est appelé « Anisotrope »

Le nombre maximum des constantes indépendantes pour un matériau anisotrope est limité par la symétrie du tenseur des contraintes et des déformations et l'hypothèse de l'existence de la fonction de l'énergie de déformation.

III.8. Matériaux anisotropes

III.8.1.Introduction

L'anisotropie se dit d'un corps dont les propriétés varient suivant la direction ; Les matériaux composites sont généralement des anisotropes par opposition aux matériaux métalliques qui sont des isotropes. La prise en compte de l'anisotropie est essentielle pour la conception et le dimensionnement d'une structure en matériaux composites car son comportement sera très différent de celui d'une structure isotrope de géométrie identique. Grâce à l'anisotropie on peut disposer les matériaux en fonction des états de chargement en chaque point, ce qui permet une réduction importante de la quantité en matière et donc du poids, La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc.

Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré. [J.Coirier ;2001].

III.8.2.Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Par exemple, le plan (X_1 - X_2) d'équation $X_3 = 0$ est un plan de symétrie, toutes les constantes associées à la direction positive de l'axe X_3 doivent être identiques à celle associées avec la direction négative du même axe X_3 (voir **Figure (III-7)**) :

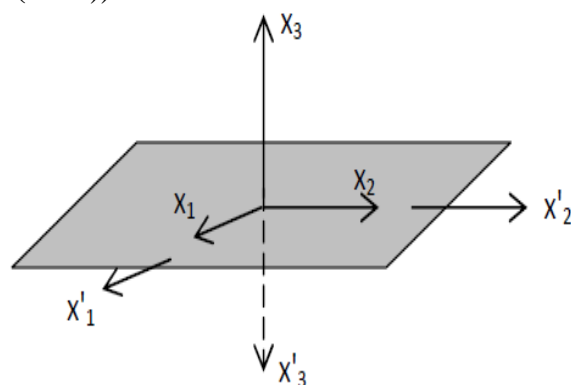


Figure III-7:Symétrie par rapport au plan X_1 - X_2

L'application de cette symétrie peut être déduite en considérant la loi de Hooke dans chaque repère :

$$\text{Repère } X_1-X_2-X_3 : \quad \sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \quad (\text{III-31})$$

$$\text{Repère } X'_1-X'_2-X'_3 : \quad \sigma'_i = c'_{ij} \varepsilon'_j \quad (\text{III-32})$$

Vu la symétrie par rapport au plan X_1-X_2 , nous aurons :

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 \sigma'_4 = \sigma_4 \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 \sigma'_5 = -\sigma_5 \end{aligned} \quad (\text{III-33})$$

$$\begin{aligned} \sigma'_3 &= \sigma_3 \sigma'_6 = \sigma_6 \\ \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon'_4 = \varepsilon_4 \\ \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2 \varepsilon'_2 = -\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (\text{III-34})$$

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon_3 \varepsilon'_3 = \varepsilon_3$$

Exprimant la première égalité $\sigma'_1 = \sigma_1$ dans l'équation (III-33) en fonction des déformations et des rigidités en utilisant les équations (III-31) et (III-32), on aura :

$$c'_{11} \varepsilon'_1 + c'_{12} \varepsilon'_2 + \dots + c'_{16} \varepsilon'_6 = c_{11} \varepsilon_1 + c_{12} \varepsilon_2 + \dots + c_{16} \varepsilon_6$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III-35})$$

Comme il est indiqué dans l'équation (III-35), un matériau avec un plan de symétrie matérielle à 13 constants élastiques indépendants.

Les propriétés effectives d'un composite unidirectionnel avec des fibres orientées hors axe peuvent être modélisées comme ceux d'un matériau anisotrope homogène. Comme il est indiqué dans la figure (III-6) deux systèmes de coordonnées cartésiennes sont identifiés : le système $(X_1-X_2-X_3)$ et le système $(X-Y-Z)$. La direction X_1 est celle des fibres, avec les directions X_2-X_3 perpendiculaires à cette dernière.

Le système de coordonnées (X-Y-Z) est obtenu par une rotation par rapport à l'axe X3. Le matériau possède une symétrie par rapport au plan X-Y et non pas par rapport à X-Z ou Y-Z.

Un tel matériau composite avec ce plan de symétrie est appelé **matériau monoclinique**.

III.8.3. Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaire simplifie l'existence du troisième ; si les caractéristiques d'une éprouvette découpée selon des axes symétriques par rapport un plan particulier P1(X1-X2) puis par rapport à un autre plan P2(X2-X3) sont identiques, alors, le matériau est orthotrope de plan d'orthotrope P1, P2 et évidemment P3 [V. Vasiliev et E. Morosov, 2001]

Les contraintes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ_5 doivent être égales aux contraintes correspondant au système de coordonnées X'_1, X'_2, X'_3 .

En suivant le même raisonnement que celui du paragraphe précédant nous aurons :

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0 \quad (\text{III-36})$$

La matrice de rigidité d'un matériau orthotrope à neuf (09) constants élastiques indépendants :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III-37})$$

III.8.4. Matériau unidirectionnel : (transversalement isotrope)

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolutions et admet le plan (2, 3) comme plan d'isotropie. Ses caractéristiques d'élasticité sont identiques pour tous les couples de direction symétrique par rapport à un axe ; Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). D'où un matériau composite unidirectionnel qui peut être considéré comme un matériau isotrope transverse (**Figure III-8**).

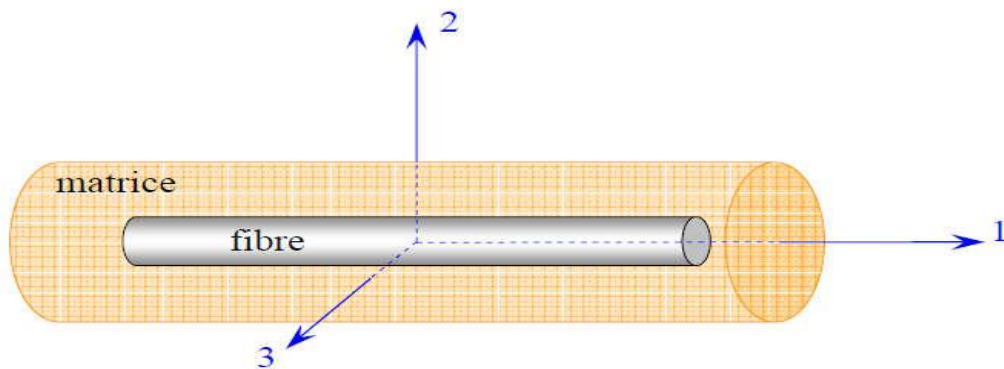


Figure III-8:Matériau composite unidirectionnel

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope est comme suit :

$$[c] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

III.8.5. Matériaux isotropes

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix de ses axes de référence. Les matériaux usuels ou bien classiques (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de directions privilégiés ou plans de symétrie, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$c_{11} = c_{22}, c_{12} = c_{23}, c_{66} = \frac{c_{22} - c_{23}}{2} = \frac{c_{11} - c_{22}}{2}$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donné par :

$$[c] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

III.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des poutres ainsi que les modèles analytiques à savoir la théorie classique des poutres (CBT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans les poutres en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation est utilisé pour obtenir les relations déformation déplacement. Le tenseur de contraintes est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke et enfin pour terminer la définition du principe des travaux virtuels.

Chapitre IV

Etude Analytique de la
propagation des ondes dans
les poutres imparfaites

IV.1. Introduction

Des nombreux avantages sont présentés pour l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) dans des composants structuraux d'ingénierie telle que en génie mécanique, aéronautique, nucléaire et génie civil, macroscopiquement les FGM n'ont pas de problèmes de décollement et de délaminage qui résultent de fortes concentrations des contraintes inter-laminaires. Ce sont des matériaux composites hétérogènes qui sont généralement composés de deux matériaux différents comme le céramique-métal. La composition du matériau change progressivement suivant la direction de l'épaisseur. En conséquence, les propriétés mécaniques sont supposées variables de manière continue à partir de la surface supérieure à la partie inférieure. Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et dynamiques.

Lors des processus de fabrication et de frittage des matériaux FGM, des imperfections sous forme de porosité matérielle peuvent surgir et conduisent à la modification des propriétés mécaniques des pièces fabriquées à partir de ces matériaux [A. Tounsi et al, 2006]. Ceci est dû à la large différence de la température de solidification [Zhu J et al, 2001]. Wattanasakulpong et al. [Wattanasakulpong N. et Ungbhakorn V, 2014] donnent une discussion sur les porosités se produisant à l'intérieur des FGM fabriqués par la technique d'infiltration séquentiel [Mahmoudi A. et al, 2017].

L'objectif visé dans ce chapitre est de développer une théorie de déformation par cisaillement efficace pour l'analyse de propagation d'ondes dans une poutre fonctionnellement graduée avec des porosité et une description générale sur le milieu imparfait (poreux). La théorie de la déformation par cisaillement proposée est une méthode efficace car elle permet de montrer l'effet des composantes de flexion et de cisaillement et ceci est réalisé en divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement. Les propriétés du matériau sont supposées classées dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions volumiques des constituants; mais la règle du mélange est modifiée pour décrire et approcher les propriétés matérielles de poutres graduellement fonctionnelles avec des phases de porosité. Les équations régissant la propagation de l'onde dans la poutre fonctionnellement graduée sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. La relation de dispersion analytique de la poutre fonctionnellement graduée est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. Les effets des distributions de la fraction volumique, de la profondeur de la poutre, du nombre d'ondes et de la porosité sur la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduée sont discutés en détail. On

peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple à prédire les caractéristiques de propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement gradué.

IV.2. Description d'un milieu poreux

IV.2.1. Généralité :

Un matériau poreux est un milieu biphasique constitué d'une partie solide (squelette) et d'une partie fluide. Lors de la propagation d'une onde sonore dans un tel milieu, des interactions entre ces deux phases de nature différente ont lieu. L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents modèles utilisés pour décrire ces phénomènes. Ces modèles ont été développés en supposant vérifiés un certain nombre d'hypothèses. Lorsque nous abordons l'étude des milieux poreux, une des premières questions que nous nous posons est celle de l'échelle spatiale d'analyse : deux échelles d'espace sont en effet envisageables.

La première est l'échelle microscopique. A ce niveau, la partie solide d'une part, et la ou les parties fluides d'autre part, occupent des domaines géométriques distincts dans un volume élémentaire de milieu poreux. Un point géométrique se trouve donc à un instant donné dans une des phases solide ou fluides bien identifiée. Cette échelle microscopique a la dimension du pore. C'est à cette échelle qu'est écrit l'ensemble des équations mécaniques, physiques et/ou chimiques régissant les comportements des phases et les interactions entre celles-ci. C'est donc naturellement l'échelle adaptée à la résolution des problèmes de "taille microscopique", tels que les problèmes interfaciques par exemple.

Dans un milieu poreux, la porosité se scinde en deux parties distinctes. D'une part, la porosité connectée correspond à l'espace interstitiel continu, ou connecté, où s'effectue l'écoulement de la ou des phases fluides. Deux points appartenant à un même fluide sont alors reliés par un trajet interne continu. D'autre part, la porosité occluse, saturée de fluide ou non, piégée dans la matière, n'est quant à elle le lieu d'aucun écoulement fluide. La matrice du milieu poreux est alors constituée de la partie matérielle solide du volume élémentaire et de sa porosité occluse, (**Figure IV.1**). La porosité est dans la suite assimilée à la porosité connectée et est notée α . Elle correspond au ratio volume de l'espace connecté sur volume total élémentaire.

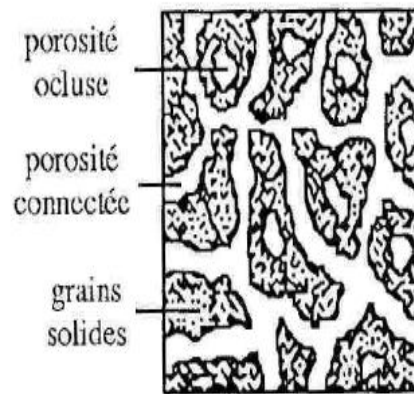


Figure IV-1: Définitions de la matrice et des différentes porosités à l'échelle microscopique, d'après Coussy [Coussy O ,1991].

La ou les phases fluides combent totalement ou partiellement l'espace poreux du volume élémentaire. Si un unique fluide occupe totalement l'espace poreux, alors le milieu est saturé. Notons cependant que ce fluide n'est pas nécessairement homogène, il peut présenter plusieurs composantes, un solvant et plusieurs solutés par exemple. Dans le cas où la saturation est partielle, plusieurs fluides distincts coexistent : le cas le plus courant est celui où une troisième phase de type gazeuse est prise en compte, l'air par exemple. Plusieurs phases fluides différentes apparaissent alors dans l'étude des milieux poreux non saturés.

La seconde approche se place au niveau macroscopique. Cette échelle macroscopique est adaptée à l'étude des problèmes "à taille humaine" tels que ceux rencontrés en mécanique des sols et des structures, en géo-mécanique ou bien encore en sismologie. L'étude des problèmes d'ingénierie au sens large en géosciences nécessite donc de travailler à cette échelle. Au niveau macroscopique, le volume élémentaire est modélisé par la superposition de plusieurs particules matérielles occupant aux mêmes instants les mêmes points géométriques mais avec des cinématiques à priori différentes, (**Figure IV-2**).

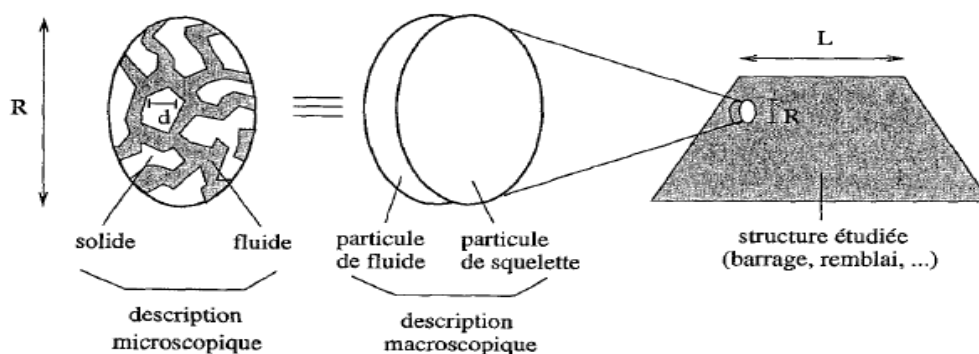


Figure IV-2: Les différentes échelles spatiales du milieu poreux, d'après Dormieux et Bourgeois [Dormieux , L et Bourgeois E,2002].

Le choix de la taille du volume élémentaire doit répondre à deux objectifs. D'une part, il doit être représentatif du milieu poreux, à savoir il doit être d'un ordre de grandeur suffisamment grand spatialement pour fournir une modélisation pertinente de l'ensemble des phénomènes physiques microscopiques. On parle de (v.e.r) pour volume élémentaire représentatif. D'autre part, son étendue spatiale doit être très inférieure à la dimension du problème macroscopique posé, permettant ainsi une description continue de la matière. Si nous désignons par L la taille caractéristique du système étudié, par R l'ordre de grandeur de l'étendue spatiale du volume élémentaire représentatif et par d la dimension caractéristique des pores, cf. Figure IV-3, les conditions précédentes sur les différentes échelles de perception d'un milieu poreux se résument de la façon suivante : $d \ll R \ll L$

Le milieu poreux est donc traité par une description continue de la matière, et est considéré comme un milieu continu classique mais généralisé à plusieurs phases, c'est-à-dire comme une superposition de plusieurs milieux continus. Le squelette est défini macroscopiquement comme l'addition de la matrice, qui

en constitue la partie matérielle, et de l'espace poreux connecté : c'est la phase solide coïncidant avec la ou les phases fluides occupant l'espace poreux connecté, (**Figure IV-3**). Précisons que le milieu poreux a un caractère de milieu ouvert de par l'existence des mouvements différentiels entre les différentes phases. Les équations poroélastiques propres et de couplage sont alors écrites pour les différentes phases moyennées solide et fluide(s).

Notons bien que nous ne nous soucions plus ici de la géométrie réelle du milieu poreux élémentaire qui relève de l'approche microscopique.

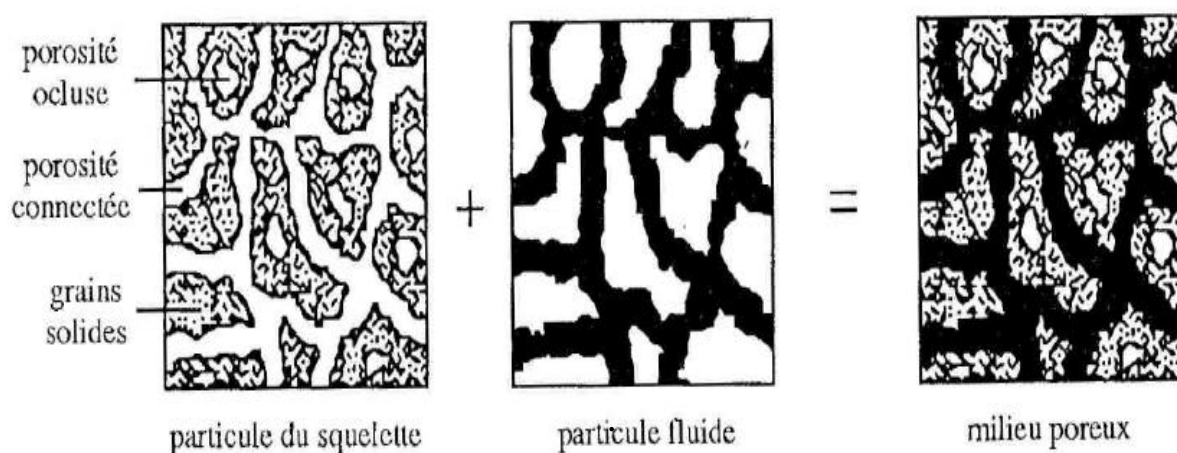


Figure IV-3:Présentation des différentes phases du milieu poreux, d'après Coussy [Coussy .O ,1991]

IV.2.2. Hypothèses sur le milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu désordonné au niveau microscopique bien que statistiquement homogène et isotrope au niveau macroscopique. Une description microscopique est trop complexe, et le comportement d'un matériau poreux est étudié de manière macroscopique en raisonnant sur les valeurs moyennes des grandeurs microscopiques. On considère que les déplacements des phases solide et fluide sont petits. Pour les phénomènes acoustiques, cette condition est toujours vérifiée. D'autres hypothèses doivent être adoptées pour utiliser les résultats de la mécanique des milieux continus. La caractérisation du matériau à l'échelle macroscopique se fait sous les hypothèses simplificatrices suivantes :

➤ **Continuité des phases**

La structure est connexe, et les phases solide et fluide sont supposées être continues. Ainsi, les pores du milieu poreux sont supposés connectés entre eux et avec l'extérieur. La présence d'éventuelles inclusions fermées au sein du milieu poreux n'est pas prise en compte.

➤ **Homogénéité**

Les paramètres qui caractérisent le milieu poreux sont définis sur un volume, d'homogénéisation VH , dans lequel les paramètres physiques, telles que la porosité, la perméabilité, la tortuosité ... ont des valeurs constantes. On définit ainsi le volume d'homogénéisation qui intègre en fait, tous les effets des inhomogénéités propres aux milieux diphasiques. Il est à noter que les dimensions de ce volume élémentaire peuvent varier selon les paramètres étudiés (porosité, perméabilité, tortuosité...), le volume minimum d'homogénéisation du milieu poreux sera donc le plus grand de ces volumes.

➤ **Grande longueur d'onde**

Dans le cas d'une excitation par une onde acoustique et afin de négliger les effets de la diffusion au sein du matériau, on travaille à des fréquences telles que la longueur d'onde λ est grande devant les dimensions du volume d'homogénéisation, donc grande devant la dimension caractéristique des pores (rayon moyen des pores). Les expériences mécaniques n'auront de sens macroscopique que si l'échantillon est grand devant ce même volume.

➤ **Isotropie**

Dans notre étude on ne s'intéresse qu'à des milieux poreux supposés isotropes. Cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais elle simplifie grandement les développements analytiques.

IV.2.3. Paramètres décrivant le milieu poreux

Par exemple lorsqu'une onde acoustique se propage dans un milieu poreux, les phases solides et fluides sont mises en mouvement et des interactions entre structure et fluide génèrent, dans le milieu poreux, de la dissipation. Certains de ces paramètres [Delanay M. E. and Bazley E. N,1970] dépendent uniquement de la forme du solide poreux et ne varient pas lorsqu'on dilate ou change l'échelle du solide. C'est le cas de la porosité et de la tortuosité. D'autres dépendent des dimensions, c'est le cas des perméabilités visqueuses et thermiques qui varient, à forme égale comme une surface et des longueurs caractéristiques qui varient comme des longueurs.

➤ Porosité α

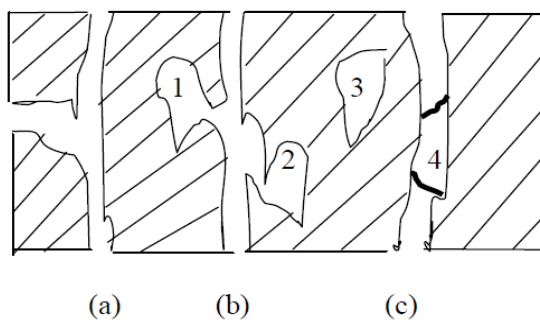
Par définition, la porosité α d'un matériau poreux est le rapport du volume occupé par le fluide V_f (supposé saturer les espaces vides du squelette) au volume total occupé par le matériau V_t [Sadouki.M.2014].

$$\alpha = \frac{V_f}{V_t} \quad (IV-1)$$

Le volume du squelette est donné par : $V_s = V_t - V_f$ (IV-2).

Ainsi, la porosité α est déterminée par la connaissance de deux des trois paramètres volumiques : V_s , V_t , V_f .

Il existe trois types de porosité (**Figure IV-4**). Lorsque tous les pores sont en contact avec l'extérieur, la porosité est dite ouverte ou connectée. Lorsque le volume du fluide est clos par le squelette, la porosité est dite occluse. Il ya aussi la porosité piégée qui mesure les espaces semi-fermés où un fluide mouillant ne peut pas pénétrer aisément [Depollier C.1989]. Dans la plupart des milieux étudiés, la porosité occluse est pratiquement négligeable, les cavités contenant le fluide étant souvent reliées par des fissures ou des canaux.



- a) Porosité connectée
- b) Porosité piégés dans les bulles
(1) et (2)
- c) Porosité occluse :
 - Dans une bulle (3)
 - Dans une pore obturé (4)

Figure IV-4: Schéma des différentes porosités.

La valeur de la porosité est comprise entre 0 et 1. Les matériaux poreux utilisés pour l'absorption acoustique (mousses polyuréthanes, laine de verre...) ont généralement une porosité comprise entre 0.85 et 0.99. Les céramiques poreuses ou les roches peuvent prendre des valeurs très inférieures [Allard J. F.1993].

Plusieurs méthodes ont été développées pour mesurer la porosité [Sadouki.M.2014].

-Mesure de la porosité

L'évaluation de la porosité est possible en mesurant le volume d'air compris à l'intérieur d'un échantillon de matériau poreux à l'aide des propriétés des gaz parfaits. Beranek décrit un appareil, le porosimètre, utilisant ce principe. Une méthode dynamique mise au point par Leonard permet de mesurer la porosité à partir d'un système mécanique. Par la suite Champoux *et al* ont proposé quelques améliorations au prosimètre de Beranek. Henry a développé et installé un dispositif de mesure de la porosité au laboratoire d'acoustique du Mans. L'échantillon est placé dans une enceinte fermée dont on peut faire varier le volume en déplaçant un piston. Une variation ΔV du volume initial V_0 entraîne une variation ΔP de la pression initiale P_0 . Si la transformation est isotherme, le produit PV est constant, et on a [sadouki.m.2014]:

$$P_0 V_0 = (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V) \quad (IV-3).$$

On en déduit le volume d'air initial V_0 , puis le volume d'air V_a dans le matériau. La connaissance du volume total V_T fournit la porosité

$$\alpha = V_a / V_T \quad (IV-4).$$

Fellah *et al* [Fellah ZEA ,Fellah ZEA *et al*] ont proposé des méthodes intéressantes pour la mesure de la porosité. Le principe est basé sur la détection de l'onde réfléchie par la première interface du matériau poreux.

➤ Tortuosité haute fréquence α_∞

La tortuosité est un paramètre important pour décrire les effets inertiels qui se produisent entre les parties fluide et solide d'un matériau poreux. L'inclinaison et les variations de section des pores obligent le fluide à suivre un chemin non rectiligne. Ainsi, la vitesse moyenne microscopique du fluide va être de norme et de direction différente de la vitesse macroscopique (Figure IV-5). [Sadouki.M.2014]:

Considérons un milieu poreux constitué de pores cylindriques parallèles, la tortuosité α_∞

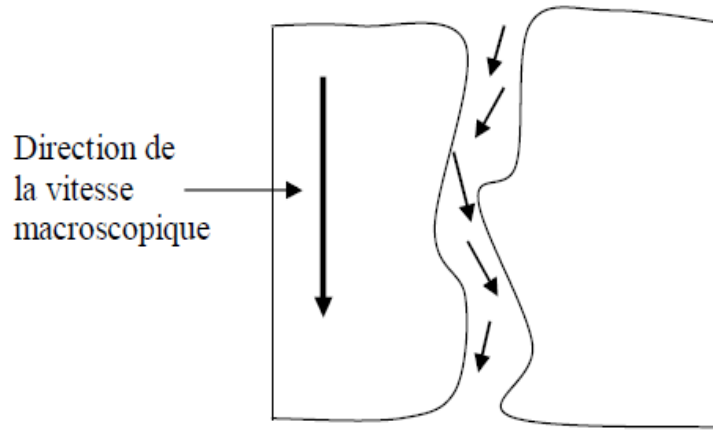


Figure IV-5: Variation de norme et de direction de la vitesse d'un fluide inclus dans un pore.

➤ **Facteur d'inertie α_0 (tortuosité basse fréquence)**

Le facteur d'inertie α_0 correspond à l'approximation basse fréquence de la tortuosité dynamique donnée par Norris [Norris A. N,1986] :

$$\alpha_0 = \frac{v(r)^2}{v_0^2}, \quad (IV-5).$$

Où $v(r)$ est la vitesse moyenne du fluide visqueux pour un flux de courant continu dans un élément de volume petit par rapport à la longueur d'onde concernée, mais grande par rapport aux grains individuels/pores du solide. Notons que la tortuosité α_∞ (paramètre haute fréquence) a une définition analogue à celle de α_0 , la différence est que, pour α_∞ , $v(r)$ correspond celle de la vitesse du fluide parfait et incompressible.

➤ **Tortuosité thermique α_0'**

Introduite par Lafarge [Lafarge. D, 1993], la tortuosité thermique α_0' est la contrepartie de la tortuosité α_0 pour les effets visqueux, c'est un paramètre d'inertie thermique basse fréquence. Elle est définie par :

$$\alpha_0' = \frac{\theta_0^2}{\theta_0'^2}, \quad (IV-6).$$

Où θ_0 est le champ de réponse à l'excès de température dans la gamme des basses fréquences. Ce paramètre n'a pas été mesuré expérimentalement auparavant.

➤ **Résistivité au passage du fluide σ .**

La résistance au passage de l'air est définie comme étant le rapport entre la différence de pression ΔP de part et d'autre (pertes de charges) de l'échantillon testé et le débit q volumique d'air le traversant. Il existe une relation de proportionnalité entre ΔP et q donné par la loi de Darcy [SADOUKI.M.2014]:

$$\Delta P = R \cdot q. \quad (IV-7).$$

Le coefficient de proportionnalité R correspond à la résistance au passage de l'air. On introduit pour un matériau homogène d'épaisseur d et de section S , la résistivité de l'air σ par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{\Delta P S}{q d}. \quad (IV-8).$$

IV.2.4. La porosité dans les matériaux composites

Très recherchée dans la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, la porosité est en revanche néfaste au matériau composite de haute performance. L'impact de ce défaut à fait l'objet de beaucoup d'attention, comme en atteste le nombre important d'études sur ce sujet. La présence de porosité dans les pièces composites est un fait inévitable. C'est ainsi que des limites furent fixées suivant les applications : dans les structures aérospatiales travaillant en dynamique, un taux de porosités dépassant 1% n'est pas tolérable [Ling Liu et al,2006]; contrairement à d'autres applications où un niveau de 5% et même plus peut être toléré [Ling Liu et al,]. Ces niveaux critiques permettent de limiter la chute des caractéristiques mécaniques. En dessous d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'influence sur le comportement de la pièce si elle est bien répartie dans l'espace. En revanche, pour des taux de porosité plus élevés, les propriétés mécaniques de la pièce sont affectées de manière significative.

En effet, plusieurs études montrent que les caractéristiques mécaniques des composites sont sensibles à la teneur en porosité [EL-habib, Ahmed, 2006]. Dans leurs recherches sur la détermination de la pression de cuisson optimale aboutissant à un minimum de porosité, Olivier et al. [P. Olivier et al, 1995] ont étudié en même temps les principales causes et effets de la porosité sur les composites carbone/époxy. Deux principales causes engendrant de la porosité ont été citées [EL-habib, Ahmed, 2006].:

- La première est l'emprisonnement d'air lors de l'imprégnation des fibres par la résine.

- La seconde est due à l'évaporation des substances volatiles contenues dans le système matriciel.

Après ces deux amorces, l'augmentation du taux de porosité peut survenir à partir de la diffusion de l'air ou par l'agglomération des porosités voisines.

Plusieurs auteurs ayant étudié les effets de la porosité sur les stratifiés composites épais en carbone/époxy s'accordent à dire que les propriétés de traction longitudinale des stratifiés unidirectionnels n'apparaissent pas être influencés par la teneur en porosité ; contrairement aux propriétés de compression, traction transverse ainsi que la flexion et le cisaillement inter laminaire [Greszczuk, L.B., Kardos, J.L. et Dudukovic, M.P, Bowles, K.J. et Frimpong, S.S. Z]. Tous ces auteurs mentionnent une diminution des propriétés mécaniques avec l'augmentation du taux de porosité : le cisaillement inter laminaire est la caractéristique la plus sensible comme le montre la (Figure IV-6).

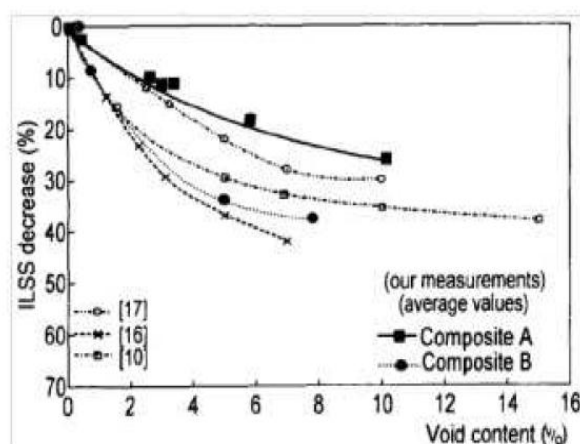


Figure IV-6: Diminution du cisaillement inter laminaire en fonction du taux de porosité [P. Olivier et al, 1995]

Les Figures IV-6.a et Figures IV-6.b montrent l'influence de la porosité sur deux composites A et B de même drapage ($[0^{\circ}16]$) et ayant un même taux volumique de fibres (60%). Ils se différencient par les deux types d'époxy utilisés : le type A provient de l'entreprise Hexcel (France) et le type de l'entreprise Ciba (USA). Comme attendu, le module longitudinal en traction (E_l) n'est pas affecté (ou très peu) par la teneur de vides (fig. 8.a), ceci est principalement dû au fort taux volumique de fibres ; par contre ils montrent une diminution de 12% de la contrainte à rupture pour les deux composites lorsque le taux de porosité passe de 0.3% à 10.3% pour le composite A et de 1.4% à 8.3% pour le composite B. Quant aux modules et à la résistance en traction transversale, ils restent très sensibles à la teneur en porosité

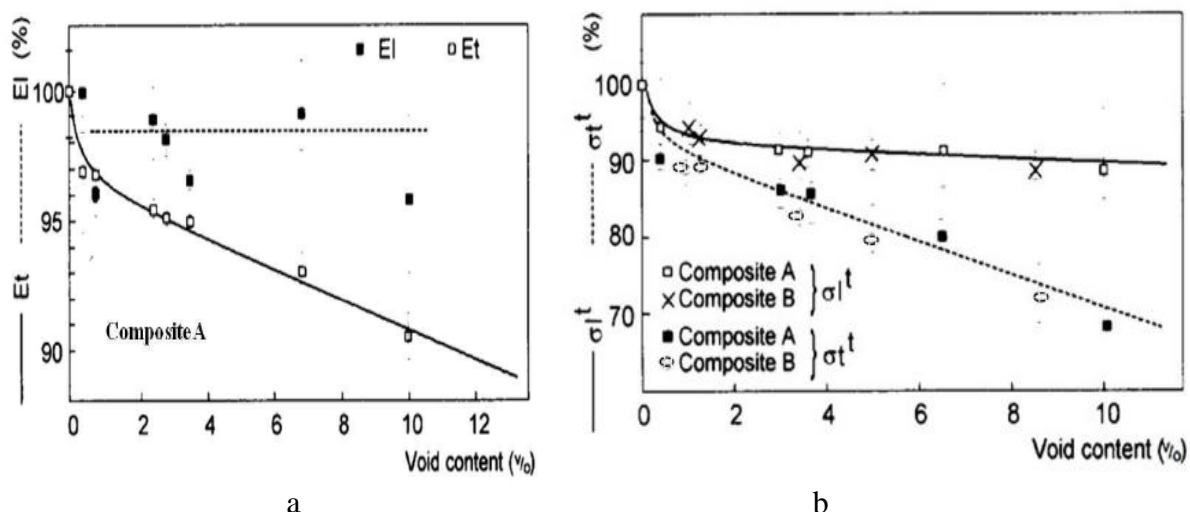


Figure IV-7 :a. Modules longitudinal et transversal en fonction du taux de porosité (composite A),
 b. Résistance en traction longitudinale et transversale en fonction de la porosité (composite B), [P. Olivier et al, 1995]

D'autres études ont expliqué cette différence d'influence sur les caractéristiques mécaniques :

- Selon ces études, en traction longitudinale, l'influence de la porosité n'est pas liée à la répartition des contraintes dans le composite [Petitpas, E, 1993], mais plutôt aux micro-décohésions entre fibres et matrice [Drzal, L.T. et Madhukar, M. J, 1933].

- En traction transverse, le système fibre – matrice supporte la même charge au cours de l'essai, ainsi la présence de porosité rompt le lien fibre – matrice et modifie donc le module et la résistance.

Le taux de porosité n'explique pas à lui seul les chutes des caractéristiques mécaniques des stratifiés composites. En effet, il est tout à fait possible que deux stratifiés ayant subi le même processus de fabrication et ayant le même taux de porosité, puissent toutefois avoir des propriétés mécaniques différentes : ceci est principalement dû au fait que la porosité est tout d'abord une caractéristique volumique du composite ; ainsi son influence sur les caractéristiques mécaniques dépend de la localisation, de la taille et de la forme [EL-HABIB, Ahmed, 2006].: c'est ce qui modifie la distribution homogène des contraintes dans l'épaisseur.

IV.2.5. Effet de porosité sur le comportement statique et dynamique d'un matériau FGM

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie

des composites. Les FGM sont considérés comme un matériau structurel potentiel pour les industries futures d'engins spatiaux à grande vitesse et de production d'énergie. Les FGM sont des nouveaux matériaux, non homogènes microscopiquement, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et de façon continue d'une surface à une autre. Dans un FGM, la composition et la structure changent progressivement, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau. En appliquant les nombreuses possibilités inhérentes à la conception d'un FGM, il est prévu que les matériaux seront améliorés et de nouvelles fonctions seront créées. Néanmoins, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants des matériaux [Zhu. 2001]. Ces derniers peuvent remettre en cause et modifier le comportement global de telles structures Wattanasakulpong *et al.* [Wattanasakulpong *et al.* 2012] ont également donné la discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges mécaniques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong. 2014] ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres FGM ayant des porosités. Hadji *et al.* [Hadji. 2015b] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement exponentielle raffiné pour l'analyse de la vibration libre des poutres en FGM avec porosités.

[Mahmoudi A. *et al.*, 2017] ont fait une solution analytique pour l'étude du comportement vibratoire des plaques en matériau fonctionnellement gradué (FGM). Ils ont pris en considération des porosités peuvent apparaître durant le processus de fabrication de ces plaques. Une méthode basée sur la théorie d'ordre élevé sera présentée pour étudier la vibration libre des plaques FGM reposant sur fondation élastique. [Aicha Bessaim *et al.*] ont fait l'analyse du comportement mécanique d'une poutre rectangulaire simplement appuyée en matériau à gradient de propriété en loi de puissance (P-FGM) soumise à un chargement uniformément réparti. La poutre P-FGM est constituée de deux matériaux différents à travers son épaisseur, d'une céramique (ZrO₂) et d'un métal (Ti-6Al-4V). En utilisant les différentes théories de poutres à savoir: les théories d'ordre élevé (TSDBT), (SSDBT) et (ESDBT), la théorie de Timoshenko (FSDBT) et la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT). Benferhat Rabia [Benferhat Rabia, 2017] a utilisé une nouvelle théorie raffinée est proposée pour l'analyse à la flexion et à la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées avec porosités, cette

dernière peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication.

IV.2.6. Présentation des différentes ondes se propageant dans un milieu poreux,

Les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux poreux font intervenir des ondes volumiques et une onde surfacique si le milieu présente une surface libre. Cette section en rappelle les principales caractéristiques.

➤ Les ondes volumiques

Il existe dans un massif infini trois ondes volumiques qui se propagent de manière sphérique à partir de l'excitation. Deux de ces trois ondes sont des ondes primaires et la troisième est une onde secondaire.

- ✓ les ondes primaires P1 et P2 : ce sont des ondes de compression encore appelées ondes de dilatation ou ondes irrotationnelles. La déformation générée est longitudinale, elle a lieu dans la même direction que la direction de propagation de l'onde.
- ✓ La première onde de compression P1, encore appelée onde de première espèce, est fréquemment dite "rapide" et peu atténuée alors que la seconde onde P2, ou onde de seconde espèce, est dite "lente" et fortement atténuée.. Les deux ondes de compression existent dans les deux phases solide et fluide : penser que l'onde P1 existe uniquement dans la phase solide et que l'onde P2 est liée à la phase fluide est une erreur.

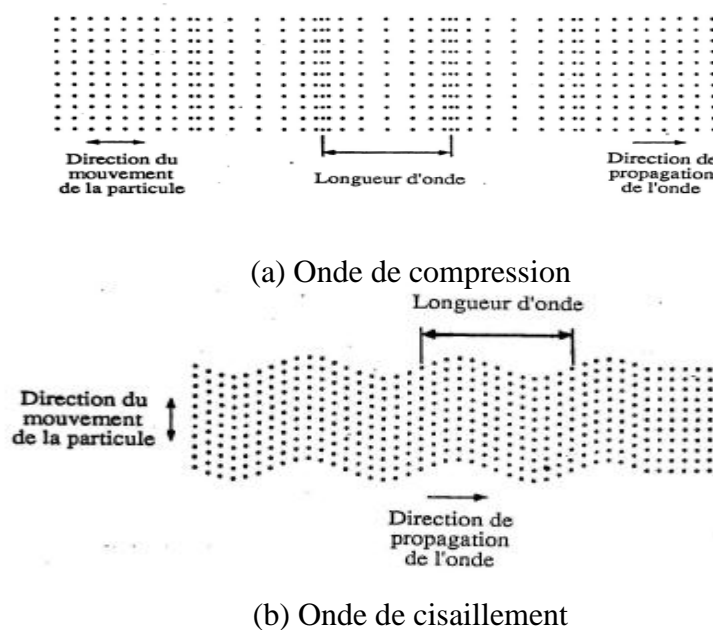


Figure IV-8: Ondes volumiques, d'après Graff [GRA75]. Ondes volumiques, d'après Graff [GRA75].

- ✓ l'onde secondaire S : il s'agit d'une onde de cisaillement encore appelée onde transversale ou onde équivolumique. La déformation générée est transversale, elle a lieu perpendiculairement à la direction de propagation. Les (**Figures IV -8** (a) et (b)) illustrent les mouvements longitudinal et transversal des particules générés respectivement par une onde de compression et de cisaillement.

➤ L'onde superficielle de Rayleigh

En présence d'une surface libre pour un massif semi-infini, il apparaît un troisième type d'onde, dite onde superficielle ou onde de surface. C'est Rayleigh le premier qui a démontré son existence en élastodynamique : elle porte donc le nom d'onde de Rayleigh et est notée onde R. Il s'agit d'une onde particulièrement importante dans la mesure où elle est beaucoup plus énergétique que les ondes volumiques. Une comparaison des énergies véhiculées par les différentes ondes en élastodynamique est fournie par Le feuve-Mesgouez [LM99]. Une seconde caractéristique de l'onde R est sa décroissance exponentielle en profondeur du massif : il s'agit véritablement d'une onde de surface. Prépondérante en surface, sa contribution s'annule très vite en profondeur où les ondes volumiques sont alors prépondérantes.

Dans le cas de l'onde de Rayleigh, la déformation engendrée correspond à un mouvement des particules elliptique et rétrograde par rapport à la direction de propagation de l'onde. La (**Figure IV-8**) en illustre le mouvement.

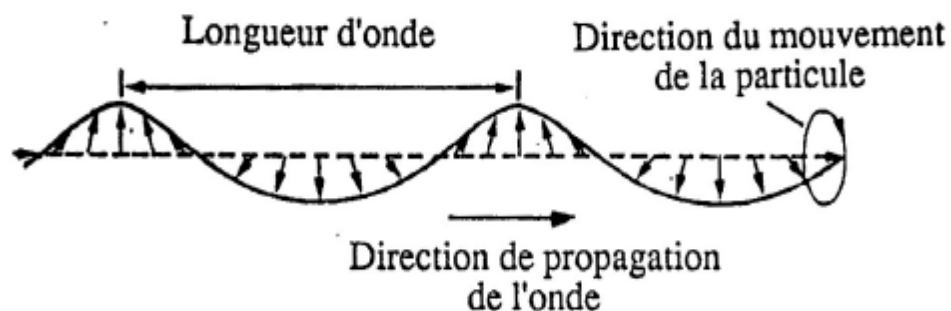


Figure IV-9: Onde de Rayleigh, d'après Graff [GRA75].– Onde de Rayleigh, d'après Graff [GRA75].

Des expressions simples et directes dans un cas général des vitesses des quatre ondes précédentes n'existent pas. Une détermination de ces célérités nécessite un travail théorique. Notons néanmoins que l'onde la plus rapide est toujours P1 et que les ondes S et R ont des vitesses très proches. L'ordre entre les différentes célérités est fonction de la nature du milieu.

➤ Propagation d'ondes en milieu poreux

Biot suggéra que le milieu poreux pouvait être vu au niveau macroscopique comme la superposition en temps et en espace de deux milieux continus couplés. Cette approche était novatrice dans la mesure où elle s'extrayait du contexte hétérogène des deux phases pour arriver à l'idée de superposition. En particulier, Biot montra que 3 types d'ondes pouvaient se propager dans le milieu poreux, deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Pour le montrer, on peut suivre l'approche de Depollier [Depollier, C.1989] et exprimer les vecteurs déplacements à l'aide de potentiels φ^s et φ^f caractéristiques des ondes de dilatation et ψ^s et ψ^f caractéristiques des ondes de cisaillement. On a alors :

$$u = \nabla \varphi^s + \nabla \wedge \psi^s, \quad U = \nabla \varphi^f + \nabla \wedge \psi^f \quad (\text{IV-9})$$

Sous forme matricielle, avec $\mathcal{U} = \{u^t, U^t\}$ et sous l'hypothèse d'une excitation harmonique à la pulsation ω , on obtient les équations de propagation pour les ondes de compression

$$\nabla^2 \mathcal{U} = -\omega^2 G^{-1} \mathcal{M} \mathcal{U} \quad (\text{IV-10})$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{PR-Q^2} \begin{bmatrix} R & -Q \\ -Q & P \end{bmatrix}$$

On a $P = A + 2N$ et on trouve alors les valeurs singulières de l'équation précédente qui sont les constantes de propagation des ondes de dilatation

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2(PR-Q^2)} [P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} - \sqrt{H}] \quad (\text{IV-11})$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{2(PR-Q^2)} [P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} + \sqrt{H}], \quad (\text{IV-12})$$

$$H = [P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}]^2 - 4(PR - Q^2)(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2), \quad (\text{IV-13})$$

Deux ondes de compression de célérité différente peuvent donc se propager dans le milieu. Biot remarqua aussi que pour l'une des deux ondes, les amplitudes des dilatations solide et fluide sont en phase et que pour l'autre, elles sont en opposition de phase. Enfin, on peut déterminer pour chacune des 2 ondes le milieu dans lequel elle se propage préférentiellement en considérant le rapport

$$r = \frac{\nabla \cdot U}{\nabla \cdot u} \quad \text{On a } r = \frac{\rho_{12}\omega^2 - k_1^2 Q}{\rho_{12}\omega^2 - k_2^2 Q}$$

Enfin, l'onde de cisaillement est caractérisée par sa constante de propagation k_3 qui s'écrit :

$$k_3^2 = \frac{\omega^2(\rho_{12}\rho_{22} - \rho_{12}^2)}{N\rho_{22}} \quad (\text{IV-14})$$

Les équations de Biot en formulation déplacement se présentent donc sous un formalisme familier pour les mécaniciens des solides. Elles considèrent néanmoins un problème conservatif et sont donc insuffisantes pour prédire avec précision le comportement d'un matériau poreux en acoustique.

IV.3. Étude analytique d'une poutre FGM

IV.3.1. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une poutre FGM avec porosité

Dans cette partie, une poutre FG fabriquée à partir d'un mélange de métal et de céramique est considérée (**Figure IV-10**). Les caractéristiques matérielles de la poutre FG sont considérées comme changeant continuellement dans l'épaisseur de la poutre. Dans ce travail, une poutre imparfaite est censée contenir des porosités se propageant à travers la profondeur due à un défaut lors de la fabrication. La fraction volumique de porosité, (α ($\alpha \ll 1$)) est supposée varier uniformément entre le métal et la céramique. La règle modifiée de mélange proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est employée comme:

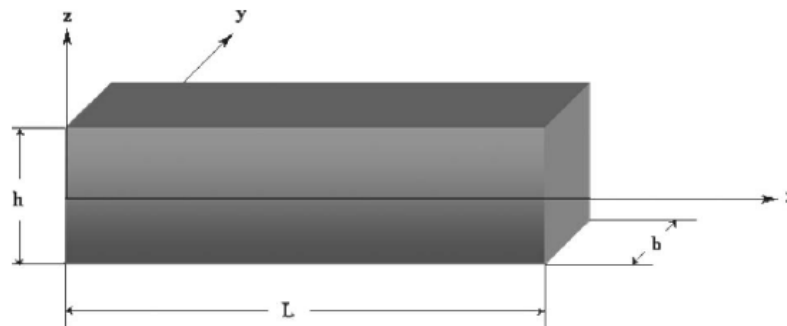


Figure IV-10: Coordonnées et géométrie de la poutre fonctionnellement gradué

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV-15})$$

Avec, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est exprimée par:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (\text{IV-16})$$

Toutes les propriétés de la FGM imparfaite peuvent être obtenues comme suit:

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV-17})$$

On note que le nombre réel positif N ($0 \leq N < \infty$) est l'indice de gradient, et z est la distance du plan médian de la poutre FG. Quand N est égalé zéro, la poutre FG devient entièrement en céramique. Cependant, lorsque cet indice prend des valeurs plus élevées, la poutre devient entièrement métallique. Ainsi, le module de Young (E) et la densité de matériau (ρ) peuvent être obtenus à partir de l'équation (IV-17) comme:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV-18})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV-19})$$

Dans cette étude, le coefficient de Poisson (ν) est considéré comme constant (Tounsi et al., 2013, Zidi et al 2014, Taibi et al 2015, Zemri et al., 2015, Mouffoki et al., 2017, Zidi et al., 2017) . Les propriétés matérielles d'une poutre FG parfait peuvent être évaluées en prend α zéro.

Un autre scénario de variation de porosité peut être obtenu pour des échantillons imparfaits de FGM qui contiennent presque des porosités se propageant autour de la zone médiane de la section transversale et la quantité de porosité semble être sur la réduction à zéro sur les faces supérieure et inférieure de la section transversale. Basé sur le principe de la méthode d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes qui peut être utilisée pour fabriquer des échantillons de FGM (Wattanasakulpong et al., 2012), les porosités se produisent principalement dans la zone médiane. Dans cette zone, il est difficile d'infiltrer complètement les matériaux, tandis que dans les zones supérieure et inférieure, le processus d'infiltration des matériaux peut être facilité et laisser moins de porosité. En considérant ce scénario, les équations (IV-18) - (IV-19) sont remplacées par les formes suivantes:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{IV-20})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{IV-21})$$

IV.3.2. Équations fondamentales

➤ Hypothèses de base et équations constitutives

Les champs de déplacement de différentes théories de déformation par cisaillement sont choisis en fonction des hypothèses suivantes:

(1) les déplacements axiaux et transversaux sont divisés en composantes de flexion et de cisaillement.

2) la composante de flexion du déplacement axial est similaire à celle donnée par la théorie de la poutre classique (CBT).

3) la composante de cisaillement du déplacement axial donne naissance à la variation de cisaillement d'ordre supérieur et donc à la contrainte de cisaillement à travers la profondeur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement s'est disparu sur les surfaces supérieure et inférieure. Sur la base de ces hypothèses, les champs de déplacement de diverses théories de la poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur sont donnés sous une forme générale.

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV-22a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{IV-22b})$$

Où u_0 est le déplacement de la poutre dans le plan médian dans la direction x , w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal; et $f(z)$ est une fonction de forme déterminant la distribution de la contrainte de cisaillement transversale et de la contrainte de cisaillement à travers la profondeur de la poutre. Les fonctions de forme $f(z)$ sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de contrainte libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, ainsi un facteur de correction de cisaillement n'est pas requis. Dans cette étude, ces fonctions de forme sont choisies sur la base de la théorie de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (2000). Cette équation est exprimée comme suit:

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad (\text{IV-23})$$

Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement de l'équation (IV-22) sont:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{IV-24})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{IV-25})$$

Et.

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV-26})$$

En supposant que le matériau de la poutre FG obéit à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent

$$\sigma_x = C_{11}(z) \varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = C_{55}(z) \gamma_{xz}, \quad (\text{IV-27})$$

Où (σ_x, τ_{xz}) and $(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (IV-18) et (IV-1ç), les coefficients C_{ij} de raideur, peuvent être exprimés en

$$C_{11}(z) = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \quad \text{et} \quad C_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV-28})$$

➤ Équations de gouvernance :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme suit:

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K) dt \quad (\text{IV-29})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; et δK est la variation de l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est définie comme

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}] dA dz \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

où les résultantes de contrainte, N , M , et S sont définies par

$$\left(N_x, M_x^b, M_x^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz, \text{ et } S_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{IV-31})$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimée comme

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ &\quad \left. + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{IV-32})$$

où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps t ;

et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, z^2, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV-33})$$

Substituer les expressions pour δU et δK de Eqs. (IV-30) et (IV-32) dans l'équation (IV-29) et intégrant par parties, et collectant les coefficients de δu_0 , δw_b et δw_s , les équations du mouvement de la poutre sont obtenues :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta w_b : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\ \delta w_s : \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{IV-34})$$

En remplaçant l'équation (IV-24) dans l'équation (IV-27) et les résultats ultérieurs dans l'équation (IV-31), les résultantes de contraintes sont obtenues comme

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^s \\ B_{11} & D_{11} & D_{11}^s \\ B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-35})$$

$$\text{et } S_{xz}^s = A_{55}^s \gamma_{xz} \quad (\text{IV-36})$$

où $A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s$ sont la rigidité de la poutre, définie par

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{IV-38a})$$

$$\text{et } A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{IV-38b})$$

En remplaçant l'équation (IV-35) dans l'équation (IV-34), les équations gouvernantes peuvent être exprimées en termes de déplacements ($(u_0, w_b \text{ et } w_s)$) comme

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}, \quad (\text{IV-39a})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \quad (\text{IV-39b})$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \quad (\text{IV-39c})$$

IV.3.3. Relations de dispersion

Nous supposons des solutions pour u_0 , w_b et w_s représentant des ondes de propagation dans la direction x avec la forme

$$\begin{cases} u_0(x, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{cases} = \begin{cases} U \exp[i(kx - \omega t)] \\ W_b \exp[i(kx - \omega t)] \\ W_s \exp[i(kx - \omega t)] \end{cases} \quad (\text{IV-40})$$

Où U ; W_b et W_s sont les coefficients de l'amplitude de l'onde, k est le nombre d'onde de propagation des ondes le long de la direction de l'axe des x , ω est la fréquence.

En substituant Eq. (IV-39) dans l'équation (IV-40), nous obtenons:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{IV-41})$$

$$\text{Où } \{\Delta\} = \{U, W_b, W_s\}^T, \quad (\text{IV-42a})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-42b})$$

Dans le quel

$$a_{11} = -A_{11} k^2$$

$$a_{12} = i k^3 B_{11}$$

$$a_{21} = -i k^3 B_{11}$$

$$a_{13} = i B_{11}^s k^3$$

$$a_{31} = -i B_{11}^s k^3$$

$$a_{22} = -D_{11} k^4$$

$$a_{23} = -D_{11}^s k^4$$

$$a_{33} = -(H_{11}^s k_1^4 + A_{55}^s k_1^2) \quad (\text{IV-42c})$$

$$m_{11} = -I_0$$

$$m_{12} = i I_1 k, \quad m_{21} = -i I_1 k$$

$$m_{13} = i J_1 k, \quad m_{31} = -i J_1 k$$

$$m_{23} = -I_0 - J_2 k^2 = m_{32}$$

$$m_{33} = -I_0 - K_2 k^2, \quad m_{22} = -I_0 - I_2 k^2$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement gradué sont données par :

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \quad (\text{IV-43})$$

Les racines de l'éq. (V-26) peut être exprimé comme :

$$\omega_1 = W_1(k) \quad \omega_2 = W_2(k) \quad \text{Et} \quad \omega_3 = W_3(k) \quad (\text{IV-44})$$

Ils correspondent aux modes d'onde M_0 , M_1 et M_2 , respectivement. Les modes d'onde M_0 et M_2 correspondent à l'onde de flexion, le mode d'onde M_1 correspond à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement graduée peut être exprimée comme

$$C_i = \frac{W_i(k)}{k}, \quad (i=1,2,3) \quad (\text{IV-45})$$

La vitesse de groupe de la propagation des ondes dans la poutre fonctionnellement gradué peut être exprimée comme :

$$C_{g_i} = \frac{\partial W_i(k)}{\partial k}, \quad (i = 1,2,3) \quad (\text{IV-46})$$

IV.4. Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse sur l'étude de la propagation des ondes dans un milieu poreux. Nous avons cité une description générale d'un milieu poreux un des macroscopique. Un bilan a ensuite été dressé sur les différentes ondes pouvant s'y propager et sur l'amortissement physique propre au milieu.

Dans ce chapitre, L'analyse de la propagation des ondes dans les poutres imparfaites fonctionnellement graduées sont examinées par une théorie des poutres de déformation par cisaillement. Dans cette étude deux types de matériaux sont choisis pour l'analyse de la propagation des ondes dans les poutres FGM l'un parfait et l'autre imparfait ..

Les équations du mouvement pour la poutre FGM sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les relations de la dispersion, les fréquences fondamentales et la vitesse de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres, Une validation de résultats ainsi qu'une étude paramétrique seront faites dans le chapitre qui se suit

Chapitre V

Discussion des résultats et étude paramétrique

V.1. Introduction :

Dans ce chapitre, différents exemples numériques ont été présentés et discuté pour vérifier l'exactitude de la présente théorie TSDT. Nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, les résultats de la propagation des ondes doit être donné pour deux types de matériau FGM parfait et imparfait. Les résultats sont représentés par des courbes de fréquences propres et vitesse de phase de la propagation des ondes pour différentes types des poutres FGM

a titre de vérification, les résultats obtenus par la théorie TSDT sont comparés avec d'autres théories (théorie SSDT , théorie HSDT).

V.2. Résultats numériques et discussion

Dans cette section, une poutre FG en fabriquée à partir de deux matériaux Si₃N₄ / SUS304, dont les propriétés matérielles sont:

$$E = 348,43 \text{ GPa}, \rho = 2370 \text{ kg / m}^3, \nu = 0,3 \text{ pour Si}_3\text{N}_4$$

$$\text{et } E = 201,04 \text{ GPa}, \rho = 8166 \text{ kg / m}^3, \nu = 0,3 \text{ pour SUS304,}$$

Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la poutre FG selon la loi de puissance simple en termes de fractions volumique des constituants.. La surface supérieure de poutre FG est riche en céramique Si₃N₄, tandis que la surface inférieure est riche en métal SUS304. La profondeur de la poutre FG est de 0,02 m. L'analyse basée sur le présent modèle TSDT est réalisée à l'aide du programme de calcul MAPLE.

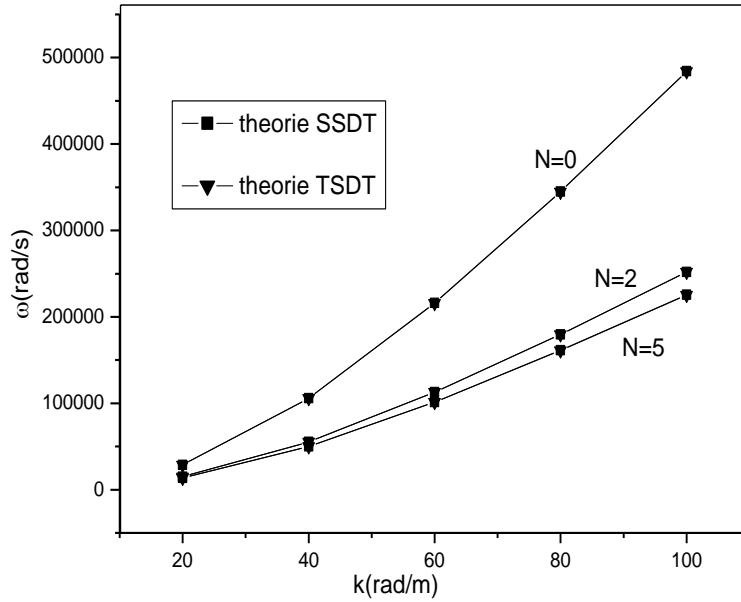
V.3. Propagation d'ondes dans les poutres FG :

V.3.1. Poutre parfait :

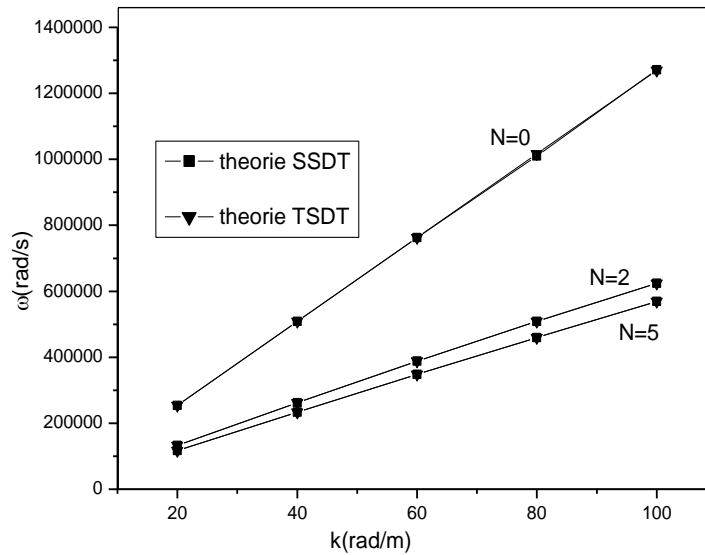
Tout d'abord, en première considérant une poutre FG sans porosité. Les (**Figures.V-1**) et (**Figures V-2**) et (**FigureV-3**) présentent respectivement les courbes de dispersion et les courbes de vitesse de phase et vitesse de groupe de différentes poutres parfaitement fonctionnelles. Ces courbes ont été obtenues en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du 3ème ordre TSDT et la théorie de cisaillement de déformation sinusoïdale (SSDT) de [Touratier 1991].

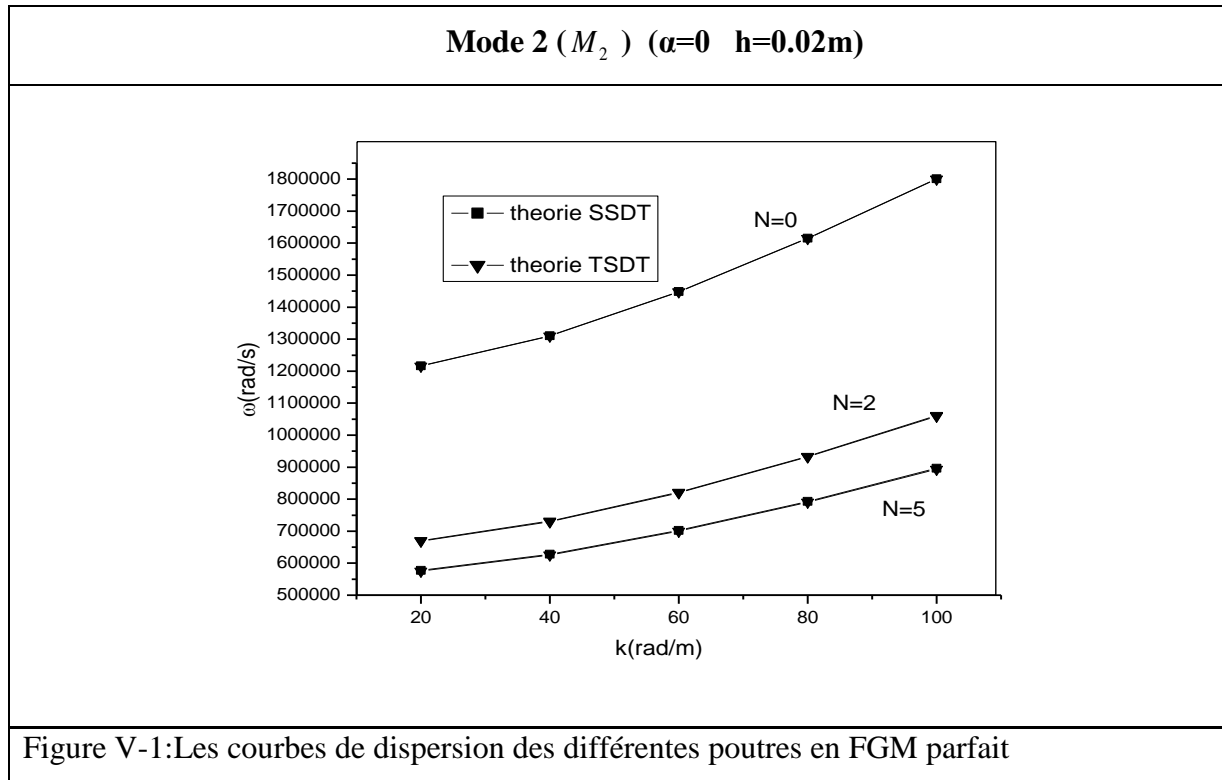
• Influence de nombre de propagation d'onde sur la fréquence

Mode 0 (M_0) ($\alpha=0$ $h=0.02m$)



Mode 1 (M_1) ($\alpha=0$ $h=0.02m$)





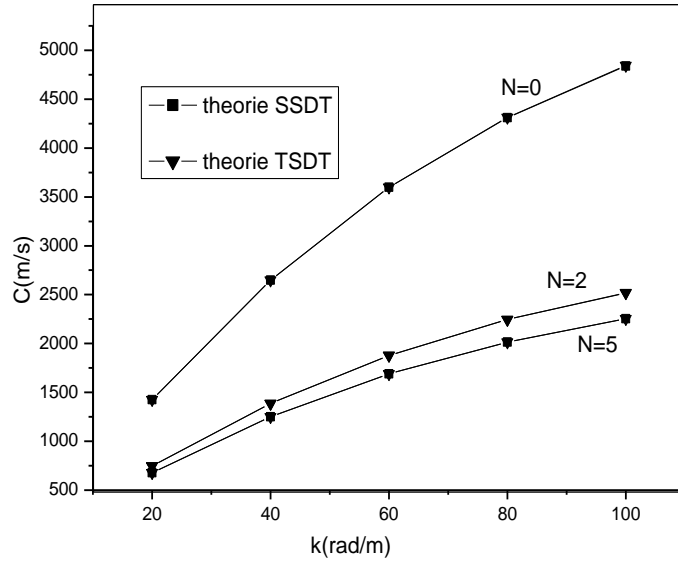
A partir des courbes de dispersion d'une part pour tous les modes d'ondes (M_0 , M_1 , et M_2), présenté à la **figure V- 1**, plus le nombre d'onde de propagation des ondes (k) est élevé, plus la fréquence de la propagation des ondes dans les poutres fonctionnellement graduées parfait est élevé, quel que soit l'indice de loi de puissance. Cependant, l'augmentation de l'indice de loi de puissance conduit à une diminution de la fréquence. En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour une poutre céramique complet ($N = 0$).

D'autre part pour les modes (M_0 , M_1) une convergence pour les courbes ou les valeurs de fréquence lorsque la valeur de nombre d'onde de propagation des ondes (k) est diminué et une divergence pour les courbes ou les valeurs de fréquence lorsque la valeur de nombre d'onde de propagation des ondes (k) est élevé. Pour les modes (M_2) une divergence pour les courbes ou les valeurs de fréquence quel que soit la valeur nombre d'onde de propagation des ondes (k).

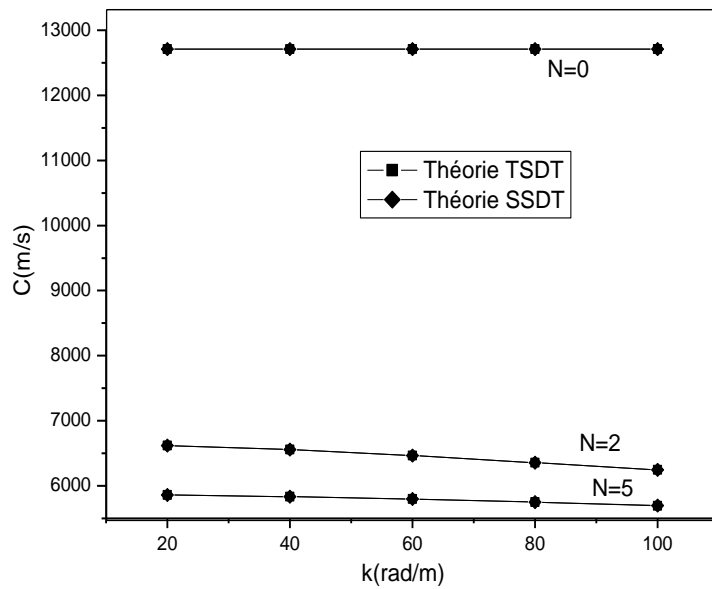
On peut voir que les courbes de dispersion prédites par les deux théories, la théorie de troisième ordre de déformation de cisaillement (TSdT) et la théorie de cisaillement de déformation sinusoïdale (SSdT) sont pratiquement identiques les uns aux autres, quel que soit l'indice de loi de puissance et de modes d'ondes (M_0 , M_1 , M_2). Pour le même nombre de propagation d'onde k .

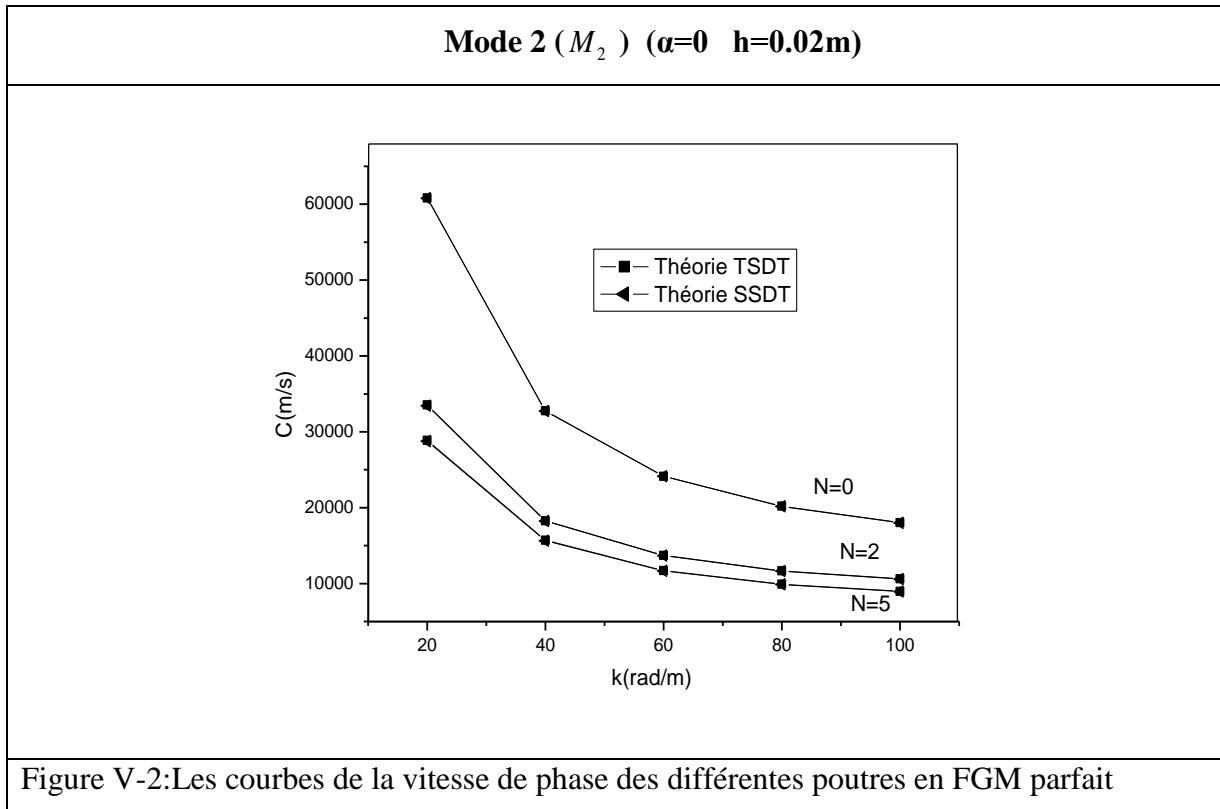
• **Influence de nombre de propagation d'onde sur la vitesse de phase**

Mode 0 (M_0) ($\alpha=0$ $h=0.02m$)



Mode 1 (M_1) ($\alpha=0$ $h=0.02m$)



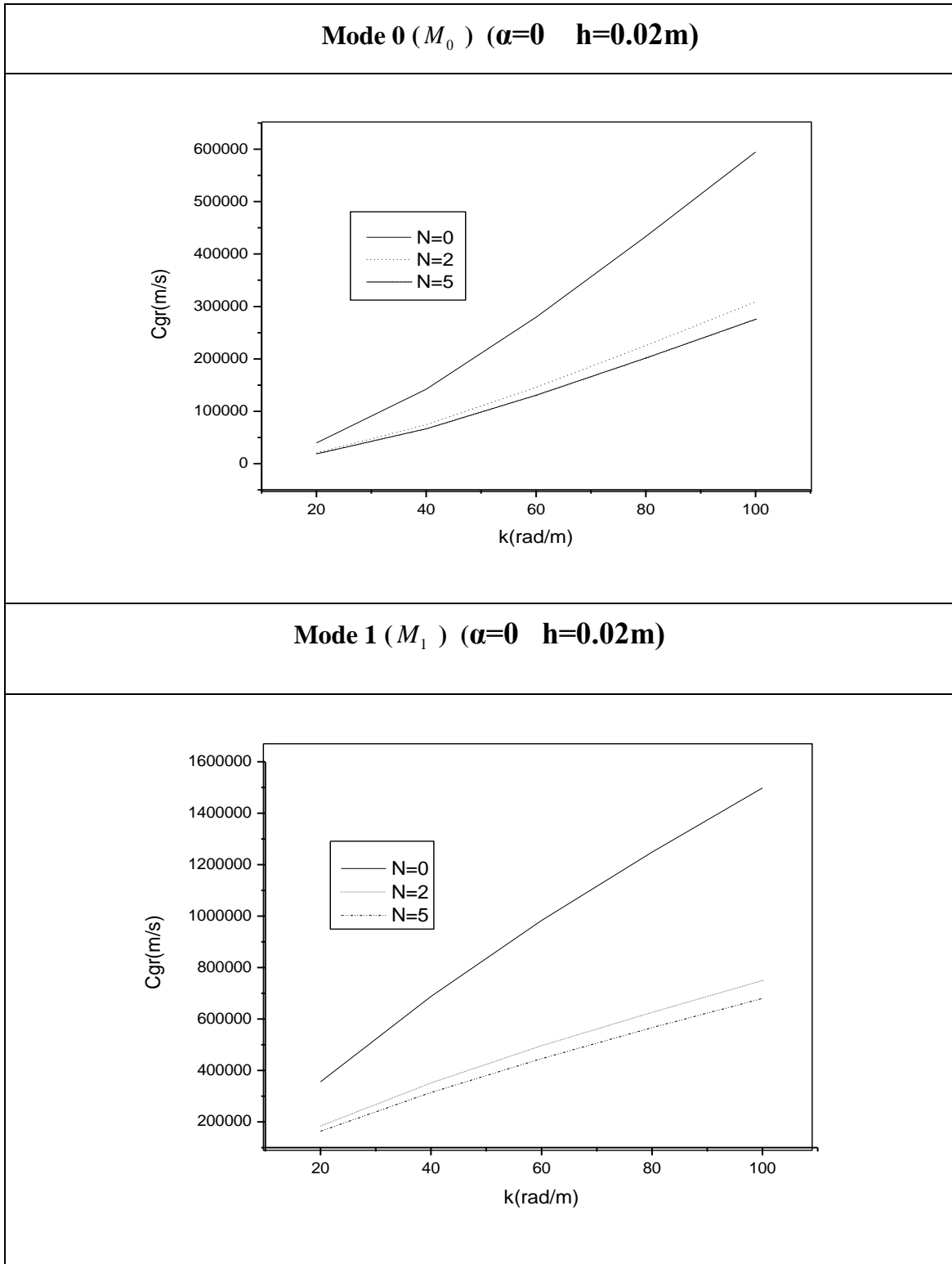


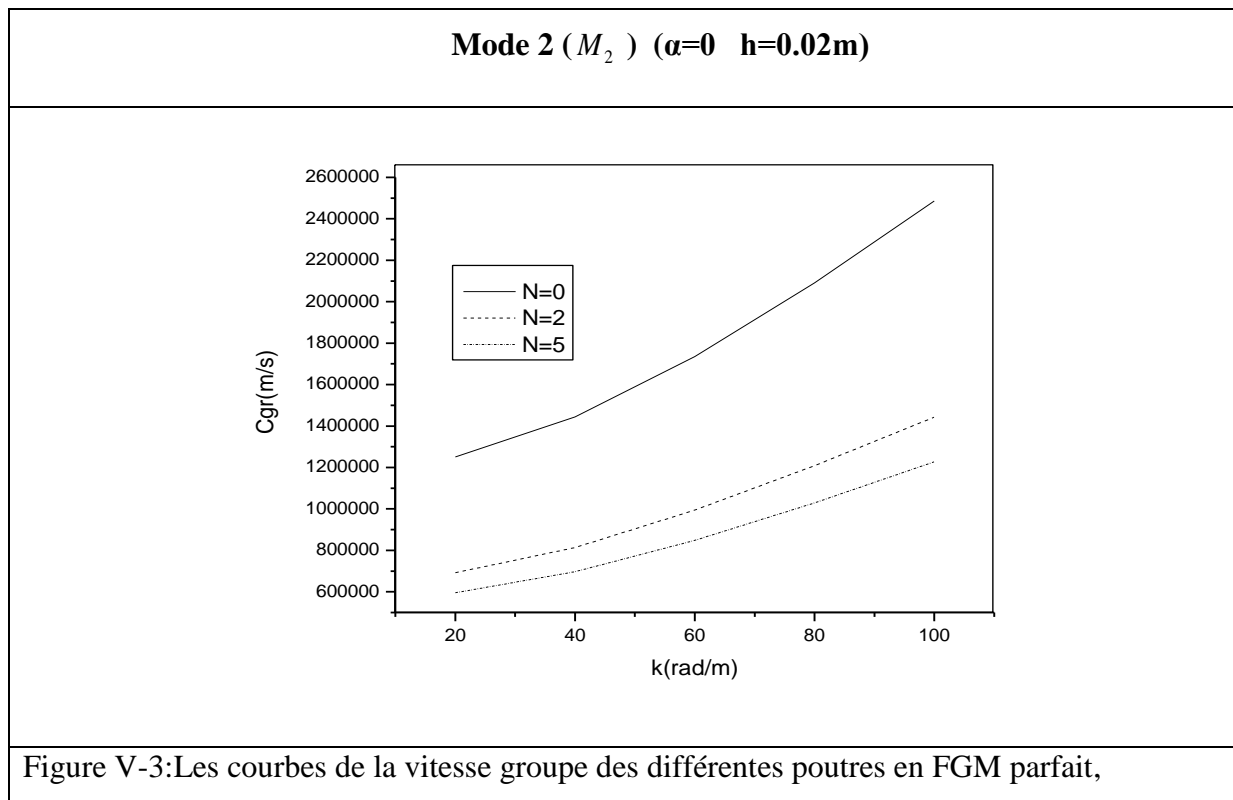
La (Figure V- 2) présente les courbes de vitesse de phase des différents poutres parfaits à gradient fonctionnel obtenus en utilisant une théorie de la poutre de déformation par cisaillement du 3ème ordre pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance N . A partir ces courbes on a : Pour le mode M_0 lorsque les valeurs de nombre d'onde de propagation des ondes (k) est élevé donne une augmentation de la vitesse phase quel que soit l'indice de loi de puissance. La vitesse de phase pour le mode M_1 d'extension de la poutre isotrope ($N = 0$) quel que soit l'indice de loi de puissance est constante pour tous les valeurs nombre d'onde de propagation des ondes (k). On peut également conclure que la vitesse de phase est maximale pour la poutre céramique complet ($N = 0$). On peut conclure de cette courbe que la vitesse de phase diminue lorsque l'indice de loi de puissance augmente pour le même nombre d'onde k .

Pour le mode M_0 lorsque les valeurs de nombre d'onde de propagation des ondes (k) est élevé donne une diminution de la vitesse phase quel que soit l'indice de loi de puissance.

On peut voir que les courbes de la vitesse de phase prédites par les deux théories, la théorie de troisième ordre de déformation de cisaillement (TSDT) et la théorie de cisaillement de déformation sinusoïdale (SSDT) sont pratiquement identiques les uns aux autres, quel que soit l'indice de loi de puissance et de modes d'ondes (M_0 , M_1 , M_2). Pour le même nombre de propagation d'onde k .

- Influence de nombre de propagation d'onde sur la vitesse de groupe**

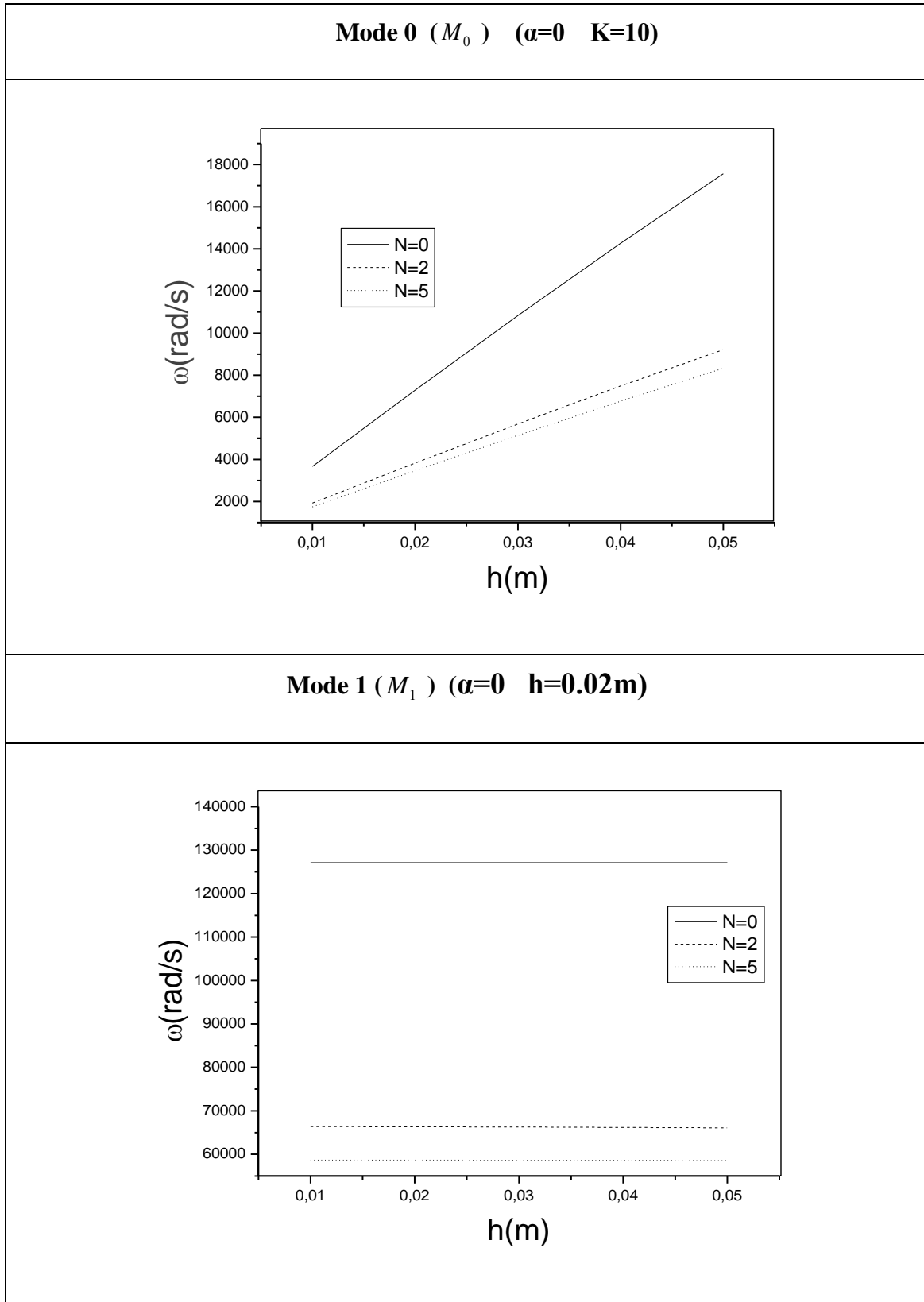


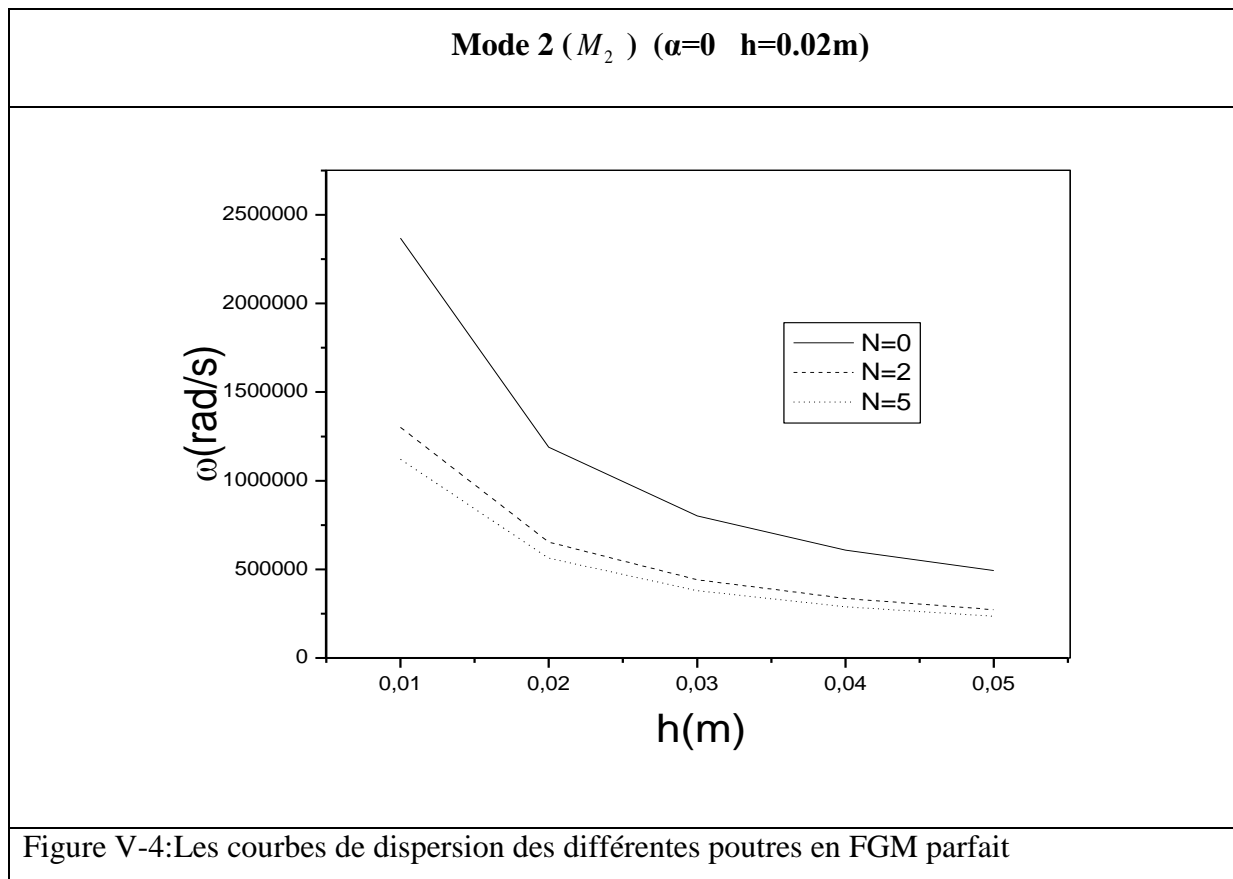


A partir de là **Figure V- 3** d'une part ces courbes montrent que la vitesse de groupe en fonction de nombre de propagation d'onde pour tous les modes d'ondes (M_0 , M_1 , et M_2), on trouve que plus le paramètre de propagation d'onde est élevé, plus la vitesse de groupe de la propagation des ondes dans les poutres fonctionnellement graduées parfait est élevé, quel que soit l'indice de loi de puissance. Cependant, l'augmentation de l'indice de loi de puissance conduit à une diminution de la vitesse de groupe. En conséquence, la vitesse de groupe maximale est obtenue pour une poutre céramique complet ($N = 0$).

D'autre part pour les modes (M_0 , M_1) une convergence pour les courbes ou les valeurs de vitesse de groupe lorsque la valeur de nombre d'onde de propagation des ondes (k) diminue, et une divergence pour les courbes ou les valeurs de vitesse de groupe lorsque la valeur de nombre d'onde de propagation des ondes (k) augmente. Pour les modes (M_2) une divergence pour les courbes ou les valeurs de fréquence quel que soit la valeur nombre d'onde de propagation des ondes (k).

• Influence de l'inertie de la poutre sur la fréquence





Figures.V-4 présentent les courbes de la fréquence (ω) dans la poutre FG parfait en fonction de la profondeur (h), en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre TSDT. Le nombre d'onde est ici pris égal à $k = 10$. A partir de ces figures, les évolutions de dispersion sont comme suite.

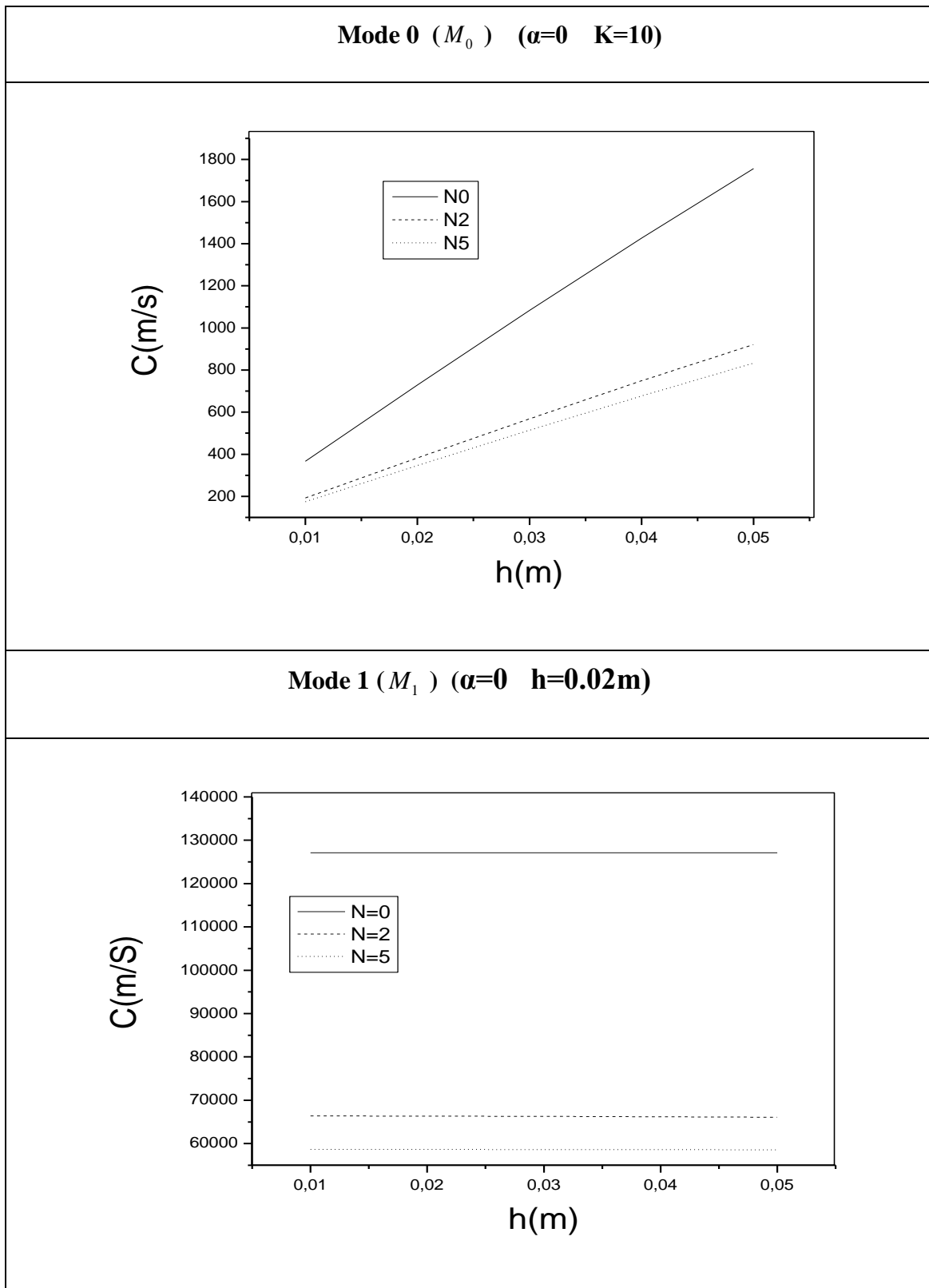
Pour le mode M0, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une augmentation de la fréquence.

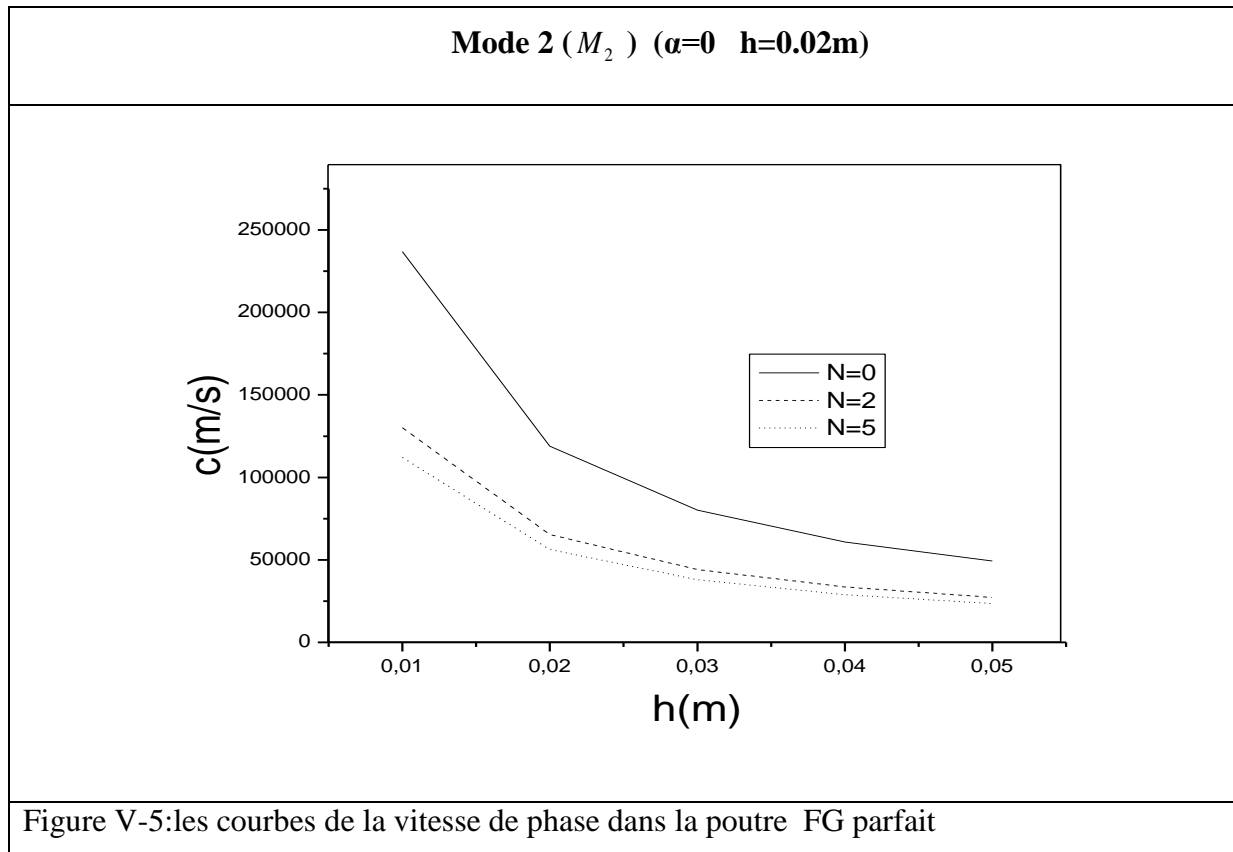
Pour le mode M1, l'augmentation de la profondeur de la poutre n'a aucune influence sur la fréquence c.à.d. si la profondeur de la poutre est augmentée la fréquence est constante pour tout l'indice de loi de puissance,

Au contraire, pour le mode M2, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une diminution de la fréquence pour tout l'indice de loi de puissance.

Pour le mode M0 et M2 on peut conclure de cette courbe que la fréquence diminue lorsque l'indice de loi de puissance augmente pour la même valeur de la profondeur.

- Influence de l'inertie de la poutre sur la vitesse de phase





Figures. V -5 présentent l'influence de la vitesse de phase dans la poutre FG parfait en fonction de la profondeur, en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre TSDT. Le nombre d'onde est ici pris égal à $k = 10$. A partir de ces figures, pour les Figues. V -4 et Figues. V -5 les similitudes dans les évolutions de dispersion et de vitesse de phase peuvent être mises en évidence.

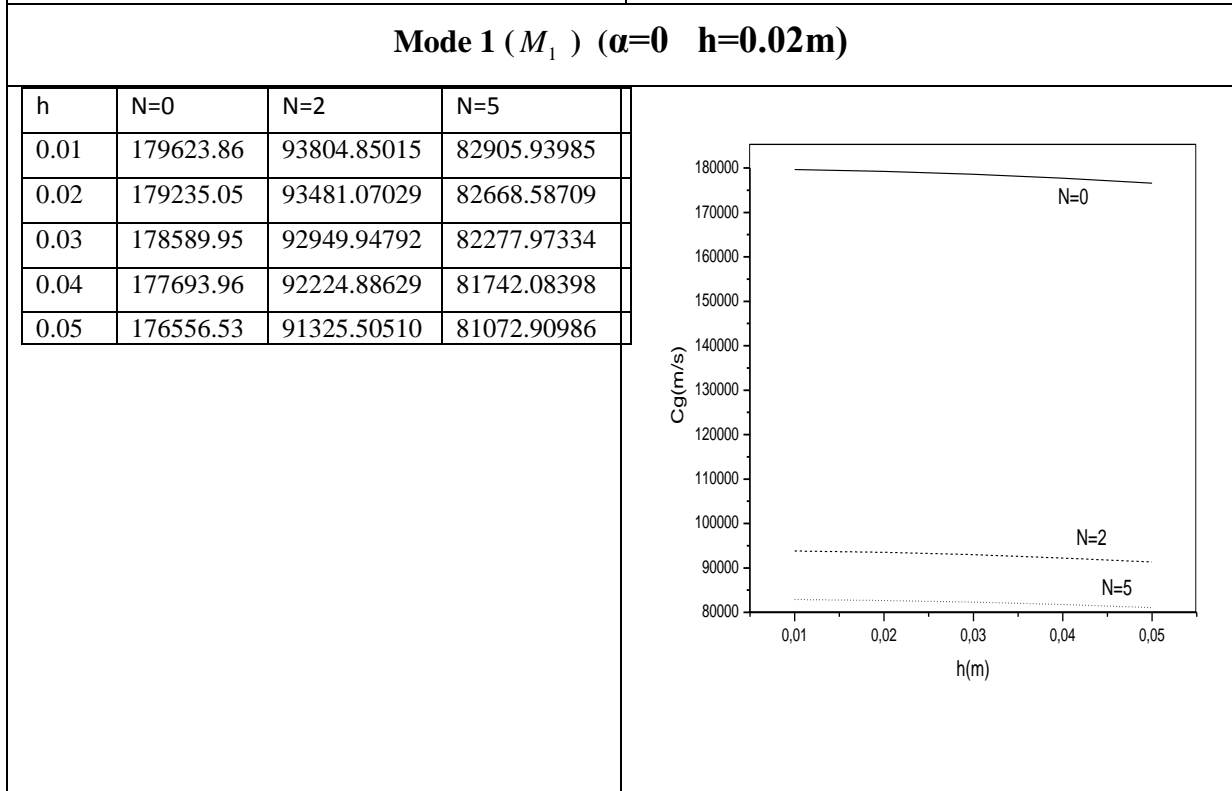
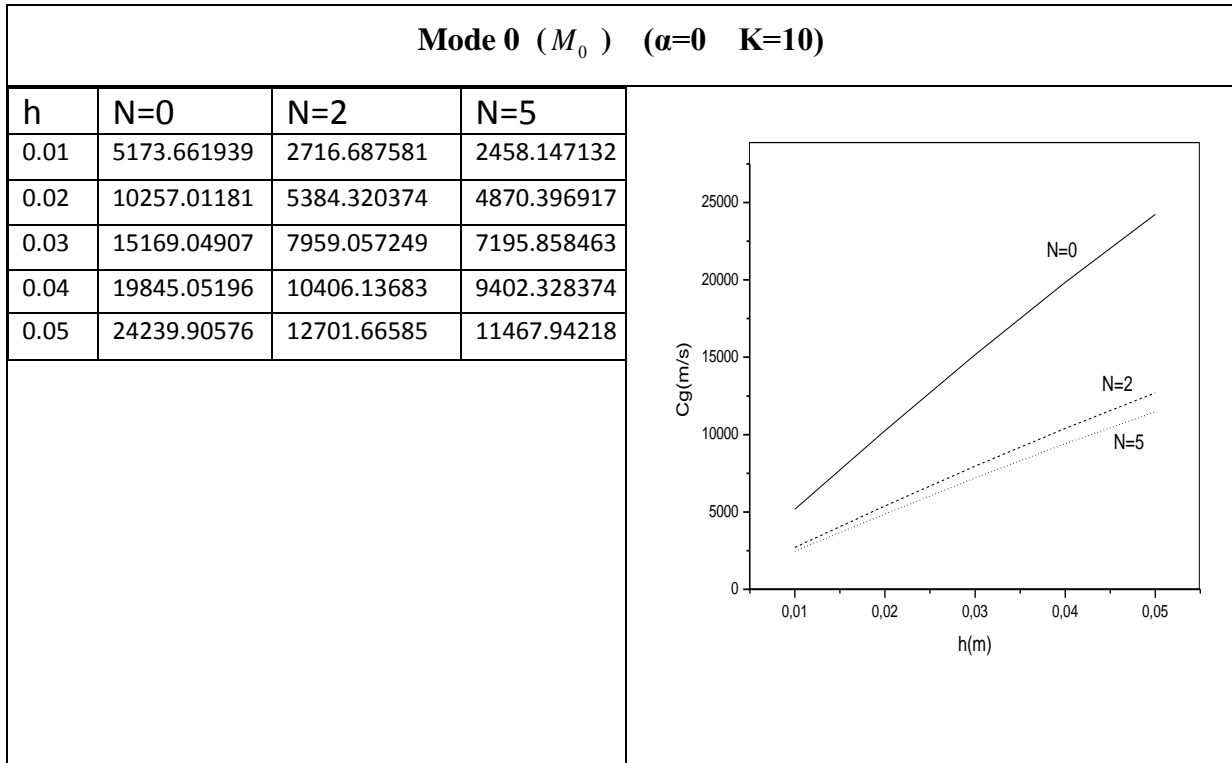
Pour le mode M0, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une augmentation de la vitesse de phase.

Pour le mode M1, l'augmentation de la profondeur de la poutre n'a aucune influence sur la vitesse de phase.

Au contraire, pour le mode M2, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une diminution de la fréquence et de la vitesse de phase.

Pour le mode M0 et M2 on peut conclure de cette courbe que la vitesse de phase diminue lorsque l'indice de loi de puissance augmente pour la même valeur de la profondeur.

• Influence de l'inertie de la poutre sur la vitesse de groupe



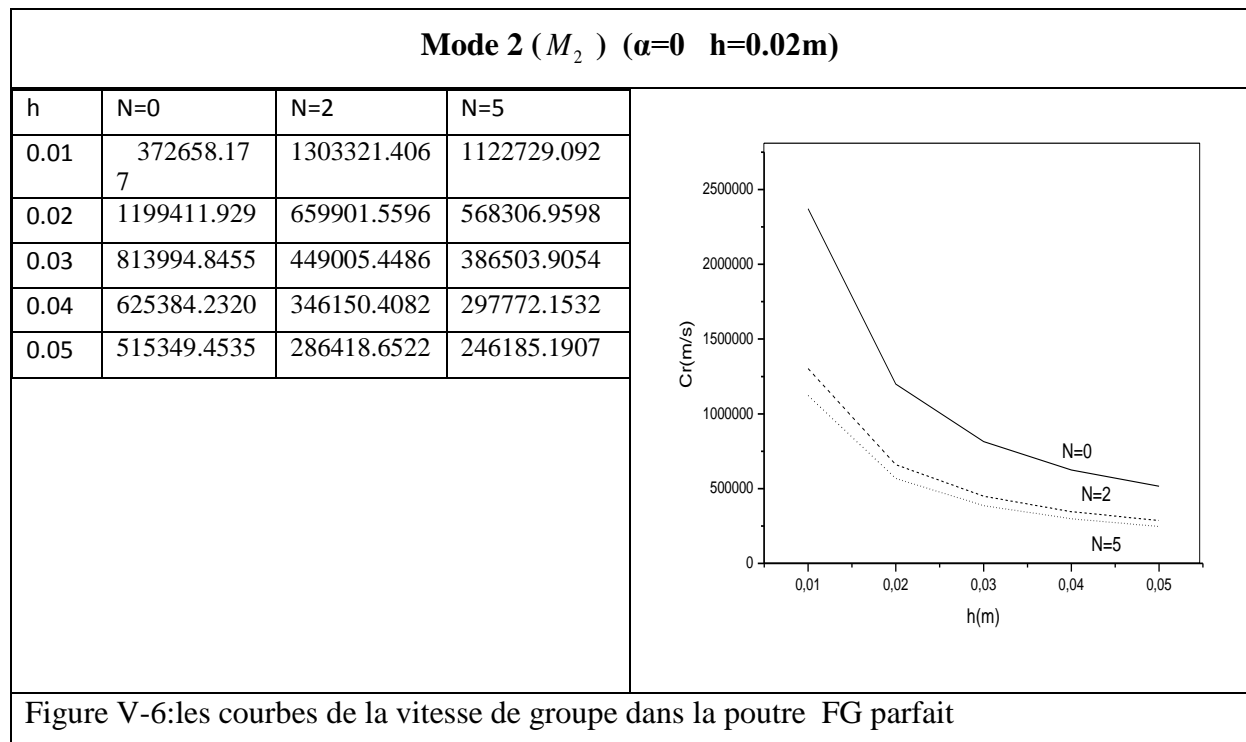


Figure V-6: les courbes de la vitesse de groupe dans la poutre FG parfait

(Figures. V -6) présentent l'influence de la vitesse de groupe dans la poutre FG parfait en fonction de la profondeur . A partir de ces figures

Pour le mode M0, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une augmentation de la vitesse de groupe.

Pour le mode M1, l'augmentation de la profondeur de la poutre n'a aucune influence sur la vitesse de groupe.

Au contraire, pour le mode M2, l'augmentation de la profondeur de la poutre entraîne une diminution de la vitesse de groupe.

Pour le mode M0 et M2 on peut conclure de cette courbe que la vitesse de groupe diminue lorsque l'indice de loi de puissance augmente pour la même valeur de la profondeur

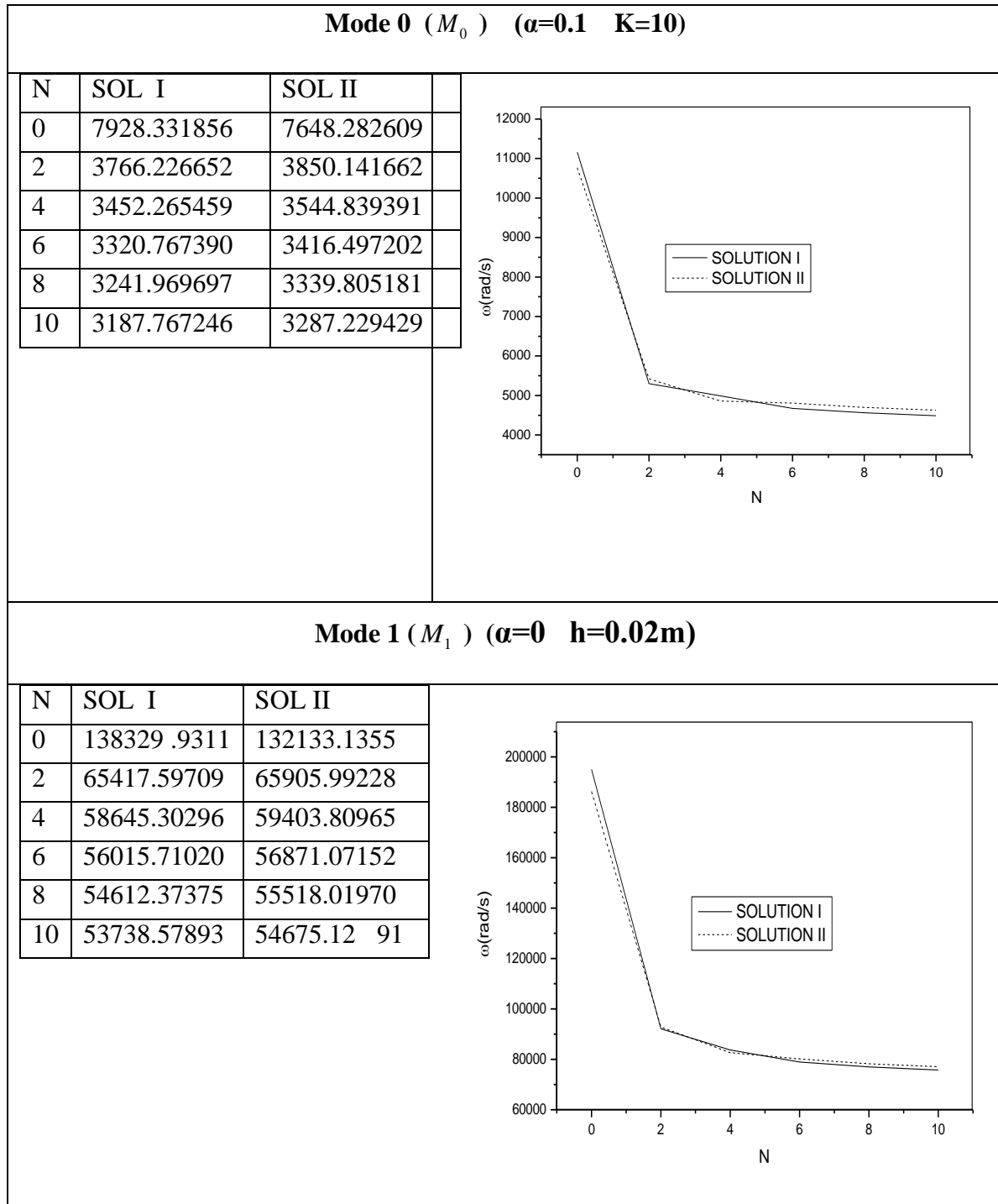
Pour le mode M1 les valeurs de vitesse de groupe sont constantes pour toute profondeur et l'indice de loi de puissance,

V.3.2.Poutre imparfait :

Cette partie est consacrée à l'étude de la propagation des ondes dans la poutre FG poreux fonctionnellement en utilisant la théorie TSDT.

Deux types de distributions de porosité (uniformes et inégales) à travers l'épaisseur de la poutre sont considérés ici selon les équations IV-18et IV-19 ou Eqs. IV-20et IV-21

• **Influence de l'indice de loi de puissance sur la fréquence**



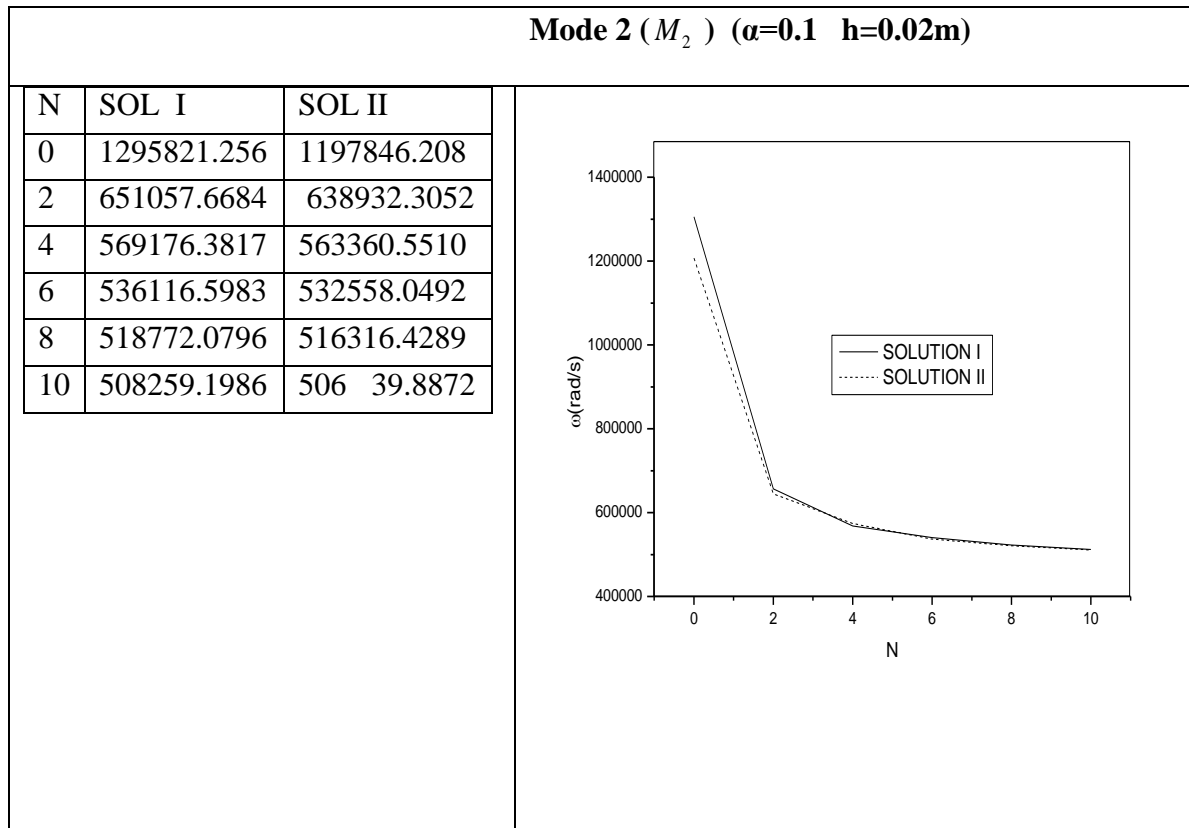
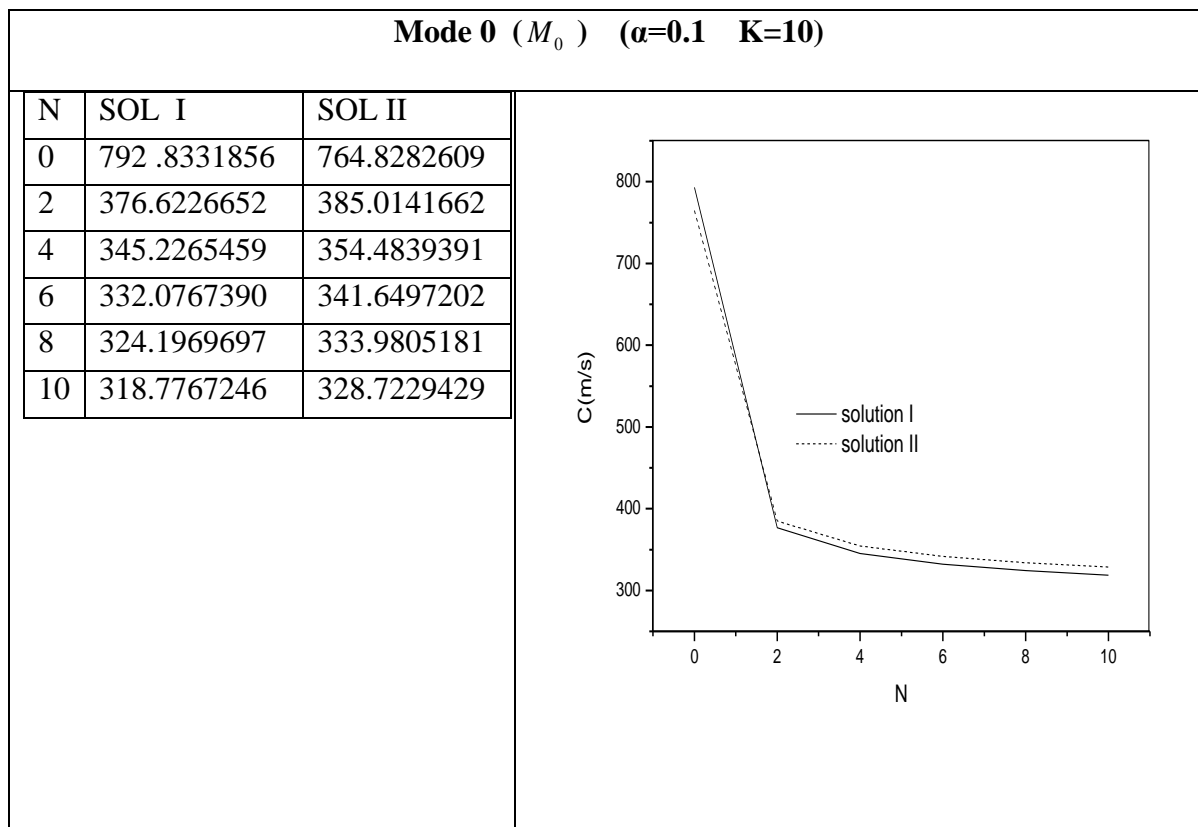
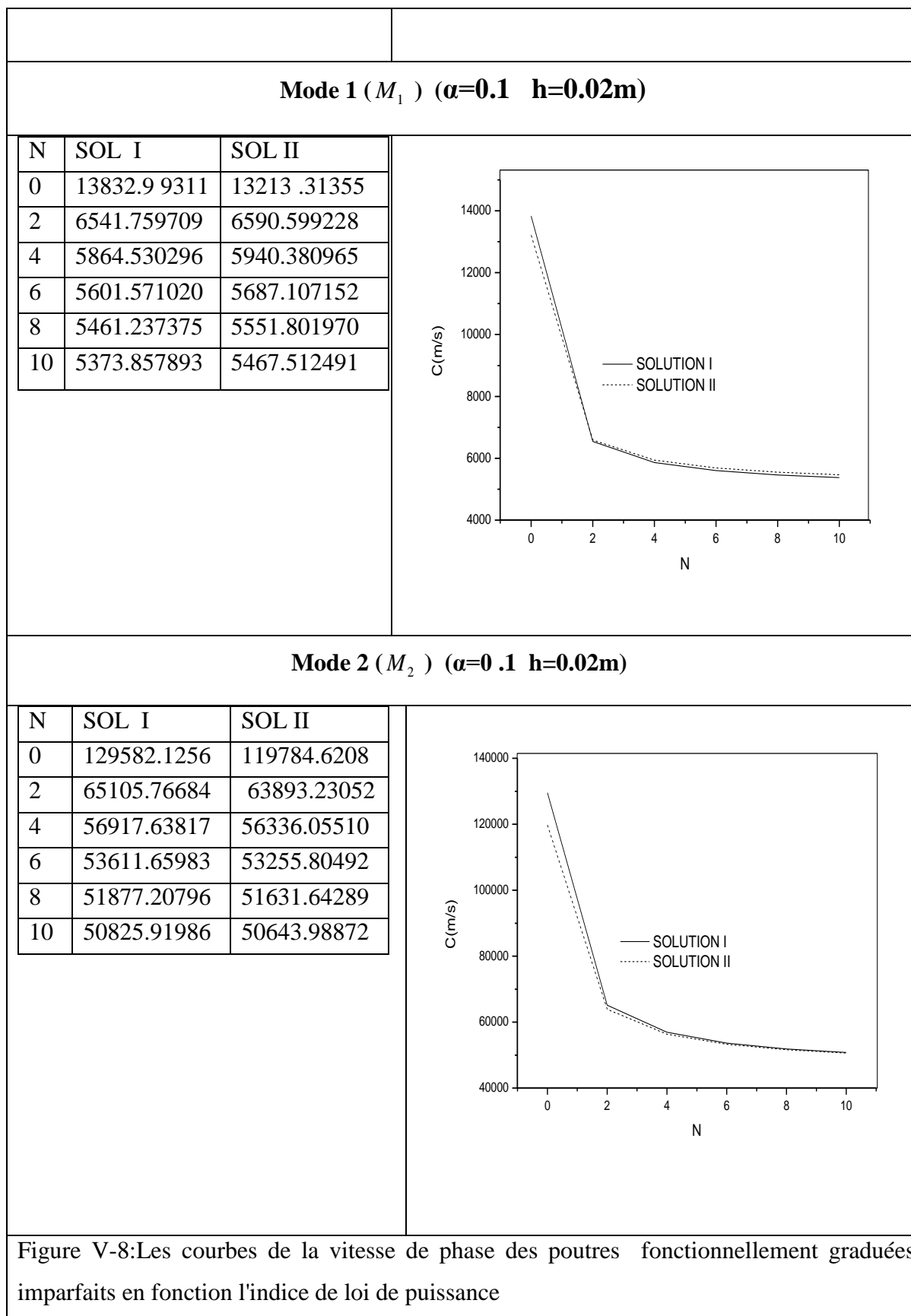


Figure V-7: Les courbes de fréquence des poutres fonctionnellement graduées imparfaits en fonction l'indice de loi de puissance

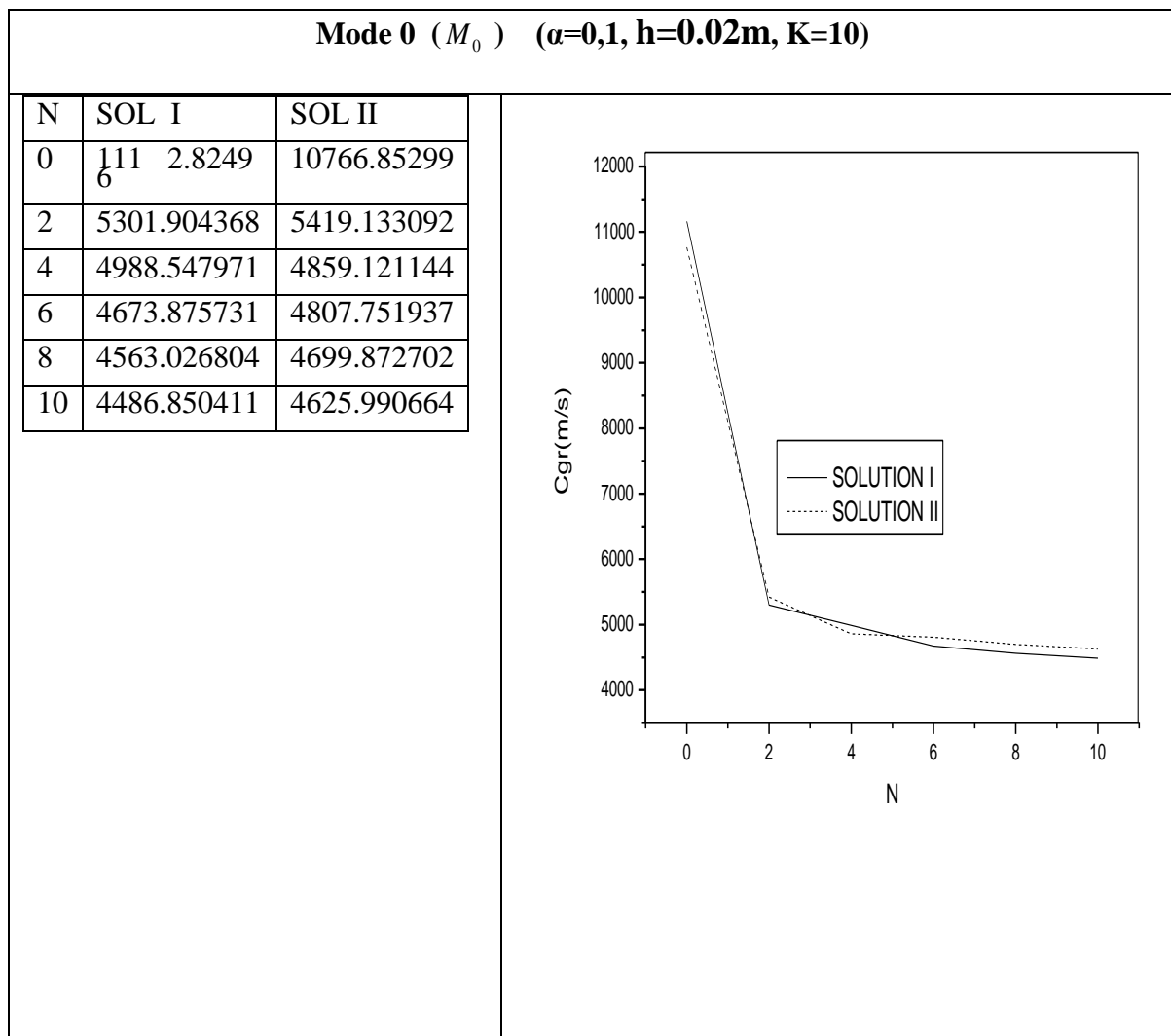
• **Influence de l'indice de loi de puissance sur La vitesse de phase**

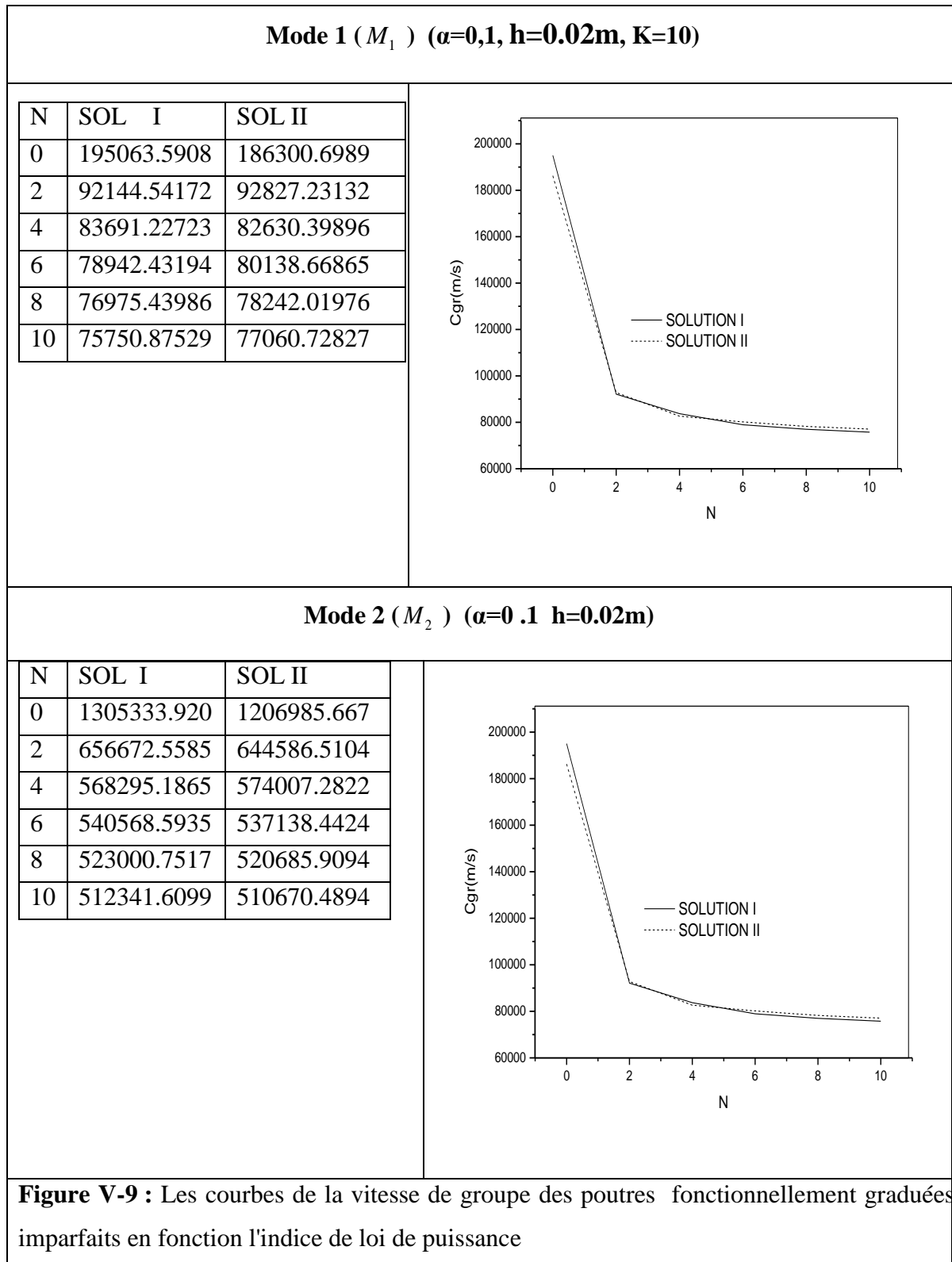




Sur les **Figures V- 7 et V-8**, nous présentons une comparaison entre deux solutions de porosité en traçant la variation des vitesses de fréquence et de phase, par rapport au paramètre matériel N (l'indice de loi de puissance). Le coefficient de porosité est pris $\alpha = 0,1$, alors que le coefficient d'onde est $k = 10 \text{ rad/m}$ et l'épaisseur de la poutre est $h = 0,02\text{m}$. On peut voir que les caractéristiques de vibration (fréquence ou vitesse de phase) pour tous les modes (M_0, M_1, M_2) diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. Les deux solutions de porosité fournissent presque les mêmes résultats avec une légère différence en faveur de la première solution décrite par Eqs. IV-18 et IV-19. On peut remarquer d'après les IV-20 et IV-21 que la différence entre la solution I et la solution II est très faible. Cela est dû aux distributions de porosité à travers l'épaisseur. En effet, la distribution linéaire de la porosité (solution II) et de la distribution constante (solution I) de la porosité ne sont pas très différentes pour induire des résultats très différents.

- **Influence de l'indice de loi de puissance sur La vitesse de groupe**

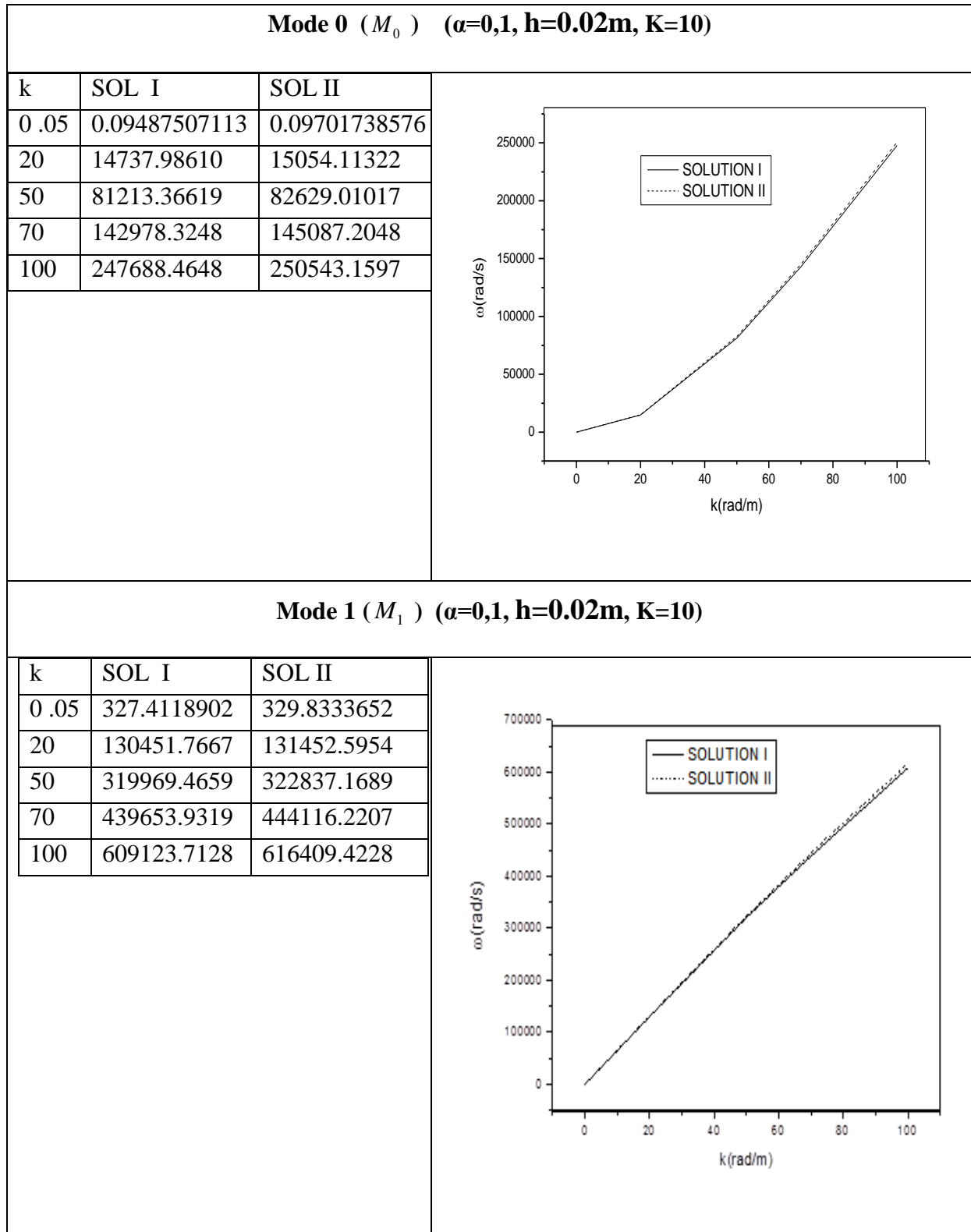


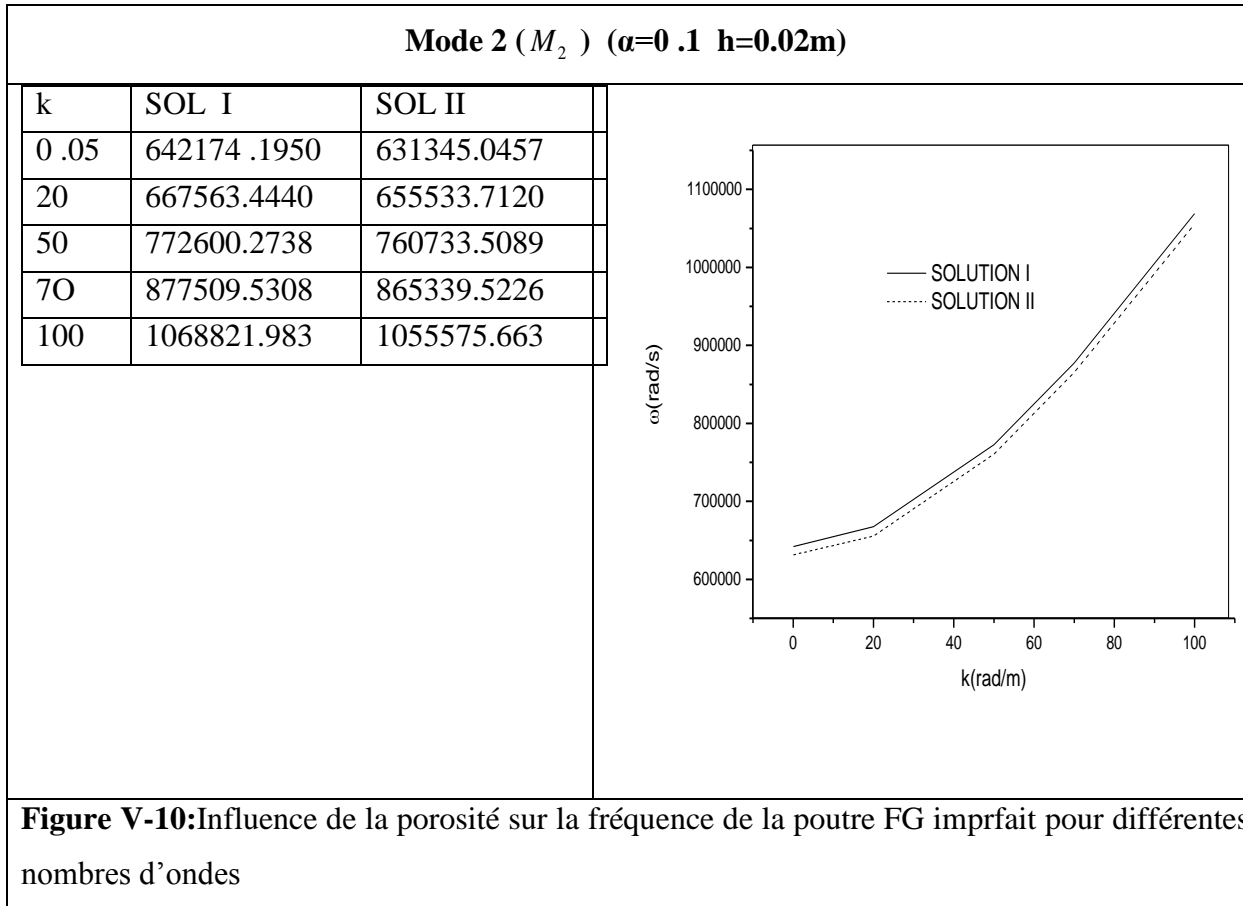


Sur les **Figures V- 9**, nous présentons une comparaison entre deux solutions de porosité en traçant la variation des vitesses de groupe en fonction le paramètre matériel N (l'indice de loi de puissance).. On peut voir que la distribution des graphes est même pour la vitesse de phase c'est-à-dire que les caractéristiques de vibration de vitesses de groupe pour tous les modes (M0,

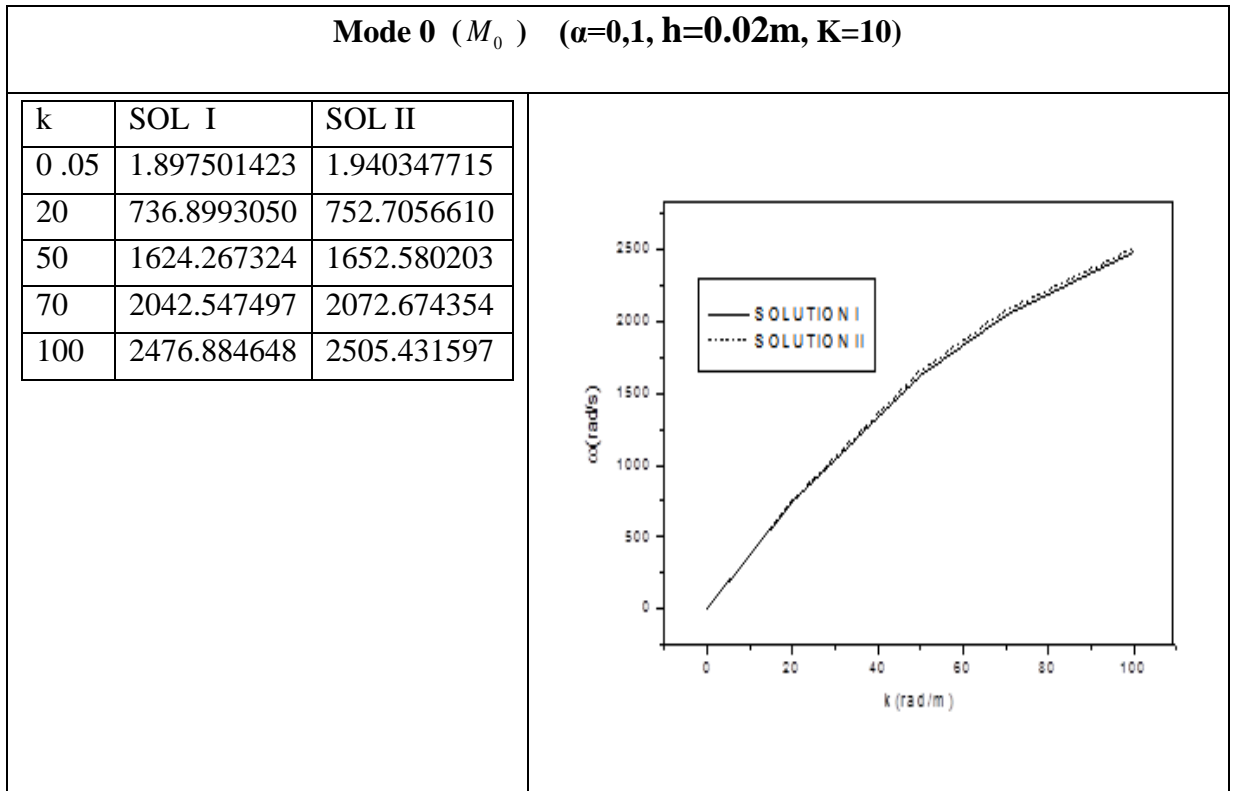
M1, M2) diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. Les résultats presque mêmes pour les deux solutions de porosité avec une légère différence

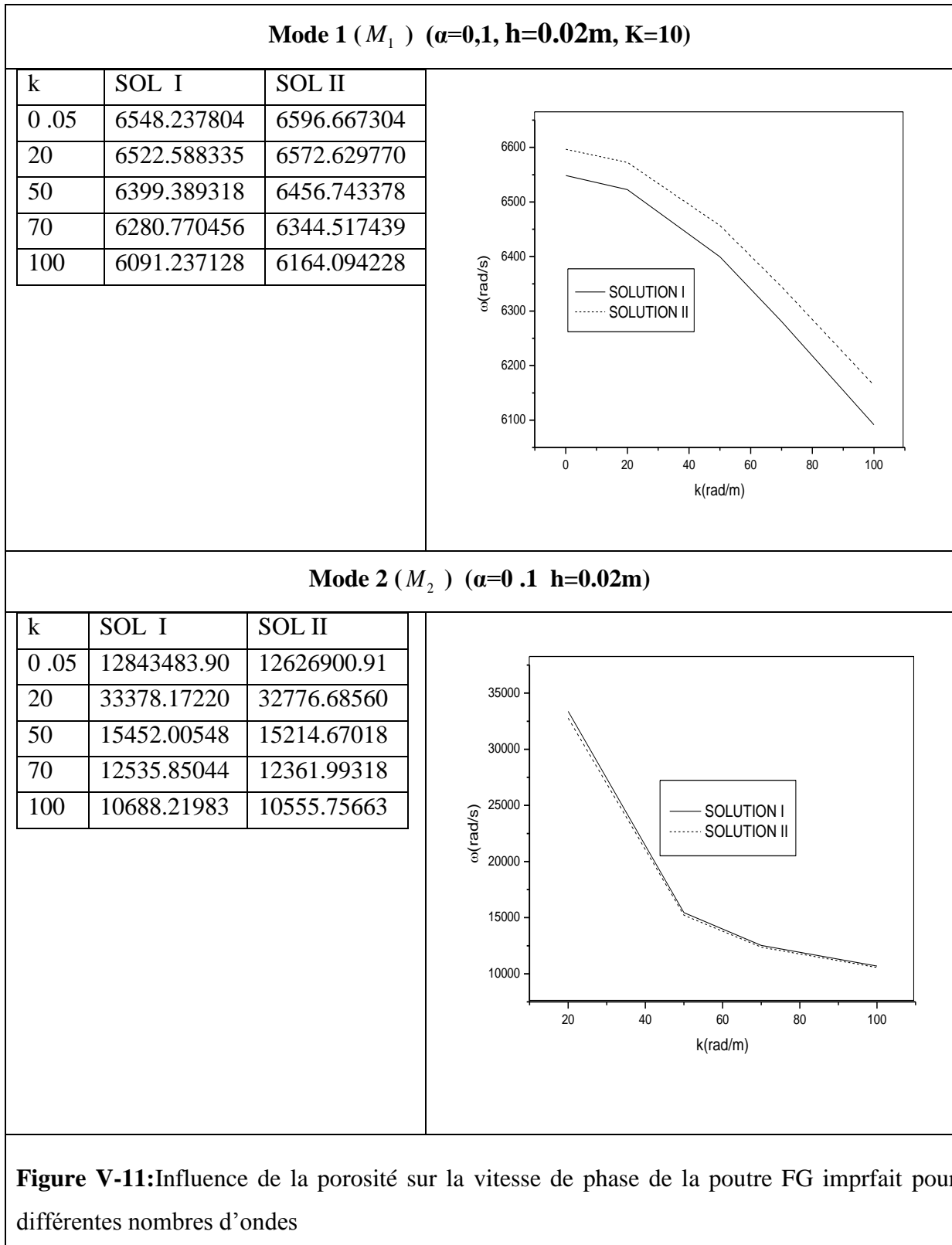
• **Influence de nombre de propagation d'onde sur La fréquence**





- Influence de nombre de propagation d'onde sur la vitesse de phase**





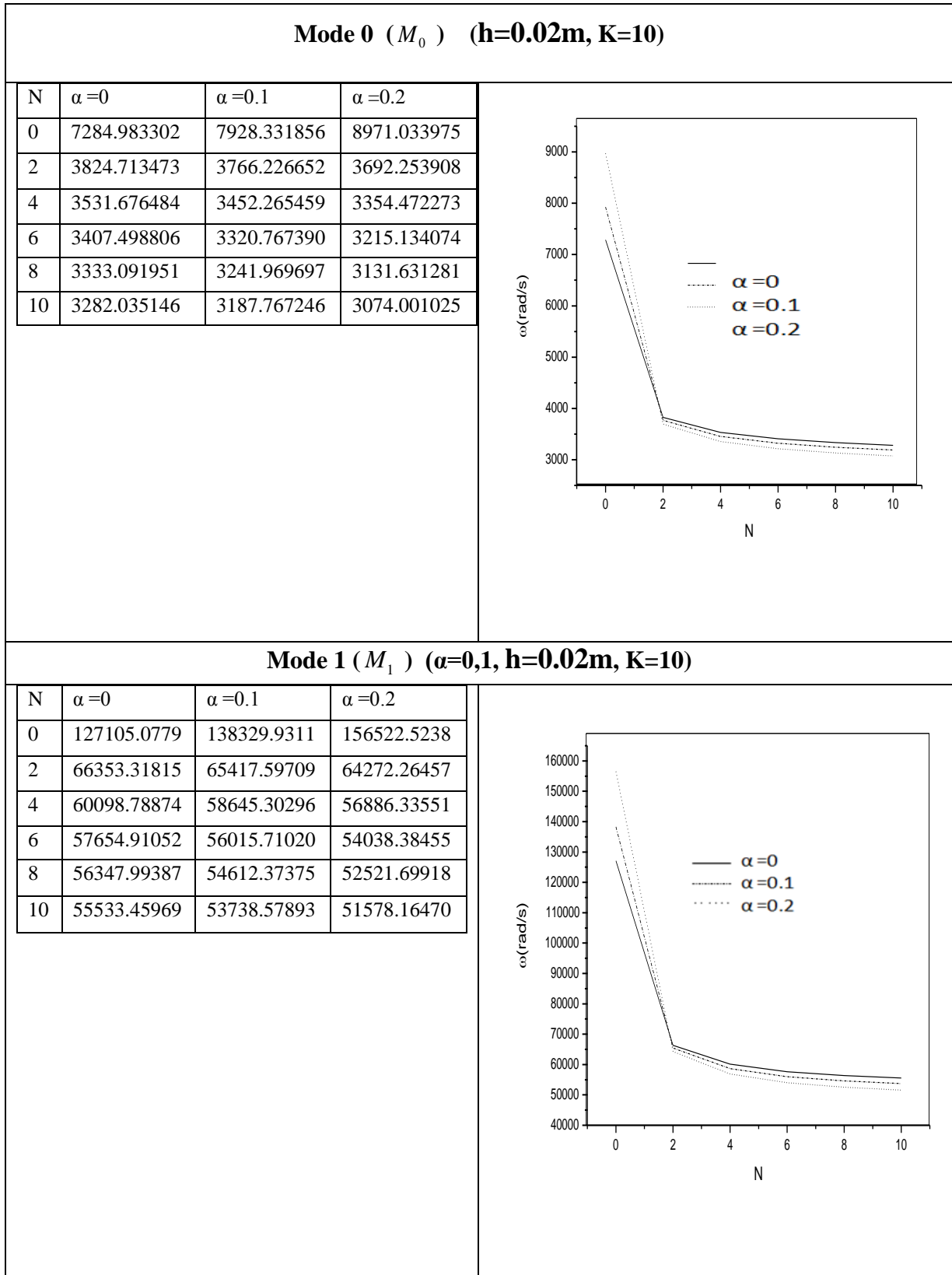
Les **Figures V-10 et V-11** montrent respectivement les courbes de dispersion de la fréquence et de la vitesse de phase en fonction du nombre d'ondes. Trois valeurs de paramètre de porosité sont considérées. La valeur de l'indice de puissance est prise $N=2$ et la profondeur de la poutre est de 0,002 m. Les formes des deux solutions de porosité étant identiques, nous ne considérons que la première solution.

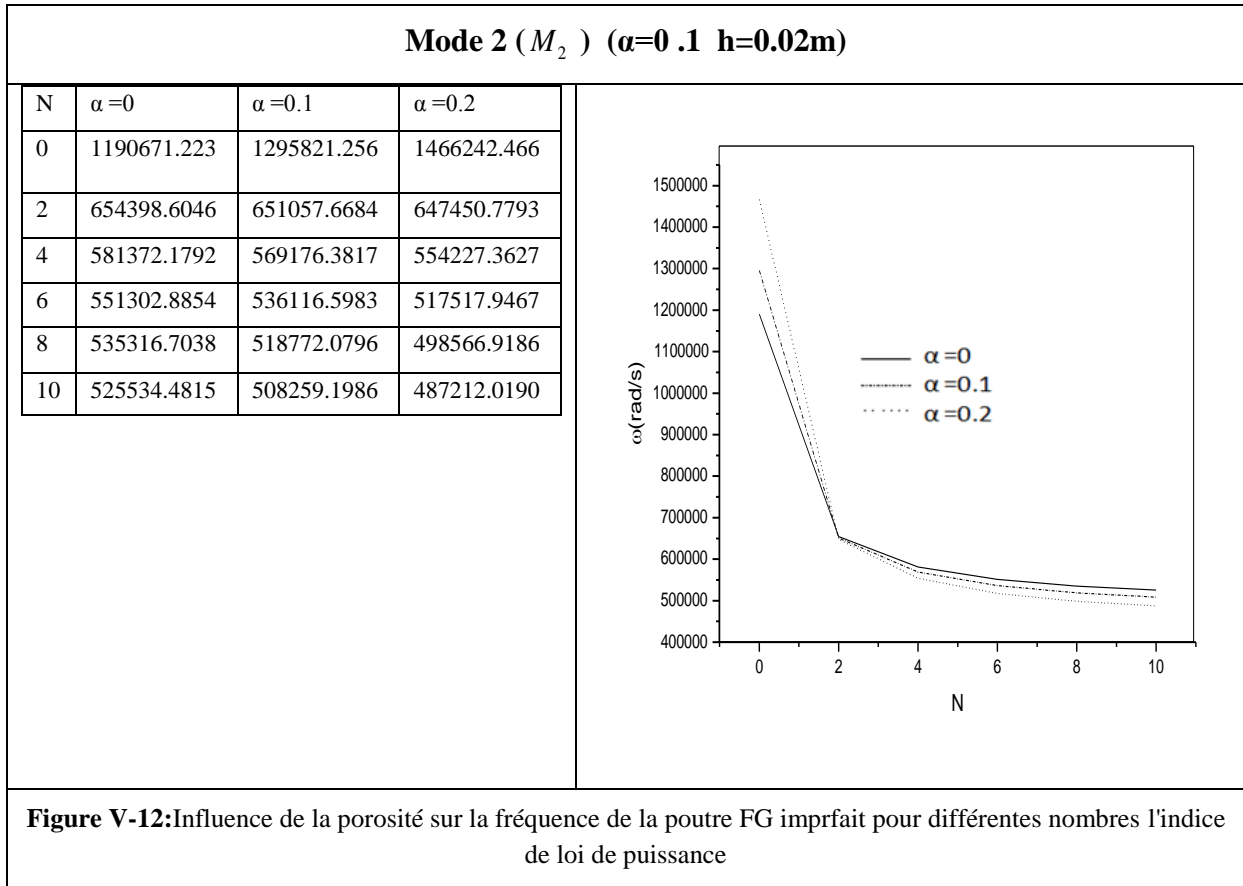
On peut voir que la porosité a un effet considérable sur la fréquence de propagation des ondes dans la poutre FG pour les grands nombres d'ondes (k), en particulier pour le mode d'onde d'extension M_1 . En effet, les vitesses de fréquence et de phase sont réduites lorsque la porosité augmente. On peut également remarquer à partir de la figure V-9 qu'à des nombres d'ondes faibles, les fréquences ne diffèrent pas beaucoup dans le cas des modes M_0 et M_1 . Cela est dû au fait que ces deux modes sont liés à l'onde de flexion et d'extension. Cependant, pour le mode M_2 aux nombres d'ondes intermédiaires, les fréquences semblent moins influencées par la porosité, car ce mode est lié à l'onde de flexion et a également contribué au mode de cisaillement (W_s). A l'exception du mode d'onde de flexion M_2 , les vitesses de phase sont proportionnelles à la porosité.

On peut également conclure que l'influence de la porosité sur la vitesse de phase n'est pas considérable pour le plus petit nombre d'ondes k , mais cette influence devient significative avec l'augmentation du nombre d'ondes.

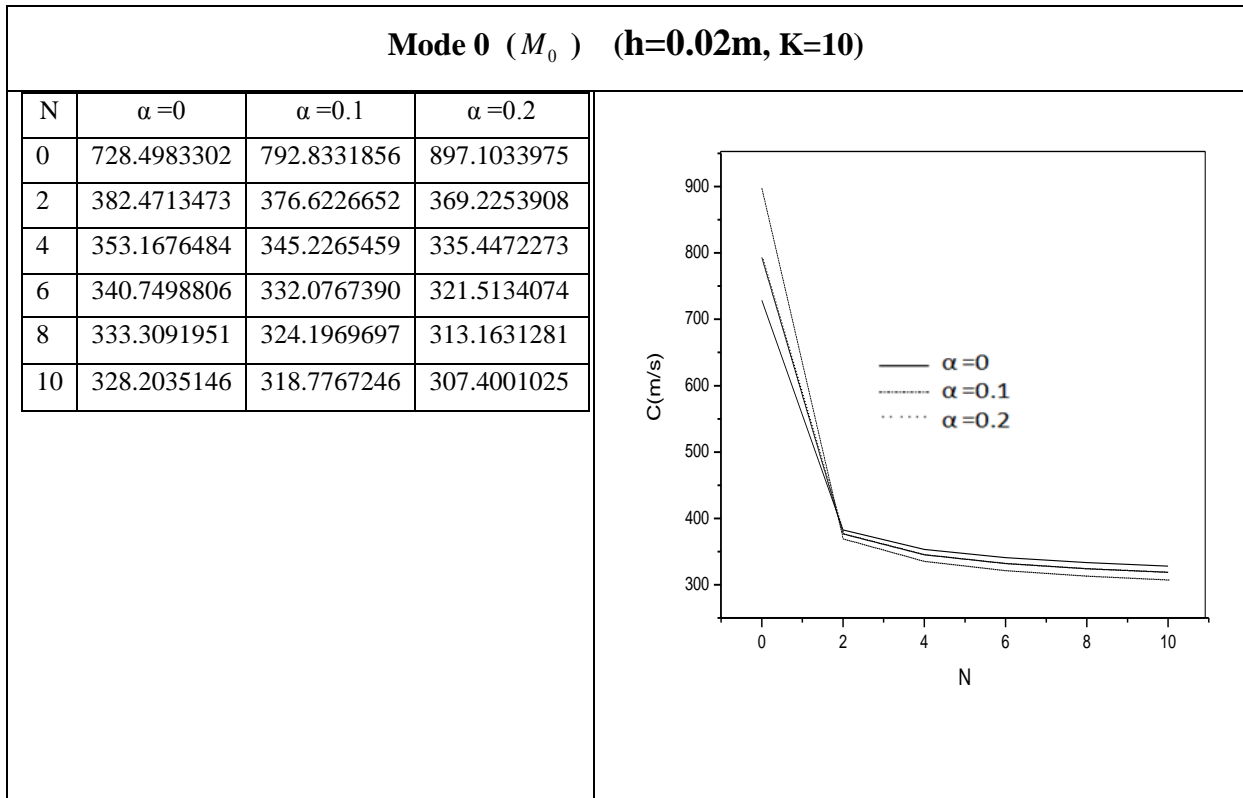
Les résultats qui sont représentés dans les figures V-12 et V-13 ci-dessous, pour étudier l'influence de l'indice de loi de puissance de constituants matériels (N) et l'indice de volume de porosité sur la fréquence et la vitesse de phase de la propagation d'onde, respectivement, en utilisant la théorie TSDT pour le nombre d'onde $k=10$ rad/m et l'épaisseur de la poutre est $h=0,02$ m dans les poutres FGM parfaits et non parfaits.

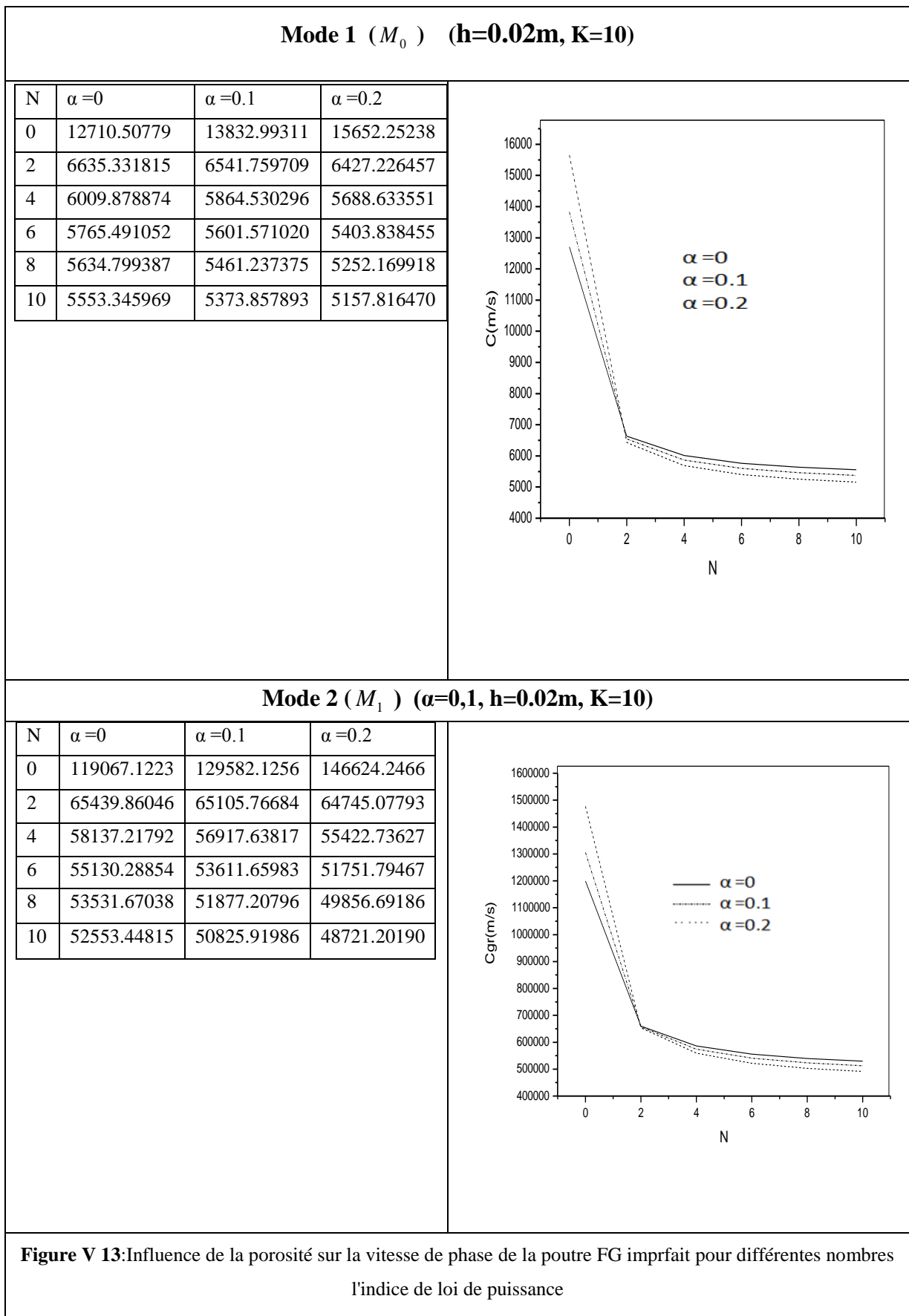
• **Influence de l'indice de loi de puissance sur la fréquence**





- Influence de l'indice de loi de puissance sur vitesse de phase**





Les (**Figures V-12 et V-13**) montrent respectivement les courbes de dispersion de la fréquence et de la vitesse de phase en fonction l'indice de loi de puissance. Trois valeurs de paramètre de porosité sont considérées. La valeur de nombre de propagation d'onde est égale ($k=0$) et la profondeur de la poutre est de 0,002 m.

On peut voir que la porosité a un effet considérable sur la fréquence de propagation des ondes dans la poutre FG et sur la vitesse de phase, pour tous les modes (M_0, M_1, M_2). Les de fréquence et de phase augmentent lorsque la porosité augmente pour l'intervalle des valeurs de l'indice de loi de puissance ($N=0$ et $N=2$). Et pour les autres valeurs de l'indice de loi de puissance, les fréquences et des vitesses de phase sont réduites lorsque la porosité augmente pour tous les modes (M_0, M_1, M_2).

On remarque qu'une même distribution des courbes pour la fréquence et la vitesse de phase pour chaque mode.

V.4. Conclusion

Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé TSDT est développée pour l'analyse de la propagation des ondes dans une poutre en matériaux FGM parfait et non parfait.

A partir de ces résultats obtenus, on peut conclure que les courbes de dispersion et la vitesse de phase sont considérablement influencées par l'indice de loi de puissance et l'indice de volume de porosité dans les poutres fonctionnellement graduées. En effet, on constate que pour un même nombre d'onde(k), la fréquence de la propagation des ondes dans la poutre à gradient fonctionnel diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance N . Et pour l'augmentation de paramètre de porosité cible une augmentation de la fréquence et la vitesse de phase et ainsi la vitesse de groupe.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de ce travail, une recherche analytique a été entreprise afin d'étudier des éléments de structures épaisses et hétérogènes en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Les objectifs de la présente thèse sont au nombre de deux chose .Le premier chose correspondant sur l'influence de nombreux paramètres sur la propagation des ondes et une résolution du comportement vibratoire et de propagation des ondes dans poutre FG et la deuxième chose correspondant sur l'influence de la distribution de la fraction volumique et l'indice de volume de porosité sur la propagation des ondes dans la poutre FG.

Dans la première partie de ce travail nous avons présenté le cas général pour la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes. Sur le plan théorique l'analyse mathématique de ces problèmes a été faite afin de voir les propriétés de propagation des ondes dans les solides. L'analyse par l'onde plane, pour le cas 3 D nous a permis de conclure qu'on est en présence de deux types d'ondes en régime harmonique, l'onde transversal et l'onde longitudinal. Elles se propagent dans les solides isotropes homogènes avec deux vitesses différentes. Des équations de la propagation d'ondes sont données, une autre analyse par onde plane harmoniques (problème en fréquence) a été faite où on a supposé que la forme de ces ondes sont des harmoniques simples. Une analyse mathématique et une analyse numérique ont été faites pour rechercher la solution exacte des équations de l'onde. Dans la deuxième partie une présentation générale telle que (généralité, loi de mélange, les types.....etc.) sur du matériau d'étude. Des différents théories pour l'analyse du matériau ont été cités dans la troisième partie de ce travail. Dans la quatrième partie nous avons donné une description générale d'un milieu poreux et nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les fréquences propres de propagation d'ondes et la vitesse de phase pour la poutre fonctionnellement graduées parfaites et imparfaites et de étudier de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes. Les propriétés des matériaux sont supposées variables dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions volumiques des constituants. Deux type des matériaux (le céramique et le métal) sont choisis pour l'analyse de la propagation d'ondes dans poutre FGM parfait et imparfait.

Les relations de la dispersion, et les fréquences fondamentales et les vitesses de phase et la vitesse de groupe sont trouvées en résolvant les équations de mouvement qui obtenus à partir application le principe d'Hamilton.

Une étude paramétrique a été faite pour comprendre plus et de discuter les résultats obtenus telle que les fréquences et les vitesses de phase et les vitesses de groupe pour le phénomène de la propagation des ondes.

En effet, on constate que pour un même nombre de l'indice de loi de puissance , une augmentation des valeurs des fréquences de la propagation des ondes et les vitesses de phase et les vitesses de groupe dans la poutre FG parfait, avec l'augmentation de nombre d'onde quel que soit le nombre du mode. la fréquence et la vitesse de phase et de groupe maximale est obtenue pour une poutre céramique complet ($N=0$).

La fréquence et la vitesse de phase et de groupe de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité En effet, les fréquences sont réduites lorsque la porosité augmente; de même, la vitesse de phase de la plaque diminue à mesure que la porosité augmente.

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

[Bourbié T et al ,1986] BOURBIÉ T., COUSSY O., ZINSNER B., Acoustique des milieux poreux, Technip-IFP, 1986.

[Eringen A.C et al, 1975] ERINGEN A.C., SUHUBI E.S., Elastodynamics, Academic press, 1975.

[Chazelas J.-L et al ,2003] CHAZELAS J.-L., GUÉGUEN P., BARD P.-Y., SEMBLAT J.-F., Modélisation de l'effet site-ville en modèle réduit centrifugé. Validation des techniques expérimentales, 6e Colloque national de génie parasismique, École Polytechnique, Palaiseau, 2003, pp. 245-252.

[Semblat J.-F et al, 1998] SEMBLAT J.-F., LUONG M.P., Wave propagation through soils in centrifuge experiments, Journal of Earthquake Engineering, vol. 2, 1, 1998, pp. 147-171.

[Bui H.D , 1993] BUI H.D., Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, Eyrolles, Paris, 1993.

[Chammas R et al, 2003] CHAMMAS R., ABRAHAM O., CÔTE P., PEDERSEN H., SEMBLAT J.-F., Characterization of heterogeneous soils using surface waves : homogenization and numerical modeling, International Journal of Geomechanics (ASCE), vol. 3, 1, 2003, pp. 55-63.

[Moczo P et al, 1993] MOCZO P., BARD P.-Y., Wave diffraction, amplification and differential motion near strong lateral discontinuities, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 83, 1993, pp. 85-106.

[Virieux J., P-SV, 1986] VIRIEUX J., P-SV Wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference Method, Geophysics, vol. 51, 1986, pp. 889-901.

[Joly P, 1982] JOLY P., Les ondes de Rayleigh numériques, Rapport de Recherche INRIA, 107, 1982.

[Semblat J.-F,1998] SEMBLAT J.-F., Amortissement et dispersion des ondes : points de vue physique et numérique, Revue française de génie civil, 2 (1), 1998, pp. 91-111.

[Bonnet M, 1999] BONNET M., Boundary integral equation methods for solids and fluids, Wiley, Chichester, UK, 1999.

[Dangla P ,1989] DANGLA P., Couplage éléments finis-équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure, Thèse de doctorat de l'ENPC, 1989.

[Faccioli e et al , 1997] FACCIOLI E., MAGGIO F., PAOLUCCI R., QUARTERONI A., 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method, Journal of Seismology, 1, 1997, pp. 237-251.

[Komatitsch D et al, 1999] KOMATITSCH D., VILOTTE J.P., VAI R., CASTILLO-COVARRUBIAS J.M., SANCHEZ-SESMA F.J., The spectral element method for elastic wave equations - Application to 2D and 3D seismic problems, Int. Journal for Numerical Methods in Eng., 45, 1999, pp. 1139-1164.

[Samia ,H,2015]. Evaluation de la résistance a la compression du béton sur site : application de la méthode combinée thèse de doctorat 2015. Université mentouri Constantine 1

[Royer, D., et E. Dieulesaint, 2000]. Royer, D, E. Dieulesaint,. Ondes élastiques dans les solides. PARIS: Masson et Cie, 2000.

[Lowe 1995] Lowe, M. J. S. «Matrix techniques for modelling ultrasonic waves in multilayered media.» IEEE T ULTRASON FERR 42 (1995): 525-542.

[K. S. Yee,1966] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value Problems involving Maxwell's equations (1966)

[J. Lysmer et B.L. Kuhlmeyer,1969] J. Lysmer, B.L. Kuhlmeyer. Finite dynamic model for Infinite media (1969)

[R.M. Alford et al ,1974] R.M. Alford, K.R. Kelly and D.M. Boore. Accuracy of finite Difference modelling of the acoustic wave equation (1974).

[Ait, Yahia ,S ,2015]. Contribution à l'étude de la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques épaisses à gradient évalué sous un environnement thermique thèse de doctorat 2015

[R. E. Green. 2004] R. E. Green, Non-contact ultrasonic techniques, Ultrasonics 42, 9–16, 2004.

[P. Babilotte et al , 2011]. P. Babilotte, O. Diallo, L.P. Tran Hu Hue, M. Kosec, D. Kuscer, G. Feuillard, Electrical excitation and optical detection of ultrasounds in PZT based

piezoelectric transducers, Journal of Physics : Conference Series. IOP Publishing, p. 012027, 2011.

[Yosra. Dammak .2016]. Yosra. DAMMAK ,Caractérisation numérique et expérimentale par ultrasons de matériaux à gradient fonctionnel Thèse Docteur de l'Université du Maine sous le sceau de l'Université Bretagne Loire .2016 page 17.

[Yohann Ledru, 2009]. YOHANN Ledru, Étude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques, thèse de doctorat université de Toulouse ,2009

[Billoët, 1993] : J.L. Billoët, 'Introduction aux matériaux composites à hautes performances', Edition Broché, 1993.

[Chrétien, 1986] : G. Chrétien, 'Matériaux composites', Edition Technique et Documentation (Lavoisier), ISBN 2 85206 325 5, 1986.

[Balaya et al. 2004] : C. Balay, Y. Grohens, I. Pillin, 'Etat de l'art sur les matériaux composites biodegradables', Revue des Composites et des Matériaux Avancés, Vol. 14, pp 135-166, 2004.

[Draiche Kada, 2014]. DRAICHE Kada ,Contribution a l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches thèse de doctorat université de SIDI BEL ABBES, 2014

[Fekrar Abdelkader, 2015] Fekrar ABDELKADER, Analyse du flambement des plaques composites en utilisant la théorie à ordre élevé ,thèse de doctorat université de SIDI BEL ABBES, 2015.

[Hirai T, 1996] Hirai, T., "Functional gradient materials", Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341. Hirai, T., "Functional gradient materials", Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341.

[Bellifa Hichem, 2014] BELLIFA Hichem, Application de la théorie du gradient de déformation à l'étude de la réponse des structures multi échelles .thèse de doctorat université de SIDI BEL ABBES, 2014.

[H. Okamura, 1991] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9,1991.

- [Senouci .H et Maghrar .M, 2017].étude analytique du flambement et de la vibration libre de plaque FGM sandwich reposons sur fondation élastique memoire de fin d'étude master université de saida, 2017
- [Shen.H 2009] Shen H.S., Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells, CRC Press. 2009, 280 pages.
- [Mort.A 95] Mortensen A., Suresh S., Int. Mater. Rev. 40 (1995) 239-265.
- [Mist.R 73] MISTLER ,R,E, high strength substrates produced by multiple layer casting technique ,Am .ceram. soc .bull .1973, vol .52 N°11 p850-54.
- [Boch.P86] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa (1986) casting of AL2O3/ZrO2 laminated Composites.
- [Boch.P 87] BOCH .P .tape casting of layered composites, in processing of advanced ceramics .edited by moya and aza sociedad espanola de ceramica y vidrio 1987.
- [[Moya.J 92] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, Materials Letters, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [Teka.M 90] TAKAHASHI. M.ITOH. Y KASHIWAYA fabrication and evaluation of w/cu gradient material by sintering and infiltration technique , in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials Japan 1990.
- [Sark.P 96] sarkar.p. Nicholson .electrophoretic deposition mechanisms, kinetics, and application to ceramics ,1996 volume 79N°8
- [Abdi.H 97] ABDIZADEH, H., Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, « Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'alumine », Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.
- [STEF.H 90] STEFFENS.H.D.DVORAK.M.WEWEL. plasma sprayed functionally gradient materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sendai Japan 1990.
- [Yosra. Dammak .2016]. Yosra. DAMMAK ,Caractérisation numérique et expérimentale par ultrasons de matériaux à gradient fonctionnel Thèse Docteur de l'Université du Maine sous le sous le sceau de l'Université Bretagne Loire .2016 page 13.
- [G. M Crean, et A. Waintal ,1986]. G. M Crean, A. Waintal, Average Rayleigh-Wave Velocity of a Computer-Simulated Cristallographic Plane, J. Appl. Cryst., Vol.19, pp. 181-187, 1986.

- [J. J. Wortman, et R. A. Evans, 1965]. J. J. Wortman, R. A. Evans, Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio in Silicon and Germanium, *Journal of Applied Physics*, vol. 36, 1965.
- [AIT TALEB, S ,2016]. AIT TALEB, S, 2016, Analyse du comportement des poutres non – homogènes renforcées par des plaques composites thèse de doctorat université mouloud mammeri de tizi ouzou 2016
- [BAO. G, et WANG. L. 1995,], BAO. G, WANG. L. (1995), —Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal
- [DELALE. F, ET ERDOGAN. F 1983,],DELALE. F, ERDOGAN. F., “The crack problem for a non homogeneous plane”. *ASME « Journal of Applied Mechanics »*; 50 (3): 609-614. 1983.
- [Narrot.P et al , 2011] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi , "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons;page 110, 4 août ,(2011).
- [jin,Z,H et Batra,R,C ;1996] Jin, Z. H, Batra, R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.
- [Ziou , H et al ;2016] H. Ziou, H. Guenfoud, M. Guenfoud (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*; 7(3), 239-261.
- [Aissani Khadidja.2017]. Aissani Khadidja, Etude du comportement mécanique des macros et nano structures sur des fondations élastiques, Thèse Docteur de l'Université Université DJILLALI Liabes sidi bel abbes .2017.
- [Yang, F et al .2002]. Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2002), “Couple ?stress based strain gradient theory for elasticity”, *Int. J. Solid. Struct.*,39, 2731.
- [Reddy, 1997] Reddy, J.N. (1997), “On locking-free shear deformable beam finite elements”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 149, 113-132.
- [J.coirier ;2001]. «Mecanique des Melieux Continus», Dunod, Paris, 2001.
- [V .Vasiliev et E.Morosov,2001] «Mechanics and Analysis of Composite Materials» , Elsevier Science.Ltd,Oxford-UK, 2001
- [N. El Meiche et al ;2011]. N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, and E. A. Adda Bedia, A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Buckling and Vibration of Functionally Graded Sandwich Plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, no. 4, pp. 237–247, 2011.

- [Reddy JN;2000] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 2000; 47(1-3):663–84.
- [Zenkour AM;2006] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006;
- [Zenkour AM;2009] Zenkour AM. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci* 2009; 51(11–12):869–80.
- [Akavci SS,2007] Akavci SS. Buckling and free vibration analysis of symmetric and anti-symmetric laminated composite plates on an elastic foundation. *J Reinf Plast Compos* 2007; 26(18):1907–19.
- [Benyoucef S et al, 2010] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Ait Atmane H, Adda Bedia EA. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Mech Compos Mater* 2010; 46(4):425–34.
- [Ait Atmane H et al, 2010] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia EA. Free vibration of functionally graded plates resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int J Mech Mater Des* 2010; 6(2):113–21.
- [Coussy O ,1991] Coussy O., *Mécanique des milieux poreux*. Ed. Technip Paris, 1991.
- [Dormieux , L et Bourgeois E,2002] Dormieux L. et Bourgeois E., *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Ed. Presse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [Delanay M. E. and Bazley E. N,1970] Delanay M. E. and Bazley E. N. "Acoustical properties of porous materials", *Applied Acoustics*, 3 : 105, (1970).
- [SADOUKI.M.2014]. SADOUKI .Mustapha *Modélisation théorique de la propagation acoustique dans un milieu poreux inhomogène*. Thèse docteur Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Université de Khemis Miliana ,2014.
- [Depollier C.1989] Depollier C, “Théorie de Biot et prédiction des propriétés acoustiques des matériaux poreux. Propagation dans les milieux acoustiques désordonnés. ‘’ Thèse Doctorat, Université du Maine, (1989).
- [Allard J. F.1993] Allard J. F. ‘’ *Propagation of sound in porous media.*’’ Elsevier Applied Science publishers LTD, (1993).
- [Fellah ZEA,] Fellah ZEA, " *Contribution à l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux poreux : Approche temporelle*", Thèse Doctorat, Université du Maine, (2000).

- [Fellah ZEA et al,] Fellah ZEA, Berger S., Lauriks W., Depollier C., Trompette P., Chapelon J.Y. “Ultrasonic measurement of the porosity and tortuosity of air-saturated random packings of beads.” *J. Appl. Phys.*, 93(11) : 9352, (2003).
- [Ling Liu et al,] Ling Liu, Bo-Ming Zhang, Dian-Fu Wang, Zhan-Jun Wu. Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates. *Composite Structures* 73 (2006) 303–309
- [EL-HABIB, Ahmed, 2006] EL-HABIB, Ahmed Etude de la variabilité de stratifiés carbone/époxy et du comportement structurel d’une voilure d’aéronef léger, ENSMA ,2006.
- [P. Olivier et al, 1995] P. Olivier, J.P. Cottu, B. Ferret. Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates. *Composites* 26 (1995) 509-515.
- [Kardos, J.L et Dudukovic, M.P, 1995] Kardos, J.L. and Dudukovic, M.P. *Adv. Polymer Sci.* 1986, 80, 101
- [Bowles, K.J et Frimpong, S.S. Z] Bowles, K.J. and Frimpong, S.S. *Z Compos. Mater.* 1992, 26, 1487
- [Petitpas, E,1993] Petitpas, E. PhD Thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993
- [Drzal, L.T.et Madhukar, M. J ,1993] Drzal, L.T. and Madhukar, M. J. *Mater. Sci.* 1993, 28, 569
- [Norris A. N, 1986] Norris A. N., “On the viscodynamic operator in Biot’s equations of poroelasticity,” *J. Wave Mat. Interact.* 1 : 365, (1986).
- [Lafarge. D,1993] Lafarge. D. “Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique.” Thèse Doctorat, Université du Maine, (1993).
- [Ling Liu et al ,2006] Ling Liu, Bo-Ming Zhang, Dian-Fu Wang, Zhan-Jun Wu. Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates. *Composite Structures* 73 (2006) 303–309
- [Depollier, C.1989] Depollier, C. Théorie de Biot et Prédiction Des Propriétés Acoustiques Des Matériaux Po-reux. Propagation D’onde Dans Les Milieux Désordonnés. PhD thesis, Université du Maine, 1989.
- [A. TOUNSI et al, 2006] A. TOUNSI, S.A. MEFTAH, E.A. ADDA BEDIA .Approximate analysis of the interfacial stress concentrations in FRP – RC hybrid beams. *Composite Interfaces*, 2006; 13(7): 561 – 571
- [Zhu J et al, 2001] Zhu J., Lai Z., Yin Z., Jeon J. And Lee S., Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Mater. Chem. Phys.*, 68 (2001) 130-135.

[Wattanasakulpong N. et Ungbhakorn V,2014] Wattanasakulpong N. And Ungbhakorn V., Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp.Sci.Technol.*, 32(1) (2014) 111-120.

[MAHMOUDI A. et al, 2017] Abdelkader MAHMOUDI, Rabbab BACHIR-BOUIADJRA, Samir BENYOUCEF, Abdelouahed TOUNSI, El Abbas ADDA-BEDIA, Influence de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sur fondation élastique, *Nature & Technology Journal. Vol. A : Fundamentals and Engineering Sciences*, 17 (2017) 24-35 :

[Benferhat Rabia, 2017] Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés , thèse de Doctorat Université Hassiba Ben Bouali – Chlef. 2017