REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
ACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

# THESE
# DE DOCTORAT

*Présentée par* ZAGANE ABDELKADER
*Spécialité :* Mathématiques
*Option :* Géométrie Différentielle

*Intitulée*

« *Etude et constructions d'applications bi harmoniques*

*Soutenue le 9 Juillet 2019*
*Devant le jury composé de :*

*Président :* Hakem Ali Professeur Université Djilali liabes SBA
*Examinateurs :* Benaissa Abbas Professeur Université Djilali liabes SBA
Djaa Mustapha Professeur centre Universitaire de Relizane
Mohammed Cherif Ahmed MCA Université de Mascara
*Directeur de thèse :* Ouakkas Seddik Professeur Université de Saida

*Année universitaire 2018-2019*

# Remerciements

Tout d'abord, nous voudrions remercier le professeur Ouakkas Seddik pour tout ce qu'il nous a fait pendant les années de travail pour la réalisation de cette thèse. Nous espérons que Dieu lui récompensera la meilleure récompense pour sa patience et sa gratitude envers nous tout au long de cette période et nous avons l'enseignant et le cadre et le grand frère.

Nous adressons nos sincères remerciements au président de jury de discussion, par le professeur M. Hakem Ali.

En plus du professeur M. Benaissa Abbas , nous remercions chaleureusement son acceptation d'être un examinateur.
Nous rendons hommage à professeur M. Mustafa Djaa pour toute l'aide que nous avons apportée au fil des ans à la recherche scientifique,ainsi que pour son acceptation de devenir membre de jury de discussion

Nous reconnaissons que nous sommes reconnaissants à notre frère et collègue le professeur M. Mohamed cherif Ahmed. Nous ne pouvons pas le récompenser pour tout ce qu'il nous a fait de tous les aspects scientifiques, pédagogiques et de recherche. Nous lui disons que Dieu nous récompensera du bien.

Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à terminer ce travail.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

## Introduction

En 1970 la notion de variété de kenmotsu est définie par K.Kenmotsu [20].C'est une variété Riemannienne $(M, g)$ de dimension impair muni d'une structure presque contact $(\varphi, \eta, \xi)$ verifier

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X. \tag{1}$$

Et

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi. \tag{2}$$

où $\nabla$ désigne la connexion Riemannienne de $g$.
En 2013 A.Nejma introduit la notion de la bi-harmonicité dans la variété de Kenmotsu ([23]). Il a conclu le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1.** *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ est $(J, \varphi)-$holomorphique. Alors $F$ est harmonique si seulement si $F$ est constante.*

En 2016 nous avons pris l'application $F$ sous les mêmes données que ce n'est pas constante, puis nous avons calculé la bi-harmonicité de $F$ et trouvé les résultats que nous présentons dans la théorème suivante :

**Théorème 0.0.2** ([42]). *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J, \varphi)-$holomorphique. Alors le champ bi-tension de $F$ est donnée par*

$$\tau_2(F) = -2\big(\Delta(e(F))\xi + 2dF(grad(e(F)))\big). \tag{3}$$

En 1997 A. Fardoun et A. Ratto ont introduit le concept d'applications harmoniques avec potentiel (voir [2] et [5]) ce que on appelle application harmonique avec potentiel Soient $(M^m, g)$, $(N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes,et $H$ une fonction différentielle dans $N$, et soit $\phi : M \to N$ une application différentielle. On considère l'énergie fonctionnelle suivante

$$E_H(\phi) = \int_K (e(\phi) - H(\phi))\, dv_g \tag{4}$$

on dit que $\phi$ est harmonique avec potentiel s'il point critique de $E_H(\phi)$ et on a

$$\tau_H(\phi) = \tau(\phi) + \left(grad^N H\right) \circ \phi, \tag{5}$$

En 2018 A. Cherif and M. Djaa [2] ont généralise ce concept à la bi-harmonicité avec potentiel qui est inclus dans la définition et le théorème suivants :

**Définition 0.0.1.** *Soient $(M^m, g)$, $(N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes,et $H$ une fonction différentielle dans $N$, et soit $\phi : M \to N$ une application différentielle. On considère la bi-énergie fonctionnelle suivante*

$$E_{2,H}(\phi) = \int_K |\tau_H(\phi)|^2\, dv_g \tag{6}$$

*pour toute partie compacte $K \subset M$. Application $\phi$ est dite biharmonique avec potentiel $H$ si elle est un point critique de la $H$-bi-énergie fonctionnel $E_{2,H}(\phi)$.*

Donc

**Théorème 0.0.3.**

$$\tau_{2,H}(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_H(\phi) - Tr_g R^N(\tau_H(\phi), d\phi)\, d\phi - \left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)} gradH\right) \circ \phi.$$

En 2018, moi-même et le professeur S.Ouakkas avons calculé une valeur $\tau_{2,H}(\phi)$ dans le cas où l'application $\phi$ est conforme.Nous sommes arrivés à la conclusion dans le théorème suivant

**Théorème 0.0.4.** *[44] Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$, alors $\tau_{2,H}(\phi)$ est donné par :*

$$\tau_{2,H}(\phi) = (n-2)\, d\phi(A) - \frac{1}{\lambda^2} d\phi(B) - \frac{1}{\lambda^4} d\phi(C),$$

*tels que*

$$\begin{aligned} A &= grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2Ricci^M(grad \ln\lambda) \\ &\quad - \left(2(\Delta \ln\lambda) + (n-2)|grad \ln\lambda|^2\right) grad \ln\lambda, \\ B &= grad\Delta(H\circ\phi) - 2(\Delta\ln\lambda)\, grad(H\circ\phi) - 2(\Delta(H\circ\phi))\, grad\ln\lambda \\ &\quad - (n-2)\nabla_{grad(H\circ\phi)} grad\ln\lambda - (n-2)\nabla_{grad\ln\lambda} grad(H\circ\phi) \\ &\quad + 2Ricci^M(grad(H\circ\phi)) \end{aligned}$$

*et*

$$C = -|grad(H\circ\phi)|^2\, grad\ln\lambda + \frac{1}{2} grad\left(|grad(H\circ\phi)|^2\right).$$

La thèse rentre dans le cadre de l'étude et constructions d'applications bi-harmoniques sur les variétés riemanniennes. Notons que ce type d'applications est une généralisation des applications harmoniques qui ont été introduites par Eells-Sampson en 1964, les applications bi-harmoniques qui ont été développées à la fin des années 1980. Les applications bi-harmoniques sont les points critiques de la fonctionnelle bi-énergie et qui sont solutions d'un système non linéaire elliptique d'ordre quatre très difficile à résoudre en général. Cette étude a permis traiter quelques cas particuliers et de construire certains exemples. Cette thèse se situe à l'interface entre l'analyse géométrique et la géométrie différentielle.
Cette thèse comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les notions fondamentales sur les variétés riemanniennes qui sont des objets mathématiques plus généraux que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Ensuite, il introduit la notion des applications harmoniques et bi-harmoniques où il définit aussi certains objets mathématiques associés à ce type d'applications (tenseur énergie-impulsion, tenseur bi-énergie-impulsion et les applications conforme).
Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la géométrie de certaines structures ; Notamment les structures complexes et presque complexes et comme cas particuliers, il introduit la notion des variétés hermitienne et kählériennes. A la fin de ce chapitre, on présente la notion des structures presque de contact en notant que les variétés de Kenmotsu sont un cas particulier de ce type de structures.

Dans le troisième chapitre, on rappelle les résultats d'harmonicité connus sur les structures presque complexes et les structures de contact et qui ont un lien avec les outils géométriques définis sur ces structures. Il termine ce chapitre par la construction d'applications bi-harmoniques définies d'une variété de Kenmotsu vers une variété kählérienne, cette construction généralise certains résultats connus pour les applications harmoniques, notons que entre ce type de variétés, les seules applications harmoniques sont les applications constantes. Ce qui nous a permis de construire de nouveaux exemples d'applications bi-harmoniques non-harmoniques. Ce travail a fait l'objet d'un article publié [43].

A la fin de cette thèse et dans le quatrième chapitre,on a introduit un nouveau type d'applications qui sont les applications bi-harmoniques avec potentiel qui généralise d'une manière naturelle les applications harmoniques avec potentiel qui sont les points critiques de la fonctionnelle énergie avec potentiel. Il commence par le calcul de la seconde variation de cette fonctionnelle, ensuite il définit la fonctionnelle bi-énergie avec potentiel où il donne la première variation qui lui a permis de définir les applications bi-harmoniques avec potentiel, il a réussi à construire quelques exemples de ce type d'applications.Les résultats obtenus dans ce chapitre sont publiés dans l'article [44].

# NOTATIONS

$C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions sur $M$ de classe $C^\infty$

$TM$ le fibre tangent de $M$

$T^*M$ le fibre cotangent de $M$

$\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs vecteurs sur $M$ de classe $C^\infty$

$\Gamma(T^*M)$ l'ensemble des formes différentielles vecteurs sur $M$

$\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$

$d\varphi$ la différentiel de l'application $\varphi$

$(.)^\perp$, $(.)^\top$ la partie verticale, et la partie horizontale(respectivement)

$\otimes$, $\wedge$ le produit tensoriel, le produit extérieur (respectivement)

$id_M$ l'application d'identité de $M$

$\mathfrak{L}$, $d$ la dérivé de Lie et la dérivé extérieur (respectivement)

$<,>_{\mathbb{R}^n}$ produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

# GÉOMÉTRIE HARMONIQUES ET GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

On présente dans ce chapitre, les notions de base : Rappels de géométrie Riemannienne, le théorème de divergence,equation d'Euler-Lagrange, applications harmoniques, bi-harmoniques, tenseur énergie impulsion, tenseur bi-énergie impulsion et des exemples.

## 1.1 Rappels de Géométrie Riemannienne

### 1.1.1 Définitions et notations

Une variété Riemannienne de classe $C^\infty$ de dimension $m$ est un couple $(M^m, g)$ où $M^m$ est une variété differentiable de classe $C^\infty$ de dimension $m$.
Et $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$ est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique, non dégénéré et définie positive.
Localement, si $M$ est munie d'un système de coordonnées locales $(x^i), i = 1...m$, alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

où $g_{ij}$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ sur $M$.
Soit $(M^m, g)$ une variété Riemannienne, alors on peut définir :

1. Un isomorphisme entre l'espace des formes différentielles $\Gamma(T^*M)$ et l'espace des champs de vecteurs $\Gamma(TM)$ :

$$\begin{array}{rcl} \sharp : \Gamma(T^*M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ \omega & \to & \omega^\sharp \end{array}$$

   tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a $g(\omega^\sharp, X) = \omega(X)$.

2. Une métrique Riemannienne $g^*$ sur le fibré cotangent $T^*M$, définie par :
$$g^*(\omega, \eta) = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp).$$
Localement si $\omega = \omega_i dx^i$ et $\eta = \eta_j dx^i$, alors $g^*(\omega, \eta) = \omega_i \eta_j g^{ij}$, où $(g^{ij})$ représente la matrice inverse de $(g_{ij})$,
3. Une métrique Riemannienne $<,>$ sur le produit tensoriel $T^*M \otimes T^*M$, définie par :
$$< \omega_1 \otimes \eta_1, \omega_2 \otimes \eta_2 >= g^*(\omega_1, \omega_2)\, g^*(\eta_1, \eta_2).$$
où $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(T^*M)$.
4. Il existe une unique connexion affine $\nabla$
$$\nabla_X Y = X(Y^j) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$
Où $\Gamma_{ij}^k$ les coefficients de Christoffel sont donnés par la formule :
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \Big( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \Big) \quad , \quad k = 1, ..., m.$$
$\nabla$ est dite de Levi-Civita si :
sans torsion
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$
et compatible avec $g$ :
$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$
5. Un tenseur de courbure $R$ est dit courbure Riemannienne
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$
vérifiant les propriétés suivantes :
$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad \text{première d'identité de Bianchi}$$
$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0 \quad \text{deuxième d'identité de Bianchi.}$$
Où
$$(\nabla_X R)(Y, Z) = X(R(Y, Z)) - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z).$$
Localement on a :
$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$
où
$$R_{ijk}^l = \partial_i\big(\Gamma_{jk}^l\big) - \partial_j\big(\Gamma_{ik}^l\big) + \sum_{s=1}^{m} \big(\Gamma_{is}^l\, {}^M\Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^l\, \Gamma_{ik}^s\big).$$

6. Le tenseur de Ricci :
$$\operatorname{Ricci} X = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i)e_i.$$
7. La courbure de Ricci :
$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X, e_i)e_i, Y).$$
8. La courbure sectionnelle d'un plan engendré par une famille orthonormée $\{X, Y\}$ :
$$\operatorname{Sect}(X, Y) = g(R(X, Y)Y, X).$$
9. Le gradient d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, défini pour tout $X \in \Gamma(TM)$ par :
$$g(\operatorname{grad} f, X) = X(f).$$
10. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ :
$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$
11. La divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$ :
$$\operatorname{div} \omega = \sum_{i=1}^{m} \Big( e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla_{e_i} e_i\big)\Big).$$
12. La divergence d'un champ de tenseur de type $(0, 2)$, $T \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ :
$$(\operatorname{div} T)(X) = \sum_{i=1}^{m} \Big( e_i\big(T(e_i, X)\big) - T\big(\nabla_{e_i} e_i, X\big) - T\big(e_i, \nabla_{e_i} X\big)\Big).$$
13. Laplacien d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ :
$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{m} \Big( e_i\big(e_i(f)\big) - \big(\nabla_{e_i} e_i\big)(f)\Big), \quad f \in C^\infty(M).$$

Telle que, $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur $M$.

### 1.1.2 Théorème de divergence

**Définition 1.1.1.** *Soit $(M, g)$ une variété Riemannienne de dimension $m$. On appelle mesure de volume Riemannienne, notée $v^g$, la mesure définie localement dans un repère par*
$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^m.$$

**Exemple 1.1.1.** *On considère la variété $\mathbb{R}^3$ munie des coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ on a*

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

*et,*

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz.$$

**Exemple 1.1.2.** *On Considère la sphère $\mathbb{S}^2$ muni de la métrique induite*

$$g = d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2$$

*alors,*

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |sin\,\theta|\, d\theta \wedge d\varphi.$$

**Théorème 1.1.1** ([27])**.** .
*Soient $(M, g)$ une variété Riemannienne et $D$ un domaine compact à bord $\partial D$ dans $M$. Soient $\omega$ 1-forme et $X$ un champ de vecteurs définis sur un voisinage inclus dans $D$. Alors*

$$\int_D (div\,\omega)\, v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathfrak{n})\, v^{\partial D} \quad et \quad \int_D (div\, X)\, v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathfrak{n})\, v^{\partial D} ,$$

*où $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal à $\partial D$.*

**Corollaire 1.1.1.** *Pour tout $\omega$ une $1-$forme et $X$ un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine $D$, alors*

$$\int_D (div\,\omega)\, v^M = 0 \quad et \quad \int_D (div\, X)\, v^M = 0$$

### 1.1.3 Le fibré tangent inverse

Soient $M, N$ deux variétés différentiables et $\varphi : M \to N$ une application de classe $C^\infty$. Si $\nabla^N$ est une connexion linéaire sur le fibré tangent $(TN, \pi_N, N)$, alors le fibré tangent inverse est définit par

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}TN &= \{\, (x, v)\, |\, x \in M \,,\, v \in T_{\varphi(x)}N \,\} \\ &= \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_{\varphi(x)}N \,, \end{aligned}$$

et

$$\Gamma(\varphi^{-1}TN) = \{\, V : M \longrightarrow TN, \quad \forall x \in M \,,\, V_x \in T_{\varphi(x)}N \,\}.$$

Localement pour tout $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ et $\varphi^\beta = y^\beta \circ \varphi$, on a

$$d\varphi(X) = X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

et
$$\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \{\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ\varphi\}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi.$$

En effet
$$\begin{aligned}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) &= \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi \\ &= \frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi \\ &= \frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}(\nabla^{N}_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta})\circ\varphi \\ &= \frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\overset{N}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi. \quad \square\end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1.** *Soient $M$, $N$ deux variétés différentiables, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application differentiable ;*
*Si $X$ et $V$ ( resp. $Y$ et $W$) sont $\varphi$ -conjugués i.e.*
$$d\varphi(X) = V\circ\varphi \quad et \quad d\varphi(Y) = W\circ\varphi,$$
*alors*
$$\nabla^{\varphi}_{X} d\varphi(Y) = (\nabla^{N}_{V} W)\circ\varphi\,.$$

**Proposition 1.1.1.**
*Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si $\nabla^N$ une connexion linéaire compatible avec une métrique $h$ sur $N$, alors la connexion linéaire $\nabla^\varphi$ est compatible avec la métrique $h_\varphi$ sur $\varphi^{-1}TN$. C'est à dire, pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ on a*
$$X(h_\varphi(V, W)) = h_\varphi(\nabla^{\varphi}_{X} V, W) + h_\varphi(V, \nabla^{\varphi}_{X} W)\,.$$

**Preuve** Soient $X \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ et $\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{W} \in \Gamma(TN)$, tels que
$$d\varphi(X) = \widetilde{X}\circ\varphi \quad , \quad \widetilde{V}\circ\varphi = V \quad et \quad \widetilde{W}\circ\varphi = W$$
alors,
$$\begin{aligned} X(h_\varphi(V, W)) &= X(h(\widetilde{V}, \widetilde{W})\circ\varphi) \\ &= \widetilde{X}(h(\widetilde{V}, \widetilde{W}))\circ\varphi \\ &= h(\nabla^{N}_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{W})\circ\varphi + h(\widetilde{V}, \nabla^{N}_{\widetilde{X}}\widetilde{W})\circ\varphi \\ &= h_\varphi(\nabla^{\varphi}_{X} V, W) + h_\varphi(V, \nabla^{\varphi}_{X} W)\,. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.1.2.**
*Soit $\nabla^N$ une connexion sans torsion sur $N$, alors*
$$\nabla^{\varphi}_{X} d\varphi(Y) = \nabla^{\varphi}_{Y} d\varphi(X) + d\varphi([X, Y])\,,$$
*pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.*

**Preuve** Soit $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs sont $\varphi$-conjugués avec $X$ et $Y$ respectivement . Alors

$$[V,W]\circ\varphi = d\varphi\circ[X,Y]$$
$$\nabla^N_V W = \nabla^N_W V + [V,W]$$

d'où

$$\begin{aligned}
\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) &= (\nabla^N_V W)\circ\varphi \\
&= (\nabla^N_W V + [V,W])\circ\varphi \\
&= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]).
\end{aligned}$$

∎

### 1.1.4 Seconde forme fondamentale

**Définition 1.1.2.** *Soient $(M,g)$, $(N,h)$ deux variétés Riemanniennes et $\varphi : M \to N$ une application différentiable de classe $C^\infty$. La seconde forme fondamentale de l'application $\varphi$ est la dérivé covariante de la 1-forme vectoriel $d\varphi$, définie par*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

**Remarque 1.1.2.** *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application différentiable. Alors la seconde forme fondamentale de l'application $\varphi$ est une forme vectoriel $C^\infty(M)$-bilinéaire symétrique i.e :*

$$(\nabla d\varphi)(\alpha.X, \beta.Y) = \alpha\beta(\nabla d\varphi)(X,Y)$$
$$(\nabla d\varphi)(X,Y) = (\nabla d\varphi)(Y,X)$$

*pour tout $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$.*

**Proposition 1.1.3.**
*Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors*

$$\nabla d(\psi\circ\varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)\,.$$

**Preuve** Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi\circ\varphi)(X,Y) &= \nabla^{\psi\circ\varphi}_X d(\psi\circ\varphi)(Y) - d(\psi\circ\varphi)(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^{\psi\circ\varphi}_X d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^P_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^\psi_{d\varphi(X)} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X,Y))\,.
\end{aligned}$$

∎

**Cas des sous-variétés**

Soient $(N, h)$ une variété riemannienne et M une sous-variété de N. Alors le champ de tenseur $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p \in M$ par

$$g(X,Y)_p = h_p(X_p, Y_p)\,,$$

est une métrique Riemannienne sur M, appelée la métrique induite sur M par h.
Pour tout $p \in M$ on a

$$T_pN = T_pM \oplus T_pM^{\perp}\,,$$

où,

$$T_pM^{\perp} = \{\, v \in T_pN \,|\, h_p(v,w) = 0\ , \forall w \in T_pM\}$$

$\forall\, v \in T_pN \quad \exists!\, v^{\top} \in T_pM \quad \exists!\, v^{\perp} \in T_pM^{\perp} \quad | \quad v = v^{\top} + v^{\perp}\,.$

**Remarque 1.1.3.** *Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ un prolongement de $X$ (i.e. $\tilde{X}|_M = X$). Si $\nabla^N$ (resp $\nabla^M$) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $h$ sur $N$ (resp sur $M$), alors*

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\top} \qquad , \quad X, Y \in \Gamma(TM)\,,$$

*est la connexion de Levi-Civita associée á la métrique g sur M, qui indépendante de le choix de prolongement.*

La deuxième forme fondamentale de M sur N est donnée par

$$B(X,Y) = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\perp} \qquad , \quad X, Y \in \Gamma(TM)\,,$$

et la courbure moyenne est donnée par

$$H = trace\, B\,.$$

**Définition 1.1.3.** *Une sous variété $M$ d'une variété $N$ est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle ($H = 0$).*

**Remarques 1.1.1.** .
*1) Soit $i : M \hookrightarrow N$ l'injection canonique, alors la deuxième forme fondamentale de $i$ coincide avec la deuxième forme fondamentale de M sur N, c'est à dire*

$$\nabla di(X,Y) = B(X,Y) = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\perp} \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,.$$

*2) Soit $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^{\perp})$, on a*

$$g(\nabla di(X,Y), \mathcal{N}) = -g(\tilde{Y}, \nabla^N_{\tilde{X}} \mathcal{N}) \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,. \tag{1.1}$$

*3) Dans le cas où $M$ est une hyper-surface de $N$ et $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^{\perp})$, on a*

$$\nabla di(X,Y) = g(\nabla di(X,Y), \mathcal{N})\, \mathcal{N}\,.$$

En effet, pour prouver (2), soit $p \in M$ on a

$$\begin{aligned} g(\nabla di(X,Y),\mathcal{N}) &= g((\nabla^N_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{\perp},\mathcal{N}) \\ &= g(\nabla^N_{\tilde{X}}\tilde{Y},\mathcal{N}) - g((\nabla^N_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{\top},\mathcal{N}) \\ &= g(\nabla^N_{\tilde{X}}\tilde{Y},\mathcal{N}) \\ &= \tilde{X}(g(\tilde{Y},\mathcal{N})) - g(\tilde{Y},\nabla^N_{\tilde{X}}\mathcal{N})\,. \end{aligned}$$

Si $(\varphi_t(p))_t$ est une courbe sur $M$, définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, telle que $\tilde{X}_p = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p)|_{t=0}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(g(\tilde{Y},\mathcal{N})) &= \frac{d}{dt} g(\tilde{Y},\mathcal{N}) \circ \varphi_t(p)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} g_{\varphi_t(p)}(\tilde{Y}_{\varphi_t(p)},\mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} h_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)},\mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

(3) découle immédiatement de (1) et (2).

**Exemple 1.1.3.** *Si $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ désigne la sphère d'unité et $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ le champ de vecteur normal à la sphère $\mathbb{S}^n$, alors*

$$\nabla di(X,Y)_p = -g(X,Y)_p\mathcal{N}_p \qquad X,Y \in \Gamma(TM) \quad , \forall p \in M\,. \tag{1.2}$$

$$g(\nabla di(X,Y),\mathcal{N})_p = -g(X,Y)_p \qquad X,Y \in \Gamma(TM) \quad , \forall p \in M\,.$$

*En effet, ceci découle de la formule* 1.1 *et de la relation*

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\tilde{X}}\mathcal{N} = \tilde{X}, \quad \forall \tilde{X} \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}).$$

# 1.2 Les applications harmoniques

## 1.2.1 Equation d'Euler-Lagrange

**Définition 1.2.1.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lagrangien sur $U$ est une fonction de classe $C^\infty$ :*

$$L : (x,y,t) \in U \times \mathbb{R}^n \times [t_1,t_2] \longrightarrow L(x,y,t) \in \mathbb{R}.$$

*Étant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé consiste à chercher les courbes $\varphi : [t_1,t_2] \longrightarrow U$ tracées dans $U$, telles que $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$, qui minimisent la fonctionnelle d'énergie :*

$$E(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\,dt. \tag{1.3}$$

*Pour caractériser la fonction $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$, on considère la variation $\varphi_s(t) = \varphi(t) + s\, v(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une vecteur de $\mathbb{R}^n$ depend de $t$, non nul sauf aux bornes $t_1$ et $t_2$, on a alors :*

$$v(t_1) = v(t_2) = 0 \quad , \quad \varphi_s(t_1) = \varphi(t_1) = x_1 \quad et \quad \varphi_s(t_2) = \varphi(t_2) = x_2.$$

**Théorème 1.2.1.**
*Sous les hypotheses de la définition précédente*

$$\frac{d}{ds} E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt.$$

*Où $<,>$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Big(\frac{\partial L}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x^n}\Big) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \Big(\frac{\partial L}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial y^n}\Big).$$

**Preuve** On considère l'application $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi(s,t) = \varphi_s(t) = \varphi(t) + s\, v(t). \tag{1.4}$$

D'après (1.3) et (1.4), on a :

$$\frac{d}{ds} E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{s=0} dt. \tag{1.5}$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial x^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big). \end{aligned} \tag{1.6}$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial s}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big)\, dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

D'après les formules (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2}\Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\, dt \\ &\quad +\Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}\Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt.\end{aligned}$$

Comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2}\Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\, dt \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}\Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt.\end{aligned}$$

■

**Théorème 1.2.2.**
*La courbe $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ est un point critique pour la fonctionnelle d' énergie $E(\varphi)$ si et seulement si :*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big) = 0. \tag{1.8}$$

*Ce système de $n$ équations différentielles du second ordre s'appelle système d'équations d'Euler-Lagrange.*

**Exemple 1.2.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $L : U \times \mathbb{R} \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2},$$

*donc le lagrangian représente l'énergie cinétique.*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 dt$$

*le système (1.8) est réduit à l'équation*

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

*les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont les droites affines (géodésiques) :*

$$\varphi(t) = a\,t + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

### 1.2.2 Première variation de l'énergie

Soient $(M^m, g)$ et $(N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes, $D$ un domaine compact de $M$ et $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$.

On définit l'énergie de $\varphi$ sur $D$ par :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v_g, \tag{1.9}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\varphi$ définie par :

$$|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)), \tag{1.10}$$

$\{e_1, ..., e_m\}$ étant une base orthonormée sur $M$ et $v_g = \sqrt{\det g}\, dx^1 ... dx^m$ est l'élément de volume Riemannien de $(M^m, g)$.

**Définition 1.2.2.** *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe $C^\infty$, entre deux variétés Riemanniennes est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie $E(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$, i.e :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.11}$$

*$\{\varphi_t\}$ étant une variation de classe ($C^\infty$) de $\varphi$ à support dans $D$.*

**Remarque 1.2.1.** *Une variation de $\varphi$ à support dans un domaine compact $D \subset M$, est une famille d' applications $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \subset C^\infty(M, N)$, telles que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur $M \setminus \operatorname{int}(D)$.*

**Théorème 1.2.3.**
*Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans un domaine compact $D$. Alors :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))\, v_g,$$

*où $v = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ dénote le champ de vecteur de variation de $\{\varphi_t\}$,*

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\}$$

*où $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur $(M^m, g)$.*
*$\tau(\varphi)$ est appelé champ de tension de $\varphi$.*

**Preuve** Soient $D$ un domaine compact de $M$, $\{\varphi_t\}$ une variation de $\varphi$ à support dans $D$ et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de vecteur de variation.
Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ l'application définie par $\phi(x, t) = \varphi_t(x)$.

Si $\{e_1, ..., e_m\}$ base orthonormée sur $M$, alors $[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1, ..., m$, on a $d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v$.
En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i, 0) : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow TN \quad ,$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \qquad (\,formule\,de\,Leibniz\,) \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})_{|t=0} \\ &= v(x)\,, \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i))\, v_g. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Soit $\omega$ la $1-$forme différentielle à support dans $D$, définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \big\{ e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big) \big\} \\ &= \sum_{i=1}^m \big\{ h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)) - h(v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \big\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

D'après les formules (1.12), (1.13) et le théorème de Stokes, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^m \big\{ h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\big) \big\}\, v_g.$$

■

**Corollaire 1.2.1.** *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe $C^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes est harmonique si et seulement si :*

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi = \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) = 0. \tag{1.14}$$

*tels que $\{e_1, ..., e_m\}$ base orthonormée sur $M$.*

**Remarque 1.2.2.** *L'équation (1.14) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie fonctionnelle.*

**Remarque 1.2.3.** *Localement, si $(x^i)$ et $(y^\alpha)$ désignent les coordonnées locales sur $M$ et $N$ respectivement, alors :*

$$\tau(\varphi) \;=\; g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\, {}^M\Gamma^k_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi.$$

**Proposition 1.2.1.**
*Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors*

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + tr_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)\,.$$

### 1.2.3 Tenseur énergie impulsion

**Proposition 1.2.2.**
*Soient $(M^m, g), (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe $C^\infty$. Si $\{g_t\}_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]}$ une variation de la métrique $g$ $(g_0 = g)$, alors :*

$$\delta g = \frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M).$$

*Localement on a :*

$$g_t = g_{ij}(t,x)\, dx^i \otimes dx^j \quad , \quad g_0 = g = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j \quad \mathit{et} \quad \delta g = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,x)\Big|_{t=0} dx^i \otimes dx^j.$$

**Définition 1.2.3.** *Soient $(M^m, g), (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe $C^\infty$. Le tenseur énergie impulsion de $\varphi$ est défini par :*

$$S(\varphi) = e(\varphi)\, g - \varphi^* h, \tag{1.15}$$

*pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$S(\varphi)(X, Y) = e(\varphi)\, g(X, Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y)).$$

*Où $e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de $\varphi$.*

**Proposition 1.2.3.**
*Soient* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* $C^\infty$,, $D$ *un domaine compact de* $M$ *et* $\{g_t\}$ *une variation de classe* $C^\infty$ *de* $g$, *alors :*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S(\varphi), \delta g > \; v_g,$$

*où* $\langle\, , \,\rangle$ *est la métrique Riemannienne induite sur* $T^*M \otimes T^*M$.

Pour la preuve de la Proposition 1.2.3, on peut se référer à [27] et [21].

**Théorème 1.2.4.**
*Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* $C^\infty$, *alors :*

$$\mathrm{div}^M \; S(\varphi) \;\; = \;\; -h(\tau(\varphi), d\varphi).$$

**Preuve** Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur $M$ définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x$, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Au point $x$, on a :

$$S(\varphi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\delta_{ij} - h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).$$

Tenant calcule qu'au point $x$, $\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i)$ et $\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_k) = \nabla^\varphi_{e_k} d\varphi(e_j)$, alors :

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{div}^M \; S(\varphi)\big)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\big(S(\varphi)(e_i, e_j)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} e_i\big(h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\big)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{m} e_i\big(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} h\big(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_k), d\varphi(e_k)\big) - \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\
&= -h\big(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\big).
\end{aligned}$$

■

Du théorème 1.2.4, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.2.2.** *Soient* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* $C^\infty$.

1. *Si* $\varphi$ *est harmonique, alors* $\mathrm{div}^M \; S(\varphi) = 0$.
2. *Si* $\varphi$ *est une submersion et si* $\mathrm{div}^M \; S(\varphi) = 0$, *alors* $\varphi$ *est harmonique.*

### 1.2.4 Exemples des applications harmoniques

- L'application identité Id : $(M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est harmonique.
- Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ de classe $C^\infty$, est harmonique si et seulement si, pour tout $\gamma = 1, ..., n$ :

$$\Delta^M \varphi^\gamma \equiv \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\, {}^M\Gamma_{ij}^k\Big) = 0.$$

- Une courbe $\varphi : (\mathbb{R}, <,>_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si et seulement si :

$$\frac{d^2\varphi^\gamma}{dx^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{d\varphi^\alpha}{dx}\frac{d\varphi^\beta}{dx}\, {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi = 0,$$

pour tout $\gamma = 1, ..., n$. On retrouve l'équation des géodésiques de la variété $(N^n, h)$.
- Soit $S$ une surface dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et soit :

$$\varphi : (\Omega, <,>_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, <,>_{\mathbb{R}^3}),$$

une paramétrisation locale de $S$, où $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons que :

$$\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2, \quad \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Alors, $S$ est minimale si et seulement si $\varphi$ est harmonique. En effet, notons :

$$N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|}$$

le vecteur unitaire normal,

$$E = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2, \quad F = \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2,$$

$$e = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad f = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad g = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

on obtient :

$$H = \frac{1}{2}\frac{e\,G + g\,E - 2f\,F}{E\,G - F^2}$$

la courbure moyenne de $S$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} + \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} - \Big\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2 \\
&= 0, \\
\Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tau(\varphi)$ est normal à la surface $S$ et on a :

$$H = \frac{e+g}{2E} = \frac{\big\langle N, \tau(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

- Soit l'application de Hopf

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (s,a,b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a,b)) \end{array}$$

où $\psi(a,b) = ka + lb$ et $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,\pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.
Soient,

$$g_{\mathbb{S}^3} = ds^2 + cos^2 s\, da^2 + sin^2 s\, db^2\,,$$

la métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^3$ et

$$h_{\mathbb{S}^2} = d\alpha^2 + sin^2\alpha\, d\psi^2\,,$$

une métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^2$. On a

$\{\, e_1 = \frac{\partial}{\partial s}\,,\, e_2 = \frac{1}{cos\, s}\frac{\partial}{\partial a}\,,\, e_3 = \frac{1}{sins}\frac{\partial}{\partial b} \,\}$ est une base orthonormée sur $\mathbb{S}^3$.

$\{\, f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\,,\, f_2 = \frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial}{\partial \psi} \,\}$ est une base orthonormée sur $\mathbb{S}^2$.

$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}$
$d\phi(e_2) = \frac{k}{coss}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$d\phi(e_3) = \frac{l}{sins}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$\nabla_{e_1} e_1 = 0$
$\nabla_{e_2} e_2 = tans\frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{e_3} e_3 = -cots\frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\alpha}}\frac{\partial}{\partial\alpha} = 0$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\psi}}\frac{\partial}{\partial\psi} = -sin\alpha\, cos\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}.$
$\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi(e_1) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial \alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_2} d\phi(e_2) = -\frac{k^2 sin\alpha\, cos\alpha}{cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\frac{l^2 sin\alpha\, cos\alpha}{cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}$ où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$.

En remplaçant dans l'expression

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3}\{\, \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\,\}\,,$$

on obtient

$$\tau(\phi) = \Big(\alpha''(s) + \alpha'(s)(cots - tans) - sin\alpha\, cos\alpha(\frac{k^2}{cos^2 s} + \frac{l^2}{sin^2 s})\Big)\frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

- Soient $N$ une variété Riemannienne et M une sous-variété de $N$.
  Si $i : M \hookrightarrow N$ est l'injection canonique, alors la sous-variété M est minimale si et seulement si $i$ est harmonique. En effet,

$$\nabla di = B\,,$$

  d'où, $\tau(i) = H$.
- Soient $(M, g)$ et $(N, h)$ des variétés Riemanniennes. Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un plongement régulier isométrique, c'est à dire, $\varphi$ est un plongement régulier tel que pour tout $p \in M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\varphi(p)}(d\varphi(X_p), d\varphi(Y_p))\,.$$

  Alors, $\varphi(M)$ est une sous-variété de N, de plus $\varphi(M)$ est minimale si et seulement si l'application $\varphi$ est harmonique.
  En effet, si $\nabla^{\varphi(M)}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par h sur $\varphi(M)$, et B désigne la deuxième forme fondamentale de $\varphi(M)$ sur N, alors

$$\begin{aligned}
B(d\varphi(X), d\varphi(Y)) &= (\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y))^{\perp} \\
&= \nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y) - (\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y))^{\top} \\
&= \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi(M)}_{d\varphi(X)} d\varphi(Y) \\
&= \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla d\varphi(X, Y) \quad , \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,,
\end{aligned}$$

  Soit $(e_i)$ une base orthonormée locale sur M, comme l'application $\varphi$ est isométrique, on a $(d\varphi(e_i))$ une base orthonormée sur $\varphi(M)$, d'où

$$\begin{aligned}
H &= traceB \qquad\qquad (\,courbure\,moyenne\,) \\
&= B(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\
&= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\
&= \tau(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

- Soit $M$ une variété Riemannienne et $g$ la métrique Riemannienne induite sur la sphère d'unité $\mathbb{S}^n$ par l'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\varphi : M \longrightarrow S^n$ une application de classe $C^\infty$, posons $\psi = i \circ \varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, alors $\varphi$ est harmonique si et seulement si

$$\tau(\psi) = -|d\psi|^2 \psi\,.$$

  En effet, d'aprés la proposition 1.2.1 on a

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + tr\,\nabla di(d\varphi, d\varphi)\,,$$

  donc , $\varphi$ est harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= tr\,\nabla di(d\varphi, d\varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\,,
\end{aligned}$$

où $(e_i)$ est une base orthonormée de $T_xM$, $x \in M$, en utilisant la formule 1.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^{m} g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\mathcal{N}_{\psi(x)} \qquad , \text{où} \quad \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2 \psi(x) \qquad , (\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)) \\
&= -|d\varphi|^2 \psi(x) \\
&= -|d\psi|^2 \psi(x) \, .
\end{aligned}$$

**Remarque 1.2.4.** *La composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale une application harmonique. En particulier si $\phi$ est harmonique et si $\psi$ et totalement géodésique c'est à dire $(\nabla d\psi = 0)$, alors $\psi \circ \phi$ est harmonique.*

**Exemple 1.2.2.** *Soit l'application,*

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\
x &\longmapsto (x, 0) \, ,
\end{aligned}$$

*on a,*

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= (\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}) \\
&= 0 \, ,
\end{aligned}$$

*et soit l'application,*

$$\begin{aligned}
\psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\
(x, y) &\longmapsto x^2 - y^2 \, ,
\end{aligned}$$

*on a,*

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= \Delta(\psi) \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \psi}{dy^2} \\
&= 2 - 2 = 0 \, ,
\end{aligned}$$

*alors les deux applications $\varphi$ et $\psi$ sont harmoniques, mais remarquons que la composé,*

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\
x &\longmapsto x^2 \, ,
\end{aligned}$$

*est non harmonique, $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$*

## 1.3 Les applications bi-harmoniques

Soient $(M^m, g)$, $(N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes et $D$ un domaine compact de $M$.

La fonctionnelle bi-énergie d'une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe $C^\infty$, est définie par :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{1.16}$$

**Définition 1.3.1.** *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe $C^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes, est dite bi-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie $E_2(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$ c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.17}$$

*$\{\varphi_t\}$ étant une variation de $\varphi$ à support dans $D$.*

### Première variation de bi-énergie

**Théorème 1.3.1.**
*Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $D$.*
*Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_2(\varphi)) \, v_g,$$

*où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ désigne le champ de variation associé à $\{\varphi_t\}$, et $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ définie relativement à une base orthonormée sur $M$, par :*

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) &= -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g (\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) \\ &= -\sum_{i=1}^m R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m \Big\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau(\varphi) \Big\} \end{aligned}$$

*$\tau_2(\varphi)$ est appelé champ de bi-tension de $\varphi$.*

**Preuve** Posons $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$, l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors :

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^m h\Big( \nabla^\phi_{(0, \frac{d}{dt})} \nabla d\phi\big((e_i, 0), (e_i, 0)\big), \nabla d\phi\big((e_i, 0), (e_i, 0)\big) \Big) v_g \Big|_{t=0}. \tag{1.18}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0) &- \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}) = \quad [(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)] \qquad (1.19)\\
&= 0.\\
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi\big(\nabla^M_{e_i} e_i,0\big) &= \nabla^{\phi}_{(\nabla^M_{e_i} e_i,0)} d\phi\big(0,\frac{d}{dt}\big). \qquad (1.20)\\
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) &= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi\Big(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\Big)\\
&= R^N\big(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0)\big)d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0)\\
&\quad + \nabla^{\phi}_{\big[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)\big]} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi\big(\nabla^M_{e_i} e_i,0\big).\\
&= R^N\big(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0)\big)d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt})\\
&\quad - \nabla^{\phi}_{(\nabla^M_{e_i} e_i,0)} d\phi\big(0,\frac{d}{dt}\big). \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) \quad &, \quad \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} = h\big(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)\big)\\
&+ \quad h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v,\tau(\varphi)\big) - h\big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v,\tau(\varphi)\big). \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, la $1-$forme différentielle à support dans $D$, définie par :

$$
\omega(X) = h\big(\nabla^{\varphi}_X v,\tau(\varphi)\big), \quad X \in \Gamma(TM).
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \big\{e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\}\\
&= \sum_{i=1}^m \big\{e_i\big(h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v,\tau(\varphi)\big)\big) - h\big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v,\tau(\varphi)\big)\big\}\\
&= \sum_{i=1}^m \big\{h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v,\tau(\varphi)\big) + h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) - h\big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v,\tau(\varphi)\big)\big\}. \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

D'après les formules (1.22) et (1.23), on obtient :

$$
\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big),\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0}
$$

$$\sum_{i=1}^{m} h \quad \Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0)(e_i,0)\big), \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{i=1}^{m} h\big(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)\big) + \operatorname{div}^M \omega - \sum_{i=1}^{m} h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big). \quad (1.24)$$

Soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans $D$, définie par :

$$\eta(X) = h\big(v, \nabla^{\varphi}_{X}\tau(\varphi)\big), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^{m} \big\{e_i\big(\eta(e_i)\big) - \eta\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \big\{e_i\big(h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big)\big) - h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big)\big\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \big\{h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) + h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) - h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big)\big\}. \quad (1.25) \end{aligned}$$

Substituant (1.24) dans (1.25), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) \quad , \quad \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{i=1}^{m} h\big(R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), v\big) + \operatorname{div}^M \omega - \operatorname{div}^M \eta$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) - \sum_{i=1}^{m} h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big). (1.26)$$

D'après les formules (1.18), (1.26) , et le théorème de Stokes, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} h\Big(-R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi), v\Big) v_g.$$

■

Du Théorème 1.3.1, on déduit que

**Corollaire 1.3.1.** *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe $C^\infty$, entre deux variétés Riemanniennes est bi-harmonique si et seulement si :*

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi) = 0. \quad (1.27)$$

**Remarque 1.3.1.**

1. *L'équation (1.27) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle bi-énergie.*
2. *Si les variétés $M$ et $N$ sont munies respectivement des coordonnées $(x^i)$ et $(y^\alpha)$, au voisinage des points $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$, alors :*

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) &= g^{ij}\Big\{\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i \partial x^j} + 2\frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \tau^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha \frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \\
&+\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^j} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\rho}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^v_{\alpha\beta}\,{}^N\Gamma^\sigma_{v\rho} \\
&-{}^M\Gamma^k_{ij}\Big(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^k} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^k}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Big) - \tau^v\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}\Big\}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi,
\end{aligned}$$

*où* $\tau^\gamma = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)$ *et* ${}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}$ *désignent les composantes du tenseur de courbure dans* $(N^n)$.

## 1.3.1 Tenseur bi-énergie impulsion

Avant de terminer ce chapitre il faut donner la définition de tenseur trés important dans la géométrie harmonique c'est Le tenseur bi-énergie impulsion.

**Définition 1.3.2.** *Soient $(M^m, g), (N^n, h)$ des variétés Riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe $C^\infty$. Le tenseur bi-énergie impulsion $S_2(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ associé à l'application $\varphi$ est défini pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ par :*

$$\begin{aligned}
S_2(\varphi)(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X,Y) - < d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) > g(X,Y) \\
&+h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y\tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X\tau(\varphi)),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

*où*

$$< d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) >= \sum_{i=1}^m h\big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)\big),$$

*relativement à une base orthonormée $\{e_1, ..., e_m\}$ sur $M$.*

**Proposition 1.3.1.**
*Soient $\{g_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $g$, alors : $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$, $D$ un domaine compact de $M$ et*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_2(\varphi), \delta g > v_g. \tag{1.29}$$

Pour la démonstration de la Proposition 1.3.1, on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 1.3.1** ([11]). *Soient $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$, et $\{g_t\}$ une variation $C^\infty$ de $g$.*
*Le champ de vecteurs $\xi = \big(\operatorname{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2}\operatorname{grad}^M\big(\operatorname{trace}_g(\delta g)\big)$ satisfait :*

$$\delta(|\tau(\varphi)|^2) \;=\; -2 < h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > -2\, h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)). \tag{1.30}$$

**Preuve** Localement, on a :

$$\begin{aligned}
\delta(\tau(\varphi)^\alpha) &= -g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - \xi^k\varphi^\alpha_k && (1.31)\\
< h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > &= g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij}\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} && (1.32)\\
h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)) &= \xi^k\varphi^\alpha_k\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} && (1.33)\\
\delta(|\tau(\varphi)|^2) &= \delta\big(\tau(\varphi)^\alpha\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}\big)\\
&= 2\,\delta(\tau(\varphi)^\alpha)\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}\\
&= -2g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij}\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - 2\xi^k\varphi^\alpha_k\tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}. && (1.34)
\end{aligned}$$

Substituant les formules (1.32) et (1.33) dans (1.34), on obtient (1.30). ■

**Lemme 1.3.2.** *Soient $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty, D$ un domaine compact de $M$ et $\{g_t\}$ une variation $C^\infty$ de $g$.*
*Si on pose*

$$\xi = \big(\operatorname{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2}\operatorname{grad}^M\big(\operatorname{trace}(\delta g)\big),$$

*alors :*

$$\begin{aligned}
\int_D h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi))v_g \;&=\; \int_D \Big\langle -\operatorname{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big)\\
&\quad + \frac{1}{2}\operatorname{div}^M\big(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp\big)g, \delta g\Big\rangle\, v_g. && (1.35)
\end{aligned}$$

*où* $\operatorname{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big)(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\nabla_Y h(d\varphi(X), \tau(\varphi)) + \nabla_X h(d\varphi(Y), \tau(\varphi))\big)$

**Preuve** Soit $\omega = h(d\varphi, \tau(\varphi))$, alors :

$$\int_D \omega(\xi)v_g = \int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big)v_g - \frac{1}{2}\int_D \omega\big(\operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g))\big)v_g. \tag{1.36}$$

Le premier terme à droite de l'égalité (1.36) est donné par :

$$\begin{aligned}
\int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big)v_g \;&=\; \int_D g(\omega^\sharp, (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp)v_g\\
&= \int_D g^*(\omega, \operatorname{div}^M(\delta g))v_g,
\end{aligned}$$

où $g^*$ est la métrique Riemannienne induite sur $T^*M$.

D'autre part, si pour $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, on pose $C(\omega, \sigma) = \omega^i \sigma_{ij} dx^j$, on obtient :

$$g^*(\omega, \operatorname{div}^M \sigma) = \operatorname{div}^M(C(\omega,\sigma)^\sharp) - \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \sigma\rangle. \tag{1.37}$$

Pour $\sigma = \delta g$, de la formule (1.37), on trouve :

$$\int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big) v_g = -\int_D \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \delta g\rangle. \tag{1.38}$$

Remarquant pour $\lambda \in C^\infty(M)$, on a :

$$\omega(\operatorname{grad}^M \lambda) = g^*(\omega, d\lambda). \tag{1.39}$$

Pour $\lambda = \operatorname{trace}(\delta g)$, de la formule (1.39) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_D \omega\big(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}(\delta g))\big) v_g &= -\frac{1}{2}\int_D g^*(\omega, d(\operatorname{trace}(\delta g)))v_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_D g(\omega^\sharp, \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g)))v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_D \operatorname{trace}(\delta g)\operatorname{div}^M(\omega^\sharp)v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_D \langle \operatorname{div}^M(\omega^\sharp)g, \delta g\rangle v_g. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Substituant les formules (1.38) et (1.40) dans (1.36), on obtient (1.35). ■

**Démonstration de la Proposition 1.3.1.**

D'après la formule (1.30) et le Lemme 1.3.1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_2(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D \delta(|\tau(\varphi)|^2)v_g + \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 \delta(v_{g_t}) \\ &= \frac{1}{2}\int_D \Big(-2 < h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > -2h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi))\Big)v_g \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_D < \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g, \delta g > v_g, \end{aligned}$$

et d'après le Lemme 1.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_2(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D -2 < h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > v_g + \frac{1}{2}\int_D < \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g, \delta g > v_g \\ &+ \frac{1}{2}\int_D \Big(\Big\langle 2\operatorname{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big) - \operatorname{div}^M\big(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp\big)g, \delta g\Big\rangle\Big)v_g. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Posons :

$$\begin{aligned} S_2(\varphi) &= -2h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)) + 2\,\mathrm{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big) \\ &\quad - \mathrm{div}^M \big(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp\big) g + \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur $M$ définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x$, pour tous $i, j \in \{1, ..., m\}$. Au point $x$, on a :

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big)(e_i, e_j) &= \nabla^\varphi_{e_i} h(d\varphi(e_j), \tau(\varphi)) + \nabla^\varphi_{e_j} h(d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) \\ &= 2h(\nabla d\varphi(e_i, e_j), \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) \\ &\quad + h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)), \end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}^M \big(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp\big) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(g(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp, e_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i\big(h(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))\big) \\ &= \sum_{i=1}^m \Big\{h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\Big\} \\ &= |\tau(\varphi)|^2 + < d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > . \end{aligned} \tag{1.44}$$

En substituant les formules (1.43) et (1.44) dans (1.42) ensuite dans (1.41), on obtient (1.29)

□

**Théorème 1.3.2.**
*Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$, alors :*

$$\mathrm{div}^M\ S_2(\varphi) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).$$

**Preuve** Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur $M$ définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x$, $(1 \leq i, j \leq m)$.

Si on pose

$$S_2(\varphi) = T_1 + T_2$$

où $T_1, T_2 \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ sont deux champs de tenseurs définis par :

$$\begin{aligned} T_1(X, Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X, Y) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > g(X, Y), \\ T_2(X, Y) &= h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau(\varphi)). \end{aligned}$$

Alors au point $x$, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}^M\ T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(T_1(e_i,e_j)\big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i\big(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2\delta_{ij} - < d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) > \delta_{ij}\big)\\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi),\tau(\varphi)) - e_j\big( < d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) > \big)\\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi),\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\\
&\quad - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)).\\
(\mathrm{div}^M\ T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(T_2(e_i,e_j)\big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i\big(h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\big)\\
&= \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi))\\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

Tenant compte qu'au point $x$, on a :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) \quad et \quad \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j) = \nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i)$$

$$\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{e_j}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) = R^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\tau(\varphi)$$

alors :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}^M\ T_1)(e_j) + (\mathrm{div}^M\ T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\\
&= -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Du Théorème 1.3.2, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.2.** *Soient* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* $C^\infty$.

1. *Si* $\varphi$ *est bi-harmonique, alors* $\mathrm{div}^M\ S_2(\varphi) = 0$.
2. *Si* $\varphi$ *est une submersion et si* $\mathrm{div}^M\ S_2(\varphi) = 0$, *alors* $\varphi$ *est bi-harmonique.*

### 1.3.2 Exemples des applications bi harmoniques

- L'application identité $\mathrm{Id} : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est bi-harmonique.
- Toute application harmonique est bi-harmonique.
- Considérons l'application différentiable

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (M, g) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto & \varphi(p) = (\varphi^1(p), ..., \varphi^n(p)) \end{array}$$

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), ..., \tau_2(\varphi^n))$, donc $\varphi$ et bi-harmonique si et seulement si les applications $\varphi^i, i = 1, ..., n$ sont bi-harmoniques.

- Soit l'application

$$\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h) \quad ,$$

$\varphi$ et bi-harmonique si et seulement si :

$$tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_h h(\tau(\varphi), d\varphi), d\varphi = 0$$

En effet, remarquons que la sphère unité $\mathbb{S}^n$ à courbure constante égale à 1 et d'après la formule :

$$R(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} tr_g R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi & = & tr_g\Big(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi\Big) \\ & = & |d\varphi|^2\tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \\ & = & 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \end{array}$$

- Soit $M^{n-1}$ une hypersurface de la sphère d'unité $(\mathbb{S}^n, h)$, alors l'injection canonique $i : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ munie de la métrique induite $g$ est bi-harmonique. En effet on a

$$\begin{array}{rcl} \tau(i) & = & tr_g\nabla di = tr_g B = H \\ \tau_2(i) & = & tr_g(\nabla^i)^2 H + tr_g R^{\mathbb{S}^n}(H, di)di \end{array}$$

D'après la formule 1.2 on a :

$$H = (1-n)\mathcal{N}$$

Alors, pour une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ sur $M$ avec $(\nabla^M_{e_i} e_j)_x = 0$, $x \in M$, on a

$$\begin{array}{rcl} tr_g(\nabla^i)^2 H & = & (1-n)\nabla^i_{e_i}\nabla^i_{e_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i \\ & = & (1-n)((\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^\perp + (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^\top) \\ & = & (1-n)(H + \nabla^M_{e_i} e_i) = (1-n)H \quad , \end{array}$$

et, comme $\mathbb{S}^n$ est de courbure constante on a

$$\begin{aligned} tr_g R^{\mathbb{S}^n}(H, di)di &= R^{\mathbb{S}^n}(H, di(e_i))di(e_i) = R^{\mathbb{S}^n}(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)H - h(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= (n-1)H - (1-n)g(\mathcal{N}, e_i)e_i = (n-1)H. \end{aligned}$$

D'où : $\tau_2(i) = 0$.

# CHAPITRE 2

# GÉOMÉTRIE DES STRUCTURES

On présente dans ce chapitre les variétés différentielles remarquables,qui sont possédant quelque propriétés, on les appelle les structures.Il y a plusieurs des structures,mais dans ce travail on réduit l'etude que deux structures, structure presque complexe, et structures presque contact .

## 2.1 Structure presque complexe

### 2.1.1 Variété complexe

**Définition 2.1.1.** *Une variété complexe de dimension $n$ est un espace topologique séparé, possédant un atlas de cartes sur $C^n$, tel que les applications de changement de cartes soient bi-holomorphismes.*

**Remarques 2.1.1.**

- *Toute variété complexe de dimension $n$ possède une structure canonique de variété différentielle orientable de dimension $2n$.*
- *Les variétés complexes de dimension $1$ sont appelées surfaces de Riemann.*
- *Pour tout carte complexe $(U, \psi)$ avec coordonnées locales complexes $z_1, ..., z_n$ dans un variété complexe $M$ de dimension $n$, si $x_k$ et $y_k$ sont les parties réelles et imaginaires de $z_k$, $k = 1, ..., n$ respectivement, alors $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ sont les coordonnées locales réelles de $M$.*

**Exemples 2.1.1.**

- *$\mathbb{C}^n$ l'espace euclidien est une variété complexe de dimension complexe $n$.*
- *$P\mathbb{C}^n$ l'espace projectif complexe est une variété complexe de dimension complexe $n$.*

### 2.1.2 Variété presque complexe

**Définition 2.1.2.** *Soit $M$ une variété differentiable de dimension $2n$. Une structure presque complexe $J$ sur $M$ est un endomorphisme sur $\Gamma(TM)$ tel que $J^2 = -id$. On dire que $(M, J)$ une variété presque complexe.*

**Remarques 2.1.2.**

1. *$Ker J = 0$ puisque si $JX = 0 \Longrightarrow J^2X = 0 \Longrightarrow -X = 0 \Longrightarrow X = 0$.*
2. *Si $J$ une structure presque complexe sur une variété differentiable $M$ alors $\dim M$ est un nombre paire .*

**Exemple 2.1.1.** *L'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ muni de l'endomorphisme $J$ où $\forall X \in \Gamma(T\mathbb{C}^n)$, $J(X) = iX$, tel que $i^2 = -1$ est une variété presque complexe de dimension $2n$.*

**Exemple 2.1.2.** *On considère $\mathbb{R}^{2n}$, on définit l'endomorphisme $J : \Gamma(T\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^{2n})$ par*

$$J\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad J\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1...n \tag{2.1}$$

*tels que $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ sont coordonnées Euclidiennes de $\mathbb{R}^{2n}$, alors on a $J^2 = -id$ où $J$ est la structure presque complexe de $\mathbb{R}^{2n}$ qui vérifie*

$$\begin{aligned} \langle JX, JY\rangle &= \langle X, Y\rangle \\ \langle JX, Y\rangle &= -\langle X, JY\rangle \\ \langle JX, X\rangle &= 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^{2n}). \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.3.** *On considère l'espace nombres de Cayley comme sous algèbre de $\mathbb{R}^8$ engendré par $\{e_0 = 1, e_i(i = 1, ..., 7)$ et $\mathbb{R}^7$ comme ensemble des imaginaires pures de nombres de Cayley. Pour tout $x \in \mathbb{S}^6 = \{x \in \mathbb{R}^7/\langle x, x\rangle = 1\}$ on définie l'endomorphisme $J_x : T_x\mathbb{S}^6 \longrightarrow T_x\mathbb{S}^6$ par $J_xV = x \times V$, $V \in T_x\mathbb{S}^6$, où $\times$ est multiplication définie par*

| $e_i \times e_j$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | -1 | $e_3$ | $- e_2$ | $e_5$ | $-e_4$ | $e_7$ | $-e_6$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | -1 | $e_1$ | $e_6$ | $-e_7$ | $-e_4$ | $e_5$ |
| $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | -1 | $-e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $e_4$ |
| $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $e_7$ | -1 | $e_1$ | $e_2$ | $-e_3$ |
| $e_5$ | $e_4$ | $e_7$ | $e_6$ | $-e_1$ | -1 | $-e_3$ | $-e_2$ |
| $e_6$ | $-e_7$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_2$ | $e_3$ | -1 | $e_1$ |
| $e_7$ | $e_6$ | $-e_5$ | $-e_4$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | -1 |

*alors $J$ définie une structure presque complexe sur $\mathbb{S}^6$.*

**Définition 2.1.3.** *Soit $(M, J)$ une variété presque complexe , l'espace $\Gamma(T^{\mathbb{C}}M)$ est la somme directe de $\Gamma(T^{1,0}M)$ et $\Gamma(T^{0,1}M)$ tels que*

$$\Gamma(T^{1,0}M) = \{Z \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)/J(Z) = iZ\};$$

$$\Gamma(T^{0,1}M) = \{Z \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)/J(Z) = -iZ\}.$$

**Remarque 2.1.1.** *Soit* $\{E_1, \cdots, E_m, JE_1, \cdots, JE_m\}$ *une base orthonormale de* $T_x^{\mathbb{C}}M$ *on peut choisir une base complexe* $\{Z_1, \cdots, Z_m\}$ *de* $T_x^{1,0}M$*, et* $\{\overline{Z}_1, \cdots, \overline{Z}_m\}$ *de* $T_x^{0,1}M$ *tels que*

$$Z_j = \frac{1}{2}(E_j - iJE_j) \quad et \quad \overline{Z}_j = \frac{1}{2}(E_j + iJE_j) \quad j = 1...m. \tag{2.2}$$

**Définition 2.1.4.** *Soit* $(M, J)$ *une variété presque complexe, on dit que* $J$ *est intégrable si pour tous* $X, Y \in \Gamma(T^{1,0}M)$ *alors* $[X, Y] \in \Gamma(T^{1,0}M)$.

**Exemple 2.1.4.** *La structure presque complexe* $J$ *dans l'exemple (2.1.2) est intégrable mais dans l'exemple (2.1.3) n'est pas.*

**Définition 2.1.5.** *Soit* $(M, J)$ *une variété presque complexe, le tenseur Nijenhuis* $N$ *est un tenseur de type* $(1, 2)$ *défini par :*

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \quad X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.3}$$

**Théorème 2.1.1.**
*Soit* $(M, J)$ *une variété presque complexe, alors* $M$ *est une variété complexe si seulement si* $N_J = 0$

**Preuve** Voir [10] ■

### 2.1.3 Variété Hermitienne

**Définition 2.1.6.** *Soit* $(M, J)$ *une variété presque complexe. On appelle une métrique Hermitienne toute métrique Riemannienne* $g$ *qui vérifie :*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.4}$$

*et on dire que* $J$ *et* $g$ *sont compatibles*

**Proposition 2.1.1.** *Toute variété presque complexe admet une métrique Hermitienne.*

**Preuve** Soit $(M, J)$ une variété presque complexe et comme $M$ est paracompacte donc il existe une métrique Riemannienne $g$, on pose

$$h(X, Y) = g(JX, JY) + g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

En effet

$$h(JX, JY) = g(-X, -Y) + g(JX, JY) = h(X, Y)$$

donc $h$ est une métrique hermitienne. ■

**Définition 2.1.7.** *Une variété presque hermitienne resp (variété Hermitienne ) est une variété presque complexe resp(variété complexe) munie d'une métrique Hermitienne.*

**Définition 2.1.8.** *Une variété presque Hermitienne* $(M, g, J)$ *est dite* $(1, 2)-$*symplectique ou quasi Kahlerienne si*

$$\forall Z, W \in \Gamma(T^{1,0}M) \quad \nabla_{\overline{Z}} W \in \Gamma(T^{1,0}M), \textit{avec} \quad \overline{Z} \in \Gamma(T^{0,1}M)$$

**Définition 2.1.9.** *Une variété presque Hermitienne* $(M, g, J)$ *est dite variété co-symplectique (ou semi Kahlerienne) si* $\operatorname{div} J = 0$

**Définition 2.1.10.** *Soit* $\Big\{E_1, \cdots, E_m, JE_1, \cdots JE_m\Big\}$ *une base orthonormée de* $\Gamma(TM)^{\mathbb{C}}$. *On appelle forme de Lee* $\theta$ *définie par*

$$\theta(Z) = \sum_{k=1}^{m} d\omega(E_k, JE_k, Z), \quad \textit{avec} \quad \omega(X,Y) = g(JX,Y), \textit{où} \quad \omega \in \wedge^2(T^*M)$$

*et on a* $\theta^{\sharp} = J \operatorname{div} J$ *est appelé le champ de vecteurs de Lee.*

**Propriété 2.1.1.**

- $(M, g, J)$ *est semi Kahlerienne* $\Longrightarrow d\omega = 0$
- *Toute variété* $(1, 2)$-*symplectique est semi Kahlerienne*

### 2.1.4 Variété Kahlerienne

**Définition 2.1.11.** *Soit* $(M, J, g)$ *une variété presque hermitienne. On appelle deuxième forme fondamentale l'application* $\phi$ *définie sur* $M$ *par :*

$$\phi(X, Y) = g(X, JY) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

**Définition 2.1.12.** *Soit* $(M, J, g)$ *une variété presque hermitienne (hermitienne ) est dite variété presque kählerienne (kählerienne) si la 2-forme* $\phi$ *est fermé i.e* $d\phi = 0$

**Remarque 2.1.2.** *Dans le cas si* $d\phi = 0$*, alors* $g$ *dire métrique Kahlerienne.*

**Proposition 2.1.2.** *Une variété hermitienne est kahlerienne si seulement si* $\nabla J = 0$.

**Preuve** voir [10] ∎

**Exemple 2.1.5.**
*On munit la variété* $\mathbb{R}^4$ *de la métrique*

$$g = sh^2t\, dx^2 + sh^2t(1 + 4x^2)\, dy^2 + sh^2t\, dz^2 - 4xsh^2t\, dydz + ch^2t\, dt^2.$$

*Pour une base orthonormée*

$$e_1 = \frac{1}{sht}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad e_2 = \frac{1}{sht}\Big(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}\Big) \quad , \quad e_3 = \frac{1}{sht}\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad e_4 = \frac{1}{cht}\frac{\partial}{\partial t}.$$

*Et la structure presque complexe $J$ définie par,*

$$J = e_2 \otimes e_1^* - e_1 \otimes e_2^* + e_4 \otimes e_3^* - e_3 \otimes e_4^*$$

*On a alors,* $Je_1 = e_2$ , $Je_2 = -e_1$ , $Je_3 = e_4$ , $Je_4 = -e_3$ ,
*la matrice de $J$ dans la base orthonormale est,*

$$(J_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Soit $N_J$ le tenseur de torsion Nijenhuis de $J$,*

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y],$$

*On a les crochets qui sont non nuls ,*

$$[e_1, e_2] = \frac{2}{sht} e_3, \quad [e_1, e_4] = \frac{-1}{sht} e_1, \quad [e_2, e_4] = \frac{-1}{sht} e_2, \quad [e_3, e_4] = \frac{-1}{sht} e_3.$$

*On utilise l'antisymétrie de $N_J$ et l'identité $N_J(JX, Y) = -JN_J(X, Y)$,*
*on obtient $N_J(e_i, e_j) = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq 4$; Donc, $N_j = 0$*
*La 2-forme fondamentale $\phi$ est donnée par,*

$$\phi = 2(sh^2t\, dx \wedge dy + sht\, cht\, dz \wedge dt - 2x\, sht\, cht\, dy \wedge dt),$$

*est fermée $(d\phi = 0)$, alors la variété est Kahlerienne.*

## 2.2 Structure presque de contact

### 2.2.1 Variété presque de contact

**Définition 2.2.1.**
*Une structure presque de contact sur une variété différentiable $M$ de dimension $(2n + 1)$ est un triplet $(\varphi, \xi, \eta)$ tels que :*
- *$\varphi$ un champ de tenseur de type $(1, 1)$*
- *$\xi$ un champ de vecteurs*
- *$\eta$ une 1-forme différentielle*

*vérifiant les conditions suivantes*

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

**Proposition 2.2.1.**
*Soit* $(\varphi, \xi, \eta)$ *une structure presque de contact alors on a*

$$\varphi\xi = 0 \tag{2.5}$$

$$\eta \circ \varphi = 0 \tag{2.6}$$

$$rang(\varphi) = 2n \tag{2.7}$$

**Preuve** voir [10] ■

**Définition 2.2.2.** *Une variété presque contact* $(M, \varphi, \xi, \eta)$ *est une variété différentielle de dimension* $2n+1$ *munie d'une structure presque de contact.*

**Exemple 2.2.1.** $M = \mathbb{R}^3,\ \xi = \frac{\partial}{\partial z},\ \eta = dz - ydx - zdy$ *et la matrice de* $\varphi$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$

### 2.2.2 Métrique d'une variété presque de contact

**Théorème 2.2.1.** *Toute variété presque de contact* $(M, \varphi, \xi, \eta)$ *admet une métrique Riemannienne* $h$ *vérifiant,*

$$h(X, \xi) = \eta(X). \tag{2.8}$$

*et*

$$h(\varphi X, \varphi Y) = h(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.9}$$

**Preuve** On considère la métrique $G$ tel que

$$G(X, Y) = g(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

où $g$ la métrique Riemannienne sur $M^{2n+1}$.
On définit $h$ par

$$h(X, Y) = \frac{1}{2}\big(G(X, Y) + G(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)\big).$$

Donc $h$ est une métrique Riemannienne et :

$$\begin{aligned} h(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}\Big(G(\varphi X, \varphi Y) + G\big(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(G(\varphi X, \varphi Y) + G(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)\big) \\ &= h(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(X, \xi) &= \frac{1}{2}\big(G(X, \xi) + G(\varphi X, \varphi\xi) + \eta(X)\eta(\xi)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\eta(X) + G(X, \xi)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\eta(X) + \eta(X)\big) = \eta(X) \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2.1.** *La métrique qui vérifiée les deux conditions (2.8) et (2.9) est une métrique compatible avec la structure presque de contact.*

**Définition 2.2.3.** *On appelle une variété métrique presque de contact toute variété presque de contact $(M, \varphi, \xi, \eta)$ munie d'une métrique Riemannienne $g$ compatible avec la structure presque de contact sur $M$.*

Dans ce cas la variété métrique presque de contact est notée $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

**Exemple 2.2.2.** *Soit $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t) = ce^t$, où $c \in \mathbb{R}_+$.*
*La variété du produit $M = \mathbb{R} \times N$ munie de la métrique Riemannienne $g_{(t,x)} = dt^2 + f^2(t)h_x$.*
*Si on pose $\xi = \frac{d}{dt}$, $\eta(.) = g(\xi, .)$ et $\varphi(f(t)\frac{d}{dt}, X) = (0, J(X))$ où $X \in \Gamma(T_xN)$*
*alors $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique presque de contact.*

**Définition 2.2.4.** *La deuxième forme fondamentale $\Phi$ de la variété métrique presque de contact $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est définie par*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

**Proposition 2.2.2.** *Une variété différentielle $M$ de dimension $(2n+1)$ admet une structure presque de contact s'il existe une $1-$forme différentielle globale $\eta$ et une $2-$forme différentielle globale $\Phi$ définies sur $M$, tels que*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0$$

*où $\Phi^n = \underbrace{\Phi \wedge \Phi ... \wedge \Phi}_{nfois}$.*

**Preuve** voir [10] ■

**Proposition 2.2.3.**
*Soit $(M, \varphi, \xi, \eta)$ une variété presque de contact, $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ la variété produit, $(X, f\frac{d}{dt})$ un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ tel que $X$ un champ de vecteurs sur $M$, et $f$ une fonction non nulle définie sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$. Alors*

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

*est une structure presque complexe sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$.*

**Preuve**

$$\begin{aligned} J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J\left(J(X, f\frac{d}{dt})\right) \\ &= J\left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\varphi^2 X - \varphi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - \eta(f\xi))\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, -f\eta(\xi)\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

On sait que

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \Rightarrow -X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi,$$

donc

$$\begin{aligned} J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= \left(-X, -f\frac{d}{dt}\right) \\ &= -\left(X, f\frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$J^2 = -id$$

■

### 2.2.3 Structure Presque de Contact Normale

**Définition 2.2.5.** *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. on dit que $M$ est normale si la structure presque complexe $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ est intégrable.*

**Remarque 2.2.2.** *Le tenseur $N_J$ est nul si $N_J\left((X,0),(Y,0)\right)$ et $N_J\left((X,0),\left(0, f\frac{d}{dt}\right)\right)$ sont nuls.*

**Définition 2.2.6.** *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. On définie le tenseur de Nijenhuis $N_\varphi$ associe à $\varphi$ par*

$$N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] + \varphi^2[X,Y], \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

**Proposition 2.2.4.**
*La structure $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ est intégrable si seulement si les tenseurs*

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.10}$$

$$N^{(2)}(X,Y)=(\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)\,Y-(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)\,X \tag{2.11}$$

$$N^{(3)}(X)=(\mathfrak{L}_{\xi}\varphi)\,X \tag{2.12}$$

$$N^{(4)}(X)=(\mathfrak{L}_{\xi}\eta)\,X \tag{2.13}$$

*sont nuls*

**Preuve** voir [10] ■

**Théorème 2.2.2.**

*Soit $(M,\varphi,\xi,\eta)$ une variété presque de contact si $N^{(1)}=0$ alors,*

$$N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$$

**Preuve**

Pour $Y=\xi$

$$N^{(1)}(X,\xi)=N_{\varphi}(X,\xi)+2d\eta(X,\xi)\,\xi=0,\quad \forall X\in\Gamma(TM)$$

on a

$$d\eta(X,\xi)\quad=g(X,\varphi\xi)=0$$

donc

$$N^{(1)}(X,\xi)=N_{\varphi}(X,\xi)=0$$

On calculons $N^{(2)},N^{(3)}etN^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(X,Y) &= (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)\,Y-(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)\,X\\
&= -\eta([X,\varphi Y])+\varphi X\eta(Y)-Y\eta(\varphi X)-\eta([\varphi X,Y])-\varphi Y\eta(X)\\
&= \eta([-X,\varphi Y]+[\eta(X)\xi,\varphi Y])+2d\eta(\varphi X,Y)\\
&= \eta([-X,\varphi Y])+\eta(X)\eta([\xi,\varphi Y])+2d\eta(\varphi X,Y)-\varphi Y\eta(X)\,\eta(\xi)\\
&= \eta\left(\left[\varphi^2X,\varphi Y\right]\right)+2d\eta(\varphi X,Y)\\
&= \eta\left(\varphi^2[\varphi X,Y]+\left[\varphi^2X,\varphi Y\right]-\varphi([\varphi X,\varphi Y])-\varphi\left(\left[\varphi^2X,Y\right]\right)\right)+2d\eta(\varphi X,Y)\\
&= \eta(N_{\varphi}(\varphi X,Y))\\
&= \eta\left(N^1(\varphi X,Y)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N^{(3)}(X) &= (\mathfrak{L}_\xi \varphi) X \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi([\xi, X]) \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi([-X, \xi]) \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi(\nabla_{-X}\xi + \nabla_\xi X) \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi\left(\nabla_{-X+\eta(X)\xi}\xi - \nabla_\xi(-X + \eta(X)\xi)\right) \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi([-X + \eta(X)\xi, \xi]) \\
&= [\xi, \varphi X] - \varphi\left(\left[\varphi^2 X, \xi\right]\right)
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
[\xi, X] - \varphi([\varphi X, \xi]) &= [\xi, X] - \xi\eta(X)\xi - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= [\xi, X] - \eta(\nabla_\xi X)\xi - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= -[X, \xi] + (\eta(\nabla_X \xi) - \eta(\nabla_\xi X))\xi - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= -[X, \xi] + \eta(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X)\xi - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= -[X, \xi] + \eta([X, \xi])\xi - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= \varphi^2[X, \xi] - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= \varphi^2[X, \xi] + [\varphi X, \varphi\xi] - \varphi([X, \varphi\xi]) - \varphi([\varphi X, \xi]) \\
&= N_\varphi(X, \xi) \\
&= N^1(X, \xi) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $X$ par $\varphi X$, on obtient

$$
[\xi, \varphi X] - \varphi\left(\left[\varphi^2 X, \xi\right]\right) = N^1(\varphi X, \xi) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
N^{(4)}(X) &= (\mathfrak{L}_\xi \eta) X \\
&= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \\
&= -(X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X, \xi])) \\
&= -2d\eta(X, \xi) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■

**Corollaire 2.2.1.** *La structure presque de contact est normale si*

$$
N^{(1)} = 0.
$$

**Exemple 2.2.3.** *la sphere* $\mathbb{S}^3$

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ \Big( \sin\alpha, \cos\alpha\sin\beta, \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma, \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \Big) \in \mathbb{R}^4, \alpha \in ]0, 2\pi[, \beta \in ]0, \pi[, \gamma \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \right\}$$

*muni de la métrique*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\alpha\cos^2\beta \end{pmatrix}.$$

- *On considère la 1-forme*

$$\eta = \sin\beta d\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta d\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta d\gamma.$$

  *On a*

$$\eta \wedge d\eta = -2\cos^2\alpha\cos\beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \neq 0$$

  *donc la variété est presque de contact.*
- *Soit le champ de vecteur*

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\tan\alpha\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

  *qui vérifie* $\eta(\xi) = 1$. *Et l'endomorphisme*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta \\ \tan\alpha & \tan\beta & 0 \end{pmatrix},$$

  *qui vérifie*

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

  *Donc,* $(\mathbb{S}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété métrique presque de contact.*

  *On peut établir maintenant que la structure* $(\varphi, \xi, \eta)$ *est normal on a*

$$N^1(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi,$$

  *l'expression locale du* $N(X, Y)$ *peut s'écrire sous la forme,*

$$N^i_{kj} = \varphi^h_k(\partial_h\varphi^i_j - \partial_j\varphi^i_h) - \varphi^h_j(\partial_h\varphi^i_k - \partial_k\varphi^i_h) + \eta_k(\partial_j\xi^i) - \eta_j(\partial_k\xi^i)$$

  *par un calcul simple, en trouvant* $N^1 = 0$.

### 2.2.4 Variété Co-symplectique

**Définition 2.2.7.** *Soit $(M,\varphi,\xi,\eta)$ une variété presque de contact normale, on dit que $M$ est co-symplectique si la deuxième forme fondamentale $\Phi$ et la forme $\eta$ sont fermées.*

**Théorème 2.2.3.** *Soient $(M,\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact de dimension $(2n+1)$ et $\nabla$ la connexion de Levi-Civita sur $M$, on dit que $M$ est co-symplectique si et seulement si*

$$(\nabla_X\varphi)Y=0,\quad X,Y\in\Gamma(TM)$$

**Lemme 2.2.1.** *Soit $(\varphi,\xi,\eta,g)$ une structure métrique presque de contact, la dérivée covariante de $\varphi$ est donnée par,*

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big)&=3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\&+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\end{aligned}\tag{2.14}$$

**Preuve** Rappelons que la connexion Riemannienne $\nabla$ de $g$ donnée par

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XY,Z)&=Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)\\&+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Phi(X,Y,Z)&=\frac{1}{3}\big(X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y)\\&-\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\big).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big)&=2g(\nabla_X\varphi Y,Z)+2g(\nabla_XY,\varphi Z)\\&=Xg(\varphi Y,Z)+\varphi Yg(X,Z)-Zg(X,\varphi Y)\\&+g([X,\varphi Y],Z)+g([Z,X],\varphi Y)-g([\varphi Y,Z],X)\\&+Xg(Y,\varphi Z)+Yg(X,\varphi Z)-\varphi Zg(X,Y)\\&+g([X,Y],\varphi Z)+g([\varphi Z,X],Y)-g([Y,\varphi Z],X).\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}2d\eta(\varphi Y,X)&=\varphi Y\big(\eta(X)\big)-X\big(\eta(\varphi Y)\big)-\eta\big([\varphi Y,X]\big)\\N^{(1)}(Y,Z)&=N_\varphi(Y,Z)+2d\eta(Y,Z)\xi\\&=\varphi^2[Y,Z]+[\varphi Y,\varphi Z]-\varphi([Y,\varphi Z])-\varphi([\varphi Y,Z])+2d\eta(Y,Z)\xi\\N^{(2)}(Y,Z)&=(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)Z-(\mathfrak{L}_{\varphi Z}\eta)y\\&=-\eta([Y,\varphi Z])+\varphi Y\eta(Z)-Z\eta(\varphi Y)-\eta([\varphi Y,Z])-\varphi Z\eta(Y).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\ &\quad +N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).\end{aligned}$$

■

**Propriété 2.2.1.** ($\Longrightarrow$) *Supposons que $M$ une variété co-symplectique $\big($i.e. $d\Phi=0, d\eta=0$, et $(\varphi,\xi,\eta)$ est normale$\big)$*

$$\begin{aligned}(\varphi,\xi,\eta)\ \ \textit{est}\ \ \textit{normale} &\Longrightarrow N^{(1)}=0\\ &\Longrightarrow N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.\end{aligned}$$

*d'après le lemme (2.2.1), pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$ on a,*

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)\\ &\quad +g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\ &\quad +2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

*donc*

$$(\nabla_X\varphi)Y=0$$

($\Longleftarrow$) *Supposons $(\nabla_X\varphi)Y=0$ on a,*

$$\begin{aligned}3d\Phi(X,Y,Z) &= X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y)-\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\\ &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,\nabla_X\varphi Z)+g(\nabla_YZ,\varphi X)+g(Z,\nabla_Y\varphi X)+g(\nabla_ZX,\varphi Y)\\ &\quad +g(X,\nabla_Z\varphi Y)-g(\nabla_XY-\nabla_YX,\varphi Z)-g(\nabla_ZX-\nabla_XZ,\varphi Y)\\ &\quad -g(\nabla_YZ-\nabla_ZY,\varphi X)\\ &= 0.\end{aligned}$$

*et $[\varphi,\varphi](X,Y)=0\Longrightarrow N^{(1)}(X,Y)=2d\eta(X,Y)\xi$.*
*Maintenant*

$$\begin{aligned}N^{(2)}(Y,\xi) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)(\xi)\\ &= -\eta\big([\varphi Y,\xi]\big)\\ &= -g(\xi,\nabla_{\varphi Y}\xi-\nabla_\xi\varphi Y)\\ &= g(\xi,\varphi\nabla_\xi Y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

*dans le lemme (2.2.1) posons* $Z = \xi$, *on obtient* $d\eta(\varphi Y, X) = 0, \quad \forall X, Y \in \gamma(TM)$ *donc* $d\eta = 0$ *d'où* $N^{(1)} = 0$; *Alors* $M$ *est co-symplectique.*

**Exemple 2.2.4.** *Considère* $\mathbb{R}^3$ *muni de la métrique Riemannienne* $g$ *définie par*

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont des fonctions de* $\mathbb{R}^3$ *avec* $\alpha \neq 0$.
*En plus, on définie une structure presque contact* $(\varphi, \xi, \eta)$ *par*
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc on a la 2 forme* $\phi = -2\alpha^2 dx \wedge dy$ *alors* $d\eta = \beta_2 dx \wedge dy + \beta_3 dx \wedge dz$ *et* $d\phi = -4\alpha_3 dx \wedge dy \wedge dz$ *tels que* $\alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ *et* $\beta_i = \frac{\partial \beta}{\partial x_i}$ *pour* $i = 1...3$ *les composantes de tenseur Nijenhuis [12] sont*

$$N_i^{k,j} = \sum_{l=1}^{3} \varphi_k^l(\partial_l \varphi_i^j - \partial_j \varphi_i^l) - \varphi_j^l(\partial_l \varphi_k^i - \partial_k \varphi_l^i) + \eta_k(\partial_j \xi^i) - \eta_j(\partial_k \xi^i)$$

*pour* $i, j, k = 1...3$ *on peut verifier que* $N_i^{k,j} = 0 \ \forall i, j, k$. *Alors on déduit que cette structure est normale. Et on a* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est*

- *Co-symplectique si* $\beta_2 = \alpha_2 = 0$ *et* $\beta_3 = 0$
- *de Kenmotsu si* $\alpha_3 = \alpha \ \beta_2 = \beta_3 = 0$

*et d'après [12]la variété du produit tordu* $(\mathbb{R} \times_f M, h, J)$ *est presque complexe de plus est Kahlerienne si* $\beta_2 = -2\alpha^2$ *et* $\beta_3 = 0$ *où*

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^2(\alpha^2 + f'^2\beta^2) & 0 & -\beta f^2 f'^2 \\ 0 & 0 & f^2\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\beta f^2 f'^2 & 0 & f^2 f'^2 \end{pmatrix}$$

*et*

$$J \begin{pmatrix} 0 & -\beta f f' & 0 & f f' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ff'} & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

# CHAPITRE 3

# HARMONICITÉ DANS LES STRUCTURES

Dans cette paragraphe on donne quelque résultats concernant aux applications harmoniques entre deux variétés munies d'une structure presque complexe, ou presque contact.

## 3.1 Harmonicité dans la structure presque complexe

**Définition 3.1.1.**
*Soient $(M, J)$ et $(N, J^N)$ deux variétés presque complexes ; Une application $F : M \longrightarrow N$ est dite holomorphique si $dF \circ J = J^N \circ dF$.*

**Lemme 3.1.1.** *Soit $(M, g, J)$ une variété presque complexe alors*

$$(J \operatorname{div} J)^{0,1} = 4 \sum_{j=1}^{m} (\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)^{0,1}.$$

**Preuve** Soit $\{E_1, \cdots, E_m, JE_1, \cdots, JE_m\}$ une base orthonormale de $T_x^{\mathbb{C}} M$ on peut choisir une base complexe $\{Z_1, \cdots, Z_m\}$ de $T_x^{1,0} M$ et $\{\overline{Z}_1, \cdots, \overline{Z}_m\}$ de $T_x^{0,1} M$
tels que

$$Z_j = \frac{1}{2}(E_j - iJE_j) \quad et \quad \overline{Z}_j = \frac{1}{2}(E_j + iJE_j). \tag{3.1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} J =& \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{E_j} J)E_j + \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{JE_j} J)JE_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{(Z_j+\overline{Z}_j)} J)(Z_j+\overline{Z}_j) + \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{i(Z_j-\overline{Z}_j)} J)i(Z_j-\overline{Z}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\{(\nabla_{Z_j} J)(Z_j) + (\nabla_{Z_j} J)\overline{Z}_j + (\nabla_{\overline{Z}_j} J)Z_j + (\nabla_{\overline{Z}_j} J)\overline{Z}_j \\
&= -(\nabla_{Z_j} J)(Z_j) + (\nabla_{Z_j} J)\overline{Z}_j + (\nabla_{\overline{Z}_j} J)Z_j - (\nabla_{\overline{Z}_j} J)\overline{Z}_j\} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\{2(\nabla_{Z_j} J)\overline{Z}_j + 2(\nabla_{\overline{Z}_j} J)Z_j\}
\end{aligned}$$

et comme $J(Z_j) = iZ_j, \quad J(\overline{Z}_j) = -i\overline{Z}_j$
alors

$$\begin{aligned}
J(\operatorname{div} J) =& 2J\Big(\sum_{j=1}^{m}\{\nabla_{Z_j} J(\overline{Z}_j) - J(\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j) + \nabla_{\overline{Z}_j} J(Z_j) - J(\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)\}\Big) \\
&= 2J\Big(\sum_{j=1}^{m}\{-i\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j - J(\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j) + i\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j - J(\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)\})\Big) \\
&= 2\sum_{j=1}^{m}\{-iJ\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j + \nabla_{Z_j}\overline{Z}_j + iJ\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j + \nabla_{\overline{Z}_j} Z_j\} \\
&= 2\sum_{j=1}^{m}\{(\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j - iJ\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j) + (\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j + iJ\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)\} \\
&= 4\sum_{j=1}^{m}\{(\nabla_{Z_j}\overline{Z}_j)^{1,0} + (\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)^{0,1}\}.
\end{aligned}$$

■

**Proposition 3.1.1.** *Soit $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, h, J^N)$ une application holomorphique entre deux variétés presque complexes alors :*

$$\tau(F) = J^N(tr_g F^\star \nabla^N J^N) - dF(Jtr\nabla J) \tag{3.2}$$

*où $tr_g F^\star \nabla^N J^N = \sum_{j=1}^{2m}(\nabla^N_{dF(e_j)} J^N)dF(e_j)$ tels que $\{e_1, \cdots, e_{2m}\}$ une base orthonormale dans $T_xM$.*

**Preuve** Soit $\{E_1, \cdots, E_m, JE_1, \cdots, JE_m\}$ une base orthonormale de $T_x^{\mathbb{C}}M$

$$\tau(F) = \sum_{j=1}^{m} \nabla dF(E_j, E_j) + \sum_{j=1}^{m} \nabla dF(JE_j, JE_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \nabla dF(Z_j + \overline{Z}_j, Z_j + \overline{Z}_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \nabla dF(i(Z_j - \overline{Z}_j), i(Z_j - \overline{Z}_j))$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \{2\nabla dF(Z_j, \overline{Z}_j) + 2\nabla dF(\overline{Z}_j, Z_j)\}$$

et comme la deuxième forme fondamentale $\nabla dF$ est symétrique et linéaire alors

$$\tau(F) = 4\sum_{j=1}^{m} \nabla dF(\overline{Z}_j, Z_j) = 4\sum_{j=1}^{m} \nabla_{\overline{Z}_j} dF(Z_j) - 4dF(\sum_{j=1}^{m} \nabla_{\overline{Z}_j} Z_j). \tag{3.3}$$

D'après le lemme 3.1.1 $(J\,\mathrm{div}\,J)^{0,1} = 4\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j} Z_j)^{0,1}$ donc

$$-4dF(\sum_{j=1}^{m} \nabla_{\overline{Z}_j} Z_j) = -dF(J\,\mathrm{div}\,J)$$

d'autre part on a

$$J^N(tr_g F^\star \nabla^N J^N) = J^N\{\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{E_j} J^N)dF(E_j) + \sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{JE_j} J^N)dF(JE_j)\}$$

En calculant d'abord

$$\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{E_j} J^N)dF(E_j) = \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j+\overline{Z}_j} J^N)dF(Z_j + \overline{Z}_j))$$
$$= \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j} J^N)dF(Z_j) + \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j} J^N)dF(\overline{Z}_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j} J^N)dF(Z_j) + \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j} J^N)dF(\overline{Z}_j).$$

En suite

$$\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{JE_j} J^N)dF(JE_j)\} = \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{i(Z_j-\overline{Z}_j)} J^N)dFi(Z_j - \overline{Z}_j)$$
$$= -\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j} J^N)dF(Z_j) + \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j} J^N)dF(\overline{Z}_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j} J^N)dF(Z_j) - \sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j} J^N)dF(\overline{Z}_j)$$

par la sommation les deux termes

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{E_j}J^N)dF(E_j)+\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{JE_j}J^N)dF(JE_j)\}\\
&=2\{\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j}J^N)dF(\overline{Z}_j)+\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j}J^N)dF(\overline{Z}_j)\}\\
&=2\sum_{j=1}^{m}\{\nabla_{Z_j}J^N dF(\overline{Z}_j)-J^N(\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)\}\\
&+2\sum_{j=1}^{m}\{\nabla_{\overline{Z}_j}J^N dF(Z_j)-J^N(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)\}.
\end{aligned}
$$

Et comme $F$ est holomorphique alors

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{E_j}J^N)dF(E_j)+\sum_{j=1}^{m}(\nabla^F_{JE_j}J^N)dF(JE_j)\}\\
&=2\sum_{j=1}^{m}\{\nabla_{Z_j}dFJ(\overline{Z}_j)-J^N(\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)\}\\
&+2\sum_{j=1}^{m}\{\nabla_{\overline{Z}_j}dFJ(Z_j)-J^N(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)\}\\
&=2\sum_{j=1}^{m}\{-i\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)-J^N(\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)\}\\
&+2\sum_{j=1}^{m}\{i\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)-J^N(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)\}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, en applicant $J^N$ on obtient

$$
\begin{aligned}
J^N(tr_gF^\star\nabla^NJ^N)=&2\sum_{j=1}^{m}\{-iJ^N\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)+(\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j)\}\\
&+2\sum_{j=1}^{m}\{iJ^N\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)+(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j)\}\\
&=4\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{Z_j}dF(\overline{Z}_j))^{1,0}+4\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j))^{0,1}.
\end{aligned}
$$

Donc $(J^N(tr_gF^\star\nabla^NJ^N))^{0,1}=4\sum_{j=1}^{m}(\nabla_{\overline{Z}_j}dF(Z_j))^{0,1}$. ∎

**Corollaire 3.1.1.** *Toute application holomorphique de variété semi Kahlerienne dans variété $(1,2)-$symplectique est harmonique.*

**Définition 3.1.2.** *Soient* $(M, g, J)$ *et* $(N, h, J^N)$ *deux variétés presque Hermitienne, une application* $F : M \longrightarrow N$ *est dite* $(1,1)-$*géodisique si* $\nabla dF(\overline{Z}, W) = 0 \quad \forall Z, W \in \Gamma(T^{1,0}M)$.

**Remarque 3.1.1.** *Toute application* $(1,1)-$*géodisique est harmonique.*

**Proposition 3.1.2.** *Toute application holomorphique* $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, h, J^N)$ *entre deux variétés* $(1,2)-$*symplectiques est* $(1,1)-$*géodisique.*

**Preuve** Pour tous $Z, W$ de $\Gamma(T^{1,0}M)$ on a $\nabla dF(\overline{Z}, W) = \nabla^F_{\overline{Z}} dF(W) - dF(\nabla_{\overline{Z}} W)$.
Comme $(M, g, J)$ est $(1,2)-$symplectique alors $\nabla_{\overline{Z}} W = 0$.

Tant que $F$ est holomorphique donc $dF(W) \in \Gamma(T^{1,0}M)$ et $(N, h, J^N)$ est $(1,2)$symplectique d'où $\nabla^F_{\overline{Z}} dF(W) \in \Gamma(T^{1,0}M)$. Donc $\nabla dF(\overline{Z}, W) \in \Gamma(T^{1,0}M)$

de façon analogue on trouve $\nabla dF(W, \overline{Z}) \in \Gamma(T^{0,1}M)$ tant que $\nabla dF(W, \overline{Z}) = \nabla dF(\overline{Z}, W)$ on déduire que $\nabla dF(W, \overline{Z}) = 0$. ■

**Corollaire 3.1.2.** *Toute application holomorphique entre deux variétés* $(1,2)-$*symplectiques est harmonique.*

**Proposition 3.1.3.**
*Toute application holomorphique entre deux variétés Kahleriennes est harmonique*

**Preuve** Soient $(M, J)$ , $(N, J^N)$ deux variétés Kahleriennes, et $F : M \longrightarrow N$ une application holomorphique, on considère la base orthonormale locale $\{X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_m\}$ de $\Gamma(TM)$ tels que $JX_j = Y_j$ pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$.
On a
$\tau(F) = \sum_{j=1}^m \nabla^F_{X_j} dF(X_j) - dF(\nabla_{X_j} X_j) + \sum_{j=1}^m \nabla^F_{Y_j} dF(Y_j) - dF(\nabla_{Y_j} Y_j)$.
Mais

$$
\begin{aligned}
&\nabla^F_{Y_j} dF(Y_j) - dF(\nabla_{Y_j} Y_j \\
&= \nabla^F_{JX_j} dF(JX_j) - dF(\nabla_{JX_j} JX_j \\
&= \nabla^F_{JX_j} J^N dF(X_j) - dF(J\nabla_{X_j} JX_j \\
&= J^N(\nabla^F_{JX_j} dF(X_j)) - J^N \nabla_{X_j} JX_j \\
&= J^N(\nabla^F_{JX_j} dF(X_j)) - \nabla_{X_j} JX_j) \\
&= J^N\{\nabla^F_{X_j} dF(JX_j)) - dF[JX_j, X_j] \\
&- dF(\nabla_{X_j}(JX_j + [JX_j, X_j])\} \\
&= J^N\{J^N \nabla^F_{X_j} dF(X_j) - J^N dF(\nabla_{X_j} X_j)\} \\
&= -\nabla^F_{X_j} dF(X_j) + dF(\nabla_{X_j} X_j).
\end{aligned}
$$

Alors $\tau(F) = 0$.

■

## 3.2 Harmonicité dans la structure presque contact

On présente dans ce paragraphe une résultat trés importante, c'est une application $F$ est $(\varphi, J)-$holomorphique entre variété de Kenmotsu et variété Kahlerienne est harmoniques il faut et il suffit qu elle est constante.

**Définition 3.2.1.** *Soient $(M, \varphi, \xi, \eta)$ et $(M', \varphi', \xi', \eta')$ deux variétés presque contact ; Une application $F : M \longrightarrow M'$ est dite $(\varphi, \varphi')-$holomorphique si $dF \circ \varphi = \varphi' \circ dF$.*

**Définition 3.2.2.** *Une application $F : (M, \varphi, \xi, \eta) \longrightarrow (N, J)$ de variété presque contact dans variété presque complexe est dite $(\varphi, J)-$holomorphique si $dF \circ \varphi = J \circ dF$.*

**Définition 3.2.3.** *Une application $F : (N, J) \longrightarrow (M, \varphi, \xi, \eta)$ de variété presque complexe dans variété presque contact est dite $(J, \varphi)-$holomorphique si $dF \circ J = \varphi \circ dF$.*

**Proposition 3.2.1.**
*Soient $(M, \varphi, \xi, \eta)$ et $(M', \varphi', \xi', \eta')$ deux variétés presque contact ;*
*Toute application $F : M \longrightarrow M'$ $(\varphi, \varphi')-$holomorphique est harmonique.*

**Preuve**
Voir [33] ∎

**Lemme 3.2.1.** *Si $F$ une application $(\varphi, J)-$ holomorphique d'une variété presque contact $(M, \varphi, \xi, \eta)$ dans une variété presque complexe $(N, J)$ alors*

$$J(\nabla dF(X, Y)) + (\nabla^N_{dF(X)} J)dF(Y) = dF((\nabla_X \varphi)Y) + \nabla dF(X, \varphi(Y)). \tag{3.4}$$

**Preuve** D'abord on simplifie le terme droite de l'équation (3.4)donc

$$\begin{aligned}
&J(\nabla dF(X, Y)) + (\nabla^N_{dF(X)} J)dF(Y) \\
&= J(\nabla^F_X dF(Y) - dF(\nabla_X Y)) \\
&+ \nabla_{dF(X)} J dF(Y) - J\nabla^N_{dF(X)} dF(Y) \\
&= \nabla^N_{dF(X)} J dF(Y) - J dF(\nabla_X Y).
\end{aligned}$$

Et pour le deuxième terme

$$\begin{aligned}
&dF((\nabla_X \varphi)Y) + dF(X, \varphi(Y)) \\
&= dF(\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y) \\
&+ \nabla_X dF \varphi Y - dF(\nabla_X \varphi Y) \\
&= \nabla^F_X J dF Y - J dF(\nabla_X Y) \\
&= \nabla^N_{dF(X)} J dF(Y) - J dF(\nabla_X Y).
\end{aligned}$$

∎

**Proposition 3.2.2.** *Toute application $(\varphi, J)-$ holomorphique d'une variété co-symplectique $(M, \varphi, \xi, \eta)$ dans une variété Kahlerienne $(N, J)$ est harmonique.*

**Preuve** Soit $F : (M, \varphi, \xi, \eta) \longrightarrow (N, J)$ On a $\nabla^N J = 0$, et $\nabla\varphi = 0$. puisque que $N$ est Kahlerienne, et $M$ est co-symplectique.
Or $J(dF(\xi)) = dF(\varphi(\xi)) = 0$ alors $dF(\xi) = 0$.
donc l'équation (3.4) équivalente à $J(dF(X, Y))) = dF(X, \varphi(Y))$
alors

$$J(\nabla dF(X, \varphi Y))) = dF(X, \varphi^2(Y))$$
$$= -\nabla dF(X, Y) + \eta(Y)\nabla dF(X, \xi).$$

Ainsi

$$J(\nabla dF(X, \varphi Y))) = -\nabla dF(X, Y).$$

Et comme $\nabla dF(.,.)$ est symétrique d'où

$$J(\nabla dF(\varphi X, \varphi Y))) = -\nabla dF(\varphi X, Y) = -J\nabla dF(X, Y)$$

alors

$$J(d\nabla F(\varphi X, \varphi Y))) + J\nabla dF(X, Y) = 0$$

donc

$$\nabla dF(\varphi X, \varphi Y) + \nabla dF(X, Y) = 0 \text{ et} \nabla dF(\xi, \xi) = 0,$$

d'ou

$$tr\nabla dF(.,.) = 0,$$

alors

$$\tau(F) = 0.$$

■

**Définition 3.2.4.** *Une application $F$ d'une variété Kahlerienne $(M, J, g)$ dans une variété Riemannienne $(N, h)$ est dite pluriharmonique si*

$$\nabla dF(X, Y) + \nabla dF(JX, JY) = 0.$$

**Remarque 3.2.1.** *Toute application pluriharmonique est harmonique.*

**Définition 3.2.5.** *Une application $F$ d'une variété Kahlerienne $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ dans une variété Riemannienne $(N, h)$ est dite $\varphi-$pluriharmonique si*

$$\nabla dF(X, Y) + \nabla dF(\varphi X, \varphi Y) = 0.$$

**Remarque 3.2.2.** *Comme $\nabla dF(\xi, \xi) = 0$ alors toute application $\varphi-$pluriharmonique est harmonique.*

## 3.3 harmonicité et bi-harmonicité de la variété de Kenmotsu

On commence dans ce paragraphe par donner les définitions et propriétés géométriques de la variété de Kenmotsu,puis nous donnons propriétés les applications harmoniques et les applications bi-harmoniques dans la variété de Kenmotsu.

### 3.3.1 La variété de Kenmotsu

**Définition 3.3.1** ([20]). *Une variété métrique presque de contact $(M, \varphi, \xi, \eta)$ est dite variété de Kenmotsu si la structure métrique presque de contact satisfait :*

$$d\eta = 0 \qquad et \qquad d\phi = 2\phi \wedge \eta,$$

*où $\phi$ et la deuxième forme fondamentale définie par $\phi(.,.) = g(.,\varphi.)$*

**Proposition 3.3.1.**
*Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

$$\varphi(\xi) = 0, \qquad \eta(\varphi X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1, \tag{3.5}$$

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{3.6}$$

$$g(X, \xi) = \eta(X) \tag{3.7}$$

*et*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.8}$$

*de plus*

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X. \tag{3.9}$$

*Et*

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi. \tag{3.10}$$

*où $\nabla$ désigne la connexion Riemannienne de $g$.*

**Propriété 3.3.1.** *Soit $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\varphi X, \varphi Y). \tag{3.11}$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{3.12}$$

$$R(\xi, X)Y = \eta(Y)X - g(X, Y)\xi, \tag{3.13}$$

*et*

$$R(\xi, X)\xi = X - \eta(X)\xi, \tag{3.14}$$

*de plus*

$$S(X, \xi)\xi = -(n-1)\eta(X). \tag{3.15}$$

*Tels que $R$, $S$ désigne les tenseurs de courbure Riemannienne et de courbure de Ricci respectivement.*

**Exemple 3.3.1.** *Soit $\left(M = \mathbb{R}^3_{x_3 \neq 0}\right)$ muni de la métrique $g = \frac{1}{x_3^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$ de base orthonormale*

$$e_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

*le champ de vecteur $\xi = e_3$, , la $1-$forme différentielle $\eta(X) = g(X, \xi)$, et le tenseur*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu.*

**Exemple 3.3.2.** *La variété $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ dans l'exemple (2.2.2) est une variété de Kenmotsu.*

### 3.3.2 Applications harmoniques de la variété de Kenmotsu

Une application $F : M \longrightarrow N$ entre une variété presque contact métrique $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ et une variété Hermitienne $(N, J, h)$ est dite $(\varphi, J)-$holomorphique si $dF \circ \varphi = J \circ dF$.

**Proposition 3.3.2.** *Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu,$(N, J, h)$ une variété Kahlerienne et $F : M \longrightarrow N$ est $(\varphi, J)-$holomorphique alors $F$ est harmonique.*

**Preuve** D'après [6] on a

$$J(\tau(F)) = dF(div\varphi) - tr\beta) \tag{3.16}$$

tel que $\beta(X, Y) = (\nabla^F_X J)dF(Y)$ où $\nabla^F$ la connexion de fibré pull-back $F^{-1}TN$,
soit $\{e_1, \cdots, e_m, \varphi e_1 \cdots, \varphi e_m, \xi\}$ base locale orthonormale $\varphi-$adaptée

$$div\varphi = \Sigma_{i=1}^m (\nabla_{e_i}\varphi)e_i + \Sigma_{i=1}^m (\nabla_{\varphi e_i}\varphi)\varphi e_i + (\nabla_\xi \varphi)\xi$$

d'après les formules (3.5) et (3.9) alors

$$div\varphi = \Sigma_{i=1}^m g(e_i, \varphi e_i)\xi - \eta(e_i)\varphi e_i + \Sigma_{i=1}^m g(\varphi e_i, \varphi^2 e_i)\xi - \eta(\varphi e_i)\varphi^2 e_i + g(\xi, \varphi\xi) - \eta(\xi)\varphi(\xi) = 0$$

Comme $\nabla J = 0$ donc $\beta(X, Y) = (\nabla^\varphi_X J)dF(Y) = 0$ d'où $\tau(F) = 0$. ■

**Exemple 3.3.3.** *La projection canonique $\pi : M \to N$ dans l'exemple (2.2.2) est $(\varphi, J)-$holomorphique alors $\pi$ est harmonique.*

**Proposition 3.3.3** ([23]). *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ est $(J, \varphi)-$holomorphique. Alors $F$ est harmonique si seulement si $F$ est constante.*

**Preuve**

**Lemme 3.3.1.** *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ est $(J, \varphi)-$holomorphique. Alors, on a*

$$\eta(dFX) = 0 \quad \forall X \in \Gamma(TN)$$

**Preuve de lemme 3.3.1**
Puisque $(N, J, h)$ est Kahlerienne donc pour tout $X \in \Gamma(TN)$ on a $J^2X = -X$,
et comme $F$ est $(J, \varphi)-$holomorphique donc $dF \circ J(X) = \varphi \circ dF(X)$.
Tant que $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu alors $\eta \circ \varphi = 0$.
Donc

$$\eta(dFX) = -\eta(dFJ^2X) = -\eta \circ \varphi(dFJX) = 0$$

■

Pour une application $(J, \varphi)-$holomorphique on a une formule comme (3.16)

$$\varphi(\tau(F)) = dF(divJ) - tr_h\beta) \tag{3.17}$$

tel que $\beta(X, Y) = (\nabla^F_X \varphi)dF(Y)$.
Comme $N$ est kahlerienne donc $divJ = \sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{e_i} J)e_i = 0$
tel que $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$ base locale orthonormale de $\Gamma(TN)$.
En utilisant la formule (3.9) on obtient

$$tr\beta = \sum_{i=1}^{2n} \nabla^F_{e_i} dFe_i = -\sum_{i=1}^{2n} \eta(dFe_i)\varphi(dFe_i)$$

et donc

$$\varphi(\tau(F)) = -\sum_{i=1}^{2n} \eta(dFe_i\varphi(dFe_i)$$

et d'après le lemme precedent $\eta(dFe_i) = 0$ alors $\varphi(\tau(F)) = 0$.
Maintenant pour $F$ est harmonique il faut et il suffit que $g(\tau(F), \xi) = 0$
d'autre part,on a

$$\begin{aligned}
g(\tau(F), \xi) &= \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^F_{e_i} dFe_i - dF\nabla_{e_i} e_i, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^F_{e_i} dFe_i, \xi) - \sum_{i=1}^{2n} g(dF\nabla_{e_i} e_i, \xi) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^F_{e_i} \varphi(dF(Je_i)), \xi) - \sum_{i=1}^{2n} g(\varphi \circ dFJ\nabla_{e_i} e_i, \xi)
\end{aligned}$$

dans la dernière égalité, tant que $N$ est Kahlerienne et $F$ est $(\varphi, J)-$holomorphique le deuxième terme est nul, alors

$$\begin{aligned} g(\tau(F),\xi) &= -\sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^M_{dFe_i}\varphi(dF(Je_i)),\xi) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{2n} g(\varphi(\nabla^M_{dFe_i}dFJe_i),\xi) \\ &= -\sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^M_{dFe_i}\varphi(dF(Je_i)),\xi). \end{aligned}$$

En utilisant la formule (3.9) et $\eta(dFe_i)=0$ on obtient

$$g(\tau(F),\xi)=\sum_{i=1}^{2n} g(dF(e_i),dF(e_i)).$$

Donc $F$ est harmonique si seulement si $g(dF(e_i),dF(e_i))=0 \quad \forall i=1,\cdots,2n$
alors $F$ est constante. ∎

### 3.3.3 Applications bi-harmoniques de la variété de Kenmotsu

Nous étudierons dans cette section la bi-harmonicité d'une application non constante entre de variétés l'une variété de Kenmotsu et l'autre une variété Kahlerienne ; Puis on déduire quelque résultats. Et nous donnons le tenseur bi-énergie d'impulsion $S_2(F)$, nous terminons par un exemple.

**Théorème 3.3.1.** *[[43]] Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J, \varphi)-$holomorphique. Alors le champ bi tension de $F$ est donnée par*

$$\tau_2(F) = -2\big(\Delta(e(F))\xi + 2dF(grad(e(F)))\big).$$

*La bi-harmonicité de $F$ est donnée par le corollaire suivant ;*

**Corollaire 3.3.1.** *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J, \varphi)-$holomorphique.*
*Alors $F$ est bi-harmonique si seulement si*

$$\tau_2(\varphi) = -2\big(\Delta(e(F))\xi + 2dF(grad(e(F)))\big) = 0$$

En particulier si la fonction $e(F)$ est constante on a ;

**Corollaire 3.3.2.** *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J, \varphi)-$holomorphique,si la fonction $e(F)$ est constante alors $F$ est bi-harmonique.*

**Preuve de théorème 4.3.3.** Par définition, on a

$$\tau_2(F) = -Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 \tau(F) - Tr_h R^M(\tau(F), dF)\, dF.$$

le champ de tension de $F$ est donné par ([23])

$$\tau(F) = 2e(F)\,\xi.$$

Alors

$$\tau_2(F) = -2\left(Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 e(F)\,\xi + Tr_h R^M(e(F)\,\xi, dF)\, dF\right). \tag{3.18}$$

D'abord, on va simplifier le terme $Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 e(F)\,\xi$.
Soit $(e_i)_{i=1}^{2n}$ une base orthonormale locale dans $N$, on a

$$Tr_g\left(\nabla^F\right)^2 e(F)\,\xi = \nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i} e(F)\,\xi - \nabla^F_{\nabla^N_{e_i}e_i} e(F)\,\xi. \tag{3.19}$$

par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i} e(F)\,\xi &= \nabla^F_{e_i}\left(e(F)\,\nabla^F_{e_i}\xi\right) + \nabla^F_{e_i}\left(e_i\left(e(F)\right)\xi\right) \\
&= e(F)\,\nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i}\xi + e_i\left(e(F)\right)\nabla^F_{e_i}\xi \\
&\quad + e_i\left(e(F)\right)\nabla^F_{e_i}\xi + e_i\left(e_i\left(e(F)\right)\right)\xi \\
&= e(F)\,\nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i}\xi + 2\nabla^F_{\mathrm{grad}(e(F))}\xi + e_i\left(e_i\left(e(F)\right)\right)\xi
\end{aligned}$$

et
$$\nabla^F_{\nabla_{e_i}e_i} e(F)\,\xi = e(F)\,\nabla^F_{\nabla_{e_i}e_i}\xi + \nabla_{e_i}e_i\,(e(F))\,\xi.$$
On utilise le terme
$$\Delta(e(F)) = e_i(e_i(e(F))) - \left(\nabla^N_{e_i}e_i\right)(e(F))$$
et
$$Tr_g\left(\nabla^F\right)^2\xi = \nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i}\xi - \nabla^F_{\nabla^N_{e_i}e_i}\xi,$$
on déduire que
$$\begin{aligned} Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 e(F)\,\xi = e(F)\,Tr_h\left(\nabla^F\right)^2\xi + \Delta(e(F))\,\xi \\ + 2\nabla^F_{\mathrm{grad}(e(F))}\xi. \end{aligned} \tag{3.20}$$
En Calculant le terme $Tr_h\left(\nabla^F\right)^2\xi$, on a
$$Tr_h\left(\nabla^F\right)^2\xi = \nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i}\xi - \nabla^F_{\nabla_{e_i}e_i}\xi.$$
En utilisant l'équation (3.10 ), on obtient
$$\nabla^F_{e_i}\xi = \nabla_{dF(e_i)}\xi = dF(e_i) - (\eta\circ dF)(e_i)\,\xi,$$
et comme
$$(\eta\circ dF)(X) = 0.$$
Pour tout $X\in\Gamma(TM)$, on a
$$(\eta\circ dF)(e_i) = 0,$$
donc
$$\nabla^F_{e_i}\xi = dF(e_i)$$
ainsi
$$\nabla^F_{e_i}\nabla^F_{e_i}\xi = \nabla^F_{e_i}dF(e_i)$$
et
$$\begin{aligned} \nabla^F_{\nabla_{e_i}e_i}\xi &= \nabla_{dF\left(\nabla_{e_i}e_i\right)}\xi \\ &= dF(\nabla_{e_i}e_i) - (\eta\circ dF)(\nabla_{e_i}e_i)\,\xi \\ &= dF(\nabla_{e_i}e_i), \end{aligned}$$
on déduire que
$$Tr_h\left(\nabla^F\right)^2\xi = \nabla^F_{e_i}dF(e_i) - dF(\nabla_{e_i}e_i) = \tau(F).$$
Alors
$$Tr_h\left(\nabla^F\right)^2\xi = 2e(F)\,\xi.$$
Finalement, on obtient
$$Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 e(F)\,\xi = 2(e(F))^2\xi + \Delta(e(F))\,\xi + 2\nabla^F_{\mathrm{grad}(e(F))}\xi$$

maintenant, on simplifie le terme $\nabla^F_{\mathrm{grad}(e(F))}\xi$, on trouve

$$\begin{aligned}\nabla^F_{\mathrm{grad}(e(F))}\xi &= \nabla^M_{dF(\mathrm{grad}(e(F)))}\xi \\ &= dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right) - \eta\left(dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right)\right)\xi \\ &= dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right) - \left(\eta \circ dF\right)\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right)\xi \\ &= dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right).\end{aligned}$$

finalement, on a

$$Tr_h\left(\nabla^F\right)^2 e\left(F\right)\xi = 2\left(e\left(F\right)\right)^2\xi + \Delta\left(e\left(F\right)\right)\xi + 2dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right). \tag{3.21}$$

pour terminer la preuve,on calcule le terme $Tr_g R^M\left(e\left(F\right)\xi, d\psi\right)dF$, on a

$$\begin{aligned}Tr_h R^M\left(e\left(F\right)\xi, dF\right)dF &= e\left(\psi\right)Tr_h R^M\left(\xi, dF\right)dF \\ &= e\left(F\right)R^N\left(\xi, dF\left(e_i\right)\right)dF\left(e_i\right).\end{aligned}$$

on utilise l'équation (3.13) , on obtient

$$\begin{aligned}R^N\left(\xi, dF\left(e_i\right)\right)dF\left(e_i\right) &= \eta\left(dF\left(e_i\right)\right) - g\left(dF\left(e_i\right), dF\left(e_i\right)\right)\xi \\ &= \left(\eta \circ dF\right)\left(e_i\right) - 2e\left(F\right)\xi \\ &= -2e\left(F\right)\xi.\end{aligned}$$

Alors

$$Tr_h R^N\left(e\left(F\right)\xi, dF\right)dF = -2\left(e\left(F\right)\right)^2\xi. \tag{3.22}$$

Si en remplaçant (3.21) et (3.22) dans(3.18), on arrive à

$$\tau_2\left(F\right) = -2\left(\Delta\left(e\left(F\right)\right)\xi + 2dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right)\right).$$

C'est la fin de la preuve du théorème 4.3.3.
Alors $F : N \longrightarrow M$ est bi-harmonique si seulement si

$$\Delta\left(e\left(F\right)\right)\xi + 2dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right) = 0.$$

**Corollaire 3.3.3.** *Soient $(N, J, h)$ une variété Kahlerienne, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J, \varphi)-$holomorphique. Si $F$ est bi-harmonique alors la fonction $e(F)$ est harmonique.*

**Preuve** Si on pose que l'application $F : N \longrightarrow M$ est biharmonique, par théorème 4.3.3, on a

$$\Delta\left(e\left(F\right)\right)\xi + 2dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right) = 0.$$

alors

$$\eta \circ \left(\Delta\left(e\left(F\right)\right)\xi + 2dF\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right)\right) = 0,$$

d'après

$$\Delta\left(e\left(F\right)\right)\eta\left(\xi\right) + 2\left(\eta \circ dF\right)\left(\mathrm{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right) = 0.$$

Par utiliser l'équation (1), on a

$$\eta\left(\xi\right)=1$$

par le lemme 3.3.1, on a

$$\left(\eta\circ dF\right)\left(\operatorname{grad}\left(e\left(F\right)\right)\right)=0.$$

finalement on a

$$\Delta\left(e\left(F\right)\right)=0.$$

On déduire que la fonction $e\left(F\right)$ est harmonique. ■

**Proposition 3.3.4.**
*Soit $F:(M^m,g)\to(N^n,h)$ une application différentielle, alors*

$$S_2(F)=\left(\frac{1}{2}\left|\tau(F)\right|^2+Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right)\right)g-2symh\left(\nabla\tau(F),dF\right), \tag{3.23}$$

*et la trace de $S_2(F)$ est donnée par*

$$Tr_gS_2(F)=\frac{m}{2}\left|\tau(F)\right|^2+(m-2)\,Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right). \tag{3.24}$$

**Preuve** Soit $F:(M^m,g)\to(N^n,h)$ une application différentielle. Par définition, on a

$$S_2(F)=\left(\frac{-1}{2}\left|\tau(F)\right|^2+divh\left(\tau(F),dF\right)\right)g-2symh\left(\nabla\tau(F),dF\right). \tag{3.25}$$

Pour le terme $divh\left(\tau(F),dF\right)$, soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base locale orthonormale locale dans $M$. on a

$$\begin{aligned}\div h\left(\tau\left(F\right),dF\right)&=\left(\nabla_{e_i}h\left(\tau\left(F\right),dF\right)\right)\left(e_i\right)\\&=e_i\left(h\left(\tau\left(F\right),dF\left(e_i\right)\right)\right)-h\left(\tau\left(F\right),dF\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\right)\\&=h\left(\nabla^F_{e_i}\tau\left(F\right),dF\left(e_i\right)\right)+h\left(\tau\left(F\right),\nabla^F_{e_i}dF\left(e_i\right)\right)\\&-h\left(\tau\left(F\right),dF\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\right)\\&=h\left(\nabla^F_{e_i}\tau\left(F\right),dF\left(e_i\right)\right)+h\left(\tau\left(F\right),\nabla^F_{e_i}dF\left(e_i\right)-dF\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\right).\end{aligned}$$

Mais, on sait que

$$h\left(\nabla^F_{e_i}\tau\left(F\right),dF\left(e_i\right)\right)=Tr_gh\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right)$$

et

$$h\left(\tau\left(F\right),\nabla^F_{e_i}dF\left(e_i\right)-dF\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\right)=h\left(\tau\left(F\right),\tau\left(F\right)\right)=\left|\tau\left(F\right)\right|^2,.$$

D'après

$$divh\left(\tau\left(F\right),dF\right)=Tr_gh\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right)+\left|\tau\left(F\right)\right|^2 \tag{3.26}$$

Si en remplaçant (3.26) dans (4.27), on obtient

$$S_2(F)=\left(\frac{1}{2}\left|\tau(F)\right|^2+Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right)\right)g-2symh\left(\nabla\tau(F),d\phi\right).$$

Par la définition de la trace de $S_2(\phi)$, on a

$$\begin{aligned}
Tr_gS_2(F) &= S_2(F)\left(e_i,e_i\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\left|\tau(F)\right|^2 + Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right)\right)g\left(e_i,e_i\right)\\
&- 2symh\left(\nabla\tau(F),dF\right)\left(e_i,e_i\right)\\
&= m\left(\frac{1}{2}\left|\tau(F)\right|^2 + Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right)\right) - 2h\left(\nabla_{e_i}\tau(F),dF\left(e_i\right)\right)\\
&= \frac{m}{2}\left|\tau(F)\right|^2 + mTr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right) - 2Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right)
\end{aligned}$$

qui donne

$$Tr_gS_2(F) = \frac{m}{2}\left|\tau(F)\right|^2 + (m-2)\,Tr_gh\left(\nabla\tau(F),dF\right).$$

∎

**Théorème 3.3.2.** *[[43]] Soient $(N^{2n},J,h)$ une variété Kahlerienne , $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ une variété de Kenmotsu et $F : N \longrightarrow M$ une application $(J,\phi)$−holomorphique. Alors,le tenseur bi-énergie impulsion de $F$ est donné par*

$$S_2\left(F\right) = 6\left(e\left(F\right)\right)^2h - 4e\left(F\right)g\left(dF\left(\cdot\right),dF\left(\cdot\right)\right), \tag{3.27}$$

*où $g\left(dF\left(\cdot\right),dF\left(\cdot\right)\right)\left(X,Y\right) = g\left(dF\left(X\right),dF\left(Y\right)\right),$ et la trace de $S_2(F)$ est*

$$Tr_hS_2\left(F\right) = (12n-8)\left(e\left(\psi\right)\right)^2.$$

**Preuve** Par définition, pour tous $X,Y \in \Gamma\left(TN\right)$ on a

$$\begin{aligned}
S_2\left(F\right)\left(X,Y\right) = &\left(\frac{1}{2}\left|\tau\left(F\right)\right|^2 + Tr_hg\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right)\right)h\left(X,Y\right)\\
&- 2symg\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right)\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

tel que

$$\tau\left(F\right) = 2e\left(F\right)\xi,$$

donc

$$\left|\tau\left(F\right)\right|^2 = 4\left(e\left(F\right)\right)^2.$$

Pour le terme $Tr_hg\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right)$, on a

$$\begin{aligned}
Tr_hg\left(\nabla\tau\left(F\right),dF\right) &= 2g\left(\nabla_{e_i}e\left(F\right)\xi,dF\left(e_i\right)\right)\\
&= 2e\left(F\right)g\left(\nabla^F_{e_i}\xi,dF\left(e_i\right)\right)\\
&+ 2e_i\left(e\left(F\right)\right)g\left(\xi,dF\left(e_i\right)\right),
\end{aligned}$$

où $(e_i)_{i=1}^{2n}$ est une base orthonormale local dans $N$. D'après l'équation (3.10), on obtient

$$\nabla^F_{e_i}\xi = \nabla^M_{dF(e_i)}\xi = dF\left(e_i\right) - \eta\left(dF\left(e_i\right)\right)\xi = dF\left(e_i\right)$$

et pour (3.7), on a

$$g\left(\xi, dF\left(e_i\right)\right) = \eta\left(dF\left(e_i\right)\right) = 0,$$

alors

$$Tr_h g\left(\nabla\tau\left(F\right), dF\right) = 2e\left(F\right) g\left(dF\left(e_i\right), dF\left(e_i\right)\right) = 4\left(e\left(F\right)\right)^2.$$

d'après

$$\frac{1}{2}\left|\tau\left(\psi\right)\right|^2 + Tr_h g\left(\nabla\tau\left(F\right), dF\right) = 6\left(e\left(F\right)\right)^2.$$

Finalement, pour le terme $symg\left(\nabla\tau\left(F\right), dF\right)\left(X, Y\right)$, on a

$$symg\left(\nabla\tau\left(F\right), dF\right)\left(X, Y\right) = \frac{1}{2} g\left(\nabla_X^F \tau\left(F\right), dF\left(Y\right)\right) + \frac{1}{2} g\left(\nabla_Y^F \tau\left(F\right), dF\left(X\right)\right).$$

Par un calcule simple on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g\left(\nabla_X^F \tau\left(F\right), dF\left(Y\right)\right) &= g\left(\nabla_X^F e\left(F\right)\xi, dF\left(Y\right)\right) \\ &= e\left(F\right) g\left(\nabla_X^F \xi, dF\left(Y\right)\right) + X\left(e\left(F\right)\right) g\left(\xi, dF\left(Y\right)\right), \end{aligned}$$

mais d'après (3.10), on a

$$\nabla_X^F \xi = \nabla_{dF(X)}^M \xi = dF\left(X\right) - \eta\left(dF\left(X\right)\right)\xi = dF\left(X\right)$$

et d'après (3.7), on obtient

$$g\left(\xi, dF\left(Y\right)\right) = \eta\left(dF\left(Y\right)\right) = 0,$$

Alors

$$\frac{1}{2} g\left(\nabla_X^F \tau\left(F\right), dF\left(Y\right)\right) = g\left(dF\left(X\right), dF\left(Y\right)\right).$$

pour un calcule similaire on trouve

$$\frac{1}{2} g\left(\nabla_Y^F \tau\left(F\right), dF\left(X\right)\right) = g\left(dF\left(X\right), dF\left(Y\right)\right).$$

et on déduire que

$$symg\left(\nabla\tau\left(F\right), dF\right)\left(X, Y\right) = 2g\left(dF\left(X\right), dF\left(Y\right)\right),$$

alors

$$S_2\left(F\right)\left(X, Y\right) = 6\left(e\left(F\right)\right)^2 g\left(X, Y\right) - 4g\left(dF\left(X\right), dF\left(Y\right)\right).$$

finalement, le tenseur bi-énergie d'impulsion est donné par

$$S_2\left(F\right) = 6\left(e\left(F\right)\right)^2 g - 4g\left(dF\left(\cdot\right), dF\left(\cdot\right)\right),$$

où

$$g\left(dF\left(\cdot\right), dF\left(\cdot\right)\right)\left(X, Y\right) = g\left(dF\left(X\right), dF\left(Y\right)\right).$$

Maintenant on calcule $Tr_h S_2(F)$, on a

$$\begin{aligned} Tr_h S_2(F) &= S_2(F)(e_i, e_i) \\ &= 6(e(F))^2 g(e_i, e_i) - 4g(dF(e_i), dF(e_i)) \\ &= 12n(e(F))^2 - 4|dF|^2 \\ &= 12n(e(F))^2 - 8(e(F))^2 \\ &= (12n-8)(e(F))^2. \end{aligned}$$

On conclure que $Tr_g S_2(F) = 0$ si seulement si $F$ est constante ■

### 3.3.4 Exemple

**Exemple 3.3.4.** *Soit* $(N = \mathbb{R}^2, J, h = dx^2 + dy^2)$ *une variété complexe avec de structure complexe* $J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}$,

$J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}$ *et* $\left(M = \mathbb{R}^3_{x_3 \neq 0}, \phi, \xi, \eta, g\right)$ *une variété de Kenmotsu avec une base orthonormale*

$$e_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$e_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$e_3 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\xi = e_3,$$

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

*où*

$$g = \frac{1}{x_3^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

*et*

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Soit* $F : N \longrightarrow M$ *une application* $(J, \phi)$*-holomorphique définie par*

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y)).$$

*On a*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{\partial F_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

*et*

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0.$$

*La dernière équation donne* $F_3(x,y) = C$, *où* $C$ *est un constant réel non nul. Par un calcule simple on obtient*

$$e(F) = \frac{1}{C^2}\left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$grad\,(e(F)) = \frac{2}{C^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\begin{aligned} dF\,(grad\,(e(F))) = {} & \frac{2}{C^2}\left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + \frac{2}{C^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned} \Delta(e(F)) = {} & \frac{2}{C^2}\left(\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right)^2\right) \\ & + \frac{2}{C^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F_2}{\partial y^3}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right)\right) \end{aligned}.$$

*En particulier, si on considère* $F_1(x,y) = F_1(x)$ *et* $F_2(x,y) = F_2(y)$, *on obtient*

$$F(x,y) = (Ax + B, -Ay + D, C),$$

*tels que* $A, B, C$ *et* $D$ *sont des constants réels avec* $(A, C \neq 0)$.
*Dans ce cas* $e(F) = \frac{A^2}{C^2}$ *l'application* $F$ *est bi-harmonique, non-harmonique.*
$S_2(F)(X,Y) = 6\frac{A^4}{C^4}h(X,Y) - 4\frac{A^4}{C^4}g(dF(X), dF(Y))$, *et* $Tr_h S_2(F) = 4\frac{A^4}{C^4}$

CHAPITRE 4

# APPLICATIONS BI-HARMONIQUES AVEC POTENTIEL.

## 4.1 Introduction.

La notion d' applications harmoniques avec potentiel est motionnée la premiere fois par A. Ratto and A. Fardoun (voir [2] et [5]). Soient $(M^m, g)$, $(N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes,et $H$ une fonction différentielle dans $N$, et soit $\phi : M \to N$ une application différentielle. On considère l'énergie fonctionnelle suivante

$$E_H(\phi) = \int_K (e(\phi) - H(\phi))\, dv_g \tag{4.1}$$

Pour toute partie compacte $K \subset M$. Solution de l' équation d' Euler-Lagrange de $E_H(\phi)$ est

$$\tau_H(\phi) = \tau(\phi) + \left(grad^N H\right) \circ \phi, \tag{4.2}$$

tel que $\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi$ est le champ de tension de $\phi$. Les solutions différentielles de (4.2) sont appelées applications harmoniques avec potentiel $H$. Pour plus de détails sur les applications harmoniques avec potentiel voir [31], [1] et [2].

## 4.2 Deuxième variation de $H$-énergie fonctionnelle.

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application harmonique avec potentiel $H$ entre deux variétés Riemanniennes. Par deux paramètres variation on signifie qu' une application différentielle $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ définie par $\Phi(x, t, s) = \phi_{t,s}(x)$,tel que $\phi_{0,0} = \phi$. C'est la variation de champs vecteurs sont les champs vecteurs $v$, $w$ à long $\phi$ définie par

$$v = \left.\frac{\partial \phi_{t,s}}{\partial t}\right|_{t=s=0}$$

et

$$w = \left.\frac{\partial \phi_{t,s}}{\partial s}\right|_{t=s=0}.$$

Maintenant on suppose que $M$ est compacte et soit $\nabla^{\phi}$ note la connection de pull-back $\phi^{-1}TN$.Par la règle de Leibniz ,

$$\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}_{X,Y} v = \nabla^{\phi}_{X}\nabla^{\phi}_{Y} v - \nabla^{\phi}_{\nabla^{M}_{X}Y} v$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $v \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$. On prend la trace on obtient

$$Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^{2} v = \nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} v - \nabla^{\phi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i} v,$$

telle que $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ est une base orthonormale dans $M$. Sous les notations précédentes on a

**Théorème 4.2.1.** *(la formule de deuxième variation ) Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application harmonique avec potentiel $H$ et on suppose que $M$ est compacte, on a*

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_H\left(\phi_{t,s}\right)\right|_{t=s=0} = \int_M h\left(J^{\phi}_{H}(v), w\right) dv_g, \tag{4.3}$$

*tels que $J^{\phi}_{H}(v) \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$ est donnée par*

$$J^{\phi}_{H}(v) = -Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^{2} v - Tr_g R^{N}(v, d\phi)\, d\phi - \left(\nabla^{N}_{v} grad^{N} H\right)\circ\phi. \tag{4.4}$$

**Proof of Theorem 4.3.3.**

Soit $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$, $(x,t,s) \longmapsto \Phi(x,t,s) = \phi_{t,s}(x)$ une variation de $\phi$ avec la variation de champ de vecteurs $v$ et $w$. Soit $\nabla^{\Phi}$ denote connexion de pull-back dans $\Phi^{-1}TN$, un fibre vectoriel sur
$M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$. Note que

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, X\right] = \left[\frac{\partial}{\partial s}, X\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$$

pour tout champ de vecteurs $X$ dans $M$ on considère un champ de vecteurs dans $M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$. Par l'équation (4.1), on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_H\left(\phi_{t,s}\right) = \int_M \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\left(e\left(\phi_{t,s}\right) - H\left(\phi_{t,s}\right)\right) dv_g. \tag{4.5}$$

On évalue au $(t,s) = (0,0)$.On calcule dans une base normale au $x \in M$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e\left(\phi_{t,s}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h\left(d\Phi(e_i), d\Phi(e_i)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t} h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi(e_i), d\Phi(e_i)\right),\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e\left(\phi_{t,s}\right) = h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi(e_i), d\Phi(e_i)\right) + h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi(e_i), \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi(e_i)\right). \tag{4.6}$$

Pour le premier terme $h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), d\Phi\left(e_i\right)\right)$, on a

$$\begin{aligned} h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), d\Phi\left(e_i\right)\right) &= h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\Phi}_{e_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), d\Phi\left(e_i\right)\right) \\ &= h\left(\nabla^{\Phi}_{e_i}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), d\Phi\left(e_i\right)\right) \\ &+ h\left(R^N\left(d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi\left(e_i\right)\right)d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), d\Phi\left(e_i\right)\right). \end{aligned}$$

Définie une $1-$ forme dans $M$ par

$$\alpha\left(\cdot\right) = h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, d\Phi\left(\cdot\right)\right).$$

alors

$$div\alpha = h\left(\nabla^{\Phi}_{e_i}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, d\phi\left(e_i\right)\right) + h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, \tau\left(\phi\right)\right),$$

ainsi que

$$\begin{aligned} h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), d\Phi\left(e_i\right)\right)\Big|_{t=s=0} &= div\alpha - h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, \tau\left(\phi\right)\right) \\ &+ h\left(R^N\left(v, d\phi\left(e_i\right)\right)w, d\phi\left(e_i\right)\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

En suite le deuxième terme $h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right)\right)$ de (4.6),on a

$$\begin{aligned} h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right)\right) &= h\left(\nabla^{\Phi}_{e_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla^{\Phi}_{e_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right) \\ &= e_i\left(h\left(d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla^{\Phi}_{e_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)\right) - h\left(d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla^{\Phi}_{e_i}\nabla^{\Phi}_{e_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right). \end{aligned}$$

Définie une $1-$ forme dans $M$ par $\beta\left(\cdot\right) = h\left(w, \nabla^{\phi}_{\cdot}v\right)$. Par calcule de la divergence de $\beta$, on obtient

$$h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right), \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi\left(e_i\right)\right)\Big|_{t=s=0} = div\beta - h\left(w, \nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}v\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}e\left(\phi_{t,s}\right)\Big|_{t=s=0} &= -h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}v, w\right) - h\left(R^N\left(v, d\phi\left(e_i\right)\right)d\phi\left(e_i\right), w\right) \\ &+ div\alpha + div\beta - h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, \tau\left(\phi\right)\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Finalement, par un calcule simple on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H\left(\phi_{t,s}\right)\Big|_{t=s=0} = h\left(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{t=s=0}, \left(grad^N H\right)\circ\phi\right) + h\left(\left(\nabla^N_v grad^N H\right)\circ\phi, w\right). \tag{4.9}$$

En replaçant les équations 4.8 et 4.9 dans 4.5,et utilisant le théorème de divergence , on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_H(\phi_{t,s})\Big|_{t=s=0} = \int_M h\left(J_H^\phi(v), w\right) dv_g, \tag{4.10}$$

tel que $J_H^\phi(v) \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ est donnée par

$$J_H^\phi(v) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 v - Tr_g R^N(v, d\phi)\, d\phi - \left(\nabla_v^N grad^N H\right) \circ \phi. \tag{4.11}$$

## 4.3 Applications Bi harmoniques avec potentiel.

On considère une application différentielle $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ entre deux variétés Riemanniennes. Et $H$ une fonction différentielle dans $N$. Une généralisation naturelle de l'application harmonique avec potentiel est donnée par integration de la norme carré de $\tau_H(\phi)$. Plus précisément, la $H-$bi-énergie fonctionnel de $\phi$ est définie par

$$E_{2,H}(\phi) = \int_K |\tau_H(\phi)|^2 dv_g \tag{4.12}$$

pour toute partie compacte $K \subset M$.

**Définition 4.3.1.** *Application $\phi$ est dite biharmonique avec potentiel $H$ si elle est un point critique de la $H$-bi-énergie fonctionnel $E_{2,H}(\phi)$.*

### 4.3.1 Première variation of the $H$-bi-énergie fonctionnelle

**Théorème 4.3.1.** *[2] Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ application différentielle entre deux variétés Riemanniennes ; $H$ une fonction différentielle de $N$, $K$ une partie compacte de $M$ et soit $\{\phi_t\}_{t\in I}, I = (-\epsilon, \epsilon)$ une variation différentielle de $\phi$ dans un support compact de $K$. Alors*

$$\frac{d}{dt} E_{2,H}(\phi_t)\Big|_{t=0} = -\int_K h(\tau_{2,H}(\phi), V)\, dv_g, \tag{4.13}$$

*où $V$ denote la variation de champ vecteurs de $\{\phi_t\}_{t\in I}$ et*

$$\tau_{2,H}(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_H(\phi) - Tr_g R^N(\tau_H(\phi), d\phi)\, d\phi - \left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)} gradH\right) \circ \phi.$$

**Proof of Theorem 4.3.1.**Soit $\{\phi_t\}_{t\in I}, I = (-\epsilon, \epsilon)$, une variation différentielle de $\phi$, est une application différentielle $\Phi : I \times M \longrightarrow N$, satisfaire

$$\begin{cases} \Phi(t,x) = \phi_t(x), \forall (t,x) \in I \times M \\ \Phi(0,x) = \phi_0(x) = \phi(x), \forall x \in M \end{cases}$$

la variation de champ vecteurs $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ associée de la variation $\{\phi_t\}_{t\in I}$ est donnée

$$V(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t(x) = d\Phi_{(0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M.$$

on a

$$\frac{d}{dt}E_{2,H}(\phi_t) = \int_K h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_H(\phi), \tau_H(\phi)\right) dv_g. \tag{4.14}$$

Soit maintenant $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormale locale de les champs géodésiques au $x \in K$, i.e. $\{e_i\}_{i=1}^m$ est base orthonormale locale de les champs avec $(\nabla_{e_i}e_j)_x = 0, \forall i, j = 1, ...., m$. Relativement $\{e_i\}_{i=1}^m$ on a

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_H(\phi) = \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{e_i}d\phi_t(e_i) + \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}(gradH)\circ\phi_t.$$

Pour $Z \in \Gamma(TM)$, comme $\left[\frac{\partial}{\partial t}, Z\right] = 0$, donc

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(Z) = \nabla^\phi_Z d\phi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + d\phi_t\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, Z\right]\right) = \nabla^\phi_Z d\phi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Par definition du tenseur de courbure de $(N,h)$, on obtient

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{e_i}d\phi_t(e_i) = \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(e_i) + R^N\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\phi_t(e_i)\right)d\phi_t(e_i),$$

Puisque $\nabla^\phi$ est compatible avec $h$, on a

$$h\left(\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(e_i), \tau_H(\phi_t)\right) = e_i\left(h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(e_i), \tau_H(\phi_t)\right)\right) - h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(e_i), \nabla^\phi_{e_i}\tau_H(\phi_t)\right).$$

Remarquant

$$h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t(e_i), \nabla^\phi_{e_i}\tau_H(\phi_t)\right) = e_i\left(h\left(d\phi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^\phi_{e_i}\tau_H(\phi_t)\right)\right) - h\left(d\phi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i}\tau_H(\phi_t)\right)$$

et

$$h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}(gradH)\circ\phi_t, \tau_H(\phi_t)\right) = h\left(\left(\nabla^\phi_{\tau_H(\phi_t)}gradH\right)\circ\phi_t, d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right).$$

Alors, par l'utilisation de la symmetrisation de tenseur de courbure Riemannien et d'après le théorème de divergence, on déduit que

$$\left.\frac{d}{dt}E_{2,H}(\phi_t)\right|_{t=0} = -\int_K h(\tau_{2,H}(\phi), V)\, dv_g,$$

où

$$\tau_{2,H}(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_H(\phi) - Tr_g R^N(\tau_H(\phi), d\phi)\, d\phi - \left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)}gradH\right)\circ\phi.$$

**Théorème 4.3.2.** *[2]et[44] Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application différentielle entre deux variétés Riemanniennes et $H$ une fonction différentielle de $N$. Alors $\phi$ est biharmonique avec potential si seulement si*

$$\tau_{2,H}(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_H(\phi) - Tr_g R^N(\tau_H(\phi), d\phi)\, d\phi - \left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)}gradH\right)\circ\phi = 0. \tag{4.15}$$

Si on considère $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application différentielle entre deux variétés Riemanniennes et soit $H \in C^\infty(N)$ une fonction différentielle, la relation entre $\tau_{2,H}(\phi)$ et $\tau_2(\phi)$ est donnée par la remarque suivante.

**Remarque 4.3.1.** *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application différentielle entre deux variétés Riemanniennes et $H$ une fonction différentielle de $N$. Alors*

$$\tau_{2,H}(\phi) = \tau_2(\phi) - J_\phi((gradH)\circ\phi) - \left(\nabla_{\tau(\phi)}(gradH)\right)\circ\phi - \left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}(gradH)\right)\circ\phi, \quad (4.16)$$

*où*

$$\begin{aligned} J_\phi((gradH)\circ\phi) &= Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2((gradH)\circ\phi) + Tr_g R^N((gradH)\circ\phi, d\phi)\,d\phi \\ &= \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i}((gradH)\circ\phi) - \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}((gradH)\circ\phi) + R^N((gradH)\circ\phi, d\phi(e_i))\,d\phi(e_i), \end{aligned}$$

Dans le cas où $\phi$ est harmonique, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.3.1.** *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique et $H \in C^\infty(N)$ une fonction différentielle de $N$. Alors $\phi$ est biharmonique avec potentiel $H$ si seulement si*

$$J_\phi((gradH)\circ\phi) + \left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}(gradH)\right)\circ\phi = 0.$$

En utilisant cette remarque pour construction des exemples des applications bi-harmoniques avec potentiel .

**Exemple 4.3.1.** *[44] Soit la projection $\phi : (\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ définie par $\phi(t, x_2, x_3, x_4) = (t, x_2, x_3)$. Supposons que la fonction $\alpha = H\circ\phi$ depend que $t$, alors d'après le corollaire 4.3.1, la projection $\phi$ est biharmonique avec potentiel $H$ si seulement si*

$$\alpha''' + \alpha'\alpha'' = 0.$$

*Soit $\beta = \alpha'$, donc la dernière expression devient*

$$\beta'' + \beta\beta' = 0.$$

*Les solutions particuliers sont données sous la forme $\beta = \frac{2}{t+k}$ $(k \in \mathbb{R})$ qui donne*

$$\alpha(t) = (H\circ\phi)(t) = 2\ln|C_1 t + C_2|, (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

*Dans ce cas la projection $\phi$ est biharmonique avec potentiel $H$, où $(H\circ\phi)(t) = 2\ln|C_1 t + C_2|$.*

En particulier,si on considère l'application d'identité , on obtient la résultat suivante.

**Corollaire 4.3.2.** *[44] L'application d'identité $Id_M : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est biharmonique avec potentiel $H$ si seulement si*

$$grad\Delta H + \frac{1}{2}grad\left(|gradH|^2\right) + 2Ricci^M(gradH) = 0. \quad (4.17)$$

**Proof of Corollary 4.3.2.** D'après le Corollaire 4.3.1, l'application d'identité $Id_M$ : $(M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est biharmonique avec potentiel $H$ si seulement si

$$J_{Id_M}(gradH) + \nabla_{gradH} gradH = 0.$$

Pour le terme $J_{Id_M}(gradH)$, par définition on a

$$J_{Id_M}(gradH) = Tr_g \nabla^2 gradH + Ricci\,(gradH).$$

on sait que ([36])

$$Tr_g \nabla^2 gradH = grad\Delta H + Ricci\,(gradH),$$

alors

$$J_{Id_M}(gradH) = grad\Delta H + 2Ricci\,(gradH).$$

Finalement, est facile de voir que

$$\nabla_{gradH} gradH = \frac{1}{2} grad\left(|gradH|^2\right).$$

on déduire que l'application d'identité $Id_M : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est biharmonique avec potentiel $H$ si seulement si la fonction $H$ satisfaire l' équation suivante

$$grad\Delta H + \frac{1}{2} grad\left(|gradH|^2\right) + 2Ricci^M(gradH) = 0.$$

On va présenter un exemple de l'application biharmonique avec potentiel

**Exemple 4.3.2.** *[44] On considère l'application d'identité $Id : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ $(m \neq 2)$ on suppose que $H$ est radial $(H = H(r), r = |x|)$. Alors d'après le Corollaire 4.3.1, on déduit que l'application d'identité $Id$ est biharmonique avec potentiel si seulement si la fonction $H$ satisfier l'équation différentielle*

$$H''' + \frac{m-1}{r} H'' - \frac{m-1}{r^2} H' + H'H'' = 0.$$

*Soit $\beta = H'$, l'equation devient*

$$\beta'' + \frac{m-1}{r} \beta' - \frac{m-1}{r^2} \beta + \beta\beta' = 0.$$

*Voyant pour les solutions particuliers de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, alors $Id$ est biharmonique avec potentiel si seulement si $a = 4 - 2m$. on obtient $H(r) = \ln\left(Cr^{4-2m}\right)$ $(C > 0)$ et dans ce cas l'application d'identité $Id : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est propre biharmonique avec potentiel $H(r) = \ln\left(Cr^{4-2m}\right)$ $(C > 0)$.*

**Exemple 4.3.3.** *[44] On considère $M = \mathbb{S}^n$ avec paramétrisation*

$$x = (\cos s, \sin s \cdot y), s \in [0, \pi], y \in S^{n-1}.$$

*Soit une base orthonormale de* $\mathbb{S}^n$ *donnée par*

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_i = (0, f_i), i = 2, ..., n$$

*tels que les vecteurs* $f_i$ *sont tangents à la sphère* $S^{n-1}$*. On suppose que* $H = H(s)$*. Un calcule directe donne*

$$gradH = H' \frac{\partial}{\partial s},$$

$$|gradH|^2 = (H')^2,$$

$$grad\left(|gradH|^2\right) = 2H'H'',$$

$$\Delta H = H'' + (n-1)(\cot s) H',$$

$$grad\Delta H = \left(H''' + (n-1)(\cot s) H'' - (n-1)\left(1+\cot^2 s\right) H'\right) \frac{\partial}{\partial s}$$

*et*

$$Ricci^{S^n}(gradH) = (n-1) H' \frac{\partial}{\partial s}.$$

*Alors d'après le corollaire 4.3.1, on déduit que application* $Id_{S^n}$ *is biharmonique avec potentiel* $H$ *si seulement si la fonction* $\beta = H'$ *satisfaire l'équation différentielle suivante*

$$\beta'' + (n-1)(\cot s)\beta' + (n-1)\left(1-\cot^2 s\right)\beta + \beta\beta' = 0.$$

*Pour l'exemple, si* $n = 1$ *l' application* $Id_{S^1}$ *est biharmonique avec potentiel* $H$ *si seulement si*

$$\beta'' + \beta\beta' = 0.$$

*Une solution particulière est donnée par la forme* $\beta(s) = \frac{2}{s+k}$ *(*$k \in \mathbb{R}$*) qui donne*

$$H(s) = 2\ln|C_1 s + C_2|, (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

*dans ce cas* $Id_{\mathbb{S}^1}$ *est biharmonique avec potentiel* $H$*, où* $H(s) = 2\ln|C_1 s + C_2|$*.*

### 4.3.2 Le cas d'applications conformes.

On étudie les applications conformes entre deux variétés de même dimension $n \geq 3$. Notons que par un résultats dans [27], toute application peut n'avoir point critique et aussi est un difféomorphisme locale conforme.
Rappeler que l'application $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ est dite conforme s'il exist une $C^\infty$ fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}_+^*$ pour toute $X, Y \in \Gamma(TM)$ :

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y).$$

la fonction $\lambda$ est appelée la dilation de l'application $\phi$. le champ de tension de l'application $\phi$ est donné par (voir [37]) :

$$\tau(\phi) = (2-n)d\phi(grad \ln \lambda).$$

Notons que l'application conforme $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ de dilation $\lambda$ est harmonique si seulement si $n = 2$ ou la dilation $\lambda$ est constante. Le champ bi-tension de application conforme est donne par le théorème suivant

**Théorème 4.3.3.** *[35] Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$, alors pour toute fonction $\gamma \in C^{\infty}(M)$, on a*

$$\begin{aligned} Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(grad\gamma\right) = {} & d\phi\left(grad\Delta\gamma\right) + 4d\phi\left(\nabla_{grad \ln \lambda} grad\gamma\right) + d\phi\left(Ricci^M\left(grad\gamma\right)\right) \\ & + \left(\Delta \ln \lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right) - 2\left(\Delta\gamma\right) d\phi\left(grad \ln \lambda\right) \\ & - (n-2)\, d\ln\lambda\left(grad\gamma\right) d\phi\left(grad \ln \lambda\right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\gamma\right), d\phi\right) d\phi = {} & d\phi\left(Ricci^M\left(grad\gamma\right)\right) - (n-2)\, d\phi\left(\nabla_{grad\gamma} grad \ln \lambda\right) \\ & - \left(\Delta \ln \lambda + (n-2)\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) d\phi\left(grad\gamma\right) \\ & + (n-2)\, d\ln\lambda\left(grad\gamma\right) d\phi\left(grad \ln \lambda\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

*et le champ bi-tension de $\phi$ est donne par*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\left(T_1\right)$$

*où*

$$\begin{aligned} T_1 = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) \\ & - \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) grad \ln \lambda \end{aligned}$$

D'abord, on calcule $\tau_{2,H}(\phi)$ dans le cas où $\phi$ une application conforme.

**Théorème 4.3.4.** *[44] Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$, alors $\tau_{2,H}(\phi)$ est donné par :*

$$\tau_{2,H}(\phi) = (n-2)\, d\phi(A) - \frac{1}{\lambda^2} d\phi(B) - \frac{1}{\lambda^4} d\phi(C),$$

*tels que*

$$\begin{aligned} A = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) \\ & - \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) grad \ln \lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = {} & grad\Delta\left(H \circ \phi\right) - 2\left(\Delta \ln \lambda\right) grad\left(H \circ \phi\right) - 2\left(\Delta\left(H \circ \phi\right)\right) grad \ln \lambda \\ & - (n-2)\, \nabla_{grad(H\circ\phi)} grad \ln \lambda - (n-2)\, \nabla_{grad \ln \lambda} grad\left(H \circ \phi\right) \\ & + 2Ricci^M\left(grad\left(H \circ \phi\right)\right) \end{aligned}$$

*et*

$$C = -\left|grad\left(H \circ \phi\right)\right|^2 grad \ln \lambda + \frac{1}{2} grad\left(\left|grad\left(H \circ \phi\right)\right|^2\right).$$

une consequence de la théorème 4.3.4, le résultat suivant :

**Corollaire 4.3.3.** *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda = 1$, alors $\phi$ est biharmonique avec potentiel si seulement si*

$$grad\Delta (H \circ \phi) + \frac{1}{2} grad \left( |grad (H \circ \phi)|^2 \right) + 2Ricci^M (grad (H \circ \phi)) = 0.$$

*En particulier si $\phi = Id_M$, on obtient l'équation (4.16) de Corollaire 4.3.2.*

Pour montre le théorème (4.3.4), on besoin deux lemmes suivantes. Dans le premier on simplifie le terme $Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 (gradH) \circ \phi$ dans le premier lemme, pour une application conforme $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ de dilation $\lambda$ et pour toute fonction $H \in C^\infty (N)$.

**Lemme 4.3.1.** *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$, alors pour toute fonction $H \in C^\infty (N)$, on a*

$$Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 (gradH) \circ \phi = \frac{1}{\lambda^2} d\phi (T_1),$$

*où*

$$\begin{aligned} T_1 = {} & grad\Delta (H \circ \phi) - (\Delta \ln \lambda) \, grad (H \circ \phi) - 2 (\Delta (H \circ \phi)) \, grad \ln \lambda \\ & - (n-2) \, d \ln \lambda (grad (H \circ \phi)) \, grad \ln \lambda + Ricci^M (grad (H \circ \phi)). \end{aligned}$$

**Preuve de Lemme 4.3.1.**Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale en $M$, par définition, on a

$$Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 (gradH) \circ \phi = \nabla^\phi_{e_i} \nabla^\phi_{e_i} (gradH) \circ \phi - \nabla^\phi_{\nabla_{e_i} e_i} (gradH) \circ \phi.$$

Il facile de voir que

$$(gradH) \circ \phi = \frac{1}{\lambda^2} d\phi (grad (H \circ \phi)),$$

ainsi

$$\begin{aligned} Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 (gradH) \circ \phi &= Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} d\phi (grad (H \circ \phi)) \\ &= \nabla^\phi_{e_i} \nabla^\phi_{e_i} \frac{1}{\lambda^2} d\phi (grad (H \circ \phi)) - \nabla^\phi_{\nabla_{e_i} e_i} \frac{1}{\lambda^2} d\phi (grad (H \circ \phi)). \end{aligned} \tag{4.20}$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla^\phi_{e_i} \frac{1}{\lambda^2} d\phi (grad (H \circ \phi)) &= \frac{1}{\lambda^2} \nabla^\phi_{e_i} d\phi (grad (H \circ \phi)) + e_i \left( \frac{1}{\lambda^2} \right) d\phi (grad (H \circ \phi)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \nabla^\phi_{e_i} d\phi (grad (H \circ \phi)) - \frac{2}{\lambda^2} e_i (\ln \lambda) \, d\phi (grad (H \circ \phi)), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) &= \nabla^{\phi}_{e_i}\left(\frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\right)-\nabla^{\phi}_{e_i}\left(\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+e_i\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(\ln\lambda\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)-\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(e_i\left(\ln\lambda\right)\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-e_i\left(\frac{2}{\lambda^2}\right)e_i\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)-\frac{4}{\lambda^2}e_i\left(\ln\lambda\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(e_i\left(\ln\lambda\right)\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(\ln\lambda\right)e_i\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right).
\end{aligned}$$

Ensuit

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) &= \frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)-\frac{4}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{grad\ln\lambda}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-\frac{2}{\lambda^2}e_i\left(e_i\left(\ln\lambda\right)\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+\frac{4}{\lambda^2}\left|grad\ln\lambda\right|^2d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Pour le terme $\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i}\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i}\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) &= \frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+\nabla_{e_i}e_i\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)-\frac{2}{\lambda^2}\nabla_{e_i}e_i\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right).
\end{aligned}\tag{4.22}$$

si en remplaçant (4.21) et (4.22) in (4.20), on déduit que

$$\begin{aligned}
Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2\left(gradH\right)\circ\phi &= \frac{1}{\lambda^2}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)-\frac{4}{\lambda^2}\nabla^{\phi}_{grad\ln\lambda}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-\frac{2}{\lambda^2}\left(\left(\Delta\ln\lambda\right)-2\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right).
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Pour le terme $Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)$ ,on a par (4.23)

$$\begin{aligned}
Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) &= d\phi\left(grad\Delta\left(H\circ\phi\right)\right)+4d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&-\left(\left(n-2\right)d\ln\lambda\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+2\left(\Delta\left(H\circ\phi\right)\right)\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&+\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+d\phi\left(Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\right)
\end{aligned}\tag{4.24}$$

Pour le dernier terme $\nabla^{\phi}_{grad\ln\lambda}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)$, on sait que (Voir [3])

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{grad\ln\lambda}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) &= \nabla d\phi\left(grad\ln\lambda,grad\left(H\circ\phi\right)\right)+d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(H\circ\phi\right)\right)\\
&= \left|grad\ln\lambda\right|^2d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(H\circ\phi\right)\right).
\end{aligned}\tag{4.25}$$

En replaçant (4.24) et (4.25) dans (4.23), on conclure que

$$\begin{aligned} Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^2 (gradH) \circ \phi = & \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(grad\Delta \left(H \circ \phi\right)\right) - \frac{1}{\lambda^2} \left(\Delta \ln \lambda\right) d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) \\ & - \frac{1}{\lambda^2} \left(\left(n-2\right) d \ln \lambda \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) + 2 \left(\Delta \left(H \circ \phi\right)\right)\right) d\phi \left(grad \ln \lambda\right) \\ & + \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(Ricci^M \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^2 (gradH) \circ \phi = \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(T_1\right)$$

où

$$\begin{aligned} T_1 = & grad\Delta \left(H \circ \phi\right) - \left(\Delta \ln \lambda\right) grad \left(H \circ \phi\right) + Ricci^M \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) \\ & - \left(\left(n-2\right) d \ln \lambda \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) + 2 \left(\Delta \left(H \circ \phi\right)\right)\right) grad \ln \lambda \end{aligned}$$

la preuve du lemme 4.3.1 est terminé. Maintenant, dans le deuxième lemme,on va montrer d'autres properties d' applications conformes.

**Lemme 4.3.2.** *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$, alors pour toute fonction $H \in C^{\infty}(N)$ et pour $X \in \Gamma(TM)$, on a*

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{d\phi(X)} gradH\right) \circ \phi = & -\frac{1}{\lambda^2} X \left(\ln \lambda\right) d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) + \frac{1}{\lambda^2} d \ln \lambda \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) d\phi \left(X\right) \\ & - \frac{1}{\lambda^2} X \left(H \circ \phi\right) d\phi \left(grad \ln \lambda\right) + \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(\nabla_X grad \left(H \circ \phi\right)\right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

*et*

$$\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi} \left(gradH\right)\right) \circ \phi = -\frac{1}{\lambda^4} \left|grad \left(H \circ \phi\right)\right|^2 d\phi \left(grad \ln \lambda\right) + \frac{1}{2\lambda^4} d\phi \left(grad \left(\left|grad \left(H \circ \phi\right)\right|^2\right)\right). \tag{4.27}$$

**Preuve du lemme 4.3.2.** Pour le terme $\left(\nabla_{d\phi(X)} gradH\right) \circ \phi$,on a

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{d\phi(X)} gradH\right) \circ \phi & = \nabla^{\phi}_X \left(gradH \circ \phi\right) \\ & = \nabla^{\phi}_X \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \nabla^{\phi}_X d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) + X \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \nabla^{\phi}_X d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) - \frac{2}{\lambda^2} X \left(\ln \lambda\right) d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que( [31])

$$\begin{aligned} \nabla^{\phi}_X d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) & = \nabla d\phi \left(X, grad \left(H \circ \phi\right)\right) + d\phi \left(\nabla_X grad \left(H \circ \phi\right)\right) \\ & = X \left(\ln \lambda\right) d\phi \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) + d \ln \lambda \left(grad \left(H \circ \phi\right)\right) d\phi \left(X\right) \\ & = -X \left(H \circ \phi\right) d\phi \left(grad \ln \lambda\right) + \frac{1}{\lambda^2} d\phi \left(\nabla_X grad \left(H \circ \phi\right)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\nabla_{d\phi(X)}gradH\right)\circ\phi=-\frac{1}{\lambda^2}X\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+\frac{1}{\lambda^2}d\ln\lambda\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)d\phi\left(X\right)$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}X\left(H\circ\phi\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(\nabla_X grad\left(H\circ\phi\right)\right).$$

Maintenant on va simplifie le terme $\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi$, on a

$$\left(gradH\right)\circ\phi=\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right),$$

ainsi que

$$\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi=\frac{1}{\lambda^2}\left(\nabla_{d\phi(grad(H\circ\phi))}\left(gradH\right)\right)\circ\phi.$$

Si en replaçant $X=grad\left(H\circ\phi\right)$ in (3.20), on obtient

$$\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi=-\frac{1}{\lambda^4}\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\frac{1}{2\lambda^4}d\phi\left(grad\left(\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2\right)\right).$$

**Preuve de of Théorème 4.3.4.** Par definition, on a

$$\tau_{2,H}\left(\phi\right)=\tau_2\left(\phi\right)-J_\phi\left(\left(gradH\right)\circ\phi\right)-\nabla_{\tau(\phi)}\left(gradH\right)\circ\phi-\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi. \quad (4.28)$$

On va étudier terme par terme de cette expression. Pour le premier terme $\tau_2\left(\phi\right)$, d'après le théorème (4.3.2) on a

$$\tau_2(\phi)=\left(n-2\right)d\phi\left(T_1\right) \quad (4.29)$$

où

$$T_1=grad\Delta\ln\lambda-\frac{(n-6)}{2}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)+2Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)$$
$$-\left(2\left(\Delta\ln\lambda\right)+\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)grad\ln\lambda.$$

D'abord on simplifie le terme $J_\phi\left(\left(gradH\right)\circ\phi\right)$, on a

$$J_\phi\left(\left(gradH\right)\circ\phi\right)=Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\left(gradH\right)\circ\phi+Tr_gR^N\left(\left(gradH\right)\circ\phi,d\phi\right)d\phi. \quad (4.30)$$

Par le premier lemme (4.3.1), on obtient

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\left(gradH\right)\circ\phi=\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(T_2\right) \quad (4.31)$$

où

$$T_2=grad\Delta\left(H\circ\phi\right)-\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\left(H\circ\phi\right)+Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)$$
$$-\left(\left(n-2\right)d\ln\lambda\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)+2\left(\Delta\left(H\circ\phi\right)\right)\right)grad\ln\lambda.$$

d'après

$$\left(gradH\right)\circ\phi=\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right),$$

ainsi que

$$Tr_gR^N\left(\left(gradH\right)\circ\phi,d\phi\right)d\phi=\frac{1}{\lambda^2}Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right),d\phi\right)d\phi.$$

En utilisant la premiere formule du théorème (4.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} Tr_g R^N \left(d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right), d\phi\right) d\phi &= d\phi\left(Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\right) + (n-2)\, d\ln\lambda\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) d\phi\left(grad \ln\right. \\ &\quad - (n-2)\, d\phi\left(\nabla_{grad(H\circ\phi)} grad\ln\lambda\right) - \left(\Delta\ln\lambda + (n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) d\phi\left(g\right. \end{aligned}$$

alors

$$Tr_g R^N \left(d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right), d\phi\right) d\phi = \frac{1}{\lambda^2} d\phi\left(T_3\right),$$

tel que

$$\begin{aligned} T_3 &= Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) + (n-2)\, d\ln\lambda\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) grad\ln\lambda \\ &\quad - (n-2)\,\nabla_{grad(H\circ\phi)} grad\ln\lambda - \left(\Delta\ln\lambda + (n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) grad\left(H\circ\phi\right). \end{aligned}$$

Finalement, on déduit que

$$J_\phi\left(\left(gradH\right)\circ\phi\right) = \frac{1}{\lambda^2} d\phi\left(T_1+T_2\right),$$

tels que

$$\begin{aligned} T_2+T_3 &= grad\Delta\left(H\circ\phi\right) - \left(2\Delta\ln\lambda + (n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) grad\left(H\circ\phi\right) \\ &\quad - 2\left(\Delta\left(H\circ\phi\right)\right) grad\ln\lambda - (n-2)\,\nabla_{grad(H\circ\phi)} grad\ln\lambda + 2Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right). \end{aligned}$$

Maintenant, pour le dernière terme $\nabla_{\tau(\phi)}\left(gradH\right)\circ\phi$, par un calcule simple on a

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\tau(\phi)}\left(gradH\right)\right)\circ\phi &= (2-n)\left(\nabla_{d\phi(grad\ln\lambda)}\left(gradH\right)\right)\circ\phi \\ &= (2-n)\,\nabla^\phi_{grad\ln\lambda}\frac{1}{\lambda^2} d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &= \frac{2-n}{\lambda^2}\nabla^\phi_{grad\ln\lambda} d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) + (2-n)\, grad\ln\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &= \frac{2-n}{\lambda^2}\nabla d\phi\left(grad\ln\lambda, grad\left(H\circ\phi\right)\right) + \frac{2-n}{\lambda^2} d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &\quad - \frac{2\left(2-n\right)}{\lambda^2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &= \frac{2-n}{\lambda^2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) + \frac{2-n}{\lambda^2} d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &\quad - \frac{2\left(2-n\right)}{\lambda^2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) \\ &= \frac{n-2}{\lambda^2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right) + \frac{2-n}{\lambda^2} d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} grad\left(H\circ\phi\right)\right) \end{aligned}$$

on conclut que

$$\left(\nabla_{\tau(\phi)}\left(gradH\right)\right)\circ\phi = \frac{1}{\lambda^2} d\phi\left(T_4\right),$$

d'où

$$T_4 = (n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 grad\left(H\circ\phi\right) - (n-2)\,\nabla_{grad\ln\lambda} grad\left(H\circ\phi\right).$$

Pour terminer la démonstration il faut vérifier que le terme $\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi$ d'après le lemme (4.3.2)on a

$$\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi=-\frac{1}{\lambda^4}\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\frac{1}{2\lambda^4}d\phi\left(grad\left(\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2\right)\right),$$

alors

$$\left(\nabla_{(gradH)\circ\phi}\left(gradH\right)\right)\circ\phi=\frac{1}{\lambda^4}d\phi\left(T_5\right),$$

où

$$T_5=-\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2 grad\ln\lambda+\frac{1}{2}grad\left(\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2\right).$$

Finalement, on déduit que

$$\tau_{2,H}\left(\phi\right)=\left(n-2\right)d\phi\left(A\right)-\frac{1}{\lambda^2}d\phi\left(B\right)-\frac{1}{\lambda^4}d\phi\left(C\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}A&=grad\Delta\ln\lambda-\frac{(n-6)}{2}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)+2Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\\&\quad-\left(2\left(\Delta\ln\lambda\right)+\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)grad\ln\lambda,\\B&=grad\Delta\left(H\circ\phi\right)-2\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\left(H\circ\phi\right)-2\left(\Delta\left(H\circ\phi\right)\right)grad\ln\lambda\\&\quad-\left(n-2\right)\nabla_{grad(H\circ\phi)}grad\ln\lambda-\left(n-2\right)\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(H\circ\phi\right)\\&\quad+2Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$C=-\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2 grad\ln\lambda+\frac{1}{2}grad\left(\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2\right).$$

une consequence directe de le théorème 4.3.4 est donnée par le théorème suivant

**Théorème 4.3.5.** *[44]*
*Soit $\phi:(M^n,g)\to(N^n,h)$, $(n\geq 3)$ une application conforme de dilation $\lambda$. Alors $\phi$ est biharmonique avec potentiel si seulement si*

$$\left(n-2\right)A-\frac{1}{\lambda^2}B-\frac{1}{\lambda^4}C=0.$$

*tel que*

$$\begin{aligned}A&=grad\Delta\ln\lambda-\frac{(n-6)}{2}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)+2Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\\&\quad-\left(2\left(\Delta\ln\lambda\right)+\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)grad\ln\lambda,\\B&=grad\Delta\left(H\circ\phi\right)-2\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\left(H\circ\phi\right)-2\left(\Delta\left(H\circ\phi\right)\right)grad\ln\lambda\\&\quad-\left(n-2\right)\nabla_{grad(H\circ\phi)}grad\ln\lambda-\left(n-2\right)\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(H\circ\phi\right)\\&\quad+2Ricci^M\left(grad\left(H\circ\phi\right)\right)\end{aligned}$$

*et*

$$C=-\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2 grad\ln\lambda+\frac{1}{2}grad\left(\left|grad\left(H\circ\phi\right)\right|^2\right).$$

Comme on a déjà vue,qu' une application harmonique avec potentiel est biharmonique avec potentiel, donc une question naturelle dans ce contexte est de comprendre sous quelles conditions la réciproque est vraie.

**Théorème 4.3.6.** *[2]et[44] Soit $(M^m, g)$ une variété Riemannienne de volume infini, $(N^n, h)$ une variété Riemannienne de courbure sectionnelle negative , $H$ une fonction différentielle dans $N$ avec $HessH \leq 0$ et $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ est une application biharmonique avec potentiel satisfait*

$$\int_M |\tau_H(\phi)|^2 dv_g < \infty.$$

*Alors , $\phi$ est une application harmonique avec potentiel.*

**Preuve de Théorème 4.3.6.** On suppose que $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application biharmonique avec potentiel $H$, on fixé $x \in M$ et Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormale locale de les géodésiques at $x$, i.e. $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormale locale telle que $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0, \forall i, j = 1, ...., m$. alors on a

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi) + R^N(\tau_H(\phi), d\phi(e_i))\, d\phi(e_i) + \left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)} gradH\right) \circ \phi = 0,$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}-h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \tau_H(\phi)\right) &= h\left(R^N(\tau_H(\phi), d\phi(e_i))\, d\phi(e_i), \tau_H(\phi)\right) \\ &\quad + h\left(\nabla^N_{\tau_H(\phi)} gradH, \tau_H(\phi)\right) \circ \phi,\end{aligned}.$$

Comme courbure sectionnelle $N$ est negative et $HessH \leq 0$, on conclut que

$$-h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \tau_H(\phi)\right) \leq 0.$$

Soit $\rho$ une fonction différentielle de support compact dans $M$, on obtient

$$-h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \rho^2\tau_H(\phi)\right) \leq 0,$$

ainsi que

$$-e_i\left(h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \rho^2\tau_H(\phi)\right)\right) + h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \nabla^{\phi}_{e_i}\rho^2\tau_H(\phi)\right) \leq 0.$$

D'après le théorème de divergence, on déduit que

$$\int_M \rho^2 |\nabla\tau_H(\phi)|^2 dv_g + 2\int_M \rho e_i(\rho)\, h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \tau_H(\phi)\right) \leq 0,$$

où

$$|\nabla\tau_H(\phi)|^2 = h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi)\right).$$

d'après l'inégalité de Young, on a

$$-2\rho e_i(\rho)\, h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\tau_H(\phi), \tau_H(\phi)\right) \leq \epsilon\rho^2 |\nabla\tau_H(\phi)|^2 + \frac{1}{\epsilon} e_i(\rho)^2 |\tau_H(\phi)|^2,$$

qui nous donne

$$\int_M \rho^2 |\nabla\tau_H(\phi)|^2 dv_g \leq \epsilon\int_M \rho^2 |\nabla\tau_H(\phi)|^2 dv_g + \frac{1}{\epsilon}\int_M e_i(\rho)^2 |\tau_H(\phi)|^2 dv_g.$$

Soit $\epsilon = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_M \rho^2 \left|\nabla\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g \leq 2\int_M e_i(\rho)^2 \left|\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g.$$

On choisit une fonction plateau différentielle $\rho = \rho_R$, i.e.

$$\begin{cases} \rho \leq 1 \text{ on } M; \\ \rho = 1 \text{ on the ball } B(x,R); \\ \rho = 0 \text{ on } M \setminus B(x,2R); \\ |grad\rho|^2 \leq \frac{2}{R} \text{ on } M. \end{cases}$$

En replaçant $\rho = \rho_R$ dans..., on obtient

$$\frac{1}{2}\int_M \left|\nabla\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g \leq \frac{8}{R^2}\int_M \left|\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g,$$

comme $\int_M \left|\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g < \infty$, quand $R \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_M \left|\nabla\tau_H(\phi)\right|^2 dv_g = 0.$$

ainsi que $\left|\nabla\tau_H(\phi)\right|^2 = 0$ et $e_i\left(\left|\tau_H(\phi)\right|^2\right)$ pour tout $i = 1, ...., m$, i.e. la fonction $\left|\tau_H(\phi)\right|^2$ est constante dans $M$. Finalement,comme le volume de $M$ est infini, on conclut la fonction $\left|\tau_H(\phi)\right|^2$ est nulle, alors $\tau_H(\phi) = 0$ et l' application $\phi$ est harmonique avec potential.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Cherif and M. Djaa, *On the biharmonic maps with potential.* Arab Journal of Mathematical Sciences,Volume24(1) (2018), pp. 1-8.

[2] A. Fardoun and A. Ratto, *Harmonic maps with potential.* Calc. Var. 5, 183-197 (1997)

[3] A. Fardoun, A. Ratto and R. Regbaoui, *On the heat flow for harmonic maps with potential.* Ann. Global Anal. Geom, 18(6)2000,555-567 .

[4] A. M. Cherif, H. Elhendi And M. Terbeche, on generalized conformal maps, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 4 (2012), 99-108.

[5] A. Ratto, *Harmonic maps with potential.* Proceedings of the Workshop on Differential Geometry and Topology (Palermo, 1996). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 49 (1997), 229-242.

[6] C. Gherghe, S. Ianus, A. M. Pastore, Harmonic maps, harmonic morphism and stability, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. (2000), 1-11.

[7] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique collection Hermann. Paris (1968).

[8] C. Oniciuc, New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math., 97, 131-139, (2003).

[9] D.E. Blair, Riemannian geometry of contact and Symplectic Manifolds, Birkhauser. Boston, Second Edition (2010).

[10] D. E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, 17-35 Lecture Nots in Mathematics 509, Springer, 1976.

[11] E. Loubeau, S. Montaldo, And C. Oniciuc, the stress-energy tensor for biharmonic maps, arXiv :math/0602021v1 [math.DG] 1 Feb 2006.

[12] Gh. Beldjilali, M. Belkhelfa. Kahlerian Structures and D-Homothetic Bi-Warping ,Geometry and Symmetry in Physics 2016

[13] G. Pitisÿ, Geometry of Kenmotsu manifolds, Publishing House of Transilvania University of Braÿsov, Braÿsov, (2007).

[14] G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A 7, 389-402, (1986).

[15] J. Eells and A. Ratto, Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Princeton University Press 1993.

[16] J. Eells and L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20, 385-524, (1988).

[17] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CNMS Regional Conference Series of the National Sciences Foundation, November 1981.

[18] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16(1978), 1-68.

[19] J. Eells and J.H. Sampson, Harmonic mappings of riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86(1964), 109-160.

[20] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, J. Tohoku Math., 24 (1972), 93-103.

[21] M. Djaa, Introduction à la Géométrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master - Doctorat) Centre Universitaire de Relizane(2013).

[22] M. Rimoldi and G. Veronelli, $f$-Harmonic maps and Applications to Gradient Ricci Solitons, Institut Elie Cartan Université de Lorraine ; Journées Nancéiennes de Géométrie 17 et 18 janvier 2012.

[23] N. Abdul Rehman Harmonic Maps on Kenmotsu Manifolds Versita vol21(3)2013,197-208

[24] Ouakkas, S., Nasri, R. and Djaa, M., On the f-harmonic and f-biharmonic maps, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 10, Number 1, 2010, Pages 11-27 Mars 2010.

[25] Ouakkas, S., Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications,26 (2008), 495-502.

[26] P. Baird, A. Fardoun And S. Ouakkas, conformal and semi-conformal biharmonic maps,annals of global analysis and geometry, 34 (2008),403-414.

[27] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds,Clarendon Press Oxford Sciences Publications 2003.

[28] P. Baird and D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, Annals of Global Analysis and Geometry 23, 65-75, (2003).

[29] P. Baird, Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformation of metrics, Pitman Books Limited, 27-39, (1983).

[30] P .Baird and J. Eells, A conservation law for harmonic maps, Lecture Notes in Math. 894,Springer (1981), 1-25.

[31] Q. Chen, *Harmonic maps with potential from complete manifolds*. Chinese Sci. Bull. 43 (1998) 1780-1786.

[32] S. Gudmundsson, the geometry of harmonic morphisms, University of Leeds,Department of Pure Mathematics, April 1992.

[33] S. Ianus, A.M. Pastore, Harmonic maps on contact metric manifolds, Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2 (1995), 43-53.

[34] S. Ouakkas, *Géométrie conforme associée à quelques opérateurs d'ordre 4*. Thesis, Université de Brest, 2008.

[35] S. Ouakkas and D. Djebbouri, *Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product*. Mathematics 2016, 4, 15 ; doi :10.3390/math4010015.

[36] S. Ouakkas, Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geom. Appl. 26 (2008) 495-502.

[37] U.C.De and G. Pathok, On 3-dimensional Kenmotsu manifolds, Indian J. Pure Appl. Math. 35, 159-165, (2004).

[38] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques, Canad. J. Math. 65 (2013), 266-298

[39] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques, Université de Strasbourg. C.N.R.S (2010).

[40] Yano, K. Kon, M. Structures on Manifolds, Series in Pure Math., Vol 3, World Scientific Singapore, 1984.

[41] Y.-L. Ou, p-harmonic morphisms, biharmonic morphisms, and non-harmonic biharmonic maps, J. Geom. Phys. Volume 56, 3, 358-374, (2006).

[42] Z. Olszak,On the existence of pseudo-symmetric Kählerian manifolds,Colloq. Math, 95 (2003), 185-189.

[43] Z. Abdelkader, O. Seddik, Biharmonic maps on kenmotsu manifolds, NTMSCI 4, No. 3, 129-139 (2016)

[44] Z. Abdelkader, O. Seddik, Some results and examples of the biharmonic maps with potential , Arab Journal of Mathematical Sciences, (2018).