

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par

M^r OULD YUCEF DJAMEL

Spécialité : Sciences physiques

Option : Physique des matériaux

Intitulée

**Modélisation et analyse de la stabilité des nanostructures
pour les matériaux avancées**

Soutenue le : 24 Juin 2019

Devant le jury composé de :

Président : HEIRECHE Houari

Professeur UDL SIDI BEL ABBES

Examineurs : BOUSAHLA Abdelmoumen Anis

MCA

C.U. de Relizane

BOUADI Abed

MCA

U. d'Oran USTO

KACI Abdelhakim

MCA

U. de Saida

Directeur de thèse : BENZAIER Abdelnour

Professeur

UDL SIDI BEL ABBES

Co-Directeur de thèse : TOUNSI Abdelouahed

Professeur

UDL SIDI BEL ABBES

Année universitaire : 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ وَالصَّلَاةُ
وَالسَّلَامُ عَلَى رَسُولِ اللَّهِ
عَلَيْهِ أَفْضَلُ الصَّلَاةِ
وَأَزْكَى التَّسْلِيمِ

سُبْحَانَ اللَّهِ وَالْحَمْدُ لِلَّهِ وَلَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ وَاللَّهُ أَكْبَرُ

وَلَا حَوْلَ وَلَا قُوَّةَ إِلَّا بِاللَّهِ

REMERCIEMENTS

Nous remercions ALLAH le tout puissant qui nous a guidé et qui nous a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Le présent travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-échelle, Sidi Bel Abbes, dirigé par Mr le Professeur HEIRECHE Houari à qui j'adresse mes sincères remerciements pour tous ses efforts dans le but de faire réussir notre formation.

Je suis profondément reconnaissant à monsieur Tounsi Abdelouahed, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés , ainsi je suis reconnaissant par la présence dans le jury Mr BOUSAHLA Abdelmoumen Anis, maître de conférences au centre de l'Université de Relizane et Mr BOUADI Abed, maître de conférences à l'Université d'Oran USTO qui ont accepté d'examiner cette thèse .

Je remercie vivement mon encadreur monsieur le professeur BENZAIK Abdelnour, de m'avoir proposer ce sujet, son suivi permanent, ses lecteurs attentifs, ses discussions fructueuses et sa patience nous ont permis d'aboutir dans ce travail. Ainsi je remercie chaleureusement Mr Abdelhakim Kaci maître de conférences à l'université de Saida pour toute l'aide qu'il m'a apportée et qui a été attentif à l'évolution de mes recherches.

Je n'oublierais pas de remercier ma Famille et Mr Nadir Sekkal, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Oran l'ainsi que tous les étudiants de ma promotion ainsi que tous les Membres du Laboratoire LMH pour leurs encouragements et avec qui j'ai eu à partager de très bons moments durant l'élaboration de ce manuscrit.

ABSTRACT

In this search, we talk about some definitions such as, the nanostructure as an example, the carbonic nanotube them the beam theory.

Such as: Euler Bernoulli mode, first class mode and the high order mode. The most important pont in this work is to study the behavior of buckling of nanobeam under different conditions to obtain a solid and flexible structure .

We can use different theories such as : classic shear constraint theory where the theories movement is written using Hamilton principle. The displacement field in these theories is written with the some mode used by Berrabah in which this field composes of transverse and flat field and the used mode is the high order mode. Finally, we write analytical solutions for buckling.

***Keywords:* Surface effects; Nanobeam; Bending; Buckling**

RESUME

Dans cette étude, on discute sur quelques définitions telles que : les nanostructures comme un exemple le nanotube de carbone, les théories des poutres par exemple le modèle d'Euler-Bernoulli, le modèle du Premier Ordre et le modèle d'Ordre Elevé.

La partie principale dans ce travail est l'étude des comportements de la flexion et du flambement des nano poutres sous différentes conditions aux limites afin d'obtenir une structure solide et flexible, les théories qui en utilisent sont la théorie de la contrainte de cisaillement classique de poutre, la théorie de la contrainte de cisaillement des effets de surface et la théorie de la contrainte de cisaillement non local des effets de surface, dans ces théories les équations du mouvement sont écrites en utilisant le principe d'Hamilton.

Le champ de déplacement dans ces théories est écrit sur la même mode proposée par Berrabah, H et al (2013), L'hypothèse de ce champ dit que le champ de déplacement contient : les déplacements transversaux et plans sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement, le modèle qui est appliqué dans cette théorie est le modèle d'ordre élevé, et dans ce dernier nous présentons les solutions analytiques pour la flexion et la charge de flambement de nanopoutre sous différentes conditions aux limites pour chaque théorie, prise en compte des propriétés physiques, des matériaux comme le module de Young, le coefficient de Poisson.

Mots clés : la contrainte de cisaillement, la flexion, le flambement, la Nano-poutre, les effets de surface, l'effet de non locale.

المخلص

تحدثنا في هذا البحث عن بعض التعاريف الخاصة بالمواد ذات البنية النانوية مثل الأنابيب النانوية الكربونية و النظريات المتعلقة بدراسة سلوكها الميكانيكي مثل نموذج Euler-Bernoulli ، نموذج Premier Ordre و نموذج Ordre Elevé

الجزء الأهم في هذا البحث هو دراسة وتحليل السلوك الميكانيكي كالتواء و الانحناء الذي يطرأ على الروافد ذات البعد النومتري تحت شروط الحدود المعينة من أجل الحصول على بنية صلبة و مرنة ، النظريات المستعملة في هذه الدراسة هي نظرية اجهاد القص الكلاسيكية للروافد ، نظرية اجهادات القص المتعلقة بالأسطح و نظرية اجهادات القص المتعلقة بالأسطح غير المحلية ، حيث في هذه النظريات معادلات الحركة تكتب باستخدام مبدأ أمطون .

كما يتم كتابة حقل الانتقال بنفس النموذج المستخدم من طرف Berrabah (2013) حيث يتكون من حقل الانتقال العرضي و حقل الانتقال المسطح و في الأخير نقدم الحلول التحليلية لانحناء و انثناء الروافد ذات المقياس النانو متري لكل نموذج اخذين بعين الاعتبار خصائص المواد الفيزيائية كعامل يونغ و معامل بواسون، و ذلك من أجل تجنب الالتواءات و التصدعات التي تطرأ على الروافد في الواقع المعاش.

الكلمات المفتاحية :

رافدة ذات سمك دقيق نانو متري

نظرية تشوه القص

الاجهادات المتعلقة بالأسطح

النظرية الكلاسيكية المحلية و كذلك غير المحلية

Liste des notations

E	Le module de Young
G	Le module de cisaillement
ν	Le coefficient de Poisson
μ	Le coefficient d'échelle
K	Le coefficient de correction de cisaillement de Timoshenko
h	L'épaisseur de la poutre suivant la direction de z
b	Longueur de la poutre suivant la direction de x
$\frac{L}{h}$	L'élancement de la poutre
$f(z)$	La fonction de gauchissement
$g(z)$	La fonction de cisaillement
u	Le déplacement axial
w	Le déplacement transversal
u_b	La composante de flexion
u_s	La composante de cisaillement
ϵ_x	Le déplacement selon la direction x
σ_x, σ_z	Les contraintes normales
σ_{xx}^s	La contrainte normale de surface
ϵ_x	La déformation normale
γ_{xz}	La déformation de cisaillement
τ_{xz}	La contrainte de cisaillement

τ_{xz}^s La contrainte de cisaillement de surface

τ^s La contrainte de surface résiduelle

μ^s, λ^s Les constantes de Lamé de surface

Q Effort de cisaillement

M_b, M_s Moments de flexion

EBTs : Théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) non classique

TBTs : Théorie de poutre de Timoshenko (TBT) non classique

RBTs : Théorie de poutre de Reddy (RBT) non classique

Dictionnaire :

1/ La théorie de poutre classique : les effets de surfaces et l'effet non locale sont nuls

$$(2\mu^s + \lambda^s = 0 \text{ et } \mu = 0).$$

2/ La théorie de poutre non classique : ou la théorie des effets de surface locale: ne néglige pas les effets de surface ($2\mu^s + \lambda^s \neq 0$) et l'effet non locale est nulle ($\mu = 0$).

3/ la Théorie de poutre non locale: ne néglige pas l'effet non locale ($\mu \neq 0$) et les effets de surface sont nuls ($2\mu^s + \lambda^s = 0$).

4/ la Théorie de poutre des effets de surface non locale : il existe les deux effets les effets de surface ($2\mu^s + \lambda^s \neq 0$) et l'effet non local ($\mu \neq 0$) c'est-à-dire on intègre les effets de surface dans la théorie non locale.

Sommaire

Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des notations	
Introduction générale	1

CHAPITRE I

Généralités sur les nanostructures

I.1. Introduction	4
I.2. Définition d'une nanostructure	5
I.3. Les différentes approches pour obtenir les nanostructures	5
I.4. Classification des nanostructures	7
I.4.1. les nanostructures de dimension 0	8
I.4.2. les nanostructures de dimension 1	9
I.4.3. les nanostructures de dimension 2	11
I.4.4. les nanostructures de dimension 3	12
I.5. Exemple d'application des matériaux nanostructures	14
I.5.1. Introduction	14
I.5.2. Présentation générale	16
I.5.2.1. Carbone	16
I.5.2.2. Graphite	16
I.5.2.3. Diamant	17
I.5.2.4. Carbone amorphe	19
I.5.2.5. Fullerènes	19
I.5.2.6. nanotubes de carbone	21

I.5.3. Structure des nanotubes de carbone	21
I.5.3.1. Les nanotubes monocouches	21
I.5.3.2. Nanotubes multi feuillets	27
I.5.4. Méthodes de fabrication des nanotubes de carbone	28
I.5.4.1. Synthèse par arc électrique	28
I.5.4.2. Synthèse par ablation laser	29
I.5.4.3. Synthèse par déposition de vapeur chimique (CVD)	30
I.6. Conclusion	31
Références Bibliographiques	32

CHAPITRE II

Théories des poutres

II.1. Introduction	38
II.2. Les différentes théories des poutres classiques	38
II.2.1. Théorie d'Euler-Bernoulli CBT	38
II.2.1.1. Introduction	38
II.2.1.2. Les équations des moments de flexion	39
II.2.2. Théorie de Premier Ordre (Théorie de Timoshenko) FSDBT	42
II.2.2.1. Introduction	42
II.2.2.2. Les équations des moments de flexion	43
II.2.3. Théorie d'Ordre Elevé HSDBT	45
II.2.3.1. Introduction	45
II.2.3.2. Les équations des moments de flexion	46

II.3. Théories des poutres non classiques (l'effet de surface locale)	49
II.3.1. Introduction	49
II.3.2. Le champ de déplacement	50
II.3.2.1. Théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli non classique EBTs	51
II.3.2.2. Théorie des poutres de Timoshenko non classique TBTs	54
II.3.2.3. Théorie des poutres d'Ordre Elevé non classique RBTs	57
II.3.3. Etude Analytique de flambement des nano-poutre pour différentes théories	59
II.3.3.1. Introduction	59
II.3.3.2. Formulations théoriques du problème	60
II.3.3.3. Le champ de déplacement	61
II.3.3.4. Les différents des équations	62
II.4. la Théorie d'élastique non locale	68
II.4.1. Introduction	68
II.4.2. Application de l'élasticité non locale sur les théories de poutre	70
II.4.2.1. Le champ de déplacement et les contraintes	70
II.4.2.2. Les équations du mouvement	72
II.4.3. la théorie des effets de surface non locale	75
II.4.3.1. Introduction	75
II.4.3.2. Application des effets de surface non locale sur les théories de poutre	76
II.4.3.2.1. Hypothèses de base	76
II.4.3.2.2. Les équations constitutives	77

II.5. Conclusion	81
Références Bibliographiques	82

CHAPITRE III

Validation des Résultats

III .1. Introduction	86
III .2. Les solutions analytiques de la théorie des effets de surface	86
III .2.1. Résultats numériques et discussion	89
III .2.2. Conclusion sur la théorie des effets de surface	97
III .3. Les solutions analytiques de la théorie non locale	98
III .3.1. Résultats numériques et discussion	100
III .3.2. Conclusion sur la théorie non locale	105
III .4. Les solutions analytiques de la théorie des effets de surface non locale	106
III .4.1. Résultats numériques et discussions	111
III .4.2. Conclusion sur les effets de surface non locale	119
Références Bibliographiques	123
Conclusions Générales	124

Liste des Figures

<u>Figure I.1</u> : L'échelle des dimensions	4
<u>Figure I.2</u> : Les approches «bottom-up» et «top-down»	6
<u>Figure I.3</u> : classification des nanostructures	7
<u>Figure I.4</u> : les différents types de 0D	9
<u>Figure I.5</u> : les différents types de 1D	10
<u>Figure I.6</u> : les différents types de 2D	11
<u>Figure I.7</u> : les différents types de 3D	12
<u>Figure I.8a</u> : représente microscope électronique en transmission	13
<u>Figure I.8b</u> : représente microscope électronique à balayage	13
<u>Figure I.9</u> : schéma du premier microsystème	14
<u>Figure I.10</u> : exemple d'un nano résonateur	15
<u>Figure I.11</u> : la structure de graphène	16
<u>Figure I.12</u> : la structure de graphite	17
<u>Figure I.13</u> : la structure de diamant	18
<u>Figure I.14</u> : les formes de carbone	19
<u>Figure I.15</u> : les structures de fullerène	20
<u>Figure I.16</u> : enroulement d'une feuille de graphite sur elle-même	21
<u>Figure I.17</u> : schéma de principe de l'enroulement d'une couche de graphène selon le vecteur Chiral	22
<u>Figure I.18</u> : (a) symétrie miroir:NT non chiral	23
(b) pas de symétrie miroir: NT chiral	23

<u>Figure I.19</u> : le nanotube est non chiral de type zigzag	23
<u>Figure I.20</u> : le nanotube est non chiral, de type armchaire (chaise)	24
<u>Figure I.21</u> : le nanotube est chiral	25
<u>Figure I.22</u> : les familles des nanotubes selon (n,m)	25
<u>Figure I.23</u> : représentation schématique d'un fagot de nanotubes monofeuillet	26
<u>Figure I.24</u> : représentation schématique de plusieurs feuilles de graphène pour nanotube multiparois	27
<u>Figure I.25</u> : schéma d'un appareillage à arc électrique	28
<u>Figure I.26</u> :schéma de l'appareillage d'ablation laser	29
<u>Figure I.27</u> :schéma de procédé de la synthèse de NTCs par CVD	30
<u>Figure II.1</u> : cinématique de la Théorie d'Euler Bernoulli	38
<u>Figure II.2</u> : cinématique de la Théorie de Timoshenko	42
<u>Figure II.3</u> : la contrainte de cisaillement transversale par rapport à l'épaisseur de la poutre	45
<u>Figure II.4</u> : cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé	46
<u>Figure II.5</u> : les coordonnées et la géométrie de la section droite d'une nano poutre	49
<u>Figure II.6</u> : en haut le schéma représente la poutre droit, en bas le schéma représente la section rectangulaire transversale avec système de coordonnées (x, z)	60
<u>Figure III.1</u> : variation de la charge critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$	94
<u>Figure III.2</u> :variation de la charge critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$	94
<u>Figure III.3</u> :variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$	95

Figure III.4 : variation de la charge critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$	95
Figure III.5 : comparaison entre les flexions pour les nano poutre en fonction du rapport $\frac{L}{h}$ avec les coefficients d'échelle μ différents	104
Figure III.6 : comparaison entre les charges critique de flambement pour les nano poutre en fonction du rapport $\frac{L}{h}$ avec les coefficients d'échelle μ différents	104
Figure III.7 : les coordonnées et la section longitudinale géométrique d'une nano poutre	106
Figure III.8 : les coordonnées et la géométrie de la section droite d'une nano poutre	106
Figure III.9a : la charge critique de flambement en fonction du rapport L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 0$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT	115
Figure III.9b : la charge critique de flambement en fonction du rapport L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 1$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT	115
Figure III.10a : la charge critique de flambement en fonction du rapport L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 0$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT	116
Figure III.10b: la charge critique de flambement en fonction du rapport L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 1$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT	116
Figure III.11 : Variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$ en utilisant le modèle de RBT.	118
Figure III.12 : Variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$ et $\mu = 1$ en utilisant le modèle de RBT	118

Figure III.13 : effet du paramètre non locale sur la charge critique en utilisant les modèles RBT et SBT avec les conditions $\tau^s = 1.7$ et $2\mu^s + \lambda^s = -3$ et le rapport de l'épaisseur $\frac{L}{h} = 10$ **120**

Figure III.14 : effet du paramètre non local sur la flexion pour le cas d'un charge uniforme en utilisant les modèles RBT et SBT avec les conditions $\tau^s = 1.7$ et $2\mu^s + \lambda^s = -3$ et le rapport de l'épaisseur $\frac{L}{h} = 10$ **120**

Liste des Tableaux

Tableau I.1 : les formes des fonctions **47**

Tableau III.1: Comparaison entre les flexions centrales maximales sous charge uniforme de nano poutre obtenus avec des solutions classiques et non classiques **90**

Tableau III.2: Comparaison entre les flexions centrales maximales sous charge ponctuelle de nano poutre obtenus avec des solutions classiques et non classiques **90**

Tableau III.3:représente les charges critiques de flambage de nano poutre au première mode. **92**

Tableau III.4: représente les charges critiques de flambage de nano poutre au deuxième mode. **92**

Tableau III.5:représente les charges critiques de flambage de nano poutre au troisième mode. **93**

Tableau III.6: représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge uniforme pour une nano poutre simplement appuyées. **100**

Tableau III.7:représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge ponctuelle pour une nano poutre simplement appuyées. **101**

Tableau III.8: Comparaison de la charge critique pour une nano poutre simplement appuyées où $n=1$ **101**

Tableau III.9: Comparaison de la charge critique pour une nano poutre simplement appuyées où $n=2$ **102**

Tableau III.10: Comparaison de la charge critique pour une nano poutre simplement appuyées où $n=3$ **102**

<u>Tableau III.11:</u> représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge uniforme en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle μ	111
<u>Tableau III.12:</u> représente les résultats numériques pour la flexion sous une charge ponctuelle en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle μ	112
<u>Tableau III.13:</u> Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=1$	112
<u>Tableau III.14:</u> Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=2$	113
<u>Tableau III.15:</u> Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=3$	113

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Un nanomatériau est un matériau possédant des propriétés particulières à cause de sa taille et sa structure nanométrique, actuellement l'étude des matériaux nanostructures font l'objet de nombreuses recherches, ils sont en plein développement et trouvent des applications nano technologiques diverses (peuvent être définies comme des procédés de fabrication de matériaux et de manipulation de structures à l'échelle du nanomètre c'est-à-dire de matériaux fonctionnels aux niveaux atomique et moléculaire) qui sont en général plus intéressantes que celles des matériaux massifs, aussi ces recherches permettent d'élaborer des nanomatériaux aux propriétés physico-chimiques nouvelles par exemple les réactivités chimiques, propriétés électrique, mécanique ou biologique, les matériaux utilisés pour la fabrication de telles structures tel que Si, C, Al, Ga, As, SiC, GaAs, d'autre part la compréhension du comportement mécanique des nanostructures est essentielle dans le développement de telles structures qui lui sera présenté plus tard.

Certains nanostructures comme les poutres et les plaques à l'échelle atomique ou moléculaire ont été les composants clés du capteur et de l'actionneur dans les systèmes micro ou nano électromécaniques (NEMS) [Wang X., Ozkan C. S.] et [N.V. Lavrik, M.J.], Il y a de larges applications dans la surveillance de l'environnement, surveillance médical, [Stewart M. E.], comprendre le comportement mécanique de ces structures est donc important pour l'amélioration de leurs applications lors de la conception de tels systèmes.

Il est toujours difficile d'étudier la mécanique des nanostructures à l'aide de tests expérimentaux en raison des difficultés rencontrées à l'échelle nanométrique, donc, les méthodes théoriques telles que les simulations atomistiques, modèles informatiques multi-échelles et les théories de la mécanique des milieux continus sont souvent utilisées pour analyser les comportements des nanostructures.

Il a été trouvé que lorsque l'épaisseur de ces structures est près de la longueur interne, et la surface est près du volume [Miller R. E.1] et [Miller R. E.2], ils doivent être pris en compte ces effets lors de l'étude de leur comportement mécanique d'un tel système.

Pour étudier le comportement mécanique d'une telle structure la théorie élastique classique (la théorie locale qui dit : la contrainte dans un point est la fonction de la déformation dans ce même point) ne pourrait pas capturer les effets (l'analyse du flambement, de la flexion et de la vibration) à petite échelle dans les propriétés mécaniques. Certains comportements mécaniques comme les effets moléculaires provoquent un comportement intéressant lorsque les dimensions physiques des structures descendent à la taille nanométrique comme nous l'avons mentionné, l'effet de contrainte d'échelle nonlocal [A.C. Eringen,] est l'un des effets considérables que l'on peut facilement observer à l'échelle atomique où la théorie d'Eringen considère l'effet de taille en supposant que la contrainte en un point dépend de la contrainte à ce point ainsi que des déformations aux points voisins.

L'autre effet est l'effet de contrainte de surface [M. E. Gurtin and A. I. Murdoch,1] et [M. E. Gurtin and A. I. Murdoch,2] ont développé une théorie de l'élasticité de surface pour les matériaux isotropes pour des conditions environnementales différentes, de plus, en utilisant la théorie de l'élasticité non locale en conjonction avec les effets de surface qui a été expliqué par Lee et Chang [Lee H. L., Chang W. J.], Le travail est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre est l'étude bibliographique qui est constitué de quelques rappels importants sur les nanostructures : leur définition et leur composition, aussi nous avons pris un exemple d'étude sur les matériaux unidimensionnels 1D par exemple le nano tube de carbone, il a été découvert par le chercheur S.Iijima en 1990 [Iijima, S] a permis un nouveau monde à l'échelle nanométrique, vous pouvez également lire la recherche qui a été faite sur le flambage des nanotubes de carbone par [L.J.Sudak,] et [K. Amara,].

Au chapitre deux nous avons présenté la cinématique générale des solides : les différentes théories des poutres par la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT) et la théorie de poutre de Reddy (RBT). et les relations contrainte-déformation et le potentiel interne pour chaque théorie, les équations d'équilibre sont également présentées dans le chapitre, aussi nous avons touché la théorie des effets de surface (ce qui a été clairement indiqué et expliqué par [Dingreville, R., Qu, J.] et [Streitz, F. H.,]) et la théorie non local (ont utilisé par plusieurs auteurs pour l'étude de la flexion et le flambement des nano poutres comme [J.N. Reddy] et [Y.Y. Zhang, C.M. Wang, N.]) et ensuite, nous avons intégré les deux

théories ensemble, avec le champ de déplacement qui est écrit sur la même mode proposée par [Berrabah et al (2013),].

Le dernier chapitre, nous présentons et analysons la validation des résultats des différentes approches possibles pour résoudre les problèmes de comportement de flexion et de flambement des poutres nanométrique, a la fin nous avons terminé par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les nanostructures

I.1. introduction :

Dans l'échelle du nanomètre On trouve différentes définitions pour l'origine du mot nano, Le mot " nano " vient du mot grec "nanos ", ce qui signifie nain [Fang M,], en science le mot nano est utilisé pour exprimer le milliardième dans les unités de mesure: nanomètre, nanoseconde.

Le mots nanomètre est une unité nécessaire pour mesurer d'une grandeur physique :les dimensions les plus petites comme la longueur, le symbole de nanomètre du système international est le nm , c'est un sous-multiple du mètre ($1nm = 10^{-9}m$,soit approximativement 1/50 000 de l'épaisseur d'un cheveu humain) la même différence de taille si on compare la planète « terre » à une balle de tennis Figure I.1 , le nanomètre est utilisé par exemple pour modeler (exprimer) des dimensions à l'échelle atomique aussi pour exprimer les longueurs d'onde. Aux échelles des mondes macro ou des monde micro Il y a beaucoup de phénomènes physiques sont négligeables comme les interactions atomiques qui résulter la force de Van Der Waals [van_der_Waals], les effets de surface qui donner les différentes contraintes de surface, Ce que nous mentionnerons plus tard

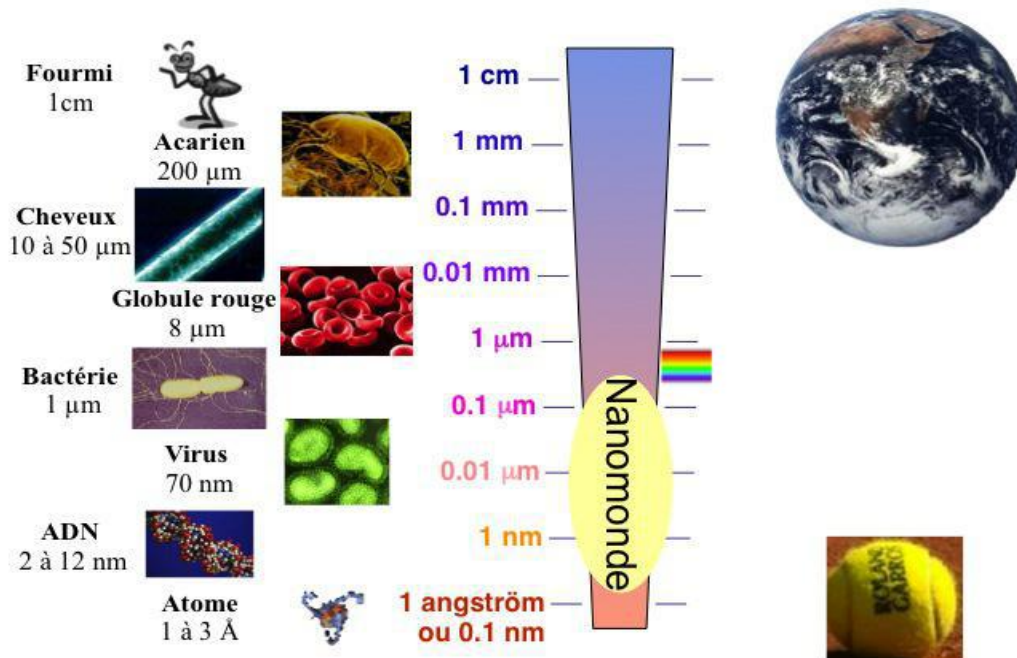


Figure I.1 : [M. Alain2008] L'échelle des dimensions

I.2. Définition d'une nanostructure :

les matériaux nanostructures constituent le monde de développement et de recherche, ils sont constitués des particules (particule est un fragment de matière possédant des contours physiques bien définis) sous forme d'agrégat (est une particule constituée de particules fortement liées) ou sous forme d'agglomérat (agglomérat est un amas de particules ou d'agrégats faiblement liés) dont permettant la structure des matériaux au niveau atomique, moléculaire ou supramoléculaire dont leurs taille caractéristique est à l'échelle nanométrique ou qui possède une structure interne ou de surface (au moins une dimension externe) à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 *nm*, la forme de particules comme tubes, fibres de constituants structurels, à cette échelle ce monde est apporté une nouvelle fonctionnalité ou de modifier des propriétés mécaniques, optiques, magnétiques ou thermiques dans une matrice organique ou minérale. les nanostructures sont utilisés soit en tant que tels de développer des matériaux soit en vue pour transporter des médicaments, comme catalyseur.

I.3. Les différentes approches pour obtenir les nanostructures :

Les grandes philosophies pour fabriquer des objets de taille nanométrique sont deux approches différentes, la première méthode dite : ascendante en anglais bottom-up de la deuxième méthode dite : descendante en anglais top-down, les croissances de ces méthodes sont fondées sur la transformation de la matière d'un état gazeux, liquide ou solide.

Les techniques de fabrication actuelles (bottom-up ou top-down) permettant l'élaboration de nanomatériaux ont classés en 3 grandes catégories :

- élaboration par voie chimique (comme les réactions en phase vapeur),
- élaboration par voie physique (comme l'arc électrique),
- élaboration par méthode mécanique (comme broyer des poudres micrométriques)

Selon des principes physique ou chimique comme la transformation des phases ou réaction chimique.

La première philosophie est une approche dite ascendante (bottom-up « de bas en haut ») les premiers groupe qui baser sur cette approche sont les groupes de Gleiter [H. Gleiter.], l'approche ascendante consiste donc à assembler entre eux des petits éléments (atome par atome ou molécule par molécule) afin de former un nouvel élément plus grand.

Les différents procédés de fabrications dans cette approche comme : l'ablation au laser, la décharge électrique, l'évaporation/condensation, l'irradiation ionique ou électronique, desmicro-ondes.

La seconde approche est une technique dite descendante (top-down« de haut en bas ») qui implique la diminution de la taille des objets par fractionnement des matériaux de plus grande taille, les domaines de la microélectronique et des microsystèmes sont appliquées cette approche.la plus part du temps le top-down utilise des procédés par exemple par broyage à haute énergie .ou la nanolithographie qui utilise la lumière des rayonnements de longueur d'onde plus courte comme les ultraviolets UV ou les rayons X les motifs qui résulter de taille de l'ordre de 10 à 20 nm, on peut utiliser la lumière visible mais permet de graver des motifs de100 nm

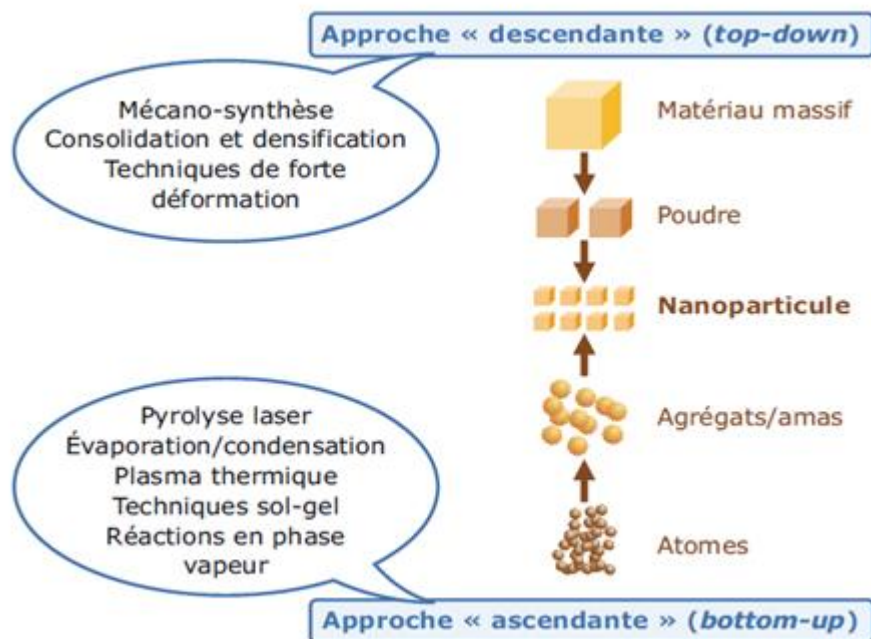


Figure I.2 : [Fongang 2009] Les approches «bottom-up» ET «top-down»

I.4. Classification des nanostructures:

La première idée de classification des NSM a été donnée par Gleiter en 1995[Gleiter1995], mais n'a pas été prise en compte : des structures telles que les fullerènes, les nanotubes, donc, Pokropivny et Skorokhod [Pokropivny et Skorokhod] ont modifiées un schéma de classification pour NSMs, nous avons classé les NSMs sur la base de Pokropivny et al. Donc il existe quatre grandes classes des matériaux nanostructure selon leur dimensionnalité :

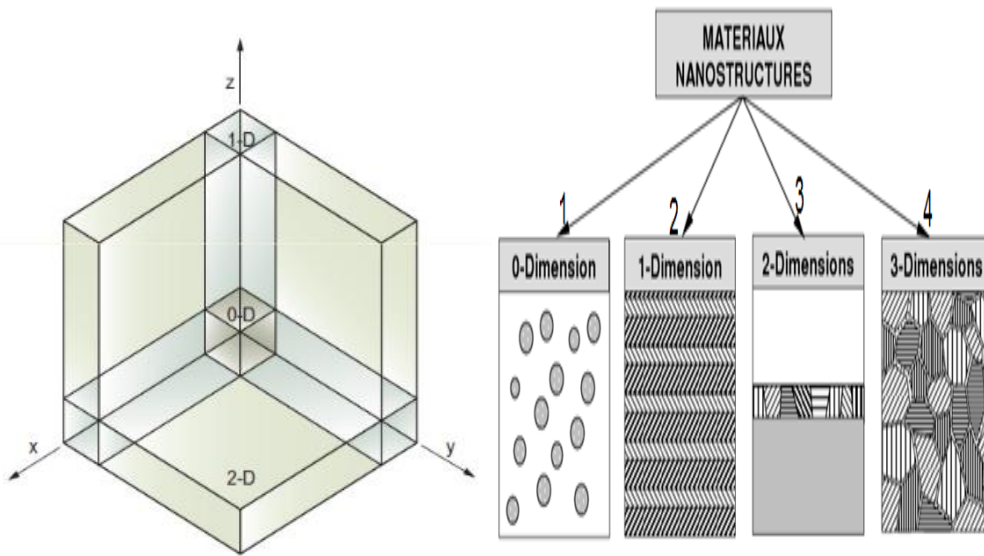


Figure I.3 : à gauche [materialstoday] : représente l'espace de trois dimensions qui montre les relations entre 0D, 1D, 2D, 3D, adroite [R.W Siegel.] : classification des nanostructures selon leur dimensionnalité qui représente des quatre types de matériaux nanostructure (1) les amas d'atomes (2) les couches multiples (3) les couches simples nanostructures et (4) les matériaux nanocristallines.

- première classe, les matériaux de dimension 0 (NSMs de 0D): toutes les dimensions sont mesurées à l'échelle nanométrique .c'est-à-dire pas de dimensions ou zéro dimension 0-D, qui sont constituées de grains nanométriques dispersés, aléatoire ou organisée (les agrégats d'atomes ou nanoparticules de dimension inférieures à la centaine de nanomètres, ils peuvent être composées moins de 10^4 atomes ou molécules), on peut citer les exemples pour les matériaux de zéro dimension. voir Figure I.3 : les nanocristaux semiconducteurs (les boîtes quantiques), les nanoparticules métalliques, céramiques.

Les matériaux de zéro dimension peuvent :

- ✓ être amorphe ou cristallin.
- ✓ être monocristallin ou polycristallin.
- ✓ Existe individuellement ou dans une matrice.
- ✓ Être métallique, céramique ou polymère.

➤ **les nanocristaux semi-conducteurs :**

Les nanocristaux semi-conducteurs ou appelés quantum dots ont la forme de grains nanométriques pour des dimensions inférieures à 10 nm qui émettent la lumière dont la couleur varie en fonction de leurs tailles, par exemple, elles sont préparées pour utiliser dans des cellules vivantes comme marqueurs luminescents de systèmes biologiques ou être utilisés comme marqueurs des produits commerciaux et d'objets précieux.

➤ **les nanoparticules:**

Les nanoparticules sont des éléments (un assemblage d'atomes) ayant une taille nanométrique, entre 1 et 100 nanomètres, Il existe des nanoparticules de n'importe quel matériaux : carbones, céramiques, métaux, polymères , à cause de leur petite taille les nanoparticules peuvent représenter un risque pour la santé , elles sont utilisées dans de nombreux domaines : électronique, chimie, automobile, pharmacie, cosmétique, optique, etc.

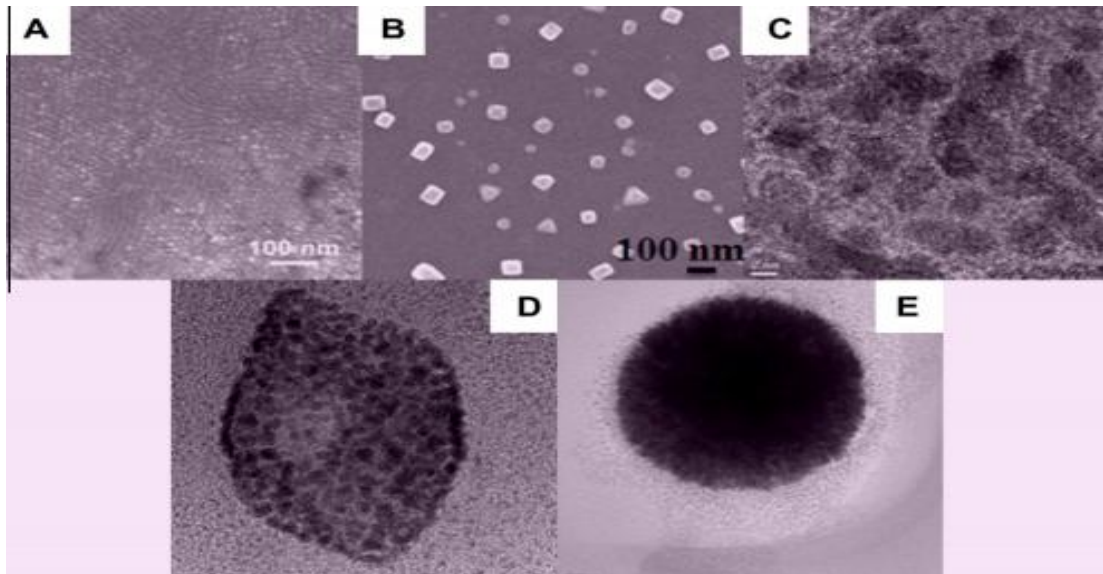


Figure I.4 : image de différents types de 0D qui est synthétisé par plusieurs groupes de recherche, en utilisant Microscope électronique à balayage (SEM) et Microscopie électronique à transmission(TEM). (A) Points quantiques, (B) réseaux de nanoparticules (nanoparticles arrays), (C) nanoparticules à noyau-enveloppe (core-shell nanoparticles), (d) cubes creux (hollow cubes), (E) nanosphères(nanospheres). [Kim YT], [Lee JY]

- deuxième classe les matériaux de dimension 1(NSMs de 1D): Une dimension qui est en dehors de l'échelle nanométrique, l'autre dimension dépassant significativement l'échelle nanométrique, Cela conduit à des nanomatériaux en forme d'aiguilles, cette classe de nanomatériaux comprennent de nanofils ou de nanotubes leurs diamètres sont de quelques dizaines de nanomètres, généralement, sont utilisées dans optique, chimiques.

les autres exemples de classe (1D) on trouve, figure(4) les nanorods, les nanorubans.

Les nanomatériaux de dimension 1 peuvent être :

- ✓ Monocristallin ou polycristallin.
- ✓ Amorphe ou cristallin.
- ✓ Métallique, céramique ou polymère.

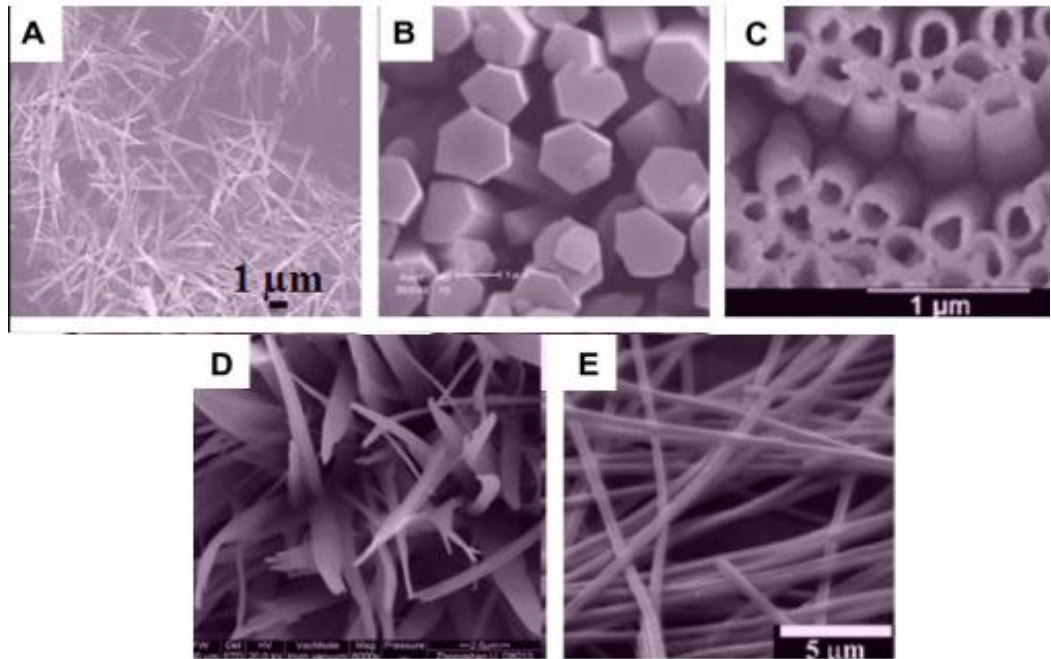


Figure I.5 : image de différents types de 1D qui est synthétisé par plusieurs groupes de recherche, en utilisant Microscope électronique à balayage (SEM) et Microscopie électronique à transmission (TEM), (A) Nanofils, (B) nanorods [Okada T], (C) nanotubes [Xia H], (D) nanobelts [Li GR], (E) nanorubans [Park JM]

➤ **Nanofils :**

Les nanofils sont des structures unidimensionnelles (NSMs de 1D) dont le diamètre est exprimé en nanomètre (quelque dizaine de nanomètre) mais d'une longueur quelconque, par exemple quelques millimètres pour le silicium (Si), la découverte des nanofils s'est faite en 1964 par Wagner et Ellis [Wagner et Ellis] par dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition) de silicium, peuvent être de type métallique, semi-conducteur, isolant, et leur structure typiquement est cristalline. Le nanofils a possédé une petite longueur et un grand diamètre. Cela devient une forme le nanorod.

➤ **Un nanorod (en anglais nanorod):**

Est typiquement une nanostructure 1D cristalline avec une longueur totale comparable à sa largeur et les deux dimensions sont inférieure de 100nm , Comme leur nom l'indique, peut être appelé avec le terme "nanocristal" ou, plus explicitement: "nanocristaux", les nanorods sont complètement linéaires en morphologie, les nanorods sont capables de s'empiler sur l'autre pour donner une 2D intéressante.

- troisième classe les matériaux de dimension 2 (NSMs de 2D): deux dimensions ne sont pas confinées à l'échelle nanométrique, les deux autres dimensions dépassant significativement l'échelle nanométrique, sont élaborés en forme de couche mince où la dimension nanométrique caractérise l'épaisseur, sont intéressants pour le développement de nouvelles applications dans les capteurs ;photo catalyseurs ;nano réacteurs ;nano conteneurs et modèles pour les structures 2D d'autres matériaux[Pradhan D] ,les nanomatériaux bidimensionnels comprennent figure(5) nano plaques, nanosheets , nanowalls .

Les Nanomatériaux de dimension 2 peuvent être:

- Amorphe ou cristallin,
- Composé de diverses compositions chimiques,
- Utilisé comme une seule couche ou comme des structures multicouches,
- Déposé sur un substrat (substrat un matériau massif),
- Métallique, céramique ou polymère.

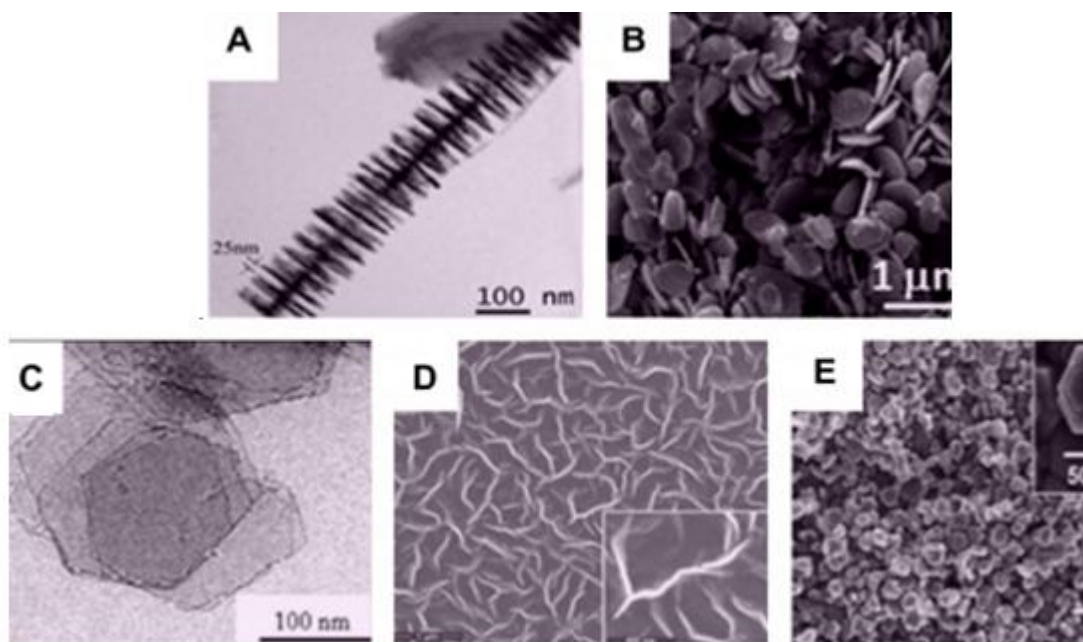


Figure I.6 : image de différents types de 2D qui est synthétisé par plusieurs groupes de recherche, en utilisant Microscope électronique à balayage (SEM) et Microscopie électronique à transmission (TEM), (A) des structures ramifiées [Nayak BB], (B) des nanoplaques [Mann AKP], (C) nanosheets [Siril PF], (D) nanowalls [Vizireanu S], (E) nanodisques [Jung SH]

- quatrième classe les nanostructures de dimension 3 (NSMs de 3D) : sont des matériaux qui ne sont confinés à l'échelle nanométrique dans aucune dimension, donc ces matériaux sont caractérisés par trois dimensions, ces dimensions sont supérieures à 100 nm, qui se présentent sous une forme compacte comme dans les céramiques et sont composés de grains mono ou polyphasés, Il est bien connu que les comportements NSMs dépendent sur les tailles, les formes et les dimensions , qui sont donc les facteurs clés de leur performance et de leurs applications, Il y a donc des nombreux NSM 3D qui ont été synthétisés au cours des dernières années et ont attiré un intérêt de recherche considérables [Hu CC] ;[Kamarudin SK], cette classe de nanomatériaux comprennent figure7 : tels que les nanoballs (structures dendritiques) ; nanocoils ; nanocônes ; nanopillers et nanoflowers.

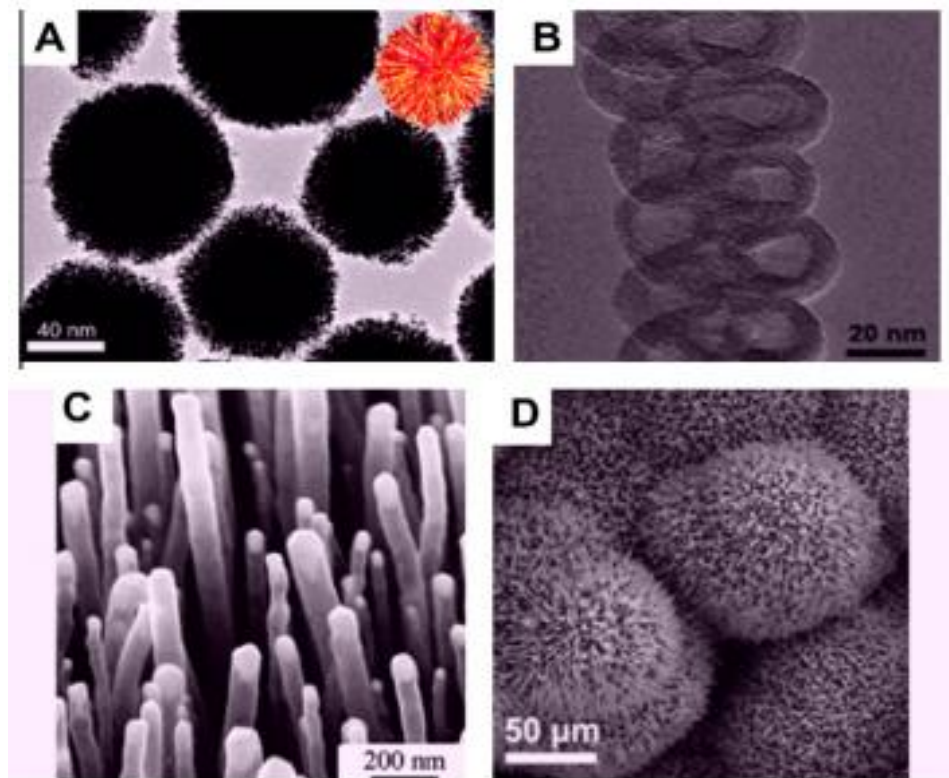


Figure I.7 : image de différents types de 3D qui est synthétisé par plusieurs groupes de recherche, en utilisant Microscope électronique à balayage (SEM) et Microscopie électronique à transmission (TEM), (A) Nanoballs (dendritic structures) [Wang L,], (B) nanocoils [Wang JN,], (C) nanopillars [Liu J,], and (D) nanoflowers [Lei W,]

Note :Un microscope électronique est un type de microscope utilise des faisceaux d'électrons et des lentilles électromagnétiques pour la formation des images très agrandies, la résolution (exprime la capacité d'un système optique d'observation) des microscopes électroniques est beaucoup plus grande que le microscope optique, les microscopes électroniques les plus connus sont Figure I.8 : 1)le microscope électronique en transmission MET, notée SEM: Scanning Electron Microscope et 2)Le microscope électronique à balayage MEB, notée SEM Scanning Electron Microscope.



Figure I.8a : représente microscope électronique en transmission MET [MET-MEB]



Figure I.8b : représente microscope électronique à balayage MEB [MET-MEB]

I.5. Exemple d'application des matériaux nanostructures

❖ Les nanotubes de carbone :

I.5.1. Introduction :

Les microsystemes ou MEMS, de l'anglais Micro Electromechanical Systems, sont des dispositifs dont on a réduit les dimensions à l'échelle micrométrique, Ils représentent un assemblage des éléments mécaniques(des parties non électroniques comme par exemple un capteur ou un actionneur) et de l'électronique(c'est-à-dire des éléments mécaniques utilisant l'électricité comme source d'énergie) sur un même composant à faibles dimensions, généralement, les microsystemes intègrent des éléments mécaniques couplés à des éléments électroniques, par exemple, le premier MEMS en 1967 schématisé dans la Figure I.9 : qui représente un transistor MOS à grille résonante (1967) [H. C. Nathanson] ,leurs caractéristiques des dimensions de ces dispositifs(la réduction des échelles en volume et en masse), permettent de limiter les encombrements et de multiplier les fonctionnalités sur un même substrat [L. A. Pinnaduwege] qui joue sur des phénomènes électromagnétiques, thermiques ou encore fluidiques.

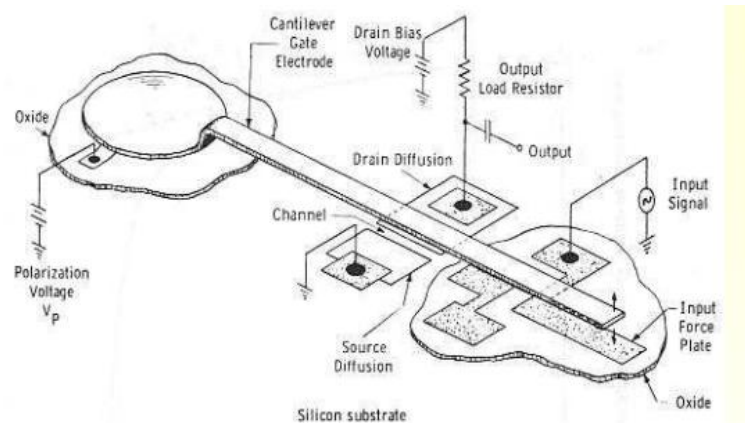


Figure I.9 : Schéma du premier microsysteme [H. C. Nathanson]

Depuis les années 90 ont connu l'émergence des dispositifs de taille sous micronique et connus sous le nom de l'anglais Nano Electro Mechanical Systems ou les nanosystèmes NEMS sont la continuité logique des MEMS où elles ont au moins une des dimensions qui est inférieure au micromètre, la transition du micro au nano présente également de nombreux avantages, l'un des premiers avantages des nanostructures est le gain d'encombrement des commutateurs à base de nanotubes de carbone [T. Rueckes], des NEMS permettent de gagner notamment en miniaturisation, aussi pour l'étude de phénomènes quantiques. En effet, le fait de réduire les tailles des structures mécaniques à l'échelle nanométrique les NEMS en réduisant les coûts de production.

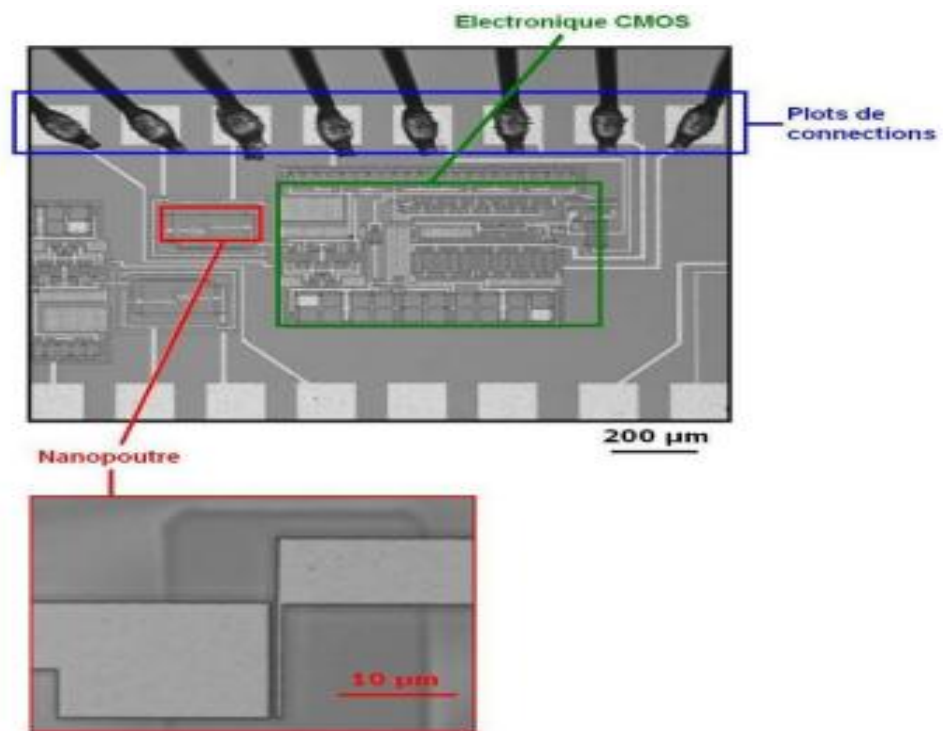


Figure I.10 : Exemple d'un nanorésonateur (nanopoutre) intégré avec son électronique [J. Arcamone].

I.5.2. Présentation générale

a-Carbone :

Le nom carbone vient du latin carbo « charbon » est l'élément chimique fondamental de la vie , de symbole C , et est un atome capable de lier d'une manière variée entre un grand nombre d'atomes différents , il existe dans l'atmosphère sous forme comme CO_2 , CO , CH_4 , Il possède trois isotopes naturels : ^{12}C , ^{13}C et ^{14}C , est le sixième élément du tableau périodique. Il constitue environ 0,02 % [F. Barthélémy]de la lithosphère et son cortège électronique a six électrons comme suivent : $(1s^2 2s^2 2p^2)$ Il possède 4 électrons sur sa couche de valence(le carbone est un non-métal) qui forme quatre liaisons covalentes de type σ (première liaison avec un atome) ou de type π .

Le carbone existe aussi sous forme cristallines (sa forme pure) les diamants , les graphites et sous forme amorphe, le carbone mal organisés avec le temps ,ils ont découvert des nouvelles formes du carbone, sont la famille des fullerènes , les nanotubes multicouche ainsi que les nanotubes monocouche.

b- Le graphite :

Se trouve principalement dans les sédiments, mais il peut se former à partir aussi de charbon organique et du magma. Il est principalement utilisé pour fabriquer des mines de crayons.

Le graphite cristallise sous forme de feuillets composés d'atomes de carbone organisés selon une symétrie hexagonale dans un système planaire , nommés graphènes Figure I.11 (Le graphène est un feuillet hexagonal d'atomes de carbone à deux dimensions, les graphènes sont tous parallèles) a été découvert expérimentalement en 2004 [Novoselov],sont entassés les uns sur les autres à approximativement 0.34nm les uns des autres , les liaisons des atomes entre les plans sont faibles.

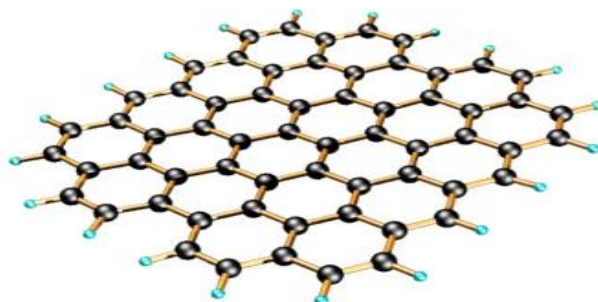


Figure I.11 : [Mustapha, 2011] le graphène

La forme cristalline plus stable est le graphite hexagonal à température et à pressions ordinaires, les atomes de carbone sont situés aux sommets des hexagones, Chaque atome est relié à trois atomes voisins par des liaisons faisant entre elles des angles de 120° , en état d'hybridation sp^2 , les liaisons entre les atomes sont fortes dans un même plan, la longueur de la liaison C-C étant de 0.142 nm.

L'autre forme cristalline possible est le graphite rhomboédrique Figure I.12 : (Les graphènes qui glissent les uns sur les autres), phase métastable du graphite hexagonal.

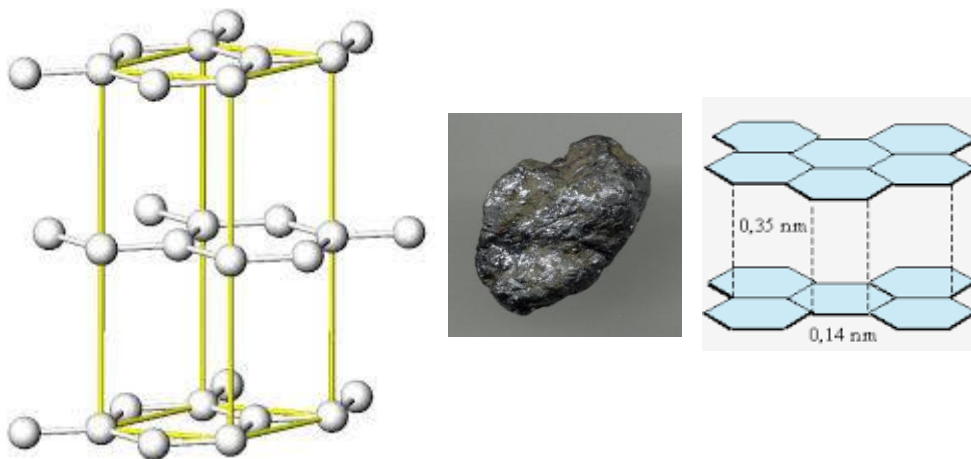


Figure I.12 : [Mustapha, 2011] structure de graphite

c- Le diamant :

Se forme à 160km sous terre à une température (3550°C) et une pression élevées, est principalement utilisé pour des opérations précises comme la chirurgie.

Le diamant est le matériau de dureté la plus élevée [Structure.g.d] (selon l'échelle de Mohs.), un bon isolant (l'énergie du gap $=5.5\text{eV}$ [J. Robertson]) électrique et conducteur thermique tandis que le graphite est friable, conducteur électrique (l'énergie du gap $=0\text{ eV}$ [J. Robertson]) et thermique [Structure.g.d], nous observons que le diamant cristallise dans le système cristallin cubique (sa structure cristalline est cubique à face centrée Il comporte 8 atomes par maille conventionnelle), avec un paramètre de maille de (0.356nm).

Les atomes dans le diamant sont reliés de manière tétraédrique , chaque atome à quatre autres atomes de carbone en état d'hybridation sp^3 , Les liaisons atomiques du diamant sont très courtes , cela explique sa très grande dureté ,où la distance entre les atomes C-C est de (0.136nm)

La structure de type diamant compte donc huit atomes par maille, comme suite :

- 8 atomes aux coins, soit au total $(1/8) \times 8 = 1$ atome pour la maille.
- 6 atomes au centre des 6 faces, soit au total $(1/2) \times 6 = 3$ atomes pour la maille .
- 4 atomes à l'intérieur du cube, soit au total 1×4 atomes pour la maille= 4

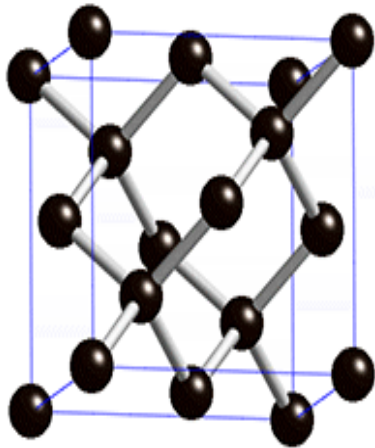


Figure I.13 : [Mustapha, 2011] structure du diamant

d-Carbone amorphe:

Des formes de carbone amorphe peuvent exister et n'a pas de dureté, le carbone ne possède pas de structure cristalline, il existe sous une très grande variété de structures, cristallines ou désordonnées [J. Robertson], contrairement au graphite et au diamant.

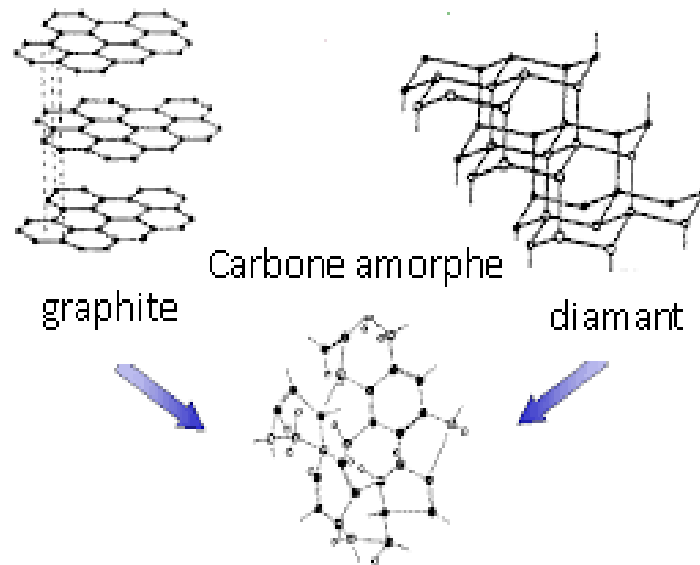


Figure I.14 : [Mustapha, 2011] les formes de carbone

Ces atomes sont assemblés sans ordre précis. d'atomes de carbone présentant des états d'hybridation sp^2 et sp^3 , C'est notamment le cas du carbone amorphe , il est rare, souvent appelé DLC obtenus sous forme de couches minces par les technologies de dépôt sous vide.

d-Fullerènes :

Les fullerènes sont la troisième forme connue du carbone après le graphite et le diamant ,et également point de départ pour la construction de nouvelles nanostructures carbonées, la famille des fullerènes, très abondantes à la surface de la terre et dans l'univers , ont été découverts en 1985 la première fois par Smalley, Curl et Kroto (pour cette découverte, ils ont reçu le Prix Nobel de chimie 1996[Fullerène- C60], Harold Kroto de l'université de sussex , Robert Curl et Richard Smalley de l'université de Rice a Houston), Ainsi s'est ouvert un nouveau champ de recherche.

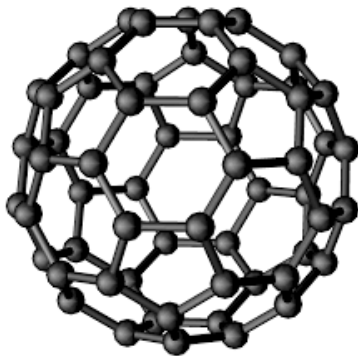
Les fullerènes comportant un nombre déterminé d'atomes de carbone, chaque atome est relié à trois atomes voisins sont similaires au graphite (comportant un nombre déterminé d'atomes de carbone), qui est un plan de graphite refermé sur lui-même comme une cage. Cette molécule, constituée de 60 atomes de carbone.

la molécule C₆₀ est le premier fullerène découvert et est le plus commun, a une forme sphérique, il se compose de 12 pentagones et de 20 hexagones. Chaque sommet correspondant à un atome de carbone, le fullerène le plus petit est le C₂₀

12 pentagones (5 sommets)+ 20 hexagones(6 sommets)=C₆₀, dans chaque sommet il y a un atome

$$12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 60 + 120 = 180$$

chaque atome est relié à trois atomes voisins = $180/3 = 60$ atomes



Fullerène C₆₀



Fullerène C₂₀

Figure I.15 : [Mustapha, 2011] les structures de fullerène

e-Les nanotubes de carbone :

Les nanotubes de carbone, découverts en 1991 par le chercheur japonais Sumio Iijima, sont le fer de lance des nanotechnologies [Charlotte], peut être décrit comme un plan d'atomes de carbone (graphène) enroulé sur lui-même pour former un petit cylindre (figure), le diamètre de nanotubes de carbone est de l'ordre du nanomètre et sa longueur ne dépasse pas quelques micromètres et sa forme est tubulaire .

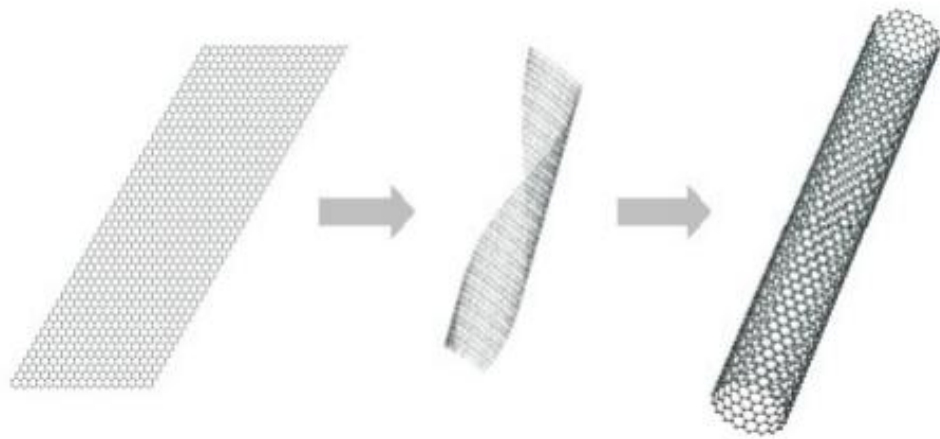


Figure I.16 : [Charlotte] enroulement d'une feuille de graphite sur elle-même

I.5.3. Structure des nanotubes de carbone

I.5.3.1. Les nanotubes monocouches (ou monoparois):

Le nanotube de carbone monocouche ou monofeuillet (SingleWall NanoTubes, SWNT) ont été découverts par Béthune [Bethune D.S.] et Iijima [Iijima S.] en 1993, caractérisé par un feuillet de graphène enroulé sur lui-même, de manière à former un cylindre unique, les atomes de carbone restent dans un état d'hybridation sp^2 . nous observons, la feuille de graphène possède deux types de bords (armchair et zigzag).

cette enroulement sur lui-même permet de caractériser les nanotubes, les types d'enroulement on peut décrire avec les vecteurs de chiralité \vec{a} , \vec{b} . (Figure I.17)

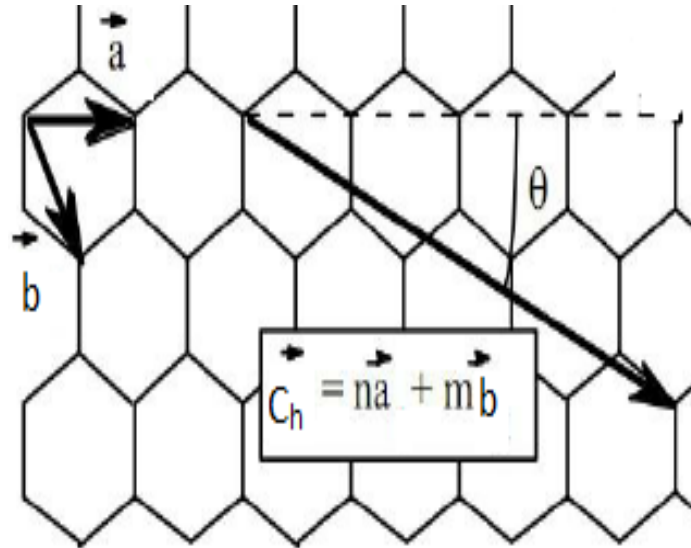


Figure I.17 : [Z. Raslan2009] Schéma de principe de l'enroulement d'une couche de graphène selon le vecteur chiral

On définit le vecteur de chiralité (ou vecteur d'enroulement), selon la relation suivante :

$$\vec{C}_h = n\vec{a} + m\vec{b} = (n, m)$$

n, m : sont les indices de chiralité (n et m entier), Ce couple (n, m) sont caractérisés la structure du nanotube Figure I.18 les nanotubes chiraux et les nanotubes non chiraux (zigzag, armchair).

\vec{a}, \vec{b} : les vecteurs de base.

θ : L'angle entre \vec{C}_h et le vecteurs de base \vec{a} est appelé angle chiral, Il existe de nombreuses possibilités pour enrouler sur lui-même le feuillet de graphène

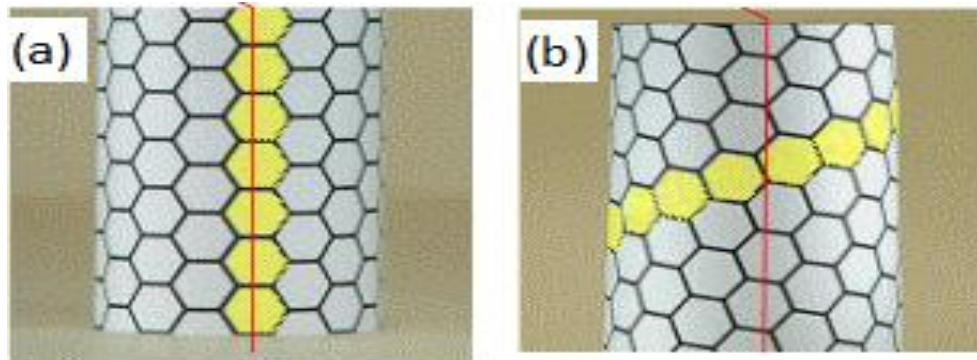


Figure I.18 : [Pascale] (a) Symétrie miroir:NT non chiral (b) Pas de symétrie miroir: NT chiral

Va définir la structure et les propriétés du nanotube :

- $\theta = 0^\circ$, ($n=0$ ou $m=0$) : replions la feuille de graphène en rouleau et raccordons ses deux bords armchair de manière à former un tube : on obtient un nanotube zigzag, faisons le tour dans un plan perpendiculaire à l'axe 1 du graphène - la feuille 1-, où le bord long est le bord armchair (nous proposons : l'axe 1 du graphène est une ligne parallèlement au bord armchair). Les hexagones décrivent des cercles perpendiculaires à l'axe du tube.

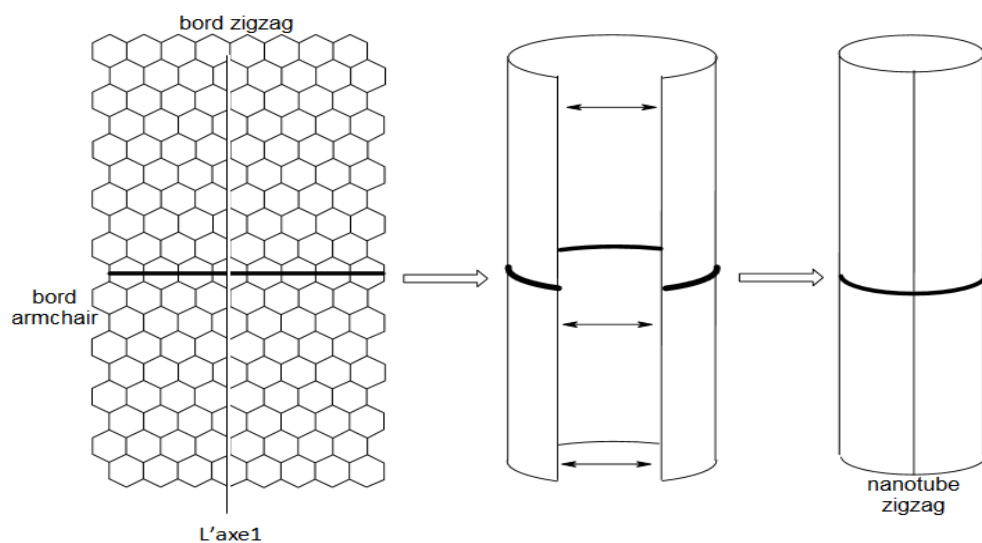


Figure I.19 : [Sébastien 2009] le nanotube est non chiral, de type zigzag

- $\theta = 30^\circ$: $n=m$ donc nous avons un nanotube armchair : replions la feuille de graphène en rouleau et raccordons ses deux bords zigzag de manière à former un tube : on obtient un nanotube armchair, faisons le tour dans un plan perpendiculaire à l'axe 2 du graphène - la feuille 2 - où le bord long est le bord zigzag (nous proposons : l'axe 2 du graphène est une ligne parallèle au bord zigzag).

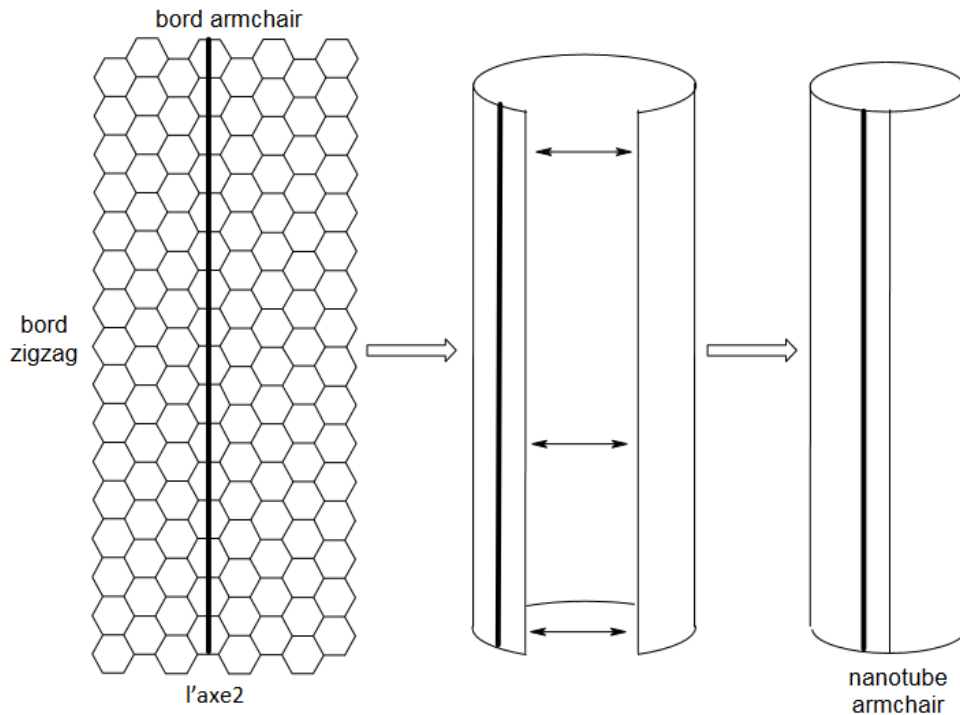


Figure I.20 : [Sébastien 2009] le nanotube est non chiral, de type armchair (chaise)

- $0 < \theta < 30^\circ$: nanotube chiral : le glissement d'un bord du feuillet par rapport à l'autre autour de l'axe du nanotube de manière hélicoïdale Figure I.21 : on peut dire, une translation d'un bord du feuillet de graphène par rapport à l'autre, parallèlement à l'axe du tube, avant de raccorder les bords pour former le tube, Un nanotube chiral est alors obtenu

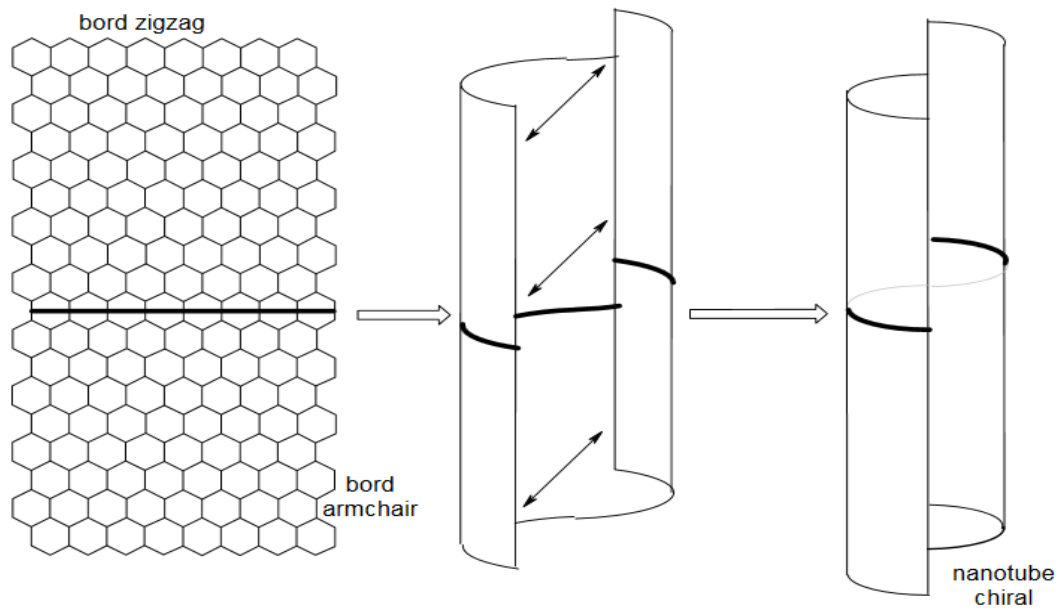


Figure I.21 : [Sébastien 2009] le nanotube est chiral

Les nanotubes sont classés par familles en fonction des indices (n,m) Figure I.17 . les nanotubes $(n,0)$, appelés zigzag et les nanotubes (n,n) , appelés armchairs, les nanotubes (n,m) avec $n \neq m \neq 0$ constitue la famille des nanotubes chiraux.

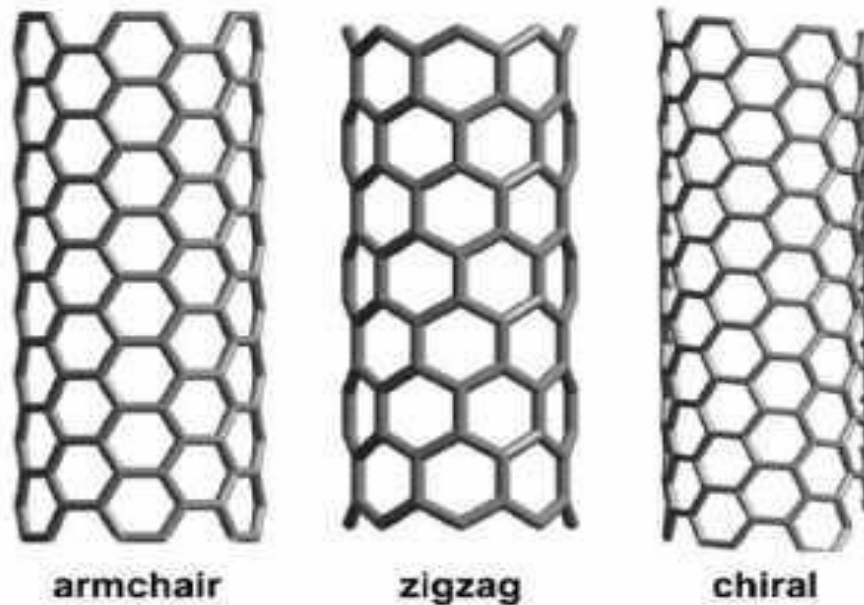


Figure I.22 : [Z. Raslan2009] les familles des nanotubes selon (n,m)

Annexe sur le nano tube monofeuillet:

Les fagots :

Les tubes monofeuillet se regroupent en faisceaux de nanotubes appelés fagots, généralement, Le nombre de tubes dans un fagot est d'une vingtaine à une centaine de tubes [C. Journet,] [A. Thess,], les nanotubes voisins ont le même diamètre comme il est représenté sur la figure, mais d'hélicités différentes. on peut calculer « a » (voir la Figure I.23a) dans un échantillon synthétisé par ablation laser [A. Thess,]

a : La distance, centre à centre, entre deux tubes est égale à deux fois le rayon R (l'espace inter-tubes), $a = 2R + 3.2\text{Å}$

$$a \approx 17\text{Å}$$

$a = 2R$, pour $R = 7\text{Å}$, la distance entre deux tubes = 3.2Å

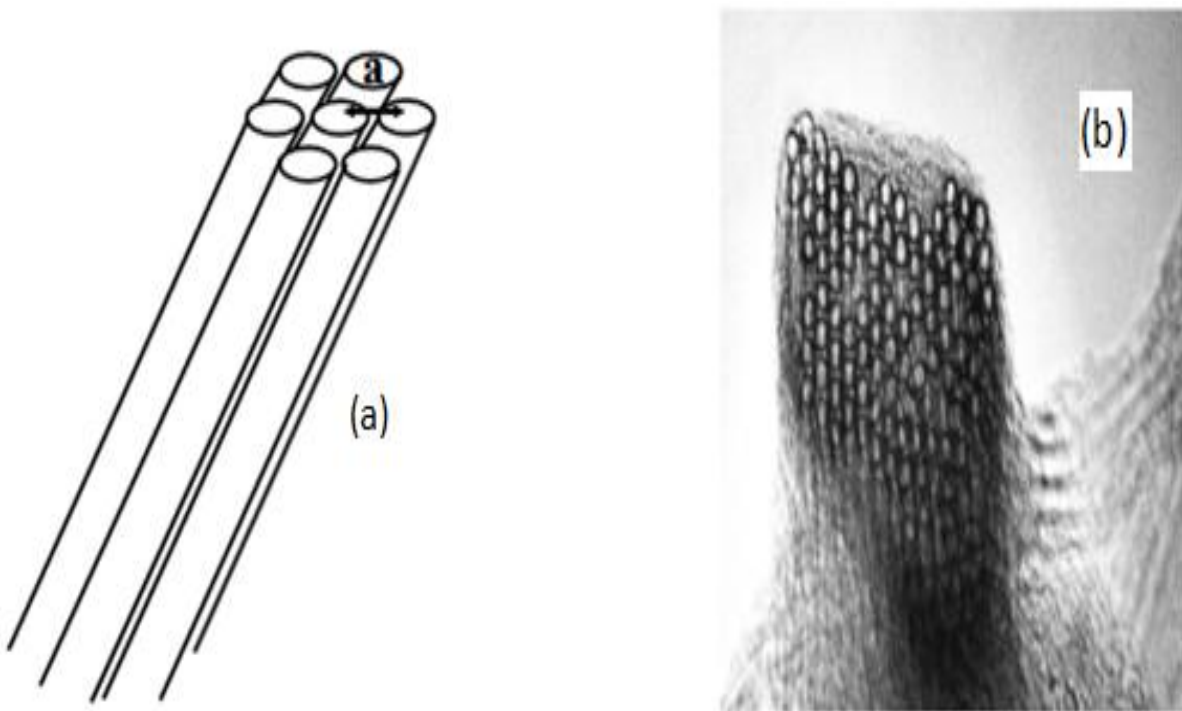


Figure I.23 : (a) : représentation schématique d'un fagot de nanotubes monofeuillet, (b) les fagots de nanotubes monofeuillet en coupe transversale par microscopie électronique à transmission (MET) [A. Thess,]

I.5.3.2. Nanotubes multi feuillets (ou multi parois) :

1991 Découverte des nanotubes multicouches [S. Iijima,1991], (en anglais, Multi Walled Carbon Nanotubes ou MWCNT) ,Ils ont constitués de plusieurs parois graphitiques , On peut dire nanotube de carbone constitué de plusieurs feuillets d'atomes enroulés sur eux-mêmes pour former des cylindres concentriques, où la distance inter paroi bien définie, égale à 0.335 nm.

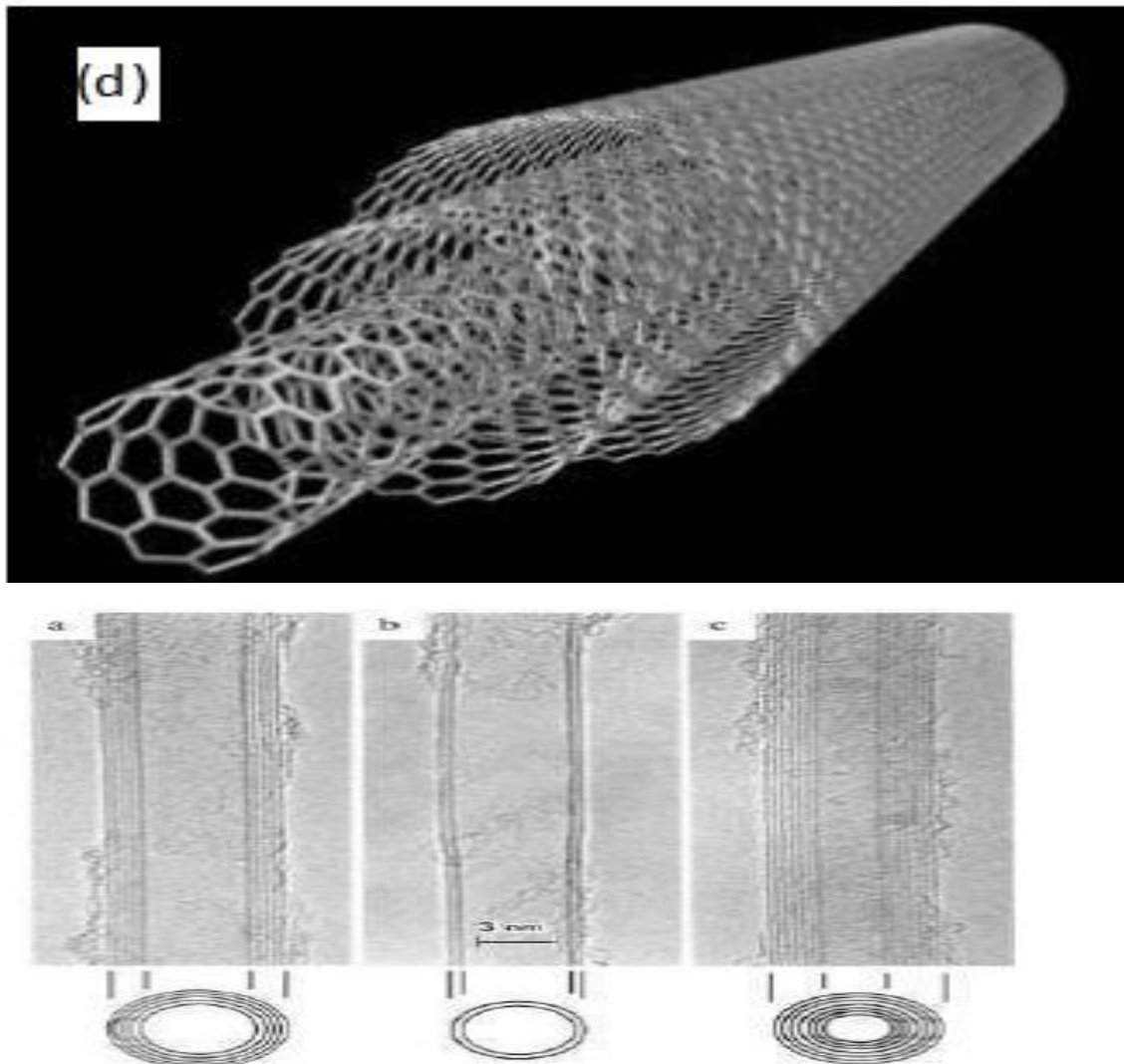


Figure I.24 :en coupe transversale par microscopie électronique à transmission (MET) par Sumio Iijima en 1991[S. Iijima,1991], (a) :Tube composé de cinq feuilles graphitiques , diamètre 6.7nm ; (b) : Diamètre du tube à deux feuilles 5.5nm, (c) : Diamètre du tube de sept feuilles 6.5nm[S. Iijima,1991] (d) représentation schématique de plusieurs feuillets de graphène pour nanotube multiparois

I.5.4. Méthodes de fabrication des nanotubes de carbone :

Pour la fabrication des nanostructures de carbone telles que les fullerènes, les nanotubes mono- et multicouches les nanotubes mono- et multicouches, généralement, Il existe trois techniques différentes majeures pour la synthèse des nanotubes de carbone: la synthèse par arc électrique, par ablation laser et dépôt par un dépôt chimique en phase vapeur (CVD).

I.5.4.1. Synthèse par arc électrique:

La méthode d'arc électrique de carbone utilisée par Sumio Iijima (a été la première méthode employée pour produire des nanotubes de carbone multi-feuillet [S. Iijima,1993]), initialement développé pour la synthèse de fullerènes[W. Krätschmer], est la manière la plus commune .

Son principe est basé sur la création d'une décharge entre deux tiges de graphite Figure I.25, l'anode et la cathode sont séparées d'environ 1 mm, dans une enceinte remplie d'un gaz inerte (hélium ou argon) à basse pression (entre 50 et 700 mbar). le courant continu passant entre les électrodes de 50 à 100 A et le potentiel de 20 V à 30V.

L'avantage majeur de cette technique est qu'elle permet de préparer préférentiellement des NTCs simple paroi ou multi-parois.

Pour obtenir des NTCs simple paroi, l'anode peut être préalablement enrichie par un catalyseur métallique (Fe, Co, Ni, Y et le Mo), pour obtenir des NTCs multi-parois, il suffit d'utiliser deux électrodes de graphite vierges Figure I.25. Où l'anode se « consume » au cours du temps.

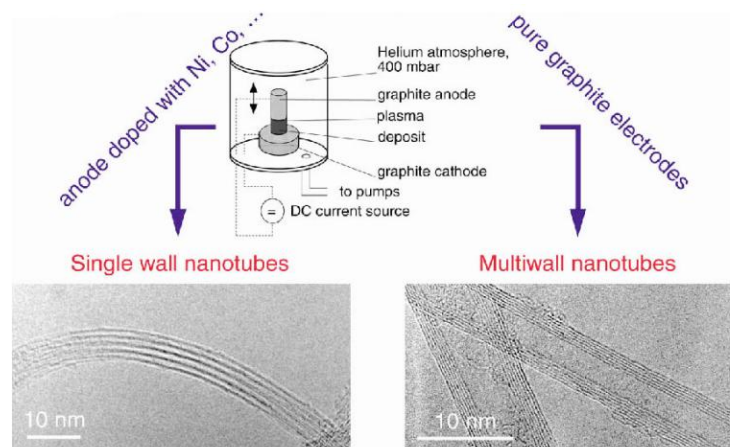


Figure I.25 :Schéma d'un appareillage à arc électrique[S.H. Jung,]

I.5.4.2. Synthèse par ablation laser

Le premier exemple de cette synthèse a été effectué par le groupe Smalley [T. Guo, P] de l'université de Rice en 1995.

La technique de synthèse par ablation laser est possible de synthétiser des nanotubes par vaporisation de carbone à l'aide d'un laser Figure I.26, Pour ce faire, un laser continu ou pulsé, une cible en graphite est placée dans un four est rempli d'un gaz d'hélium ou d'argon afin de garder la pression à 500Torr, La vapeur de carbone formée prend rapidement de l'expansion et refroidie également très rapidement, il est nécessaire d'utiliser un catalyseur métallique mélangé à la cible en graphite pour former des nanotubes monofeuillets, ou d'utiliser graphite pur pour former des nanotubes multifeuillets.

L'avantage de cette technique est de produire une grande quantité de nanotubes avec des rendements très élevés(les nanotubes obtenus par l'ablation laser sont beaucoup plus purs que ceux produits par arc électrique), Le principal inconvénient est la difficulté de synthétiser de grandes quantités de nanotubes rapidement.

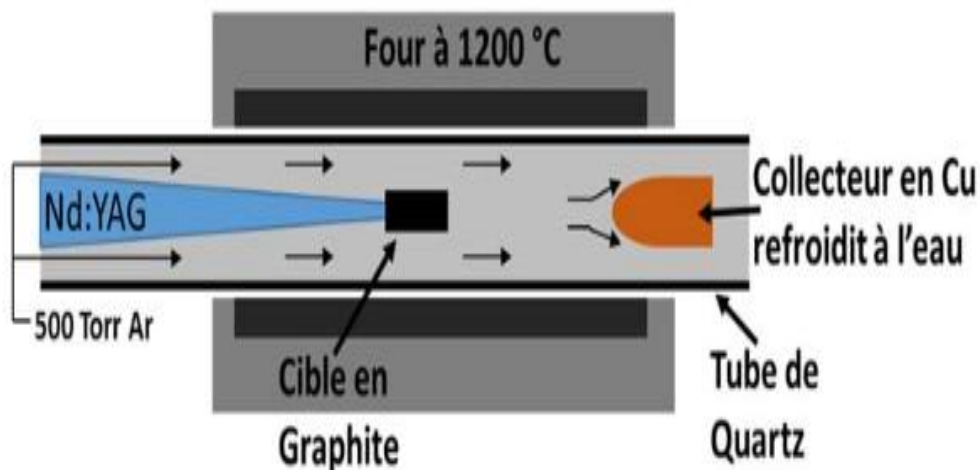


Figure I.26 :Schéma de l'appareillage d'ablation laser[Guo T,]

I.5.4.3. Synthèse par dépôt de vapeur chimique (CVD) :

La méthode de dépôt chimique en phase vapeur, ou on peut dire : la déposition en phase vapeur (abrégée en CVD pour Chemical Vapor Deposition), Le principe de cette synthèse est celle utilisé une source de carbone en phase gazeuse généralement les gaz utilisées sont le méthane, l'oxyde de carbone et même éthanol, qui est décomposé par une source d'énergie telle qu'une résistance chaude enroulée ou un plasma , généralement les températures utilisées sont entre 650-900°C, la décomposition donne le carbone libéré , Les gaz carbonés sont alors transportés vers un substrat (une plaque en matériau céramique comme silice) chauffé et couvert de particules métalliques (le catalyseur utilisé est soit le Fe, Ni, Co ou un alliage de ces trois métaux), cette synthèse donne tous types de nanotube de carbones avec le choix ,leur diamètre et leur longueur .

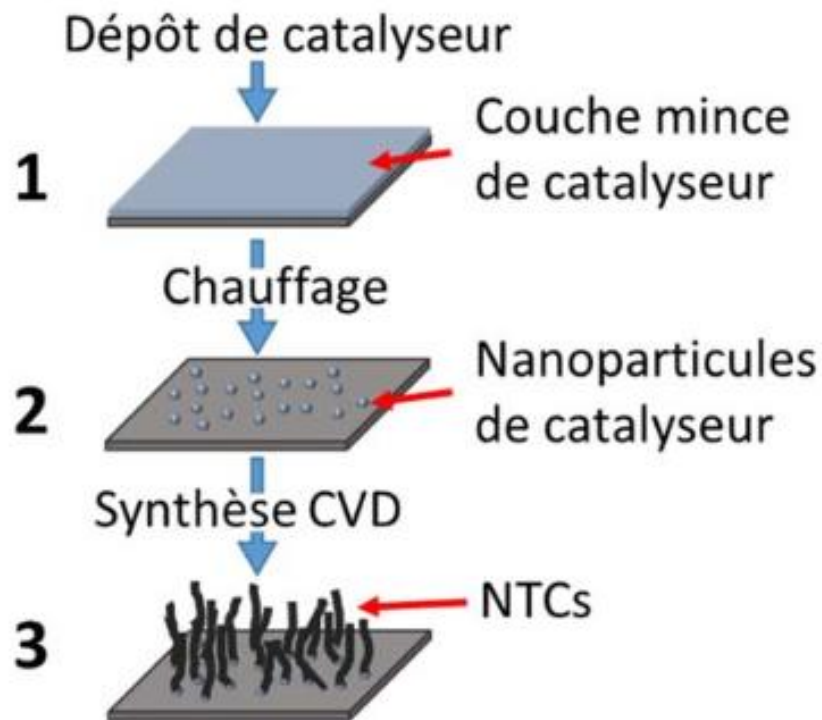


Figure I.27 :Schéma de procédé de la synthèse de NTCs par CVD : (1) dépôt de couche mince de catalyseur sur le substrat ; (2) chauffage permettant de craquer la couche mince de catalyseur ; (3) Synthèse de NTCs par CVD [Synthèse NTC]

I.6. Conclusion

Dans cette partie nous avons brièvement présenté une recherche bibliographique sur les nanostructures, leur classification qui classé selon leur dimensionnalité et les différentes méthodes d'élaboration. Nous avons également pris un exemple de chaque classe.

Après avoir décrit les matériaux nanostructure en général, Nous avons pris un exemple appliqué sur les matériaux nanostructures, le nanotube de carbone qui se trouve dans la deuxième classe de classification de nanostructure, il a un diamètre de l'ordre du nanomètre et sa longueur ne dépasse pas quelques micromètres et sa forme est tubulaire , Nous avons également présenté sa structure ,enfin, nous avons parlé de sa méthodes de fabrication.

Références Bibliographiques

-A-

[**A.C. Eringen,**] A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua. Int. J. Eng. Sci. 10(1)(1972), 1–16.

[**A. Thess,**] Crystalline ropes of metallic carbon nanotubes, A. Thess, R. Lee, P. Nikolaev, H. Dai, P. Petit, J. Robert, C. Xu, Y. Hee Lee, S. Gon Kim, A. G. Rinzler, D. T. Colbert, G. E. Scuseria, D. Tománek, J. E. Fischer, R. E. Smalley, Science, 1996, 273, 483-487.

-B-

[**Bethune D.S.**] Bethune D.S., Kiang C.H., de Vries M.S., Gorman G., Vasquez J. et Beyers R. Nature, 363 :605 (1993)

-C-

[**Charlotte**] Charlotte Bernard, « Propriétés mécaniques des nanotubes de carbone en tant que nanosondes et leur fonctionnalisation par bio-nanoparticules », Physique [physics]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 8 Feb 2008. Français.

[**C. Journet,**] Large-scale production of single-walled carbon nanotubes by the electric-arc technique, C. Journet, W. K. Maser, P. Bernier, A. Loiseau, M. Lamy de la Chapelle, S. Lefrant, P. Deniard, R. Lee, J. E. Fischer, Nature, 1997, 388, 756-758.

-D-

[**Dingreville, R., Qu, J.**] Dingreville, R., Qu, J., & Cherkaoui, M. (2005). Surface free energy and its effects on the elastic behavior of nano-sized particles, wires and films. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(8), 1827–1954.

-F-

[**Fang M,**]Fang M, Zeisberg WM, Condon C, Ogryzko V, Danchin A, Mechold U. Nucl Acids Res 2009;37:5114.

[**Fongang 2009**] FONGANG Bernard, « Etude par simulation numérique des propriétés structurales et magnétiques des systèmes ioniques nanostructurés: description des joints de grains » , Université du Maine, 30 juin 2009.

-J-

[**J. Robertson**] J. Robertson, Cluster model in amorphous carbon Material Science Forum, 1990, Vol. 52, pp.125-32.

[J.N. Reddy] J.N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *Int. J. Eng. Sci.* 48(11) (2010), 1507–1518. doi:10.1016/j.ijengsci.2010.09.020

[Jung SH] Jung SH, Oh E, Lee KH, Yang Y, Park CG, Park W, et al. *Cryst Growth Des* 2008;8:265.

-H-

[Hu CC] Hu CC, Chang KH, Lin MC, Wu YT. *Nano Lett* 2006; 6:2690.

[H. C. Nathanson] H. C. Nathanson, W. E. Newel, R. A. Wickstrom et J. R. Davis, —The resonant gate transistor, *IEEE Transaction on Electron Devices*, vol. ED-14, pp. 117-133, mars 1967

[H. Gleiter.] H. Gleiter. *Prog. Mater. Sci*, 32:223, 1989.

[H. Gleiter1995] H. Gleiter. *Materials Science Forum* 189- 190, 67- 1995.

-G-

[Guo T,] Guo T, Nikolaev P, Rinzler A G, Tomanek D, Colbert D T and Smalley R E 1995 Self- Assembly of Tubular Fullerenes *J. Phys. Chem.* **99** 10694–7

-K-

[K. Amara,] K. Amara, A. Tounsi, I. Mechab, E.A.Adda Bedia, Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field. *Appl. Math. Modelling*, 34(12)(2010), 3933–3942.

[Kamarudin SK] Kamarudin SK, Achmad F, Daud WRW. *Int J Hydrogen Energy* 2009; 34:6902.

[Kim YT] Kim YT, Han JH, Hong BH, Kwon YU. *Adv Mater* 2010; 22:515.

-L-

[L. A. Pinnaduwege] L. A. Pinnaduwege, H.-F. Ji et T. Thundat, —Moore’s law in homeland defense: An integrated sensor platform based on silicon microcantilever, *IEEE Sensors Journal*, vol. 5, pp. 774-785, 2005.

[Lee JY] Lee JY, Hong BH, Kim WY, Min SK, Kim Y, Jouravlev MV, et al. *Nature* 2009;460:498.

[**Lei W**] Lei W, Liu D, Zhang J, Zhu P, Cui Q, Zou G. Cryst Growth Des 2009;9:1489.

[**L.J.Sudak**] L.J.Sudak, Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. J. Appl. Physics, 94(11)(2003), 7281–7287.doi:10.1063/1.1625437.

[**Lee H. L., Chang W. J**] Lee H. L., Chang W. J. [2010] Surface effects on axial buckling of nonuniform nanowires using nonlocal elasticity theory, Micro and Nano Letters, 6,1, 19-21.

[**Liu J**] Liu J, Essner J, Li J. Chem Mater 2010;22:5022.

[**Iijima, S**] Iijima, S. 1991. Helical microtubules of graphitic carbon. Nature(London), 354, 56-58.

[**Li GR**] Li GR, Feng ZP, Zhong JH, Wang ZL, Tong YX. Macromolecules 2010;43:2178.

-M-

[**Mann AKP**] Mann AKP, Skrabalak SE. Chem Mater 2011; 23:1017.

[**Materialstoday**] <https://www.materialstoday.com/download/50948,juillet2018,22:50>

[**M. Alain2008**] M. Alain Obadia « LES NANOTECHNOLOGIES », Mercredi 2 juillet 2008, république Française, Avis conseil économique et social

[**MET-MEB**] Microscope électronique à transmission, 2012.

[**Miller R. E.**] Miller R. E. and Shenoy V. B. [2000] Size-Dependent Elastic Properties of Nanosized Structural Elements, Nanotechnology, 11,3,139-147.

[**M. E. Gurtin and A. I. Murdoch,1**] M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 57 (1975) 291-323.

[**M. E. Gurtin and A. I. Murdoch,2**] M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, Surface stress in solids, International Journal of Solids and Structures, 14 (1978) 431-440.

[**Mustapha, 2011**] Mustapha OUBENALI « Synthèse par dépôt chimique en phase vapeur catalytique (C-CVD) de nanostructures de carbone et leurs applications en catalyse et pour des matériaux composites », l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 14 juillet 2011.

-N-

[**Novoselov**] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva et A. A. Firsov. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science*, vol. 306, no. 5696, pages 666–669, 2004.

[**N.V. Lavrik, M.J**] N.V. Lavrik, M.J. Sepaniak, P.G. Datskos, Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Rev. Sci. Instrum.* 75(2004), 2229-2253.

-O-

[**Okada T**] Okada T, Kawashima K, Nakata Y, Ning X. *Jpn J Appl Phys* 2005; 44:688.

-P-

[**Park JM**] Park JM, Nalwa KS, Leung W, Constant K, Chaudhary S, Ho KM. *Nanotechnology* 2010; 21:215301.

[**Pokropivny et Skorokhod**] Pokropivny VV, Skorokhod VV. *Mater Sci Eng C* 2007; 27:990

[**Pradhan D**] Pradhan D, Leung KT. *J Phys Chem C* 2008;112:1357

-R-

[**R.W Siegel.**] R.W Siegel. *Nanostruct. Mater.* 3:1, 1993.

-S-

[**Sébastien 2009**] Sébastien Pacchini, « Etude des potentialités des nanotubes de carbone dans le domaine hyperfréquence : Application à l'élaboration de matériaux nanocomposites et contribution à la miniaturisation de composants électromécaniques », Français, Université Paul Sabatier - Toulouse 9 Mar 2009

[**S.H. Jung,**] S.H. Jung, M.R. Kim, S.H. Jeong, S.U. Kim, O.J. Lee, K.H. Lee, J.H. Suh, C.K. Park "High-yield synthesis of multi-walled carbon nanotubes by arc discharge in liquid nitrogen" *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, Vol.76, No.2, pp.285-286, 2003

[**Siril PF**] Siril PF, Ramos L, Beaunier P, Archirel P, Etcheberry A, Remita H. *Chem Mater* 2009;21:5170.

[**S. Iijima,1991**] Helical microtubules of graphitic carbon, S. Iijima, *Nature*, 1991, 354, 56.

[**S. Iijima,1993**] S. Iijima, T. Ichihashi, Single-shell carbon nanotubes of 1 nm diameter, Nature, 363, 603 (1993)

[**Stewart M. E.**] Stewart M. E., Anderton C. R., Thompson L. B., Maria J., Gray S. K., Rogers J A and Nuzzo R. G. Chemical Review, 2008, 108, 494-521.

[**Streitz, F. H.**] Streitz, F. H., Cammarata, R. C., & Sieradzki, K. (1994). Surface stress effects on elastic properties. I. thin metal films. Physical Review B, 49(15), 10699–10706.

[**Pascale**] Pascale Launois « structure et défauts des nanotubes », Laboratoire de Physique des Solides, Université Paris Sud, 91 405 Orsay CEDEX, France

[**Structure.g.d**]<http://diamantgraphite.wixsite.com/tpecristaux/structure;juillet2018;20:10>

[**Synthèse NTC**] Loïck-Alexandre Gautier “Synthèse de nanotubes de carbone alignés verticalement par PECVD et étude de leurs propriétés d’émission à effet de champ en configuration de structures hiérarchiques” ;20.10 .2016 ;16 :15

-T-

[**T. Guo, P**] T. Guo, P. Nikolaev, A. Thess, D.T Colbert, R.E. Smalley “Catalytic growth of single walled nanotubes by laser vaporization” Chem Phys Lett, Vol.243, Iss1-2, pp.49-54, 1995

[**T. Rueckes**] T. Rueckes, K. Kim, E. Joselevich, G. Y. Tseng, C.-L. Cheung ET C. M. Lieber, —Carbon nanotubes-based non-volatile random access memory for molecular computing, Science, vol. 289, pp. 94-97, 2000.

-V-

[**van_der_Waals**] https://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_van_der_Waals;
juillet2017 ;13 :30

[**Vizireanu S**] Vizireanu S, Stoica SD, Luculescu C, Nistor LC, Mitu B, Dinescu G. Plasma Sources Sci Technol 2010;19:034016.

-W-

[**Wagner ET Ellis**] Wagner R S and Ellis W C 1964 Applied Physics Letters 4 89

[**Wang L,**] Wang L, Yamauchi Y. Chem Mater 2009;21:3562.

[**Wang JN,**] Wang JN, Su LF, Wu ZP. Cryst Growth Des 2008;8:1741.

[**Wang X., Ozkan C. S.**] Wang X., Ozkan C. S.: ,Multisegment nanowire sensors for the detection of DNA molecules', Nano Letters., 2008, 8, 398-404.

[**W. Krätschmer**] W. Krätschmer, L. Lamb, K. Fostiropoulos et D. Huffman : Nature, 347, 354–358, 1990. 38.

-X-

[**Xia H**] Xia H, Feng J, Wang H, Lai MO, Lu L. J Power Sources 2010;195:4410.

-Y-

[**Y.Y. Zhang, C.M. Wang, N.**] Y.Y. Zhang, C.M. Wang, N. Challamel, Bending, buckling, and vibration of micro/nanobeams by hybrid nonlocal beam model. J. Eng. Mech. 136(5) (2010), 562–574. doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000107

-Z-

[**Z. Raslan,2009**] Z. Raslan, « Conception, Fabrication, Caractérisation de microactionneurs à base de nanotubes de carbone », Micro et nanotechnologies, Français, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009.

Chapitre II

Théories des poutres

II.1. Introduction :

La théorie des poutres est un modèle qui s'applique sur des solides élancés (un corps dont l'une des dimensions est bien plus grande que les deux autres sera appelée poutre), plusieurs modèles disponibles pour les poutres à savoir: la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko ou bien la théorie de Premier Ordre et la théorie d'Ordre Elevé, La plupart des solutions pour ces théories sont basées sur les choix de la fonction $f(z)$, elle est la fonction qui entre dans la formation du champ de déplacement, comme cela sera mentionné plus tard.

II.2. Les différentes théories des poutres classiques:

II.2.1. Théorie d'Euler-Bernoulli (CBT) :

II.2.1.1. Introduction :

Le modèle classique d'Euler-Bernoulli se base sur l'hypothèse que :

- la section droite de la poutre reste orthogonale à la fibre neutre après déformation.
- les sections des poutres restent droites au cours du chargement (la section plane reste plane).
- la nullité des déformations transverses de cisaillement (pas de cisaillement) (aucun glissement).
- La variation des déformations de la section le long de la poutre est très petite.
- la fonction d'Euler-Bernoulli $f(z) = 0$ c'est la fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre.

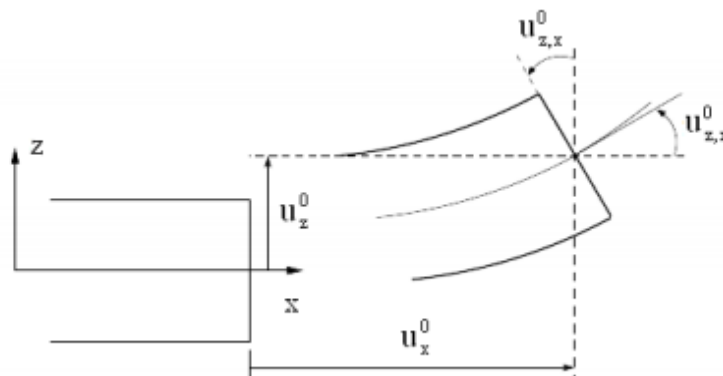


Figure II.1 : [BENNAI, R] Cinématique de la Théorie d'Euler Bernoulli

II.2.1.2. Les équations des moments de flexion :

a- Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement d'un point M est donné par $(x, z), v(x, z), w(x, z)$, les coordonnées x, y, z sont les coordonnées cartésiennes

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - u_x \\ v(x, z) = 0 \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$u(x, z), v(x, z), w(x, z)$: sont les déplacements qui suivent x, y, z respectivement.

x : L'axe médian de la poutre et l'axe z est perpendiculaire au plan xy

$u_x = z \frac{dw}{dx}$ Le déplacement donné par la théorie élémentaire de la flexion de la poutre.

u_0 : Le composant de déplacement au milieu de la section suivent le long d'axe x .

$w(x)$: Le composant de déplacement orthogonale sur ligne moyen de poutre suivent le long d'axe Z .

Si la poutre est constituée d'un matériau isotrope alors le champ de déplacement est donné comme suit :

$$u(x, z) = \begin{cases} u(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$u(x, z)$ Représente le déplacement suivant $X, w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z .

b- les déformations :

La relation entre le déplacement et les déformations non nulles sont données :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.3a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3b})$$

γ_{xz} Représente la déformation transversale de cisaillement, $\gamma_{xz} = 0$ Ce qui implique la nullité de cisaillement.

ε_x Représente la déformation normale.

- Si la poutre est constituée d'un matériau élastique, alors les relations entre les déformations et les contraintes sont :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -zE \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.4a})$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{II.4b})$$

Où :

E Est le Module d' Young.

σ_x Est la contrainte normale.

G Est le module de cisaillement transversal.

τ_{xz} Est la contrainte transversale de cisaillement.

c-l'équation de mouvement:

Nous allons maintenant appliquer le principe de "Hamilton " est utilisé pour dérivé les équations du mouvement :

$$\delta \int_0^T (U + V - K) dt = 0 \quad (\text{II.5a})$$

Où t : le temps.

δU : la variation virtuelle de l'énergie de déformation.

δV : la variation virtuelle de l'énergie potentielle(les forces extérieurs).

δK : la variation virtuelle de l'énergie cinétique, dans cas l'équilibre on prendra l'énergie cinétique est nulle, donc on obtient l' Hamilton comme suit :

$$\delta \int_0^T (U + V) dt = 0 \quad (\text{II.5b})$$

La variation virtuelle de l'énergie de déformation est donné par :

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (\text{II.6})$$

Puisque la contrainte transversale de cisaillement est nulle, L'énergie de déformation est écrite :

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx \quad (\text{II.7a})$$

$$\delta U = \int_0^L \left(-M \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) dx \quad (\text{II.7b})$$

Où :

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA$$

M : le moment de flexion.

A : l'aire de la section de la poutre.

L : la longueur de la poutre.

La variation virtuelle de l'énergie potentielle est donné par :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \quad (\text{II.8})$$

Où q et p sont respectivement les charges transversale et axiale.

Après injection les équations (II.7b),(II.8) dans l'équation (II.5b) en aura l'équation de mouvement suivante :

$$\delta w: - \frac{d^2 M}{dx^2} + q - p \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.9})$$

II.2.2. Théorie de Timoshenko ou bien la théorie de Premier Ordre (FSDBT) :

II.2.2.1. Introduction :

Le type suivant de théorie de la poutre est la théorie de Timoshenko ce qui indique que :

- la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre. Figure II.2
- Il existe un cisaillement et les effets de la déformation du cisaillement transversal ne sont pas négligés.
- on suppose que la contrainte de cisaillement transversale est répartie linéairement le long de l'épaisseur de la poutre [R. Ansari]
- considère que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre.
- introduire la notion de coefficient correcteur K pour mieux prendre en compte les effets de cisaillements transversaux, la fonction de Timoshenko s'écrit $f(z) = z$.

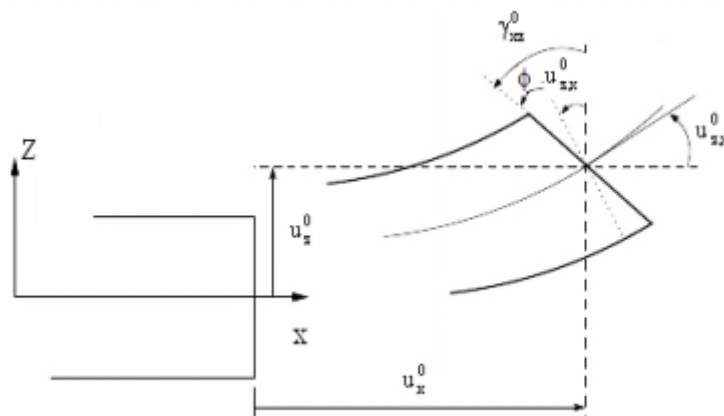


Figure II.2 : [BENNAI, R] Cinématique de la Théorie de Timoshenko.

II.2.2.2. Les équations des moments de flexion :

a- Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement de la poutre de Timoshenko de n'importe quel point situé à (x, z) s'écrit comme suit :

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - u_x + zu_{xz} \\ v(x, z) = 0 \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (\text{II.10a})$$

$$\text{Avec : } u_{xz} = \frac{dw}{dx} + \varphi(x), u_x = z \frac{dw}{dx}$$

u_{xz} : la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$\varphi(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Nous écrivons le champ de déplacement dans le cas la poutre est constituée d'un matériau isotrope comme suit :

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = z\varphi(x) \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (\text{II.10b})$$

Z : la coordonne mesurée à partir de l'axe neutre de la poutre.

b- les déformations :

Suivant les hypothèses de la théorie classique des poutres, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II.11a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.11b})$$

ε_x : La déformation normale

γ_{xz} : la déformation transversale de cisaillement.

w :Le déplacement transversal.

φ :la rotation due à la flexion.

L'expression des contraintes peut être déterminée comme :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = EZ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II.12a})$$

$$\tau_{xz} = GK\gamma_{xz} = GK\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (\text{II.12b})$$

Dans cette théorie, les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre, c'est pour ce la cette théorie est proposé le facteur K .

K : le coefficient de correction de cisaillement de la théorie de poutre de Timoshenko, pour mieux prendre en compte les effets de cisaillement transversaux à travers l'épaisseur de poutre, sa valeur varie en fonction de la forme géométrique de la poutre.(par exemple le facteur K pour une poutre de section rectangulaire est $5/6$, pour une poutre circulaire $K = 6/7$ [Batoz J.L]).

c- les équations d'équilibres :

Nous écrivons les équations d'équilibres à partir du principe des travaux virtuel, il peut être décrit par la somme du travail intérieur et du travail extérieur, le système est nul de la somme de tous les efforts intérieurs et extérieurs. Donc le système s'écrit comme suit :

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Nous commençons par le travail virtuel des efforts extérieurs, il y a :

q La charge uniformément répartie le long de la poutre et p et la charge axiale, donc le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit:

$$\delta W_{ext} = - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \quad (\text{II.14})$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit :

$$\delta W_{int} = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (\text{II.15})$$

De la même manière que les équations précédentes (II.14), (II.15) dans l'équation (II.13), les équations de mouvement proposé par la théorie des poutres sont obtenus:

$$\delta w: \frac{dQ}{dx} + q - p \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.16a})$$

$$\delta \varphi: \frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0 \quad (\text{II.16b})$$

M : le moment de flexion où $M = \int_L z \sigma_{xx} dA$

Q : la force de cisaillement, où $Q = \int_L \tau_{xz} dA$

II.2.3. La théorie d'Ordre Elevé :

II.2.3.1. Introduction :

Dans cette théorie la section transversale de la poutre perd sa planéité Figure II.4 .Et pour cela les chercheurs ont essayé de trouver une autre solution plus précise que la théorie du premier ordre.

Pour les modèles d'ordre élevé sont utilisées une fonction de gauchissement qui vérifie la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieure et inférieure de la poutre, où le contrainte de cisaillement transversale a un parabolique par rapport à l'épaisseur de la poutre Figure II.3.

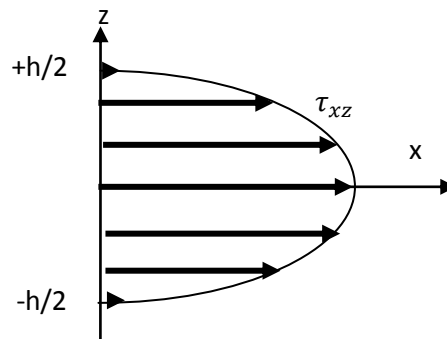


Figure II.3 : le contrainte de cisaillement transversale par rapport à l'épaisseur de la poutre

Dans les bords extrêmes de la poutre ($\pm h/2$) les contraintes tangentielles sont nulles et nous écrivons:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} f'(x) = 0 \quad (\text{II.17})$$

On propose que la structure constituée d'un matériau isotrope ait les mêmes caractéristiques pour tous les points et dans toutes les directions.

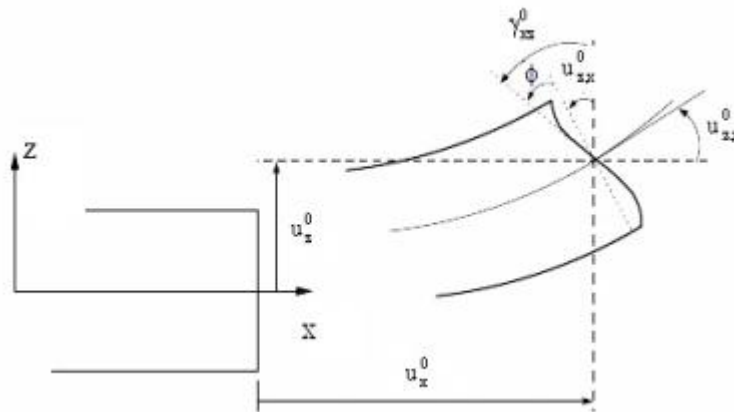


Figure II.4 : [BENNAI, R] Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

II.2.3.2. Les équations des moments de flexion :

a- Le champ de déplacement :

Donc, dans cette théorie le champ de déplacement d'un point M devient:

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = -z \frac{\partial w(x)}{\partial x} + f(z) \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \varphi(x) \right) \\ v(x, z) = 0 \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$f(z)$: La fonction de gauchissement.

b- les déformations :

Les relations déformation-déplacement pour la théorie d'Ordre Elevé peut être exprimé comme :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + f(z) \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (\text{II.19a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \varphi(x) \right) \quad (\text{II.19b})$$

$f'(z)$: représente le cisaillement.

Les fonctions de la théorie d'Ordre Elevé ce qu'on appelle les fonctions de gauchissements choisissent selon le condition(II.17), Et à cette condition plusieurs autres chercheurs peuvent être résumées les fonctions de forme comme suit :

Les modèles	Les fonctions
Model de Reddy [Reddy 1984]	$f(z) = z \left[1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right]$
Model de Touratier [Touratier 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
Model de Soldatos [Soldatos 1992]	$f(z) = h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$
Model de Karama [Karama 2003]	$f(z) = z - z e^{-2(z/h)^2}$

Tableau I.1 : les formes des fonctions de gauchissements

h : l'épaisseur de poutre.

Nous prenons le modèle de Reddy qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement, et nous écrivons les relations déformation-déplacement comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (\text{II.19c})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (\text{II.19d})$$

c- les équations d'équilibres :

Le travail virtuel de tous les efforts (intérieurs et extérieurs) s'exerçant sur le système est nul :

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (\text{II.20})$$

Après les simplifications, on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\delta w: \frac{4}{3h^2} \frac{\partial R^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{4}{h^2} \frac{\partial S}{\partial x} + q - p \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.21a})$$

$$\delta \varphi: \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S}{\partial x} - Q = 0 \quad (\text{II.21b})$$

Où M, R, Q, S sont les efforts définis par :

$$M = \int_L z \sigma_{xx} dA, \quad R = \int_L z^2 \sigma_{xx} dA \quad (\text{II.21c})$$

$$Q = \int_L \tau_{xz} dA, \quad S = \int_L z^2 \tau_{xz} dA$$

II.3. Théories des poutres non classiques (L'effet de surface locale):

II.3.1. Introduction :

Les concepts classiques de la mécanique de la continuité n'ont pas la capacité de considérer les caractéristiques atomiques des nanostructures. Toutefois, Selon la simplicité et l'efficacité de calcul de la mécanique de la continuité. Différents modèles classiques ont été développés pour introduire l'effet de contrainte de surface dans les modèles de continuité non classique , Ces modèles peuvent être appliqués à nano-poutre (avec une forme simple et des conditions aux limites) et les effets de contraintes de surface , Dans cette section, un modèle de continuité non classique basé sur l'approche de Gurtin-Murdoch [Gurtin, M. E, & Murdoch, A. 1975], [Gurtin, M. E, & Murdoch, A. . 1978] est utilisée pour développer des solutions des formes à chaque type de théorie de la poutre, Des expressions pour chaque type de théorie non classique et les effets de contraintes de surface sont dérivées pour prédire les réponses de flexion et de flambage de nano poutre.

Le modèle de Gurtin-Murdoch suppose que la nano-poutre est constitué de surfaces qui sont liées au volume, l'interaction entre la surface élastique et le volume donne les charges agissent sur la nano-poutre, les charges résultantes dans le plan dans les directions x et z conduisent à des contraintes de surface qui peuvent être obtenues en utilisant des équations constitutives de surface comme :

$$\sigma_{xx}^s = (2\mu^s + \lambda^s)\varepsilon_x + \tau^s \quad (\text{II.22a})$$

$$\tau_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.22b})$$

s : utilisé pour désigner les quantités correspondant à la surface.

Dans lequel : τ^s est la contrainte de surface résiduelle, μ^s, λ^s sont les constantes de Lamé de surface, ε_x est le déplacement selon la direction x .

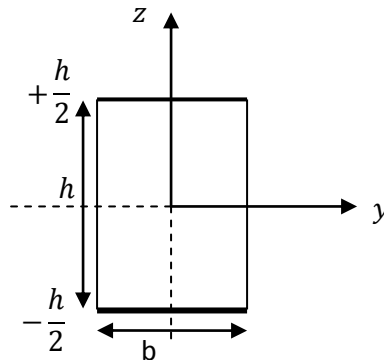


Figure II.5 : les coordonnées et la géométrie de la section droite d'une nano poutre

II.3.2. Le champ de déplacement :

Il existe différents types de théorie des poutres pour modéliser leurs comportements. Comme nous l'avons dit plus tôt, considérons une poutre uniforme droite avec la longueur L et section rectangulaire d'épaisseur h , un système des coordonnées x, y, z comme indiqué dans la figure tandis que le x l'axe x est sur le long de la poutre, l'axe y dans le sens de la largeur et l'axe z est dans le sens de l'hauteur. on suppose que la déformation de la poutre la sera au plan xz , donc dans une forme générale le champ de déplacement suivant peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}u(x, z) &= -z \frac{\partial w(x)}{\partial x} + f(z) \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \varphi(x) \right) \\v(x, z) &= 0 \\w(x, z) &= w(x)\end{aligned}\tag{II.23a}$$

Où w et φ sont le déplacement transversal et le déplacement angulaire de la poutre, respectivement, est la fonction de forme comme suit pour théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) :

$$f(z) = 0\tag{II.23b}$$

Pour la théorie de poutre de premier ordre nous prenons la fonction de Timoshenko (TBT) :

$$f(z) = z\tag{II.23c}$$

Pour la théorie de poutre d'Ordre Elevé nous prenons la fonction de Reddy (RBT) :

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2}\tag{II.23d}$$

Les sections suivantes présentent les relations contrainte-déplacement et les équations d'Euler-Lagrange pour chaque type de théorie de la poutre basé sur le modèle de poutre d'élasticité de surface.

II.3.2.1. Théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) non classique :

On appelle aussi les effets de surface d'Euler-Bernoulli (EBTs), alors que l'état de contrainte dans le volume déjà été décrit par la théorie classique de poutre, le comportement élastique de surface est associé aux composantes de contrainte de surface ($\sigma_{xx}^s, \tau_{xz}^s$), les relations constitutives (nous avons mentionné plus tôt) sont données par les relations (II.22a) et (II.22b) :

$$\sigma_{xx}^s = (2\mu^s + \lambda^s)\varepsilon_x + \tau^s \quad (\text{II.24a})$$

$$\tau_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.24b})$$

Le déplacement ε_x ça change selon chaque fonction de gauchissement du modèle de la théorie de poutre, et donc la contrainte va changer pour chaque modèle.

Nous rappelons que : $\varepsilon_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ et à injection dans la relation (II.22a), nous écrivons les contraintes de surface d'Euler-Bernoulli comme :

$$\sigma_{xx}^s = -z(2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau^s \quad (\text{II.24c})$$

$$\tau_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.24d})$$

Les composantes non nulles de la contrainte pour le volume de nano-poutre nous pouvons l'écrire comme suit :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z \quad (\text{II.25a})$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (\text{II.25b})$$

Dans les théories classiques de la poutre, elle a supposé que $\sigma_{zz} = 0$, parce que la contrainte σ_{zz} est petite par rapport à τ_{xz} , mais cette hypothèse ne satisfait pas les conditions de surface considérées dans le modèle de Gurtin-Murdoch, il est supposé que σ_{zz} varie linéairement à travers l'épaisseur de la nanopoutre et satisfait les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieures (Lu, He, Lee, & Lu, 2006) [Lu, P.], selon cette hypothèse, σ_{zz} peut être obtenu comme :

$$\sigma_{zz} = \frac{\frac{\partial \tau_{xz}^s}{\partial x} |_{at\ top} + \frac{\partial \tau_{xz}^s}{\partial x} |_{bottom}}{2} + \frac{\frac{\partial \tau_{xz}^s}{\partial x} |_{at\ top} - \frac{\partial \tau_{xz}^s}{\partial x} |_{bottom}}{h} z \quad (II.26a)$$

Où :

$$\tau_{xz}^s = \pm \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (II.26b)$$

On injecte la relation de τ_{xz}^s (II.26b) dans la relation (II.26a), la composante de σ_{zz} peuvent être s'écrit comme :

$$\sigma_{zz} = \frac{2z\tau^s}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (II.26c)$$

Alors, la contrainte de cisaillement de surface de EBT, nous l'écrivons :

$$\sigma_{xx} = -zE \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2zv\tau^s}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (II.26d)$$

Puisque la déformation dans la théorie classique $\gamma_{xz} = 0$ la même chose dans cette théorie, donc la contrainte de cisaillement est nulle.

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (II.26e)$$

$$\tau_{xz} = 0$$

L'équation de mouvement est obtenue en utilisant le principe d'Hamilton dans l'état d'équilibre (l'énergie cinétique est nulle) et donc nous écrivons l'équation comme suit :

$$\delta \int_0^L (U + V) dt = 0 \quad (\text{II.27a})$$

δU : la variation virtuelle de l'énergie de déformation,

δV : la variation virtuelle du travail des forces extérieures.

Nous rappelons que : la variation virtuelle de l'énergie de déformation donne par :

$$\delta U = \int_0^L \left[\int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \int_A (\sigma^s_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dS \right] dx \quad (\text{II.27b})$$

Puisque la contrainte de cisaillement est nulle, nous obtenons :

$$\delta U = \int_0^L \left[\int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dA + \int_S (\sigma^s_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dS \right] dx \quad (\text{II.27c})$$

$$\delta U = \int_0^L \left[M \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M^s \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] dx \quad (\text{II.27d})$$

$$M = \int_A \sigma_{xx} dA \text{ et } M^s = \int_S \sigma^s_{xx} dS .$$

La deuxième partie est le travail de force extérieure qui écrit comme suit (ce qui est écrit comme suit et nous l'avons mentionné plus tôt) :

$$\delta W_{ext} = - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \quad (\text{II.28})$$

Avec le champ de contrainte donné et après injectons les équations (II.27d) et (II.28) dans l'équation de mouvement l'équation de mouvement peuvent être écrits sous la forme suivante:

$$\delta w: \quad \left[\frac{2\nu I \tau^s}{h} - EI - \left(\frac{Ah}{2} + \frac{h^3}{6} \right) (2\mu^s + \lambda^s) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2b\tau^s - P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = 0 \quad (\text{II.29})$$

$A = bh$: la section droite de la poutre , $I = \int z^2 dA$: le moment d'inertie de la section .

ν Représente le coefficient de Poisson et (μ^s, λ^s) les constantes de Lamé, E module d'Young.

II.3.2.2. Théorie des poutres de Timoshenko (TBT) non classique :

On appelle aussi les effets de surface de Timoshenko (TBTs), le prochain type de théorie des poutres est la théorie des poutres de Timoshenko, nous vous rappelons leur idée que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre, cette idée est corrigée par k le facteur de correction.

Nous commençons avec les relations de déformation-déplacement peuvent être exprimées :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II.30a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.30b})$$

On injecte ces équations dans les équations des contraintes pour le volume de poutre ce qui n'est pas nulles, nous obtenons ce qui suit :

La contrainte normale :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z \quad (\text{II.31a})$$

$$\sigma_{xx} = zE \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2z\nu\tau^s}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.31b})$$

Deuxième contrainte de volume de poutre : la contrainte de cisaillement (II.32)

Où k : le coefficient de correction de cisaillement pour TBT.

$$\tau_{xz} = kG\gamma_{xz} \quad (\text{II.32a})$$

La relation de contrainte devient comme suit :

$$\tau_{xz} = kG\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (\text{II.32b})$$

G : le module de cisaillement, φ la rotation due à la flexion.

En utilisant l'équation de déformation longitudinale de TBT dans les contraintes de surface on obtient :

$$\sigma^s_{xx} = z(2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \tau^s \quad (\text{II.33a})$$

Et la contrainte de cisaillement de surface :

$$\tau_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.33b})$$

En appliquant l'équation de mouvement ce que nous avons mentionné plus tôt (II.27a), et la variation virtuelle de l'énergie de déformation donne par :

$$\delta U = \int_0^L \left[\int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx + \int_S (\sigma^s_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau^s_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x}) dS dx \right] \quad (\text{II.34a})$$

En appliquant le champ de contrainte donné par (II.31), (II.32), (II.33a), (II.33b), donc :

$$\delta U = \left[-\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M^s}{\partial x} + Q \right] \delta \varphi + \left[-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q^s}{\partial x} \right] \delta w \quad (\text{II.34b})$$

$$\text{Où : } M = \int_A z \sigma_{xx} dA \quad , \quad Q = \int_A \tau_{xz} dS \quad (\text{II.34c})$$

$$M^s = \int_S z \sigma^s_{xx} dS \quad , \quad Q^s = \int_S \tau^s_{xz} dS$$

Aussi bien le travail de force extérieure qui donner par:

$$\delta W_{ext} = - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \quad (\text{II.35})$$

En utilisant les équations (II.34b) et (II.35) dans l'équation de mouvement, les équations pour le TBT, y peut être exprimé comme suit :

δw :

$$(2b\tau^s + kGa - p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kGA \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad (\text{II.36a})$$

$\delta \varphi$:

$$kGA \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2\nu I \tau^s}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left[\left(\frac{Ah}{2} + \frac{h^3}{6} \right) (2\mu^s + \lambda^s) + EI \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - kGA\varphi = 0 \quad (\text{II.36b})$$

II.3.2.3. Théorie des poutres d'Ordre Elevé (RBT) non classique :

On appelle aussi les effets de surface d'Ordre Elevé (RBTs), nous choisissons la fonction gauchissement de Reddy $f(z) = z[1 - \frac{4z^2}{3h^2}]$, le champ de déplacement est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= -z \frac{\partial w(x)}{\partial x} + (z - \frac{4z^3}{3h^2}) (\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \varphi(x)) \\ v(x, z) &= 0 \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Après introduire le champ de déplacement dans les équations (II.31a), (II.32a) le champ de contrainte du volume en peut être écrit comme suit :

$$\sigma_{xx} = zE \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{4z^3 E}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{2z\nu\tau^s}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.37a})$$

La contrainte de cisaillement de volume est comme suit :

$$\tau_{xz} = G \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{II.37b})$$

Les composantes de la contrainte de surface pour RBT peuvent être obtenues dans les formes :

$$\sigma_{xx}^s = (2\mu^s + \lambda^s) \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) + \tau^s \quad (\text{II.37c})$$

Et la contrainte non nulle pour la surface de poutre peut être obtenue :

$$\tau_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.37d})$$

Nous écrivons avec même méthode qui écrire les théories d'Euler-Bernoulli et de premier d'ordre élevé l'équation de mouvement, la variation virtuelle de l'énergie de déformation donne par :

$$\delta U = \int_0^L \left[\int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx + \int_S \left(\sigma^s_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau^s_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dS dx \right] \quad (\text{II.38})$$

Et le travail de force extérieure qui donner par l'équation :

$$\delta W_{ext} = - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \quad (\text{II.39})$$

Les équations pour RBT peuvent être écrites sous la forme suivante :

δw :

$$\left(\frac{2vI\tau^s}{5h} - \frac{EI}{21} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2b\tau^s + \frac{kGA}{15} - p \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kGA \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{16EI}{105} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + q = 0 \quad (\text{II.40a})$$

$\delta \varphi$:

$$\left(\frac{8vI\tau^s}{5h} - \frac{16EI}{105} - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{Ah}{6} + \frac{h^3}{18} \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{8GA}{15} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\left(\frac{Ah}{3} + \frac{2h^3}{15} \right) (2\mu^s + \lambda^s) + \frac{68EI}{105} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{8GA}{15} \varphi = 0 \quad (\text{II.40b})$$

II.3.3. Etude Analytique de flambement des nano-poutre pour différentes théories:

II.3.3.1. Introduction :

L'utilisation de la théorie de poutre et les effets de contraintes de surface ont développé par plusieurs auteurs [Ansari, R.]; [Yan, Z.] c'est pour cela dans ce chapitre l'objectif visé est de développer et de appliquer diverses théories de poutre de déformation de cisaillement non classiques, elles sont proposées pour l'étude la flexion et le flambement des nano poutres.

Ces théories sont basées sur l'hypothèse que les déplacements plans et transversaux (la même formulation proposée par [Berrabah, H.] et [Bourada, M.]) , le déplacement transversal est constitué de deux composantes le premier est désigné la flexion, et le deuxième désigner le cisaillement, les forces de cisaillement ne sont pas produites par les composants de flexion et les forces de moment ne sont pas produites par les composants de cisaillement.

Des résultats numériques sont présentés pour prouver le plus effet des effets de contrainte de surface sur les réponses de flexion et de flambage de nano poutre et de comparer avec les résultats obtenus dans l'état absence des contraintes de surface sur nano poutre.

II.3.3.2. Formulations théoriques du problème :

Proposons un nano poutre de longueur L et section rectangulaire de l'épaisseur h et la largeur b , un système de coordonnées cartésiennes x, y, z alors que l'axe de x est considéré sur l'axe central de la poutre à partir de leur gauche, l'axe de y dans le sens de largeur et l'axe de z dans la direction de l'hauteur de la poutre (figure5) c'est-à-dire les condition est comme suit :

$$0 \leq x \leq L, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Le nano poutre est soumis à une charge transversale, et des forces axiales p aux deux extrémités de nano poutre.

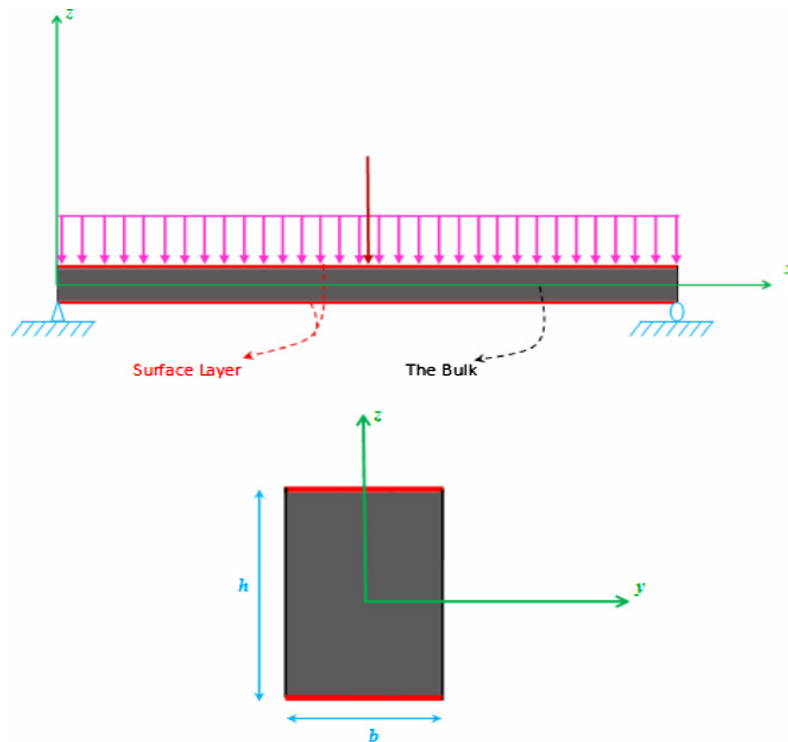


Figure II.6 : [Ansari, R.] en haut le schéma représente la poutre droit, en bas le schéma représente la section rectangulaire transversale avec système de cordonnées (x, z)

II.3.3.3. Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement est écrit sur la même mode proposée par [Berrabah, H.], [Bourada, M.], les déplacements sont petits para pour avec l'épaisseur des nano-poutres, aussi, le déplacement axial u , et le déplacement transversal w de n'importe quel point de la nano poutre , sont donnés comme :

$$u = u_b + u_s \quad (\text{II.42a})$$

$$w = w_b + w_s \quad (\text{II.42b})$$

u_b : Représente la composante de flexion, u_s :représente la composante de cisaillement. Les deux composante sont des fonctions de la coordonnée x , l'expression de u_b peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{II.43a})$$

La composante de déplacement u_s peut être donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.43b})$$

Et le déplacement transversal w contient de deux composantes : la composante de flexion w_b et la composante de cisaillement w_s .

$$u(x, z) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.44})$$

$f(z)$ Les fonctions de forme sont choisies pour éviter le facteur de forme qui permet la nullité de contrainte de cisaillement τ_{xz} dans les bords de la nano poutre $\pm \frac{h}{2}$, la fonction $f(z)$ varier pour chaque auteure par exemple la théorie de la poutre d'ordre élevé (RBT) par Reddy [Reddy, J.N.1984] ou théorie de la poutre sinusoïdal (SBT) par Touratier (1991) [Touratier, M.] ou théorie de la poutre hyperbolique (HBT) par Soldatos (1992) [Soldatos, K.], la plupart des solutions sont basées sur les choix de la fonction $f(z)$, dans ce chapitre nous utilisons la théorie de la poutre d'ordre élevé (RBT) dans laquelle est comparé leurs résultants numériques avec les théories d'Euler-Bernoulli et Timoshenko.

II.3.3.4. Les différents des équations :

a- La déformation de la nano poutre :

Dans l'hypothèse de petites perturbations les déformations non nulles associées aux déplacements s'écrit:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.45a})$$

Et

$$\gamma_{xz} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.45b})$$

Où $g(z) = 1 - f'(z)$

$f(z)$: la fonction de gauchissement et $f'(z)$ sa dérivée représente le cisaillement.

b- Les contraintes de surface :

En peut étudier les effets des surfaces sur la réponse mécanique des nano structure par l'énergie de surface ou les contraintes de surface, les forces dans le plan conduisent à des contraintes de surface qui peut être dérivé en employant des équations de surface, ces équations sont mentionnées plus haut relations (II.22a) et (II.22b):

$$\sigma^s_{xx} = (2\mu^s + \lambda^s)\varepsilon_x + \tau^s \quad (\text{II.46a})$$

Et

$$\tau^s_{xz} = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.46b})$$

L'exposant s est utilisé pour représenter les quantités correspondant à la surface.

Basé sur les équations de déformation (II.45a), (II.45b) avec des équations (II.22a), (II.22b) les composantes de la contrainte de surface pour les théories de poutre non classique actuelles peuvent être obtenues sous la forme suivante :

$$\sigma^s_{xx} = (2\mu^s + \lambda^s) \left(-z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + \tau^s \quad (\text{II.46c})$$

$$\tau^s_{xz} = \tau^s \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \quad (\text{II.46d})$$

c- Les contraintes de volume :

Les composantes non-nulles de contrainte pour le volume sont σ_x^b , τ_{xz}^b et σ_z où $\sigma_z \neq 0$ pour les théories de la poutre classique, dans théorie de Gurtin-Murdoch est supposé que la composante de contrainte σ_z change linéairement dans l'épaisseur de la poutre [Lu, P.]

$$\sigma_{zz} = \frac{2z\tau^s}{h} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.47a})$$

Donc :

$$\sigma_x^b = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z$$

$$\sigma_x^b = E \left(-z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + \frac{2z\nu\tau^s}{h} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.47b})$$

$$\tau_{xz}^b = G\gamma_{xz}$$

En utilisant l'équation (II.45b), nous trouvons ce qui suit :

$$\tau_{xz}^b = Gg(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.47c})$$

L'exposant b est utilisé pour représenter les quantités correspondant au volume.

d-Les équations de mouvement :

Le principe d'énergie totale qui utilise par Reddy 2002 [Reddy, J.N.2002], Draiche et al. 2014 [Draiche, K.] où Π est l'énergie potentielle totale ; δU_{int} est la variation virtuelle de l'énergie de déformation et δW_{ext} est la variation du travail effectué par des forces extérieures

$$\delta \Pi = \delta(U_{int} - W_{ext}) \quad (\text{II.48})$$

La virtuelle de l'énergie de déformation est donné comme :

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (\text{II.49})$$

Dans cette partie, pour faciliter la formulation mathématique nous considérons la sommation entre les quantités correspondant à la surface et au volume comme suite :

$$\sigma_x = \sigma_x^b + \sigma_x^s \quad (\text{II.50a})$$

Et

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^s + \tau_{xz}^b \quad (\text{II.50b})$$

Après compensation des équations de déformation et la simplification, nous trouvons ce qui suit :

$$\delta U = \int_0^L \left(-M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d \delta w_s}{dx} \right) dx \quad (\text{II.51})$$

Les fonctions qui résultent par les contraintes sont M_b ; M_s et Q :

$$(M_b, M_s, Q) = \int_A (z, f, g) \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} dA \quad (\text{II.52})$$

La variation du travail effectué par la force de compression axiale est donnée par :

$$\delta W_{ext} = \int_0^L q \delta w dx + \int_0^L p \frac{dw}{dx} \frac{d \delta w}{dx} dx \quad (\text{II.53})$$

Où q, p : les charges transversales et axiales, respectivement.

Injectons les équations (II.51); (II.53) dans l'équation (II.48) et simplifier l'intégration de chaque partie, les équations du mouvement de la théorie de la poutre proposée sont déterminées comme suit :

$$\delta w_b: \frac{d^2 M_b}{dx^2} - p \frac{d^2(w_b+w_s)}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{II.54a})$$

$$\delta w_s: \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} - p \frac{d^2(w_b+w_s)}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{II.54b})$$

Aussi, injections les équations (II.46a), (II.46b) et (II.47b), (II.47c) dans les équations (II.50a), (II.50b) et les résultats suivants dans les équations (II.52), les différents des équations pour les fonctions des contraintes sont comme suit :

$$M_b = \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - D_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{Ah}{2} + \frac{h^3}{6} \right) \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) D_{11}^S \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) D_{11}^S \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.55a})$$

$$M_s = \left(\frac{2\nu I_1 \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - D_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_{p4} \tau^s + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - D_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_{p4} \tau^s \quad (\text{II.55b})$$

$$Q = \left(A_{55}^S + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.55c})$$

Les différents des équations de mouvement par les termes de déformation w_b et w_s après l'injection les équations(II.55a), (II.55b), (II.55c) dans les équations (II.54a), (II.54b) sont comme suit :

δw_b :

$$\left[\frac{2\nu I \tau^s}{h} - D_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{Ah}{2} + \frac{h^3}{6} \right) \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) D_{11}^S \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + (H - p) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + q = 0 \quad (\text{II.56a})$$

δw_s :

$$\left[\frac{2\nu I_1 \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(\frac{2\nu I \tau^s}{h} - H_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \left(A_{55}^S + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (H - p) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + q = 0 \quad (\text{II.56b})$$

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} - p\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} W_b \\ W_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_n \end{pmatrix} \quad (\text{II.56c})$$

Où :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left[\frac{2\nu I \tau^s}{h} - D_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{Ah}{2} + \frac{h^3}{6} \right) \right] \alpha^4 - (H - p) \alpha^2 \\ S_{12} &= \left[\frac{2\nu I \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) D_{11}^S \right] \alpha^4 - (H - p) \alpha^2 \\ S_{21} &= \left[\frac{2\nu I_1 \tau^s}{h} - I_{p4} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right] \alpha^4 - (H - p) \alpha^2 \\ S_{22} &= \left[\frac{2\nu I \tau^s}{h} - H_{11}^S - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right] \alpha^4 - \left(A_{55}^S + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right) - \\ &\quad - (H - p) \alpha^2 \end{aligned} \quad (\text{II.56d})$$

$$(D_{11}^s, D_{11}^s) = \int_A E(zf(z), f(z)^2) dA$$

$$A_{55}^s = \int_A G[g(z)]^2 dA$$

$$J_{p1} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [g(z)]^2 dz$$

$$I_1 = \int_A zf(z) dA$$

$$J_{p2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} g(z) dz \quad (\text{II.56e})$$

$$J_{p3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f'(z)g(z) dz$$

$$I = \int_A z^2 dA$$

$$I_{p4} = \int_s zf(z) ds$$

$$I_{p5} = \int_s [f(z)]^2 ds$$

$$H = 2b\tau^s$$

$H = 2b\tau^s$ est changé pour chaque section transversale de la poutre, dans ce travail, les sections transversales de poutre sont rectangulaires, généralement, la tension superficielle résiduelles τ^s est un nombre positif.

II.4. la Théorie d'élasticité non locale :

II.4.1. Introduction :

La théorie non locale, elle est proposée par Eringen [Eringen A. C1972] [Eringen A. C., Edelen D. G. B] exprime le champ de contrainte à un point dans un milieu contenu élastiques à un point de référence x est considéré comme une fonction de la contrainte estimée à chaque point dans le corps, contrairement à l'élasticité classique, selon la théorie de l'élasticité non locale, ce fait a été attribué à la théorie atomique de la dynamique de réseau et mesure expérimentale de la dispersion des phonons [Eringen, A.C. 1983], la théorie non locale est utilisée pour modifier la théorie de poutre (l'état classique) pour l'analyse de comportement d'échelle de micro- et nano poutre.

Les équations de base pour un solide élastique linéaire, homogène, isotrope, non locale, non soumis à une force extérieur sont données par :

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V \alpha(|x - x'|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x') dV(x') \quad \forall x \in V \quad (\text{II.57a})$$

la loi de Hooke dans l'état classique (néglige la théorie non locale) dit que la contrainte dépend de la déformation en un point uniquement, mais ce modèle a dit que le tenseur de contrainte au point x dépend des déformations en tout domaine V .

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x) \right) \quad (\text{II.57b})$$

Où : σ_{ij} : le tenseur de contrainte.

ε_{kl} : le tenseur de déformation.

C_{ijkl} : le tenseur élastique de module de l'élasticité isotrope classique.

$\alpha(|x - x'|, \tau)$: la fonction de caractérisation non locale où $|x - x'|$ est la distance.

τ : la longueur interne caractéristique du matériau, où $\tau = e_0 a / l$.

e_0 : la constante de matériau (est une constante qui doit être déterminée expérimentalement).

a : le longueur caractéristique internes (le paramètre de maille, diamètre moléculaire et taille granulaire par exemple : la longueur a longueur de liaison $C - C$ égale à

0.124nm) et l est la longueur caractéristique externe par exemple la longueur l longueur d'onde.

Pour un matériau élastique dans un cas unidimensionnel suivant la théorie non locale, la relation contrainte-déformation devient [Eringen, A.C. 1983]:

$$\sigma_x - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = E \varepsilon_x \quad (\text{II.58a})$$

Où :

σ_x : la contrainte normale.

ε_x : la déformation normale.

E : le module de Young du matériau.

$\mu = (e_0 a)^2$ Où $e_0 a$ le coefficient d'échelle qui représente l'effet de taille sur la réponse des structures dans la nano-taille.

II.4.2. Application de l'élasticité non locale sur les théories de poutre :

II.4.2.1. Le champ de déplacement et les contraintes :

Un matériau possède un comportement élastique s'il existe les formes différentielles entre les relations des contraintes et des déformations, de comportement non local s'exprime comme suit :

La relation de contrainte normale σ_x avec la déformation ε_x :

$$\sigma_x - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = E \varepsilon_x \quad (\text{II.58a})$$

E : le module de Young du matériau.

La relation de contrainte de cisaillement τ_{xz} avec la déformation γ_{xz} :

$$\tau_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz} \quad (\text{II.58b})$$

G : le module de cisaillement.

μ : le paramètre non local.

La déformation normale ε_x suivent la direction x associée au déplacement axial u dans l'équation est :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.58c})$$

Nous rappelons que le champ de déplacement selon le mode proposée par Berrabah et al (2013) [Berrabah, H.M], comprend deux composantes le déplacement transversal w et le déplacement axial u de n'importe quel point de la nano poutre, sont donnés comme :

$$u = u_b + u_s \quad (\text{II.59a})$$

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{II.59b})$$

x : l'axe de long de la direction longitudinale, z : l'axe de l'hauteur de la nano poutre.

u_b , u_s sont les composantes de déplacement axial suivent la direction x : de flexion et de cisaillement respectivement.

L'expression de la composante de flexion u_b peut être donnée comme le déplacement de la théorie de la poutre classique :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{II.59c})$$

L'expression de la composante de cisaillement u_s est selon la fonction de forme $f(z)$ par rapport aux coordonnées d'épaisseur z est supposée être : parabolique, sinusoidale, hyperbolique et exponentielle, l'expression de u_s peut être donné comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.59d})$$

Le déplacement axial devient :

$$u = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.60a})$$

w_b , w_s : les composantes de déplacement transversale seulement en fonction de la coordonnée x : de flexion et de cisaillement respectivement.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.60b})$$

La déformation transversale de cisaillement γ_{xz} associée aux déplacements transversal w et le déplacement axial u dans l'équation sont :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - f'(z)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.60c})$$

les contraintes résultantes M_b, M_s, Q sont obtenues à partir d'injection les équations (γ_{xz}) dans l'équation (σ_x) et multiplier les équations $(\sigma_x), (\tau_{xz})$ avec zdA , donc les contraintes résultantes peut être exprimée par :

$$M_b - \mu \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = -D \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.61a})$$

$$M_s - \mu \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} = -D_s \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.61b})$$

$$Q - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (\text{II.61c})$$

Où :

$$(D, D_s, H_s) = \int_A E(z^2, zf(z), f(z)^2) dA$$

$$A_s = \int_A G[g(z)]^2 dA \quad (\text{II.61d})$$

II.4.2.2. Les équations du mouvement :

Le principe de "Hamilton " dans le cas équilibre (δK la variation virtuelle de l'énergie cinétique est nulle) qui écrit de deux composantes : δU la variation virtuelle de l'énergie de déformation et δV la variation virtuelle de l'énergie potentielle, Ce principe peut être énoncé sous une forme analytique :

$$\delta \int_0^T (U + V) dt = 0 \quad (\text{II.62})$$

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme :

$$\delta U = \int_0^L \int_{+\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (\text{II.63a})$$

$$\delta U = \int_0^L \left(-M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d \delta w_s}{dx} \right) dx \quad (\text{II.63b})$$

Sont les résultantes des contraintes définies comme :

$$(M_b, M_s, Q) = \int_A (z, f, g) \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} dA \quad (\text{II.63c})$$

Lorsque le nano poutre est soumis sous les charges appliquées : la charge transversale p et la charge axiale q , la variation de l'énergie potentielle peut être écrite comme :

$$\delta V = \int_0^L q \delta(w_b + w_s) dx + \int_0^L p \frac{d(w_b + w_s)}{dx} \frac{d\delta(w_b + w_s)}{dx} dx \quad (\text{II.63e})$$

en assemblant les coefficients δw_b , δw_s après l'injection des expressions de la variation de l'énergie de déformation et d'équation (II.63a) et de la variation de l'énergie potentielle (II.63b) dans l'équation (II.62) et en intégrant par parties, les équations de mouvement de la théorie des poutres peut être énoncée comme suit :

$$\delta w_b: \frac{d^2 M_b}{dx^2} - p \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{II.64a})$$

$$\delta w_s: \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} - p \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{II.64b})$$

En substituant les équations des contraintes résultantes M_b, M_s, Q dans les équations des coefficients δw_b , δw_s les équations de mouvement non locales peuvent être exprimées en termes de déplacements (w_b , w_s) comme :

δw_b :

$$-D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - p \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \mu \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) \right) + q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.65a})$$

δw_s :

$$-D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - p \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \mu \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) \right) + q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.65b})$$

Exemple d'application:

Nous écrivons les équations de mouvement non locales pour la théorie de poutre d'Euler Bernoulli avec, la composante de cisaillement dans théorie d'Euler Bernoulli est nulle $w_s = 0$ et $f(z) = 0$ le champ de déplacement écrit :

$$u(x, z) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}$$
$$w = w_b \quad (\text{II.65c})$$

Et la relation contrainte-déplacement est donnée par :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (\text{II.65d})$$

Et

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.65e})$$

Donc, l'équation de mouvement non locales peuvent être exprimées en termes de déplacements w_b comme :

$$\delta w_b: \quad D \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = - \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) M_b \quad (\text{II.65f})$$

II.4.3. la théorie des effets de surface non locale :

II.4.3.1. Introduction :

Les poutres et les plaques à l'échelle nanométrique ont été les composants clés du capteur et actionneur dans les systèmes nano électromécaniques (NEMS) (voir le figure d'un nano résonateur), Il a de larges applications dans les diagnostics médicaux, surveillance de l'environnement, transformation des aliments, mines, bioingénierie et défense [Stewart M. E.] ,Comprendre le comportement mécanique de telles structures est donc important pour l'amélioration de leurs applications dans la conception de tels systèmes, des matériaux utilisés pour fabriquer ces structures tels que Si, Al, C, SiC.

Une propriété particulièrement des structures à l'échelle nanométrique(telles que nanofils, nanotubes et nanofilms présentent des caractéristiques mécaniques, électroniques, optiques et magnétiques[Gleiter H][Morris D G] qui n'existent pas dans le cas de structures classiques et donc les effets des surfaces ne peuvent plus être négligés lorsque l'ensemble le comportement de ces nanostructures est considéré[Gleiter H][Morris D G][Wu Y et al]) est ses propriétés dépendant de la taille et le grand rapport de surface à volume (où l'énergie associée à la surface devient d'une ampleur comparable à le volume, l'énergie associée aux atomes de surface est appelée énergie libre de surface, l'énergie de surface est liée aux des contraintes de surface). avec l'hypothèse que la surface a une épaisseur de plusieurs couches atomiques pour introduire la notion de contrainte de surface et de déformation.

Les effets de taille ont été incorporés dans la théorie de continuité classique, en réécrivant, le comportement contrainte-déformation incluant les effets d'échelle de longueur, appelé théorie non locale, la contrainte de surface(les effets des surfaces) a également été liée à de tels calculs.

Le comportement statique et dynamique des structures à l'échelle nanométrique a été étudié par des chercheurs, par exemple,Liu, Rajapakse et Phani [Liu C., Rajapakse R. K. N. D] présenté la charge critique de flambage sous contrainte de surface seulement. et [Ansari, R.] adopté différentes théories de poutre pour l'analyse de flambage de nano-poutre avec effet de surface, Lee et Chang [Lee H. L] étudié la charge de flambement axial pour les nanofils en utilisant la théorie de l'élasticité non locale en conjonction avec les effets de surface.

Ces études sont dépendantes sur l'hypothèse que les déplacements plans et transversaux [Berrabah, H.M] et [Bourada, M] avec l'intégration la théorie de l'élasticité locale et la théorie de l'élasticité non locale avec les effets de surface.

II.4.3.2. Application de l'élasticité non locale et les des surface sur les théories de poutre :

II.4.3.2.1. Hypothèses de base :

Considérons une nano poutre d'un matériau isotrope as une hauteur totale (h), une longueur (L) et une largeur (b) dans les différentes théories des poutres : d'Euler-Bernoulli, de Premier Ordre et d'ordre élevé, les hypothèses sont les suivantes :

Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la nano poutre. et par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.

- Le déplacement axial u dans la direction x contient deux composantes:

$$\text{Flexionnelle : } u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}$$

$$\text{Cisaillement : } u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$u(x, z) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.66a})$$

- le déplacement transversal w comprend deux composantes, de flexion w_b , et de cisaillement w_s . les deux composent en fonction de la coordonnée x :

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{II.66b})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est ne néglige pas devant la contrainte plane σ_x .

II.4.3.2.2. Les équations constitutives :

a- Le champ de déformation et la contrainte :

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (II.66a) et (II.66b) sont :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{II.66c})$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - f'(z)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.66d})$$

Nous vendrions étudier la réponse mécanique des nano poutre par la théorie de poutre non locale et les effets des surfaces en utilisant les contraintes de surface et les contraintes de volume.

Les composantes de la contrainte normale de volume et de surface associées aux déformations pour les théories de poutre non locale actuelle peuvent être exprimées comme :

a) les contraintes normales dans la nano poutre deviennent :

$$\sigma_x = \sigma_x^b + \sigma_x^s \quad (\text{II.67a})$$

L'exposant s est utilisé pour représenter les quantités correspondant à la surface.

L'exposant b est utilisé pour représenter les quantités correspondant au volume.

σ_x^b représente la contrainte normale en fonction de la direction x s'exprime comme suit

$$\sigma_x^b - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x^b}{\partial x^2} = E \varepsilon_x + \nu \sigma_z \quad (\text{II.67b})$$

$$\text{Avec : } \sigma_z = \frac{2z\nu\tau^s}{h} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)$$

σ_z : la composante de contrainte de la théorie de Gurtin-Murdoch qui changer linéairement dans l'épaisseur de la poutre.

ν : le coefficient de Poisson.

σ_x^s : la contrainte normale de surface en fonction de la direction x s'exprime comme suit :

$$\sigma_x^s - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x^s}{\partial x^2} = (2\mu^s + \lambda^s)\varepsilon_x + \tau^s \quad (\text{II.67c})$$

μ^s, λ^s : les constantes de Lamé.

τ^s : la tension superficielle résiduelles généralement est un nombre positif.

b) les contraintes transversales de volume et de surface dans la nano poutre deviennent :

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^b + \tau_{xz}^s \quad (\text{II.67d})$$

τ_{xz}^b : la contrainte transversale de volume et τ_{xz}^s : la contrainte transversale de surface, donc la contrainte devinent :

$$\tau_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = Gg(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} + \tau^s \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \quad (\text{II.67e})$$

b- Équations de mouvement :

En utilisant le principe de Hamilton pour déterminer les équations du mouvement, le principe peut être énoncé sous une forme :

$$\delta \int_0^T (U + V) dt = 0 \quad (\text{II.68a})$$

δU , δV représentes respectivement la variation de l'énergie de déformation et la variation de l'énergie potentielle de la nano poutre.

La variation de l'énergie de déformation peut être énoncée comme suit :

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx$$

$$\delta U = \int_0^L \left(-M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d \delta w_s}{dx} \right) dx \quad (\text{II.68b})$$

Où : M_b, M_s, Q sont les résultantes des contraintes définies comme suit :

$$M_b^s = \int_A z \sigma_x^s ds, \quad M_b^b = \int_A z \sigma_x^b dA, \quad M_s^s = \int_A f \sigma_x^s ds, \quad M_s^b = \int_A f \sigma_x^b dA,$$

$$Q = \int_A g \tau_{xz} dA$$

$$M_b = M_b^b + M_b^s$$

Et

(II.68c)

$$M_s = M_s^b + M_s^s$$

La variation du travail effectué par des forces extérieures δV :

$$\delta V = \int_0^L q \delta(w_b + w_s) dx + \int_0^L p \frac{d(w_b + w_s)}{dx} \frac{d\delta(w_b + w_s)}{dx} dx \quad (\text{II.69a})$$

En effectuant l'injection et l'intégration par parties les équations de mouvement de la théorie des poutres sont obtenues :

$$\delta w_b: \quad \frac{d^2 M_b}{dx^2} - p \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{II.69b})$$

$$\delta w_s: \quad \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} - p \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} + q = 0$$

En substituant l'équation de déformation dans l'équation de contraintes et les résultats suivants dans l'équation (II.68), les contraintes résultantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} &= \left[\frac{2I_v \tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{h^3}{6} + \frac{Ah}{2} \right) \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \\ &\quad \left[\frac{2I_v \tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right] \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\ \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} &= \left[\frac{2I_1 v \tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \\ &\quad \left[\frac{2I_1 v \tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right] \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\ \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} &= \left[A_{55}^s + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p4} - J_{p2}) \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

En effectuant l'équation (II.70a), (II.70b) et (II.70c) dans l'équation (II.69), les équations de mouvement pour la théorie non local et les effets des surfaces peuvent être exprimées en termes de déplacements (w_b , w_s) comme :

$$\left[\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{h^3}{6} + \frac{Ah}{2} \right) \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left[\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right] \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mu P \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) + (H - P) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.71a})$$

$$\left[\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right] \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left[\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right] \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \left[A_{55}^s + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mu P \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) + (H - P) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.71b})$$

avec :

$$(D_{11}, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_A E(z^2, zf(z), f(z)^2) dA$$

$$A_{55}^s = \int_A G[g(z)]^2 dA$$

$$I = \int_A z^2 dA$$

$$I_1 = \int_A zf(z) dA$$

$$J_{p1} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [g(z)]^2 dz \quad (\text{II.71c})$$

$$J_{p2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} g(z) dz$$

$$J_{p3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f'(z)g(z) dz$$

$$I_{p3} = \int_s f(z) ds$$

$$I_{p4} = \int_s zf(z) ds$$

$$I_{p5} = \int_s [f(z)]^2 ds$$

$$H = 2b\tau^s$$

II.5.Conclusion :

Dans cette partie, nous avons présenté dans la première partie les différents types des théories des poutres telles que la théorie classique, la théorie de cisaillement de premier ordre et les théories d'ordre élevé, pour chaque théorie on commençant par le champ de déplacement, puis nous avons donné les relations de contraintes-déformations et enfin les équations d'équilibre.

Dans la deuxième partie les différents modèles classiques ont été développés sous la théorie non locale qui est proposée par Eringen, elle est utilisée pour modifier l'état classique de poutre pour l'analyse de comportement d'échelle de micro- et nano-poutre, au cours de modifier l'état classique de poutre, les modèles été écrite pour introduire l'effet de contrainte de surface sur l'approche de Gurtin-Murdoch, et pour chaque approche nous écrivons les relations de contraintes-déformations et les équations d'équilibre, dans ce dernier nous intégrons les deux approche ensemble pour l'étude la flexion et le flambement des nano poutres.

Références Bibliographiques

-A-

[**Ansari, R**] Ansari, R. and Sahmani, S. (2011), “Bending behavior and buckling of nanobeams including surface stress effects corresponding to different beam theories”, Int. J. Eng. Sci., 49, 1244-1255.

-B-

[**Batoz J.L.**] Batoz J.L., Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. volume 2. Hermes, 1990.

[**Berrabah, H.M**] Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams”, Struct. Eng. Mech., 48(3), 351-365.

[**BENNAI, R**] Riadh BENNAI, « contribution a l'étude de la vibration et la stabilité des structures fonctionnellement graduées », U. de Chlef, 05/06/2016

[**Bourada, M.**] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, Steel Compos. Struct., 18(2), 409-423.

-D-

[**Draiche, K.**] Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, Steel Compos. Struct., 17(1), 69-81.

-E-

[**Eringen A. C1972**] Eringen A. C. [1972] Nonlocal polar elastic continua, International Journal of Engineering Science, 10, 1-16.

[**Eringen, A.C. 1983**] Eringen, A.C. (1983). “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves,” Journal of Applied Physics, 54, 4703-4710.

[**Eringen A. C., Edelen D. G. B**] Eringen A. C., Edelen D. G. B., [1972] On nonlocal Elasticity, International Journal of Engineering Science, 10,233-248.

-G-

[**Gleiter H**] Gleiter H 1989 Nanocrystalline materials Prog. Mater. Sci. 33 223–315

[Gurtin, M. E, & Murdoch, A. . 1975] Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1975). A continuum theory of elastic material surface. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4), 291–323.

[Gurtin, M. E, & Murdoch, A. . 1978] Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1978). Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 14(6), 431–440.

-K-

[Karama, 2003]M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Struct.* 40 (6) (2003) 1525–1546.

-L-

[Lee H. L] Lee H. L., Chang W. J. [2010] Surface effects on axial buckling of nonuniform nanowires using nonlocal elasticity theory, *Micro and Nano Letters*, 6,1, 19-21.

[Liu C., Rajapakse R. K. N. D] Liu C., Rajapakse R. K. N. D., Phani A. S. [2011] Finite Element Modelling of Beams With Surface Energy Effects, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 78, 1-9.

[Lu, P.] Lu, P., He, L.H., Lee, H.P. and Lu, C. (2006), “Thin plate theory including surface effects”, *Int. J. Solid. Struct.*, 43(16), 4631-4647.

-M-

[Morris D G] Morris D G 1998 *Mechanical Behavior of Nanostructured Materials* (Endfield, NH: Trans Tech Publications, Inc.)

-R-

[Reddy, J.N.1984] Reddy, J.N. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J. Appl. Mech.*, 51(4), 745-752.

[Reddy, J.N.2002] Reddy, J.N. (2002), *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons Inc.

-S-

[Soldatos, K.] Soldatos, K. (1992), “A transverse shear deformation theory for homogeneous mono- clinic plates”, *Acta Mech.*, 94(3), 195-220.

[Stewart M. E.] Stewart M. E., Anderton C. R., Thompson L. B., Maria J., Gray S. K., Rogers J A and Nuzzo R. G. *Chemical Review*, 2008, 108, 494-521.

-T-

[Touratier, M.] Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901-916.

-W-

[Wu Y et al] Wu Y et al 2004 Single-crystal metallic nanowires and metal/semiconductor nanowire heterostructures *Nature* 430 61

-Y-

[Yan, Z.] Yan, Z. and Jiang, L.Y. (2011), “The vibrational and buckling behaviors of piezoelectric nanobeams with surface effects”, *Nanotechnol.*, 22, 245703-245709.

Chapitre III

Validation des résultats

III .1. Introduction :

Dans ce partie on concentrer sur les solutions analytiques de la charge critique de flambement et de la flexion de nano poutre, les théories qui utiliser sont : la théorie des effets de surface, la théorie non locale et la théorie des effets de surface non locale.

III .2. Les solutions analytiques de la théorie des effets de surface:

Dans cette partie on discute sur les solutions analytique des effets de surface, où nous avons une nano poutre isotrope simplement appuyée avec la longueur L soumis à une charge transversale q et charge axiale p aux bords de la nano poutre, les solutions sont développées donner pour flexion et flambement de nano poutre avec les contrainte de surface, les différentes quantités de déformations (w_b, w_s) sont choisis pour satisfaire les conditions aux limites simplement supportées de la poutre :

$$w_b = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.1a})$$

$$w_s = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin(\alpha x)$$

Où W_{bn} et W_{sn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, et $\alpha = n\pi/L$, les conditions aux limites simplement supportées peuvent être exprimées comme :

$$w_b(0) = w_s(L) = 0$$

La charge transversale q agissant sur les nano poutres pour analyser le comportement en flexion des nano poutres peut être écrite dans la transformée de Fourier comme :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\alpha x) \quad (\text{III.1b})$$

Où

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx$$

Les coefficients de Fourier Q_n est l'amplitude de la charge qui calculer à partir d'équation (III.1b), il y a certaines charges typiques sont donnés :

Pour une charge sinusoïdale :

$$Q_n = q_0, n = 1$$

Deuxième charge typique pour une charge uniforme :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, n = 1,3,5,$$

q_0 : La densité de chargement appliquée, pour existe les solutions analytique en injectant les équations (III.1a) et (III.1b) dans les équations (II.70a) et (II.70b) les solutions propres pour la flexion et le flambage y compris les effets de contraintes de surface peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} - p_{cr} \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Où

$$S_{11} = \alpha^4 \left(H + \left(\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{h^3}{6} + \frac{Ah}{2} \right) \right) \right) \quad (\text{III.3a})$$

$$S_{12} = \alpha^4 \left(H + \left(\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right) \right) \quad (\text{III.3b})$$

$$S_{21} = \alpha^4 \left(H + \left(\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p4} \right) \right) \quad (\text{III.3c})$$

$$S_{22} = \alpha^4 \left(H + \left(\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - H_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s) I_{p5} \right) \right) - \alpha^2 \left(A_{55}^s + \mu^s J_{p1} + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right) \quad (\text{III.3d})$$

Les coefficients μ^s, λ^s sont les constantes de surface de Lamé, τ^s est la contrainte de surface résiduelle

ν : le coefficient de Poisson.

Notons que les solutions de matrice S_{ij} ($i = 1,2$ et $j = 1,2$) sont changées pour chaque fonction de gauchissement qui sont données par les théories de poutre avec les contraintes de surface. prenons les modèles des fonctions selon les expressions qui présenter comme suit :

1) Le modèle de Reddy (1984) [Reddy, 1984]: $f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$ et la fonction de

$$\text{cisaillement } g(z) = 1 - \frac{4z^2}{h^2}$$

2) Le modèle de Touratier (1991) [Touratier, M.]: $f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$ et la

$$\text{fonction de cisaillement } g(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

3) Le modèle de Soldatos(1992) [Soldatos, K.]: $f(z) = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$ et

$$\text{la fonction de cisaillement } g(z) = \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

h : l'épaisseur de la poutre.

❖ La flexion :

La première solution est la solution statique pour les problèmes de flexion à partir d'équation (III.3) en prenant la charge critique $p_{cr} = 0$ on obtient l'équation suivant:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{S_{11} - S_{12}^2/S_{22}} + \frac{Q_n}{S_{22} - S_{12}^2/S_{11}} - \frac{2Q_n}{S_{11}S_{22}/S_{12} - S_{12}} \right) \sin \alpha x \quad (\text{III.4a})$$

❖ Le flambement :

La deuxième solution est la charge de flambage est obtenue à partir d'équation (III.3) où la charge transversale $q = 0$, on obtient :

$$p_{cr} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\alpha^2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12})} \quad (\text{III.4b})$$

III .2.1. Résultats numériques et discussion :

Dans cette partie, nous allons présenter les ensembles de résultats obtenus de la charge critique de flambage de poutre en fonction du rapport longueur/épaisseur (L/h) il y a deux cas :

Premier cas on néglige les effets de surface c'est-à-dire les contraintes de surface sont nulles sur le travers de l'épaisseur de poutre, ce qui s'appelle le cas classique où :

$$\sigma_x^s = 0 \text{ et } \tau_{xz}^s = 0$$

Deuxième cas est : nous allons entrer les effets de surface alors les contraintes de surface ne sont pas négligées sur la travers de l'épaisseur seulement dans les coté ($\pm h/2$) , ce cas est s'appelé la théorie non classique. Pour les nano poutres les propriétés suivantes ont été utilisées par Gurtin and Murdoch (1978) [Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I.] :

$$E = 17.73 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0.27, \lambda^s = -8 \text{ N/m}, \mu^s = 2.5 \text{ N/m}, \tau^s = 1.7 \text{ N/m}$$

On suppose que la largeur est égale avec l'hauteur de nano poutre $b = h = 1 \text{ nm}$ et la longueur est varié entre le dix jusqu'à le cinquante nanomètre $\frac{L}{h} = 10$ à 50 .

Les résultats numériques sont donnés pour les solutions analytiques développées dans la section précédente, mes résultats sont comparées avec les résultats qui obtenir par Ansari and Sahmani (2011) [Ansari, R] comme est présent dans les tables.

➤ **Les tableaux de flexion :**

TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992),
Ref(a) : [Ansari, R]

L/h	Ref ^(a)		TBT		SBT		HBT	
	Classical	non-classical	Classical Calculé	non-classical calculé	Classical Calculé	non-classical calculé	classical calculé	non-classical calculé
10	8.8127	2.7423	9.0276	2.7538	9.0273	2.7544	8.9890	2.7544
15	44.6145	7.2189	45.0980	7.2238	45.0973	7.2240	45.0110	7.2240
20	141.0039	13.6198	141.8635	13.6216	141.8622	13.6217	141.7089	13.6217
25	344.2479	21.8829	345.5910	21.8835	345.5890	21.8835	345.3494	21.8835
30	713.8325	31.9907	715.7665	31.9909	715.7636	31.9909	715.4186	31.9909
35	1322.4628	43.9385	1325.0952	43.9386	1325.0913	43.9368	1324.6216	43.9386
40	2256.0632	57.7251	2259.5014	57.7251	2259.4964	57.7251	2258.8829	57.7251
45	3613.7770	73.3501	3618.1285	73.3501	3617.3456	73.3501	3617.3456	73.3501
50	5507.9667	90.8133	5513.3390	90.8133	5512.3725	90.8133	5512.3725	90.8133

Tableau III.1: Comparaison entre les flexions centrales maximales sous charge uniforme de nano poutre obtenus avec des solutions classiques et non classiques,

L/h	Ref ^(a)		TBT		SBT		HBT	
	Classical	non-classical	Classical Calculé	non-classical calculé	Classical Calculé	non-classical calculé	classical calculé	non-classical calculé
10	1.3743	0.4220	1.4062	0.4229	1.4062	0.4230	1.4004	0.4230
15	4.6382	0.7335	4.6861	0.7334	4.6861	0.7334	4.6774	0.7334
20	10.9942	1.0303	11.0580	1.0300	11.0580	1.0300	11.0466	1.0300
25	21.4731	1.3173	21.5529	1.3171	21.5528	1.3171	21.5385	1.3172
30	37.1055	1.5992	37.2013	1.5991	37.2011	1.5991	37.1840	1.5991
35	58.9222	1.8782	59.0339	1.8781	59.0337	1.8781	59.0138	1.8781
40	87.9539	2.1555	88.0815	2.1554	88.0813	2.1554	88.0585	2.1554
45	125.2312	2.4317	125.3748	2.4317	125.3746	2.4317	125.3489	2.4317
50	171.7849	2.7073	171.9444	2.7073	171.9442	2.7073	171.9157	2.7073

Tableau III.2: Comparaison entre les flexions centrales maximales sous charge ponctuelle de nano poutre obtenus avec des solutions classiques et non classiques

L'Interprétation des tableaux de flexion:

Les tableaux III.1 et III.2: montrent respectivement les flexions maximales d'un nano poutre supporté simplement.

- les flexions maximales d'un nano poutre supporté simplement soumis à une charge uniforme et à une charge ponctuelle en utilisant les théories classiques et non classiques, Les résultats obtenus de diverses théories de déformation de cisaillement proposées sont comparés avec la théorie des poutres de EBT (Euler-Bernoulli beam theory) et la théorie du poutre de FBT (First beam theory) pour une large gamme de rapport $\frac{L}{h} = 10$ à 50. On peut voir que les résultats des théories actuelles sont en excellent accord avec que obtenu par FBT pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur $\frac{L}{h}$, Le TBT, le SBT et le HBT fournissent des solutions qui sont presque les mêmes pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur $\frac{L}{h}$, alors que l'EBT sous-estime les flexions.
- La différence entre les théories EBT et de déformation de cisaillement de (TBT, SBT, HBT et FBT) est l'EBT néglige les effets de déformation de cisaillement pour les nano poutre minces, Il peut être prouvé à partir des résultats qu'en introduisant les impacts de contrainte de surface, les déformations correspondant à toutes les valeurs de rapport d'épaisseur $\frac{L}{h}$ ce qui montre ne néglige pas les contraintes de surface. Qui va augmenter la dureté de nano poutre.

➤ **Les tableaux de flambement:**

TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992),
Ref(a) : [Ansari, R]

L/h	Ref ^(a)		TBT		SBT		HBT	
	Classical	non-classical	Classical Calculé	non-classical calculé	Classical Calculé	non-classical calculé	classical calculé	non-classical calculé
10	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272
15	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518
20	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117
25	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998
30	0.1616	3.5389	0.1616	3.5389	0.1616	3.5389	0.1616	3.5389
35	0.1188	3.5021	0.1188	3.5021	0.1188	3.5021	0.1188	3.5021
40	0.0910	3.4782	0.0910	3.4782	0.0910	3.4782	0.0910	3.4782
45	0.0719	3.4618	0.0719	3.4618	0.0719	3.4618	0.0719	3.4618
50	0.0583	3.4501	0.0583	3.4501	0.0583	3.4501	0.0583	3.4501

Tableau III.3: représente les charges critiques de flambage de nano poutre au première mode.

L/h	Ref ^(a)		TBT		SBT		HBT	
	Classical	non-classical	classical calculé	non-classical calculé	Classical Calculé	non-classical calculé	classical calculé	non-classical calculé
10	5.3019	8.0214	5.3019	8.0204	5.3027	8.0201	5.3019	8.0204
15	2.4819	5.5471	2.4819	5.5469	2.4820	5.5468	2.4819	5.5469
20	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272
25	0.9185	4.1914	0.9185	4.1913	0.9185	4.1913	0.9185	4.1913
30	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518
35	0.4723	3.8064	0.4723	3.8064	0.4723	3.8064	0.4723	3.8064
40	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117	0.3623	3.7117
45	0.2866	3.6465	0.2866	3.6465	0.2866	3.6465	0.2866	3.6465
50	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998	0.2324	3.5998

Tableau III.4: représente les charges critiques de flambage de nano poutre au deuxième mode.

TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992),
 Ref(a) : [Ansari, R]

L/h	Ref ^(a)		TBT		SBT		HBT	
	Classical	non-classical	classical calculé	non-classical calculé	Classical Calculé	non-classical calculé	classical calculé	non-classical calculé
10	10.7134	12.8760	10.7134	12.8700	10.7175	12.8690	10.7134	12.8703
15	5.3019	8.0214	5.3019	8.02204	5.3027	8.0200	5.3019	8.0204
20	3.1060	6.0915	3.1060	6.0912	3.1062	6.0910	3.1060	6.0912
25	2.0267	5.1512	2.0267	5.1511	2.0268	5.1511	2.0267	5.1511
30	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272	1.4226	4.6272
35	1.0520	4.3066	1.0520	4.3066	1.0520	4.3066	1.0520	4.3066
40	0.8089	4.0967	0.8089	4.0966	0.8089	4.0966	0.8089	4.0966
45	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518	0.6410	3.9518
50	0.5203	3.8478	0.5203	3.8478	0.5203	3.8477	0.5203	3.8478

Tableau III.5:représente les charges critiques de flambage de nano poutre au troisième mode.

L'Interprétation des tableaux de flambement:

- les tableaux III.3,4 ,5: montrent les charges critiques de flambage de nano poutre correspondant aux trois premières mode obtenu avec des solutions classiques et non classiques pour différentes conditions aux limites avec des rapports de $\frac{L}{h} = 10$ à 50.
- les études comparatives des charges critiques de flambage de TBT, de SBT et de HBT sont comparés avec les résultat d'Ansari et Sahmani (2011), on peut observer un excellent accord entre les résultats pour différentes valeurs de rapport de $\frac{L}{h}$.
- Aussi, on peut voir que les résultats des théories classiques sont peu comparés en comparant avec des théories non classiques, en raison de la négligence de la contrainte de surface, cet effet est important pour la rigidité de nano poutre.

➤ **Les figures :**

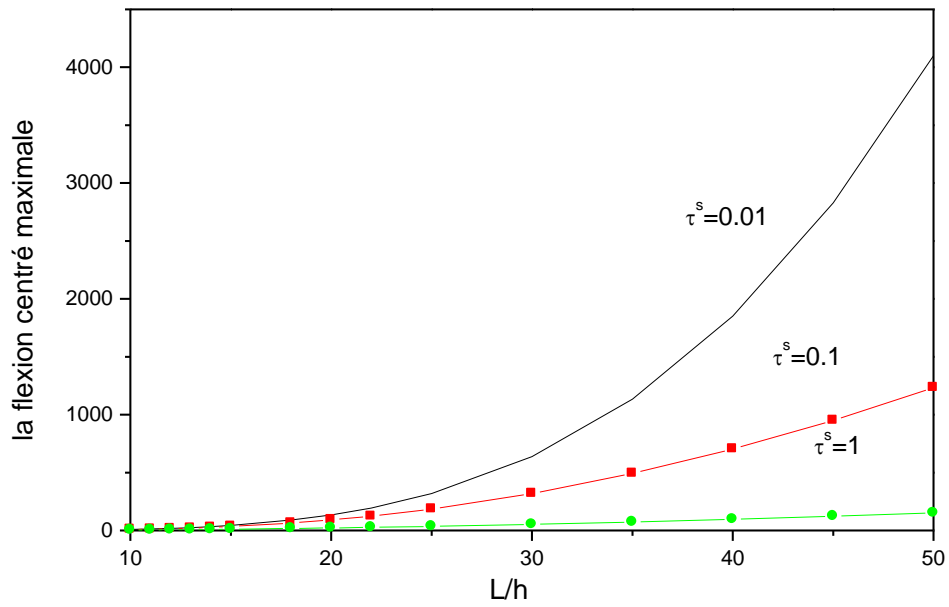


Figure III.1 : Variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$

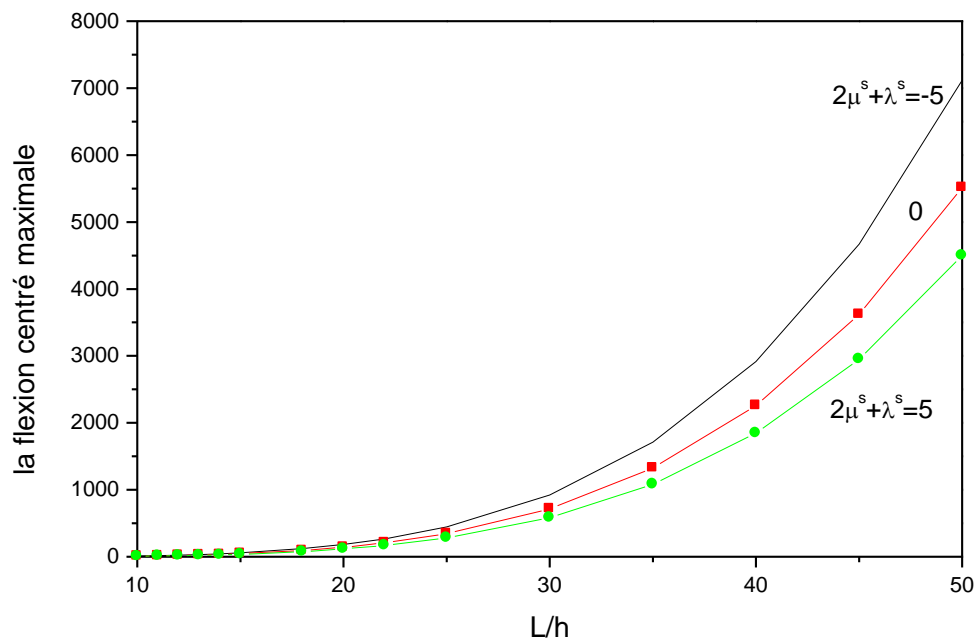


Figure III.2 : Variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$

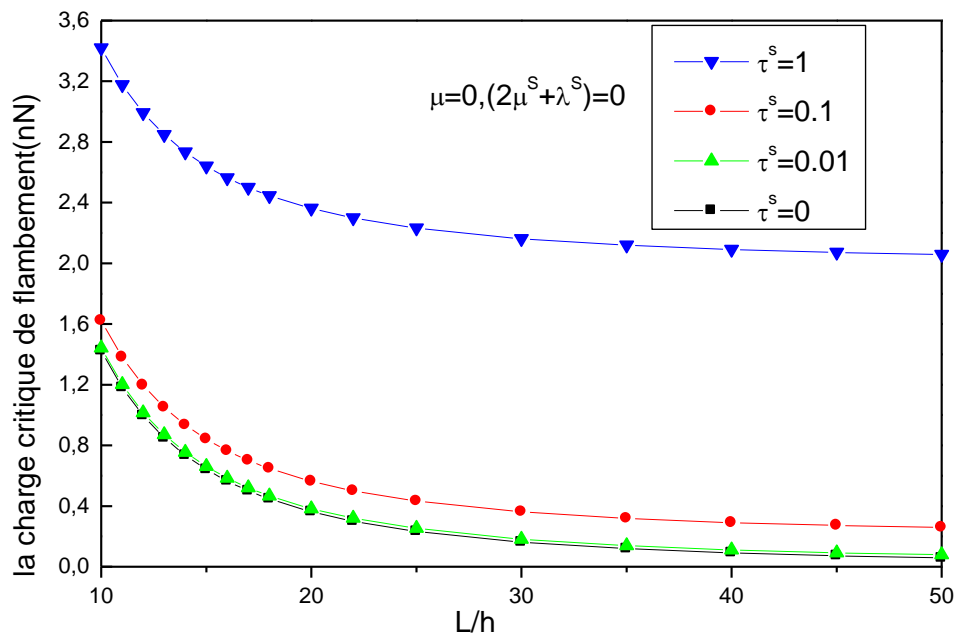


Figure III.3 : Variation de la charge critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$

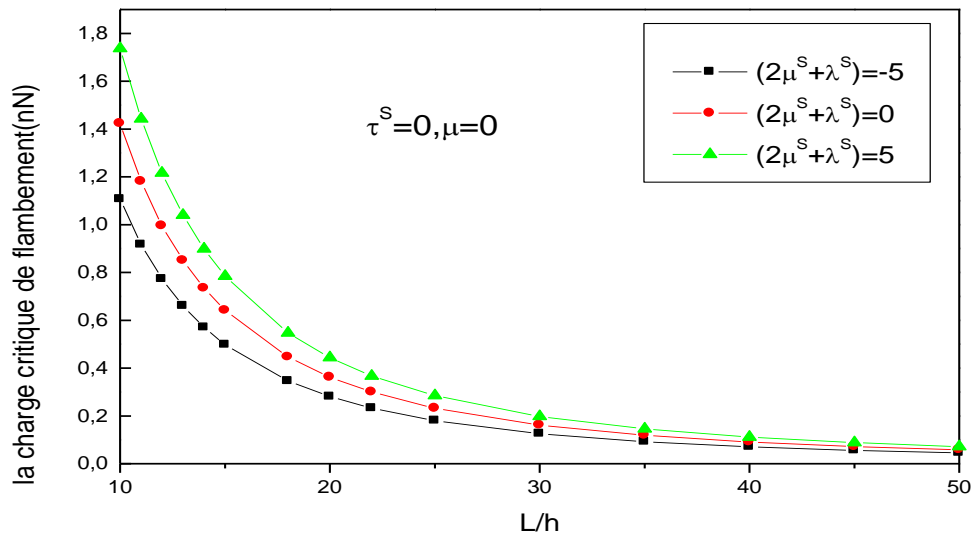


Figure III.4 : Variation de la charge critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$

Interprétation des figures :

- Le premier cas la figure III.1 montre l'influence de la valeur de τ^S sur la flexion de nano poutre en fonction de $\frac{L}{h}$, où on prends la valeur de $2\mu^S + \lambda^S = 0$ la flexion de nano poutre est représentée correspond à diverses valeur de τ^S en utilisant divers les théorie de poutres d'ordre élevé (TBT, SBT et HBT), On voit que la valeur de τ^S augmente donc la rigidité de flexion globale du nano poutre augmente.
- Le deuxième cas la figure III.2 présente la flexion de nano poutre par rapport au rapport de $\frac{L}{h}$ de nano poutre, où la valeur de $\tau^S = 0$ pour les conditions différents de $2\mu^S + \lambda^S$, la valeur positive de $2\mu^S + \lambda^S$ rend le nano poutre plus rigide, et la valeur non positive de $2\mu^S + \lambda^S$ diminue la rigidité du nano poutre.
- L'effet des valeurs de τ^S sur la variation de la charge critique de nano poutre est montré dans figure III.3 , On peut observer que l'augmentation de la valeur de τ^S induit une augmentation de la rigidité de flexion globale du nano poutre.
- La variation de la charge critique des nano poutre en fonction du rapport de $\frac{L}{h}$ de nano poutre pour trois conditions différentes est illustré dans figure III.4 , où $\tau^S = 0$, la valeur non positive de $2\mu^S + \lambda^S$ rend le nano poutre plus doux, tandis que, pour la valeur positive de $2\mu^S + \lambda^S$ le nano poutre devient plus rigide.

III .2.2. Conclusion sur la théorie des effets de surface :

Dans cette partie des effets de surfaces nous avons présenté un cadre de contraintes superficielles de volume et de surface, ces contraintes sont basées sur les théories des poutres d'ordre élevé, pour étudier la réponse de flexion et de flambage de nano poutre, Nos résultats ont montré que les comportements de flexion et de flambage des nano poutre sont affectés par les impacts de contrainte de surface, où ce travail démontré que l'inclusion de l'effet de contrainte de surface rend un nano poutre plus rigide, et donc, conduit à une réduction de la flexion et une augmentation de la charge de flambage.

III .3. Les solutions analytiques de la théorie non locale :

Des solutions analytiques sont obtenues des équations (II.65a) et (II.65b) et sont donnés pour la géométrie d'une nano poutre (la longueur L , la largeur b et l'hauteur h , en utilisant un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z)) isotrope simplement appuyée pour la flexion et le flambement avec les conditions des limite sont :

$$w_b(0) = w_s(L) = 0$$

$$M_b(0) = M_s(L) = 0$$

Pour la flexion et le flambement, le déplacement peut être exprimé :

$$w_b = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.5a1})$$

$$w_s = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.5a2})$$

Avec W_{bn} et W_{sn} sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\alpha = n\pi/L$.

Dans la série sinus de Fourier la charge transversale q peut être exprimée :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\alpha x) \quad (\text{III.5a3})$$

Où

$$Q_n = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q(x) \sin(\alpha x) \quad (\text{III.5a4})$$

Il y a certaines charges typiques sont donnés pour Les coefficients de Fourier :

Pour une charge sinusoïdale :

$$Q_n = q_0 , n = 1 \quad (\text{III.5a5})$$

Deuxième charge typique pour une charge uniforme :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} , n = 1,3,5, \quad (\text{III.5a6})$$

Les solutions analytiques de la théorie non locale sont écrites dans ce cas comme suit :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = (1 + \mu\alpha^2) \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5a7})$$

Avec :

$$M_{11} = S_{11} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.5b1})$$

$$M_{12} = S_{12} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.5b2})$$

$$M_{21} = S_{21} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.5b3})$$

$$M_{22} = S_{22} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.5b4})$$

Où :

$$S_{11} = H\alpha^2 - D_{11}\alpha^4 \quad (\text{III.6a1})$$

$$S_{12} = H\alpha^2 - D_{11}^s\alpha^4 \quad (\text{III.6a2})$$

$$S_{21} = H\alpha^2 - D_{11}^s\alpha^4 \quad (\text{III.6a3})$$

$$S_{22} = (H + A_{55}^s)\alpha^2 - H_{11}^s\alpha^4 \quad (\text{III.6a4})$$

❖ **Flexion :**

En utilisant de l'équation (III.5a7) et pour compenser la charge critique $p_{cr} = 0$, on obtient l'équation de flexion suivant:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{11}-S_{12}^2/S_{22}} + \frac{(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{22}-S_{12}^2/S_{11}} - \frac{2(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{11}S_{22}/S_{12}-S_{12}} \right) \sin \alpha x \quad (\text{III.7a})$$

❖ **flambement :**

La charge de flambage est obtenue à partir d'équation (III.5a6) où la charge transversale $q = 0$, on obtient :

$$p_{cr} = \frac{S_{11}S_{22}-S_{12}^2}{\alpha^2(1+\mu\alpha^2)(S_{11}+S_{22}-2S_{12})} \quad (\text{III.7b})$$

III .3.1. Résultats numériques et discussion :

Les résultats numériques pour la flexion sous une charge uniforme sont donnés dans les tables III.6,7, Plusieurs auteurs qui étudier la théorie non locale sur la nano poutre, l'idée de base de cette étude est d'étudier le comportement de flexion et de flambement d'un nano poutre en présence de chargement transversal q et charges axiale p , et le système de coordonnées d'étude est un système cartésiennes (x,y,z) , et les axes principaux sont les axes x et z . Les contraintes de surface dans ce partie sont négligées :

$$\sigma_x^s = 0, \quad \tau_{xz}^s = 0$$

Où les propriétés suivantes $\nu, \lambda^s, \mu^s, \tau^s$ sont nulles, on peut appeler cette étude théorie classique nonlocal.

Avec la propriété mécanique de ce nano poutre est : $E = 17.73 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$,

➤ **Les tableaux de Flexion:**

EBT model d'Euler-Bernoulli, TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT Calculé
10	0	8.8127	9.0276	9.0273	9.0276
	1	9.6587	9.8907	9.8904	9.8907
	2	10.5047	10.7540	10.7536	10.7540
	3	11.3508	11.6172	11.6168	11.6172
15	0	44.6145	45.0979	45.0973	45.0979
	1	46.5180	47.0187	47.0179	47.0187
	2	48.4216	48.9394	48.9386	48.9394
	3	50.3251	50.8601	50.8594	50.8601
20	0	141.0039	141.8634	141.8622	141.8634
	1	144.3880	145.2647	145.2634	145.2647
	2	354.8232	148.6660	148.6647	148.6660
	3	151.1562	152.0673	152.0659	152.0673
50	0	55079667	5513.3390	5513.3311	5513.3397
	1	5529.1173	5534.5066	5534.4988	5534.5074
	2	5550.2678	5555.6744	5555.6666	5555.6752
	3	5571.4184	5576.8421	5576.8343	5576.8429

Tableau III.6: représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge

uniforme pour une nano poutre simplement appuyées.

EBT model d'Euler-Bernoulli, TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT calculé	HBT Calculé
10	0	1.3743	1.4062	1.4061	1.4061
	1	1.5000	1.5334	1.5334	1.5334
	2	1.6255	1.6606	1.6606	1.6606
	3	1.7511	1.7880	1.7880	1.7880
15	0	4.6382	4.6860	4.6860	4.6860
	1	4.8266	4.8754	4.8754	4.8754
	2	5.0150	5.0648	5.0648	5.0648
	3	5.2035	5.2542	5.2542	5.2542
20	0	10.9942	11.0580	11.0580	11.0580
	1	11.2454	11.3100	11.3100	11.3100
	2	11.4967	11.5618	11.5618	11.5618
	3	11.7480	11.8137	11.8137	11.8137
50	0	171.7849	171.9444	171.9442	171.9444
	1	172.4130	172.5726	172.5724	172.5726
	2	173.0411	173.2009	173.2007	173.2009
	3	173.6700	173.8301	173.8301	173.8301

Tableau III.7:représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge ponctuelle pour une nano poutre simplement appuyées.

➤ **Les tableaux de Flambement :**

EBT model d'Euler-Bernoulli, TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT Calculé
10	0	1.4582	1.4226	1.4226	1.4226
	1	1.3272	1.2948	1.2948	1.2948
	2	1.2178	1.1880	1.1881	1.1880
	3	1.1251	1.0975	1.0976	1.0975
15	0	0.6481	0.6407	0.6409	0.6407
	1	0.6208	0.6140	0.6140	0.6140
	2	0.5958	0.5893	0.5893	0.5893
	3	0.5727	0.5664	0.5664	0.5664
20	0	0.3645	0.3623	0.3623	0.3623
	1	0.3557	0.3535	0.3535	0.3535
	2	0.3474	0.3452	0.3452	0.3452
	3	0.3394	0.3373	0.3373	0.3373
50	0	0.0583	0.0583	0.0583	0.0583
	1	0.0581	0.0580	0.0580	0.0580
	2	0.0578	0.0578	0.0578	0.0578
	3	0.0576	0.0576	0.0576	0.0576

Tableau III.8: les charges critiques de flambage de nano poutre au troisième mode $n=1$

EBT model d'Euler-Bernoulli, TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT Calculé
10	0	5.8329	5.3019	5.3019	5.3019
	1	4.1819	3.8012	3.8012	3.8012
	2	3.2594	2.9627	2.9627	2.9627
	3	2.6703	2.4272	2.4272	2.4272
15	0	2.5924	2.4818	2.4818	2.4818
	1	2.2054	2.1114	2.1114	2.1114
	2	1.9190	1.8371	1.8371	1.8371
	3	1.6984	1.6259	1.6259	1.6259
20	0	1.4582	1.4226	1.4226	1.4226
	1	0.2296	1.2948	1.2948	1.2948
	2	1.2178	1.1880	1.1880	1.1880
	3	1.1251	1.0975	1.0975	1.0975
50	0	0.2333	0.2324	0.2324	0.2324
	1	0.0581	0.2288	0.2288	0.2288
	2	0.2267	0.2252	0.2252	0.2252
	3	0.2227	0.2218	0.2218	0.2218

Tableau III.9: les charges critiques de flambage de nano poutre au troisième mode $n=2$

L/h	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT Calculé
10	0	13.1241	10.7133	10.7133	10.7133
	1	6.9503	5.6736	5.6736	5.6736
	2	4.7268	3.8585	3.8585	3.8585
	3	3.5811	2.9233	2.9233	2.9233
15	0	5.8329	5.3020	5.3020	5.3020
	1	4.1819	3.8012	3.8012	3.8012
	2	3.2594	2.9627	2.9627	2.9627
	3	2.6703	2.4272	2.4272	2.4272
20	0	2.2810	3.1060	3.1060	3.1060
	1	2.6848	2.5415	2.5415	2.5415
	2	2.2720	2.1507	2.1507	2.1507
	3	1.9691	1.8640	1.8640	1.8640
50	0	0.5250	0.5203	0.5203	0.5203
	1	0.5070	0.5024	0.5024	0.5024
	2	0.4901	0.4857	0.4857	0.4857
	3	0.4744	0.4701	0.4701	0.4701

Tableau III.10: les charges critiques de flambage de nano poutre au troisième mode $n=3$

L'interprétation des tableaux:

- les tableaux III.6,7 représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge uniforme et la charge ponctuelle en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle μ selon les résultats obtenus des flexions de diverses théories de déformation de cisaillement proposées (SBT , HBT)sont en excellent accord avec ceux prédits par le RBT.
- La différence entre les théories de cisaillement et la théorie d'EBT est de se référer aux effets de déformation de cisaillement, selon les théories de cisaillement les résultats pour le paramètre d'échelle il diminue avec l'augmentation de L/h et est plus évident pour un faible rapport d'épaisseur L/h .
- dans théorie de EBT l'augmentation du rapport d'épaisseur L/h les résultats de flexion sont convergents à une certaine valeur avec les théories de cisaillement où l'EBT néglige les effets de déformation de cisaillement $\tau_{xz} = 0$ au contraire avec les théories de déformation de cisaillement.
- les tableaux III.8 ,9 ,10:présent les résultats numériques de charge critiques de nano poutre correspondant aux trois premières mode obtenu, Ces derniers sont obtenus en utilisant les théories par RBT, SBT et HBT et leurs résultats sont bon accorde considéré entre eux pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur L/h , nous observons que avec l'augmentation de paramètre d'échelle μ les charges de flambement sont réduites, l'effet non locale est démunie et perdu pour l'augmentation de rapport de L/h et cet effet est important pour un faible rapport d'épaisseur L/h dans les théories local et non local.
- la différence entre les théories locales et non locales sont plus évidents et importante pour une grande valeur du paramètre d'échelle où la théorie locale diminue la flexion et augmente les charges de flambement des nano poutres et l'effet non local augmente la flexion et diminue les charges de flambement, plus précisément, cela note plus clairement pour l'augmentation de rapport de L/h tout ceci est clairement démontré dans les figures : Figure III.5, Figure III.6.

➤ **Les figures :**

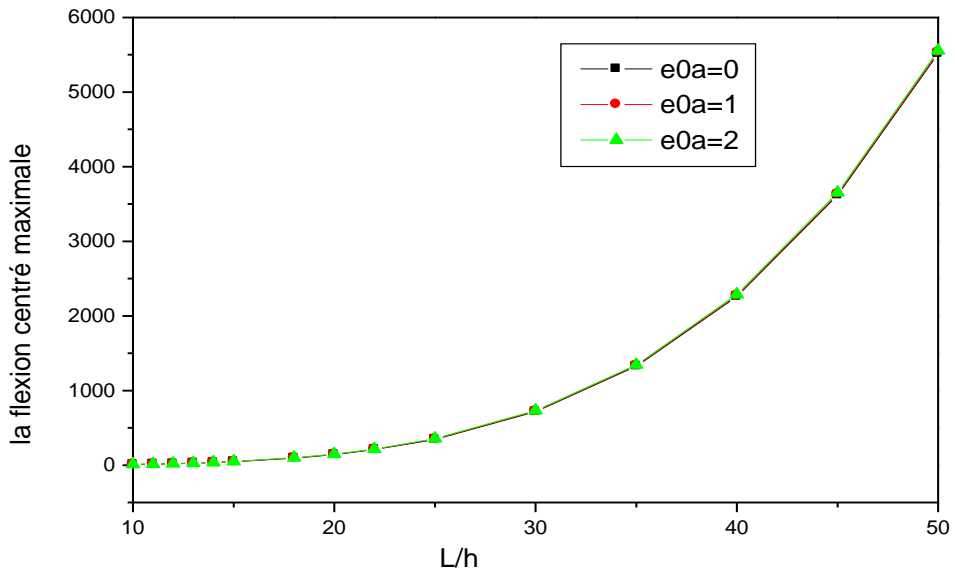


Figure III.5 : comparaison entre les flexions pour les nano poutre en fonction du rapport $\frac{L}{h}$ avec les coefficients d'échelle μ différents

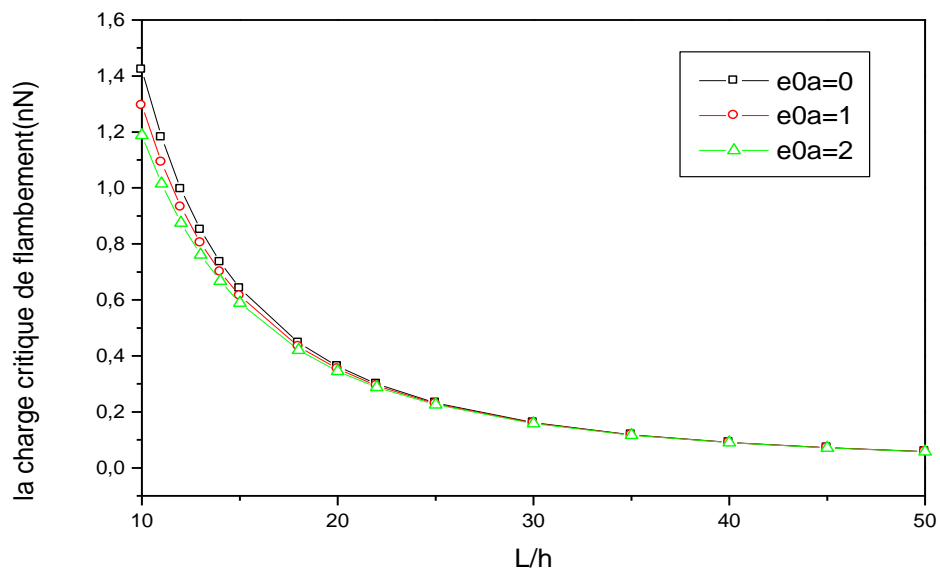


Figure III.6 : comparaison entre les charges critique de flambement pour les nano poutre en fonction du rapport $\frac{L}{h}$ avec les coefficients d'échelle μ différents

III .3.2.conclusion sur la théorie non locale :

Nous sommes dans cette partie du travail nous avons appliqué plusieurs modèles que sont utilisées les déplacements plans et transversaux sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement, ces théorie sont prendre en compte les effets de déformation de cisaillement locales et les effets de déformation de cisaillement locales pour la flexion et la flambement de nano poutre, où l'effet non locale augmente la flexion et diminue les charges de flambement contrairement à la théorie locale, les résultats de tous les modèles proposés sont presque identiques les uns aux autres.

III .4. Les solutions analytiques de la théorie des effets de surface non locale :

Dans cette analyse, on considérant une nano poutre a les caractéristiques suivant : de longueur L et d'une section transversale rectangulaire de largeur b et de hauteur h . elle soumit par des charges transversale q et charges axiale p , dans cette analyse en utilisant un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) , les axes x et z sont les axes principaux .

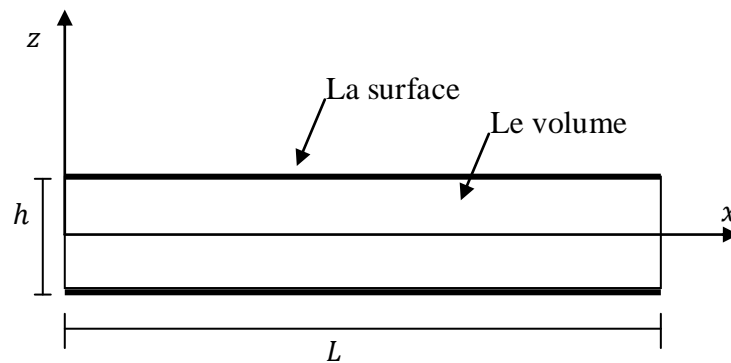


Figure III.7 : les coordonnées et la section longitudinale géométrique d'une nano poutre

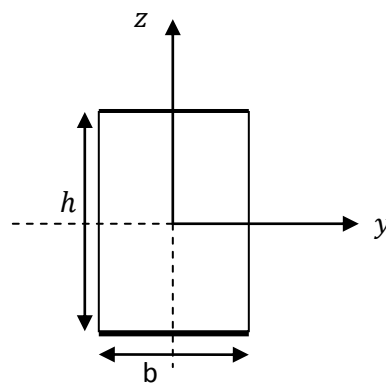


Figure III.8 : les coordonnées et la géométrie de la section droite d'une nano poutre

Où :

L'axe longitudinale du x (l'axe médian de la poutre) est changé entre les bordes suivant $L = 0$ et la longueur maximale de la poutre L :

$$0 \leq x \leq L$$

l'axe de hauteur z (est perpendiculaire au plan xy) qui change entre les bordes suivant $z = -\frac{h}{2}$ et $z = +\frac{h}{2}$.

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}$$

Avec l'étude analytique de la théorie nan locale et les effets des surfaces de nano poutre pour la flexion et le flambement sera dans les conditions aux limites suivantes :

$$w_b(0) = w_s(L) = 0$$

$$M_b(0) = M_s(L) = 0$$

Est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour les poutres simplement appuyées.

Les composantes du déplacement est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour le nano poutre simplement appuyées peuvent être considérées dans la forme généralisée suivante et qui satisfait les conditions aux limites :

$$w_b = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.8a1})$$

$$w_s = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.8a2})$$

Où W_{bn} et W_{sn} sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\alpha = n\pi/L$

La charge transversale agissant sur les nano poutre pour analyser le comportement en flexion et en flambement des nano poutre est élargie dans la série de la transformée de Fourier comme :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\alpha x) \quad (\text{III.8b1})$$

Où

$$Q_n = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q(x) \sin(\alpha x) \quad (\text{III.8b2})$$

Où les coefficients de Fourier Q_n :

- Première charge typique pour une charge pour une charge ponctuelle:

$$Q_n = \frac{2q_0}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 1,2,3 \quad (\text{III.8b3})$$

- Deuxième charge typique pour une charge uniforme :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, n = 1,3,5 \quad (\text{III.8b4})$$

En effectuant les expressions de w_b, w_s et q des équations (III.1a), (III.1b) dans les équations (II.56a) et (II.56b), les solutions analytique peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = (1 + \mu\alpha^2) \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8c})$$

Avec :

$$M_{11} = S_{11} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.9a1})$$

$$M_{12} = S_{12} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.9a2})$$

$$M_{21} = S_{21} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.9a3})$$

$$M_{22} = S_{22} - P\alpha^2(1 + \mu\alpha^2) \quad (\text{III.9a4})$$

Où :

$$S_{11} = H\alpha^2 + \left(\frac{2I\nu\tau^s}{h} - D_{11} - (2\mu^s + \lambda^s) \left(\frac{h^3}{6} + \frac{Ah}{2} \right) \right) \alpha^4 \quad (\text{III.9d1})$$

$$S_{12} = H\alpha^2 + \left(\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s)I_{p4} \right) \alpha^4 \quad (\text{III.9d2})$$

$$S_{21} = H\alpha^2 + \left(\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - D_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s)I_{p4} \right) \alpha^4 \quad (\text{III.9d3})$$

$$S_{22} = H\alpha^2 + \left(\frac{2I_1\nu\tau^s}{h} - H_{11}^s - (2\mu^s + \lambda^s)I_{p5} \right) \alpha^4 + \quad (\text{III.9d4})$$

$$+ \left(A_{55}^s + \mu^s J_{p1} + \frac{1}{2} \tau^s (J_{p3} - J_{p2}) \right) \alpha^2$$

Sachent que : I et A sont respectivement le moment d'inertie et la section de la poutre.

Les coefficients μ^s, λ^s sont les constantes de surface de Lamé.

τ^s : la contrainte de surface résiduelle

ν : le coefficient de Poisson.

$$H = 2b\tau^s$$

$S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$: les solutions analytiques.

❖ **La Flexion :**

à partir de l'équation (III.8) et pour compenser la charge critique $p_{cr} = 0$, on obtient l'équation de flexion suivant:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{11}-S_{12}^2/S_{22}} + \frac{(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{22}-S_{12}^2/S_{11}} - \frac{2(1+\mu\alpha^2)Q_n}{S_{11}S_{22}/S_{12}-S_{12}} \right) \sin \alpha x \quad (\text{III.10a})$$

❖ **Le Flambement :**

La charge de flambage est obtenue à partir d'équation (III.8) où la charge transversale $q = 0$, on obtient :

$$p_{cr} = \frac{S_{11}S_{22}-S_{12}^2}{\alpha^2(1+\mu\alpha^2)(S_{11}+S_{22}-2S_{12})} \quad (\text{III.10b})$$

Pour la théorie non local et les effets de surfaces, nous écrivons les solutions analytique comme :

Note :

- la théorie classique(en négligeant la théorie non locale et les effets de surfaces) :

$$\mu = 0, (2\mu^s + \lambda^s) = 0 \text{ et } \tau^s = 0$$

- La théorie non classique:

$$\mu = 0, (2\mu^s + \lambda^s) \neq 0 \text{ et } \tau^s \neq 0$$

- La théorie non locale:

$$\mu \neq 0, (2\mu^s + \lambda^s) = 0 \text{ et } \tau^s = 0$$

III .4.1. Résultats numériques et discussions:

Nous étudions les changements de la charge critique de flambage et la flexion de nano poutre en fonction du rapport longueur/épaisseur (L/h), que la largeur est égale avec l'hauteur de nano poutre $b = h = 1nm$ et les valeurs de rapport d'épaisseur sont variées entre le dix jusqu'à le cinquante nanomètre $\frac{L}{h} = 10$ à 50 .

Et nous prenons dans tous les calculs le coefficient de Poisson est pris égale à ($\nu = 0.27$) et le coefficient de Young $E = 17.73 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

- ✓ les propriétés suivantes ont été utilisées par Gurtin and Murdoch (1978) pour les effets de surfaces sont comme:

$$\lambda^s = -8 \text{ N/m}, \mu^s = 2.5 \text{ N/m}, \tau^s = 1.7 \text{ N/m}$$

- ✓ pour étudier l'effet non local sur les poutres à l'échelle nanométrique est comme : $\mu = 0, 1, 2, 3$

❖ Les tableaux de Flexion :

EBT model d'Euler-Bernoulli, TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	τ^s	$(2\mu^s + \lambda^s)$	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT calculé
10	0	0	0	8.8127	9.0276	9.0273	8.9890
	1.7	-3	0	8.8127	2.7544	2.7544	2.7543
			1	9.6587	3.0038	3.0038	3.0038
			2	10.5048	3.2533	3.2533	3.2532
			3	11.3508	3.5027	3.5027	3.5027
15			0	44.6145	7.2240	7.2240	7.2240
			1	46.5180	7.5053	7.5053	7.5053
			2	48.4216	7.7867	7.7867	7.7867
			3	50.3252	8.0680	8.0680	8.0680
20			0	141.0040	13.6217	13.6217	13.6217
			1	144.3880	13.9122	13.9122	13.9122
			2	147.7721	14.2026	14.2026	14.2026
			3	151.1562	14.4931	14.4931	14.4931
50			0	5507.9667	90.8133	90.8133	90.8133
			1	5529.1173	91.1073	91.1073	91.1073
			2	5550.2680	91.4014	91.4014	91.4014
			3	5571.4184	91.6955	91.6955	91.6955

Tableau III.11:représente les résultats numériques pour la flexion sous la charge uniforme en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle μ

L/h	τ^s	$(2\mu^s + \lambda^s)$	$\mu(nm^2)$	EBT Calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT calculé
10	0	0	0	1.3743	1.4062	1.4062	1.4004
	1.7	-3	0	0.4220	0.4230	0.4230	0.4230
			1	0.4552	0.4555	0.4555	0.4555
			2	0.4883	0.4880	0.4881	0.4880
15	1.7	-3	3	0.5215	0.5206	0.5207	0.5206
			0	0.7335	0.7334	0.7334	0.7334
			1	0.7564	0.7559	0.7559	0.7559
			2	0.7792	0.7783	0.7784	0.7783
20	1.7	-3	3	0.8020	0.8007	0.8009	0.8007
			0	1.0302	1.0300	1.0300	1.0300
			1	1.0467	1.0461	1.0461	1.0461
			2	1.0632	1.0623	1.0624	1.0623
50	1.7	-3	3	1.0800	1.0785	1.0786	1.0785
			0	2.7073	2.7072	2.7072	2.7072
			1	2.7132	2.7130	2.7130	2.7130
			2	2.7192	2.7187	2.7187	2.7187
	1.7	-3	3	2.7252	2.7244	2.7244	2.7244

Tableau III.12:représente les résultats numériques pour la flexion sous une charge ponctuelle en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle μ

❖ **Les tableaux de Flambement :**

$e^{xp}BT$ model de Karama(2003), TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	τ^s	$(2\mu^s + \lambda^s)$	$\mu(nm^2)$	$e^{xp}BT$ calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT calculé
10	0	0	0	1.4226	1.4226	1.4226	1.4226
	1.7	-3	0	4.6272	4.6272	4.6272	4.6272
			1	4.2115	4.2115	4.2115	4.2115
			2	3.8644	3.8644	3.8644	3.8644
15	1.7	-3	3	3.5701	3.5701	3.5701	3.5701
			0	3.9518	3.9518	3.9518	3.9518
			1	3.7857	3.7857	3.7857	3.7857
			2	3.6330	3.6330	3.6330	3.6330
20	1.7	-3	3	3.4922	3.4922	3.4922	3.4922
			0	3.7117	3.7117	3.7117	3.7117
			1	3.6223	3.6223	3.6223	3.6223
			2	3.5371	3.5371	3.5371	3.5371
50	1.7	-3	3	3.4559	3.4559	3.4559	3.4559
			0	3.4501	3.4501	3.4501	3.4501
			1	3.4365	3.4365	3.4365	3.4365
			2	3.4230	3.4230	3.4230	3.4230
	1.7	-3	3	3.4097	3.4097	3.4097	3.4097

Tableau III.13: Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=1$

e^{XP}BT model de Karama(2003), TBT model de Reddy (1984), SBT model de Touratier (1991), HBT model de Soldatos (1992).

L/h	τ^s	$(2\mu^s + \lambda^s)$	$\mu(nm^2)$	e ^{XP} BT calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT Calculé
10	0	0	0	5.3019	5.3019	5.3027	5.3019
	1.7	-3	0	8.0208	8.0204	8.0204	8.0204
			1	5.7506	5.7502	5.7502	5.7502
			2	4.4820	4.4817	4.4817	4.4817
15			3	3.6719	3.6717	3.6717	3.6717
			0	5.5470	5.5469	5.5469	5.5469
			1	4.7190	4.7189	4.7189	4.7189
			2	4.1061	4.1060	4.1060	4.1060
20			3	3.6340	3.6340	3.6340	3.6340
			0	4.6272	4.6272	4.6272	4.6272
			1	4.2115	4.2115	4.2115	4.2115
			2	3.8644	3.8644	3.8644	3.8644
50			3	3.5701	3.5701	3.5701	3.5701
			0	3.5998	3.5998	3.5998	3.5998
			1	3.5438	3.5439	3.5439	3.5439
			2	3.4896	3.4896	3.4896	3.4896
			3	3.4370	3.4370	3.4370	3.4370

Tableau III.14: Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=2$

L/h	τ^s	$(2\mu^s + \lambda^s)$	$\mu(nm^2)$	e ^{XP} BT calculé	RBT Calculé	SBT Calculé	HBT calculé
10	0	0	0	10.7134	10.7134	10.7174	10.7134
	1.7	-3	0	12.8730	12.8700	12.8700	12.8700
			1	6.8177	6.8157	6.8157	6.8157
			2	4.6363	4.6352	4.6352	4.6352
15			3	3.5126	3.5118	3.5118	3.5118
			0	8.0208	8.0204	8.0204	8.0204
			1	5.7506	5.7502	5.7502	5.7502
			2	4.4820	4.4817	4.4817	4.4817
20			3	3.6719	3.6717	3.6717	3.6717
			0	6.0913	6.0911	6.0911	6.0911
			1	4.9844	4.9843	4.9843	4.9843
			2	4.2179	4.2178	4.2178	4.2178
50			3	3.6558	3.6557	3.6557	3.6557
			0	3.8477	3.8478	3.8478	3.8478
			1	3.7157	3.7157	3.7157	3.7157
			2	3.5924	3.5925	3.5925	3.5925
			3	3.4771	3.4771	3.4771	3.4771

Tableau III.15: Comparaison de la charge critique pour la théorie non locale et les effets de surfaces qui applique sur une nano poutre simplement appuyées où $n=3$.

L'interprétation des tableaux :

- Les résultats numériques pour la flexion sous une charge uniforme sont donnés dans le tableau III.11 et le tableau III.12 représente la flexion numérique sous une charge ponctuelle, les exemples numériques sont comparés avec les autres qui sont obtenues par les théories de déformation de cisaillement proposées (RBT, SBT, HBT), En général, toutes les théories de déformation de cisaillement donnent sont en excellent accord pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur L/h , selon l'augmentation de paramètre d'échelle μ et le rapport d'épaisseur L/h les résultats de flexion sont augmentées et qui sont plus prononcés pour une charge uniforme.
- les tableaux III.13, 14, 15: représente les charges critiques de flambage de nano poutre correspondant aux trois premières modes obtenu avec les solutions de deux théories la théorie non locale et la théorie des effets de surfaces pour différentes conditions aux limites avec des rapports de $\frac{L}{h} = 10$ à 50 , les théories de déformation de cisaillement proposées ce qu'elles ont données un excellent accord entre les résultats sur la longueur de L/h pour les théories de cisaillement proposées (RBT, SBT, HBT), les résultats de flambement est plus évident en cas d'absence de paramètre d'échelle μ et absence des effets de surface et est plus évident lorsque les effets de surface et le paramètre d'échelle sont pris en compte, La charge critique est diminuée avec l'augmentation de paramètre non local à existe les effets de surface, les effets non local et les effets de surface sont importants au faible de rapport d'épaisseur L/h et à l'inverse pour un rapport élevé de L/h , cette importance pour augmenter la dureté de surface de nano poutre, la différence entre la théorie locales et non locales à les théorie des effets de surfaces est l'effet non local augmente la flexion et diminue les charges de flambement par rapport à la théorie local.
- Ces valeurs supportent le fait que où : la théorie non local avec les effets de surface retardent le phénomène de flambage pour un nano poutre. Et la théorie locale tend à aider dans le phénomène de flambage.

➤ Les figures :

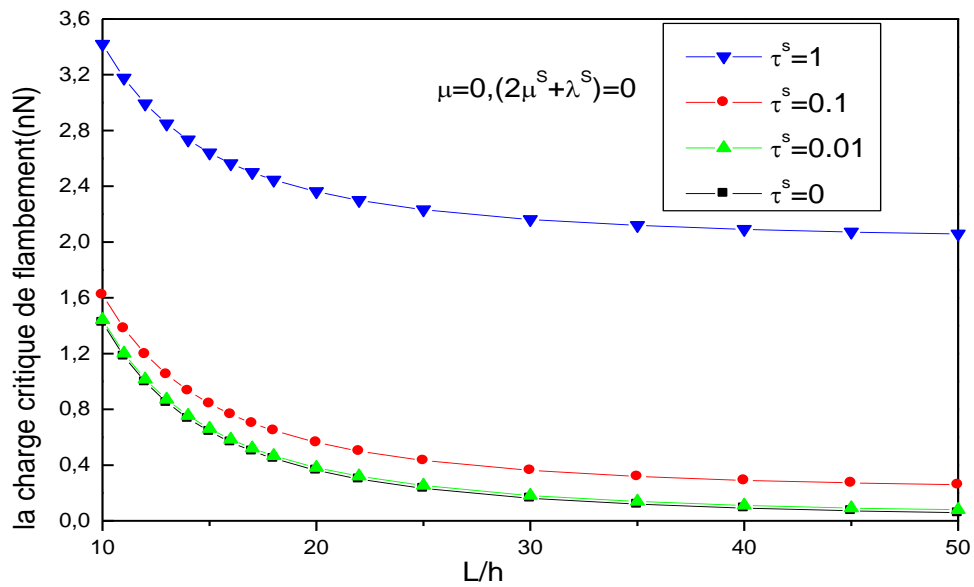


Figure III.9a : la charge critique de flambement en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 0$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT.

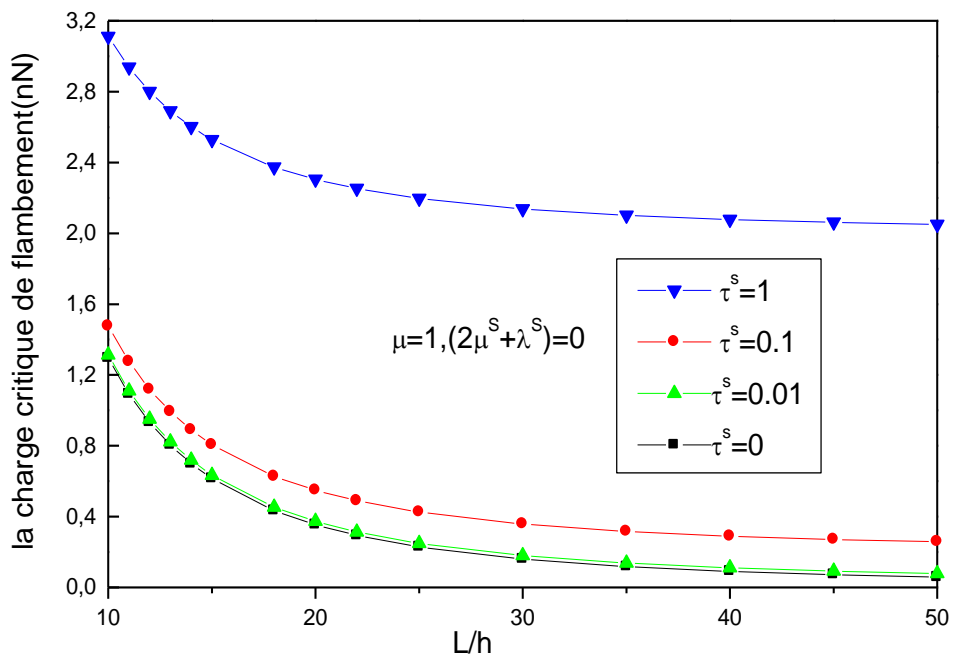


Figure III.9b : la charge critique de flambement en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 1$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT.

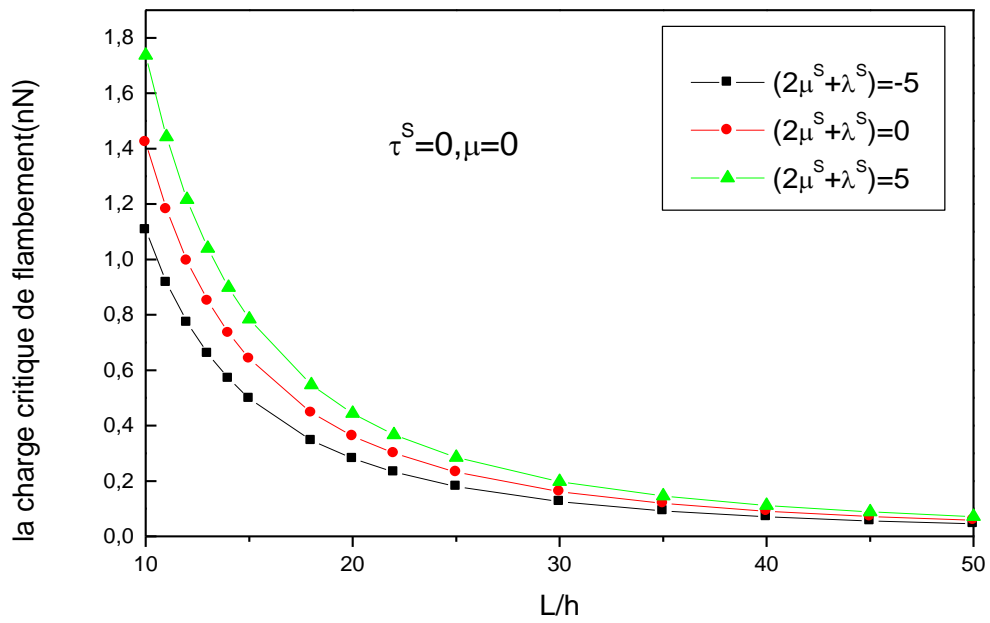


Figure III.10a : la charge critique de flambement en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 0$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT.

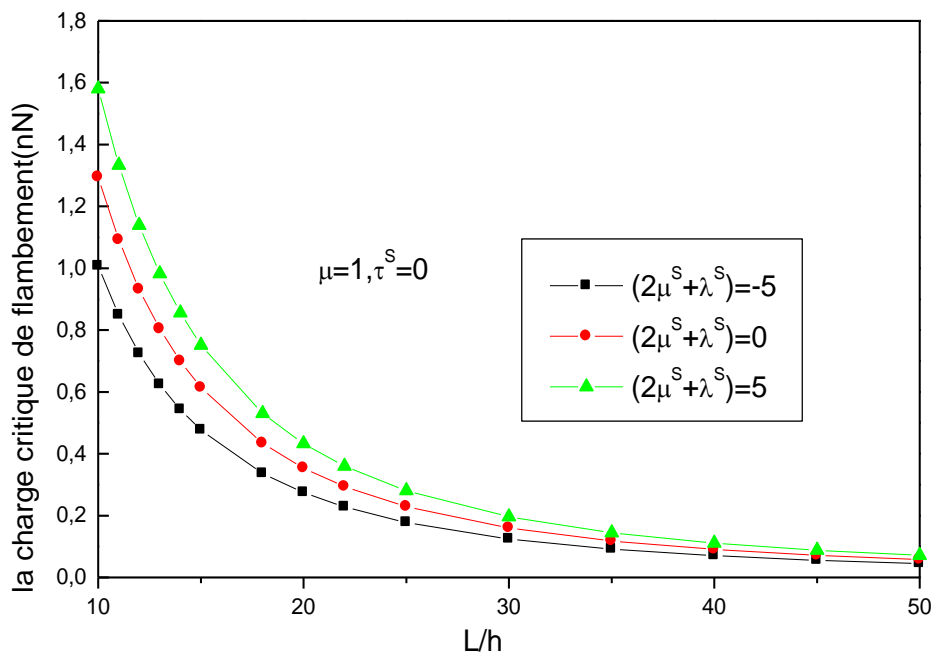


Figure III.10b: la charge critique de flambement en fonction du rapport d'épaisseur L/h et le paramètre d'échelle $\mu = 1$ pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle de RBT.

L'interprétation des figures III.9,10:

Figure III.9b montre les variations de la charge critique à travers du rapport L/h d'une nano poutre où $2\mu^s + \lambda^s = 0$ et pour l'influence des conditions différents de τ^s avec le paramètre non locale est fixe en $\mu = 1$ et utilisant le modèle de RBT, on observe que l'augmentation de la valeur de τ^s induit une augmentation de la rigidité du nano poutre. Cette augmentation est prononcée surtout quand le nano poutre est courte.

Figure III.10b indique que l'influence de la valeur de $2\mu^s + \lambda^s$ sur le comportement de flambement des nano poutre où la valeur de τ^s est égale à zéro pour un paramètre fixe du non local en $\mu = 1$, correspondant à les valeurs du rapport L/h , utilisant le modèle de RBT, pour trois conditions différentes de $2\mu^s + \lambda^s$, la valeur non positive de $2\mu^s + \lambda^s$ conduit à la diminution de la rigidité de la nano poutre et le positif de $2\mu^s + \lambda^s$ rend la nano poutre plus rigide, Cette augmentation est prononcée surtout quand la nano poutre est courte.

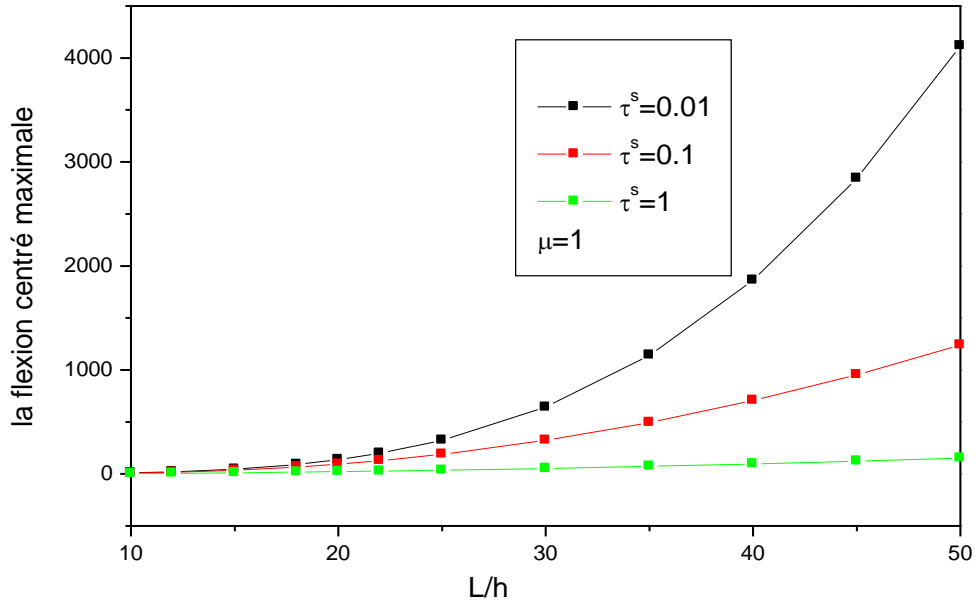


Figure III.11 : Variation de la flexion critique avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de τ^s avec l'hypothèse de $2\mu^s + \lambda^s = 0$ en utilisant le modèle de RBT.

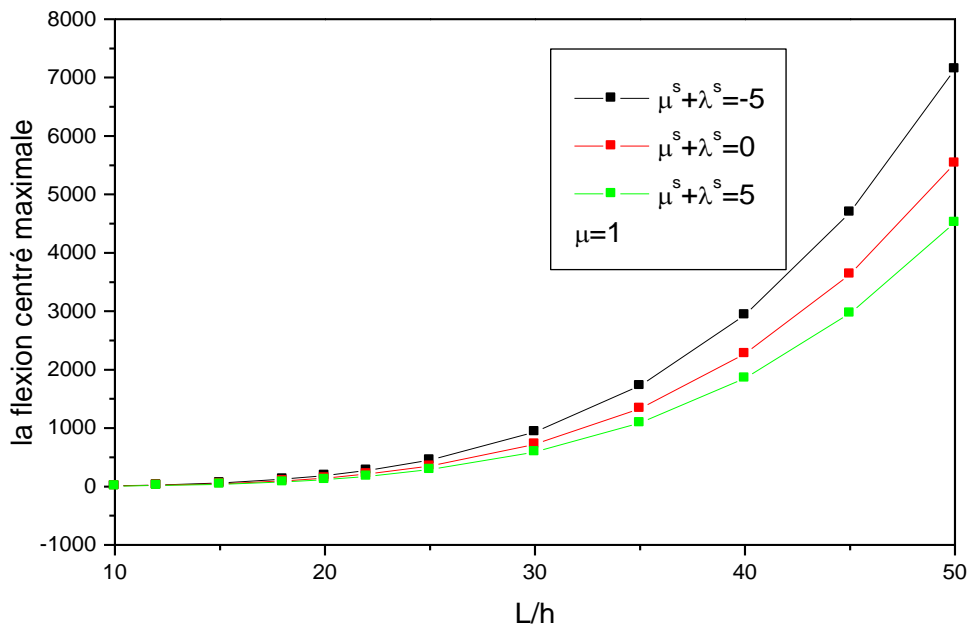


Figure III.12 : Variation de la flexion avec le rapport L/h correspondant à différentes valeurs de grandeurs de $2\mu^s + \lambda^s$ avec l'hypothèse de $\tau^s = 0$ et $\mu = 1$ en utilisant le

L'interprétation des figures III.11 ,12:

Figure III.11 montre que la variation de flexion par rapport à le rapport d'épaisseur pour la nano poutre L/h et contient le paramètre non locale $\mu = 1$ et qui soumis à une charge uniforme, et on prend le constante de Lamé est nulle $2\mu^s + \lambda^s = 0$ avec les conditions différentes de τ^s , la flexion est la plus réduit quand le nano poutre est court, on observe que l'augmentation de τ^s devient la structure de nano poutre plus rigidité.

Figure III.12 on a tracé la variation de flexion à travers la distribution du rapport de l'épaisseur L/h de nano poutre avec un paramètre fixe de l'effet non locale $\mu = 1$ sous une charge uniforme et τ^s est nulle pour trois conditions différentes de $2\mu^s + \lambda^s$, la flexion est la plus réduit quand le nano poutre est court, on noté que les valeur positive rend la nano poutre plus rigide, à contraire pour les valeurs non positive.

A partir les courbe des figures III.9, 10, 11, 12 On peut observer que :

- ✓ Les courbes indiqués clairement que le paramètre non locale a un grande l'influence sur les contraintes des surfaces.
- ✓ l'influence des effets de surface et l'effet non locale augmente la flexion et diminue les charges de flambement.
- ✓ on peut conclure que la théorie non locale avec les effets de surface sous-estime la flexion et surestime la charge de flambement surtout quand la longueur du nano poutre est plus longue.
- ✓ Assi la théorie non locale avec les effets de surface sous-estime la flexion et surestime la charge de flambement par rapport à la théorie locale sans les effets de surface (c'est-à-dire la théorie classique).

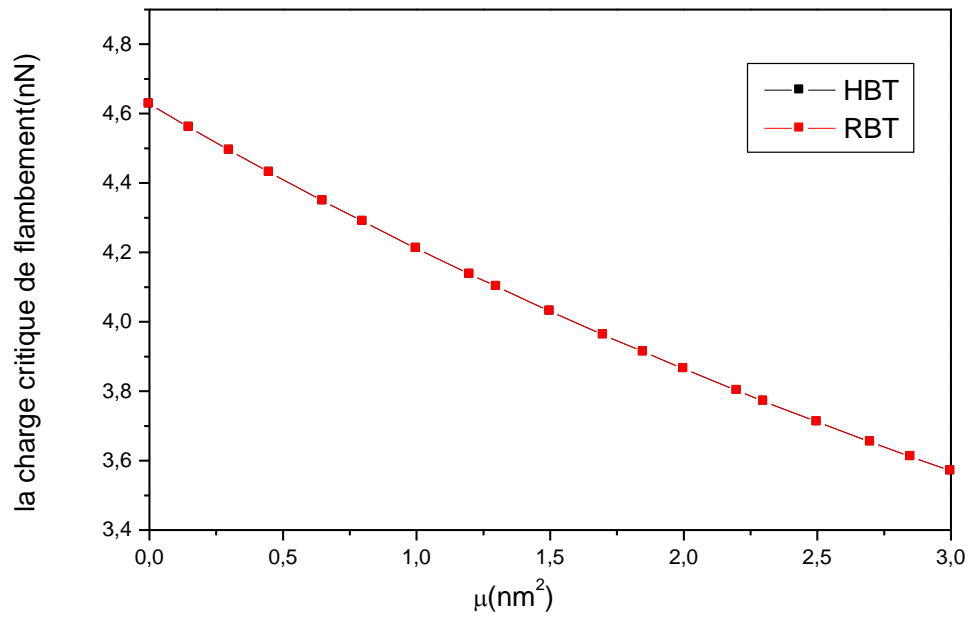


Figure III.13: effet du paramètre non locale sur la charge critique en utilisant les modèles RBT et SBT avec les conditions $\tau^s = 1.7$ et $2\mu^s + \lambda^s = -3$ et le rapport de l'épaisseur $\frac{L}{h} = 10$

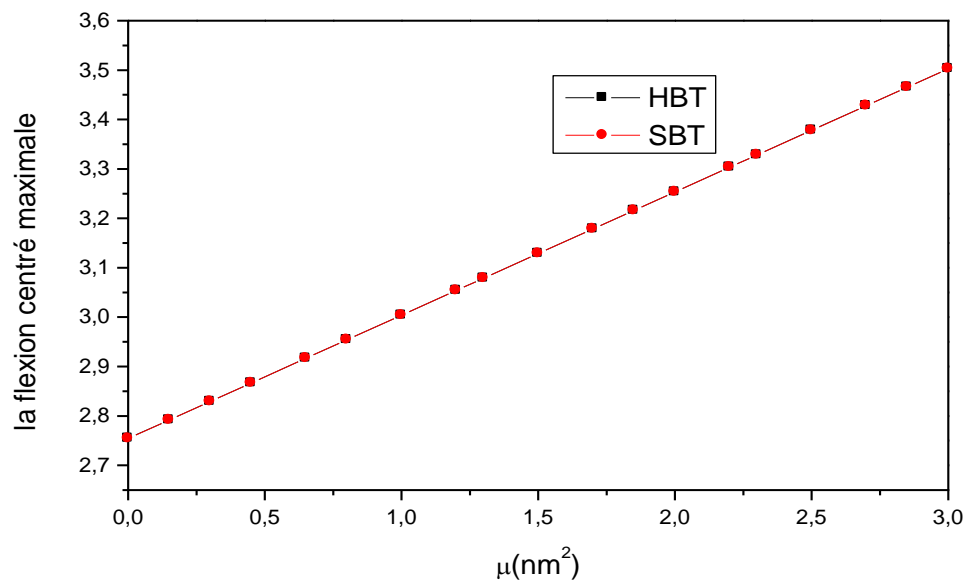


Figure III.14 : effet du paramètre non locale sur la flexion pour le cas d'un charge uniforme en utilisant les modèles RBT et SBT avec les conditions

$$\tau^s = 1.7 \text{ et } 2\mu^s + \lambda^s = -3 \text{ et le rapport de l'épaisseur } \frac{L}{h} = 10$$

L'interprétation des figures III.13,14 :

Figures III 13, 14 les figure montrent l'influence du paramètre non locale μ sur la comportement du flambement et de la flexion de nano poutre avec les conditions de les effet de surface τ^s et $2\mu^s + \lambda^s$ où le rapport de l'épaisseur $\frac{L}{h} = 10$ en utilisant les modèle du déformation de cisaillement pour RBT et SBT, on observe que :

la valeur de la charge de flambage est le maximum pour $\mu = 0$, et il diminue avec l'augmentation de l'effet d'échelle. c'est à dire la charge se réduit par un transit de théories locale avec les effets de surface aux théories non locale avec les effets de surface (Ceci est plus évident dans les figure9a,b).

et le valeur de la flexion est très faible pour $\mu = 0$, et il augmente avec l'augmentation de l'effet d'échelle, c'est à dire la flexion se augmente par un transit de théories local avec les effets de surface aux théories non local avec les effets de surface.

- ✓ En conséquence, les effets de surface avec la théorie non locale agissent comme des forces de stabilisation dans une nano poutre. et ce plus clairement en cas d'absence le paramètre d'échelle et existe seulement les effets de surface, qui donne la structure plus rigidité.

- ✓ Aussi ces résultats montrent que la théorie de cisaillement de surface pour troisième ordre sous-estime la flexion et surestime la charge critique en fonction du paramètre d'échelle.

III .4.2. Conclusion sur les effets de surface non locale :

Dans ce travail, des solutions analytiques sont présentées pour les nano poutre en utilisant la théorie de poutre de déformation de cisaillement non locale qui intégrer avec les effets de la contrainte de surface, le modèle qui utiliser dans cette théorie est du troisième ordre de Reddy et de (SBT , HBT), Ces théories sont basée sur l'hypothèse que dans les déplacements plans et transversaux sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement sur la réponse de flambage et de flexion des solides élancés.

En utilisant la théorie non local et la théorie de la poutre de déformation de cisaillement de troisième ordre de Reddy RBT (et SBT , HBT) avec les effets de surface qui ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. où les résultats indiquent que la flexion augmente et la charge de flambage diminue lorsque les effets de surface sont absents dans la théorie locale.

Les paramètres de contrainte de surface τ^s et $2\mu^s + \lambda^s$ augmentent la charge de flambage et réduit la flexion avec une augmentation de le paramètre non locale.

Les résultats de tous les modèles proposés sont presque en bon accord avec les uns aux autres et les modèles proposés sont capables de mesurer en même temps les effets de non locale et les contraintes de surface de nano poutre.

En outre partie que les comportements de flambage et de flexion des nano poutre dépendent sur les valeurs des constantes d'élasticité de surface avec le paramètre d'échelle de non locale , par conséquent les nano poutres sont développées pour rendre la structure plus rigide, si non la structure va être plus molle.

La théorie non locale des effets de surfaces explique que le paramètre d'échelle et les effets de surfaces qui deviennent significative surtout en cas la nano poutre courte.

Références Bibliographiques

-A-

[**Ansari, R.**] Ansari, R. and Sahmani, S. (2011), “Bending behavior and buckling of nanobeams including surface stress effects corresponding to different beam theories”, *Int. J. Eng. Sci.*, 49, 1244-1255.

-C-

[**Karama, 2003**]M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Struct.* 40 (6) (2003) 1525–1546.

-G-

[**Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I.**] Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1978). Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 14(6), 431–440.

-R-

[**Reddy, 1984.**] Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4), 745–52.

-S-

[**Soldatos, K.**] Soldatos, K. (1992), “A transverse shear deformation theory for homogeneous mono- clinic plates”, *Acta Mech.*, 94(3), 195-220.

-T-

[**Touratier, M.**] Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901-916.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons présenté les solutions analytiques pour le développement et l'analyse des différentes théories de déformation de cisaillement de troisième ordre non locale de RBT, SBT, HBT en tenant compte des effets des contraintes de surface.

Les théories de poutre qui d'utiliser pour étudier le comportement de la flexion, du flambement des nano poutres soumis aux différentes conditions d'appuis en utilisant les théories des poutres.

La solution analytique de la théorie non locale aux effets de surface et en peut dire la théorie des effets de surface non locale est comparée avec la solution analytique de la théorie locale aux effets de surface et en peut dire la théorie des effets de surface locale, où nous sommes arrivés :

Les modèles de la contrainte de cisaillement non locale proposés sont capables de capturer et d'analyser le comportement du flambement et de la flexion mécanique des nano solides élancés ou en d'autres termes les modèles proposés de cisaillement de troisième ordre sont capables de mesurer en même temps les deux effets : l'effet non locale et les effets de surfaces pour les nano poutres.

Où nous avons remarqué :

Les résultats indiquent que la charge de flambage augmente et réduit la flexion de nano poutre avec une augmentation de le paramètre non locale μ et paramètres des contraintes de surface τ^S et $2\mu^S + \lambda^S$, par conséquent les théories de poutres sont développées pour rendre les nano structures élancés plus rigide.