N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
ACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

THESE
DE DOCTORAT

Présentée par : MOULAY Abdelkader

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : Probabilités-Staistique

Intitulée

QUELQUES CONTRIBUTIONS AUX EQUATIONS ET INCLUSIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Soutenue le : 14/07/02019

Devant le jury composé de :

Président :

YOUSFATE Abderrahmane (Professeur à l'Université Djillali Liabès)

Examinateurs :

GHERIBALLAH Abdelkader (Professeur à l'Université Djillali Liabès)

GUENDOUZI Toufik (Professeur à l'Université de. Saida)

OUADJED Hakim (M.C.A. à l'Université de Mascara)

BELGUERNA Abderrahmane (M.C.A.Centre Universitaire. Naama)

Directeur de thèse :

OUAHAB Abdelghani (Professeur à l'Université Djillali Liabès)

Année universitaire : 2018/2019

Université Djillali Liabès
Laboratoire des Modèles Stochastiques et Statistiques

Thèse

présentée en première version en vu d'obtenir le diplome de Doctorat,
spécialité « MATHEMATIQUES »

par

Abdelkader MOULAY

Quelques Contributions aux Equations et Inclusions Différentielles Stochastiques

Thèse soutenue le ..../......./2019 devant le jury composé de :

YOUSFATE Abderrahmane	Pr à l'Université Djillali Liabès	(Président)
OUAHAB Abdelghani	Pr à l'Université Djillali Liabès	(Dérecteur)
GHERIBALLAH Abdelkader	Pr à l'Université Djillali Liabès	(Examinateur)
GUENDOUZI Toufik	Pr à l'Université de Saida.	(Examinateur)
OUADJED Hakim	M.C.A à l'Université de Mascara.	(Examinateur)
BELGUERNA Abderrahmane	M.C.A au Centre universitaire de Naama.	(Examinateur)

Remerciements

Je tiens à remercier Dieu le tout puissant qui m'a donné la force et la réussite dans la réalisation de ce travail.

Je remercie mon directeur de thèse Professeur OUAHAB Abdelghani, à l'université Djillali Liabès, pour sa disponibilité, son aide et ses conseils avisés.

Je tiens á remercier Monsieur Professeur YOUSTAFE Abderrahmane d'avoir accepté d'être président du jury, pour le temps consacré à relire cette thèse et d'en être rapporteur et pour ses appréciations encourageantes et inspiratrices.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Professeur GHERIBALLAH Abdelkader à l'université Djillali Liabès, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Professeur GUENDOUZI Toufik, enseignant à l'université de Saida ; d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Maitre de conférence BELGUERNA Abderrahman, enseignant à l'université Naama ; d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Maitre de conférence OUADJED Abdelhakim, enseignant à l'université Maskara ; d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes vifs remerciements vont également à Mlle Professeur BOUCHENTOUF Amina Angelika, enseignant à l'université Djillali Liabès ; pour sa disponibilité et ses aides et sa orientation.

Mes remerciements particulières a mes proches amis RIGHI Ali, RABHI Abbes, HAMRI Mohamed, Pour le courage qu'ils m'ont donné pour accomplir ce travail.

Mes remerciements vont également à Chères collegus, enseignants du département de Probabilités-Statistique, ainsi que tous les enseignants de l'université Djillali Liabès.

Enfin ; honneur et gratitude à tous les étudiants doctorants, ceux qui de près ou de loin et je les souhaite un bon fin d'etude.

Résumé. Dans ce travail nous donnons une contribution aux équations différentielles stochastique (EDS) avec retard qui dépendent de l'état. Une transformation assez simple permet de ramener l'étude de ce problème à celui d'une équation différentielle ordinaire à retard. A partir de la théorie de l'intégration stochastique, on construit la théorie des EDS. Les EDS sont utilisées dans différentes branches des sciences pour modéliser des processus stochastique solution. On s'intéresse dans cette contribution à l'étude de l'existence de solutions d'une classe d'équations différentielles stochastiques avec retard qui dépendent de l'état dans un espace de dimension infinie, cette étude est analogue à celle du cas de dimension fini à condition que l'équation aux différentiels totaux, admette toujours une solution. Le théorème du point fixe s'applique alors pour une norme convenablement choisie. Et on a étudié le comportement asymptotique autrement la stabilité exponentielle du processus solution, et on termine par un exemple d'application théorique.

Abstract. In this work we give a contribution to stochastic differential equations (SDEs) with delay that depend on the state. A fairly simple transformation makes it possible to reduce the study of this problem to that of an ordinary differential delay equation. From the theory of stochastic integration, the theory of SDE is constructed. SDE are used in different branches of science to model stochastic solution processes. We are interested in this contribution to the study of the existence of solutions of a class of stochastic differential equations with delay which depend on the state in a space of infinite dimension, this study is analogous to that of the case of finite dimension provided that the equation with the total differentials, always admits a solution. The fixed point theorem then applies for a properly chosen norm. And we have studied the asymptotic behavior otherwise the exponential stability of the solution process, and we finish with an example of theoretical application.

Table des matières

Introduction Generale

Cette thèse traite l'étude des équations différentielles stochastiques(EDS) dans un espace de Hibert. La solution d'une équation différentielle stochastique peut toujours être réduite à la résolution d'une équation différentielle ordinaire paramétrée par une variable w dans l'espace de probabilité de base. Cette méthode s'applique également aux équations différentielles stochastiques par rapport à un mouvement brownien ou à une martingale continue de carré intégrable. Par conséquent, nous pouvons établir l'existence ainsi que l'unicité de la solution. En dimension finie ou infinie, cette méthode reste valable à condition que l'équation aux différentiels totaux admette toujours une solution. Des résultats précis concernant le comportement des trajectoires de la solution sont facilement obtenus. Récemment, de nombreux chercheurs ont étudié le problème de l'existence de solutions d'équations différentielles fonctionnelles et équations avec un retard. Pour plus de détails sur le sujet, les lecteurs peuvent être consultés([1],[2],[8],[9],[11],[16], [22],[23], [26]) dans les références qui y figurent. Les EDS trouvent des applications fructueuses à la fois pour les modèles d'effondrements et pour la théorie des systèmes quantiques ouverts. Les modèles d'effondrements sont parmis les rares solutions qui sont mathématiquement bien définies et physiquement cohérentes du célèbre problème de mesure de la mécanique quantique.

La présente thèse est divisé en deux parties. Nous commençons la première partie(Voir [1],[2],[6]) par une discussion sur la théorie des semi-groupes. Nous développons simultanément le calcul stochastique en respectant un processus Wiener et un processus de Wiener cylindrique, on se basant sur l'approche classique présentée dans [1]. Ces fondements permettent de développer la théorie des équations aux dérivées partielles semi-linéaires. Nous abordons d'abord le cas des coefficients de Lipschitz et produisons des solutions mild uniques comme similaires à [11]. Nous concluons la première partie avec un problème intéressant concernant un système infini de EDS.

La deuxième partie, sera consacrée à la présentation d'une contribution sur l'existence des solutions pour une classe d'équations différentielles stochastiques à retard dépendant de l'état dans un espace de dimensions infinies. Et on a étudié le comportement asymptotique autrement la stabilité exponentielle du processus solution, et on termine par un exemple d'application théorique.

Préliminaire

Le but de cette section est d'expliquer comment les équations de dimension infinie découlent d'équations aux dérivées partielles (EDP) et d'envisager leurs solutions classiques et mild.

Considérons une EDP et expliquons le lien qui existe avec un semi-groupe des opérateurs linéaires.

Exemple 1.1 Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (\star)$$

où la distribution initiale de la température est modélisée par une fonction bornée, uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Une fonction $u(t,x)$ est dite solution de $(\star)$ si elle satisfait $(\star)$ pour $t > 0, u, u_t, u_x, u_{xx}$ sont des fonctions bornées, uniformément continues dans $\mathbb{R}$ pour tout $t > 0$ et $\lim_{\longrightarrow 0^+} u(t,x) = \varphi(x)$ uniformément pour x.

Si la distribution de température $u(t,x)$ à $t > 0$ est uniquement déterminée par la condition initiale $\varphi(x)$, alors $u(t,x)$ peut également être obtenu en calculant d'abord $u(s,x)$ pour un temps intermédiaire $s < t$ et ensuite en utilisant $u(s,x)$ comme condition initiale. Ainsi, il existe des transformations $G(t)$ sur φ définies par $(G(t)\varphi)(x) = u^{\varphi}(t,x)$ satisfaisant la propriété semigroupe

$$(G(t)\varphi) = G(t-s)(G(s)\varphi)$$

et la propriété

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \| G(t)\varphi - \varphi \| = 0.$$

$\| \varphi \| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Les transformations sont linéaires par la dépendance linéaire du problème par rapport à la condition initiale. La relation entre le semigroupe $G(t)$ et l'opérateur différentiel $\partial^2/\partial x^2$ dans $(\star)$ peut s'expliquer en calculant

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \left\| \frac{u^{\varphi}(.,t+h) - u^{\varphi}(.,t)}{h} \right\| = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left\| G(t) \left(\frac{G(h) - I}{h} \right)_{\varphi} \right\|$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{G(h) - I}{h} \right) G(t)\varphi \right\| = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{G(h) - I}{h} \right) u^{\varphi}(.,t) \right\|$$

où I désigne l'identité. Nous pouvons définir l'opérateur linéaire

$$A\varphi = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \quad (en\ norme)$$

et notons $\mathcal{D}(A)$, le domaine de A, la collection de toutes les fonctions pour lesquelles la limite existe. Nous arrivons à une formulation abstraite de l'équation de la chaleur sous la forme d'un problème abstrait de Cauchy dans l'espace de Banach$(X, \| \ . \ \|)$ de fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t > 0, \\ & \\ u(0) = \varphi(x), & x \in X \end{array} \right. \quad (\star\star)$$

où la différenciation est comprise dans l'espace X de Banach.

Pour une solution $\mu(t)$, on suppose que pour tout $t > 0$ $\mu(t) \in \mathcal{D}(A)$, μ est continument différentiable et $\lim_{t \to 0^+} \|u(t) - \varphi\| = 0$

Dans le cas $(\star)$ il existe une forme explicite du semi-groupe $G(t)$, donné par le semi-groupe gaussien

$$(G(t)\varphi)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-|x-y|^2/4t\right\} \varphi(y)dy, & t > 0 \\ \varphi(x), & t = 0 \end{array} \right.$$

La solution de $(\star)$ est donnée par

$$u(t, x) = (G(t)\varphi)(x),$$

L'opérateur $A = \ d^2/ \ dx^2$ et

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in X : f, \frac{df}{dx} \text{ sont continuement différentiables, et } \frac{d^2 f}{dx^2} \in X \right\}.$$

Théorie de semigroupes d'opérateurs

1

Ce chapitre consacrées à une description succinte de la théorie des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Banach, ceci en vue de disposer d'un outil théorique pour la résolution d'equations d'évolution linéaires. Les exemples classiques des semigroupes de la chaleur, des ondes et de Schrodinger ainsi que les semi-groupes associés. Dans ce chapitre, nous présentons les principes de base de la théorie des semigroupes et nous renvoyons le lecteur à ([1][2][17][19]) pour les preuves.

Soient $(X, \parallel . \parallel_X)$ et $(Y, \parallel . \parallel_Y)$ deux espaces de Banach. Notons par $\mathcal{L}(X,Y)$ la famille des opérateurs linéaires bornés de X vers Y. $\mathcal{L}(X,Y)$ muni de la norme

$$\parallel T \parallel_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \parallel Tx \parallel_Y, \quad T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

devient un espace de Banach. Par abréviation, $\mathcal{L}(X)$ désignera l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur X. L'opérateur d'identité sur X est noté I.

Soit X^* l'espace dual de toutes les fonctions linéaires bornées x^* sur X.
X^* est encore un espace de Banach sous la norme

$$\parallel x^* \parallel_{X^*} \sup_{x \in X, \|X\|_X = 1} | \langle x, x^* \rangle |,$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire sur $X \times X^*$. Pour $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, l'opérateur adjoint $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ est définit par

$$\langle x, T^* y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle, \quad x \in X, y^* \in Y^*.$$

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit symétrique si pour tout $h,\ g \in H$.

$$\langle Th, g \rangle_H = \langle h, Tg \rangle_H.$$

Un opérateur symétrique T est dit semi-défini positif si pour tout $h \in H$,

$$\langle Th, h \rangle_H \geq 0.$$

Définition 1.1 *Une famille $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, $t \geq 0$, d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X est dite fortement continue(ou C_0-semigroupe) si*

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ *pour tout* $t, s \geq 0$,
3. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} S(t)x = x$ *pour tout* $x \in X$.

Soit $S(t)$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X. Alors, il existe des constantes $\alpha \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que

$$\| S(t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\alpha t}, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Si $M = 1$, alors $S(t)$ est appelé un semigroupe pseudo-contractant. Si $\alpha = 0$, alors $S(t)$ est dit uniformément borné, et si $\alpha = 0$ et $M = 1$, alors $S(t)$ est appelé un semigroupe contractant. Si pour $x \in X$, l'application $t \mapsto\longrightarrow S(t)x$ est différentiable pour $t > 0$, alors $S(t)$ est dit un semigroupe différentiable.

Un semigroupe d'opérateurs linéaires $\{S(t),\ t \geq 0\}$ est dit compact si les opérateurs $(S(t), t > 0)$, sont compacts.

Pour tout C_0-semigroupe $S(t)$ et $x \in X$ arbitraire, l'application

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto S(t)x \in X$$

est continue.

Définition 1.2 *Soit $S(t)$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X. l'opérateur linéaire A de domaine*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \ \ existe \right\} \tag{1.2}$$

défini par

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \tag{1.3}$$

est appelé le générateur infinitésimal du semigroupe $S(t)$. Un semigroupe $(S(t)$ est appelé uniformément continu si

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \| S(t) - I \|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Théorème 1.1 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $S(t)$ uniformément continu sur un espace de Banach X si et seulement si $A \in \mathcal{L}(X)$, et la série*

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

converge pour tout $t \geq 0$.

Nous serons cependant surtout intéressés par le cas où $A \notin \mathcal{L}(X)$, comme dans **(1.2)**. Le théorème suivant fournit des résultats utiles sur les semigroupes.

Théorème 1.2 *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur un espace de Banach X. Alors*

1. *Pour tout $x \in X$,*
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t)xds = S(t)x. \tag{1.4}$$
2. *Pour tout $x \in \mathcal{D}(A), S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et*
$$\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x = S(t)Ax. \tag{1.5}$$
3. *Pour tout $x \in X$, $\displaystyle\int_0^t S(s)xds \in \mathcal{D}(A)$, et*
$$A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x. \tag{1.6}$$
4. *Si $S(t)$ est différentiable alors pour $n = 1, 2, ..., S(t) : X \longrightarrow \mathcal{D}(A^n)$ et*
$$S^{(n)}(t) = A^n S(t) \in \mathcal{L}(X).$$
5. *Si $S(t)$ est compact alors $S(t)$ est continu i.e.*
$$\lim_{s \longrightarrow t, s,t>0} \| S(s) - S(t) \|_{\mathcal{L}(H)} = 0. \tag{1.7}$$
6. *Pour $x \in \mathcal{D}(A)$,*
$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)Axdu = \int_s^t AS(u)xdu. \tag{1.8}$$
7. *$\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, et A est un opérateur linéaire fermé.*
8. *L'intersection $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ est dense dans X.*
9. *Le semigroupe adjoint $S^*(t)$ de $S(t)$ est un C_0-semigroupe de générateur A^*.*

Si $X = H$, un espace de Hilbert séparable, alors pour $h \in H$, et la norme
$$\| h \|_{\mathcal{D}(A)} = (\| h \|_H^2 + \| Ah \|_H^2)^{1/2}. \tag{1.9}$$

L'espace $(\mathcal{D}(A), \| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A)})$ est un espase de Hilbert séparable.

Soit $\mathcal{B}(H)$ la tribu borélienne sur H. Alors $\mathcal{D}(A) \in \mathcal{B}(H)$, et
$$A : (\mathcal{D}(A), \mathcal{B}(H)_{|\mathcal{D}(A)}) \longrightarrow (H, \mathcal{B}(H)).$$

Par conséquent, la restriction $\mathcal{B}(H)_{|\mathcal{D}(A)}$ coincide avec la tribu borélienne sur $(\mathcal{D}(A), \| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A)})$.

Théorème 1.3 *Soit $f : [0, T] \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ mesurable, et soit $\displaystyle\int_0^t \| f(s) \|_{\mathcal{D}(A)} ds < \infty$. Alors*
$$\int_0^t f(s)ds \in \mathcal{D}(A) \quad et \quad \int_0^t Af(s)ds = A\int_0^t f(s)ds. \tag{1.10}$$

Définition 1.3 *L'ensemble de résolvants $\rho(A)$ d'un opérateur linéaire fermé A sur X est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ a un inverse borné, c'est-à-dire, l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. La famille des opérateurs linéaires bornés*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A), \tag{1.11}$$

est appelé la résolvante de A.

Notons que $R(\lambda, A)$ est une transformation de X vers $\mathcal{D}(A)$, i.e.,

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)R(\lambda, A)x = x, \quad x \in X, \\ R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x, \quad x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned} \tag{1.12}$$

En particulier

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.13}$$

De plus, nous avons la propriété de commutativité suivante :

$$R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A) = R(\lambda_2, A)R(\lambda_1, A), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A). \tag{1.14}$$

L'énoncé suivant est vrai dans une plus grande généralité ; nous ne l'utiliserons que dans le domaine réel.

Proposition 1.1 *Soit $S(t)$ un C_0-semigroupe de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach X, Si $\alpha_0 = \lim_{t\longrightarrow\infty} t^{-1} \ln \parallel S(t) \parallel_{\mathcal{L}(X)}$, alors tout nombre réel $\lambda > \alpha_0$ appartient à l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{\lambda t} S(t)xdt, \quad x \in X. \tag{1.15}$$

De plus, pour chaque $x \in X$,

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \parallel \lambda R(\lambda, A)x - x \parallel_X = 0. \tag{1.16}$$

Théorème 1.4 *(Hille-Yosida) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. A est un générateur d'un C_0-semigroupe $S(t)$ si et seulement si*

1) A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

2. Il existe un nombre réel M et α tel que pour tout $\lambda > \alpha$, $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\parallel (R(\lambda, A))^r \parallel_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \alpha)^{-r}, \quad r = 1, 2, ... \tag{1.17}$$

Dans ce cas, $\parallel S(t) \parallel_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\alpha t}$, $t \leq 0$.

Nous allons maintenant introduire une approximation importante d'un opérateur A et de son C_0-semigroupe associe.

Pour $\lambda \in \rho(A)$, considérons la famille des opérateurs

$$R_\lambda = \lambda R(\lambda, A). \tag{1.18}$$

Puisque $\mathrm{Im}(R(\lambda, A)) \subset \mathcal{D}(A)$, on peut définir l'approximation de Yosida de A par

$$A_\lambda x = AR_\lambda x, \quad x \in X. \tag{1.19}$$

Notons que par (1.13)

$$A_\lambda x = R_\lambda Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\lambda(\lambda I - A)R(\lambda, A) = \lambda I$. Nous avons $\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda AR(\lambda, A)$, ainsi que

$$A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I,$$

montre que $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$. Notons par $S_\lambda(t)$ le semigroupe de générateur A_λ,

$$S_\lambda(t)x = e^{tA_\lambda}x, \quad x \in X. \tag{1.20}$$

En utilisant la commutativité de la résolvante (1.14), nous avons

$$A_{\lambda_1}A_{\lambda_2} = A_{\lambda_2}A_{\lambda_1} \tag{1.21}$$

et, par la définition de $S_\lambda(t)$ (1.20),

$$A_\lambda S_\lambda(t) = S_\lambda(t)A_\lambda. \tag{1.22}$$

Proposition 1.2 *(Approximation de Yosida). Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. Alors*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} R_\lambda x = x, \quad x \in X, \tag{1.23}$$

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A), \tag{1.24}$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x, \quad x \in X. \tag{1.25}$$

La convergence en (1.25) est uniforme sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}_+$. L'estimation suivante résulte :

$$\| S_\lambda(t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp\{t\lambda\alpha/(\lambda - \alpha)\} \tag{1.26}$$

avec les constantes M, α déterminées par le théorème de Hille-Yosida.

1.1 Le problème de Cauchy

Soit A un opérateur linéaire sur un espace séparable de Hilbert H, et considérons le problème abstrait de Cauchy donné par

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = x, & x \in H. \end{cases} \tag{1.27}$$

Définition 1.4 *Une fonction $u : [0, T[\longrightarrow H$ est une solution (classique) du problème (1.27) sur $[0, T[$ si u est continue sur $[0, T[$, continuellement différentiable et $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t \in]0, T[$, et (1.27) est satisfaite sur $[0, T[$.*

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\{S_t, t \geq 0\}$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $u^x(t) = S(t)x, t \geq 0$, est une solution de (1.27). D'un autre côté, si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors la continuité à zéro peut ne pas poser de problème, mais $u^x(t)$ ne doit pas être différentiable, à moins que le C_0semigroupe n'ait des propriétés additionnelles, par exemple est un semigroupe différentiable. Dans ce cas, $u^x(t) = S(t)x$ n'est pas une solution au sens habituel, mais on peut la considérer comme une «solution généralisée», qu'on appellera une «solution Mild». En fait, le concept de solution Mild peut être introduit pour étudier le problème initial suivantes :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = x, & x \in H. \end{cases} \tag{1.28}$$

où $f : [0, T[\longrightarrow H$. Nous supposons que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe , de sorte que l'équation homogène (1.27) a une solution unique pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$. La définition d'une solution classique(définition 1.4), s'étend au cas du problème de valeur initiale non homogène en exigeant que dans ce cas, la solution vérifie (1.28).

Nous définissons maintenant le concept d'une solution Mild.

Définition 1.5 *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur H, $x \in H$, et $f \in L^1([0, T], H)$ l'espace des fonctions intégrable sur $[0, T]$ à valeurs dans H. La fonction $u \in C([0, T], H)$ donnée par :*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est une solution mild du problème initial (1.28) sur $[0, T]$.

Notons que pour $x \in H$ et $f \equiv 0$, la solution mild est $S(t)x$, qui n'est pas en général une solution classique.

Quand $x \in \mathcal{D}(A)$, la continuité de f est insuffisante pour assurer l'existence d'une solution classique. Pour voir ceci consulté[17], considérons $f(t) = S(t)x$ pour $x \in H$ tel que $S(t)x \notin \mathcal{D}(A)$. Alors (1.28) peut ne pas avoir une solution classique même si $u(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$, comme solution mild

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)S(s)xds = tS(t)x$$

n'est pas, en général, différentiable.

On a le théorème suivant ([17], chapitre 4, théorème 2.4).

Théorème 1.5 *Soit A un générateur infinitésimale d'un C_0-semigroupe $\{S(t), t > 0\}$, soit $f \in L^1([0,T],H)$ est continue sur $]0,T]$, et soit*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La solution mild u au problème initial (1.28) est une solution (classique) sur $[0,T[$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ si

(1) $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0,T[$.

(2) $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$, et $Av(t)$ est continu sur $]0,T[$.

Si (1.28) a une solution u sur [0,T[pour certains $x \in \mathcal{D}(A)$, alors v satisfis (1) et (2).

Exemple 1.1 *Considérons l'équation dans R^d*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x), & 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.29}$$

$x \in \mathbb{R}^d$. La famille des opérateurs gaussiens

$$(G_d(t)\varphi)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t))^{d/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\{\frac{- \| x-y \|^2_{\mathbb{R}^d}}{4t}\} + \varphi(y)dy, \quad t > 0, & t > 0, \\ \varphi(x), & t = 0, \end{cases} \tag{1.30}$$

définit un C_0-semigroupe contractant sur $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ avec le générateur infinitésimal

$$\Delta_\varphi = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi,$$

dont le domaine est $\mathcal{D}(\Delta) = W^{2,2}(R^d)$. Considérons le problème abstrait de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{1.31}$$

On sait que $(G_d(t)f)(x)$ est une solution classique du problème (1.3) pour tout $\varphi \in H = L^2(\mathbb{R}^d =$ au sens de la définition 1.4, puisque le semigroupe $G_d(t)$ sur H est différentiable ([17], chapitre 7, théorème 2.7 et remarque 2.9).

Calcul Stochastique dans les espaces de Hilbert 2

Dans ce chapitre on introduit la notion de variables aléatoires Gaussiennes cylindriques et variables aléatoires Gaussiennes à valeur dans un espace de Hilbert, on définit aussi le processus de Wiener cylindrique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et K un espace de Hilbert séparable muni de la norme $\| \, . \, \|_K$ et un produit scalaire $\langle ., . \rangle_K$. On suppose de plus que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet, i.e., $\mathcal{F}$ contient toute les parties $\mathbb{P}$-négligeables.

2.1 Variables et Processus de Wiener Cylindrique

Définition 2.1 *On dit que* $\widetilde{X}$ *est une* variable aléatoire Gaussienne cylindrique *sur* K *si* $\widetilde{X} : K \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *satisfie les conditions :*

1. *L'application* $\widetilde{X}$ *est linéaire.*
2. *Pour* $k \in K$ *arbitraire,* $\widetilde{X}(k)$ *est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance* $\| k \|_K^2$ *.*
3. *Si* $k, k' \in K$ *sont orthogonales, i.e.,* $\langle k, k' \rangle_K = 0$*, alors les variables* $\widetilde{X}(k)$ *et* $\widetilde{X}(k')$ *sont indépendantes.*

Notons que si $\{f_i\}_{j=1}^{\infty}$ est une base orthogonale dans K, alors $\{\widetilde{X}(f_i)\}_{j=1}^{\infty}$ est une suite de *v.a* gaussiennes indépendantes de moyenne nulle est de variance 1. Par linéarité de $\widetilde{X}$, on peut représenter $\widetilde{X}$ comme

$$\widetilde{X}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle k, f_j \rangle_K \widetilde{X}(f_j),$$

et cette série converge $\mathbb{P}$-p.s. par le théorème de trois series de Kolmogorov ([21], Th 22.3).

Notons par $\mathcal{L}(K)$ l'espace de classe d'opérateurs trace sur K,

$$\mathcal{L}_1(K) = \{L \in \mathcal{L}(K) : \tau(L) = tr((LL^*)^{1/2}) < \infty\}, \tag{2.1}$$

où la trace d'operateur $[L] = (LL^*)^{1/2}$ est définie par

$$tr([L]) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle [L]f_j, f_j \rangle_K$$

pour une base orthogonale $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset K$. On sait que [21] $tr([L])$ est indépendant du choit de la base et que $\mathcal{L}_1(K)$ muni de la norme τ est un espace de Banach. Soit $Q : K \longrightarrow K$ un opérateur trace symétrique défini positive. Supposons que $X : K \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifie les conditions suivantes :

— L'application X est linéaire.

— Pour $k \in K$ arbitraire, $X(k)$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle.

— Si $k, k' \in K$, $\mathbb{E}(X(k)X(k')) = \langle Qk, k' \rangle_K$.

Soit $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthogonale sur K diagonalise Q, et soit λ_j la valeur propre associe au vecteur propre f_j, alors $Qf_j = \lambda_j f_j$. On définit

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} X(f_j)(\omega) f_j.$$

Comme $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$, les séries $\sum_{j=1}^{\infty} X(f_j)(\omega) f_j$. converges dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et donc $\mathbb{P}$-p.s. converge. Dans ce cas, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\langle X(\omega), k \rangle_K = X(k)(\omega),$$

de telle sorte que $X : \Omega \longrightarrow K$ soit $\mathcal{F} - \mathcal{B}(K)$-mesurable ; où $\mathcal{B}(K)$ est la tribu borélienne sur K.

Définition 2.2 *La variable $X : \Omega \longrightarrow K$ définie ci-dessus est appelée variable aléatoire Gaussienne à valeurs dans K de covariance Q.*

Définition 2.3 *Soit K un espace de Hilbert séparable. La mesure $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ est appllée mesure Gaussienne de covariance Q sur K.*

2.1.1 Processus de Wiener cylindrique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et, comme ci-dessus, K est un espace de Hilbert séparable. On suppose de plus que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfait les conditions usuelles, i.e.

1. $\mathcal{F}_0$ contient tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$,
2. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Définition 2.4 *Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à valeurs dans K défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé Gaussien si pour tout entier positif n et $t_1, ..., t_n \geq 0, (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est une variable aléatoire Gaussienne à valeurs dans K^n.*

Un processus de Wiener cylindrique standard peut être introduit en utilisant le concept d'une variable aléatoire cylindrique.

Définition 2.5 *On appelle processus de Wiener cylindrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ dans l'espace de Hilbert K la famille $\{\widetilde{W}\}_{t\geq 0}$ vérifiant :*

i Pour tout $t \geq 0$ arbitraire, la fonction $\widetilde{W}_t : K \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est linéaire ;

ii Pour tout $k \in K$, $\widetilde{W}_t(k)$ est $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien ;

iii Pour tout $k, k' \in K$ et $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\widetilde{W}_t(k)\widetilde{W}_t(k')) = t\langle k, k'\rangle_K$.

Pour tout $t > 0$, $\widetilde{W}_t/\sqrt{t}$ est une variable aléatoire gaussienne cylindrique standard, ainsi que pour tout $k \in K$, $\widetilde{W}_t(k)$ peut être représenter comme une série $\mathbb{P}$-p.s. convergente.

$$\widetilde{W}_t(k) = \sum_j \langle k, f_j\rangle_K \widetilde{W}_t(f_j), \tag{2.2}$$

où $\{f_j\}_j$ est une base orthogonale dans K.

Cependant, si Q est un opérateur trace symétrique défini positif sur K, alors on peut définir le Q-processus de Wiener à valeurs dans K comme suit :

Définition 2.6 *Soit Q est un opérateur trace symétrique défini positif sur K, $\{f_j\}_{j\geq 1}$ est une base orthogonale dans K diagonalise Q, et soit $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ ses valeurs propres. Soit $\{w_j(t)\}_{t\geq 0}, j = 1, 2, ...,$ une suite de mouvements browniens indépendants définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Le processus*

$$W_t = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} w_j(t) f_j \tag{2.3}$$

est appelé Q-processus de Wiener dans K.

On peut supposer que les mouvements brownien $w_j(t)$ sont continus. Alors, la série (2.3) est convergente dans $L^2(\Omega, C([0, T], K))$ pour tout $[0, T]$. Donc, le Q-processus de Wiener peut être supposé continu. Nous définissant

$$W_t(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} w_j(t) \langle f_j, k\rangle_K$$

pour tout $k \in K$, avec la convergente dans $L^2(\Omega, C([0, T], \mathbb{R}))$ dans chaque intervalle $[0, T]$.

Remarque 2.1 *Un résultat de convergence est obtenu pour la série (2.3). Donc*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\sum_{j=m}^{n} \lambda_j^{1/2} w_j(t) f_j\right\|_K > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=m}^{n} \lambda_j^{1/2} w_j(T) f_j\right\|_K^2 = \frac{T}{\varepsilon^2}\sum_{j=m}^{n} \lambda_j \longrightarrow 0$$

avec $m \leq n, m, n \longrightarrow \infty$, la serie (2.3) converge uniformément sur $[0, T]$ on probabilité $\mathbb{P}$, par le théorème de Lèvy-Ito-Nisio ([15], Théorème 2.4), est aussi $\mathbb{P}$-p.s. converge uniformément sur $[0, T]$.

Le théorème suivant donne des propriétés d'un Q-processus de Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$.

Théorème 2.1 *Un Q-processus de Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$ à valeurs dans K, possède les propriétés suivantes :*

1. $W_0 = 0$.
2. W_t *à des trajectoires continues dans K.*
3. W_t *à accroissements indépendantes.*
4. W_t *est un processus gaussien d'opérateur de covariance Q, i.e., pour chaque $k, k' \in K$ et $s, t \geq 0$,*
$$\mathbb{E}(W_t(k)W_s(k')) = (t \wedge s)\langle Qk, k'\rangle_K.$$
5. *Pour $k \in K$ arbitraire, la loi $\mathcal{L}((W_t - W_s)(k)) \hookrightarrow N(0, (t-s)\langle Qk, k\rangle_K)$.*

2.2 Intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener

Nous allons introduire le concept de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à un Q-Wiener processus et par rapport à un processus de Wiener cylindrique.

Soit K et H deux espaces de Hilbert séparables, et Q soit un opérateur symétrique définie positif sur K ou $Q = \mathbf{I}_K$, l'opérateur d'identité sur K. Dans le cas où Q est un opérateur trace, nous supposons toujours que ses valeurs propres $\lambda_j > 0, j = 1, 2, \ldots;$ sinon, nous pouvons commencer avec l'espace de Hilbert $ker(Q)^{\perp}$ à la place de K. Les vecteurs propres associés formant une base orthonormale dans K est désignée par $(f_k)_k$.

Alors l'espace $K_Q = Q^{1/2}K$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{K_Q} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j}\langle u, f_j\rangle_K \langle v, f_j\rangle_K$$

est un espace de Hilbert séparable à une base orthonormale $\{\lambda_j^{1/2} f_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Si H_1, H_2 sont deux Hilbert séparable avec $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base orthogonale dans H_1, alors l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt de H_1 vers H_2 est définit comme

$$\mathcal{L}(H_1, H_2) = \left\{ L \in \mathcal{L}(H_1, H_2) : \sum_{i=1}^{\infty} \| Le_i \|_{H_2}^2 < \infty \right\}. \tag{2.4}$$

$\mathcal{L}_2(H_1, H_2)$ muni de la norme

$$\| L \|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| Le_i \|_{H_2}^2 \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert(voir [21]). Comme les espace de Hilbert H_1 et H_2 sont séparables ; l'espace $\mathcal{L}_2(H_1, H_2)$ est aussi séparable, que les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont des limites des suites d'opérateurs linéaires fini-dimensionnels.

Considérons $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$, l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de K_Q vers H. Si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une base orthogonal dans H, la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur $L \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ est donner par

$$\begin{aligned} \| L \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} &= \sum_{j,i=1}^{\infty} \langle L(\lambda_j^{1/2} f_j), e_i \rangle_H^2 = \sum_{j,i=1}^{\infty} \langle L(Q^{1/2} f_j), e_i \rangle_H^2 \\ &= \| LQ^{1/2} \|^2_{\mathcal{L}_2(K,H)} = tr((LQ^{1/2})(LQ^{1/2})^*). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le produit scalaire entre deux opérateurs $L, M \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ est défini par

$$\langle L, M \rangle_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} = tr((LQ^{1/2})(MQ^{1/2})^*). \tag{2.6}$$

Puisque les espaces de Hilbert K_Q et H sont séparable, l'espace $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$ est aussi séparable.

Soit $L \in \mathcal{L}(K, H)$. Si $k \in K_Q$, alors

$$k = \sum_{j=1} \infty \langle k, \lambda_j^{1/2} f_j \rangle_{K_Q} \lambda_j^{1/2} f_j,$$

et L, considéré comme un opérateur de K_Q vers H, défini par

$$Lk = \sum_{j=1}^{\infty} \langle k, \lambda_j^{1/2} f_j \rangle_{K_Q} \lambda_j^{1/2} L f_j,$$

a une norme de Hilbert-Schmidt finie, comme

$$\| L \|_{\mathcal{L}(K_Q,H)} = \sum_{j=1}^{\infty} \| L(\lambda_j^{1/2} f_j) \|^2_H = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \| L f_j \|^2_H \leq \| L \|^2_{\mathcal{L}(K,H)} tr(Q).$$

Alors, $\mathcal{L}(K, H) \subset \mathcal{L}_2(K_Q, H)$. Si $L, M \in \mathcal{L}(K, H)$; les formules (2.5) et (2.6) réduire à

$$\| L \|_{\mathcal{L}(K_Q,H)} = tr(LQL^*) \tag{2.7}$$

et

$$\langle L, M \rangle_{L_2(K_Q,H)} = tr(LQM^*), \tag{2.8}$$

permet de séparer $Q^{1/2}$ et L^*. Ceci est utilisé dans les calculs quand $L \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ est approximé par une suite $L_n \in \mathcal{L}(K, H)$.

L'espace $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$, est non nécessairement borné, pour $L : K \longrightarrow H$, avec domaine $\mathcal{D}(L) \supset Q^{1/2}K$, et tel que $tr((LQ^{1/2})(LQ^{1/2})^*)$ soit fini. Si $Q = I_K$, alors $K_Q = K$. Notons que l'espace $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$ contient exactement les operateurs linéaires non bornés de K vers H.

2.2.1 Processus Elémentaire

Définition 2.7 *On appelle processus élémentaire Φ tout processus à valeurs dans $\mathcal{L}(K,H)$ adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$, de la forme*

$$\Phi(t,\omega) = \phi(\omega)\mathrm{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(w)\mathrm{I}_{]t_j,t_{j+1}]}(t), \tag{2.9}$$

où $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$, et $\phi, \phi_j, j = 0,1,...,n-1$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{L}(K,H)$ respectivement $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurables, tels que $\phi_1(\omega), \phi_j(\omega)\mathcal{L}(K,H), j = 0,1,...,n-1$ (rappelons que $\mathcal{L}(K,H) \subset \mathcal{L}_2(K_Q,H)$). On note par $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ l'espace des processus élémentaires.

Notons que si $Q = \mathbf{I}_K$, alors les variables aléatoires ϕ_j sont à valeurs dans $\mathcal{L}_2(K,H)$. Un processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ est dit broné s'il est borné dans $\mathcal{L}_2(K_Q,H)$.

2.2.2 Intégrale stochastique d'Ito pour un processus élémentaire

Pour un processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$, on définit l'intégrale stochastique par rapport à un Q-processus de Wiener W_t par

$$\int_0^t \Phi(s)dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t})$$

pour $t \in [0,T]$. Le terme ϕW_0 est négligeable car $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$. Cette intégrale stochastique est un processus stochastique à valeurs dans H.

Nous définissons l'intégrale stochastique pour un processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ par rapport à un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}$ par

$$\left(\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s\right)(h) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\widetilde{W}_{t_{j+1}\wedge t}(\phi_j^*(h)) - \widetilde{W}_{t_j\wedge t}(\phi_j^*(h))\right) \tag{2.10}$$

pour $t \in [0,T]$ et $h \in H$. La proposition suivante étudie l'isométrie d'Ito, qui joue un rôle essentiel dans la construction de l'intégrale stochastique.

Proposition 2.1 *Pour un processus élémentaire borné $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$,*

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t \Phi(s)dW_s\right\|_H^2 = \mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}(K_Q,H)}\,ds < \infty \tag{2.11}$$

pour $t \in [0,T]$.

Démonstration. La preuve est un peut calculatoire dans le cas réel. Supposons que $t = T$, alors

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t \Phi(s)dW_s\right\|_H^2 = \mathbb{E}\parallel \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \parallel_H^2$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \| \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \|_H^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n-1} \langle \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \phi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \rangle_H \right).$$

Nous utilisons le fait que la variable aléatoire $\phi_j e_m$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable ($e_m \in H$), car l'accroissement $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ est indépendant de cette σ-algèbre. Avec les familles $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$ et $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, bases orthonormales dans K et H, nous avons

$$\mathbb{E} \| \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \|_H^2 = \mathbb{E} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), e_m \rangle_H^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\langle \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), e_m \rangle_H^2 | \mathcal{F}_{t_j}))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, \phi^* e_m \rangle_H^2 | \mathcal{F}_{t_j}))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{l=1}^{\infty} \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_l \rangle_K \langle \phi_j^* e_m, f_l \rangle_K \right)^2 | \mathcal{F}_{t_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{l=1}^{\infty} \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_l \rangle_K^2 \langle \phi_j^* e_m, f_l \rangle_K \right) | \mathcal{F}_{t_j}\right)\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{l\neq l'=1}^{\infty} \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_l \rangle_K \langle \phi_j^* e_m, f_l \rangle_K \times \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_{l'} \rangle_K \langle \phi_j^* e_m, f_{l'} \rangle_K \right) | \mathcal{F}_{t_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (t_{j+1} - t_j) \sum_{l=1}^{\infty} \langle \phi_j^* e_m, f_l \rangle_K^2 = (t_{j+1} - t_j) \sum_{m,l=1}^{\infty} \langle \phi_j(\lambda_j^{1/2} f_l), e_m \rangle_K^2 = (t_{j+1} - t_j) \| \phi_j \|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 .$$

De même, pour le terme $\mathbb{E}\langle \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \phi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \rangle_H$, nous obtenons $\langle \phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \phi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \rangle_H$

$$= \mathbb{E} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{l\neq l'=1}^{\infty} \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_l \rangle_K \langle \phi_j^* e_m, f_l \rangle_K \times \langle W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, f_{l'} \rangle_K \langle \phi_j^* e_m, f_{l'} \rangle_K | \mathcal{F}_{t_j}\right) = 0$$

si $i < j$. La démonstration est terminée. ▲

Corollaire 2.1 *Pour un processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$, nous avons*

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \Phi(s) d\widetilde{W}_s\right)(h)\right)^2 = \int_0^t \mathbb{E} \|\Phi^*(s)(h)\|_K^2 \, ds < \infty. \tag{2.12}$$

L'idée est maintenant d'étendre la définition de l'intégrale stochastique d'Itô et intégrale stochastique cylindrique d'une classe plus grande de processus en utilisant le fait que les application $\Phi \longrightarrow \int_0^T \Phi(s) dW_s$ et $\Phi^*(.)(h) \longrightarrow (\int_0^T \Phi(s) d\widetilde{W}_s)(h)$ à des isométries par (2.11) et (2.12).

Soit $\Lambda_2(K_Q, H)$ la classe des processus mesurables à valeurs dans $\mathcal{L}(K_Q, H)$ adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$ (ici $\mathcal{F}$ peut être remplacée par $\mathcal{F}_T$), vérifiant la condition :

$$\mathbb{E} \int_0^T \| \Phi(t) \|_{\mathcal{L}(K_Q,H)}^2 \, dt < \infty. \tag{2.13}$$

De toute évidence, les processus élémentaires satisfaisant à la condition ci-dessus (2.13) sont des éléments de Λ_2.

Notos que $\Lambda_2(K_Q, H)$ muni de la norme

$$\| \Phi \|_{\Lambda_2(K_Q,H)} = \left(\mathbb{E} \int_0^T \| \Phi(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \, dt \right)^{1/2} \tag{2.14}$$

est un espace de Hilbert. La proposition suivante montre que la classe des processus élémentaires bornés est dense dans $\Lambda_2(K_Q, H)$. De même pour Q, la classe des opérateurs trace et pour $Q = \mathbf{I}_K$.

Proposition 2.2 *Si $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, alors il existe une suite de processus élémentaires bornés $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K_Q, H)$ converge vers Φ dans $\Lambda_2(K_Q, H)$,i.e.,*

$$\| \Phi_n - \Phi \|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)} = \mathbb{E} \int_0^T \| \Phi_n(t) - \Phi(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \, dt \longrightarrow 0$$

qaund $n \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Nous utilisons le même principe que dans [61].

Etape 1. Nous supposons que $\| \Phi(t, \omega) \|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} < M$ pour tout t, ω. Autrement; on définit

$$\Phi(t, \omega) = \begin{cases} n \frac{\Phi_n(t,\omega)}{\|\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}} & si \ \| \Phi(t, \omega) \|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} > n \\ \Phi(t, \omega) & sinon \end{cases}$$

Alors $\| \Phi_n - \Phi \|_{\Lambda_2(K_Q,H)^2} \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominés de Lebesgue.

Etape 2. Supposons que $\Phi(t, \omega) \in \mathcal{L}(K_Q, H)$ alors chaque opérateur $L \in \mathcal{L}(K_Q, H)$ peut être approximer par une suite $L_n \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ définie par

$$L_n k = \sum_{j=1}^{n} L(\lambda_j^{1/2} f_j) \langle \lambda_j^{1/2} f_j, k \rangle_{KQ}.$$

Effectivement, pour $k \in K$, nous avons

$$\begin{aligned} \| L_n k \|^2_H &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} L(\lambda_j^{1/2} f_j) \langle \lambda_j^{1/2} f_j, k \rangle_{KQ}, e_i \right\rangle^2_H \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle L(\lambda_j^{1/2} f_j), e_i \rangle^2_H \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \langle f_j, k \rangle^2_K. \\ &\leq C_n \| L \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \| k \|^2_K \end{aligned}$$

ainsi que $L_n \in \mathcal{L}(K, H)$, et

$$\| \Phi(t) - \Phi_n(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \| \Phi(t)(\lambda_j^{1/2} f_j) \|^2_H \longrightarrow 0.$$

Alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\mathbb{E}\int_0^T \parallel \Phi_n(t) - \Phi(t) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$; ainsi $\Phi_n \longrightarrow \Phi \quad dans \quad \Lambda_2(K_Q, H)$.

Etape 3. Maintenant, supposons on outre de l'étape 1 et l'étape 2, que pour tout ω la fonction $\Phi(., \omega) : [0, T] \longrightarrow \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ est continue. Pour une partition $0 = t_0 \leq t_1 \leq, ..., t_n = T$, on définit la famille des processus élémentaires

$$\Phi_n(t, \omega) = \Phi(0, \omega)\mathbf{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{t_j}(t_j, \omega)\mathbf{I}_{]t_j,t_{j+1}}(t)$$

avec $\max\{|t_{j+1} - t_j|, \ j = 0, ..., n\} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, nous avons que $\Phi_n(t, \omega) \longrightarrow \Phi(t, \omega)$ et

$$\int_0^T \parallel \Phi_n(t, \omega) - \Phi(t, \omega) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \longrightarrow 0,$$

par la continuité de $\Phi(., \omega)$. Par conséquent le théorème de convergence dominés de Lebesgue, affirme que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \parallel \Phi_n(t, \omega) - \Phi(t, \omega) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt\right) \longrightarrow 0.$$

Etape 4. Si $\Phi(t, \omega) \in \mathcal{L}(K, H)$estborné pour (t, ω) mais non nécessairement continu, alors Ensuite, nous étendons Φ à $\mathbb{R}$ tout entier par $\Phi(t, \omega) = 0$ pour $t < 0$ et $t > T$. Puis nous définissons une approximation bornée de Φ par

$$\Phi_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s - t)\Phi(s, \omega)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ici $\psi_n(t) = n\psi(nt)$, et $\psi(t)$ est une fonction positive continue bornée a support dans $[-1, 0]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. Nous utilisons une approximation identique à celle de ([32], Chap 9).

Les fonctions $\psi_n(t, \omega)$ sont clairement bornées, en effet ;

Pour $t + h \leq T$, nous avons

$\parallel \Phi_n(t + h, \omega) - \Phi_n(t, \omega) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$

$$= \left\| \int_0^{t+h} (\psi_n(s - (t + h))\, \Phi(s, \omega)ds - \int_0^t \psi_n(s - t)\Phi(s, \omega)ds \right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$$

$$\leq \left\| \int_0^t (\psi_n(s - (t + h) - \psi_n(s - t))\, \Phi(s, \omega)ds \right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} + \left\| \int_0^t (\psi_n(s - (t + h))\, \Phi(s, \omega)\mathbf{I}_{[t,t+h]}(s)ds \right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}.$$

La deuxième intégrale converge vers 0 quand $h \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominés de Lebesgue. La première intégrale est dominée par

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(s-(t+h)-\psi_n(s-t)| \parallel \Phi(s,\omega) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \mathbf{I}_{[0,t]}(s)ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\psi_n((u+h)-\psi_n(u)| \parallel \Phi(u+t,\omega) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \mathbf{I}_{[-t,0]}(u)du$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_n((u+h)-\psi_n(u)|^2du\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}} \parallel \Phi(u+t,\omega) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \mathbf{I}_{[-t,0]}(u)du\right)^{1/2},$$

ainsi que ceci converge vers zéro par la continuété dans $L^2(\mathbb{R})$ (voir Théorème 8.9 dans [32]). La continuité à gauche en T suit par un argument similaire.
Comme le processus $\Phi(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté, par définition $\Phi_n(t,\omega)$ est aussi $\mathcal{F}_t$-adapté. Nous allons maintenant monter que

$$\int_0^T \parallel \Phi_n(t,\omega)-\Phi(t,\omega) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Considérons

$$\|\Phi_n(t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq \left\|\int_0^t \psi_n(s-t)(\Phi(s,\omega)-\Phi(t,\omega))ds\right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$$

$$+\left\|\int_0^t (\psi_n(s-t)-1)\Phi(t,\omega)ds\right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}.$$

Pour ω fixé, notons $w_n(t) = \left\|\int_0^t (\psi_n(s-t)-1)\Phi(t,\omega)ds\right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$. Alors $w_n(t)$ converge vers zéro pour tout t quand $n \longrightarrow \infty$ et bornée par $C\|\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$ pour une constante C.

A partir de maintenant , la constante C peut changer sa valeur de ligne à ligne. La première intégrale est dominée par

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(s-t) \|(\Phi(s,\omega)-\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \mathbf{I}_{[0,t]}(s)ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(u) \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \mathbf{I}_{[-t,0]}(u)du$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \psi_n^{1/2}(u)\psi_n^{1/2}(u)\mathbf{I}_{[-t,0]}(u)du$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \psi_n(u)\mathbf{I}_{[-t,0]}(u)du\right)^{1/2}$$

par l'inégalité de Schwarz-Bunyakovsky et le fait que $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(t)dt = 1$.

On arrive a

$$\int_0^T \|(\Phi_n(t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt$$

$$\leq 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \psi_n(u)\mathbf{I}_{[-t,0]}(u)dudt$$

$$+2\int_0^T w_n^2(t,\omega)dt.$$

La deuxième intégrale converge vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$ par le théorème de convergence dominés de Lebesgue et est dominée par $C\int_0^T \|\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt$. Et pour la première :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \psi_n(u)\mathbf{I}_{[-t,0]}(u)dudt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(u) \int_0^T \mathbf{I}_{[-t,0]}(u) \|(\Phi(u+t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dtdu$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(v) \int_0^T \mathbf{I}_{[-t,0]}\left(\frac{v}{n}\right) \left\|\Phi\left(\frac{v}{n}+t,\omega\right)-\Phi(t,\omega)\right\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dtdv.$$

Notons que, aussi par la continuité d'opérateur dans $L^2([0,T],\mathcal{L}_2(K_Q,H))$,

$$\int_0^T \mathbf{I}_{[-t,0]}\left(\frac{v}{n}\right) \left\|\Phi\left(\frac{v}{n}+t,\omega\right)-\Phi(t,\omega)\right\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt$$

$$\leq \int_0^T \left\|\Phi\left(\frac{v}{n}+t,\omega\right)-\Phi(t,\omega)\right\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$, ainsi que la fonction

$$\psi(v) \int_0^T \mathbf{I}_{[-t,0]}\left(\frac{v}{n}\right) \left\|\Phi\left(\frac{v}{n}+t,\omega\right)-\Phi(t,\omega)\right\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt$$

converge vers zéro et est bornée par $C\|\Phi(.,\omega\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H))}$. Ceci montre que

$$r_n(\omega) = \int_0^T \|(\Phi_n(t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$ et $r_n(\omega) \leq C\|\Phi(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$. Par suite

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|(\Phi_n(t,\omega)-\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt\right) \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$ par le théorème de convergence dominées de Lebesgue. ▲

Nous aurons besoin du lemme suivant lorsque on utilise l'approximation de Yosida pour un opérateur non borné.

Lemme 2.1

1. *Let $T, T_n \in \mathcal{L}(H)$ tels que pour tout $h \in H$, $T_n H \longrightarrow Th$, et soit $L \in \mathcal{L}_2(K_Q,H)$. Alors*

$$\|T_n L - TL\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \longrightarrow 0. \tag{2.15}$$

2. *Soit A un générateur d'un C_0-semigroup $S(t)$ sur un espace de Hilbert séparable H, et $A_n = AR_n$ est l'approximation de Yosida de A comme définie dans (1.19) Chap 1. Alors, pour $\Phi(t) \in \Lambda_2(K_Q,H)$ tel que $\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(t)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt < \infty, p \geq 1$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} \mathbb{E}\int_0^T \left\|\left(e^{t-s)A_n} - S(t-s)\right)\Phi(s)\right\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds \longrightarrow 0. \tag{2.16}$$

3. *Sous les conditions de 2.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \left\| \left(e^{sA_n)} - S(s) \right) \Phi(s) \right\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds \longrightarrow 0.$$

Démonstration. 1. Notons que par le théorème de Banach-Steinhaus, pour une constante C ;

$$\max \left\{ \|T\|_{\mathcal{L}(H)}, \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(H)} \right\} < C.$$

Donc pour une base orthogonale $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset K$, nous avons

$$\|T_n L - TL\|^2_{\mathcal{L}_\in(K_Q,H)} = \sum_{j=1}^{\infty} \|T_n - T)LQ^{1/2} f_j\|^2_H$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T_n - T\|^2_{\mathcal{L}_\in(K_Q,H)} \|LQ^{1/2} f_j\|^2_H$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 4C^2 \|LQ^{1/2} f_j\|^2_H = 4C^2 \|L\|^2_{\mathcal{L}_\in(K_Q,H)}.$$

Les termes $\|T_n - T)LQ^{1/2} f_j\|^2_H$ converge vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$ et sont bornés par $4C^2 \|LQ^{1/2} f_j\|^2_H$, ainsi que 1) découle par le théorème de Lebesgue dominés.

(2). Nous utiliserons deux conditions sur le semi-groupe $S_n(t) = e^{tA_n}$. Par l'approximation de Yochida, nous avons

$$\sup_n \|S_n(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M e^{2\alpha t},$$

et $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n(t)x = S(t)x, x \in H$, uniforement sur tout intervalle fini.

Maintenant, pour $n > 2\alpha$,
$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E} \int_0^t \| (S_n(t-s) - S(t-s))\Phi(s) \|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds$

$$= \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \| (S_n(t-s) - S(t-s))\Phi(s) Q^{1/2} f_j \|^2_H \right)^p ds$$

$$= \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E} \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\infty} \| (S_n(t-s) - S(t-s))\Phi(s) Q^{1/2} f_j \|^2_H \mathbf{I}_{[0,t]}(s) \right)^p ds$$

$$\leq \mathbb{E} \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sup_{0\leq t\leq T} \{\| (S_n(t-s) - S(t-s))\Phi(s) Q^{1/2} f_j \|^2_H \mathbf{I}_{[0,t]}(s)\} \right) \right]^p ds$$

$$\leq \mathbb{E} \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sup_{n>2\alpha} \sup_{0\leq t\leq T} \{\| (S_n(t-s) - S(t-s))\Phi(s) Q^{1/2} f_j \|^2_H \mathbf{I}_{[0,t]}(s)\} \right) \right]^p ds$$

$$\leq \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{\infty} (4M^2 e^{4\alpha T} \|\Phi(s) Q^{1/2} f_j\|^2_H) \right]^p ds = (4M^2 e^{\alpha} T)^p \int_0^T \|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds < \infty.$$

Le terme

$$\sup_{0\le t\le T}\{\| (S_n(t-s)-S(t-s))\Phi(s)Q^{1/2}f_j \|_H^2 \mathbf{I}_{[0,t]}(s)\} \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$ et il est borné par $4M^2e^{4\alpha T}\|\Phi(s)Q^{1/2}f_j\|_H^2$; donc (2) découle par le théorème de Lebesgue dominées par rapport à la mesure de comptage δ_j et alors relative à $d\mathbb{P}\otimes dt$.

(3) La preuve est simillaire à celle du (2). ▲

2.3 L'integral Stochastique par rapport à un processus de Wiener

Nous sommes prêts à étendre la définition de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus de Wiener à des processus stochastiques adaptés $\Phi(s)$ satisfaisant la condition

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} < \infty,$$

qui sera encore conduit à la condition

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} < \infty\right) = 1.$$

Définition 2.8 *L'intégrale stochastique d'un processus $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$ par rapport à $Q-$Wiener processus B_t, qui est $K-$valeurs est l'unique extension linéaire de l'application*

$$\Phi(.) \to \int_0^T \Phi(s)dB_s$$

Pour la classe des processus élémentaires bornés $L^2(\Omega,H)$, à une application de $\Lambda_2(K_Q,H)$ vers $L^2(\Omega,H)$, sachant que l'image de $\Phi(t) = \phi\mathbf{1}_0(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t)$ est $\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})$. Nous définisson le processus intégrale stochastique $\int_0^t\Phi(s)dW_s$, $0\le t\le T$, pour $\Phi\in\Lambda_2(K_Q,H)$ par

$$\int_0^t \Phi(s)dW_s = \int_0^T \Phi(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)dW_s$$

Théorème 2.2 *L'intégrale stochastique $\int_0^t\Phi(s)dW_s$ par rapport à $Q-$processus de Wiener W_t à valeurs K est une isometrie entre $\Lambda_2(K_Q,H)$ et l'espace des martingales continues de carré intégrable $\mathcal{M}_T^2(H)$,*

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t \Phi(s)dW_s\right\|_H^2 = \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds < \infty \tag{2.17}$$

pour $t\in[0,T]$.

La variation quadratique du processus intégral stochastique $\int_0^t\Phi(s)dW_s$ et le processus croissant lié à $\left\|\int_0^t\Phi(s)dW_s\right\|_H^2$ sont donnés par

$$\left\langle\left\langle\int_0^t \Phi(s)dW_s\right\rangle\right\rangle_t = \int_0^t(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^*ds$$

et

$$\left\langle \int_0^t \Phi(s) dW_s \right\rangle_t = \int_0^t \operatorname{tr}(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^* ds$$
$$= \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds$$

Démonstration. Notons que le processus intégral stochastique pour un processus élémentaire borné dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ est une martingale continue de carré intégrable.

Soit la suite des processus élémentaires bornés $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ approxime $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$. Nous pouvons supposer que $\Phi_1 = 0$ et

$$\|\Phi_{n+1} - \Phi_n\|_{\Delta_2(K_Q,H)} < \frac{1}{2^n}. \tag{2.18}$$

Alors par l'inégalité maximale de Doob, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t \le T} \left\| \int_0^t \Phi_{n+1}(s) dW_s - \int_0^t \Phi_n(s) dW_s \right\|_H > \frac{1}{n^2} \right)$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mathbb{E} \left\| \int_0^T (\Phi_{n+1}(s) - \Phi_n(s)) dW_s \right\|_H^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mathbb{E} \int_0^T \|(\Phi_{n+1}(s) - \Phi_n(s))\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$$

Par le lemm de Borel-Cantelli,

$$\sup_{t \le T} \left\| \int_0^t \Phi_{n+1}(s) dW_s - \int_0^t \Phi_n(s) dW_s \right\|_H \le \frac{1}{n^2}, \quad n > N(\omega)$$

Pour quelque $N(\omega), \mathbb{P} - p.s.$ Par conséquent , la series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \Phi_{n+1}(s) dW_s - \int_0^t \Phi_n(s) dW_s \right)$$

converge vers $\int_0^t \Phi(s) dW_s$ dans $L^2(\Omega, H)$ pour tout $t \le T$ et converge $\mathbb{P} - p.s.$ comme une series de functions continues à valeurs H vers une version continue de $\int_0^t \Phi(s) dW_s$.

Donc, l'application $\Phi \to \int_0^1 \Phi(s) dW_s$ est une isometrie d'un sous ensemble d'éléments bornés dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ vers l'espace des martingales continues de carré intégrables $\mathcal{M}_T^2(H)$, et est étendu à $\Lambda_2(K_Q,H)$ avec image dans $\mathcal{M}_T^2(H)$ par la notion de complétude. Il suffit de vérifier la formule du processus variation quadratique. Nous avons pour h dans H,

$$\left\langle \int_0^t \Phi(s) dW_s, h \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \lambda_j^{1/2} \Phi(s) f_j, h \rangle_H dW_j(t),$$

avec la série converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si $h, g \in H$, alors

$$\left\langle (\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^* h, g \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle h, \Phi(s)Q^{1/2} f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s)Q^{1/2} f_j \rangle_H$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle h, \Phi(s) f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s) f_j \rangle_H$$

Maintenant, pour $0 \leq u \leq t$,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\Big(\Big\langle \int_0^t \Phi(s)dW_s, h \Big\rangle_H \Big\langle \int_0^t \Phi(s)dW_s, g \Big\rangle_H \\
&- \Big\langle \Big(\int_0^t (\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^* ds \Big)(h), g \Big\rangle_H |\mathcal{F}_u \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_i^{1/2} \langle \Phi(s) f_i \rangle_H dW_i(s) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{1/2} \langle \Phi(s) f_j \rangle_H dW_j(s) \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j \langle h, \Phi(s) f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s) f_j \rangle_H ds |\mathcal{F}_u \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_i^{1/2} \langle \Phi(s) f_i, h \rangle_H dW_i(s) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{1/2} \langle \Phi(s) f_j, g \rangle_H dW_j(s) \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j \langle h, \Phi(s) f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s) f_j \rangle_H ds |\mathcal{F}_u \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j \langle \Phi(s) f_j, h \rangle_H dW_j(s) \int_0^t \lambda_j^{1/2} \langle \Phi(s) f_j, g \rangle_H dW_j(s) \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_j \langle h, \Phi(s) f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s) f_j \rangle_H ds |\mathcal{F}_u \Big) \\
&+ \mathbb{E}\Big(\sum_{i \neq j=1}^{\infty} \Big(\lambda_i^{1/2} \lambda_j^{1/2} \int_0^t \langle \Phi(s) f_i, h \rangle_H dW_i(s) \times \int_0^t \langle \Phi(s) f_j, g \rangle_H dW_j(s) \Big) |\mathcal{F}_u \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\lambda_j \int_0^u \langle \Phi(s) f_j, h \rangle_H dW_j(s) \lambda_j \int_0^u \langle \Phi(s) f_j, g \rangle_H dW_j(s) \Big) \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^u \lambda_j \langle h, \Phi(s) f_j \rangle_H \langle g, \Phi(s) f_j \rangle_H ds \\
&+ \sum_{i \neq j=1}^{\infty} \Big(\lambda_i^{1/2} \lambda_j^{1/2} \int_0^u \langle \Phi(s) f_i, h \rangle_H dW_i(s) \int_0^u \langle \Phi(s) f_j, g \rangle_H dW_j(s) \Big) \\
&= \Big\langle \int_0^u \Phi(s)dW_s, h \Big\rangle_H \Big\langle \int_0^u \Phi(s)dW_s, h \Big\rangle_H - \Big\langle \Big(\int_0^u (\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^* ds \Big)(h), g \Big\rangle_H
\end{aligned}$$

La formule du processus croissant découle du théorème de décomposition du Doob-Meyer[20].

Le corollaire suivant découle de la preuve du théorème 2.2.

Corollaire 2.2 *Pour une suite des processus élémentaires bornés $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K, H))$ qui approxime Φ dans $\Lambda_2(K_Q, H)$ et satisfaisant la condition (2.18), les intégrales stochastiques correspondantes convergent uniformément avec probabilité 1,*

$$P\Big(\sup_{t \leq T} \| \int_0^t \Phi_n(s)dW_s - \int_0^t \Phi(s)dW_s \|_H \to 0 \Big) = 1.$$

$$\mathbb{P}\big(\sup_{0 \leq t \leq T} \| \int_0^t \Phi(s,\omega)dW_s \|_H > \lambda \big) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^T \mathbb{E} \|\Phi(s,w)\|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)} ds, \qquad (2.19)$$

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \| \int_0^t \Phi(s, \omega) dW_s \|_H^2 \leq 4 \int_0^T \mathbb{E} \|\Phi(s)\|_{\Lambda_2(K_Q, H)}^2 ds, \tag{2.20}$$

Par conséquent si Φ est approximée par $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $\Delta_2(K_Q, H)$ alors pour tout $t \leq T$, $\int_0^t \Phi_n(s) dW_s \to \int_0^t \Phi(s) dW_s$ dans $L^2(\Omega, H)$.

Remarque 2.2 *Pour $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$ telle que $\Phi(s) \in \mathcal{L}(K, H)$, la variation quadratique de l'intégrale d'Ito $\int_0^t \Phi(s) dW_s$ et le processus croissant lié à $\| \int_0^t \Phi(s) dW_s \|_H^2$ est simplifié à*

$$\left\langle \left\langle \int_0^{\cdot} \Phi(s) dW_s \right\rangle \right\rangle_t = \int_0^t \Phi(s) Q \Phi(s)^* ds$$

et

$$\left\langle \int_0^{\cdot} \Phi(s) dW_s \right\rangle_t = \int_0^t tr(\Phi(s) Q \Phi(s)^*) ds.$$

L'étape finale dans la construction de l'intégrale stochastique d'Itô est étendu à la classe des integrands satisfaisant une classe d'hypothèse sur leurs seconds moments. Cette extension est nécessaire si l'on veut étudier sa formule même pour des fonctions aussi simples que $x \to x^2$. Nous utilisons l'approche présentée dans [20] pour les processus réels. Dans ce chapitre, nous n'aurons besoin que du concept de processus progressivement mesurables réels,

Définition 2.9 *Un processus stochastique $X(t), t \geq 0$, à valeurs dans H, definit sur un espace de probabilité filté $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{tt \geq 0}, \mathbb{P})$ est dit progressivement mesurable si pour tout $t \geq 0$, l'application*

$$X(\cdot, \cdot) : ([0, t], \mathcal{B}[0, t] \times (\Omega, \mathcal{F}_t)) \to (H, \mathcal{B}(H)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. Il est bien connu (voir la Proposition 1.13 dans [14]) qu'un processus continu à droite (ou continu à gauche) adapté est progressivement mesurable.

Soit $\mathcal{P}(K_Q, H)$ la classe des processus $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$ stochastic processes adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$, masurables de $\big([0, T] \times, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_T\big)$ vers $\big(\mathcal{L}_2(K_Q, H), \mathcal{B}(\mathcal{L}_2(K_Q, H))\big)\big)$, et satisfisant la condition

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q, H)}^2 dt < \infty \right\} = 1. \tag{2.21}$$

Évidemment, $\Lambda_2(K_Q, H) \subset \mathcal{P}(K_Q, H)$. Nous montrons que tout processus de $\mathcal{P}(K_Q, H)$ peut etre approximé par les processus de $\Lambda_2(K_Q, H)$ et, puis, par des processus élémentaires $\mathcal{E}(L(K, H))$.

Lemme 2.2 *Soit $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$. Alors il existe une suite de processus bornés $\Phi_n \in \mathcal{E}(L(K, H)) \subset \Lambda_2(K_Q, H)$ telle que*

$$\int_0^T \|\Phi(t, w) - \Phi_n(t, w)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q, H)}^2 dt \to 0 quand n \to \infty. \tag{2.22}$$

en probabilité et $\mathbb{P}$-p.s.

Démonstration. Pour $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$, définissons

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \leq T : \int_0^t \|\Phi(s,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds \geq n\}, \\ T \qquad \text{si} \quad \int_0^t \|\Phi(s,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds < n. \end{cases} \tag{2.23}$$

Le processus réel $\int_0^t \|\Phi(s,\omega)\|^2_{\mathcal{L}^2(K_Q,H)} ds$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ et continu, et donc il est progressivement mesurable. Donc, τ_n est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt, on peut définir un processus $\mathcal{F}_t$-adapté

$$\Phi_n(t,\omega) = \Phi(t,\omega)\mathbf{1}_{\{t \leq \tau_n(\omega)\}} \tag{2.24}$$

Par la définition de $\tau_n(\omega)$ nous avons

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \leq n,$$

ainsi que $\Phi_n \in \Lambda_2(K_Q, H)$. De plus, en vue de (2.24),

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > 0\right) \\ \leq \quad & \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > n\right) \end{aligned}$$

et donc $\Phi_n \to \Phi$ en probability dans le sens de la convergence dans (2.22).

Par la Proposition 2.2, pour tout n, il existe une suite de processus élémentaire bornés $\{\Phi_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ telles que

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_{n,k}(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > 0 \to 0. \text{ p.s. } n \to \infty.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_{n,k}(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > \epsilon\right) \\ \leq \quad & \mathbb{P}\left(2\int_0^T \|\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > 0\right) + \mathbb{P}\left(2\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_{n,k}(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > \epsilon \right. \\ \leq \quad & \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > 0\right) + \mathbb{P}\left(2\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_{n,k}(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > \frac{\epsilon}{2} \right. \\ \leq \quad & \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > n\right) + \frac{2}{\epsilon}\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_{n,k}(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt \end{aligned}$$

Ce qui prouve la convergence de probabilité en (2.22) et la Convergence $\mathbb{P}$ -p.s. pour une sous suite.

Nous pouvons définir une classe de processus élémentaires à valeurs dans H notée par $\mathcal{E}(H)$ adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ comme tout processus de la forme

$$\Psi(t,\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(\omega)\mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}]}(t), \tag{2.25}$$

où $0 = t0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$, Ψ est $\mathcal{F}_0$-masurable, et $\xi_j (j = 0, 1, \ldots, n-1)$, sont des aléatoire variables $\mathcal{F}_{t_j}$-masurables dans H. En appliquant la même preuve que dans le lemme 2.2, nous pouvons prouver l'énoncé suivant.

Lemme 2.3 *Soit $\Psi(t), t \leq T$, un processus stochastique à valeurs dans H, $\mathcal{F}_t$-adapté satisfisant la condition*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Psi(t)\|_H dt < \infty\right) = 1$$

Alors il existe une suite de procesus élémentaires bornés $\Psi_n \in \mathcal{E}(H)$ telle que

$$\int_0^T \|\Psi(t,\omega) - \Psi_n(t,\omega)\|_H dt \to 0 \text{ as } n \to \infty \tag{2.26}$$

en probabilité et presque sure.

Nous aurons besoin de l'estimation utile suivante.

Lemme 2.4 *Soit $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$. Alors pour $\delta > 0$ arbitraire et $n > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} \|\int_0^s \Phi(s) dW_s\|_H > \delta\right) \leq \frac{n}{\delta^2} + \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\Delta_2(K_Q,H)} ds > n\right). \tag{2.27}$$

Démanstration. Soit τ_n un temps d'arrét definé dans (2.23). Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} \|\int_0^s \Phi(s) dW_s\|_H > \delta\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} \|\int_0^s \Phi(s) dW_s\|_H > \delta \text{ et } \int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\Delta_2(K_Q,H)} ds > n\right) \\ + \ & \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} \|\int_0^s \Phi(s) dW_s\|_H > \delta \text{ et } \int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\Delta_2(K_Q,H)} ds \leq n\right) \end{aligned}$$

La première probabilité à droite est bornée par $\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\Delta_2(K_Q,H)} ds > n\right)$. Tandis que la deuxième probabilité ne dépasse pas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} \|\int_0^s \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\Phi(s) dW_s\|_H > \delta\right) & \leq \frac{1}{\delta^2}\mathbb{E}\int_0^T \|\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}\Phi(s)\|^2_{\Delta_2(K_Q,H)} ds \\ & \leq \frac{n}{\delta^2} \end{aligned}$$

par l'inégalité maximale de Doob. ▲

Nous déduissons la construction de l'intégrale stochastique maintenant.

Lemme 2.5 *Soit Φ_n une suite dans $\Lambda_2(K_Q, H)$ approximant un processus $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$ dans le sens (2.22), i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt > 0\right) \to 0.$$

Alors, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$ mesurable, notéé par $\int_0^T \Phi(t)dW_t$, telle que

$$\int_0^T \Phi_n(t)dW_t \to \int_0^T \Phi(t)dW_t$$

en probabilité. La variable aléatoire $\int_0^T \Phi(t)dW_t$ ne dépend pas du choix de la suite d'approximation.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_m(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} > 0\right) = 0$$

Si $\delta > 0$, alors par (2.27)

$$\limsup_{m,n\to\infty} \mathbb{P}\left(\| \int_0^T \Phi_n(t)dW_t - \int_0^T \Phi_m(t)dW_t\|_H > \delta\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_n(t,\omega) - \Phi_m(t,\omega)\|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)}dt > \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{\delta^2},$$

et comme ε est arbitraire, on a la convergence

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\|\int_0^T \Phi_n(t)dW_t - \int_0^T \Phi_m(t)dW_t\right\|_H > \delta\right) = 0.$$

La limite en probabilité $\int_0^T \Phi(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Phi_n(t)dW_t$ ne dépend pas du choix de la suite d'approximation, alors les deux suites peuvent être fusionnées en une seule. La limite devrait alors coïncider avec les limites de toutes ses sous-suites. ▲

Définition 2.10 *La variable aléatoire $\int_0^T \Phi(t)dW_t$ definie dans le Lemme 2.5 est appelée l'integrale stochastique du processus Φ par rapport à un processus de Wiener dans $\mathcal{P}(K_Q, H)$. Pour $0 \leq t \leq T$, Nous définisson le processus intégrale stochastique dans H ; $\int_0^t \Phi(s)dW_s$ par*

$$\int_0^t \Phi(s)dW_s = \int_0^T \Phi(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)dW_s.$$

Définition 2.11 *Le processus stochastique $\{M_t\}_{t\leq T}$, adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans un espqce de Hilbert H est dit* martingale locale *si il existe une suite de temps d'arrét croissante τ_n, avec $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = T) = 1$, telle que pour tout n, $M_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale uniformément integrable.*

Lemme 2.6 *Soit $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$, et τ un temps d'arret ar rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$. Définissons*

$$\int_0^\tau \Phi(t)dW_t = \int_0^u \Phi(t)dW_t \textit{ sur } \{\omega : \tau(\omega) = u\}.$$

Alors

$$\int_0^\tau \Phi(t)dW_t = \int_0^T \Phi(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW_t. \tag{2.28}$$

Démonstration. Pour un process arbitraire $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$, soit Φ_n une suite de processus elementaires bornés approxime Φ (Lemme 2.2). Donc

$$\int_0^T \|\Phi_n(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}} - \Phi(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}\|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)}dt \leq \int_0^T \|\Phi_n(t) - \Phi(t)\|^2_{\Lambda_{2(K_Q,H)}}dt,$$

On conclut que

$$\int_0^T \Phi_n(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW_t \to \int_0^T \Phi(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW_t$$

en probabilité.

Pour un processus élémentaire borné $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K, H))$. L'inégalité (2.28) peut être verifie par la méthode standartd, ainsi que

$$\int_0^\tau \Phi_n(t)dW_t = \int_0^T \Phi_n(s)\mathbf{1}_{\{s\leq\tau}\}dW_s.$$

Dans l'ensemble $\{\omega : \tau(\omega) = u\}$. Nous avons $\int_0^\tau \Phi_n(t)dW_t = \int_0^u \Phi_n(t)dW_t$. Ainsi pour tout $u \leq T$,

$$\int_0^u \Phi_n(t)dW_t \to \int_0^u \Phi(t)dW_t$$

en probabilité. Donc pour tout $u \leq T$,

$$\mathbf{1}_{\{\tau=u\}}\int_0^T \Phi_n(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW_t \to \mathbf{1}_{\{\tau=u\}}\int_0^u \Phi(t)dW_t$$

en probabilité. Ceci implique que pour tout $u \leq T$,

$$\mathbf{1}_{\{\tau=u\}}\int_0^u \Phi(t)dW_t = \mathbf{1}_{\{\tau=u\}}\int_0^T \Phi(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW_t \ \mathbb{P} - a.s.$$

Comme le processus intégrale stochastique $\int_0^u \Phi(t)dW_t, u \leq T$ est $\mathbb{P}$-p.s. continu, nous obtenons que l'égalité ci-dessus détient $\mathbb{P}$-p.s. pour tous $u \leq T$, et donc (2.28).

Maintenant remarquons que pour $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$, le processus intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s)dW_s$ est une martingale locale, avec la suite localisante des temps d'arret τ_n définie dans (2.23). Nous avons $\mathbb{P}(lim_{n\to\infty}\tau_n = T) = 1$, et, par (2.28), $\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi(s)dW_s$ est une martingale avec

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi(s)dW_s\right\|^2_H\right) = \mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_\in(K_Q,H)}\mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}ds \leq n.$$

Ceci prouve que pour tout n, le processus $\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi(s)dW_s$ est une martingale de carré intégrable d'où une martingale uniformément intégrable.

2.4 Intégrale d'Itô par rapport a un processus de Wiener Cylindrique

Nous procédons maintenant à la définition de l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener cylindrique. Nous nous limiterons au cas où $\Phi(s)$ est un processus à valeurs dans $\mathcal{L}_2(K,H)$, suivant le travail de [8]. Une approche générale peut être trouvée dans [16] et [9].

Rappelons que si $\Phi(s)$ est un processus élémentaire, $\Phi(s) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$, alors $\Phi(s) \in \mathcal{L}_2(K,H)$, quand $Q = I_K$. Supposons $\Phi(s)$ est borné pour la norme de $\mathcal{L}_2(K,H)$. Utilisant (2.12), avec $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base dans H, nous calculons,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s\right)(e_i)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \mathbb{E} \parallel \Phi^*(s)e_i \parallel_K^2 ds$$

$$= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \parallel \Phi^*(s)e_i \parallel_K^2 ds = \mathbb{E}\int_0^t \parallel \Phi^*(s) \parallel_{\mathcal{L}_2(H,K)}^2 ds$$

$$= \mathbb{E}\int_0^t \parallel \Phi(s) \parallel_{\mathcal{L}_2(H,K)}^2 ds$$

Alors nous définissons l'intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s$ pour un processus élémentaire borné $\Phi(s)$ comme suit :

$$\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s\right)(e_i)\right)e_i. \tag{2.29}$$

Par le calcul précédent, $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s \in L^2(\Omega,H)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$. l'égalité

$$\left\|\int_0^T \phi(s)d\widetilde{W}_s\right\|_{L^2(\Omega,H)} =\parallel \Phi \parallel_{\Lambda_2(K,H)} \tag{2.30}$$

établit la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique.

Définition 2.12 *L'integrale stochastique d'un processus $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$ par rapportà un processus de Wiener cylindrique standard $\widetilde{W}$ dans l'espace de Hilbert K est l'unique extension lineaire d'isometrie de l'application*

$$\Phi(.) \longrightarrow \int_0^T \Phi(s)d\widetilde{W}_s$$

de la classe des processus élémentaires bornés à $L^2(\Omega,H)$ à une application de $\Lambda_2(K,H)$ vers $L^2(\Omega,H)$, sachant que l'image de $\Phi(t) = \Phi\boldsymbol{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\Phi_j\boldsymbol{I}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$ est

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(\widetilde{W}_{t_{j+1}\wedge t}(\phi^*(e_j)) - \widetilde{W}_{t_j\wedge t}(\wedge\phi_j^*(e_j)))e_j.$$

Nous définisson le processus intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s$, $0 \le t \le T$, pour $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$ par

$$\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s = \int_0^t \Phi(s)I_{[0,t]}d\widetilde{W}_s.$$

La démonstration du théorème suivant est analoque à celle qu théorème 2.2.

Théorème 2.3 *L'intégrale stochastique $\Phi \longrightarrow \int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s$ par rapport à un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}$ dand K est une isometrie ente $\Lambda_2(K,H)$ et l'espace des martingale continues de carré intégrable $\mathcal{M}_T^2(H)$. La variation quadratique du processus $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s$ est donnée par*

$$\left\langle \int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s \right\rangle = \int_0^t \Phi(s)\Phi^*(s)ds$$

et

$$\left\langle \int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s \right\rangle = \int_0^t tr\Phi(s)\Phi^*(s)ds = \int_0^t \| \Phi(s) \|^2_{\mathcal{L}(K,H)} ds.$$

De même comme le cas de l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener, on déduit la construction de l'intégrale par rapport à un processus de Wiener cylindrique.

Remarque 2.3 *Puisque pour $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$, le processus $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s \in \mathcal{M}_T^2(H)$, la conclusion du lemme 2.4 est vraies dans le cas cylindrique.*

Définissons $\mathcal{P}(K,H) = \mathcal{P}(K_Q,H)$ avec $Q = I_K$. Nous peuvons construire l'integrale stochastique cylindrique $\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s$ pour $\Phi \in \mathcal{P}(K,H)$ avec le meme principe que dans le Lemme 2.5.

Définition 2.13 *Soit Φ_n une suite dans $\Lambda_2(K,H)$ approxime le processus $\Phi \in \mathcal{P}(K,H)$ dans le sens de (2.22), i.e.,*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \| \Phi_n(t,\omega) - \Phi(t,\omega) \|^2_{\mathcal{L}_2(K,H)} dt > 0\right) \longrightarrow 0.$$

Notons la limite en probabilité de la suite $\int_0^T \Phi_n(t)d\widetilde{W}_t$ par $\int_0^T \Phi(t)d\widetilde{W}_t$. L'intégrale est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeurs H, et elle ne dépend pas du choix de l'approximation de la suite.

Pour $0 \leq t \leq T$, nous définisons un processus intégrale stochastique à valeurs dans H, $\int_0^t \Phi(t)d\widetilde{W}_t$ par

$$\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s = \int_0^T \Phi(s)I_{[0,T]}d\widetilde{W}_t.$$

La représentation suivante de l'intégrale stochastique par rapport à un Q-processus de Wiener et par rapport à un processus de Wiener cylindrique si $Q = I_K$ peut être assi utiliser comme une définition.

Lemme 2.7 *Soit W_t un Q-processus de Wiener dans un espace de Hilbert K, $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$ et $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ une base orthogonale dans K composé de vecteurs propres de Q. Alors*

$$\int_0^t \Phi(s)dB_s = \sum_{j=1}^\infty \int_0^t (\Phi(s)\lambda_j^{1/2}f_j)d\langle B_s, \lambda_j^{1/2}f_j\rangle_{K_Q}.$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \int_0^t (\Phi(s)f_j)d\langle W_s, f_j\rangle_K. \tag{2.31}$$

Pour un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}_t$, si $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$ et $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthogonale dans K, alors

$$\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (\Phi(s)f_j)d\widetilde{W}_s(f_j). \tag{2.32}$$

Démonstration. Nous allons prouver (2.32), seulement pour le cas cylindrique, le cas d'un Q-processus Wiener est presque identique.

Nous notons d'abord que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t (\Phi(s)f_j d\widetilde{W}_s(f_s)\right\|_H^2 &= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t (\Phi(s)f_j d\widetilde{W}_s(f_s), e_i\right\rangle_H^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \langle(\Phi(s)(f_s), e_i\rangle_H^2 \\ &= \mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K,H)} < \infty.\end{aligned}$$

avec $\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t (\Phi(s)f_j d\widetilde{W}_s(f_s) \in H$, $\mathbb{P}$-p.s. Pour un processus élémentaire

$\Phi(s) = I - \{0\}\phi + \sum_{k=1}^{n-1} \phi_k I_{]t_k,t_{k+1}]}(s) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ et tout $h \in H$, nous avons p.s.

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s, h\right\rangle &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\widetilde{W}_{t_{k+1}}(\phi_k^*(h)) - \widetilde{W}_{t_k}(\phi_k^*(h))\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\widetilde{W}_{t_{k+1}}(f_j) - (\widetilde{W}_{t_k}(f_j)\right)\langle f_j, \phi_k^*(h)\rangle_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle \phi_k(f_j)\left(\widetilde{W}_{t_{k+1}}(f_j) - (\widetilde{W}_{t_k}(f_j)\right), h\right\rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\phi_k(f_j)\left(\widetilde{W}_{t_{k+1}}(f_j) - (\widetilde{W}_{t_k}(f_j)\right), h\right\rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Phi(s)f_j\right)d(\widetilde{W}_s(f_j), h\right\rangle_H,\end{aligned}$$

de sorte que (2.32) tient dans ce cas.

Soit $P_{m+1}^{\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $\{f_{m+1}, f_{m+2}, ...\}$. maintenant pour $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$, nous avons pour une suite d'approximation $\Phi_n(s) \in \mathcal{E}(L(K,H))$, utilisant (2.32) pour les processus élémentaires,

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s - \sum_{j=1}^{m}\int_0^t \left(\Phi(s)f_j\right)d\widetilde{W}_s(f_j)\right\|_H^2$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\left\|\left(\int_0^t \Phi(s)d\widetilde{W}_s - \int_0^t \Phi_n(s)d\widetilde{W}_s\right) + \int_0^t \Phi_n(s)d\widetilde{W}_s - \sum_{j=1}^{m}\int_0^t \left(\Phi(s)f_j\right)d\widetilde{W}_s(f_j)\right\|_H^2$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_0^t \left(\Phi_n(s)f_j\right) d\widetilde{W}_s(f_j) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \left(\Phi_n(s)f_j\right) d\widetilde{W}_s(f_j) - \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \left(\Phi(s)f_j\right) d\widetilde{W}_s(f_j) \right\|_H^2$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_0^t \left(\Phi_n(s)f_j\right) d\widetilde{W}_s(f_j) \right\|_H^2$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_0^t \left((\Phi_n(s)P_{m+1}^{\perp}f_j\right) d\widetilde{W}_s(f_j) \right\|_H^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left\| \int_0^t \left((\Phi_n(s)P_{m+1}^{\perp}\right) d\widetilde{W}_s \right\|_H^2$$

$$= \mathbb{E}\left\| \int_0^t \left((\Phi(s)P_{m+1}^{\perp}\right) d\widetilde{W}_s \right\|_H^2 = \mathbb{E}\int_0^t \left\|\Phi(s)P_{m+1}^{\perp}\right\|_{\mathcal{L}_2(K,H)} ds$$

Dont nous utilisons le fait que $\Phi_n P_{m+1}^{\perp} \longrightarrow \Phi P_{m+1}^{\perp}$ dans $\Lambda_2(K,H)$ quand $n \longrightarrow \infty$. Et ceci termine la preuve. ▲

2.5 Formules d'Itô

Nous allons présenter un théorème qui donne les conditions sur lesquelles un processus stochastique $F(t, X(t))$ présente un différentiel stochastique, à condition que $X(t)$ présente une différentiel stochastique. D'abord, nous expliquons quelques notations généralement utilisé.

2.5.1 Cas d'un Q-processus de Wiener

Si $\phi \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ et $\psi \in H$, alors $\phi^*\psi \in \mathcal{L}_2(K_{,Q}, \mathbb{R})$, Donc

$$\|\phi^*\psi\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left((\phi^*\psi)(\lambda^{1/2}f_j)\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left\langle \psi, \phi(\lambda^{1/2}f_j)\right\rangle_H^2$$

$$\leq \|\psi\|_H^2 \|\phi\|_{\mathcal{L}_2(K,H)}^2.$$

D'ou, si $\Phi(s) \in \mathcal{P}(K_Q, H)$ et $\psi(s) \in H$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés, alors le procesus $\Phi^*(s)\psi(s)$ définit par

$$(\Phi^*(s)\psi(s))\,(k) = \langle \psi(s), \Phi(s)(k)\rangle_H$$

à valeurs dans $\mathcal{L}_2(K,H)$. Si, de plus, $\mathbb{P}$-p.s., $\psi(s)$ est bornée comme une fonction de s, alors

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi^*(s)\psi(s)\|_{\mathcal{L}_2(K,H)}^2 ds < \infty\right) = 1$$

ainsi que $\Phi^*(s)\psi(s) \in \mathcal{P}_2(K,H)$, et nous peuvons définit

$$\int_0^T \langle \psi(s), \Phi(s)dW_s\rangle_H = \int_0^T \Phi^*(s)\psi(s)dW_s.$$

Théorème 2.4 *(Formule d'Itô). Soit Q la trace d'un opérateur symétrique positif sur un espace de Hilbert séparable K, et soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un Q-processus de Wiener sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Supposons le processus stochastique $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, donné par*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \psi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW_s, \tag{2.33}$$

où $X(0)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et à valeurs dans H, $\psi(s)$ est un processus de Bochner intégrable $\mathbb{P}$-p.s. $\mathcal{F}_s$-mesurabe sur $[0,T]$ à valeurs dans H,

$$\int_0^T \|\psi(s)\|_H \, ds < \infty \quad \mathbb{P}-p.s.,$$

et $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$.

Supposons qu'une fonction $F : [0,T] \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que F est continue et ses dérivées partielles F_t, F_x, F_{xx} sont continues et bornées sur sous-ensembles de $[0,T] \longrightarrow H$. Alors la formule d'Itô suivante est vérifie :

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) \\ &+ \int_0^t \langle F_x(s, X(s)), \Phi(s)dW_s\rangle_H + \int_0^t \{F_t(s, X(s)), \langle F_x(s, X(s)), \psi(s)\rangle_H \\ &+ \frac{1}{2} tr[F_{xx}(s, X(s))(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^*]\}ds \end{aligned} \tag{2.34}$$

$\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que le cas général peut être réduite au cas de processus constants $\psi(s) = \psi$ et $\Phi(s) = \Phi$, $s \in [0,T]$. Pour une constante $C > 0$, on définit le tepms d'arret

$$\tau_C = \inf\left\{t \in [0,T] : \max\left(\|X(t)\|_H, \int_0^t \|\psi(s)\|_H ds, \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds\right) \geq C\right\}$$

avec la convention que $\inf\{\emptyset\}$ égale à T.

Alors, la notation $X_C(t) = X(t \wedge \tau_C), \psi_C(t) = \psi(t)I_{[0,\tau_C]}(t)$, et $\Phi_C(t) = \Phi(t)I_{[0,\tau_C]}(t)$, nous avons

$$X_C(t) = X_C(0) + \int_0^t \psi_C(s)ds + \int_0^t \Phi_C(s)dW_s, \quad t \in [0,T].$$

Par (2.28), il est suffisant de prouver la formule d'Ito pour le processus arrété τ_C. donc

$$\mathcal{P}\left(\int_0^T \|\psi_C(s)\|_H ds < \infty\right) = 1$$

et

$$\mathbb{E}\int_0^T \| \Phi_C(s) \|_{\mathcal{L}(K_Q,H)} \, ds < \infty,$$

Par le lemme 2.3 et le Corollaire 2.2, il suit que ψ_C et Φ_C peut être approximées respectivement par des suites de processus élémentaires bornées $\psi_{C,n}$ et $\Phi_{C,n}$ pour les quelles $\mathbb{P}-p.s.$, $t = T$

$$\int_0^T \| \psi_{C,n}(s) - \psi_C(s) \|_H \, ds \longrightarrow 0$$

et
$$\left\|\int_0^t \Phi_{C,n}(s)dW_s - \int_0^t \Phi_C(s)dW_s\right\|_H \longrightarrow 0.$$
Définissons
$$X_{C,n}(t) = X(0) + \int_0^t \psi_{C,n}(s)ds + \int_0^t \Phi_{C,n}(s)dBs$$
Alors
$$\sup_{t\leq T} \|X_{C,n}(t) - X_C(t)\|_H \longrightarrow 0$$
avec probabilité un. Supposons que nous avons montrer la formule d'Itô pour le processus $X_{C,n}(t)$, tel que,
$$\begin{aligned} F\left(t, X_{C,n}(t)\right) &= F\left(0, X(0)\right) + \int_0^t \langle F_x(X_{C,n}(s)), \Phi_{C,n}(s)dW_s\rangle_H \\ &+ \int_0^t \{F_t(s, X_{C,n}(s)) + \langle F_x(s, X_{C,n}(s)), \psi_{C,n}(s)\rangle_H \\ &+\frac{1}{2}tr\left[F_{xx}(s, X_{C,n}(s))(\Phi_{C,n}(s)Q^{1/2})(\Phi_{C,n}(s)Q^{1/2})^*\right]\Big\} ds \end{aligned} \tag{2.35}$$
$\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0, T]$. Utilisons la continuété de F, la continuété et la bornitude de ses dérivées partielles, nous allons maintenant conclure que
$$\begin{aligned} F\left(t, X_C(t)\right) &= F\left(0, X(0)\right) + \int_0^t \langle F_x(X_C(s)), \Phi_C(s)dW_s\rangle_H \\ &+ \int_0^t \{F_t(s, X_C(s)) + \langle F_x(s, X_C(s)), \psi_C(s)\rangle_H \\ &+\frac{1}{2}tr\left[F_{xx}(s, X_C(s))(\Phi_C(s)Q^{1/2})(\Phi_C(s)Q^{1/2})^*\right]\Big\} ds \end{aligned} \tag{2.36}$$
Clairement, (2.35) convergee vers (2.36) p.s.
Pour l'intégrale stochastique dans (2.35) et (2.36), nous avons
$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|\int_0^t \langle F_x(s, X_{C,n}(s)), \Phi_{C,n}(s)dW_s\rangle - \int_0^t \langle F_x(s, X_C(s)), \Phi_C(s)dW_s\rangle_H\right|^2 \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E}\,\|\Phi_C^*(s)(F_x(s, X_{C,n}(s)) - F_x(s, X_C(s)))\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,\mathbb{R})} ds \\ &+2\int_0^t \mathbb{E}\,\left\|(\Phi_C^*(s) - \Phi_{C,n}^*)(F_x(s, X_{C,n}(s))\right\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,\mathbb{R})} ds \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E}(\|\Phi_C(s)\|^2_{\mathcal{L}(K_Q,H)}\|F_x(s, X_{C,n}(s)) - F(s, X_C(s))\|^2_H)ds \\ &+2\int_0^t \mathbb{E}\left(\|\Phi_C^*(s) - \Phi_{C,n}^*\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}\|(F_x(s, X_{C,n}(s))\|^2_H\right) ds \end{aligned}$$
La première intégrale converge vers zéro, étant donné que le premier facteur est un processus intégrable, et le deuxième facteur converge vers zéro presque sûrement, de sorte que le théorème de Lebesgue applique. La deuxième intégrale est borné

par $M\|\Phi_C^*(s) - \Phi_{C,n}^*\|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)}$ pour une constante M, ce qui converge vers zéro, ainsi $\Phi_{C,n}(s) \longrightarrow \Phi_C$ dans l'espace $\Lambda(K_Q, H)$.

En conclusion, l'intégrale stochastique dans (2.35) converge vers l'intégrale stochastique dans (2.36) dans L^2, d'où la convergence en probabilité.

Revenant maintenant à l'intégrale non stochastique.
Le premier composant, impliquant F_t , de l'intégrale stochastique de (2.35) converge $\mathbb{P}$-p.s. vers la composante correspondante à (2,36) par la continuité et la bornétude locale de F_t, de sorte que le théorème de Lebesgue dominée peut être appliquée.

Notons que, $\mathbb{P}$-p.s., $\psi_{C,n_k} \longrightarrow \psi_C$ dans $L^1([0,t], H)$, et F_x est localement bornée, ainsi que les fonctions $s \longmapsto F_x(s, X_{C,n_K}(s))$ et $s \longmapsto F_x(s, X_C(s))$ sont dans $L^\infty([0,t], H)$.
La convergence en probabilité de la seconde composante résulte de l'argument de dualité.

Pour l'intégrale non stochastique dernière, nous utilisons le fait que

$$\|\Phi_{C,n}(s) - \Phi_C(s)\|_{\Lambda_2(K_Q,H)} \longrightarrow 0$$

et selectionner une sous suite n_k telle que

$$\|\Phi_{C,n_k}(s) - \Phi_C(s)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \longrightarrow 0$$

et, par conséquent, pour les vecteurs propres f_j de Q,

$$\|\Phi_{C,n_k}(s) - \Phi_C(s) f_j\| \longrightarrow 0 \tag{2.37}$$

p.s. sur $[0, T] \times \Omega$.

$$\begin{aligned} & tr(F_{xx}(s, X_{C,n_k}(s))\Phi_{C,n_k}(s)Q\Phi^*_{C,n_k}(s)) \\ & tr(\Phi^*_{C,n_k}(s)F_{xx}(s, X_{C,n_k}(s))\Phi_{C,n_k}(s)Q) \\ = & \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle F_x x(s, X_{C,n_k}(s))\Phi_{C,n_k}(s) f_j, \Phi_{C,n_k}(s) f_j\rangle_H \end{aligned}$$

Comme $X_{C,n_k}(s)$ est bornée, la continuité de F_{xx} et (2.36) implique que

$$\langle F_{xx}(s, X_{C,n_k}(s))\Phi_{C,n_k}(s) f_j, \Phi_{C,n_k}(s) f_j\rangle_H \longrightarrow \langle F_{xx}(s, X_C(s))\Phi_C(s) f_j, \Phi_C(s) f_j\rangle_H.$$

par le théorème de Lebesgue nous obtenons que, p.s. sur $[0, T] \times \Omega$,

$$tr\left(F_{xx}(s, X_{C,n_k}(s))\Phi_{C,n_k}(s)Q\Phi^*_{C,n_k}(s)\right) \longrightarrow tr\left(F_{xx}(s, X_C(s))\Phi_C(s)Q\Phi^*_C(s)\right)$$

et le dernier terme borné par la fonction

$$\eta_n(s) = \| F_{xx}(s, X_{C,n_k}(s)) \|_{\mathcal{L}(H)} \| \Phi_{C,n_k} \|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)}$$

qui converge $\mathbb{P}$-p.s. vers

$$\eta_n(s) = \| F_{xx}(s, X_C(s)) \|_{\mathcal{L}(H)} \| \Phi_C \|^2_{\Lambda_2(K_Q,H)}$$

en vertu de la bornitude de la dérivéé seconde de F, $\int_0^t \eta_n(s)ds \longrightarrow \int_0^t \eta(s)ds$, afin que nous appliquons le théorème général de Lebesgue, pour déduire la convergence en probabilité du dernière intégrale non stochastique 1

En conclusion, éventuellement pour une suite, les côtés gauche et droit de (2.35) convergent en probabilité vers les côtés gauche et droit de (2.36), de sorte que (2.36) contient $\mathbb{P}$-p.s.

Par l'additivité des intégrales on peut encore réduire la preuve au cas où

$$X(t) = X(0) + \psi_t + \Phi W_t,$$

où ψ et Φ sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_0$-measurables independende de t. Maintenant, on définit

$$u(t, W_t) = F(t, X(0) + \psi_t + \Phi W_t);$$

alors la fonction u est du même ordre que F. Nous allons maintenant prouver la formule d'Ito pour la fonction u.

Soit $0 = t_1 < t2 < ... < t_n = t \leq T$ une subdivision de l'intervalle $[0, t]$ et noton $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ et $\Delta W_j = W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$. Utilisons la formule de Taylor, il existe des variable aléatoires $\overline{t_j} \in [t_j, t_{j+1}]$ et $\theta_j \in [0, 1]$ telle que $u(t, W_t) - u(0, 0) =$

$$\sum_{j=1}^{n-1}[u(t_{j+1}, W_{t_{j+1}}) - u(t_j, W_{t_{j+1}})] + \sum_{j=1}^{n-1}[(t_j, W_{t_{j+1}}) - u(t_j, W_{t_j}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} u_t(\bar{t}_j, W_{t_{j+1}})\Delta t_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left[\langle u_x(t_j, W_{t_j}), \Delta W_j\rangle_K + \frac{1}{2}\langle u_{xx}(t_j, \widetilde{W}_j)(\Delta W_j), \Delta W_j\rangle_K\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_t(t_j, W_{t_{j+1}})\Delta t_j + \sum_{j=1}^{n-1}\langle u_x(t_j, W_{t_j}), \Delta W_j\rangle_K + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\langle u_{xx}(t_j, \widetilde{W}_j)(\Delta W_j), \Delta W_j\rangle_K$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left[u_t(\bar{t}_j, W_{t_{j+1}} - u_t(t_j, W_{t_{j+1}})\Delta t_j\right]\Delta t_j$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle\left[u_{xx}(t_j, \widetilde{W}_j)\Delta W_j) - u_{xx}(t_j, W_j)\Delta W_j)\right], \Delta W_j\right\rangle_K \tag{2.38}$$

où $\widetilde{W}_j = W_{t_j} + \theta_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$.

Supposons que $\max\{t_{j+1} - t_j,\ 1 \leq j \leq n-1\} \longrightarrow 0$ et utilisons la continuete uniforme de l'application

$$u[0, T] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s, r) \longmapsto u_t(s, W_r)$$

et la continuete de l'application $t \in [0,T] \longrightarrow u_x(t,W_t) \in K^*$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_j(t_j, W_{t_{j+1}})\Delta t_j + \sum_{j=1}^{n-1} \langle u_x(t_j, W_{t_j}), \Delta W_j\rangle_K$$

$$\longrightarrow \int_0^t u_t(s,W_s)ds + \int_0^t \langle u_x(s,W_s), dW_s\rangle_K \quad \mathbb{P}.p.s.$$

par le Lemme 2.5. Clairement

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} [u_j(\bar{t}_j, W_{t_{j+1}}) - u_x(t_j, W_{t_{j+1}})], \Delta t_j\right|$$

$$\leq T \sup_{j\leq n} |u_j(\bar{t}_j, W_{t_{j+1}}) - u_x(t_j, W_{t_{j+1}})| \longrightarrow 0.$$

En vertu de la continuete de l'application $[0,T]\times K \ni (t,x) \longrightarrow u_{xx}(t,x) \in \mathcal{L}(K,K)$, nous avons

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \left[u_{xx}(t_j, \widetilde{W}_j)\Delta W_j) - u_{xx}(t_j, W_j)\Delta W_j)\right], \Delta W_j\right\rangle_K\right|$$

$$\leq \sup_{j\leq n-1} \| u_{xx}(t_j, \widetilde{W}_j)\Delta W_j) - u_{xx}(t_j, W_j)\Delta W_j \|_{\mathcal{L}(K,K)} \sum_{j=1}^{n-1} \| \Delta W_j \|_K^2 \longrightarrow 0$$

avec probabilité 1 quand $n \longrightarrow \infty$. Il est amené de prouver que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle u_{xx}(t_j, W_{t_j})(\Delta W_j), \Delta W_j\rangle_K \longrightarrow \int_0^t tr[u_{xx}(s,W_s)Q]ds \tag{2.39}$$

en probabilité $\mathbb{P}$. Soit $1_j^N = 1\ \{\max\{\| W_{t_j} \|_K \leq N, i \leq j\}\}$. Alors est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, et utilisons la représentation (2.2), nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\left\langle 1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})(\Delta W_j), \Delta W_j\right\rangle_K |\mathcal{F}_{t_j}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left\langle 1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j}) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \left(w_k(t_{j+1}) - w_k(t_j)\right) f_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_l^{1/2} \left(w_l(t_{j+1}) - w_l(t_j)\right) f_l, \right\rangle |\mathcal{F}_{t_j}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\lambda_k \langle 1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j}) f_k, f_k\rangle_K (w_k(t_{j+1}) - w_k(t_j)) |\mathcal{F}_{t_j}\right)$$

$$= tr\left(1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})Q\right)\Delta t_j.$$

Par ce qui précède et le fait que u_{xx} est bornée sur les sous ensembles bornés de $[0,T]\times H$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\langle 1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})(\Delta W_j), \Delta W_j\rangle_K - tr\left(1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})Q\right)\Delta t_j\right)\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\mathbb{E}\left\langle 1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})(\Delta W_j), \Delta W_j\right\rangle_K^2 - \mathbb{E}\left(tr\left(1_j^N\ u_{xx}(t_j, W_{t_j})Q\right)\right)^2 (\Delta t_j)^2\right)$$

$$\leq \sup_{s\leq t, \|h\|_H \leq N} |u_{xx}(s,h)|^2_{\mathcal{L}(H)} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\mathbb{E} \parallel \Delta W_j \parallel_K^4 - (trQ)^2 (\Delta t_j)^2\right)$$

$$= 2 \sup_{s\leq t, \|h\|_H \leq N} |u_{xx}(s,h)|^2_{\mathcal{L}(H)} \parallel Q \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K)} \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta t_j)^2 \longrightarrow 0.$$

Aussi quand $N \longrightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - 1_j^N\right)\left(\left\langle u_{xx}(t_j, W_{t_j})(\Delta W_j), \Delta W_j\right\rangle_K - \left(tr(u_{xx}(t_j, W_{t_j})Q\Delta t_j\right)\right) \neq 0\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t}\{\parallel W_s \parallel > N\}\right) \longrightarrow 0.$$

Ceci prouve (2.39). Prenant la limite dans (2.38), nous obtenons la formule d'Itô pour la fonction $u(t, W_t)$,

$$u(t,W_t) = u(0,0) + \int_0^t \left(u_t(s,W_s) + \frac{1}{2} tr(u_{xx}(s,W_s)Q)\right) ds + \int_0^t \langle u_x(s,W_s), dW_s\rangle_K. \quad (2.40)$$

Pour obtenir la formule d'Ito pour $F(t, X(t))$, on calcul la dérivée
$u_t(t,k) = F_t(t, X(0) + \psi t + \Phi k) + \langle F_x - t, X(0) + \psi_t \Phi k), \psi\rangle_K$,
$u_x(t,k) = \Phi^* F_x(t, X(0) + \psi t + \Phi k)$,
$u_{xx}(t,k) = \Phi^* F_{xx}(t, X(0) + \psi t + \Phi k)\Phi$,
Notons que

$$tr\left[F_{xx}\left(s, X(s)\right)\left(\Phi Q^{1/2}\right)\left(\Phi Q^{1/2}\right)^*\right] = tr\left[\Phi^* F_{xx}\left(s, X(s)\right)\Phi Q\right],$$

d'où le résultat cherché. ▲

2.6 Cas d'un processus de Wiener cylindrique

Comme dans le cas d'un Q-processud de Wiener , pour $\Phi(s) \in \mathcal{P}(K,H)$ et un processus F_t-adapté à valeurs H $\mathbb{P}$-p.s. borné $\psi(s), \Phi^*(s)\psi(s) \in \mathcal{P}(K, \mathbb{R})$. De plus comme

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(\Phi^*(s)\psi(s)\right)(f_j)\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\langle \psi(s), \Phi(s)(f_j)\rangle_H^2 \leq \parallel \psi(s) \parallel_H^2 \parallel \Phi(s) \parallel^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)},$$

le processus $\Phi^*(s)\psi(s)$ peut être cosideré à valeurs dans K ou K^*, et nous pouvons définir

$$\int_0^T \langle \psi(s), \Phi(s) d\widetilde{W}_s\rangle_H = \int_0^T \langle \Phi^*(s)\psi(s), d\widetilde{W}_s\rangle_K \int_0^T \Phi^*(s)\psi(s) d\widetilde{W}_s.$$

Théorème 2.5 *Formule d'ItÔ. Soit H et K deus espaces de Hilbert Séparables, et $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ un K-processus de Wiener cylindrique sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$. Soit $X(t), 0 \leq t \leq T$, donné par*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \psi(s) ds + \int_0^t \Phi(s) d\widetilde{W}_s, \quad (2.41)$$

où $X(0)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesuarable à valeurs dans H. $\psi(s)$ est un processus de Bchner-intégrable sur $[0,T]$ $\mathbb{P}$-p.s. et est $\mathcal{F}_s$-mesurable à valeurs dans H,

$$\int_0^T \| \psi(s) \|_H \, ds < \infty, \quad \mathbb{P} - P.s.,$$

et $\Phi \in \mathcal{P}(K,H)$. Supposons q'une fonction $F : [0,T] \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et ses dérivées partielles F_t, F_x, F_{xx} son continues et bornées sur tout sous ensemble bornné de $[o,T] \times H$. Alors on a la formule d'Itô suivante :

$$F(t,X(t)) = F(0,X(0)) + \int_0^t \langle F_x(s,X(s)), \Phi(s)d\widetilde{W}_s \rangle_H$$

$$+ \int_0^t \left\{ F_t(s,X(s)) + \langle F_x(s,X(s)), \psi(s) \rangle_H + \frac{1}{2} tr[F_{xx}(s,X(s))\Phi(s)(\Phi(s))^*] \right\} ds \tag{2.42}$$

$\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la formule d'Itô pour Q-processus de Wiener, et avec les même notations dans la preuve du théorème 2.4. La réduction aux processus $X_C(t) = X(t \wedge \tau_C)$, $\psi_C(t) = \psi(t)1_{[0,\tau_C]}(t), \Phi_C(t) = \Phi_C(t)1_{[0,\tau_C]}(t)$, avec la solution

$$X_C(t) = X_C(0) + \int_0^t \psi_C(s)ds + \int_0^t \Phi_C(s)d\widetilde{W}_s, \quad t \in [0,T],$$

Une réduction pour les processus élémentaires bornés $\psi_{C,n}$ et $\Phi_{C,n}$, $\mathbb{P}$-p.s. dans $t \leq T$

$$\int_0^t \| \psi_{C,n}(s) - \psi_C(s) \|_H \, ds \longrightarrow 0$$

et

$$\left\| \int_0^t \Phi_{C,n}(s)d\widetilde{W}_s - \int_0^t \Phi_C(s)d\widetilde{W}_s \right\|_H \longrightarrow 0$$

est obtenue en utilisant le Lemme 2.3 et Corollaire 2.2 avec $Q = I_K$, ainsi que nous pouvons définir

$$X_{C,n}(t) = X(0) + \int_0^t \psi_{C,n}(s)ds + \int_0^t \Phi_{C,n}(s)d\widetilde{W}_s, \quad t \in [0,T],$$

et que

$$\sup_{t \leq T} \| X_{C,n}(t) - X_{C,n} \|_H \longrightarrow 0$$

avec probabilité 1. Alors, Utilisons la proprieté d'isometrie (2.30) et meme l'argument dans la preuve du théoreme 2.4 qui justifier la convergence terme par terme de (2.35) à (2.36), nous pouvons réduire le problème général au cas

$$X(t) = X(0) + \psi_t + \Phi\widetilde{W}_t, \tag{2.43}$$

où , rappelant (2.29) et (2.10),

$$\Phi\widetilde{W}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \left((\Phi\widetilde{W}_t)e_i \right) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\widetilde{W}_t \, (\Phi^* e_i) \right) e_i \in H \tag{2.44}$$

pour $\Phi \in \mathcal{L}_2(K, H)$.

De là, on procède comme suit. Définissons

$$u(t, \xi_t) = F\left(t, X(0) + \psi t + \xi_t\right)$$

avec $\xi_t = \Phi\widetilde{W}_t \in \mathcal{M}_T^2(H)$. De même que dans la démonstration du théorème 2.4, avec $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t \leq T, \Delta t_j = t_j + 1 - t_j$, et $\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j}$, en utilisant la formule de Taylor, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&u(t, \xi_t) - u(0,0) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} u_t(t_j, \xi_{t_{j-1}})\Delta t_j + \sum_{j=1}^{n-1} \langle u_x(t_j, \xi_{t_j}), \Delta\xi_j \rangle_H \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \langle u_{xx}(t_j, \xi_{t_j})(\Delta\xi_j), \Delta\xi_j \rangle_H \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \left[u_j(\widetilde{t_j}, \xi_{t_{j+1}}) - u_j, \xi_{t_{j+1}})\right] \Delta t_j \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \left[u_{xx}(t_j, \widetilde{\xi}_{t_j})(\Delta\xi_j), u_{xx}(t_j, \xi_{t_j})(\Delta\xi_j), (\Delta\xi_j)\right] \right\rangle_H, \\
&= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5,
\end{aligned}$$

où $\Delta\xi_j = \Phi_j = \Phi(\widetilde{W}_{t_{j+1}} - \widetilde{W}_{t_j}), \widetilde{\xi} = \Phi\widetilde{W}_{t_j} + \theta_j(\widetilde{W}_{t_{j+1}} - \widetilde{W}_{t_j})$, et $\widetilde{t_j} \in [t_j, t_{j+1}], \theta_j \in [0,1]$ sont des variables aléatoires. Nous concluons que S_4 et S_5 convergent vers zéro avec probabilité 1 quand $n \longrightarrow \infty$ et que

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &\longrightarrow \int_0^t u_t(s, \xi_s)ds + \int_0^t \langle \Phi^* u_s, \xi_s), d\widetilde{W}_s \rangle_K \\
&= \int_0^t u_t(s, \xi_s)ds + \int_0^t \langle u_s, \xi_s), \Phi d\widetilde{W}_s \rangle_K
\end{aligned}$$

Pour montrer que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle u_{xx}(t_j, \xi_{t_j})(\Delta\xi_j), \Delta\xi_j \rangle_H \longrightarrow \int_0^t tr[u_{xx}(s, \widetilde{W}_s)\Phi\Phi^*]ds$$

en probabilité $\mathbb{P}$, Soit $1_j^N = 1_{\{\max_{\{} \|\xi_{t_j}\|_H \leq N, i \leq j\}\}}$. Alors 1_j^N est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesuarable, et, utilisant la représentation (2.44), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\langle 1_j^N u_{xx}(t_j, \xi_j)(\Delta\xi_j), \Delta\xi_j \right\rangle_H |\mathcal{F}_{t_j}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left\langle 1_j^N u_{xx}(t_j, \xi_j)\sum_{i=1}^{\infty}(\widetilde{W}_{t_{j+1}}(\Phi^* e_i) - \widetilde{W}_{t_j}(\Phi^* e_i))e_i, \sum_{l=1}^{\infty}(\widetilde{W}_{t_{j+1}}(\Phi^* e_l) - \widetilde{W}_{t_j}(\Phi^* e_l))e_l \right\rangle |\mathcal{F}_{t_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left\langle 1_j^N u_{xx}(t_j, \xi_{t_j})e_i, e_i \right\rangle_H \left(\widetilde{W}_{t_{j+1}}\left(\Phi^* e_i\right) - \widetilde{W}_{t_j}\left(\Phi^* e_i\right)\right)^2 |\mathcal{F}_{t_j}\right) \\
&= tr\left(1_j^N u_{xx}(t_j, \xi_{t_j})\Phi\Phi^*\right)\Delta t_j.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour compléter la preuve, nous pouvons suivre les memes arguments que dans la preuve du théorème 2.4 on remplaçant Φ^* par Q. ▲

Equations Différentielles Stochastique

3

3.1 Équations différentielles stochastiques et leurs solutions

Soient K et H deux espaces de Hilbert séparables, et W_t un Q-processus de Wiener valeurs dans K sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbb{P})$ avec la filtration $\mathcal{F}_t$ satisfaisnat les conditions usielles. Nous considerons l'equation différentielle stochastique (EDS) sur $[0,T]$ dans H de forme générale

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,X))dt + G(t,X)dW_t, \\ X(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur d'un C_0-semigroupe d'opérateurs $\{S(t), t \geq 0\}$ sur H. Rappellons (Chap. 1) que pour un Co-semigroupe S (t), nous avons $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\alpha t}$ et si $M = 1$, alors $S(t)$ est appelé un semigroupe pseudo-contractant.

Les coeficients F et G sont, en général, des applications nonlinéaires,

$$F : \Omega \times [0,T] \times C([0,T], H) \longrightarrow H,$$

$$G : \Omega \times [0,T] \times C([0,T], H) \longrightarrow \mathcal{L}_2(K_Q, H).$$

La condition initiale ξ_0 est une variable aléatoire à valeur dans H $\mathcal{F}_0$-mesurable

Nous allons étudier le problème de l'existence et l'unicité sous diverses régularité hypothèses sur les coefficients F et G de (3.1) suivantes

C_1 : F et G sont mesurables, et pour tout $0 \leq t \leq T$, sont mesurables pour la tribu produit $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{G}$ sur $\Omega \times C([0,T], H)$, où $\mathcal{G}$ est une σ-algèbre engendrée par les cylindres avec des bases sur $[0,T]$.

C_2 : F et G sont continues.

C_3 : Il existe une constante ℓ telle que pour tout $x \in C([0,T], H)$,

$$\|F(\omega,t,x)\|_H + \|G(\omega,t,x)\|_{\mathcal{L}(K_Q,H)} \leq \ell \left(1 + \sup_{0\leq s\leq T} \|x(s)\|_H\right)$$

pour $\omega \in \Omega$ et $0 \leq t \leq T$.

Pour tout $t \in [0,T]$, nous définissons l'opérateur θ_t sur $C([0,T],H)$ suivant :

$$\theta_t x(s) = \begin{cases} x(s), & 0 \leq s \leq t, \\ x(t) & t \leq s \leq T. \end{cases}$$

L'hypothèse C_1 implique que

$$F(\omega,t,x) = F(\omega,t,x_1) \quad \text{et} \quad G(\omega,t,x) = G(\omega,t,x_1)$$

si $x = x_1$ sur $[0,t]$. Comme $\theta_t x$ est une fonction borélienne de t à valeurs dans $C([0,T],H)$, $F(\omega,t,\theta_t x)$ et $G(\omega,t,\theta_t x)$ sont aussi boriliennes en t. Avec ces notation (3.1) reécrit comme

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,\theta_t X))dt + G(t,\theta_t X)dW_t, \\ X(0) = \xi_0. \end{cases}$$

On dit que F et G satisfait les condition Lipschitziennes si

C_4 , Pour tout $x,y \in ([0,T],H), 0 \leq t \leq T$ $\omega \in \Omega$, il existe $\Re > 0$ tel que

$$\|F(\omega,t,x) - F(\omega,t,y)\|_H + \|G(\omega,t,x) - G(\omega,t,y)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq \Re \sup_{0 \leq s \leq T} \|x(s) - y(s)\|_H .$$

Pour simplifier la notation, nous n'indiquerons pas la dépendance de F et B pour w.

Il existe différentes notions de solution à l'EDS semi-linéaire (3.1), et nous proposons ici des solutions fortes, faibles, mild et martingales.

Définition 3.1 *Un processus stochastique $X(t)$ définit sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}, \mathbb{P})$ et adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_t$*

1. *est une solution forte de (3.1) si*

   (i) $X(.) \in C[[0,T],H)$;

   (ii) $X(t,\omega) \in \mathcal{D}(A) dt \otimes d\mathbb{P}$*-presque partout ;*

   (iii) les conditions suivantes est vérifiée :

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|AX(t)\|_H \, dt < \infty\right) = 1,$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \left(\|F(t,X)\|_H + \|G(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}\right) dt < \infty\right) = 1;$$

   (iv) Pour tout $t \leq T, \mathbb{P}$*-p.s.,*

$$X(t) = \xi_0 + \int_0^t (AX(s) + F(s,X))\, ds + \int G(s,X) dW_s; \tag{3.2}$$

2. *est une solution faible de (3.1) si*

   (i) les condition suivantes sont vérifies :

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|X(t)\|_H \, dt < \infty\right) = 1, \tag{3.3}$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \left(\|F(t,X)\|_H + \|G(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}\right) dt < \infty\right) = 1; \tag{3.4}$$

(ii) pour tout $h \in \mathcal{D}(A^*)$ et $t \in T$, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\langle X(t), h\rangle_H = \langle \xi_0, h\rangle_H + \int_0^t (\langle X(s), A^*h\rangle_H + \langle F(s,X), h\rangle_H)\, ds$$
$$+ \int_0^t \langle h, G(s,X)dW_s\rangle_H\,; \tag{3.5}$$

3. *est une solution mild de (3.1) si*

   (i) les conditions (3.3) et (3.4) sont vérifiées ;

   (ii) pour tout $t \leq T$, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$X(t) = S(t)\xi_0 + \int S(t-s)F(s,X)ds + \int_0^t S(t-s)G(s,X)dW_s. \tag{3.6}$$

On dit que le processus X est une solution martingale de l'equation

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,X))dt + G(t,X)dW_t, \\ X(0) = x \in H(\text{déterministe}). \end{cases} \tag{3.7}$$

s'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}$ et, sur cet epace de pobabilté, un Q-processus de Wiener W_t, par rapport a la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, tel que X_t est une solution MILD de (3.7).

Contrairement à la solution forte, où l'espace de probabilité filtré et le processus de Wiener sont donnés, une solution martingale est un système $\Big((\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}, W, X\Big)$ où l'espace de probabilité filtré et le processus de Wiener sont parties de la solution.

Si $A = 0$, $S(t) = I_H$, nous obtenons l'EDS

$$\begin{cases} dX(t) = F(t,X)dt + G(t,X)dW_t, \\ X(0) = x \in H(\text{déterministe}). \end{cases} \tag{3.8}$$

et une solution martingale de (3.8) est appelée *solution faible* (dans le sens stochastique).

Remarque En présence ou en l'absence de l'opérateur A, il ne devrait pas y avoir de confusion entre une solution faible de (3.1) dans le sens de la dualité et une solution faible de (3,8) dans le contexte stochastique.

De toute évidence, une solution forte est une solution faible et une solution faible est une solution martingale .

Nous allons d'abord étudier des solutions pour l'EDS du problème de Cauchy inhomogène déterministe (1.27),

$$X(t) = \int_0^t AX(s)ds + \int \phi(s)dW_s. \tag{3.9}$$

Le role du produit de convolution déterministe $\int_0^t S(t-s)f(s)ds$ va maintenant être joué par le processus stochastique

$$S \star \phi(t) = \int_0^t S(t-s)\phi(s)dW_s, \quad \phi \in \mathcal{P}(H_Q, H), \tag{3.10}$$

qui sera appelé *convolution stochastique*. Soit $\| \, . \, \|_{\mathcal{D}(A)}$ une norme sur $\mathcal{D}(A)$,

$$\| h \|_{\mathcal{D}(A)} = \left(\| h \|_H^2 + \| Ah \|_H^2 \right)^{1/2}.$$

L'espace $(\mathcal{D}(A), \| h \|_{\mathcal{D}(A)})$ est un espace de Hilbert séparable. Si $f : [0,T] \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ est une fonction mesurable et $\int_0^T \| f(s)_{\mathcal{D}(A)} < \infty$, alors pour tout $t \in [0,]$,

$$\int_0^t f(s)ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad \int_0^t Af(s)ds = A\int_0^t f(s)ds.$$

Nous avons l'analogue suivante au cadre stochastique ;

Proposition 3.1 *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe sur H et que W_t et un K-valeurs Q-processus de Wiener. Si $\phi(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0,T]$ et*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \| \phi(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt < \infty \right) = 1,$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \| A\phi(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt < \infty \right) = 1,$$

alors $\mathbb{P}\left(\int_0^T \phi(t)dW_t \in \mathcal{D}(A) \right) = 1$ *et*

$$A\int_0^T \phi(t)dW_t = \int_0^T A\phi(t)dW_t \quad \mathbb{P}-p.s. \tag{3.11}$$

Démonstration. L'égalité (3.11) est vraie pour les processus élémentaires bornés dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K, \mathcal{D}(A))$. Soit $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K, \mathcal{D}(A))$ des processus élémentaires bornés approxime Φ comme dans le Lemme 2.3,

$$\int_0^T \| \Phi(t,w) - \Phi_n(t,w) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q, \mathcal{D}(A))} \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty$$

$\mathbb{P}$. p.s. et donc

$$\int_0^t \Phi_n(s)dW_s \longrightarrow \int_0^t \Phi(s)dW_s,$$

$$A\int_0^t \Phi_n(s)dW_s = \int_0^t A\Phi_n(s)dW_s \longrightarrow \int_0^t A\Phi(s)dW_s$$

en probabilité quand $n \longrightarrow \infty$. Maintenant (3.11) découle du fait que le générateur infinitésimal A est un opérateur fermé. ▲

Théorème 3.1 *Supposons que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe d'opérateurs $S(t)$ sur H et que W_t est un Q-processus de Wiener à valeur K.*
(a) Si $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$ et, pour $h \in \mathcal{D}(A^*)$ et tous les $0 \le t \le T$,

$$\langle X(t), h \rangle_H = \int_0^t \langle X(s), A^* h \rangle_H ds + \left\langle \int_0^t \Phi(s)dW_s, h \right\rangle_H \quad \mathbb{P}-.p.s. \tag{3.12}$$

alors $X(t) = S \star \Phi(t)$.
(b) Si $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, alors pour tout $0 \leq t \leq T, S \star \Phi(t)$ satisfie (3.12).
(c) Si $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, $\Phi(K_Q \subset \mathcal{D}(A)$, et $A\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, alors $S \star \Phi(t)$ est une solution forte de (3.9).

Démonstration. (a) La preuve est dans [7]. Nous choisissons d'utiliser un type de preuve de type Itô cohérent avec l'approche déterministe (voir [16]).

Supposons que (3.12) est véeifiée, soit

$$u(s, x) = \langle x, S^*(t-s)h \rangle_H,$$

où $h \in \mathcal{D}(A^*)$ est arbitraire, $x \in H$ fixé et $0 \leq s \leq t \leq T$. Le problème est de déterminer le différentiel de $u(s, X(s))$. Comme le semigroup adjoint $S^*(t)$ est un C_0-semigroupe dont le générateur infinitésimal est A^* (voir théorème 1.2), nous avons

$$u_s(s, x) = \langle x, -A^* S^*(t-s)h \rangle_H,$$

$$u_x(s, x) = \langle ., S^*(t-s)h \rangle_H,$$

$$u_{xx}(s, x) = 0.$$

Soit $0 = s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n = s$ une partition d'un intervalle $[0, s]$ et notons $\triangle s_j = s_{j+1} - s_j$ et $\triangle X_j = X(s_{j+1}) - X(s_j)$. Par (2.38), il existe une v.a $\widetilde{s}_j \in [s_j, s_{j+1}]$ telle que

$$\begin{aligned} u(s, X(s)) - u(0, X(0)) &= \sum_{j=1}^{j-1} u_s(s_j, X(s_{j+1})) \triangle s_j + \sum_{j=1}^{n-1} \langle u_x(s_j, X(s_j)), \triangle X_j \rangle_H \\ &+ \sum_{j=1}^{j-1} [u_s(\widetilde{s}_j, X(s_{j+1})) - u_s(s_j, W_{s_{j+1}})] \triangle s_j. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Par la continuité de $(s, X(s))$,

$$\sum_{j=1}^{j-1} u_s(s_j, X(s_{j+1})) \triangle s_j \longrightarrow \int_0^s u_s(r, X(r)) dr = \int_0^s \langle X(r), -A^* S^*(t-r)h \rangle_H dr.$$

Nous considérons la deuxième somme,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle u_x(s_j, X(s_j)), \triangle X_j \rangle_H = \sum_{j=1}^{n-1} \langle S^*(t-s_j)h, X(s_{j+1}) - X(s_j) \rangle_H$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left\langle \int_0^{s_{j+1}} X(r) dr, A^* S^*(t-s_j)h \right\rangle_H + \left\langle \int_0^{s_{j+1}} \Phi(r) dW_r, S^*(t-s_j)h \right\rangle_H dr \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \int_0^{s_j} X(r) dr, S^*(t-s_j)h \right\rangle_H - \left\langle \int_0^{s_j} \Phi(r) dW_r, S^*(t-s_j)h \right\rangle_H \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left\langle \int_0^{s_j} X(r) dr, S^*(t-s_j)h \right\rangle_H + \left\langle \int_0^{s_j} \Phi(r) dW_r, S^*(t-s_j)h \right\rangle_H \right) \end{aligned}$$

Par la continuité de $A^*S^*(t-s)h = S^*(t-s)A^*h$, la première somme converge vers

$$\int_0^s \langle X(r), A^*S^*(t-r)h\rangle_H dr.$$

Notons $M_s = \displaystyle\int_0^s \Phi(r)dWr \in \mathcal{M}_T^2(H)$. Alors, $\displaystyle\int_{s_j}^{s_{j+1}} \Phi(r)dW_r = M_{s_{j+1}} - M_{s_j}.$, la deuxième somme converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ vers

$$\left\langle \int_0^s S(t-r)dM_r, h\right\rangle_H = \left\langle \int_0^s S(t-r)\Phi(r)dW_r, h\right\rangle_H.$$

La dernière somme de (3.13) converge vers zéro, puisqu'elle est bornée par

$$t \sup_{0\le j\le n-1} \left|\langle X(s_{j+1}), A^*S^*(t-\widetilde{s}_j)h\rangle_H - \langle X(s_{j+1}), A^*S^*(t-s_j)h\rangle_H\right| \longrightarrow 0$$

Par la continueté uniforme de $S(s)h$ sur les intervales finis et la commutativité de A^* et S^* sur le domaine de A^*. Nous avons montré que

$$\begin{aligned} u\left(s, X(s)\right) - u\left(0, X(0)\right) &= \langle X(s), S^*(t-s)h\rangle_H \\ &= \left\langle \int_0^s S(t-r)\phi(r)dW_r, h\right\rangle_H. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour $s = t$, nous avons

$$\langle X(t), h\rangle_H = \left\langle \int_0^s S(t-r)\phi(r)dW_r, h\right\rangle_H.$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans H, le (a) découle.

(b) Pour $h \in \mathcal{D}(A^*)$ et $k \in K$, conséderons le processus défini par

$$\psi(s,\omega,t)(k) = \left(I_{\{]0,t]\}}(s)\left(S(t-s)\Phi(s)\right)^* A^*h\right)(k)$$

$$\left\langle I_{\{]0,t]\}}(s)(S(t-s)\Phi(s), A^*h\right\rangle_H$$

Alors $\psi : [0,T]\times\Omega\times[0,T] \longrightarrow \mathcal{L}_2(K_Q, \mathbb{R}$.

Pour tout $0 \le t \le T$, $\psi(.,.,t)$ est $\{\mathcal{F}_s\}_{0\le s\le T}$-adapté, et

$$\|\ \psi\| \int_0^T \|\psi(.,.,t)\|_{\Lambda_2(K_Q,\mathbb{R})} dt$$

$$= \int_0^T \left(\mathbb{E}\int_0^T \left\|I_{\{]0,t]\}}(s)\left(S(t-s)\Phi(s)\right)^* A^*h\right\|^2_{\Lambda_2(K_Q,\mathbb{R})} dt\right)^{1/2} dt$$

$$\le T \parallel A^*h \parallel_H Me^{\alpha t}\left(\mathbb{E}\int_0^T \parallel \phi(s) \parallel^2_{\Lambda_2(K_Q,H)} ds\right) ds^{1/2}$$

$$C \parallel \Phi \parallel_{\Lambda(K_Q,H)} < \infty,$$

de sorte que les hypothèses du théorème de Fubini stochastique, sont satisfiés . On obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^t S\star\Phi(s)ds, A^*h \right\rangle_H &= \int_0^t \int_0^s \langle S(s-u)\Phi(u)dW_u, A^*h\rangle_H ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s \psi(u,\omega,s)dW_u \right) ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s \psi(u,\omega,s)ds \right) dW_u \\
&= \int_0^t \left(\int_0^t I_{\{]0,s]\}(u)} \langle S(s-u)\Phi(u)(.), A^*h\rangle_H ds \right) dW_u \\
&= \int_0^t \left\langle \left(A\int_0^t S(s-u)\Phi(u)(.)ds \right), A^*h \right\rangle_H dW_u \\
&= \int_0^t \langle (S(s-u)\Phi(u)-\Phi(u))\,(.), h\rangle_H\, dW_u \\
&= \left\langle \int_0^t (S(s-u)\Phi(u)-\Phi(u))\, dW_u, h \right\rangle_H .
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que, pour $x \in H$, l'intégrale $\int_0^t S(r)xdr \in \mathcal{D}(A)$, et

$$A\left(\int_0^t S(r)xdr \right) = S(t)x - x$$

(Théoreme (1.2). Ainsi nous concluons que

$$\left\langle \int_0^t S\star\Phi(s)ds, A^*h \right\rangle_H = \langle S\star\Phi(s)ds, h\rangle_H - \left\langle \int_0^t \Phi(s)dW_s, h \right\rangle_H .$$

D'où (b).

(c) Rapellons la forme (1.19), Chap1, L'approximation de Yosida $A_n = AR_n$ de A, et soit $S_n(s) = e^{sA_n}$ les semigroupes correspondant. Ensuite, la partie (b) implique que

$$S_n\star\Phi(t) = \int A_nS_n\star\Phi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW_s. \tag{3.15}$$

Partie (1) du lemme 2.1, Chap. 2, implique que

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E} \parallel S_n\star\Phi(t) - S\star(t) \parallel_H^2 \longrightarrow 0. \tag{3.16}$$

Rappelons la propriété de commutativité (1.13) du Chap . 1 que pour $x \in \mathcal{D}(A) = AR_nxR_nAx$. En outre, $AS_n(t)x = S_n(t)Ax$ pour $x \in \mathcal{D}(A)$. En utilisant la Proposition3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
A_nS_n\star\Phi(t) &= AR_n\int_0^t S_n(t-s)\Phi(s)dW_s \\
&= R_n\int_0^t S_n(t-s)A\Phi(s)dW_s \\
&= R_nS_n\star A\Phi(t).
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left\| \int_0^t \left(A_n S_n \star \Phi(s) - AS\star\Phi(s)\right) ds \right\|_H^2 \\
&\le T^2 \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\int_0^t \|A_n S_n \star \Phi(s) - AS\star\Phi(s)\|_H^2\, ds \\
&\le T^2 \mathbb{E}\int_0^t \|R_n S_n \star A\Phi(s) - S\star A\Phi(s)\|_H^2\, ds \\
&\le T^2 \mathbb{E}\int_0^t \|R_n \left(S_n \star A\Phi(s) - S\star A\Phi(s)\right)\|_H^2\, ds \\
&\quad + T^2 \mathbb{E}\int_0^t \|R_n - I)S\star A\Phi(s)\|_H^2\, ds \\
&\le C\left(\mathbb{E}\int_0^t \|S_n \star A\Phi(s) - S\star A\Phi(s)\|_H^2\, ds\right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}\int_0^t \|R_n - I)S\star A\Phi(s)\|_H^2\, ds\right)
\end{aligned}$$

La première partie tend vers zéro par le (c) du Lemme 2.1, Chap.2.

Par conséquent $R_n x \longrightarrow x$ pour $x \in\in H$, nous avons

$$\|(R_n - I)S\star A\Phi(s)\|_H \longrightarrow 0$$

et

$$\|(R_n - I)S\star A\Phi(s)\|_H^2 \le C_1 \|S\star A\Phi(s)\|_H^2$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T \|S\star A\Phi(s)\|_H^2\, ds &= \int_0^T \mathbb{E}\int_0^s \|S(s-u)A\Phi(u)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2\, duds \\
&\le C_2 \|A\Phi\|_{\Lambda_2(K_Q,H)}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

et la seconde partie tend vers 0 par le théorème de convergence dominés de Lebesgue.

Finalement

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left\| \int_0^t \left(A_n S_n \star \Phi(s) - AS\star\Phi(s)\right) ds \right\|_H^2 \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

De (3.16) et (3.17), nous obtenons que les deux termes de (3.15) convergent uniformément en moyenne quadratique vers la limite souhaitée, de sorte que (3.9) est satisfiée par $S\star\Phi(t)$. Ceci conclut la preuve. □

Après la discussion préliminaire concernant le convolution stochastique, nous nous tournons vers un problème général de la relation entre les différents types de solutions à l'EDS semilinéaire (3.1).

Théorème 3.2 *Une solution faible de (3.1) est une solution mild. Inversement, si X est une solution mild de (3.1) et*

$$\mathbb{E}\int_0^T \|G(t,X\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt < \infty,$$

Alors $X(t)$ est une solution faible de (3.1). Si de plus $X(t) \in \mathcal{D}(A)$, $dP \otimes dt$ presque partout, alors $X(t)$ est solution forte de (3.1).

Démonstration Les techniques pour prouver les parties (a) et (b) du théorème 3.1 sont applicables à un cas plus général . Considérons le processus $X(t)$ vérifiant l'équation

$$\begin{aligned}\langle X(t),h\rangle_H = \langle \xi_0,h\rangle_H + \int_0^t \left(\langle X(s),A^*h\rangle_H\right)ds \\ + \int_0^t \langle h,\Phi(s)dW_s\rangle_H \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec un processus adapté $f(.) \in L^1(\Omega,H), \Phi \in \mathcal{P}(K_Q,H)$, et $h \in \mathcal{D}(A^*)$.

Comme dans (a) du théorème 3.1, soit

$$u(s,x) = \langle x, S^*(t-s)h\rangle_H,$$

où $h \in \mathcal{D}(A^*)$ est arbitraire, $x \in H$, et $0 \le s \le t \le T$. Alors, la formule (3.14) prend la forme

$$\begin{aligned} u\left(s,X(s)\right) - u\left(0,X(0)\right) &= \langle X(s),X(s),S^*(t-s)h\rangle_H - \langle X(0),S^*(t)h\rangle_H \\ = \left\langle \int_0^s S(t-s)\Phi(r)dW_r,h\right\rangle_H &+ \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle \int_0^t S^*(t-s_j)h.\int_{s_j}^{s_j+1} f(t)dr\right\rangle_H \\ = \left\langle \int_0^s S(t-s)\Phi(r)dW_r,h\right\rangle_H &+ \left\langle \int_0^s S(t-s)f(r)dr,h\right\rangle_H \end{aligned}$$

Pour $s = t$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle X(t),h\rangle_H = \langle S_(t)\xi_0,h\rangle_H + \left\langle \int_0^s S(t-s)\Phi(r)dW_r,h\right\rangle_H \\ + \left\langle \int_0^s S(t-s)f(r)dr,h\right\rangle_H\end{aligned}$$

Maintenant, il en résulte que $X(t)$ est une solution mild si l'on substitue $f(t) = F(t,X)$ et $\Phi(t) = G(t,X)$ et en utilisant le fait que $\mathcal{D}(A^*)$ Est dense dans H.

Pour la réciproque, considérons le processus

$$X(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + S\star\Phi(t)$$

où $f(t)$ comme dans la première partie, et $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$. Nous devons montrer que

$$\begin{aligned}\langle X(t),h\rangle_H &= \langle S(t)\xi_0,h\rangle_H \\ &+ \int_0^t \left\langle S(s)\xi_0 + \int_0^t S(t-u)f(u)du + S\star\Phi(t), A^*h\right\rangle_H ds \\ &+ \int_0^t \langle f(s),h\rangle_H + \left\langle \int_0^t \Phi(s)dW_s,h\right\rangle_H .\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de (b) du théorème 3.1, nous avons que

$$\langle S\star\Phi(t),h\rangle_H=\left\langle\int_0^t S\star\Phi(s)ds,A^*h\right\rangle_H+\left\langle\int_0^t\Phi(s)dW_s,h\right\rangle_H.$$

Par conséquent (voir Théorème 1.2) pour tout $\xi\in H$, $\int_0^t S(s)\xi ds\in\mathcal{D}(A)$ et

$$A\int_0^t S(s)\xi ds=S(t)\xi-\xi,$$

on a

$$\langle S(t)\xi_0,h\rangle_H=\langle\xi_0,h\rangle_H+\int_0^t\langle S(s)\xi_0,A^*h\rangle_H\,ds.$$

Finalement, en utilisant le théorème de Fubini (déterministe),

$$\begin{aligned}\left\langle\int_0^t\int_0^s S(s-u)f(u)duds,A^*h\right\rangle_H &=\left\langle\int_0^t\int_u^t S(s-u)f(u)dsdu,A^*h\right\rangle_H\\ &=\left\langle\int_0^t A\int_u^t S(s-u)f(u)dsdu,h\right\rangle_H\\ &=\left\langle\int_0^t A\int_0^{t-u} S(v)f(u)dvdu,h\right\rangle_H\\ &=\left\langle\int_0^t\left(S(s-u)f(u)-f(u)\right)du,h\right\rangle_H\end{aligned}$$

compléter les calculs.

Le dernier énoncé du théorème est maintenant évident. ▲

L'existence et l'unicité de solution pour L'EDS linéaires suivante est une application directe du Théorème 3.2.

Corollaire 3.1 *Soit $\{W_t,0\le t\le T\}$ un Q-Wiener processus definit sur un espace de probabilité filteré $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\le T},\mathbb{P})$, et A le générateur infinitesimal d'un C_0-semigroup $\{S(t),t=0\}$. Supposons que $G\in\mathcal{L}(K,H),f(.)\in L^1(\Omega,H)$ est un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\le T}$-adapté, et ξ_0 est une variable aléatoire à valeur dans H et $\mathcal{F}_0$-mesurable. Alors l'equation lineaire*

$$\begin{cases} dX(t)=(AX(t)+F(t))dt+G(t)dW_t,\\ X(0)=x_0.\end{cases}\tag{3.19}$$

a une unique solution faible donnée par

$$X(t)=S(t)\xi_0+\int_0^t S(t-s)f(s)ds+\int_0^t S(t-s)G(t)dW_s,0\le t\le T.$$

3.2 Solution sous conditions Lipschiziennes

Nous d'abord prouver l'unicité et l'existence d'une mild solution pour (3.1) dans le cas Lipschitzien. Ce résultat est connu [12] si les coeffcients $F(t,\Delta)$ et $G(t,\Delta)$ dépendent de $x\in C([0,T],H)$ par $x(t)$ seulement. Nous suivons une technique analogue à celle du travail de Gikhman et Skorokhod, [10] et de l'étendre dans $\mathbb{R}^n$ aux processus à valeurs dans H.

Notons que les conditions (A3) et (A4) impliquent, respectivement, que

$$\left\| \int_a^b F(t,x)dt \right\|_H \leq \ell \int_a^b \left(1 + \sup_{s \leq T} \| (\theta_t x)(s) \|_H \right) dt$$

et

$$\left\| \int_a^b \left(F(t,x) - F(t,y) \right) dt \right\|_H \leq \Im \int_a^b \sup_{s \leq T} \| \left(\theta_t (x-y) \right)(s) \| \, dt$$

Nous allons maintenant énoncer les inégalités utiles pour prouver l'existence, l'unicité, et propriétés des solutions de l'EDS (3.1). Nous commençons par les inégalités bien connues (Voir (7,8), (7,9) dans [7], et (24) dans [13]).

Lemme 3.1 *Soit $\Phi \in \Lambda(K_Q, H)$ et $\rho \geq 1$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \phi(s) dW_s \right\|_H^{2p} \right) &\leq c_{1,p} \mathbb{E}\left(\left\| \int_0^T \phi(s) dW_s \right\|_H^{2p} \right) \\ &\leq c_{2,p} \mathbb{E}\left(\left\| \int_0^T \phi(s) \right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^{2p} ds \right)^p \end{aligned}$$

$$\leq c_{2,p} T^{p-1} \mathbb{E}\left(\left\| \int_0^T \phi(s) \right\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^{2p} ds \right) \tag{3.20}$$

avec

$$c_{1,p} = \left(\tfrac{2p}{2p-1} \right)^{2p}, \;\; c_{2,p} = \left(p(2p-1) \right)^p (c_{1,p})^{2p^2}.$$

Démonstration. La première inégalité résulte du fait que l'intégrale stochastique est une $L^p(\Omega)$-martingale et de l'inégalité maximale de Doob. La troisième est juste l'inégalité de Hölder. Nous prouvons maintenant la deuxième. Pour $p = 1$, est l'isométrie propriété de l'intégrale stochastique.

Supposons maintenant que $\rho > 1$. Soit $F(.) = \| \, . \, \|_H^{2p} \colon H \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors F est contiu, et ses dérivées partielles

$$\begin{gathered} (F_x(x)(h) = 2p \|x\|_H^{2(p-1)} \langle x, h \rangle_H, \;\; h \in H, \\ (F_{xx}(x))(h,g) = 4p(p-1) \|x\|_H^{2(p-1)} \langle x, h \rangle_H \langle x, g \rangle_H, \quad h \in H, \\ +2p(p-1) \|x\|_H^{2(p-1)} \langle h, g \rangle_H, \quad h, g \in H \end{gathered}$$

sont continues et bornées sur tous sous ensemble borné de H, avec

$$\|F_{xx}(x)\|_{\mathcal{L}(H \times H, \mathbb{R})} \leq 2p(2p-1) \|x\|_H^{2(p-1)} \tag{3.21}$$

Soit $M(t) = \int_0^t \Phi(s) dW_s$. Appliquant la formule d'Itô pour $F(M(t))$ et prenant l'esperance, utilisons (3.21), inégalité de Hölder et l'inégalité maximale de Doob,

$$\mathbb{E} \parallel M(s) \parallel^{2p} = \mathbb{E} \int_0^s \left\| \frac{1}{2} tr[F_{xx}(M(u))(\Phi(u) q \Phi^*(u))] \right\| du$$

$$\leq p(2p-1)\mathbb{E}\left(\int_0^s \|M(s)\|_H^{2p} \parallel \Phi(u) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 du\right)$$

$$\leq p(2p-1)\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s} \|M(s)\|_H^{2p} \int_0^s \parallel \Phi(u) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 du\right)$$

$$\leq p(2p-1)\left[\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s} \|M(s)\|_H^{2p}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\mathbb{E}\left(\int_0^s \parallel \Phi(u) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 du\right)^p\right]^{1/p}$$

$$\leq p(2p-1)\left[\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p} \mathbb{E}\left(\|M(s)\|_H^{2p}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\mathbb{E}\left(\int_0^s \parallel \Phi(u) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 du\right)^p\right]^{1/p}$$

$$\mathbb{E} \parallel M(s) \parallel_H^{2p} \leq \frac{c_{2,p}}{c_{1,p}} \mathbb{E}\left(\int_0^s \parallel \Phi(u) \parallel_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 du\right)^p.$$

d'où (3.12). □

Corollaire 3.2 *Soit $\{S(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ un C_0-semigroupe et $p \geq 1$. Pour $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$ et $t \in [0, T]$,*

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW_s\right\|_H^{2p} \leq C^1_{p,\alpha,M,T}\mathbb{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}(K_Q,H)} ds\right)^p$$
$$\leq C^2_{p,\alpha,M,T}\mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}(K_Q,H)} ds. \tag{3.22}$$

les constantes $C^1_{p,\alpha,M,T}$, $C^2_{p,\alpha,M,T}$ dépends seulement des paramètres indiqués.

Démonstration. On définit $E(s) = S(t-s)\Phi(s)$. Alors, pour tout $u \in [0, t]$, nous avons par le Lemme 3.1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\int_0^u S(t-s)\Phi(s)dW_s\right\|_H^{2p} &= \mathbb{E}\left\|\int_0^u E(s)dW_s\right\|_H^{2p}\\ &\leq \tfrac{c_{2,p}}{c_{1,p}}\mathbb{E}\left(\int_0^u \|E(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds\right)^p\\ &= \tfrac{c_{2,p}}{c_{1,p}}\mathbb{E}\left(\int_0^u \|S(t-s)\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}\right)^p ds\\ &\leq \tfrac{c_{2,p}}{c_{1,p}} M^{2p}e^{2p\alpha T}\mathbb{E}\left(\int_0^u \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds\right)^p.\end{aligned}$$

En particulier, pour u = t, nous obtenons la première inégalité, la seconde est par l'inégalité de Hölder. ▲

Nous aurons besoin d'inégalités de type Burkholder pour le processus de convolution stochastique. Nous commençons avec un lemme [6].

Lemme 3.2 *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $p > 1$ des nombres tels que $\alpha > 1/p$. Alors, pour une fonction arbitraire $f \in L^p([0, T], H)$, la fonction*

$$G_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.23}$$

est continue, et il existe une costante $C > 0$ telle que

$$\sup_{0>t>T} \|G_\alpha f(t)\|_H \leq C\|f\|_{L^p([0,T],H)}.$$

Lemme 3.3 *Soit W_t un processu de wiener à valeurs K de covarianvce Q, et $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$.*

(a) Soit $S(t)$ un C_0-semigroup et $p > 1$. Si

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \| \Phi(t) \|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt\right) < \infty$$

alors il existe une modification continue du convolution stochastique

$$S \star \Phi(t) = \int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW_s.$$

Pour cette version continue, il existe une constante $C_{p,\alpha,M,T}$, dépend seulement de paramètres indiqués, telle que pour tout temps d'arrêt τ,

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} \| S \star \Phi(t) \|^{2p}_H \leq C_{p,\alpha,M,T}\mathbb{E} \int_0^{T\wedge\tau} \| \Phi(t) \|^{2p}_{\mathcal{L}(K_Q,H)} dt. \tag{3.24}$$

Soit $A_n = AR_n$ l'approximations de Yosida, and $S_n(t) = e^{A_n t}$. Alors une version continue de $S \star \Phi(t)$ peut etre approximée par le processus continu $S_n \star \Phi(t)$ dans le sens suivant :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} \| S \star \Phi(t) - S_n \star \Phi(t) \|^{2p}_H = 0. \tag{3.25}$$

(b) Soit $S(t)$ un C_0-semigroup pseudo contractant et $p \geq 1$. Si

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt\right)^p < \infty.$$

alors il exoste une modification du convolution stochastique $S \star \Phi(t)$. Pour cette version continue, il existe une constante $C_{p,\alpha,T}$, dépend seulement de paramètres indiqués,, tel que pour tout temps d'arret τ,

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} \| S \star \Phi(t) \|^{2p}_H \leq C_{p,\alpha,T}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} \| \Phi(t) \|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} dt\right)^p. \tag{3.26}$$

Soit $\Phi_n(t) = R_n\Phi(t)$. Alors la version continue de $S \star \Phi(t)$ peut etre approximée par le processus continu $S \star \Phi_n(t)$ dans le sense suivant :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \| S \star \Phi(t) - S \star \Phi_n(t) \|^{2p}_H = 0. \tag{3.27}$$

Démonstration (a) La preuve est analogue à celle de la Proposition 7.3 dans [7] :

Lemme 3.4 *Si $F(t,x)$ et $G(t,x)$ satisfaies les conditions (A1) et (A3), $S(t)$ est soit un semigroupe pseudo-contractant et $p \geq 1$ ou un C_0-semigroupe et $p > 1$. Alors pour un temps d'arrêt τ,*

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} \|I(s,\xi)\|^{2p}_H \leq C\left(t + \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau} \|\xi(u)\|^{2p}_H ds\right) \tag{3.28}$$

où la constante C dépend seulement de p, M, α, T et ℓ.

Démonstration. Notons que

$$\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} \|I(s,\xi)\|_H^{2p}$$

$$\leq 2^{2p-1} \sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} \left(\left\| \int_0^s S(s-u)F(u,\xi)du \right\|_H^{2p} + \left\| \int_0^s S(s-u)G(u,\xi)du \right\|_H^{2p} \right).$$

Nous pouvons majorer l'espérance du premier terme

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau\wedge\tau} \left\| \int_0^s S(s-u)F(u,\xi)du \right\|_H^{2p}$$

$$\leq \mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} \left(\ell C_{M,\alpha,t} \int_0^s \left(1 + \sup_{0\leq s\leq u} \|\xi(r)\|_H \right) du \right)^{2p}$$

$$\leq 2^{2p-1} (\ell C_{M,\alpha,t} \left(t^{2P} + t\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t} \int_0^{s\wedge\tau} \sup_{0\leq r\leq u} \|\xi(r)\|_H^{2p} du \right)$$

$$\leq C_{p,M,T,\ell} \left(t + \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau} \|\xi_u\|_H^{2p} ds \right)$$

et, en utilisant (3.24) ou (3.26), une majoration pour l'espérance du second terme,

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} \left\| \int_0^s S(s-u)G(u,\xi)du \right\|_H^{2p} \leq C_{p,M,T} \mathbb{E} \int_0^{s\wedge\tau} \|G(s,\xi)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} ds.$$

Le dernier est dominé par

$$\leq C_{p,M,\alpha,t} \ell^{2p} \mathbb{E} \int_0^{t\wedge\tau} \left(1 + \sup_{0\leq u\leq s} \|\xi_u\|_H^{2p} \right) ds$$

$$\leq 2^{2p-1} C_{p,M,\alpha,T} \ell^{2p} \left(t + \mathbb{E} \int_0^{t\wedge\tau} \sup_{0\leq u\leq s} \|\xi_u\|_H^{2p} ds \right)$$

$$= C'_{p,M,\alpha,T,\ell} \left(t + \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau} \|\xi_u\|_H^{2p} ds \right)$$

Nous complétons la preuve en combinant les inégalités pour les deux termes. ▲

Lemme 3.5 *Si les conditions (A1) et (A4) sont satisfaies, $S(t)$ est un semigroupe pseudo- contractant et $p \geq 1$ ou un C_0-semigroupe et $p > 1$. Alors*

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t} \|I(s,\xi_1) - I(s,\xi_2)\|_H^{2p} \leq C_{p,M,\alpha,T,\aleph} \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0\leq u\leq s} \|\xi_1(u) - \xi_2(u)\|_H^{2p} ds$$

où la constante $C_{p,M,\alpha,T,\aleph}$ dépend seulement de $p, M, \alpha, T, \aleph$.

Démonstration. On commance par l'estimation suivante

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\|I(s,\xi_1)-I(s,\xi_2)\|_H^{2p}$$

$$\le 2^{2p-1}\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\left\|\int_0^s S(s-u)\left(F(u,\xi_1)-F(u,\xi_2)\right)du\right\|_H^{2p}\right.$$

$$\left.+\left\|\int_0^s S(s-u)\left(G(u,\xi_1)-G(u,\xi_2)\right)dW_u\right\|_H^{2p}\right).$$

Considérant les deux termes séparément, nous obtenons

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\left\|\int_0^s S(s-u)\left(F(u,\xi_1)-F(u,\xi_2)\right)du\right\|_H^{2p}\right.$$

$$\le M^{2p}e^{2p\alpha t}\aleph^{2p}t^{2p-1}\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\left\|\int_0^s S(s-u)\left(F(u,\xi_1)-F(u,\xi_2)\right)du\right\|_H^{2p}\right.$$

$$=C_{p,M,\alpha,T,\aleph}\int_0^t\mathbb{E}\sup_{0\le u\le s}\|\xi_1(u)-\xi_2(u)\|_H^{2p}ds$$

par l'inégalité de Hölder, et de même, en utilisant (3.24) ou (3.26), $\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s S(s-u)\left(F(u,\xi_1)\right.\right.$

$$\le C_{p,M,\alpha,T,\mathcal{K}}\int_0^t\mathbb{E}\sup_{0\le u\le s}\|\xi_1(u)-\xi_2(u)\|_H^{2p}ds.$$

D'où la preuve. ▲

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des variables aléatoires ξ à valeurs dans $C([0,T],H)$ telles que le processus $\xi(t)$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, avec $\mathbb{E}\sup_{0\le s\le T}\|\xi(s)\|_H^{2p}<\infty$. Alors $\mathcal{H}_{2p}$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}_{2p}}=\left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le T}\|\xi(s)\|_H^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Théorème 3.3 *Soient F et B vérifiant les conditions (A1), (A3), et (A4). Supposons que $S(t)$ est un semigroupe pseudo-contraction et $p\ge 1$ ou en général C_0-semigroupe et $p>1$. Alors l'équation semilinaire (3.1) à une unique solution mild continue . Si de plus, $\mathbb{E}\parallel\xi_0\parallel_H^{2p}<\infty$, alors la solution est dans $\mathcal{H}_{2p}$. Si $A=0$, alors (3.1) à une solution forte, Si de plus, $\mathbb{E}\parallel\xi_0\parallel_H^{2p}<\infty$, alors la solution est dans $\mathcal{H}_{2p}$; $p\ge 1$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathbb{E}\parallel\xi_0\parallel_H^{2p}<\infty$. Soit $I(t,X)$ défini dans (2.21), alors conséderons $I(X)(t)=I(t,X)$. Alors, par le Lemme 3.4,
$I:\mathcal{H}_{2p}\longrightarrow\mathcal{H}_{2p}$. La solution peut etre approximer par la suite suivante :

$$X_0(t)=S(t)\xi_0,\quad X_{n+1}(t)=S(t)\xi_0+I(t,X_n),\quad {}_n=0,1,... \tag{3.29}$$

En effet, Soit $v_n' t) = \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} \parallel X_{n+1}(s) - X_n(s) \parallel_H^{2p}$. Alors $v_0(t) = \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} \parallel X_1(s) - X_0(s) \parallel_H^{2p} \leq v_0(T) \equiv V_0$, et utilisant le Lemme 3.5, on obtient

$$v_1(t) = \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} \parallel X_2(s) - X_1(s) \parallel_H^{2p} = \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} \parallel I(s,X_1) - I(s,X_0) \parallel_H^{2p}$$

$$\leq C\int_0^1 \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} \parallel X_1(s) - X_0(s) \parallel_H^{2p} ds \leq CV_0 t$$

et, en géneral,

$$v_n(t) \leq C\int_0^t v_{n-1}(s)ds \leq \frac{V_0(Ct)^n}{n!}.$$

Ensuite, de même que la preuve de Gikhman et Skorokhod dans [10], nous montrons que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \parallel x_n(t) - X(t) \parallel_H \longrightarrow 0 p.s.$$

pour $X \in \mathcal{H}_{2p}$, Si on a $\varepsilon_n = (V_0(CT)^n/n!)^{1/(1+2p)}$, alors, par l'énégalité de Chebychev, nous arrive a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H \varepsilon_n\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H^{2p} > \varepsilon_n^{2p}\right)$$

$$\leq \left(\frac{V_0(CT)^n}{n!}\right) / \left(\frac{(V_0(CT)^n/n!)^{1/(1+2p)}}{n!}\right) = \varepsilon_n.$$

puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, par le lemme de Borel cantelli,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H < \varepsilon_n \mathbb{P} \quad p.s.$$

Ainsi, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H$$

converge $\mathbb{P}$-p.s., montrant que X_n converge p.s vers X. dans $C([0,T],H)$. De plus,

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H^{2p} = \mathbb{E}\lim_{m\longrightarrow\infty}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel X_{n+1}(t) - X_n(t) \parallel_H^{2p}$$

$$= \mathbb{E}\lim_{m\longrightarrow\infty}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel \sum_{k=n}^{n+m-1} (X_{k+1}(t) - X_k(t)) \parallel_H^{2p}$$

$$\leq \mathbb{E}\lim_{m\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m-1}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel (X_{k+1}(t) - X_k(t)) \parallel_H\right)^{2p}$$

$$= \mathbb{E}\lim_{m\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m-1}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel (X_{k+1}(t) - X_k(t)) \parallel_H k\frac{1}{k}\right)^{2p}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \parallel (X_{k+1}(t) - X_k(t)) \parallel_H^{2p} k^{2p}(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2q})^{p/q}$$

avec $1/2p + 1/2q = 1$. Notons que $q > 1/2$; par conséquent, la deuxième série converge. La première série est bornée par : $\sum_{k=n}^{\infty} v_k(T)k^{2p} \leq \sum_{k=n}^{\infty} V_0(CT)^k k^{2p}/k! \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Pour justifier que $X(t)$ est une solution mild à (3.1), notons que p.s., $F(s, X_n) \longrightarrow F(s, X)$ uniformément pour s. Donc,

$$\int_0^t S(t-s)F(s, X_n)ds \longrightarrow \int_0^t S(t-s)F(s, X)ds \quad p.s.$$

En utilisant le fait, que $\mathbb{E}\sup_t \parallel X(t) - X_n(t) \parallel_H^{2p} \longrightarrow 0$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left\| \int_0^t S(t-s)(B(s,X) - B(s,X_n))dW_s \right\|_H^{2p}$$

$$\leq C_{p,M,\alpha,T}\mathbb{E}\int_0^t \|B(s,X) - B(s,X_n))\|_{\mathcal{L}(K_Q,H)}^{2p} ds$$

$$\leq C_{p,M,\alpha,T,\mathcal{K}}\mathbb{E}\sup_t \parallel X(t) - X_n(t) \parallel_H^{2p} \longrightarrow 0$$

Maintenant, si $\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p} \leq \infty$, prendre la variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable $\chi_k = 1_{\{\xi_0 < k\}}$ et Soit

$$\xi_k = \xi_0 \chi_k.$$

Soit $X_k(t)$ une solution Mild de (3.1) avec la condition initiale ξ_k. Nous allons d'abord montrer que

$$X^k \chi_k = X^{k+1}\chi_k.$$

Soientt X_n^k et X_n^{k+1} des approximations des mild solutions X^k et X^{k1} définies par (3.28). Comme

$$X_0^k(t) = S(t)\xi_0\chi_k = S(t)\xi_0\chi_{k+1}\chi_k = X_0^{k+1}(t)\chi_k,$$

déduisons

$$X_0^k\chi_k = X_0^{k+1}\chi_k,$$

$$F(t, X_0^k)\chi_k = F(t, X_0^{k+1})\chi_k,$$

$$B(t, X_0^k)\chi_k = B(t, X_0^{k+1})\chi_k,$$

pour que

$$X_1^k(t)\chi_k = S(t)\xi_0\chi_k + \chi_k \int_0^t S(t-s)F(s, X_0^k)ds + \chi_k \int_0^t S(t-s)B(s, X_0^k)dW_s$$

$$= S(t)\xi_0\chi_k + \chi_k \int_0^t S(t-s)F(s, X_0^{k+1})ds + \chi_k \int_0^t S(t-s)B(s, X_0^{k+1})dW_s$$

$$(S(t)\xi_0\chi_{k+1})\,\chi_k + I(t, X_0^{k+1})\chi_k \quad = \quad X_1^{k+1}(t)\chi_k,$$

Ce qui implique que $X_1^k(t)\chi_k = X_1^{k+1}(t)\chi_k$. Comme

$$X_n^k \longrightarrow X^k \quad \text{et} \quad X_n^{k+1} \longrightarrow X^{k+1}$$

dans $\mathcal{H}_{2p}$ nous avons aussi par le théorème de Lebesgue généralisé, que

$$X_n^k \chi_k \longrightarrow X^k \chi_k \quad \text{et} \quad X_n^{k+1} \chi_k \longrightarrow X^{k+1} \chi_k$$

dans $\mathcal{H}_{2p}$, pour que $\mathbb{P}$.p.s, pour tout $t \in [0, T], X^k(t)\chi_k = X^{k+1}(t)\chi_k$. La limite

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} X^k(t) = X(t)$$

existe $\mathbb{P}$ p.s. et est un élémnet de $C([0, T], H)$. $X(t)$ satisfait (3.1), comme

$$X(t)\chi_k = X^k(t) \quad \mathbb{P} - p.s \tag{3.30}$$

et $X^k(t)$ satisfait (3.1), pour que

$$X_1^k(t)\chi_k = S(t)\xi_0\chi_k + \chi_k \int_0^t S(t-s)F(s, X)ds + \chi_k \int_0^t S(t-s)B(s, X)dW_s$$

et $\mathbb{P}(\bigcup_k \{\chi_k = 1\}) = 1$.

La solution obtenue est unique. Si $X(t), Y(t)$ sont deux solutions de (3.1), alors considérons les processus $X_k(t) = X(t)\chi_k$ et $Y_k(t) = Y(t)\chi_k, k \geq 1$. Nous définissons $V(t) = \mathbb{E} \sup_{s \leq t} \parallel X^k(s) - Y^k(s) \parallel_H^{2p}$. Par le lemme 3.5,

$$V(t) \leq C \int_0^t V(s)ds \leq ... \leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq T} \parallel X^k(s) - Y^k(s) \parallel_H^{2p} \frac{(Ct)^n}{n!} \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$ $V(t) = 0$. par conséquent,

$$X(t)\chi_k = X^k(t) = Y^k(t) = Y(t)\chi_k \quad \mathbb{P} - p.s.$$

▲

La formule est applicable pour calculer des différentiels de fonctions de processus (en particulier, pour des solutions fortes), mais pas de la forme dans laquelle une solution douce est fournie. Par conséquent, la proposition suivante sera essentielle, puisque la formule Itô peut être appliquée à des solutions fortes (si elles existent) de la suite à des problèmes d'approximation, où l'opérateur A non borné est remplacé par ses approximations de Yosida $A_n = AR_n$ avec $R_n = nR(n, A) et R(n, A)$ étant le opérateur résolvant de A :

$$\begin{cases} dX(t) = (A_n X(t) + F(t, X))dt + B(t, X)dW_t, \\ X(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Proposition 3.2 *Soientt les coeficients F et G satisfaies les conditions $(A_1), (A_3)$, et (A_4) et $\mathbb{E}\|\xi_0\|_H^{2p} < \infty$. Soit $X(t)$ une solution mild de l'équation, semilineaire (3.1) et $X_n)(t)$ les slutions strong du probeme d'approximation (3.31). Si $S(t)$ est un semigroupe pseudo-contractant et $p \geq$. ou un C_0-semigroupe général et $p > 1$, alors la solution mild $X(t)$ de (3.1) est approximer dans $\mathcal{H}_{2p}$ par la suite f strong solutions $X_n(t)$ de (3.31), telle que,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t) - X(t)\|_H^{2p} = 0$$

Démonstration. Notons d'abord que sous l'hypothèse des coefficients de (3.31), d'après le théorème 3.3, il existe des solutions fortes X_n qui sont uniques et coïncident avec des solutions. De plus,

$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X_n(t)-X(t)\|_H^{2p} \leq$

$$C\left(\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|S_n(t)-S(t))\xi_0\|_H^{2p}+\mathbb{E}\int_0^t\|(S_n(t-s)-S(t-s))F(s,X_n)\|_H^{2p}ds\right.$$

$$\left.+\mathbb{E}\int_0^t\|(S_n(t-s)-S(t-s))B(s,X_n)\|_L^{2p}ds+\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|I(s,X_n)-I(s,X)\|_H^{2p}\right).$$

Puisque pour $x\in H$ et $n\longrightarrow\infty$, $(S_n(t)-S(t))(x)\longrightarrow 0$ uniformément dans $t\in[0,T]$, les trois premierrs sommes convergent vers zéro par le théorème de convergence dominées de Lebesgue. Ainsi, les trois premiers termes sont bornés par $\varepsilon(n)\longrightarrow 0$ quand $n\longrightarrow\infty$.

Le lemme 3.5 implique que le derniere summe est bornée par $C\int_0^t\mathbb{E}\sup_{s\leq t}\| X_n(s)-X(s)\|_H^{2p}\,ds$. Par le lemme de Gronwall, nous déduisons que

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X_n(t)-X(t)\|_H^{2p}\leq\varepsilon(n)e^{Ct}\longrightarrow 0$$

quand $n\longrightarrow\infty$. ▲

L'estimation suivante sur les moments pour les solutions mild de EDS est disponible.

Lemme 3.6 *Soit*

$$X(t)=\xi_0+\int_0^t S(t-s)F(s,X)ds+\int_0^t S(t-s)B(s,X)dWs$$

avec les coefficients F et B vérifiant les conditions (A1) et (A3) et une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs H_0. Soit $S(t)$ soit un semigroupe de pseudo-contraction et $p\geq 1$ ou un semigroupe C_0-général et $p>1$. Alors

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\| X(s)\|_H^{2p}< C_{p,M,\alpha,\ell,T}(1+\mathbb{E}\|\xi_0\|_H^{2p})e^{C_{p,M,\alpha,\ell,T}t}$$

avec $C_{p,M,\alpha,\ell,T}$ ne dépendant que des constantes indiquées.

Démonstration. Soit $\tau_n\inf\{t:\| X(t)\|_H>n\}$. Le lemme 3.4 implique que

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\| X(s\wedge\tau_n)\|_H^{2p}=\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\| S(t\wedge\tau_n)\xi_0+I(s\wedge\tau_n,X)\|_H^{2p}$$

$$\leq 2^{2p-1}\left(\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau_n}\| S(s)\xi_0\|_H^{2p}+\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau_n}\| I(s,X)\|_H^{2p}\right)$$

$$\leq 2^{2p-1}\left(\mathbb{E}\|\xi_0\|_H^{2p}Me^{\alpha t}+\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau_n}\| I(s,X)\|_H^{2p}\right)$$

$$\leq C\left(\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p} + t + \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0\leq u\leq s} \parallel X(u\wedge\tau_n) \parallel_H^{2p}\right).$$

Par le lemme de Gronwall, nous concluons que

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \parallel X(s\wedge\tau_n) \parallel_H^{2p} \leq C\left(\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p} + t\right) + C\int_0^t \left(\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p} + t\right) e^{C(t-s)} ds$$

$$\leq C_{p,M,\alpha,\ell,T}(1+\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p}) e^{C_{p,M,\alpha,\ell,T}t}$$

Ainsi comme $\tau_n \longrightarrow \infty$ $\mathbb{P}$-p.s., nous avons

$\sup_{s\leq t} \parallel X(s\wedge\tau_n) \parallel_H \longrightarrow \sup_{s\leq t} \parallel X(s) \parallel_H$ p.s. Donc,

$$\mathbb{E}\sup_{s\leq t} \parallel X(s) \parallel_H^{2p} = \mathbb{E} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{s\leq t} \parallel X(s\wedge\tau_n) \parallel_H^{2p}$$

$$\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\sup_{s\leq t} \parallel X(s\wedge\tau_n) \parallel_H^{2p}$$

$$\leq C_{p,M,\alpha,\ell,T}(1+\mathbb{E} \parallel \xi_0 \parallel_H^{2p}) e^{C_{p,M,\alpha,\ell,T}t} \blacktriangle$$

Exemple 3.1 *Considerons un Q-processus de Wiener W_t à valeurs K avec trajectoires dans $C([0,t],K)$. Pour $B \in L(K,H)$, le processus $W_t^W = BW_t$ est processus de Wiener à valeurs H de covariance BQB^*, et il peut être réalisé dans $C([0,T],H)$. Considérer maintenant l'équation*

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,X))dt + dW_t^B, \\ X(0) = x \in H \quad (dterministe), \end{cases} \tag{3.32}$$

avec F satisfait les conditions (A1), (A2), et (A4) et A un générateyr d'un C_0-Semigroupe d'opérateurs sur H. Ensuite, le Théorème 3.3 garantit l'existence d'une unique mild solution pour (3.32) dans $C([0,T],H)$, qui est donnée par

$$X(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)F(s,X)ds + \int_0^t S(t-s)BdW_t.$$

Dans le cas $F = 0$, on appelle ce processus un processus Ornstein-Uhlenbec

Dans la section 3.3 nous considérerons un cas particulier où les coefficients F et B d'une EDS (3.1) dépend de $X(t)$ plutôt que de tout le passé de la solution. On sait que même dans le cas déterministe où $A = 0, B = 0 et F(t,X) = f(t,X(t))$ avec une fonction continue $f : \mathbb{R}\times H \longrightarrow H$, une solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} X'(t) = f(t,X(t)), \\ X(0) = x \in H \end{cases} \tag{3.33}$$

peut ne pas exister (voir [11] pour un contre-exemple), sauf si H est de dimension finie. Ainsi soit on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur A, soit on doit chercher une solution dans un plus grand espace

Contributions aux equations différentielles Stochastiques avec retard fonctionnel 4

4.1 Introduction

Dans cette partie, nous étudions l'existence de solution mild pour certains types d'équations avec un retard dépendant de l'état sous la forme

$$\begin{cases} d[X(t) - g(t, X(t))] = AX(t)dt + f(t, X(\rho(t, X(t))))dB(t), \ t \in I = [0, a]; \\ X_0 = \varphi(t) \ \ a.s \end{cases} \tag{4.1}$$

où $X(.)$ est dans un espace de Hilbert séparable H muni du produit scalaire $< .,. >$ et la norme $\|.\|_H$. Soit K un espace de Hilbert séparable avec produit scalaire $< .,. >_K$ et la norme $\|.\|_K$, défini sur un espace de probabilité filtré habituel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Supposons que $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener cylindrique à valeurs K avec un opérateur trace de covariance finie $Q \geq 0$, où $Tr(Q) = \sum_i \lambda_i = \lambda < \infty$. De plus, nous supposons que $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : 0 \leq s \leq t\}$ est la σ-algèbre engendrée par B.

Soit $\mathcal{L}(K, H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires de K dans H muni de la norme usuelle $\|.\|_{\mathcal{L}(K,H)}$,[16] . Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ le générateur d'un semigroupe analytique $\{S(t)_{t\geq 0}\}$ d'opérateurs linéaires, et il existe une constante M telle que $\|S(t)\|^2 \leq M, \ \ t \in I$. Soit H_α un espace de Banach $D((-A)^\alpha)$ muni de la norme $\|x\|_\alpha$; où $\|x\|_\alpha = \|(-A)^\alpha x\|_\alpha$. Aussi pour chaque $0 \leq \alpha \leq 1$, il existe une constante positive M_α telle que

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha}, \ \ 0 \leq t \leq a.$$

Dans ce travail, nous supposons que l'espace de phase $(\mathcal{B}, \|.\|_\mathcal{B})$ est un espace linéaire des fonctions $\mathcal{F}_0$-measurable $]\infty, 0]$ vers H_α, et satisfaisant les axiomes fondamentaux suivants dus à Hale et Kato (voir [33]).

(H_1) si $x : (-\infty, \sigma + a] \longrightarrow H_\alpha, a > 0$, est tel que $x_{[\sigma,\sigma+a]} \in C([\sigma, \sigma + a], H_\alpha)$ et $x_\sigma \in \mathcal{B}$, alors pour tout $t \in [\sigma, \sigma + a]$ Les conditions suivantes sont remplies :

(i) $x_t \in \mathcal{B}$;

(ii) $\|x(t)\|_\alpha \leq \tilde{H}\|x_t\|_\mathcal{B}$;

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t-\sigma)\sup\{\|x(s)\|_\alpha : \sigma \leq s \leq t\} + M(t-\sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$, où $\tilde{H} \geq 0$ est une constante ; $K, M : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$, K est continu et M est localement bornée ; $\tilde{H}$, K, M sont indépendants de $x(.)$.

(H_2) Pour la fonction $x(.)$ in (H_1), la fonction $t \longrightarrow x_t$ est continue de $[s, s+a]$ vers $\mathcal{B}$.

(H_3) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Soit $L_2(\Omega, H)$ l'espace de Lebesgue muni de la norme $\|x(.)\|_{L_2} = \sqrt{\mathbb{E}\|x(.,w)\|^2}$ qui est un Banach, et soit $C(I, L_2(\Omega, H))$ l'espace de Banach tel que $\sup_{0\leq t\leq b} \mathbb{E}\|x(t)\|^2 < \infty$. Soit $L_2^0(\Omega, H)$ la famille de toute les variables aléatoires $\mathcal{F}_0$-mesurable, à valeurs dans H.

Ensuite notons par $\mathcal{H}([\mu,\tau], H_\alpha)$ l'espace des processus mesurables continus (càdlàg), adaptés à $\mathcal{F}_t$ de $[\mu,\tau]$ à $[\mu,\tau]$ à H_α. Dans cette partie, nous supposons que H est muni de la norme

$$\|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sup_{0\leq t\leq a} \mathbb{E}\|x(t)\|_\alpha^2}.$$

Alors $(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$ est un espace de Banach.

Définition 4.1 *Un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-adapté $X :]-\infty, a] \longrightarrow H_\alpha$ est dit solution mild du système (4.1) si $X_0 = \varphi(t), X(\rho(s, X_s)$ est mesurable satisfaisant $X_0 \in L_2^0(\Omega, H_\alpha)$ et $X_{|I} \in \mathcal{H}$, pour tout $s \in I$, la fonction $AS(t-s)g(s, X_s)$, $s \in [0,a]$ est intégrable, telle que*

$$X(t) \;=\; \begin{cases} S(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi(0))] + g(t, X(t)) + \displaystyle\int_0^t AS(t-s)g(s, X(s))ds \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s, X(\rho(s, X(s))))dB(s). \end{cases} \tag{4.2}$$

Le résultat suivant est important pour l'intérêt du théorème de l'existence de solution du système (4.1)

Lemme 4.1 *[33] Soit $x :]-\infty, a] \longrightarrow H_\alpha$ un processus mesurable $\mathcal{F}_t$-adapté tel que, $x_0 = \varphi(t) \in L_2^0(\Omega, \mathcal{B})$ et $x_{|J} \in \mathcal{H}(J, H_\alpha)$, alors*

$$\|x_s\| \leq M_a \mathbb{E}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_a \sup_{0\leq s\leq a} \mathbb{E}\|x(s)\|_\alpha,$$

où

$$K_a = \sup_{0\leq t\leq a}\{K(t)\}, M_a = \sup_{0\leq t\leq a}\{M(t)\}.$$

Lemme 4.2 *[23]. Soit Φ_1, Φ_2 sont deux opérateurs tels que :*

(a) Φ_1 est une contraction, et

(b) Φ_2 complètement continu.

Alors,

(i) $\Phi_1 x + \Phi_2 x$ admet une solution, ou

(ii) l'ensemble $\Sigma = \{x \in X : \lambda\Phi_1(\frac{x}{\lambda}) + \lambda\Phi_2 x = x\}$ est non borné pour $\lambda \in]0,1[$.

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons et démontrons notre résultat principal.

Supposons que :

$\rho : I \times \mathcal{B} \longrightarrow]-\infty, a]$ est continue. Et, pour un $\alpha \in]0,1[$, on a les conditions suivantes :

C_1 : La fonction $t \longrightarrow \varphi_t$ est continue définie de $\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\psi) \leq 0, (s,\psi) \in I \times \mathcal{B}\}$ dans $\mathcal{B}$, et il existe une fonction continue et bornée $I^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \longrightarrow (0,\infty)$, telle que $\|\varphi_t\| \leq I^\varphi(t)\|\varphi\|_\mathcal{B}$ pour tout $t \in \mathcal{R}(\rho^-)$.

C_2 : La fonction $f : [0,a] \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(K,H)$ telle que

$f(t,.) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(K,H)$ est continue $\forall t$.

$f(.,\psi) : [0,a] \longrightarrow \mathcal{L}(K,H)$ est fortement mesurable $\forall x$.

Il existe une constante k_1 pour tout $x, y \in H$ et $t \geq 0$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_1\|x-y\|$$

C_3 : $\forall r > 0, \exists\, l(r)$ telle que

$$\sup \mathbb{E}||f(t,\psi)||^2 \leq l(r),$$

et $\exists\, d$ telle que

$$0 \leq \limsup_{||\psi||^2_\mathcal{B} \to \infty} (\sup_{r \in I} \frac{\mathbb{E}||f(t,\psi)||^2}{||\psi||^2}) \leq d$$

C_4 : $g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow H_\alpha$ est une fonction continue, et $(-A)^\alpha g$ satisfait la condition de Lipschitz, c'est à dire il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\|(-A)^\alpha[g(t_1,\psi_1) - g(t_2,\psi_2)]\|^2_\alpha \leq k_2[|t_1 - t_2| + \|\psi_1 - \psi_2\|^2_\mathcal{B}]$$

pour $0 \leq t_1, t_2 \leq a, \psi_i \in \mathcal{B}$, avec

$$4k_2K_a^2\left[\|(-A)^\alpha\|^2 + \frac{M^2_{1-\alpha}a^{2\alpha}}{2\alpha - 1}\right] < 1.$$

Lemme 4.3 *[26]. Soit $x :]-\infty, a] \longrightarrow H$ telle que $x_0 = \varphi$. Si C_1 est vérifiée, alors pour $s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup I$, on a*

$$\|x(s)\|_\mathcal{B} \leq (M_a + I_0^\varphi)\|\varphi\|_\mathcal{B} + K_a \sup\{\|x(\theta)\|;\ \theta \in [0, \max\{0,s\}]\},$$

où $I_0^\varphi = \sup_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} I^\varphi(t)$.

Théorème 4.1 *Soit $\varphi \in L_2^0(\Omega, H_\alpha)$. Si les hypothèses ($C_1$)-($C_4$) sont vérfieés et $\rho(t,\psi) \leq t$ pour tout $(t,\psi) \in I \times \mathcal{B}$, alors il existe une solution mild du system (1) tel que*

$$10\|(-A)^{-\beta}\|^2 k_2(1+k_1)K_a^2 < 1 \quad où \quad \beta < 1$$

Démonstration. Soit $\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{H} : x(0) = \varphi(0) = 0\}$ l'espace muni de la topologie de la convergence uniforme ($\|.\|_\infty$) et définissons l'opérateur $\Phi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ par

$$(\Phi x)(t) = \begin{cases} S(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t,\bar{x}_t) \\ + \int_0^t AS(t-s)g(s,\bar{x}_s) + \int_0^t S(t-s)f[s,\bar{x}(\rho(s,\bar{x}_s)]dB_s, & t \in I. \\ 0 & t \in]-\infty,0], \end{cases}$$

où $\bar{x} :]-\infty,0] \longrightarrow H_\alpha$ est tel que $\bar{x}_0 = \varphi$ et $\bar{x} = x$ sur I. De (C_4), on déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(s,\bar{x}_s)ds\right\|_\alpha^2 &= \mathbb{E}\left\|\int_0^t A^{1-\beta}S(t-s)A^\beta g(s,\bar{x}_s)ds\right\|_\alpha^2 \\ &\leq M_{1-\beta}^2 a \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2(1-\beta)}}[k_2\|\bar{x}_s\|_{\mathcal{B}}^2 + \zeta]ds, \end{aligned}$$

où $\zeta = \sup_{t\in I} \|(-A)^\beta g(t,0)\|_\alpha$. Alors, du théorème de Bochner [29], il s'ensuit que $As(t-s)g(s,\bar{x}_s)$, est intégrable sur $[0,t[$, que Φ est un opérateur bien défini de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$.

Alors, on peut montrer que Φ a un point fixe, qui est à son tour une solution mild du problème (4.1).

Soit $\bar{\varphi} :]-\infty,0[\longrightarrow H_\alpha$ l'extension φ sur $]-\infty,0]$ telle que $\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(0)$ dans I et $I_0^\varphi = \{I_\varphi(s) : s \in R(\rho^-)\}$.

Maintenant, nous décomposons Φ as $\Phi_1 + \Phi_2$, où

$$(\Phi_1 x)(t) = \begin{cases} -S(t)g(0,\varphi) + g(t,\bar{x}_t) \\ + \int_0^t AS(t-s)g(s,\bar{x}_s)ds, \quad t \in I. \end{cases}$$

$$(\Phi_2 x)(t) = S(t)\varphi(0)\int_0^t S(t-s)f[s,\bar{x}(\rho(s,\bar{x}_s)]dB_s$$

Grâce au lemme 4.2, nous pouvons vérifier que Φ_1 est une contraction, et Φ_2 est continue.

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

1. Φ_1 *est une contraction dans* $\mathcal{Y}$.

Soit $t \in I$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$. Alors, en utilisant les lemmes 4.1, 4.3 et (C_4), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\|(\Phi_1\bar{y}_1) - (\Phi_1\bar{y}_2)(t)\|_\alpha^2 &\leq 2\mathbb{E}\|(-A)^{-\beta}\|^2\left\|(-A)^\beta[g(t,\bar{y}_1(t) - g(t,\bar{y}_2(t))]\right\|_\alpha^2 \\ &+2\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)A[g(s,\bar{y}_1(s))ds - (s,\bar{y}_2(s))ds\right\|_\alpha^2 \\ &\leq 2k_2\|(-A)^{-\beta}\|^2[\|\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)\|_{\mathcal{B}}^2] \\ &+2M_{1-\beta}^2 k_2 a\int_0^t (t-s)^{-2(1-\beta)}[\|\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)\|_{\mathcal{B}}^2]ds \\ &\leq 4k_2\|(-A)^{-\beta}\|^2 K_a^2 \sup_{s\in I}\mathbb{E}\|\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)\|_\alpha^2 \\ &+\frac{4M_{1-\beta}^2 k_2 a}{2\beta-1}K_a^2 \sup_{s\in I}\mathbb{E}\|\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)\|_\alpha^2 \\ &\leq 4k_2K_a^2\left[\|(-A)^{-\beta}\|^2 + \frac{M_{1-\beta}^2 a^{2\beta}}{2\beta-1}\right]\sup_{s\in I}\mathbb{E}\|\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

En utilisant $\bar{y} = y$ sur I. Nous prenons le sup par rapport à t, on a

$$\|\Phi_1 y_1 - \Phi_1 y_2\|_{\mathcal{H}} \leq L_0 \|y^1 - y^2\|^2_{\mathcal{H}},$$

où $L_0 = 4k_2(1+K_1)K_a^2 \left[\|(-A)^{-\beta}\|^2 + \frac{M^2_{1-\beta} a^{2\beta}}{2\beta - 1} \right] < 1$. Donc Φ_1 est une contraction dans $\mathcal{Y}$.

2. *Φ_2 est bornée dans $\mathcal{Y}$.*

pour tout $r > 0$, soit

$$B_r(0, \mathcal{Y}) = \{x \in \mathcal{Y} : \mathbb{E}\|x\|^2_\alpha \leq r\}$$

Donc, pour tout $r, B_r(0, \mathcal{Y})$ est un sous-ensemble convexe, borné et fermé dans $\mathcal{Y}$. En effet, Il suffit de montrer qu'il existe une constante positive $\mathcal{K}$ telle que pour tout $x \in B_r(0, \mathcal{Y})$ on a $\mathbb{E}\|\Phi_2 x\|^2_\alpha \leq \mathcal{K}$.

Maintenant, pour $t \in I$

nous avons

$$(\Phi_2 x)(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f[s, x(\rho(s, \bar{x}(s))] dB(s), \quad t \in I. \tag{4.3}$$

En vue de (C_3), il existe des constantes positives κ,, η et $\bar{\eta}$ telles que, pour tout $\|\psi\|^2_{\mathcal{B}} > \eta$,

$$\|f(t, \psi)\|^2 \leq (d + \kappa)\|\psi\|^2_{\mathcal{B}},$$

et

$$10\|(-A)\|^2 k_2 K_a^2 < 1.$$

Soit

$$f_1 = \{\psi : \ \|\psi\|^2_{\mathcal{B}} \leq \eta\}, \quad f_2 = \{\psi : \ \|\psi\|^2_{\mathcal{B}} > \eta\}.$$

$$G_1 = \{\phi : \ \|\phi\|^2_{\mathcal{B}} \leq \bar{\eta}\}, \quad G_2 = \{\phi : \ \|\phi\|^2_{\mathcal{B}} \leq \bar{\eta}\}$$

Alors,

$$\|f(t, \psi)\|^2 \leq l(\eta) + (d + \kappa)\|\psi\|^2_{\mathcal{B}}. \tag{4.4}$$

Si $x \in B_r(0, \mathcal{Y})$, du lemmes 4.1 et 4.3, il s'ensuit que

$$\|\bar{x}(\rho(\bar{x}_s)\|^2_{\mathbb{B}} \leq 2[(M_a + \bar{I}^\varphi)\|\varphi\|_{\mathbb{B}}]^2 + 2K_a^2 r = \bar{r}.$$

Par (4.4), de (4.3), on a pour $t \in I$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|(\Phi_2 x)(t)\|^2_\alpha \quad &\leq 3\mathbb{E}\|S(t)\varphi(0)\|^2_\alpha + 3\mathbb{E}\left\| \int_0^t S(t - sf[s, \bar{x}(\rho(\bar{x}(s)))] dB(s) \right\|^2_\alpha \\
\leq 3M\mathbb{E}\|\varphi(0)\|^2_\alpha + 3Tr(Q)M^2_\alpha &+ \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2\alpha}} [B(\eta) + (d+\kappa)\|\bar{x}(\rho(\bar{x}(s)))\|^2_{\mathcal{B}}] ds \\
&\leq 3M\tilde{H}^2\|\varphi\|^2_{\mathcal{B}} 3Tr(Q) \frac{M^2_\alpha a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} [l(\bar{r}) + (d+\kappa)\bar{r}] = \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x \in B_r(0, \mathcal{Y})$, nous avons $\mathbb{E}\|\Phi_2 x\| \leq \mathcal{K}$.

3. L'opérateur Φ_2 est complètement continu.

$\Phi_2(B_r(0, \mathcal{Y})$ est équi-continue.

Soit $0 < t_1, < t_2 \leq a$ et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in B_r(0, \mathcal{Y})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|(\Phi_2 x)(t_2) - (\Phi_2 x)(t_1)\|_\alpha^2 &\leq 4\mathbb{E}\|[S(t_2) - S(t_1)]\|_\alpha^2 \\
&+4\mathbb{E}\left\|\int_0^{t_1-\epsilon}[S(t_2-s) - S(t_1-s)F(s, \bar{x}(\rho(\bar{x}(s)]dBs\right\|_\alpha^2 \\
&+4\mathbb{E}\left\|\int_{t_1-\epsilon}^{t_1}[S(t_2-s) - S(t_1-s)F(s, \bar{x}(\rho(\bar{x}(s)]dBs\right\|_\alpha^2 \\
&+4\mathbb{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)F(s, \bar{x}(\rho(\bar{x}(s)dBs\right\|_\alpha^2
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}\|(\Phi_2 x)(t_2) - (\Phi_2 x)(t_1)\|_\alpha^2 \leq 4\mathbb{E}\|[S(t_2) - S(t_1)]\|_\alpha^2$$

$$+4Tr(Q)\|S(t_2 - t_1 + \epsilon) - S(\epsilon)\|^2 \int_0^{t_1-\epsilon} \|A^\alpha S(t_1 - \epsilon)\|^2 [l(\bar{r}) + (d+\kappa)\bar{r}]ds$$

$$+4Tr(Q)\int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \|A^\alpha[S(t_2-s) - S(t_1-s)]\|^2[l(\bar{r}) + (d+\kappa)\bar{r}]ds$$

$$+4Tr(Q)\int_{t_1}^{t_2} \|A^\alpha S(t_2-s)\|^2[l(\bar{r}) + (d+\kappa)\bar{r}]ds$$

$$\leq 4\mathbb{E}\|[S(t_2) - S(t_1)]\|_\alpha^2$$

$$+4Tr(Q)\frac{M_\alpha^2}{1-2\alpha}[l(\bar{r} + (d+\kappa)\bar{r}](t_1 - \epsilon)^{1-2\alpha}\|S(t_2 - t_1 + \epsilon) - S(\epsilon)\|^2$$

$$+4Tr(Q)\frac{M_\alpha^2}{1-2\alpha}[l(\bar{r} + (d+\kappa)\bar{r}][(t_2-t_1)^{1-2\alpha} - (t_2 - t_1 - \epsilon)^{1-2\alpha} + \epsilon^{1-2\alpha}]$$

$$+4Tr(Q)\frac{M_\alpha^2}{1-2\alpha}[l(\bar{r} + (d+\kappa)\bar{r}](t_2-t_1)^{1-2\alpha}.$$

$\mathbb{E}\|(\Phi_2 x)(t_2) - (\Phi_2 x)(t_1)\|_\alpha^2$ tend vers zéro indépendamment quand $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$ avec ϵ suffisamment petit, comme $S(t)$ est un opérateur compact et fortement continu, alors $S(t)$ est continu pour la topologie uniforme. Ainsi, soit $\{\Phi_2 x : x \in B_r(0, \mathcal{Y})\}$ est équi-continue. La discontinuité pour les autres cas $t_1 < t_2 \leq 0$ or $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq a$ sont simples.

ii) L'ensemble $\Phi_2(B_r(0, \mathcal{Y}))(t)$ est pré compact dans H_α pour tout $i \in I$.

Soit $0 < t \leq s \leq a$ et ϵ un nombre réel tel que $0 < \epsilon < t$. Pour $x \in B_r(0, \mathcal{Y})$, on définit

$$\begin{aligned}
(\Phi_2^\epsilon x)(t) &= S(t)\varphi(0) + \int_0^{t-\epsilon} S(t-s)f[s, \bar{x}(\rho(\bar{x})(s))]dBs \\
&= S(t)\varphi(0) + S(\epsilon) + \int_0^{t-s} S(t-s)f[s, \bar{x}(\rho(\bar{x})(s))]dBs
\end{aligned}$$

En utilisant la compacité de $S(t)$ pour $t > 0$, on déduit que l'ensemble $U_\epsilon(t) = \{(\Phi_1^\epsilon x)(t) : x \in B_r(0,\mathcal{Y})\}$ est pré compact dans H_α pour tout $0 < \epsilon < t$. De plus, pour tout $x \in B_r(0,\mathcal{Y})$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|(\Phi_2 x)(t) - (\Phi_2^\epsilon x)(t)\|_\alpha^2 &\leq \mathbb{E}\left\|\int_{t-\epsilon}^t S(t-s)f[s,\bar{x}(\rho(\bar{x}(s)))]dBs\right\|_\alpha^2 \\ &\leq Tr(Q)M_\alpha^2\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-2\alpha}[l(\bar{r})+(d+\kappa)\bar{r}]ds \\ &\leq \tfrac{Tr(Q)M_\alpha^2}{1-2\alpha}[l(\bar{r})+(d+\kappa)\bar{r}]\epsilon^{1-2\alpha}.\end{aligned}$$

La partie droite de l'inégalité en dessus converge vers zéro quand $\epsilon \longrightarrow 0$. Comme il existe des ensembles pré-compacts arbitrairement proche de l'ensemble $U(t) = \{(\Phi_2 x)(t) : x \in B_r(0,\mathcal{Y})\}$.

Alors l'ensemble $U(t)$ est précompact dans H_α. Par le théorème de Arzela-Ascoli , on conclut que Φ_2 ($B_r(0,\mathcal{Y})$) est pré compact dans H_α.

5. *Nous montrons que* $\Sigma = \{x \in X : \lambda\Phi_1(\frac{x}{\lambda}) + \lambda\Phi_2 x = x\}$ *pour* $\lambda \in]0,1[$ *est borné dans* I.

Nous considérons l'équation suivante

$$x(t) = \lambda\Phi x(t), \quad \lambda \in [0,1], \tag{4.5}$$

où Φ est définie antérieurement.

Ensuite nous donnons une estimation a priori pour la solution de l'équation en dessus. En effet, soit $x \in \mathcal{Y}$ soit une solution possible de $x = \lambda\Phi(x)$ pour un certain $0 < \lambda < 1$. Cela implique par l'équation (4.5) que pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}x(t) &= \lambda S(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi(0))] + \lambda g(t,x(t)) + \lambda\int_0^t AS(t-s)g(s,x(s)ds \\ &\quad +\lambda\int_0^t S(t-s)f(s,x(\rho(s,x(s))))dB(s).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Par (C_4) et de (4.6) nous avons pour $t \in I$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\|x(t)\|_\alpha^2 &\leq 4\mathbb{E}\,\|S(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi(0))]\|_\alpha^2 + 4\mathbb{E}\,\|g(t,x(t))\|_\alpha^2 \\ &\quad +4\mathbb{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(t,x(s)ds\right\|_\alpha^2 + 4\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(s,x(\rho(s,x(s))))dB(s)\right\|_\alpha^2 \\ &\leq 4M[\tilde{H}^2\|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2 + \|(-A)^{-\beta}\|^2(k_2(M_a+I_0^\varphi)^2\|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2+\zeta)] \\ &\quad +4\|(-A)^{-\beta}\|^2[k_2(\|\bar{x}_t\|_{\mathcal{B}}^2 + k_1\|\bar{x}_t\|_{\mathcal{B}}^2)+\zeta] \\ &\quad +4M_{1-\beta}^2\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2(1-\beta)}}[k_2(\|\bar{x}_s\|_{\mathcal{B}}^2 + k_1\|\bar{x}_s\|_{\mathcal{B}}^2)+\zeta]ds \\ &\quad +4Tr(Q)M_\alpha^2\int \frac{1}{(t-s)^{2\alpha}}[l(\eta)+(d+\kappa)\|\bar{x}(\rho(s,\bar{x}_s)\|_{\mathcal{B}}^2]ds\end{aligned}$$

Par les lemmes 4.1 et 4.3, il vient que $\rho(s,\bar{x}_s) \leq s$, $s \in [0,t]$, $t \in I$ et

$$\|\bar{x}(\rho(s,\bar{x}(s))\|_{\mathcal{B}}^2 \leq 2[(M_a+I_0^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}]^2 + 2K_a^2\sup_{0\leq s\leq a}\mathbb{E}\|x(s)\|_\alpha^2.$$

Pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|x(t)\|_\alpha^2 &\leq \hat{M} + 10\|(-A)^\beta\|^2 k_2(1+k_1)K_a^2 \sup_{0\leq t\leq a}\mathbb{E}\|x(t)\|_\alpha^2 \\ &+10M_{1-\beta}^2 k_2(1+k_1)aK_a^2\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2(1-\beta)}}\sup_{0\leq r\leq s}\mathbb{E}\|x(r)\|_\alpha^2 ds \\ &+10Tr(Q)M_\alpha^2(d+\kappa)K_a^2\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2(1-\beta)}}\sup_{0\leq r\leq s}\mathbb{E}\|x(r)\|_\alpha^2 ds\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\hat{M} &= 10M[\tilde{H}^2\|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2 + \|(-A)^{-\beta}\|^2(k_2\bar{c}_1+\zeta)] + 10\|(-A)^{-\beta}\|^2\times\{k_2[(1+k_1)\bar{c}_1]+\zeta\} \\ &+\tfrac{10M_{1-\beta}^2a^{2\beta}}{2\beta-1}\{k_2[(1+k_1)\bar{c}_1]+\zeta\} + 10\tfrac{Tr(Q)M_\alpha^2a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}[l(\eta)+(d+\kappa)\bar{c}_1],\end{aligned}$$

et $\bar{c}_1 = [(M_a + I_0^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}]^2$.

Comme $\bar{L} = 10\left\|(-A)^{-\beta}\right\|^2 k_2(1+k_1)K_a^2 < 1$, on a

$\sup_{0\leq t\leq a}\mathbb{E}\|x(t)\|_\alpha^2 \leq \frac{\hat{M}}{1-\bar{L}} + \int_0^a\left[K_1\frac{1}{(t-s)^{-2(1-\beta)}} + K_2(t-s)^{-2\alpha}\right]\times\sup_{0\leq r\leq s}\mathbb{E}\|x(r)\|_\alpha^2 ds$

quand

$K_1 = \frac{1}{1-\bar{L}}10M_{1-\beta}^2k_2(1+k_1)aK_a^2,\ \ K_2 = \frac{1}{1-\bar{L}}10Tr(Q)M_\alpha^2(d+\kappa)K_a^2$

En appliquant l'inégalité de Gronwall dans l'expression précédente, on obtient

$\sup_{0\leq t\leq a}\mathbb{E}\|x(s)\|_\alpha^2 \leq \frac{\hat{M}}{1-\bar{L}}\exp\left\{\frac{K_1a^{2\beta-1}}{2\beta-1} + \frac{K_2a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right\} = \bar{\mathcal{L}}.$

Alors pour tout $x \in \Sigma(\Phi)$, on obtient que $\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \bar{\mathcal{L}}$. Ceçi implique que Σ est bornée dans I.

Par conséquent, du lemme 4.2, on déduit que Σ a un point fixe $x \in \mathcal{Y}$, qui est une solution mild du problème (4.1). La preuve est achevée. □

4.3 Stabilité

Dans cette section, nous présentons la stabilité exponentielle de la solution du système (4.1) en utilisant le principe de contraction.

Lemme 4.4 *[16] Pour un processus prévisible $\Psi(.)$ à valeurs dansL_2^0, alors pour tout $r \geq 1$*

$$\sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left\|\int_0^s\Psi(u)dB(u)\right\|_H^{2r} \leq (r(2r-1))^r\left(\int_0^t\left(\mathbb{E}\|\Psi(s)\|_{L_2^0}^{2r}\right)^{1/r}\right)^r$$

Lemme 4.5 *[16] Pour tout $\beta \in]0,1]$*

- *Pour chaque $x \in D((-A)^\beta,\ \ S(t)(-A)^\beta x = (-A)^\beta S(t)x$*
- *$\left\|(-A)^\beta S(t)\right\| \leq M_\beta t^{-\beta}e^{-\lambda t},\ \ t>0,\ \ \lambda \in]0,\infty[$*

Théorème 4.2 *Si C_1 - C_4 sont vérifiés pour quelque $\alpha \in]1/p,1[;\ p\geq 2$, et que*

$$4^{p-1}\left[k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p + k_2^p\lambda^{-p\alpha}\left(\Gamma(1+\frac{p(\alpha-1)}{p-1})\right)^{p-1}M_{1-\alpha}^p + M^pk_1^p\lambda^{-p} + M^pC_pk_1^p\lambda^{-1}\right] \leq 1$$

est satisfaite, alors la solution (4.1) est exponentiellement stable,

où $C_p = \left(\frac{2a(p-1)}{p-2}\right)^{1-p/2}$.

Démonstration. Définissons l'opérateur $\xi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ par

$$\begin{array}{lll}(\xi x)(t) & = S(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t,x_t) \; + \int_0^t AS(t-s)g(s,x_s)ds \\ & + \int_0^t S(t-s)f[s,x(\rho(s,x_s)]dB_s, t \in I; \\ \text{et} & 0 \text{ if } t \in]-\infty,0] \end{array}$$

$$(\xi x)(t) = \sum_{j=1}^{4} F_j(t) \tag{4.7}$$

où

$F_1(t) = S(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)], \quad F_2(t) = g(t,x_t),$
$F_3(t) = \int_0^t AS(t-s)g(s,x_s)ds, \quad F_4(t) = \int_0^t S(t-s)f[s,x(\rho(s,x_s)]dB_s$

Pour Montrer la stabilité asymptotique, il suffit de prouver que l'opérateur ξ a un point fixe dans $\mathcal{H}$. On utilisons le principe de contraction.

Soit $x \in \mathcal{H}$, $t_1 \geq 1$ et $\|r\|$ suffisamment petit, alors
$\mathbb{E}\|\xi x(t_1+r) - \xi x(t_1)\|_H^p \leq 4^{p-1}\sum_{j=1}^4 \mathbb{E}\|F_j(t_1+r) - F_j(t_1)\|_H^p$

Pour $j = 1,2,3$, il est clair que $\mathbb{E}\|\|F_j(t_1+r) - F_j(t_1)\|_H^p \longrightarrow 0$ quand $r \to 0$

- Pour $j = 4$, par le lemme 4.4 et l'inégalité de Holder,
$\mathbb{E}\|F_4(t_1+r) - F_4(t_1)\|_H^p \leq$

$$2^{p-1}C_p\left[\int_0^{t_1}(\mathbb{E}\|(S(t_1+r-s) - S(t_1-s))f(s,x(\rho(s,x_s)))\|)^{(2/p)}dB(s)s\right]^{(p/2)}$$

$$+2^{p-1}C_p\left[\int_{t_1}^{t_1+r}(\mathbb{E}\|S(t_1+r-s)f(s,x(\rho(s,x_s))\|^{(2/p)})dB(s)\right]^{(p/2)}$$

qui est $\longrightarrow 0$ quand $r \to 0$.

Ainsi, ξ est continu sur $[0,\infty[$.

Ensuite, montrons que $\mathbb{E}\|(x)(t)\|_H^p \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$. De (4.7)

$$\mathbb{E}\|(x)(t)\|_H^p \quad \leq 4^{p-1}\mathbb{E}\|S(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)\|_H^p - 4^{p-1}\mathbb{E}\|g(t,x_t)\|_H^p$$
$$-4^{p-1}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(s,x_s)ds\right\|_H^p + 4^{p-1}\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(s,x(\rho(s,x_s))dB(s)\right\|_H^p$$

Maintenant, les termes du côté droit de (4.7) sont estimés à l'aide de (C_4), lemme 4.4, lemme 4.5. et l'inégalité du Holder, $1/p+1/q=1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|x(t)\|_H^p &\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p+4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p\mathbb{E}\|x(t)\|_H^p\\
&+4^{p-1}\left\|\int_0^t(-A)^{1-\alpha}S(t-s)(-A)^{\alpha}g(s,x_s)ds\right\|_H^p\\
&+4^{p-1}M^pk_1^p\left(\tfrac{p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\left(\int_0^t e^{-\lambda p(t-s)}(\mathbb{E}\|f(s,x(\rho(s,x_s)))\|)^{2/p}ds\right)^{p/2}\\
&\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p+4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p\mathbb{E}\|x_t\|_H^p\\
&\times 4^{p-1}M_{1-\alpha}^pK_2^p\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{q\alpha-q}ds\right)^{p/q}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|X_s\|^pds\\
\textit{Ensuite}\quad &+4^{p-1}M^pk_1^p\left(\tfrac{p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\left(\int_0^t e^{-\lambda p(t-s)}(\mathbb{E}\|f(s,x(\rho(s,x_s)))\|)^{2/p}ds\right)^{p/2}\\
&\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p+4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p\mathbb{E}\|x(t)\|_H^p\\
&\times 4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x(s)\|^pds\\
&+4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{2(p-1)}{p-2}\right)\lambda(t-s)}ds\right)^{\frac{p}{2}-1}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x(s)\|^pds\\
&\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p+4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p\mathbb{E}\|x(t)\|_H^p\\
&\times 4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x(s)\|^pds\\
&+4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\tfrac{2\lambda(p-1)}{p-2}\right)\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x(s)\|^pds.
\end{aligned}$$

Notons par $\mu(t)=\sup\mathbb{E}\|x(s)\|_H^p,\ \ s\in[-r,t]$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(t)-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p\mu(t) &\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p\\
&\quad 4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds\\
&\quad +4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\tfrac{2\lambda(p-1)}{p-2}\right)\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds.
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
(1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p)\mu(t) &\leq 4^{p-1}M^pe^{-\lambda pt}(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p\\
&\quad 4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds\\
&\quad +4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\tfrac{2\lambda(p-1)}{p-2}\right)\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq \tfrac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p}4^{p-1}M^p(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^pe^{-\lambda pt}\\
&+\left[4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}+4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\tfrac{2\lambda(p-1)}{p-2}\right)\right]\\
&\times\tfrac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds.
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq \tfrac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p}4^{p-1}M^p(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^pe^{-\lambda pt}\\
&+\left[4^{p-1}M_{1-\alpha}^pk_2^p\lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q}+4^{p-1}M^pC_pk_1^p\left(\tfrac{2\lambda(p-1)}{p-2}\right)\right]\\
&\times\tfrac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu(t) \leq \gamma_1 e^{-\lambda pt} + \gamma_2\gamma_3 \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mu(t)ds;$$

où

$\gamma_1 = \frac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p} 4^{p-1}M^p(1-k_2\|(-A)^{-\alpha}\|^p$

$\gamma_2 = 4^{p-1}M_{1-\alpha}^p k_2^p \lambda^{p(1-\alpha)-\frac{p}{q}}(\Gamma(1+q\alpha-q))^{p/q} + 4^{p-1}M^pC_pk_1^p(\frac{2\lambda(p-1)}{p-2}$

$\gamma_3 = \frac{1}{1-4^{p-1}k_2^p\|(-A)^{-\alpha}\|^p}$

Par les conditions du théorème 4.2 et l'inégalité de Gronwall dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\mu(t) \leq \gamma_1 e^{-\lambda pt} + \gamma_2\gamma_3 \int_0^t \gamma_1 e^{-\lambda pt} e^{-\lambda(t-s)} \exp\left[\int_s^t e^{-\lambda(t-u)}du\right] ds$$

Avec

$$\exp\left[\int_s^t e^{-\lambda(t-u)}du\right] = \exp[\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda(t-s)})]$$

alors

$$\mu(t) \leq \gamma_1 e^{-\lambda pt} + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 e^{-\lambda pt}e^{-\lambda t}e^{\frac{1}{\lambda}} \int_0^t e^{\lambda s}ds.$$

Ainsi

$$\mu(t) \leq \left[\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 e^{\frac{1}{\lambda}}\right] e^{-\lambda pt} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Finalemnt $\mathbb{E}\|(x)_t\|_H^p \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. La preuve est achevée. □

4.4 Exemple

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante de la forme

$$\begin{cases} d[y(t,x) - \alpha_1(t, y(t-\tau,x))] & = \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x)dt + \alpha_2[t, y(\rho_1(\tau)\rho_2(\|y(\tau)\|),x)]dB(t), \\ & \text{pour } \; 0 \leq t \leq a, \; \tau > 0, \; 0 \leq x \leq \pi, \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0, & \\ y(t,x) = \varphi(t,x) & -\infty \leq t \leq 0, \; p.s. \end{cases} \tag{4.8}$$

φ est continu et, $B(t)$ est un processus de Wiener cylindrique standard dans H défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $H = L^2([0,\pi])$ avec la norme $\|.\|$ et définissons l'opérateur $A : H \to H$ par $Aw = w''$ avec le domaine

$D(A) = \{w \in H : w,\ w'$ sont absolument continus, $\ w'' \in H,\ \ w(0) = w(\pi) = 0\}$
Alors
$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle w, w_n \rangle w_n, \quad w \in D(A)$$
où $w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), n = 1, 2, ...$ est l'ensemble orthogonal de vecteurs propres de A. Il est bien connu que A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique $S(t), t \geq 0$ dans H et est donné par
$$S(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-n^2 t)} (w, w_n) w_n, \quad w \in X.$$
Pour tout $w \in H,\ \ (-A)^{1/2} w = \sum_{n=1} \infty \frac{1}{n} \langle w, w_n \rangle w_n$ et $\|(-A)^{-1/2}\| = 1$. l'opérateur $(-A)^{1/2}$ est donné par
$$(-A)^{1/2} w = \sum_{n=1}^{\infty} n \langle w, w_n \rangle w_n$$
sur l'espace $D((-A)^{1/2}) = \{w(.) \in H,\ \sum_{n=1}^{\infty} n \langle w, w_n \rangle w_n \in H\}$. Le semigroupe analytique $S(t)$ étant compact **[16]**, il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(t)\|^2 \leq M$. Soit $\sigma < 0$, définissons l'espace de phase
$$\mathcal{B} = \{\phi \in C(] - \infty, 0], H_{1/2}) : \lim_{t \to -\infty} e^{\sigma t} \phi(t) \text{ existe dans } H\},$$
et soit $\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty < t < 0} \{e^{\sigma t} \|\phi(t)\|_{1/2}\}$. Alors, $(\mathcal{B}, \|\phi\|_{\mathcal{B}})$ est un espace de Banach qui satisfait $(H_1 - H_3)$ avec $\tilde{H} = 1,\ K(t) = \max\{1, e^{-\sigma t}\},\ M(t) = e^{-\sigma t}$ Donc pour $(t, \phi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$,

où $\phi(t)(x) = \phi(t, x),\ (t, x) \in] - \infty, 0] \times [0, \pi]$,
soit $z(t)(x) = z(t, x)\ g\,(t, \phi)\,(x) = \mu_2(t, \phi(t, x)),\quad f(t, \phi)(x) = \mu_3((, \phi),\quad \rho(t, \phi) = \rho_1(t) \rho_2(\|\phi(0)\|)$.

Ensuite, le problème (4.8) peut être écrit sous la forme (1.1). Ainsi, dans des conditions appropriées sur la fonction g, comme celles de $(C_1) - (C_4)$, le problème (4.8) a une solution mild sur $[0, a]$.

CONCLUSION :

En conclusion, nous avons établi une contribution aux équations différentielles stochastique (EDS) avec retard qui dépendent de l'état. Une transformation assez simple permet de ramener l'étude de ce problème à celui d'une équation différentielle ordinaire à retard. A partir de la théorie de l'intégration stochastique, on construit la théorie des EDS. On s'intéresse dans cette contribution à l'étude de l'existence de solutions d'une classe d'équations différentielles stochastiques avec retard qui dépendent de l'état dans un espace de dimension infinie, cette étude est analogue à celle du cas de dimension fini à condition que l'équation aux différentiels totaux $D(y) = \sigma(y), \quad y(0) = \alpha$, admette toujours une solution. Le théorème du point fixe s'applique alors pour une norme convenablement choisie. Et on a étudié le comportement asymptotique autrement la stabilité exponentielle du processus solution, et on termine par un exemple d'application théorique.

Bibliographie

[1]. I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (1991).

[2]. L. Gawarecki V. Mandrekar, *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2011.

[3]. P.L. Butzer and H. Berens. Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer, New York (1967).

[4]. S. Cerrai. Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimension, Lecture Notes in Mathematics 1762, Springer, Berlin (2001).

[5]. A. Chojnowska-Michalik. Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, Banach Center Publications 5, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw (1979).

[6]. G. Da Prato, S. Kwapien, and J. Zabczyk. Regularity of solutions of linear stochastic equations in Hilbert spaces, Stochastics 23, 1-23 (1987).

[7]. G. Da Prato and J. Zabczyk. Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[8]. B. Gaveau. Intégrale stochastique radonifiante, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 276, 617620 (1973).

[9]. L. Gawarecki. Extension of a stochastic integral with respect to cylindrical martingales, Stat. Probab. Lett. 34, 103-111 (1997).

[10]. I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. The Theory of Stochastic Processes, Springer, Berlin (1974).

[11]. A.N. Godunov. On Peano's theorem in Banach spaces, Funct. Anal. Appl. 9, 53-55 (1975).

[12]. A. Ichikawa. Stability of semilinear stochastic evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 90, 12-44 (1982).

[13]. A. Ichikawa. Some inequalities for martingales and stochastic convolutions, Stoch. Anal. Appl. 4, 329-339 (1986).
Mathematics, Springer, New York (1991).

[14]. M. Ledoux and M. Talagrand. Probability in Banach Spaces, Springer, Berlin (1991).

[15]. M. Metivier and J. Pellaumail. Stochastic Integration, Academic Press, New York (1980).

[16]. A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 44, Springer, New York (1983).

[17]. M. Yor. Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert, Ann. Inst. H. Poincaré B 10, 55-88 (1974).

[18]. K. Yosida. Functional Analysis, Springer, New York (1980).
Mathematics, Springer, New York (1991).

[19]. P. Billingsley. Probability and Measure, Wiley, New York (1979).

[20]R. S. Liptzer and A. N. Shiryaev. Statistics of Stochastic Processes, Nauka, Moscow (1974).

[21]R. S. Schatten. Norm Ideals of Continuous Operators, Springer, New York (1970).

[22]. M. Hernndez E A. Anguraj, Arjunan. Existence results for an impulsive neutral functional differential equation with state-dependent delay. Appl. Anal, 86 :861-872, 2007.

[23]. B.C.Dhage. On a fixed point theorem of F Krasnoselkii-Schaefer type. EJQTDE. No.6, 2002.

([24]]. El Fatini, M., Kaddar, A. and Laaribi, A. 2016. Stability criteria and fluctuations for a business cycle model, International Journal of Statistics and Economics 17(2) : 73-84.

[25]. Hernandez, Prokopczyk, A. and Ladeira, L. 2006. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay, Nonlinear Anal. RwA 7(4) : 510-519

[26]. Prokopczyk A. Ladeira L E. Hernndez, E. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay. Nonlinear Anal. RwA, 7 :510-519, 2006.

[27]. Ren, Y. and Xia, N. 2009. Existence, uniqueness and stability of the solutions to neutral stochastic functional differential equations with infinite delay, App. Math. Comput 210(1) : 72-79

[28]. Anandhi E.R R. Sakthivel. Approximate controllability of impulsive differential equations with state-dependent delay. Int. J. Control, 83(2) :387-393, 2010.

[29]. J. M. A. M. van Neerven. Stochastic Evolution Equations. Lecture Notes. fa.its.tudelft.nl/ neerven/publications/papers/ISEM.pdf, 2003.

[30]. Z.Yan X.Yan. Existence of solutions for impulsive partial stochastic neutral integro-differential equations with state-dependent delay. Collect. Math, 2013.

[31]. N. Xia Y. Ren. Existence, uniqueness and stability of the solutions to neutral stochastic functional differential equations with infinite delay. Applied Mathematics and Computation, 210 :72-73, 2009.

[32]. R. Wheeden, A. Zygmund. Measure and Integral, Marcel Dekker, New York (1977).

[33]. Hale, J.K., Kato, J. : Phase spaces for retarded eqnarrays with infi nite delay. Funkcial Ekvac. 21 , 11 - 41 (1978).