

République Algérienne Démocratique et Populaire
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

présenté
par

Difi Sid Ahmed

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

Spécialité : MATHEMATIQUES
Option : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Géométrie des surfaces dans l'espace Euclidien et l'espace semi-Euclidien.

Soutenue le 15 janvier 2019 devant le jury :

- **Président** Benaissa A, **Professeur**, université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes.
- **Directeur de thèse** Hakem A, **Professeur**, université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes.
- **Co-Directeur de thèse** Zoubir H, **MCA**, Ecole Polytechniques, Oran.
- **Examineur** Belghaba K, **Professeur**, université d'Oran.
- **Examineur** Ouakkas S, **Professeur**, université de Saida.
- **Examineur** Amroun N, **MCA**, université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes.

Remerciements

*Louange à Allah pour sa bénédiction infinie
Je veux exprimer ici mes remerciements les plus vifs à tous les membres
du jury de ma thèse.
Je remercie chaleureusement le Professeur M. Benaïssa A. Je suis très
sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury.
Je suis très reconnaissant aux Professeurs, K.Belghaba, S.OUKASSE et
N.Amroun pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. C'est un grand
honneur pour moi de les compter comme membres du jury.
Au Professeur A.Hakem, mon directeur de thèse, ses nombreux encourage-
ments et ses qualités humaines.
Au Professeur H.Zoubir, mon Co-encadreur, je veux de plus, exprimer
ma profonde gratitude pour sa disponibilité, ses nombreux encourage-
ments et ses qualités humaines. Sa confiance et son enthousiasme ont
été des plus stimulants durant l'élaboration de cette thèse.
A tous ceux qui m'ont un jour encouragé à progresser, j'exprime ma
tendre pensée. Je ne citerai pas de noms ici, pour ne pas oublier cer-
tains.
Pour finir, je dédie affectueusement ce mémoire à ma famille qui sou-
haitait me voir épanouir dans mon travail. Merci à tous.
A la mémoire des êtres chers qui nous ont quittés*

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Algèbre vectorielle dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3	5
1.2 Surface dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3	7
1.3 Les équations de Gauss et Weingarten dans \mathbb{R}_1^3	9
1.4 Certains opérateurs différentiels	12
1.5 Courbure moyenne et courbure de Gauss	14
1.5.1 Courbure de Gauss	15
1.5.2 Formules de Brioschi	15
1.5.3 Courbure moyenne	17
1.6 Transformations linéaires de Lorentz dans l'espace \mathbb{R}_1^3	18
1.7 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type temps	20
1.8 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type espace	21
1.9 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type lumière :	22
1.10 Groupe de transformation de Lorentz dans l'espace \mathbb{R}_1^3	23
2 Notion de surface, premières définitions et Géométrie intrinsèque des surfaces	24
2.0.1 Changement de paramétrisation	33
2.0.2 Plan tangent	34
2.0.3 Propriété fondamentale	34
2.0.4 Surface orientable	36
2.1 Première forme fondamentale	37
2.1.1 Expression de la première forme fondamentale dans une carte locale	38
2.1.2 Propriétés métriques	39
2.2 Seconde forme fondamentale	40
2.2.1 Application de Gauss	40

3 Les surfaces de Translation Factorables (TF) dans l'espace euclidien et l'espace Lorentzien-Minkowski	45
Introduction	45
3.1 Préliminaires	46
3.2 Les surfaces de Translation-factorable dans \mathbf{E}^3	51
3.3 Les surfaces de Translation-Factorable dans \mathbf{E}_1^3	54
3.3.1 Les surfaces de Translation-Factorable de type espace dans \mathbf{E}_1^3 .	56
3.3.2 Les surfaces de Translation-Factorable de type temps dans \mathbf{E}_1^3 .	57
Bibliographie	60

Introduction

Tout travail sur la géométrie Riemannienne est réputé comme étant un travail difficile, en général. Ceci est dû, non seulement à la quantité de résultats qu'il renferme, mais plutôt aux multiples interactions entre la géométrie et les champs disciplinaires voisins. On peut citer dans ce sens, l'impact considérable qu'exerce les matières suivantes sur le développement de la géométrie : La topologie usuelle, la topologie algébrique, l'homologie, l'algèbre linéaire, la théorie des groupes, la physique théorique, le calcul différentiel, les équations différentielles, etc.

Le concept principal et fondamental est "la courbure". Elle intervient dans presque tous les problèmes de géométrie contemporaine. Mais son introduction nécessite la mise en place d'autres ingrédients tels que les connexions, les dérivées covariantes, le calcul tensoriel, les champs de vecteurs, etc.

Dans ce manuscrit, j'aborde un sujet jusqu'à lors inexploré, donner la classification complète des surfaces dites de "translations factorables" dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 de dimensions 3 et lorentzien \mathbb{E}_1^3 qui satisfont la condition $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et Δ est le laplacien.

L'étude des sous-variétés de type fini a débuté à la fin des années 1970 quand B-Y Chan tentait de trouver une meilleure estimation de la courbure totale moyenne d'une sous-variété compacte d'un espace euclidien et trouver une notion de "degré" pour les sous-variétés d'un espace euclidien.

B.Y. Chen pose le problème de classification des différents types de sous-variétés euclidiennes. Pour la dimension trois, ces sous-variétés sont des surfaces. Beaucoup de travaux ont suivi. On peut en citer, ceux de Chen, B-Y.(1984); Hasanis T., Vlachos T.; Meng, H., Liu, H.; et Baba-Hamed, Ch., Bekkar, M., Zoubir, H., Senoussi B.

Soit \mathbb{R}_g^m un espace pseudo-euclidien son champ de vecteur position r admet une décomposition spectrale finie.

$$r = r_0 + \sum_{i=1}^k r_i$$

en de dimension m , de signature $(s, m-s)$ et M une sous variété pseudo-riemannienne de \mathbb{R}_s^m . M paramétrée par r , est dite de type fini s où r_0, r_1, \dots, r_k sont des applications (r_0, r_1, \dots, r_k non constantes) telles que

$$\Delta r_0 = 0, \quad \Delta r_i = \lambda_i r_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

Δ étant l'opérateur de Laplace associée à la première forme fondamentale. Si les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont différents, alors M est dite de type k .

Pour M compacte on impose à r_0 d'être constante. Pour M non compacte r_0 n'est pas nécessairement constante.

M de type fini est dite nulle si r_0 n'est pas constante.

En 1983 B-Y Chen introduisit la notion d'immersions euclidiennes de type fini. On construit des sous variétés dans \mathbb{R}^m , en utilisant un nombre fini de \mathbb{R}^m -valeurs propres munies de leur laplacien. De nombreux travaux ont été effectués pour caractériser la classification des sous-variétés en termes de type fini. Des résultats importants sur les sous-variétés sphériques fermées de type 2 (où sphérique signifie dans une sphère) ont été obtenues, voir [10].

On sait que les seules surfaces dans \mathbb{R}^3 satisfaisant la condition :

$$\Delta r = \lambda r, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où Δ est l'opérateur de Laplace associé à la métrique induite.

D'autre part Garay [14] avait déterminé complètement les surfaces de révolutions dans \mathbb{R}^3 , dont les fonctions composantes sont des valeurs propres de leurs opérateurs de Laplace i.e.

$$\Delta r^i = \lambda^i r^i, \quad \lambda^i \in \mathbb{R}.$$

Plus tard Lopez [17] étudie les hypersurfaces dans \mathbb{R}^{n+1} vérifiant :

$$\Delta r = Ar, \quad A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Kaimakamis et Papantounion [9] étudièrent les surfaces de révolutions dans l'espace de dimensions 3 Lorentz-Minkowski, satisfaisant la condition

$$\Delta^{II} r = Ar,$$

où Δ^{II} est l'opérateur de Laplace en respectant la seconde forme fondamentale et A est un tableau réel 3×3 .

Zoubir et Bekkar [8] ont classifié les surfaces de révolutions à courbure Gaussienne nulle K_G dans l'espace Euclidien de dimensions 3 \mathbf{E}^3 et l'espaces Lorentzien-Minkowski, sous la condition

$$\Delta r^i = \lambda^i r^i, \quad \lambda^i \in \mathbb{R}.$$

Baba Hamed, Bekkar et Zoubir [4] ont déterminé les surfaces de translation dans l'espace de dimensions 3 Lorentz-Minkowski \mathbf{E}_1^3 , dont les fonctions composantes sont des

valeurs propres de leurs opérateurs de Laplace. Baba Hamed, Bekkar [3] ont étudié les surfaces hélicoïdales sans points paraboliques \mathbf{E}_1^3 , qui satisfont la condition

$$\Delta^I r_i = \lambda_i r.$$

Bekkar et Senoussi [7] ont étudié les surfaces factorables dans l'espace de dimensions 3 Minkowski sous la condition

$$\Delta r_i = \lambda_i r,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et dr_i sont les coordonnées de la surface. Il y a eu classification de surfaces factorables dans l'espace de dimensions 3 Lorentz-Minkowski Euclidien et pseudo-Euclidien. Lopez et Moruz [18] ont étudié les surfaces de translation et les surfaces d'homothétie avec constante minimale homothétique non dégénérées dans l'espace Euclidien dans \mathbf{E}_1^3

Dans cet article, on classe les surfaces de translation-factorable dans l'espace Euclidien de dimensions 3 \mathbf{E}^3 et \mathbf{E}_1^3 lorentzien sous la condition

$$\Delta r_i = \lambda_i r_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{0.0.1}$$

Description de la thèse

Cette thèse est composée de trois chapitres :

Le premier est réservé aux rappels, définitions des éléments mathématiques de bases en géométrie Lorentzienne et contient les transformations linéaires de Lorentz dans l'espace \mathbb{R}_1^3

Le deuxième contient la notion de surface, premières définitions et Géométrie intrinsèque des surfaces

Le troisième contient les résultats concernant, la classification des surfaces de translations-factorables

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre a pour but de présenter les définitions et notions utilisées dans les chapitres suivants.

1.1 Algèbre vectorielle dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3

On appelle espace pseudo-euclidien de dimension m , de signature $(s, m-s)$, l'espace vectoriel \mathbb{R}^m muni de la métrique :

$$g = -dx_1^2 - \dots - dx_s^2 + dx_{s+1}^2 + \dots + dx_m^2,$$

où (x_1, x_2, \dots, x_m) sont les coordonnées rectangulaires de \mathbb{R}^m . On le note \mathbb{R}_s^m , en particulier pour $m \geq 2$, \mathbb{R}_1^m est appelé m -espace de Lorentz-Minkowski.

Ce qui nous intéresse en particulier, c'est l'espace de Lorentz-Minkowski de dimensions 3, qui est l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de la métrique lorentzienne

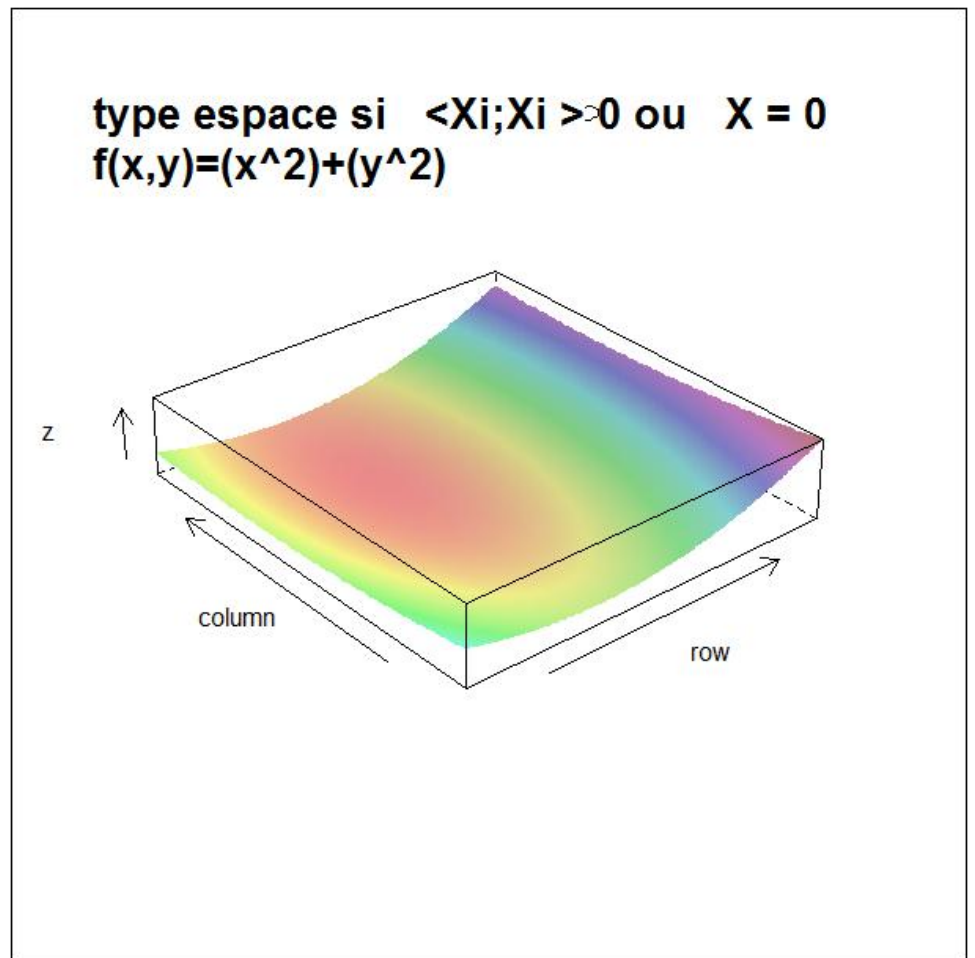
$$g = ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

où (x, y, z) est le système de coordonnées rectangulaires de \mathbb{R}_1^3 .

On associe à cette métrique, le produit scalaire de Lorentz de deux vecteurs $X = (X_1, X_2, X_3)$ et $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ de \mathbb{R}^3 , défini par

$$\langle X, Y \rangle = -X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3.$$

Un vecteur X de \mathbb{R}_1^3 est dit **de type temps** si $\langle X, X \rangle > 0$ ou $X = 0$, **de type espace** si $\langle X, X \rangle < 0$, et **de type lumière** ou il est dit nul si $\langle X, X \rangle = 0$ et $X \neq 0$.



espace.pdf espace.pdf

FIGURE 1.1 – Une surface de type espace

La norme du vecteur X est définie par

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

Il existe une orientation naturelle de \mathbb{R}^3 , définie comme suit : une base ordonnée $B = \{X, Y, Z\}$ dans \mathbb{R}^3 est positivement orientée si $\det[X, Y, Z] > 0$ où $\det[X, Y, Z]$ désigne le déterminant de la matrice, dont les vecteurs colonnes sont respectivement X , Y et Z . Cela nous permet de définir le produit vectoriel de Lorentz de deux vecteurs X et Y . On le note $X \times Y$, c'est l'unique vecteur dans \mathbb{R}_1^3 tel que

$$\langle X \times Y, Z \rangle = \det[X, Y, Z] \text{ Pour tout } Z \in \mathbb{R}_1^3.$$

Pour $X = (X_1, X_2, X_3)$ et $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ dans \mathbb{R}_1^3 on a :

$$X \times Y = (X_3 Y_2 - X_2 Y_3, X_3 Y_1 - X_1 Y_3, X_1 Y_2 - X_2 Y_1).$$

Comme dans le cas euclidien, on retrouve les propriétés suivantes :

Propriété : Soient A, B, C, X, Y et Z des vecteurs de \mathbb{R}_1^3 , on a :

1. $X \times Y = -Y \times X$.
2. $X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$.
3. $\langle X \times Y, X \rangle = \langle X \times Y, Y \rangle = 0$.
4. $\det[X, Y, Z] = \langle X \times Y, Z \rangle = \langle X, Y \times Z \rangle$.
5. $(X \times Y) \times Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X$.
6. Identité de Lagrange dans \mathbb{R}_1^3

$$\langle A \times B, X \times Y \rangle = - \begin{vmatrix} \langle A, X \rangle & \langle B, X \rangle \\ \langle A, Y \rangle & \langle B, Y \rangle \end{vmatrix}$$

$$7. \det[A, B, C] \det[X, Y, Z] = - \begin{vmatrix} \langle A, X \rangle & \langle B, X \rangle & \langle C, X \rangle \\ \langle A, Y \rangle & \langle B, Y \rangle & \langle C, Y \rangle \\ \langle A, Z \rangle & \langle B, Z \rangle & \langle C, Z \rangle \end{vmatrix}$$

8. $X \times Y = 0$ si et seulement si X et Y sont linéairement dépendant.

1.2 Surface dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{2,r}$

Définition 1.1. Une surface \mathbb{M} paramétrée dans \mathbb{R}_1^3 est une application de classe C^1 de Ω dans \mathbb{R}_1^3 , $r : \Omega \mapsto \mathbb{R}_1^3$. Si les composantes de la fonction vectorielle X sont $r = (r_1, r_2, r_3)$, on écrit :

$$r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) \text{ pour tout } (u, v) \in \Omega.$$

Définition 1.2. Soit \mathbb{M} une surface de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (respectivement de l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3). On définit des fonctions E, F et G $:\Omega \mapsto \mathbb{R}$ par

$$E = \langle r_u, r_u \rangle, \quad F = \langle r_u, r_v \rangle \quad \text{et} \quad G = \langle r_v, r_v \rangle,$$

où r_u (resp r_v) désigne la dérivée partielle de r par rapport à u (resp à v).

$\{r_u, r_v\}|_{(u,v)}$ est une base de l'espace tangent $T_p M$ avec $p = r(u, v)$. Les fonctions E, F et G sont appelées coefficients de la première forme fondamentale associée à la surface $r(u, v)$.

Notons \mathbf{N} le vecteur unitaire normal à cette surface donné par

$$\mathbf{N} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

On obtient alors de nouvelles fonctions L, M et N $:\Omega \mapsto \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} L &= -\langle \mathbf{N}_u, r_u \rangle = -\langle \mathbf{N}, r_{uu} \rangle, \\ M &= -\langle \mathbf{N}_u, r_v \rangle = -\langle \mathbf{N}, r_{uv} \rangle = -\langle \mathbf{N}_v, r_u \rangle = -\langle \mathbf{N}, r_{vu} \rangle, \\ N &= -\langle \mathbf{N}_v, r_v \rangle = -\langle \mathbf{N}, r_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

De même L, M et N sont appelées coefficients de la deuxième forme (quadratique) fondamentale associée à la surface $r(u, v)$.

Définition 1.3. Soit W un champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 et V_p un vecteur tangent au point p ($p = r(u, v)$). Alors la dérivée covariante de W par rapport à V_p est le vecteur tangent :

$$\nabla_{V_p} W = \left. \frac{dW(p + tV_p)}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{en tout point } p.$$

Proposition 1.1. Soit E_1, E_2 et E_3 une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Si $W = \sum_{i=1}^3 w_i E_i$ est un champs de vecteur de \mathbb{R}^3 et V_p un vecteur tangent en p , alors

$$\nabla_{V_p} W = \sum_{i=1}^3 V_p[w_i] E_i(p).$$

Proposition 1.2. Soit W un champs de vecteurs défini dans une région contenant une courbe régulière α . Ainsi $t \rightarrow W(\alpha(t))$ est un champs de vecteurs appelé la restriction de W à la courbe α qu'on note W_α , en outre $\nabla_{\alpha'(t)} W = (W_\alpha)'(t)$.

Définition 1.4. Une surface de révolution est une surface globalement invariante par toute rotation autour d'une droite fixe appelée axe de révolution.

La rotation d'une courbe (appelée génératrice) autour d'une droite fixe engendre une surface de révolution.

Les sections par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles appelés parallèles de la surface (une surface de révolution est ainsi une surface cerclée).

1.3 Les équations de Gauss et Weingarten dans \mathbb{R}_1^3

Nous utiliserons dans ce qui suit, la convention de sommation d'Einstein pour les expressions avec des indices. (x^i) concerne un système de coordonnées et ψ_i la dérivée partielle $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$.

Soit (M, g) une variété semi riemannienne de dimension m et (x^1, x^2, \dots, x^m) un système de coordonnées, $p \in M$. Alors $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_m|_p\}$ où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, ($i = 1, \dots, m$), forme une base de l'espace tangent $T_p M$ et $\{\partial x^1|_p, \partial x^2|_p, \dots, \partial x^m|_p\}$ forme la base duale $T_p^* M$. A savoir pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $dx^i|_p(\partial_j|_p) = \delta_j^i$ où δ_j^i est le symbole de Kronecker. Le tenseur métrique g sur M est donné par

$$g = g_{ij} dx_i dx_j.$$

Les composantes g_{ij} du tenseur métrique g sont des fonctions régulières réelles qui sont données par $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Puisque g est non dégénéré, la métrique (g_{ij}) est inversible, on note son inverse par g^{ij} .

On définit les coefficients Γ_{ij}^k de la connexion de Levi-Cevita ∇ . par $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$. En outre, chaque Γ_{ij}^k est donnée par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}).$$

On se contente de traiter les surfaces dans \mathbb{R}_1^3 . Sur une surface M avec la paramétrisation $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} g_{11} \circ r & g_{12} \circ r \\ g_{21} \circ r & g_{22} \circ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

par commodité, on posera $g_{ij} \circ r = g_{ij}$ à avoir :

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

idem pour $g^{ij} \circ r = g^{ij}$ on aura

$$\begin{pmatrix} g^{11} \circ r & g^{12} \circ r \\ g^{21} \circ r & g^{22} \circ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

On fera la même chose pour $\Gamma_{ij}^k \circ r = \Gamma_{ij}^k$, etc

Proposition 1.3. *Soit $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, alors :*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Corollaire 1.1. *Soit $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$. Pour tout $i = 1, 2$, on a*

$$\Gamma_{ik}^k = \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2 = \ln \left(\sqrt{|EG - F^2|} \right)_{,i}.$$

Preuve : Par l'identité de Lagrange, on obtient

$$\langle r_u \times r_v, r_u \times r_v \rangle = -(EG - F^2).$$

Soit

$$\mathbf{N} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = -\frac{EG - F^2}{|EG - F^2|},$$

ainsi

$$|EG - F^2| = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \langle EG - F^2 \rangle,$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 &= \frac{GE_u - 2FF_u + EG_u}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \frac{\partial}{\partial u} (EG - F^2) \\ &= \frac{1}{-2\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle (EG - F^2)} \frac{\partial}{\partial u} (\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle (EG - F^2)) \\ &= \frac{1}{2|EG - F^2|} \frac{\partial}{\partial u} (|EG - F^2|) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \ln \left(\sqrt{|EG - F^2|} \right).\end{aligned}$$

Idem pour

$$\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial}{\partial u} \ln \left(\sqrt{|EG - F^2|} \right).$$

Maintenant on pourra établir les équations de Gauss Weingarten dans \mathbb{R}_1^3 .

Théorème 1.1. (*Équations de Gauss*) Soit $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ et le vecteur normal

$$\mathbf{N} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}, \text{ alors}$$

$$\begin{cases} r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + L \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}, \\ r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + M \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}, \\ r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + N \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}. \end{cases}$$

Preuve : Comme r est régulière, il s'ensuit que r_u , r_v et \mathbf{N} forment une base de \mathbb{R}^3 . Soient α_i, β_i et $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, tel que :

$$\begin{cases} r_{uu} = \alpha_1 r_u + \alpha_2 r_v + \alpha_3 \mathbf{N}, \\ r_{uv} = \beta_1 r_u + \beta_2 r_v + \beta_3 \mathbf{N}, \\ r_{vv} = \gamma_1 r_u + \gamma_2 r_v + \gamma_3 \mathbf{N}. \end{cases}$$

On note que $\alpha_3 = L \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$, $\beta_3 = M \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$, $\gamma_3 = N \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$.

Pour déterminer les autres coefficients, on procédera comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 E + \alpha_2 F = \langle r_{uu}, r_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \alpha_1 F + \alpha_2 G = \langle r_{uu}, r_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \beta_1 E + \beta_2 F = \langle r_{uv}, r_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \beta_1 F + \beta_2 G = \langle r_{uv}, r_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \gamma_1 E + \gamma_2 F = \langle r_{vv}, r_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \gamma_1 F + \gamma_2 G = \langle r_{vv}, r_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

Les deux premières équations peuvent être résolues pour α_1 , et α_2 , on trouve $\alpha_1 = \Gamma_{11}^1$ et $\alpha_2 = \Gamma_{11}^2$. Pour les autres équations on procède de la même manière et ceci achèvera la preuve du théorème.

Théorème 1.2. (*Équations de Weingarten*)

Soit $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ et le vecteur normal $\mathbf{N} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$, alors \mathbf{N}_u et \mathbf{N}_v s'expriment dans

la base $\{r_u, r_v\}$ sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = \frac{MF - LG}{EG - F^2}r_u + \frac{LF - MG}{EG - F^2}r_v, \\ \mathbf{N}_v = \frac{NF - MG}{EG - F^2}r_u + \frac{MF - NG}{EG - F^2}r_v. \end{cases}$$

Preuve : Comme $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_v \rangle = 0$, \mathbf{N}_u et \mathbf{N}_v sont des vecteurs tangents. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathbf{N}_u = ar_u + br_v \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_v = cr_u + dr_v,$$

d'où

$$\begin{aligned} -L &= aE + bF, & -M &= cE + dF, \\ -M &= aF + bG, & -N &= cF + dG, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a &= \frac{MF - LG}{EG - F^2}, & b &= \frac{LF - MG}{EG - F^2}, \\ c &= \frac{NF - MG}{EG - F^2}, & d &= \frac{MF - NG}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve.

Remarque 1.1. On peut écrire \mathbf{N}_u et \mathbf{N}_v sous une forme plus simple, à savoir ;

$$\mathbf{N}_u = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} r_u & r_v & 0 \\ E & F & L \\ F & G & M \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_v = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} r_u & r_v & 0 \\ E & F & M \\ F & G & N \end{vmatrix}.$$

1.4 Certains opérateurs différentiels

Soit (M, g) une variété semi riemannienne et $\mathcal{F}(M)$ est l'anneau des fonctions régulières réelles définies sur M . Il existe des généralisations naturelles des opérateurs différentiels connus en calculs vectoriels sur \mathbb{R}^3 comme le gradient, la divergence et le Laplacien.

Définition 1.5. Le gradient d'une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ est un champs de vecteurs équivalent à la différentielle df , défini par :

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf,$$

pour tout champs de vecteurs X sur M . En termes de coordonnées locales

$$\text{grad } f = \sum_{j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

En particulier, dans le cas semi euclidien, on a :

$$\text{grad } f = \sum_{j=1}^m \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \partial_i,$$

avec $\varepsilon_i(\partial_i, \partial_i)$ pour tout i , qui se réduit à la formule usuelle dans \mathbb{R}^3 .

Définition 1.6. La divergence d'un champs de vecteurs X sur M , notée $\text{div } X$, est définie comme trace de $V \rightarrow \nabla_V X$. Ainsi, pour des champs de vecteurs orthonormaux E_1, E_2, \dots, E_m

$$\text{div } X = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \langle \nabla_{E_j} X, E_j \rangle$$

et pour un système de coordonnées locales on a

$$\text{div } X = \sum_{j=1}^m dx^j (\nabla_{\partial_j} X) = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i X^k \right\}$$

et ainsi, pour des coordonnées naturelles sur \mathbb{R}_s^m , on a

$$\text{div } X = \sum_{j=1}^m \frac{\partial X^j}{\partial u^j}.$$

Proposition 1.4. Soit X un champs de vecteurs sur M et f une fonction de $\mathcal{F}(M)$. Alors

$$\text{div } fX = df(X) + f \text{div } X.$$

Soit X un champs de vecteurs sur M . Pour un système de coordonnées locales sur M on a,

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{|\det I|}} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|\det I|} X^j),$$

où $\det I = \det(g_{ij})$.

Définition 1.7. Soit f une fonction de $\mathcal{F}(M)$. On appelle Laplacien de f et on le note Δf , la divergence du gradient de f .

$$\Delta f = \text{div } (\text{grad } f), \quad \Delta f \in \mathcal{F}(M) (*).$$

Proposition 1.5. Soit f une fonction de $\mathcal{F}(M)$. Pour un système de coordonnées locales sur M on a,

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}. \quad (**)$$

Les formules (*) et (**) nous donnent

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|\det I|}} \sum_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|\det I|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}) \right).$$

Remarque 1.2. On peut écrire le Laplacien associé à la première forme fondamentale sous la forme suivante,

$$\Delta F = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \left[\left(\frac{Gf_u - Ff_v}{\sqrt{|EG - F^2|}} \right)_u - \left(\frac{Ff_u - Ef_v}{\sqrt{|EG - F^2|}} \right)_v \right],$$

le Laplacien associé à la seconde forme fondamentale sous la forme suivante

$$\Delta^{II} F = \frac{1}{\sqrt{LN - M^2}} \left[\left(\frac{Nf_u - Mf_v}{\sqrt{LN - M^2}} \right)_u - \left(\frac{Mf_u - Lf_v}{\sqrt{LN - M^2}} \right)_v \right],$$

et le Laplacien associé à la troisième forme fondamentale sous la forme suivante

$$\Delta^{III} F = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{LN - M^2} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{(GM^2 - 2FNM + EN^2)f_u - (EMN - FLN + GLM - FM^2)f_v}{\sqrt{EG - F^2}(LN - M^2)} \right)_u \\ & - \left(\frac{(EMN - FLN + GLM - FM^2)f_u - (EM^2 - 2FLM + GL^2)f_v}{\sqrt{EG - F^2}(LN - M^2)} \right)_v \end{aligned} \right].$$

1.5 Courbure moyenne et courbure de Gauss

Dans ce paragraphe on rappelle la notion de courbure de Gauss K_G et la courbure moyenne H .

La courbure moyenne est étroitement liée à la première variation d'aire. C'est la courbure moyenne H qui mesure la variation de l'aire lors de petites perturbations de la surface.

A la différence de H , la courbure de Gauss K_G ne dépend que de la métrique et non du plongement de la surface M dans l'espace. Deux surfaces isométriques ont donc même courbure de Gauss; (Résultat dû au théorème egregium de Gauss). La courbure de Gauss K_G est invariable par déformation isométrique de la surface.

Par contre, deux surfaces localement isométriques peuvent avoir des courbures moyennes H différentes comme par exemple une feuille de papier que l'on courbe.

1.5.1 Courbure de Gauss

Puisque M est de dimension 2, la courbure de Gauss K_G de M n'est rien d'autre que la courbure de la sectionnelle de M (il faut noter que \mathbb{R}_1^3 l'espace ambiant est plat).

Proposition 1.6. *Soit \mathbf{N} le vecteur unitaire normale à la surface M . Alors pour tout point p de M on a,*

$$K_G = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{\det II}{\det I},$$

où I et II sont respectivement, la première et la deuxième formes fondamentales de la surface M .

1.5.2 Formules de Brioschi

Dans ce paragraphe, on établit la formule de Brioschi dans \mathbb{R}_1^3 pour démontrer que la courbure de Gauss K_G de M ne dépend que des coefficients de la première forme fondamentale. Ceci nous permettra d'affirmer que : Deux surfaces localement isométriques ont la même courbure de Gauss K_G .

Lemme 1.1. :

$$K_G = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv} \rangle & \langle r_{uu}, r_u \rangle & \langle r_{uu}, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_{vv} \rangle & \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_{vv} \rangle & \langle r_v, r_u \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{bmatrix} \\ - \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle & \langle r_{uv}, r_u \rangle & \langle r_{uv}, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_{uv} \rangle & \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_{uv} \rangle & \langle r_v, r_u \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{bmatrix}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} K_G &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{\det II}{\det I} \\ &= \langle r_u \times r_v, r_u \times r_v, r_{vv} \rangle \frac{\left\langle r_{uu}, \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \right\rangle \left\langle r_{vv}, \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \right\rangle}{(\|r_u \times r_v\|^2)(EG - F^2)} \\ &\quad - \frac{\langle r_u \times r_v, r_u \times r_v, r_{vv} \rangle}{(\|r_u \times r_v\|^2)(EG - F^2)} \left\langle r_{uv}, \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \right\rangle^2 \\ &= \frac{EG - F^2}{\|r_u \times r_v\|^4} \frac{\det [r_{uu}, r_u, r_v] \det [r_{vv}, r_u, r_v] - \det [r_{uv}, r_u, r_v]^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-1(\det [r_{uu}, r_u, r_v] \det [r_{vv}, r_u, r_v] - \det [r_{uv}, r_u, r_v]^2)}{(EG - F^2)^2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\det [r_{uu}, r_u, r_v] \det [r_{vv}, r_u, r_v] = - \begin{vmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv} \rangle & \langle r_{uu}, r_u \rangle & \langle r_{uu}, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_{vv} \rangle & \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_{vv} \rangle & \langle r_v, r_u \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{vmatrix}$$

et que

$$\det [r_{uv}, r_u, r_v]^2 = - \begin{vmatrix} \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle & \langle r_{uv}, r_u \rangle & \langle r_{uv}, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_{uv} \rangle & \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_{uv} \rangle & \langle r_v, r_u \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{vmatrix},$$

d'où le résultat.

On notera dans ce qui suit que la formule Brioschi dans \mathbb{R}_1^3 est identique à celle de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Théorème 1.3. Formule Brioschi : *La courbure de Gauss K_G d'une surface est donnée par :*

$$K_G = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}Guu & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}.$$

Preuve : D'une part on a :

$$\langle r_{uu}, r_u \rangle = \frac{1}{2}E_u, \quad \langle r_{uu}, r_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \langle r_u, r_{vv} \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u,$$

$$\langle r_v, r_{vv} \rangle = \frac{1}{2}G_v, \quad \langle r_{uv}, r_u \rangle = \frac{1}{2}E_v, \quad \langle r_{uv}, r_v \rangle = \frac{1}{2}G_u.$$

D'autre part, on a :

$$\langle r_{uu}, r_{vv} \rangle - \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle = \langle r_u, r_{vv} \rangle_u - \langle r_u, r_{vvu} \rangle - \langle r_u, r_{uv} \rangle_v + \langle r_u, r_{uvv} \rangle,$$

or $r_{vvu} = r_{uvv}$, donc

$$\begin{aligned} \langle r_{uu}, r_{vv} \rangle - \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle &= \langle r_u, r_{vv} \rangle_u - \langle r_u, r_{uv} \rangle_v \\ &= [\langle r_u, r_v \rangle_v - \langle r_{uv}, r_v \rangle_u] - \frac{1}{2} \langle r_u, r_v \rangle_{uv}, \end{aligned}$$

ainsi on obtient la formule de Brioschi.

Remarque : La formule de Brioschi dans l'espace de Lorentz-Minkowski est la même que celle donnée dans l'espace euclidien.

1.5.3 Courbure moyenne

Nous définissons le vecteur de courbure moyenne comme suit : Soient $p \in M$ et e_1, e_2 une base orthogonale sur M au point p . On pose

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{2} \{ \langle e_1, e_1 \rangle II(e_1, e_1) + \langle e_2, e_2 \rangle II(e_2, e_2) \},$$

où II est la seconde forme fondamentale sur M .

Soit $H_l : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle régulière tels que

$$\mathbb{H} = H_l \mathbf{N}.$$

Proposition 1.7. *La fonction H_l définie ci-dessus est donnée par*

$$H_l = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{LG - 2FM + NE}{2|EG - F^2|}.$$

Preuve : Etant donnée $p \in M$, comme M est une surface régulière, $\{r_u, r_v\}$ forme une base de $T_p M$ le plan tangent à M au point p . On va traiter trois cas.

Premier cas : r_u est non nul, on utilise le procédé d'orthogonalité de Gram-Schmidt et on obtient une base orthogonale $\{v_1, v_2\}$ de $T_p M$; où $v_1 = r_u$ et $v_2 = r_u - \frac{E}{F}r_u$, on en déduit une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de $T_p M$ donnée par

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{r_u}{\sqrt{|E|}}, \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\left| \frac{E}{EG - F^2} \right|} \frac{Er_v - Fr_u}{E}.$$

Comme $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle H_l = \langle H, \mathbf{N} \rangle$, alors

$$H_l = \frac{1}{2} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \left\{ \langle e_1, e_1 \rangle \langle II(e_1, e_1), \mathbf{N} \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle \langle II(e_2, e_2), \mathbf{N} \rangle \right\}.$$

On peut facilement vérifier que

$$H_l = 1/2 \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \left\{ \frac{|L|}{E} + \frac{LG - 2FME + LF^2}{E(EG - F^2)} \right\} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{LG - 2FM + NE}{E(EG - F^2)}.$$

Deuxième cas : r_v est non nul alors le deuxième cas est similaire au premier cas.

Troisième cas : r_u et r_v sont non nul. $\langle r_u, r_v \rangle \neq 0$ donne $r_u + r_v$ non nulle.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt à la base $\{r_u + r_v, r_u\}$ de $T_p M$, on obtient une base orthogonale $\{V_1, V_2\}$ de $T_p M$ avec $V_1 = r_u + r_v$ et $V_2 = 1/2(r_u - r_v)$. D'où

une nouvelle base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de $T_p M$ donnée par

$$e_1 = \frac{r_u + r_v}{\sqrt{2|F|}} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{r_u - r_v}{\sqrt{2|F|}}.$$

On en déduit que

$$H_l = \frac{1}{2} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \left[\frac{L + 2M + N}{2F} - \frac{L - 2M + N}{2F} \right] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{2M}{F}.$$

Dans tous les cas on a toujours

$$H_l = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{LG - 2FM + NE}{E(EG - F^2)},$$

avec $E = G = 0$.

Conclusion : Dans les trois cas on a toujours

$$H_l = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \frac{LG - 2FM + NE}{E(EG - F^2)}.$$

Par ailleurs, d'après l'identité de Lagrange dans \mathbb{R}_1^3 on a

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \frac{EG - F^2}{|EG - F^2|}.$$

On définit la courbure moyenne de M par $H = -H_l$ donc

$$H_l = \frac{LG - 2FM + NE}{2|EG - F^2|}.$$

1.6 Transformations linéaires de Lorentz dans l'espace \mathbb{R}_1^3

Dans ce chapitre on va donner de la classification de tous les groupes Lorentziens non triviaux à un paramètre dans \mathbb{R}_1^3 .

- 1) a) $O_1(n)$ est un groupe matriciel de $GL_n(\mathbb{R})$, qui est appelé groupe de Lorentz de toutes les isométries linéaire dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^n
- b) Les éléments de $O_1(n)$ sont appelés les rotations linéaires de Lorentz.
- 2) Pour tout $A \in O_1(n)$, $\det A = \pm 1$.
- 3) $SO_1(n) = \{A \in O_1(n) : \det A = +1\}$.
- 4) $Lor(n) = \{(a_{ij}) \in SO_1(n) : a_{ij} > 0\}$.
- 5) $GL(N, \mathbb{R})$ groupe linéaire des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} .

Introduction

Définition 1.8. Soit G un sous-groupe matriciel du groupe linéaire $GL(N, \mathbb{R})$. Un groupe à un paramètre dans G est une application régulière $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ satisfaisant

$$\gamma(s+t) = \gamma(s) + \gamma(t), \text{ pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

On notera $\gamma(0) = I_n$ l'élément neutre de G .

Définition 1.9. Une transformation linéaire $L : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ qui conserve la métrique lorentzienne $\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx^2 + dy^2 + dz^2$, c'est à dire,

$$\langle LX, LY \rangle = \langle X, Y \rangle \text{ pour tout } X, Y \in \mathbb{R}_1^3,$$

est dite rotation linéaire de Lorentz (ou transformation linéaire de Lorentz). Son déterminant est égal à ± 1 comme dans le cas euclidien. L'ensemble des rotations linéaires de Lorentz, noté $O_1(3)$, est un groupe appelé groupe de Lorentz des isométries linéaires dans \mathbb{R}_1^3 . Comme

$$O_1(3) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathbb{R}_1^3 \right\}.$$

$$O_1(3) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t Q_3 A = Q_3 \right\},$$

où Q_3 est la matrice

$$Q_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $SO_1(3)$ est un sous groupe de $O_1(3)$.

Définition 1.10. Une rotation linéaire de Lorentz dans \mathbb{R}_1^3 autour d'un axe I est une isométrie de \mathbb{R}_1^3 qui laisse I invariant point par point.

On note $Lor_3(+)$ la composante connexe de l'identité du groupe $O_1(3)$.

$$Lor_3(+) = \left\{ A = (a_{ij}) \in O_1(3) : \det A = +1 \text{ et } a_{ij} > 0 \right\}.$$

Soient $v \in \mathbb{R}_1^3$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ (chose qu'on peut vérifier que toute isométrie L de $SO_1(3)$ possède une valeur propre $\lambda = 1$) et $l = Vect(\{v\})$, le sous groupe vectoriel engendré par v . Il est clair que L est une rotation linéaire de Lorentz autour de l'axe de rotation l et que l est invariant point par point par l'isométrie L .

Selon les axes de rotation soit de type temps, de type espace ou de type lumière, on

montrera dans ce qui suit, qu'une rotation de Lorentz $Lor_3(+)$ peut être décrite par l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \frac{s^2}{2} & -\frac{s^2}{2} & s \\ \frac{s^2}{2} & 1 - \frac{s^2}{2} & s \\ s & -s & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que les deux premières matrices ont une valeur propre simple ou triple égale à 1, alors que la troisième a une valeur propre triple égale à 1. De plus, $\cosh s + \sinh s$ et $\cosh s - \sinh s$ sont des valeurs propres de la deuxième matrice. En général, ces trois matrices ne sont pas semblables.

Lemme 1.2. : (Fonctions angle) Soient $f, g \in \mathcal{F}(M)$ des fonctions données. Supposons que $f^2 + g^2 = 1$ et qu'il existe un nombre réel t_0 tel que $f(0) = \cos t_0$ et $g(0) = \sin t_0$. Si $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par

$$t(u) = t_0 + \int_0^u (fg' - gf').$$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Lor(3)$ un groupe à un paramètre des rotations Lorentziennes et $A \in M(\mathcal{F}(M))$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(u) = A(u) = (a_1(u)a_2(u)a_3(u)b_1(u)b_2(u)b_3(u)c_1(u)c_2(u)c_3(u))$$

$$\in Lor(3), \det A(s) = 1, A(s+t) = A(s)A(t), A(I_n) = 0 \quad \forall u, t \in \mathbb{R}.$$

La matrice est déterminée par le type de l'axe de rotation comme suit :

1.7 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type temps

On suppose que l'axe de rotation est de type temps $l = \{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. La matrice A laisse fixe e_1 , c'est à dire, $Ae_1 = e_1$ et $\langle Ae_1, Ae_j \rangle = \langle e_1, e_j \rangle = 0, \forall j \in \{2, 3\}$; on obtient alors,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Notons que $\langle Ae_1, Ae_j \rangle = \langle e_1, e_j \rangle = \delta_j^i, \forall i, j \in \{2, 3\}$, donc

$$b_2^2 + c_2^2 = 1, b_3^2 + c_3^2 = 1, b_2b_3 + c_2c_3 = 0, b_2c_3 - c_2b_3 = 1,$$

d'où $b_2 = c_3$ et $b_3 = -c_2$.

Si le couple $\{b_2(0), c_2(0)\}$ est situé sur le cercle $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,

$b_2(0) = \cos \theta_0, c_2(0) = \sin \theta_0$ pour certain $\theta_0 \in \mathbb{R}$ Il résulte du lemme qu'il existe $\theta \in \mathcal{F}(R)$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(u) & -\sin \theta(u) \\ 0 & \sin \theta(u) & \cos \theta(u) \end{pmatrix}.$$

De la relation $A(u+v) = A(u)A(v), \forall u, v \in \mathbb{R}$, on déduit qu'il existe une fonction $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ tels que,

$$\theta(u) + \theta(v) = \theta(u+v) + 2m(u, v)\pi, \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}.$$

De toute évidence, m est constante et $m = \frac{\theta(0)}{2\pi}$ et ainsi $\theta(u+v) = \theta(u) + \theta(v) - \theta(0)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

On définit $\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tilde{\theta}(u) = \theta(u) - \theta(0)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$\tilde{\theta}$ est une fonction régulière additive ($\tilde{\theta}(u+v) = \tilde{\theta}(u) + \tilde{\theta}(v), u, v \in \mathbb{R}$), et d'après un résultat d'analyse que $\tilde{\theta}$ est une fonction linéaire et alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\theta}(u) = au$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Ainsi $\theta(u) = au + \theta(0)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme $\theta(0) = 2\pi m$ alors,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(au + \theta(0)) & -\sin(au + \theta(0)) \\ 0 & \sin(au + \theta(0)) & \cos(au + \theta(0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos au & -\sin au \\ 0 & \sin au & \cos au \end{pmatrix}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons changer la variable u de sorte que

$$A(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Remarque Dans le raisonnement ci-dessus, on utilise le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction additive et continue et $f(1) = a$ alors $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

1.8 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type espace

On suppose que l'axe des rotations l soit de type espace, $l = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. La matrice A laisse fixe e_3 , dans ce cas on a $Ae_3 = e_3$ et $\langle Ae_3, Ae_j \rangle = \langle e_3, e_j \rangle = 0, \forall j \in \{1, 2\}$.

On a alors,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus $\langle Ae_1, Ae_1 \rangle = -1 = -\langle Ae_2, Ae_2 \rangle$ et $\langle Ae_1, Ae_2 \rangle = 0$. Donc

$$a_1^2 - b_1^2 = 1, \quad b_2^2 - a_2^2 = 1, \quad b_2 b_1 + a_2 a_1 = 0, \quad \text{et } b_2 a_1 a_2 - b_1 = 1,$$

et $a_1 = b - 2$ et $a_2 = b_1$.

On considère $b_1 = \sinh \theta$, d'où

$$a_1^2 = 1 + b_1^2 = \cosh^2 \theta,$$

et ainsi

$$a_1 = \cosh \theta \text{ ou } a_1 = -\cosh \theta.$$

Comme $A(u + v) = A(u)A(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$, a_1 doit être égal à $\cosh \theta$, d'où

$$A(u) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or si θ est additive alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(u) = au$.

Si $a \neq 0$, de là on en déduit :

$$A(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

1.9 Rotation linéaire de Lorentz autour d'un axe de type lumière :

On suppose que l'axe des rotations l soit de type lumière, $l = \{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Dans ce cas on a $A(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, il s'ensuit que

$$a_2 = 1 - a_1, \quad b_2 = 1 - b_1, \quad \text{et } c_2 = 1 - c_1$$

On note que $\langle Ae_1, Ae_1 \rangle = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = -1$,

et $\langle Ae_2, Ae_2 \rangle = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = -(1 - a_1)^2 + (1 - b_1)^2 + c_1^2$.

On a ensuite $b_1 = a_1 - 1$, et $b_2 = 2 - a_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta^2}{2} & -\frac{\theta^2}{2} & a_3 \\ \frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{\theta^2}{2} & b_3 \\ \theta & -\theta & c_3 \end{pmatrix}.$$

De plus des relations $-a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = -1$ et $\langle (Ae_1 + e_2 = e_3), A(e_1 + e_2 = e_3) \rangle = 1$.
De là on en déduit $a_3 = b_3$ et $c_3^2 = 1$ (c_3 est un réel constant),

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta^2}{2} & -\frac{\theta^2}{2} & \theta \\ \frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta \\ \theta & -\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas d'avant (type espace), il existe un nombre réel a tel que $\theta(u) = au$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$ alors

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{2} & -\frac{u^2}{2} & u \\ \frac{u^2}{2} & 1 - \frac{u^2}{2} & u \\ u & -u & 1 \end{pmatrix}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

1.10 Groupe de transformation de Lorentz dans l'espace \mathbb{R}_1^3

Par une transformation de Lorentz dans \mathbb{R}_1^n , on a une isométrie dans \mathbb{R}_1^n . Comme le cas euclidien, le groupe des transformations de Lorentz dans \mathbb{R}_1^n est le produit semi direct du groupe des translations et du groupe de Lorentz $O_1(n)$.

La proposition suivante donne une classification de tous les groupes à un paramètre non triviaux des transformations de Lorentz dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 .

Proposition 1.9. *Les trois cas suivants couvrent tous les groupes à un paramètre non triviaux des transformations de Lorentz dans l'espace de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 .*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Type espace} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ tx \end{pmatrix}.$$

$$\text{Type lumiere} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{2} & -\frac{u^2}{2} & u \\ \frac{u^2}{2} & 1 - \frac{u^2}{2} & u \\ u & -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} + u \\ \frac{u^3}{3} - u \\ u^2 \end{pmatrix},$$

où t est une constante non nulle et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Notion de surface, premières définitions et Géométrie intrinsèque des surfaces

Introduction

Dans ce chapitre, on donnera

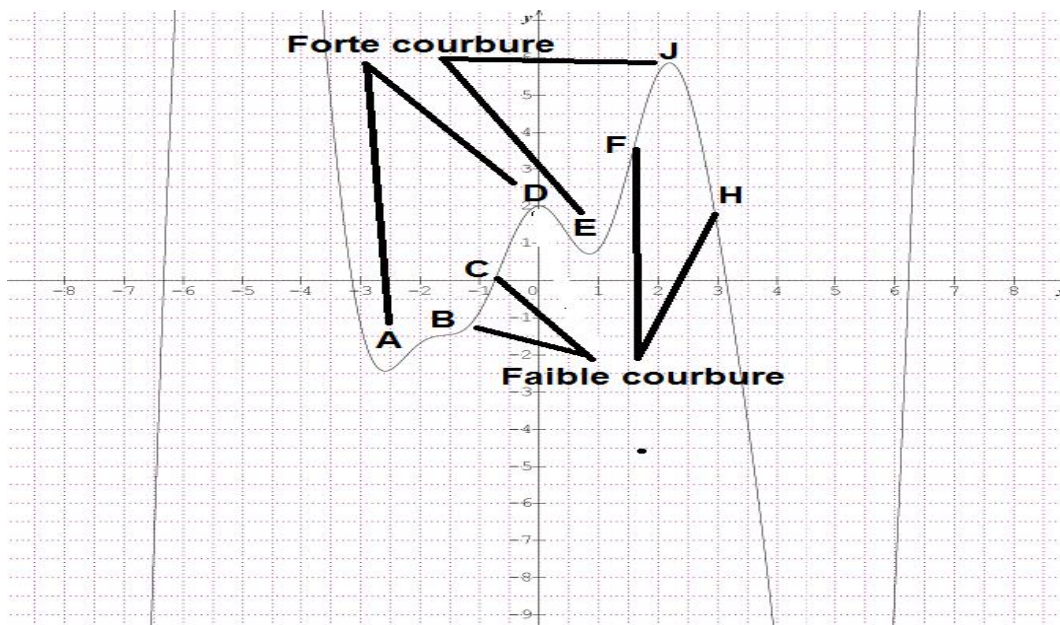
1. Notion de surface, premières définitions
2. Géométrie intrinsèque des surfaces

Définition 2.1. (Courbure) On appelle courbure d'une courbe en un point, la composante scalaire de la projection de l'accélération sur la normale à la courbe.

Imaginons une route dont le tracé aurait la forme de la courbe ci dessus.

L'automobiliste roulant sur cette route doit fortement braqué (manœuvrer le volant) aux points A, D, E et J, alors qu'il n'aura presque pas besoin de braquer aux points B, C, F et H. On dit que la courbe possède une forte " courbure " en A, D, E et J et une faible" courbure" en B, C, F et H.

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



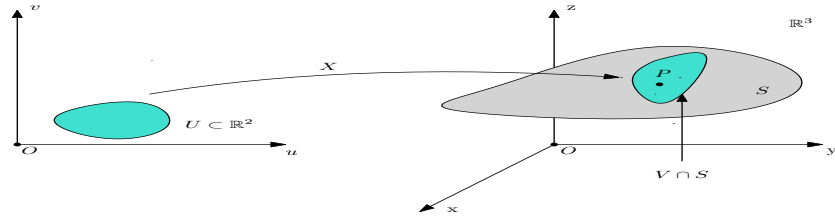
Définition 2.2. Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière si pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ de p et une application X définie dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $V \cap S$ vérifiant :

1. $X : U \rightarrow V \cap S$ est un homeomorphisme.
2. X est de classe C^1 de différentielle $dX(u) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injective en tout point $u \in U$.

L'application X s'appelle une paramétrisation (ou carte) locale de S .

Un atlas sur S est une famille de cartes locales (X_i, U_i) telle que $\bigcup_i U_i = S$.

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Remarque

- Dans la définition précédente, la première condition peut être affaiblie en supposant seulement que X est injective. En effet, le théorème d'inversion locale permet d'établir que X^{-1} est continue sur $V \cap S$.
- La deuxième condition implique en particulier que pour tout $u = (u_1, u_2) \in U$, les deux vecteurs dérivées partielles : $X_{u_1} = \frac{\partial X}{\partial u_1}$ et $X_{u_2} = \frac{\partial X}{\partial u_2}$ sont linéairement indépendants.

Exemples

1. La sphère \mathbb{S}^2 est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . On peut considérer les deux paramétrisations $X_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $N = (1, 0, 0)$ et $X_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, $S = (0, 0, -1)$, définies par

$$X_1(u) = \left(\frac{2u}{1 + |u|^2}, \frac{-1 + |u|^2}{1 + |u|^2} \right)$$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

et

$$X_2(u) = \left(\frac{2u}{1 + |u|^2}, \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2} \right).$$

Remarque

2. Dans la définition précédente, la première condition peut être affaiblie en supposant seulement que X est injective. En effet, le théorème d'inversion locale permet d'établir que X^{-1} est continue sur $V \cap S$.
3. La deuxième condition implique en particulier que pour tout $u = (u_1, u_2) \in U$, les deux vecteurs dérivées partielles : $X_{u_1} = \frac{\partial X}{\partial u_1}$ et $X_{u_2} = \frac{\partial X}{\partial u_2}$ sont linéairement indépendants.

Exemples

1. La sphère \mathbb{S}^2 est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . On peut considérer les deux paramétrisations $X_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$,

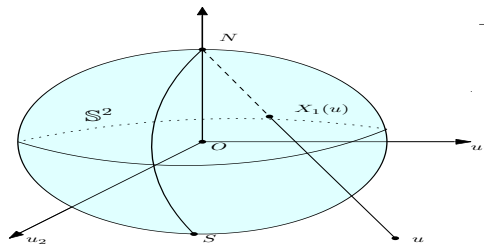


FIGURE 2.1 – La sphère \mathbb{S}^2

**CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES**

$N = (1, 0, 0)$ et $X_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, $S = (0, 0, -1)$, définies par

$$X_1(u) = \left(\frac{2u}{1 + |u|^2}, \frac{-1 + |u|^2}{1 + |u|^2} \right)$$

et

$$X_2(u) = \left(\frac{2u}{1 + |u|^2}, \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2} \right).$$

Paramétrisation polaire :

$$\begin{cases} z = a \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du \\ \rho = ak \cos t \end{cases}$$

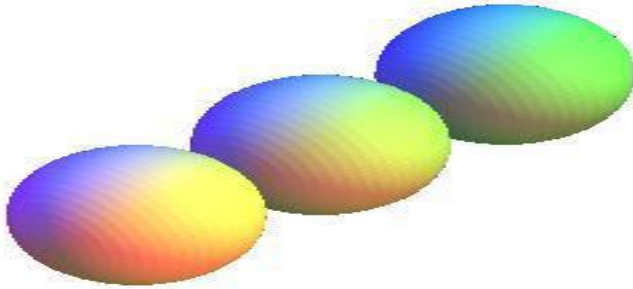
Première forme quadratique fondamentale : $(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho(d\theta)^2$.

Rayon de courbure méridien : $R_{cm} = a \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{k \cos t}$.

rayon de courbure parallèle : $R_{cp} = a \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$,

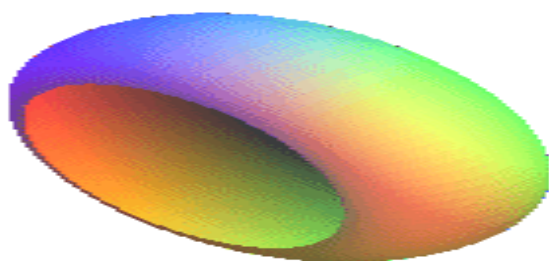
Courbure totale : $K = \frac{1}{R_{cm} R_{cp}} = \frac{1}{a^2}$,

courbure moyenne : $\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{cm}} + \frac{1}{R_{cp}} \right) = \frac{1 + k^2 \cos 2t}{2k \cos t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$.

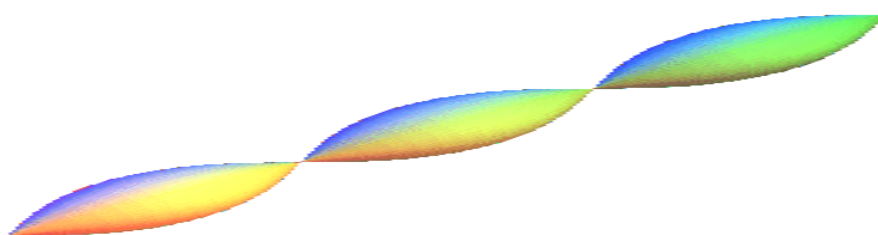


Vue du cas $k = 1$, qui donne la sphère

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Vue du cas $k > 1$

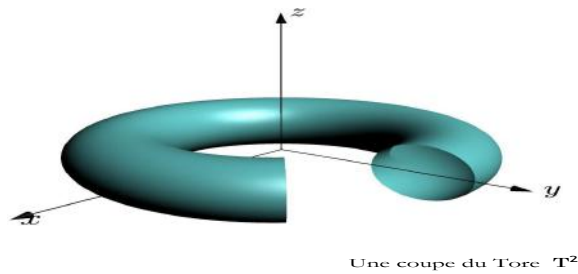
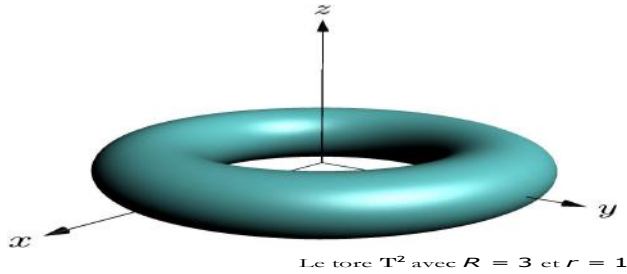


Vue du cas $0 < k < 1$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

2. Le tore \mathbb{T}^2 est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . On peut le paramétrer par l'application X considérée séparément sur $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, définie par ;

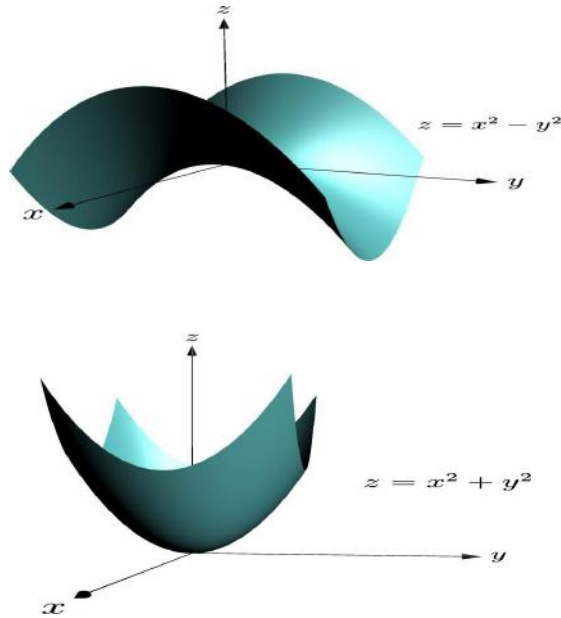
$$X(u) = \left((R+r \cos u_1) \cos u_2, (R+r \cos u_1) \sin u_2, r \sin u_1 \right), \quad u = (u_1, u_2), \quad 0 < r < R.$$



3. Pour toute fonction f de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, l'ensemble $S = \{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U \}$ est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . On dit que S est un graphe de \mathbb{R}^3 . S est ainsi paramétrée par une seule carte qui est :

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)).$$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



4. Le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ n'est pas une surface **régulière** à cause de la singularité à l'origine.

$$\text{Paramétrisation polaire : } \begin{cases} z = a \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du \\ \rho = ak \cos t \end{cases}$$

$$\text{Première forme quadratique fondamentale : } (ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho(d\theta)^2.$$

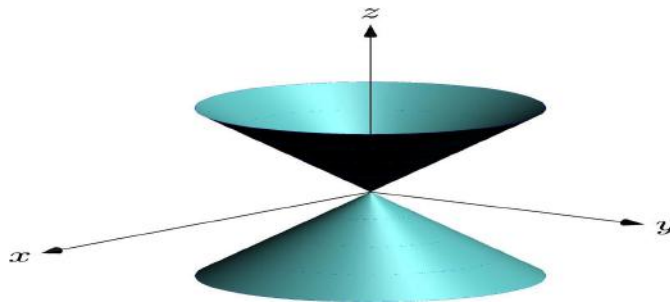
$$\text{Rayon de courbure méridien : } R_{cm} = a \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{k \cos t}.$$

$$\text{rayon de courbure parallèle : } R_{cp} = a \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

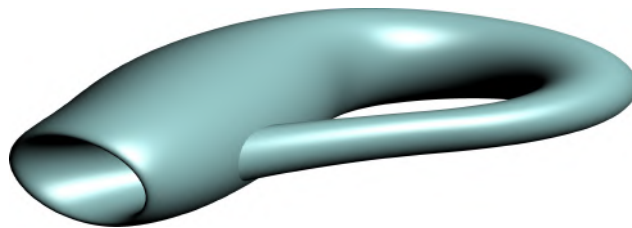
$$\text{Courbure totale : } K = \frac{1}{R_{cm} R_{cp}} = \frac{1}{a^2},$$

$$\text{courbure moyenne : } \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{cm}} + \frac{1}{R_{cp}} \right) = \frac{1 + k^2 \cos 2t}{2k \cos t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



Bouteille de Klein

5. La bouteille de Klein n'est pas une surface régulière de \mathbb{R}^3 à cause de l'auto-intersection, il s'agit néanmoins d'une surface abstraite (variété riemannienne de dimension 2).

1

6. Surface ressemblant à un hyperboloïde ;

$$\text{Paramétrisation polaire : } \begin{cases} z = a \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \cosh^2 u} du, & k \text{ quelconque} \\ \rho = ak \sinh t \end{cases}$$

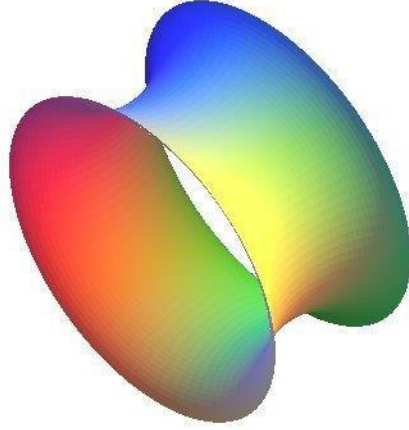
$$\text{Première forme quadratique fondamentale } (ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho(d\theta)^2.$$

$$\text{Rayon de courbure méridien : } R_{cm} = -a \frac{\sqrt{1 - k^2 \sinh^2 t}}{k \cosh t},$$

$$\text{rayon de courbure parallèle : } R_{cp} = a \frac{k \cosh t}{\sqrt{1 - k^2 \sinh^2 t}}.$$

$$\text{Courbure totale : } K = \frac{1}{R_{cm} R_{cp}} = -\frac{1}{a^2},$$

$$\text{courbure moyenne : } \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{cm}} + \frac{1}{R_{cp}} \right).$$



hyperboloïde

Nous avons vu ci-dessus que tout graphe de \mathbb{R}^3 est une surface régulière. La proposition suivante nous dit que l'inverse est localement vrai ;

Proposition 2.1. *Soit S une surface de \mathbb{R}^3 . Alors pour tout $p \in S$, il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$ de p tel que $S \cap V$ soit un graphe (après avoir permuté les coordonnées si nécessaire).*

On s'intéresse maintenant à une autre famille de surfaces, les surfaces dite de niveau.

Définition 2.3. Soit $f = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 . On dit qu'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f si pour tout $P \in \Omega$ avec $f(P) = a$, on a $\nabla f(P) \neq 0$.

Proposition 2.2. *Soit $f \in C^1(\Omega)$ et soit $a \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de f . Alors $S_a = f^{-1}(\{a\}) = \{x \in \Omega : f(x) = a\}$ est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . L'équation $f(x) = a$ est dite forme implicite de la surface S_a .*

Exemples Les formes implicites des surfaces vues dans les exemples précédents :

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pour la sphère.
- $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2(r^2 - z^2)$ pour le tore.
- $f(x, y) = z - F(x, y)$ pour une surface graphe.

2.0.1 Changement de paramétrisation

Proposition 2.3. *Soit S une surface régulière et soient (X_1, U_1) , (X_2, U_2) deux cartes locales au voisinage d'un point P . Alors l'application $X_2^{-1} \circ X_1$ est un C^1 -difféomorphisme de $X_1^{-1}(V)$ dans $X_2^{-1}(V)$, où $V = X_1(U_1) \cap X_2(U_2)$.*

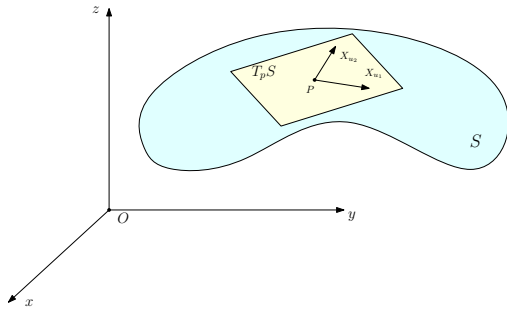
CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

L'application $X_2^{-1} \circ X_1$ ci-dessus s'appelle **application changement de paramétrisation** ou **changement de coordonnées**.

2.0.2 Plan tangent

Définition 2.4. Soit S une surface de \mathbb{R}^3 et soit $p \in S$. On appelle plan tangent à S au point p le plan de \mathbb{R}^3 engendré par les deux vecteurs $X_{u_1}(u)$ et $X_{u_2}(u)$, où $X : U \rightarrow S$ est une paramétrisation locale de S avec $u \in U$ tel que $X(u) = p$. Ce plan est indépendant du choix de la paramétrisation X , on le note $T_p S$.

Les deux vecteurs X_{u_1}, X_{u_2} sont souvent notés $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}$.
On a ainsi $T_p S = \text{Vect} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$.



2.0.3 Propriété fondamentale

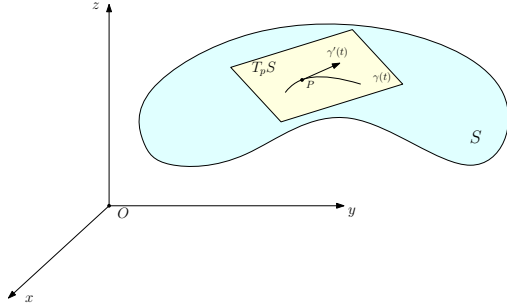
Si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ est une courbe de classe C^1 , alors $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} S$ pour tout $t \in [a, b]$.

Inversement

pour tout vecteur $V \in T_p S$, il existe une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ et $t_0 \in [a, b]$ telle que $\gamma(t_0) = p$ et $V = \gamma'(t_0)$.

Définition 2.5. Soient S_1 et S_2 deux surfaces et soit $f : S_1 \rightarrow S_2$. On dit que f est de classe C^k si pour toutes cartes locales $X_1 : U_1 \rightarrow S_1$ et $X_2 : U_2 \rightarrow S_2$, l'application $X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ est de classe C^k . On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est bijective et $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ est de classe C^k .

**CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES**



Définition 2.6. Soient S_1 et S_2 deux surfaces et soit $f : S_1 \rightarrow S_2$.

On dit que f est de classe C^k si pour toutes cartes locales $X_1 : U_1 \rightarrow S_1$ et $X_2 : U_2 \rightarrow S_2$, l'application $X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ est de classe C^k . On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est bijective et $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ est de classe C^k .

Soient S_1 et S_2 deux surfaces et soit $f : S_1 \rightarrow S_2$ de classe C^1 .

Pour chaque $p \in S_1$, on définit une application $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$, dite **différentielle** de f au point p , comme suit :

Pour tout $V \in T_p S_1$, soit $\gamma = [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S_1$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = V$. Alors $\eta = f \circ \gamma$ est une courbe sur S_2 vérifiant $\eta(0) = f(p)$. On définit alors

Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 2.4. Dans la définition précédente, $df_p(V)$ ne dépend pas du choix de la courbe γ vérifiant $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = V$.

De plus, l'application $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ est linéaire.

Remarque : Si $X : U \rightarrow S_1$ est une carte locale au voisinage de $p \in S_1$, alors on a

$$\forall i = 1, 2, \quad df_p(X_{u_i}) = \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ X) .$$

Définition 2.7. On dit qu'un vecteur $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est normal à une surface S au point $p \in S$ si $N \perp T_p S$, i.e

$\langle N, V \rangle = 0$ pour tout $V \in T_p S$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 .

Si N est un vecteur normal unitaire à S au point p , i.e $|N| = 1$, alors N est déterminé d'une façon unique au signe près, i.e si N' est un autre vecteur unitaire normal à S au point p , on a $N' = \pm N$.

On peut déterminer N en considérant une carte locale

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

$X : U \rightarrow S$ au voisinage de p . Si on pose,

$$N(X(u)) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)}{|X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)|},$$

alors N est vecteur unitaire normal à S au point $X(u)$.

On a ainsi défini une application **vecteur normal** qui est continue sur un voisinage de p (sur $X(U)$).

Inconvénient de cette application : elle n'est pas définie globalement sur toute la surface S .

Dans la suite, toutes les surfaces considérées seront supposées connexes. Un champ de vecteurs normaux sur une surface S est une application **continue** $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ telle que $N(p)$ soit normal à S en p pour tout $p \in S$.

2.0.4 Surface orientable

Définition 2.8. On dit qu'une surface S est orientable s'il existe un champ de vecteurs normaux sur S . Dans ce cas, on appelle orientation de S tout champ de vecteurs normaux unitaires sur S . Si N et N' sont deux orientations de S , on a $N' = \pm N$.

Sur une surface orientable, il n'existe que deux orientations.

Une orientation permet de définir deux faces d'une surface, **intérieur** et **extérieur** d'une surface.

Nous avons vu que si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f , alors $S = F^{-1}(\{a\})$ est une surface régulière. Il n'est pas difficile de voir que S est orientable et qu'une orientation de S est donnée par

$$p \rightarrow \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(p)|}.$$

En particulier, tout graphe $z = f(x, y)$ est une surface orientable avec

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-\nabla f(x, y), 1),$$

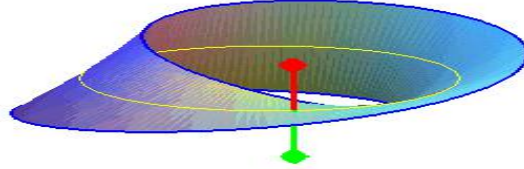
comme orientation possible.

Il existe des surfaces de \mathbb{R}^3 non orientables. La plus connue étant **la fameuse bande de Möbius** dont une paramétrisation est donnée par,

$$X(u_1, u_2) = \left((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right) \quad 0 < u < 2\pi, \quad -1 < v < 1$$

Nous avons vu que toute surface de niveau est orientable. Le théorème suivant nous dit que l'inverse est vrai.

Théorème 2.1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée orientable. Alors il existe une fonction



F qui est C^∞ sur un voisinage de S telle que 0 soit une valeur régulière de F . et

$$S = F^{-1}(\{0\}).$$

Dans le théorème précédent, on peut prendre, $f(x) = \langle x - \pi(x), N(\pi(x)) \rangle$, où π est la projection sur S qui est définie sur un voisinage tubulaire de S . Lorsque la surface est compacte, l'orientabilité est automatique.

Théorème 2.2. *Toute surface compacte $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientable.*

En particulier, toute surface compacte de \mathbb{R}^3 est une surface de niveau.

2.1 Première forme fondamentale

Dans cette section, nous allons étudier des propriétés géométriques liées à une surface en tant qu'ensemble héritant de la structure euclidienne de \mathbb{R}^3 mais indépendamment du fait que S soit une partie de \mathbb{R}^3 .

Définition 2.9. Soit S une surface de \mathbb{R}^3 . Pour tout $p \in S$, on définit une forme quadratique $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ par,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2,$$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de \mathbb{R}^3 . Cette forme quadratique est appelée **première forme fondamentale** de S .

La première forme fondamentale d'une surface S mesure la façon dont le produit scalaire de \mathbb{R}^3 est transmis à S . Cela permet d'effectuer quelques **mesures** sur S (**calcul de longueurs, mesures d'angle, calcul d'aire**) sans utiliser le fait que S soit située dans \mathbb{R}^3 .

2.1.1 Expression de la première forme fondamentale dans une carte locale

Soit $\{X_u, X_v\}$ une base de $T_p S$ associée à une carte locale X . Pour tout vecteur $W \in T_p S$, on a $W = aX_u + bX_v$, $a, b \in \mathbb{R}$, et donc

$$I(w) = \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle = Ea^2 + 2Fab + Gb^2,$$

où $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \langle X_v, X_v \rangle$ sont les coefficients de la première forme fondamentale.

Exemples

1. Soit \mathcal{P} un plan de \mathbb{R}^3 passant par un point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par deux vecteurs w_1 et w_2 qu'on suppose vérifiant $|w_1| = |w_2| = 1$, $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Alors $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$ est une carte (globale) de \mathcal{P} .
On a alors $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.
2. Sur la sphère \mathbb{S}^2 , considérons la paramétrisation

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

$(\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. On a

$$E = 1, F = 0, G = \sin^2 \theta.$$

1. L'hélicoïde H paramétrée par

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, a \cos u),$$

$a > 0, (u, v) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. On a

$$E = a^2 + v^2, F = 0, G = 1.$$

2. Soit S un graphe d'équation $z = f(x, y)$, $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Alors en prenant la paramétrisation $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ on a

$$E = 1 + f_x^2, F = f_x f_y, G = 1 + f_y^2.$$

**CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES**

2.1.2 Propriétés métriques

Soit S une surface et $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ une courbe régulière. La longueur de γ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

La connaissance de la première forme fondamentale de S permet le calcul de $|\gamma'(t)|$ sans faire référence à l'espace ambiant \mathbb{R}^3 dans lequel est plongée S . En effet, si γ est à valeurs dans l'image d'une carte locale X , et si on note par $(u(t), v(t))$ les composantes de $X^{-1} \circ \gamma$, alors on a $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$. D'où

$$|\gamma'(t)| = I(\gamma'(t)) = \sqrt{Eu'(t)^2 + Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt.$$

Dans la suite de cette section toutes les courbes sont paramétrées par l'abscisse curviligne.

Question : Etant donnés deux points A et B d'une surface S , existe-t-il une courbe γ minimisant la longueur ?

La question revient à étudier la fonctionnelle longueur

$L : (C^1([a, b]); S) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Théorème 2.3. Soit S une surface fermée de \mathbb{R}^3 . Alors pour tout $A, B \in S$, il existe une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ de classe C^1 minimisant la longueur entre A et B .

Autrement dit, pour toute courbe régulière $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ telle que $\alpha(a) = A$ et $\alpha(b) = B$, on a $L(\gamma) \leq L(\alpha)$.

Une courbe qui minimise la distance entre A et B est un point critique de la fonctionnelle L , elle vérifie automatiquement l'équation d'Euler-Lagrange associée à L :

$$\Pi_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) = 0,$$

où pour chaque $p \in S$, $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ est la projection orthogonale sur $T_p S$.

Définition 2.10. Une géodésique sur une surface S est une courbe qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange.

Remarque Le vecteur normal d'une géodésique (en tant que courbe dans \mathbb{R}^3) est toujours perpendiculaire au plan tangent à la surface.

Exemples

1. Sur la sphère \mathbb{S}^2 , les géodésiques sont les grands cercles (intersection d'un plan passant par l'origine avec la sphère).

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES

2. Sur le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, les cercles parallèles au plan Oxy ainsi que les droites parallèles à l'axe Oz sont des géodésiques.
3. Sur une surface de révolution obtenue par la courbe $(f(t), g(t))$, tous les méridiens sont des géodésiques. Une parallèle (au plan Oxy) est une géodésique si et seulement si elle est générée par un point critique de f .

Remarque : Toute courbe minimisant la longueur est une géodésique, mais l'inverse est en général faux. On peut néanmoins démontrer que toute géodésique est localement minimisant.

Soit S une surface et soit $R \subset S$ une région incluse dans l'image d'une carte locale $X : U \rightarrow S$, i.e $R \subset X(U)$. Alors l'aire de R est définie par

$$\mathcal{A}(R) = \int_{X^{-1}(R)} |X_u \wedge X_v| dudv.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la carte locale X . On peut formuler $\mathcal{A}(R)$ en fonction de la première forme fondamentale :

$$\mathcal{A}(R) = \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Que faire lorsque R n'est pas incluse dans l'image d'une carte locale ?

Supposons que R soit compacte. Alors il existe une partition de l'unité $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telle que chaque φ_i est à support dans l'image d'une carte locale X_i et

$$\sum_1^n \varphi_i = 1 \text{ sur } R.$$

où R_i est le support de φ_i .

2.2 Seconde forme fondamentale

Une surface orientée est une surface orientable sur laquelle on a choisi une orientation $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

2.2.1 Application de Gauss

Définition 2.11. Soit S une surface orientée. L'application $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ s'appelle application de Gauss de S .

La différentielle de l'application de Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ peut être considérée

**CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES**

comme application linéaire de $T_p S$ dans lui même car

$$\langle dN_p(w), N(p) \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in T_p S.$$

Proposition 2.5. *La différentielle de l'application de Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ est symétrique (ou auto-adjointe) i.e*

$$\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle \text{ pour tout } v, w \in T_p S.$$

Le fait que dN_p soit symétrique nous permet de définir une forme quadratique sur $T_p S$ par $\langle dN_p(w), w \rangle$.

Définition 2.12. La seconde forme fondamentale de la surface S est la forme quadratique définie sur $T_p S$ par

$$II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle.$$

Définition 2.13. La courbure de Gauss de S est le déterminant de dN_p et la courbure moyenne de S est égale à $-\frac{1}{2} \text{trace}(dN_p)$.

Ainsi si on note par $k_1 = \min_{|w|=1} II_p(w)$ et $k_2 = \max_{|w|=1} II_p(w)$, K la courbure de Gauss et H la courbure moyenne de S , on a

$$K = k_1 k_2 \quad , \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Les valeurs k_1 et k_2 s'appellent les courbures principales de S .

Définition 2.14. Un point p d'une surface S est dit :

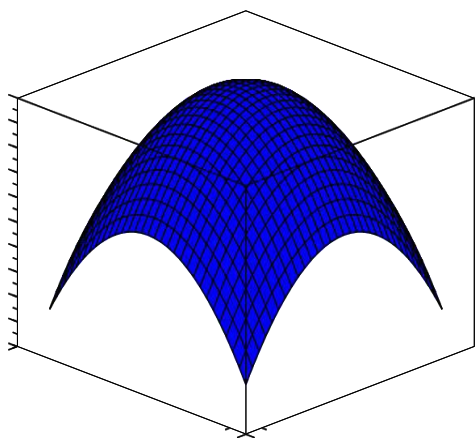
- elliptique si $K(p) > 0$
En ce point la fonction $\frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)$ définie par la figure garde un signe constant dans un voisinage du point P et l'ensemble de ces points est situé d'un côté du plan tangent au point P.
- hyperbolique si $K(p) < 0$
En ce point il existe deux lignes qui divisent le plan tangent en quatre parties distinctes. Sur chaque parties $\overrightarrow{PQ} * N$ garde un signe constant
- parabolique si $K(p) = 0$ et $dN_p \neq 0$
- planaire si $dN_p = 0$.
- ombilical si $k_1(p) = k_2(p)$.

Remarque : les courbures principales $k_1(p)$ et $k_2(p)$ sont les valeurs propres de dN_p .

Si p est un point elliptique, au voisinage de p toute la surface se trouve d'un seul côté du plan tangent au point p . Pour un point hyperbolique, tout voisinage de p (dans S) est séparée en deux parties disjointes par le plan tangent. Si X est une carte locale, on pose

$$e = -\langle dN_p(X_u), X_u \rangle, \quad f = -\langle dN_p(X_u), X_v \rangle, \quad g = -\langle dN_p(X_v), X_v \rangle.$$

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Un point est dit *elliptique* lorsque $LN - M^2 > 0$

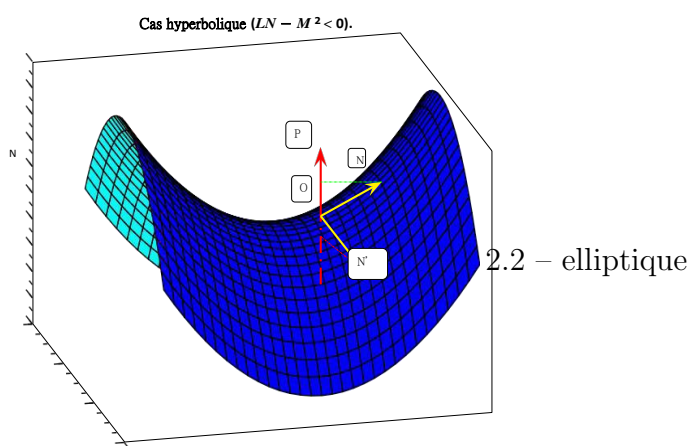
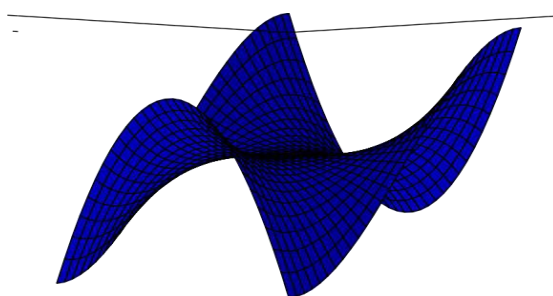


FIGURE 2.3 – hyperbolique

CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Cas planaire ($LN - M^2 = 0$ et $L^2 + M^2 + N^2 = 0$).

planaire.pdf planaire.pdf

**CHAPITRE 2. NOTION DE SURFACE, PREMIÈRES DÉFINITIONS
ET GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES**

Ainsi si $w = aX_u + bX_v$, on a $II(w) = ea^2 + 2fab + gb^2$.

Proposition 2.6. *On a*

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, X_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

et

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}.$$

Exemples

1. La sphère $\mathbb{S}^2(R)$ de rayon $R > 0$. On considère l'orientation $N(p) = -\frac{1}{R}p$.
Ainsi $dN_p(w) = \frac{1}{R}w$ pour tout $w \in T_p\mathbb{S}^2$.
On calcule donc

$$K = \det(dN_p) = \frac{1}{R^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2} \text{trace}(dN_p) = \frac{1}{R}.$$

2. La pseudo-sphère.
3. Le tore.

Définition 2.15. Soient S_1 et S_2 deux surfaces. On dit qu'une application de classe C^1 , $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ est une isométrie si pour tout $p \in S_1$ et tout $v, w \in T_pS_1$ on a

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Théorème 2.4. Theorema Egregium Soient S_1 et S_2 deux surfaces et $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie. Alors pour tout $p \in S_1$, on a $K(\varphi(p)) = K(p)$.

Chapitre **3**

Les surfaces de Translation Factorables
(TF) dans l'espace euclidien et l'espace
Lorentzien-Minkowski

Introduction

Ce chapitre traite des surfaces dites de " Translation Factorables" (TF) dans l'espace euclidien de dimensions 3 et l'espace Lorentzien-Minkowski avec la condition $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ où Δ indique l'opérateur Laplace. Notre résultat sera obtenu pour l'ensemble des théorèmes de classification et de donner une forme explicite de ces surfaces.

3.1 Préliminaires

Soit \mathbf{E}^3 l'espace Euclidien de dimensions 3, muni du produit intérieur

$$g(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

pour $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{E}^3$.

Soit \mathbf{E}_1^3 l'espace de Minkowski de dimensions 3, avec le produit scalaire donné par

$$g_L = -dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

où (x, y, z) est un système standard de coordonnées rectangulaires.

Soit $r : \mathbf{M}^2 \rightarrow \mathbf{E}_1^3$ est une immersion isométrique d'une surface dans l'espace Lorentzien-Minkowski à de dimensions 3.

La surface \mathbf{M}^2 est dite de type fini si chaque composante de son champ de vecteur de position r peut être écrite comme une somme finie de fonction propre de Laplace Δ de \mathbf{M}^2 , si

$$r = r_0 + \sum_{i=1}^k r_i.$$

Définition 3.1. ([4],[15]) Une surface M est une surface de translation, si elle peut être paramétrée par

$$x(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)). \quad (3.1.1)$$

—

CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI

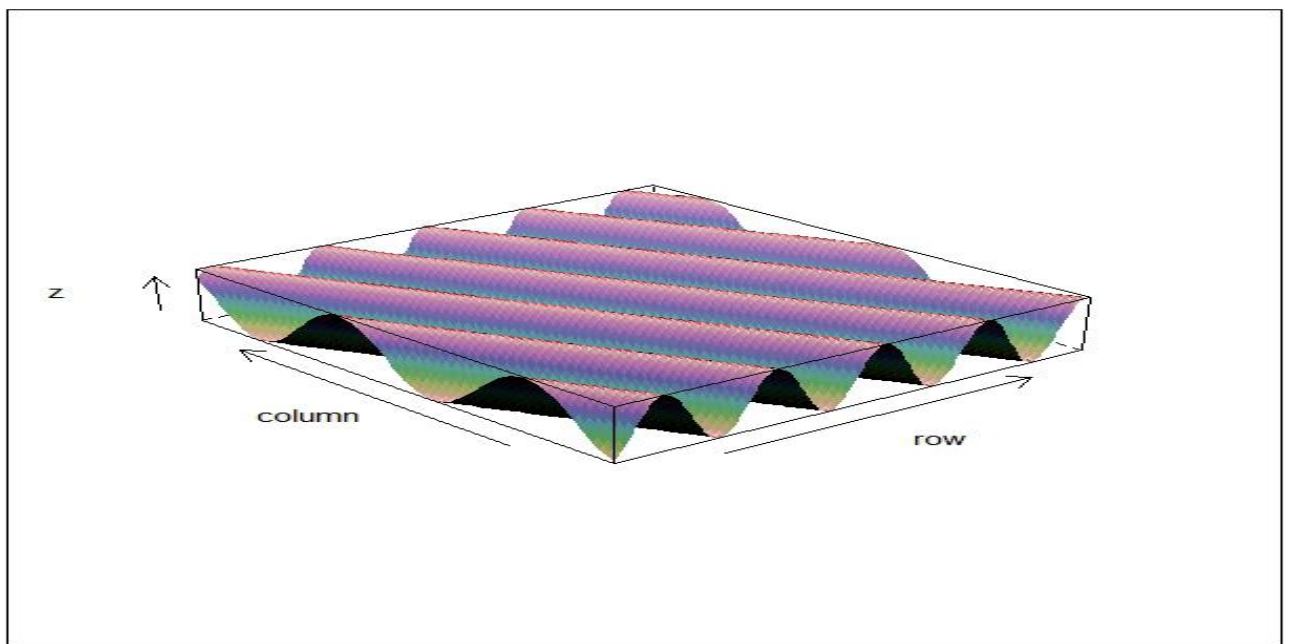
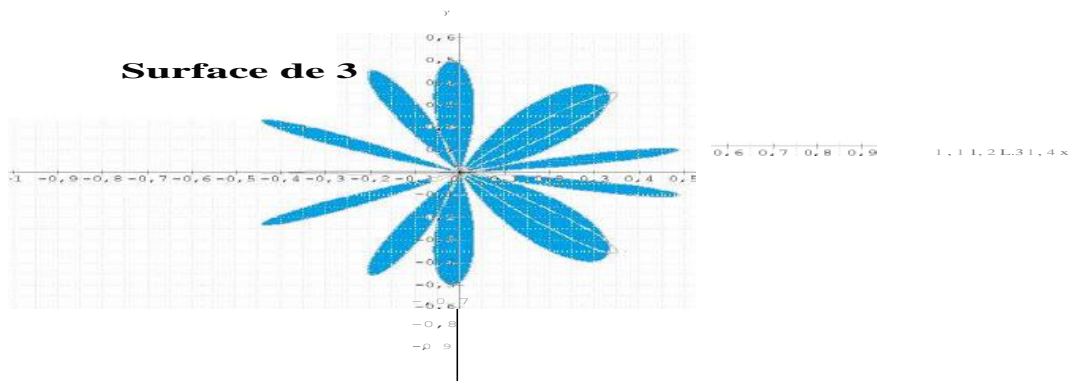


FIGURE 3.2 – Une surface factorable $S \subset \mathbb{R}^3$.

Définition 3.2. ([7], [19]) Une surface M est une surface factorable si elle peut être paramétrée par

$$x(u, v) = (u, v, f(u)g(v)). \quad (3.1.2)$$

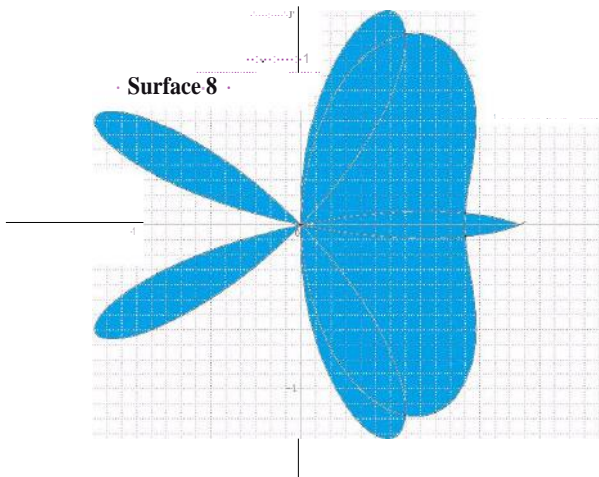


FIGURE 3.3 – Une surface $S \subset \mathbb{R}^2$.

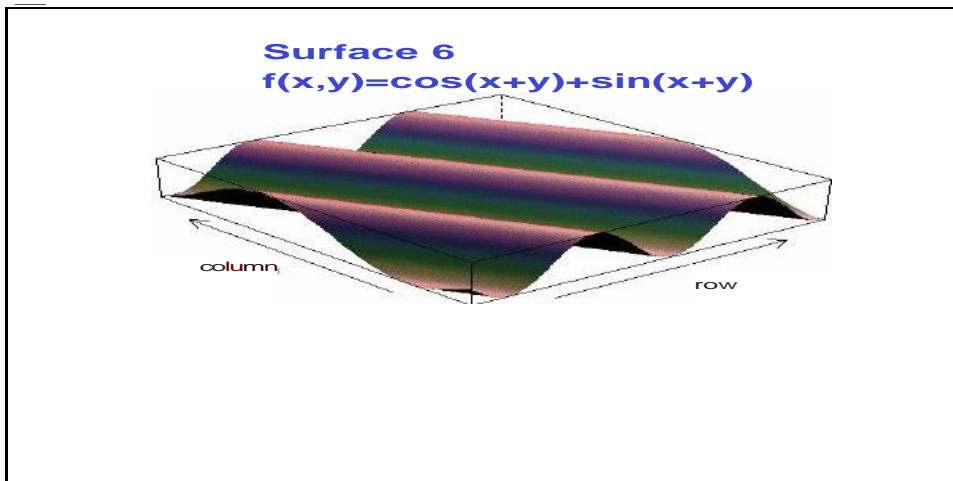


FIGURE 3.4 – Une surface de translation $S \subset \mathbb{R}^3$.

CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI

Ensuite, nous définissons une surface sur tout \mathbf{E}^3 en utilisant des définitions, on appelle la surface de type TF comme suit.

Définition 3.3. Une surface M est une surface de type TF- si elle peut être paramétrée par

$$x(u, v) = (u, v, A(f(u) + g(v)) + Bf(u)g(v)), \quad (3.1.3)$$

où A et B sont des nombres réels non-nul.

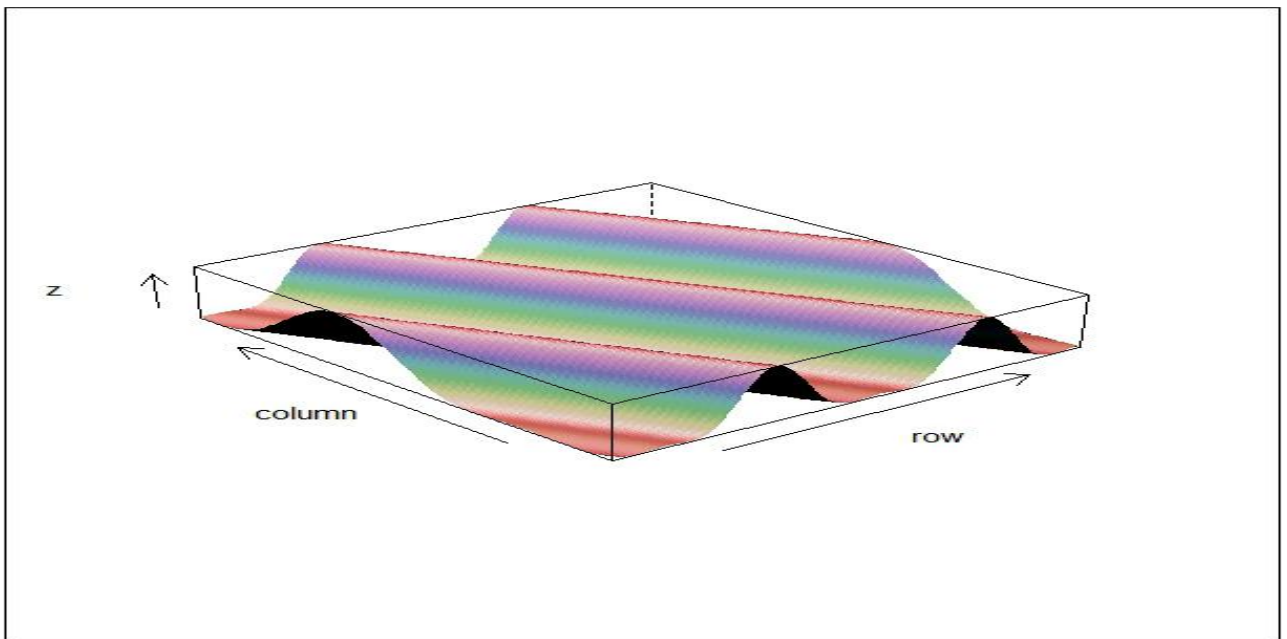
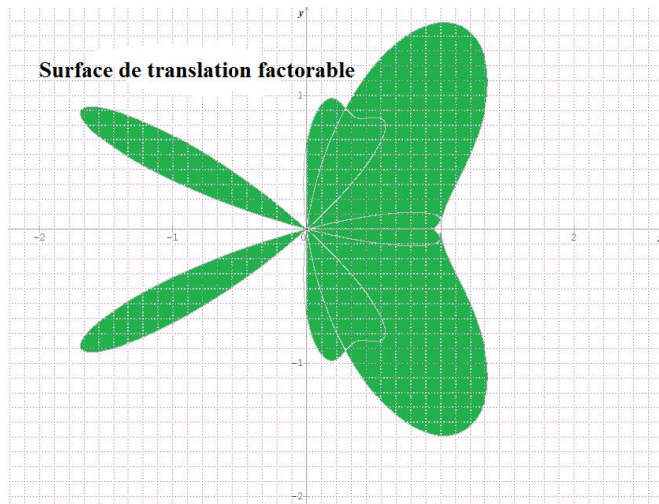


FIGURE 3.6 – Une surface TF $S \subset \mathbb{R}^3$.

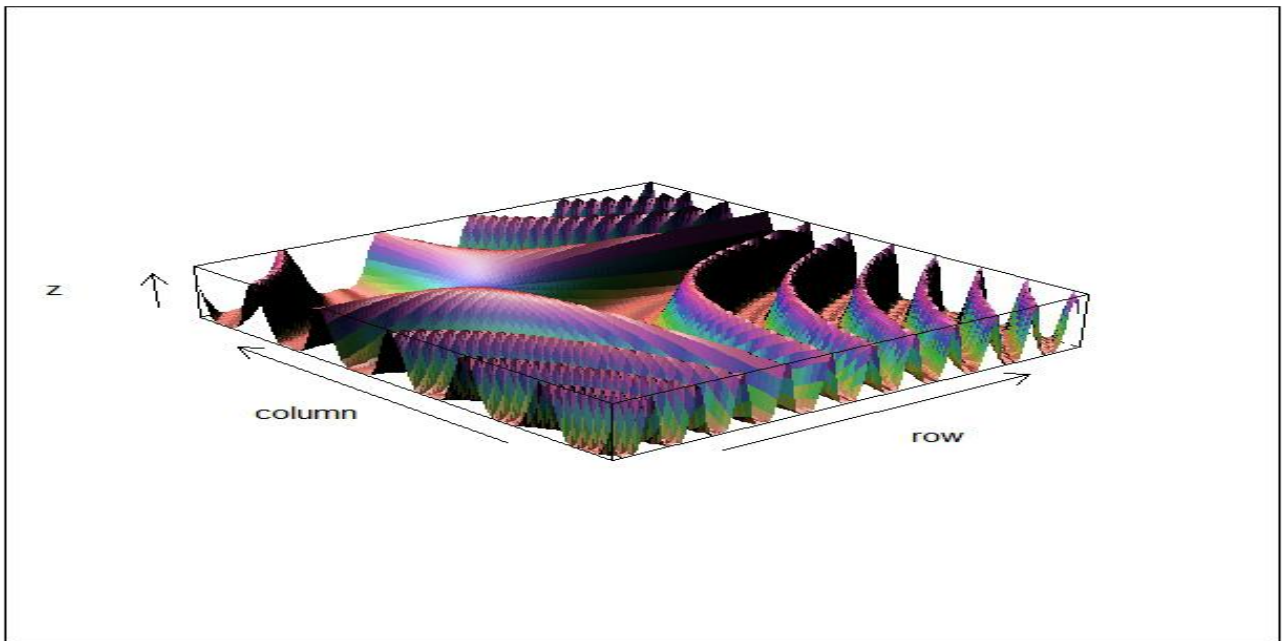


FIGURE 3.7 – Une surface TF $S \subset \mathbb{R}^3$.

**CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI**

Remarque 3.1. Dans [4], on a, si $A \neq 0$ et $B = 0$, alors la surface est une surface de translation. Dans [18], on a, si $A = 0$ et $B \neq 0$, alors la surface est un surface factorable.

Pour le vecteur $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ dans \mathbf{E}_1^3 , le produit scalaire de Lorentz et le produit croisé sont définis par :

$$g_L = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

La courbure de Gauss et la courbure moyenne sont

$$K_G = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \right), \quad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2|EG - F^2|}.$$

Soit x^i, x^j est un système de coordonnées locales de \mathbf{M}^2 .

Pour la matrice $(g_{i,j})$ ($i, j = 1, 2$) constituée des composants de la métrique induite sur \mathbf{M}^2 , on note par $(g^{i,j})$ la matrice inverse du tableau $(g_{i,j})$. Ensuite, l'opérateur de Laplace Δ en \mathbf{M}^2 est donné par

$$\Delta = \frac{-1}{\sqrt{|D|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|D|} g^{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \quad (3.1.4)$$

Un vecteur V de \mathbf{E}_1^3 est de type temps si $g_L(V, V) < 0$, de type espace si $g_L(V, V) > 0$ ou $V = 0$ et de type lumière ou nulle si $g_L(V, V) = 0$ et $V \neq 0$. Une surface dans \mathbf{E}_1^3 est de type espace, de type temps ou de type lumière si le plan tangent en tout point est de type espace, de type temps ou de type lumière respectivement [20].

3.2 Les surfaces de Translation-factorable dans \mathbf{E}^3

Dans cette section, on considère la surface dans \mathbf{E}^3 . On suppose que \mathbf{M}^2 est équivalent à

$$r(u, v) = (u, v, f(u)g(v) + f(u) + g(v)). \quad (3.2.1)$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = (f'g + f')^2 + 1, \quad F = (f'g + f')(fg' + g'), \quad G = (fg' + g')^2 + 1, \\ \mathbf{N} = \frac{1}{W}(-f'g - f', -fg' - g', 1), \quad (3.2.2)$$

les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$L = \frac{f''g + f''}{W}, \quad M = \frac{(f'g + f')(fg' + g')}{W}, \quad N = \frac{fg'' + g''}{W},$$

*CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI*

où $W = \sqrt{(f'g + f')^2 + (fg' + g')^2 + 1}$.

Le Laplacien Δ de \mathbf{M}^2 est donné par

$$\Delta = \frac{1}{W^2} \left(E \frac{\partial^2}{\partial v^2} + G \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \right) + \frac{2H}{W} \left((f'g + f') \frac{\partial}{\partial u} + (fg' + g') \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (3.2.3)$$

$$\Delta u = \lambda_1 u; \quad \Delta v = \lambda_2 v; \quad (3.2.4)$$

$$\Delta(f(u)g(v) + f(u) + g(v)) = \lambda_3(f(u)g(v) + f(u) + g(v)).$$

En utilisant (0.0.1) et (3.2.2) on a

$$2(f'g + f')H = W\lambda_1 u. \quad (3.2.5)$$

$$2(fg' + g')H = W\lambda_2 v. \quad (3.2.6)$$

$$2H = -W\lambda_3(fg + f + g). \quad (3.2.7)$$

Ensuite, on explore la classification des surfaces de Translation-Factorable \mathbf{M}^2 satisfaisant (0.0.1).

Premier cas : Soit $\lambda_3 \neq 0$.

1. si $fg + f + g = 0$, alors $H = 0$.

2. si $fg + f + g \neq 0$, on a :

(k_1) si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, les equations (3.2.5) et (3.2.6) impliquent que

$$f(u) = a \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad g' \neq 0 \quad \text{et} \quad H = \frac{(a+1)g''}{2W^3}.$$

Le système d'équations (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) devient,

$$(1+a)^2 g' g'' = \lambda_2 v ((a+1)^2 g'^2 + 1)^2. \quad (3.2.8)$$

$$(1+a)g'' = -\lambda_3(ag + a + g)((a+1)^2 g'^2 + 1)^2. \quad (3.2.9)$$

L'équation (3.2.9) est équivalente à

$$g(v) = \frac{1}{(a+1)} \left(-a \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

D'où la surface \mathbf{M}^2 peut être exprimée par

$$r \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

(k_2) si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$. Les équations (3.2.5) et (3.2.6) impliquent que

$$f(u) = c \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad g' \neq 0 \quad \text{et} \quad H = \frac{(c+1)f''}{2W^3}.$$

Le système d'équations (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7), dans ce cas prend la forme

$$(1+c)^2 f' f'' = \lambda_2 u ((c+1)^2 f'^2 + 1)^2. \quad (3.2.10)$$

$$(1+c)f'' = -\lambda_3 (cf + c + f)((c+1)^2 f'^2 + 1)^2. \quad (3.2.11)$$

Équation (3.2.11) est équivalente à

$$f(u) = \frac{1}{(a+1)} \left(-a \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

Par conséquent, la surface \mathbf{M}^2 peut être exprimé par

$$r \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

(k_3) si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Les equations (3.2.5) et (3.2.6) impliquent que

$$f' \neq 0 \quad \text{et} \quad g' \neq 0.$$

On multiplie l'équation (3.2.5) par $f'g' + g'$ et l'équation (3.2.6) par $f'g + f'$, on obtient

$$\frac{(f+1)}{f'} \lambda_1 u = \frac{(g+1)}{g'} \lambda_2 v = e, \quad e \in \mathbb{R}^*. \quad (3.2.12)$$

Les equations (3.2.5) et (3.2.7) impliquent que

$$\lambda_1 u = -\lambda_3 (fg + f + g)(f'g + f). \quad (3.2.13)$$

En Utilisant des équations (3.2.12) et (3.2.13), on déduit

$$-\lambda_3 (fg + f + g)^2 = e. \quad (3.2.14)$$

Les fonctions f et g sont constantes, donc il n'y a pas de surfaces de Translation-Factorable dans ce cas satisfaisant (0.0.1).

**CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI**

(k_4) si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ les équations (3.2.5) and (3.2.6) impliquent que :

$$f' = 0 \quad \text{et} \quad g' = 0.$$

Donc $\lambda_3 = 0$. Par conséquent, il n'y a pas de surfaces de Translation-Factorable dans ce cas satisfaisant (0.0.1).

Deuxième cas : Soit $\lambda_3 = 0$. alors, l'équation (3.2.7) donne lieu à $H = 0$ ce qui signifie que les surfaces sont minimales. On obtient aussi par les équations (3.2.5) et (3.2.6); $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Enfin.

Théorème 3.1. Soit M^2 surface de Translation-Factorable (TF) donnée par (3.2.1) dans E^3 . alors M^2 satisfait $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, ($i=1;2;3$) si et seulement si :

1. M^2 n'a pas de courbure moyenne.

2. M^2 est paramétrée par

$$\left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

3. M^2 est paramétrée par

$$\left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (-1 < -\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 0).$$

3.3 Les surfaces de Translation-Factorable dans E_1^3

Dans cette section, on considéré des surfaces dans E_1^3 et on explore la classification des Translations-Factorables satisfaisant (0.0.1). On distingue $EG - F^2 > 0$ ou $EG - F^2 < 0$.

On suppose que M^2 est donnée (3.2.1), les coefficients de la première et la seconde formes fondamentale sont

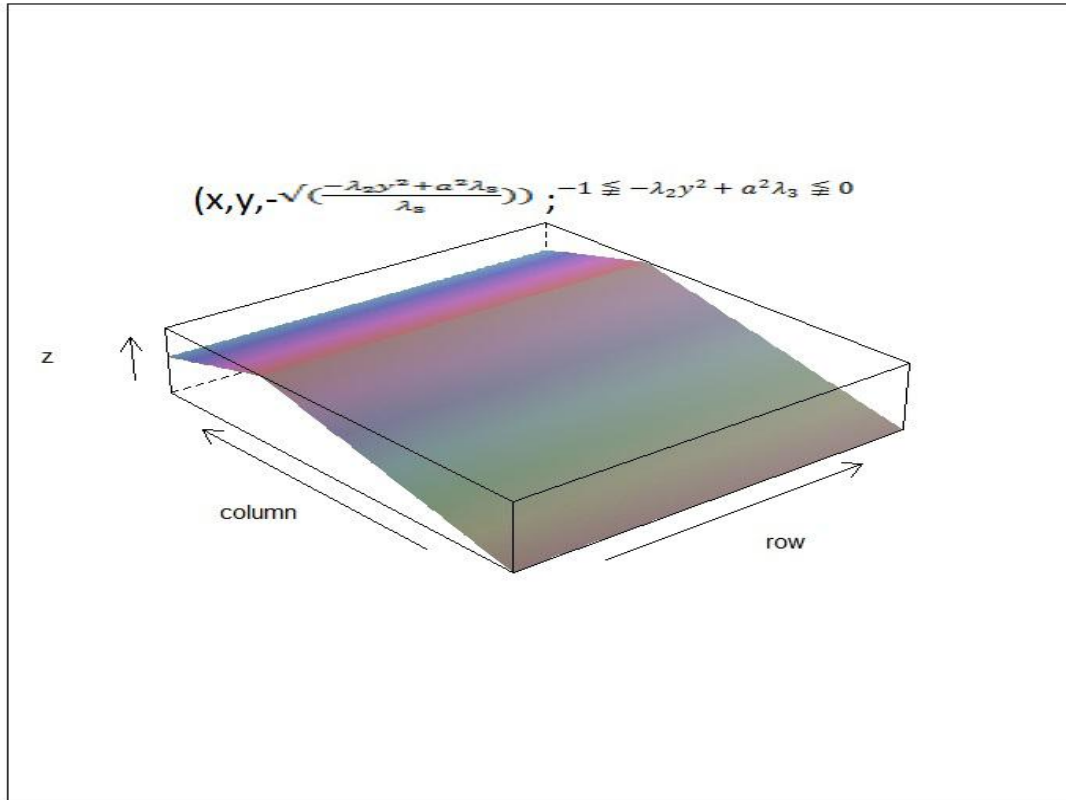
$$E = (f'g + f')^2 - 1; \quad F = (f'g + f')(fg' + g'); \quad G = 1 + (fg' + g')^2 \quad (3.3.1)$$

et

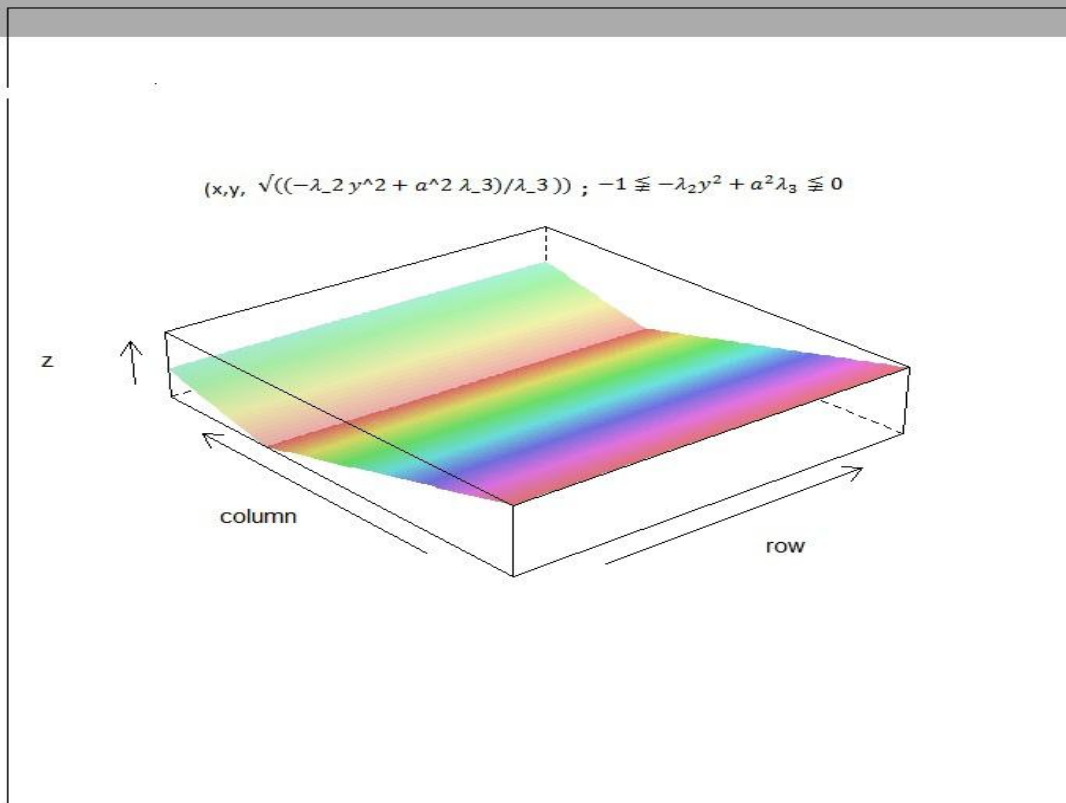
$$L = \frac{f''g + f''}{W}; \quad M = \frac{(f'g + f)(fg' + g')}{W}; \quad N = \frac{fg'' + g''}{W}.$$

La courbure moyenne H est

$$H = 1/2W^{-3}H_1,$$



Une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$.



Une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$.

où

$$H_1 = (1 + (fg' + g')^2)(f''g + f'') + (f'g + f')^2 - 1)(fg'' + g'') \\ - 2(f + 1)(g + 1)f'^2g'^2.$$

3.3.1 Les surfaces de Translation-Factorable de type espace dans \mathbf{E}_1^3

On explore les surfaces de Translation-Factorable de type espace dans \mathbf{E}_1^3 . Si on utilise (3.1.4), le Laplacien Δ de \mathbf{M}^2 est donné par

$$\Delta = \frac{1}{W^2} \left(E \frac{\partial^2}{\partial v^2} + G \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \right) \\ - \frac{2H}{W} \left((fg' + g') \frac{\partial}{\partial v} - (f'g + f') \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad (3.3.2)$$

où $W = \sqrt{EG - F^2}$.

On suppose que

$$EG - F^2 = (f'g + f')^2 - (fg' + g')^2 - 1 > 0,$$

d'où la métrique de \mathbf{M}^2 est de type espace. Puis en utilisant (0.0.1), (3.3.1) et (3.3.2) on aboutit à

$$W^{-4}(f'g + f')H_1 = \lambda_1 u. \quad (3.3.3)$$

$$W^{-4}(fg' + g')H_1 = -\lambda_2 v. \quad (3.3.4)$$

$$W^{-4}H_1 = \lambda_3(fg + f + g). \quad (3.3.5)$$

Premièrement, on examine la classification des surfaces de Translation-Factorable de type espace \mathbf{M}^2 satisfaisant (0.0.1).

Premier cas : Soit $\lambda_3 = 0$, puis, l'équation (3.3.5) donne lieu à $H_1 = 0$ ce qui signifie que les surface sont minimales. On obtient l'équations (3.3.3) et (3.3.4) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Deuxieme cas : Soit $\lambda_3 \neq 0$, alors $H_1 \neq 0$ et par conséquent on a nécessairement par l'équation (3.3.3) $\lambda_1 \neq 0$.

i) Si $\lambda_2 = 0$ on a (3.3.4), alors $g(v) = a$, $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Dans ce cas, le système d'équations (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5) prend la forme

$$(a + 1)^2 f' f'' = \lambda_1 u ((a + 1)^2 f'^2 - 1)^2. \quad (3.3.6)$$

$$(a + 1) f'' = \lambda_3 (af + f + a) ((a + 1)^2 f'^2 - 1)^2. \quad (3.3.7)$$

**CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI**

En utilisant l'équation (3.3.7), on a

$$f(u) = \frac{1}{(a+1)} \left(-a \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad \text{tel que } \lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 1.$$

Alors la paramétrisation des surfaces peut être écrite sous la forme

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right).$$

ii) If $\lambda_2 \neq 0$ on peut réécrire le système comme suit

$$\begin{cases} \lambda_2 v (fg + g + f) = -a (fg' + g') \\ \lambda_1 u (fg + g + f) = a (f'g + f') \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Les équations (3.3.2) et (3.3.3) ($a \neq -1$) impliquent que

$$\lambda_1 u = \lambda_3 (fg + f + g) (f'g + f'). \quad (3.3.9)$$

De (3.3.8) et (3.3.9) on obtient

$$a = \lambda_3 (fg + f + g)^2.$$

Par conséquent, les fonctions f et g sont constantes en supposant qu'il n'y a pas de surfaces de Translation-Factorable dans ce cas satisfaisant (0.0.1). Ainsi, on peut donner les résultats suivants.

Théorème 3.2. *Soit \mathbf{M}^2 une Translation-Factorable (TF) de type espace donnée (3.2.1) dans \mathbf{E}_1^3 . Puis \mathbf{M}^2 satisfaisant $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, ($i=1;2;3$) si et seulement si :*

1. \mathbf{M}^2 n'a pas de courbure moyenne.
2. \mathbf{M}^2 est paramétré ainsi

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (0 < \lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 1).$$

3.3.2 Les surfaces de Translation-Factorable de type temps dans \mathbf{E}_1^3

Dans cette section, on traite les surfaces de translation-factorable de type temps dans \mathbf{E}_1^3 .

*CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI*

Si on utilise (3.1.4) , le Laplacien Δ de \mathbf{M}^2 est donné par

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{W^2} \left(E \frac{\partial^2}{\partial v^2} + G \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \right) \\ & - \frac{2H}{W} \left((fg' + g') \frac{\partial}{\partial v} - (f'g + f') \frac{\partial}{\partial u} \right), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

où $W = \sqrt{F^2 - EG}$.

En admettant que $EG - F^2 = (f'g + f')^2 - (fg' + g')^2 - 1 < 0$, la métrique de \mathbf{M}^2 est de type temps.

Puis en utilisant (3.3.10) et (3.3.1) on a

$$\begin{cases} \Delta(u) = -W^{-4}(f'g + f')H_1, \\ \Delta(v) = W^{-4}(fg' + g')H_1, \\ \Delta(fg + f + g) = -W^{-4}H_1. \end{cases} \quad (3.3.11)$$

Par conséquent

$$\Delta r = W^{-4}H_1(-f'g + f', fg' + g', -1). \quad (3.3.12)$$

par (0.0.1) et (3.3.11) on obtient le système suivant d'équations différentielles

$$W^{-4}(f'g + f')H_1 = -\lambda_1 u. \quad (3.3.13)$$

$$W^{-4}(fg' + g')H_1 = \lambda_2 v. \quad (3.3.14)$$

$$W^{-4}H_1 = \lambda_3(fg + f + g). \quad (3.3.15)$$

On explore la classification des surfaces de translation-Factorable de type temps \mathbf{M}^2 satisfaisant (1.1).

Premier cas : Soit $\lambda_3 = 0$, alors, l'équation (3.3.16) donne lieu à $H_1 = 0$, ce qui signifie que les surfaces sont minimales. Nous avons aussi par les équations (3.3.14) et (3.3.15) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Deuxième cas : Soit $\lambda_3 \neq 0$.

1. si $fg + f + g = 0$, puis $H_1 = 0$.
2. si $fg + f + g \neq 0$, dans ce cas, nous avons :

a) si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ les équations (3.3.14) et (3.3.15) impliquent que :

$$f' = 0, \quad g' \neq 0, \quad \text{et } g'' \neq 0,$$

*CHAPITRE 3. LES SURFACES DE TRANSLATION FACTORABLES (TF)
DANS L'ESPACE EUCLIDIEN ET L'ESPACE LORENTZIEN-MINKOWSKI*

il s'ensuit que $f(u) = a$, $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$ et $g'(v)$ est une fonction qui n'est pas constante. le système (3.3.14), (3.3.15) et (3.3.16) est équivalent à

$$-(a+1)^2 g' g'' = \lambda_2 v ((a+1)^2 g'^2 + 1)^2. \quad (3.3.16)$$

$$(a+1) g'' = \lambda_3 (ag + g + a) ((a+1)^2 f'^2 + 1)^2. \quad (3.3.17)$$

Les équation (3.3.17) impliquent

$$g(v) = \frac{1}{(a+1)} \left(-a \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad \text{tel que } 0 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 1.$$

Ainsi, la paramétrisation des surfaces peut être écrite sous la forme :

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right) \quad \text{tel que } 0 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 1$$

ii) si $\lambda_2 = 0$ et $-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 \neq 0$ puis

$$g' = 0, \quad f' \neq 0, \quad f'' \neq 0.$$

Le système (3.3.14), (3.3.15) et (3.3.16) est réduit de manière équivalente à

$$-(a+1)^2 g' g'' = \lambda_1 u ((a+1)^2 g'^2 + 1)^2 \quad (3.3.18)$$

$$-(a+1) f'' = \lambda_3 (af + f + a) (1 - (a+1)^2 f'^2)^2 \quad (3.3.19)$$

Par consequent

$$f(u) = \frac{1}{(a+1)} \left(-a \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{2\lambda_3}} \right), \quad \text{tel que } 0 < \lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 1,$$

alors la paramétrisation des surfaces peut être écrite sous la forme

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad \text{tel que } \lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 1.$$

c) si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. on a :

i) si $f' = g' = 0$, implique que $H_1 = 0$. De (3.3.16), on obtient $\lambda_3 = 0$, ce qui est une contradiction.

ii) si $f' = 0$ et $g' \neq 0$, puis (3.3.15) donne $g = 0$, ce qui est une contradiction.

iii) si $f' \neq 0$ et $g' = 0$, puis (3.3.14) donne $g = 0$, ce qui est une contradiction.

3) si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, puis

$$f' \neq 0 \quad g' \neq 0,$$

On multiplie l'équation (3.3.14) par $g'f + g'$ et (3.3.15) par $f'g + f'$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_2 v(fg + g + f) = a(fg' + g') \\ \lambda_1 u(fg + g + f) = -a(f'g + f'). \end{cases} \quad (3.3.20)$$

Les equations (3.3.14) et (3.3.14) ($a \neq -1$) impliquent

$$\lambda_1 u = \lambda_3(fg + f + g)(f'g + f'). \quad (3.3.21)$$

De (3.3.20) et (3.3.21) on a

$$-a = \lambda_3(fg + f + g)^2,$$

la fonctions f et g sont des constantes et donc il n'y a pas de surfaces de Translation-Factorable dans ce cas satisfaisant (0.0.1). Ainsi, nous pouvons donner le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Soit \mathbf{M}^2 une surface de Translation-Factorable (TF) de type temps donnée par (3.2.1) dans \mathbf{E}_1^3 . Alors \mathbf{M}^2 satisfait $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, ($i=1;2;3$) si et seulement si :*

- (1) \mathbf{M}^2 n'a pas de courbure moyenne.
- (2) \mathbf{M}^2 est paramétré comme

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (0 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 1).$$

- (3) \mathbf{M}^2 est paramétré comme

$$r(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad (0 < \lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 1).$$

Bibliographie

- [1] *L. J. Alias, A. Ferrandez and P. Lucas*, Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta x = Ax + B$, Pacific J. Math. 156 (1992), 201-208.
- [2] *M.E.Aydin, A.O.Ogrenmis and M.Ergut*, Classification of factorable surfaces in the pseudo- Galilean 3-space, Glasnik Matematički, 50(70) (2015), 441-451.
- [3] *C. Baba-Hamed and M. Bekkar*, Helicoidal surfaces of revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i$, Int. J. Geom. 100(2011), 1-10.
- [4] *C. Baba-Hamed, M. Bekkar and H. Zoubir*, Translation surfaces of revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no. 17, 797-808.
- [5] *C. Baikoussis and L. Verstraelen*, On the Gauss map of helicoidal surfaces, Rend. Sem. Math. Messina Ser. II, 2(16) (1993), 31-42.
- [6] *M. Bekkar and B. Senoussi*, Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta^{III}r_i = \mu_i r_i$ J. Geom., 103(2012), 367-374.
- [7] *M. Bekkar and B. Senoussi*, Factorable surfaces in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i$, Int. J. Geom. 103 (2012), 17-29.
- [8] *M. Bekkar and H. Zoubir*, Surfaces of revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta r^i = \lambda^i r^i$, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 24, 1173-1185.
- [9] *G. Kaimakamis and B.J. Papantoniou*, Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II}\vec{r} = A\vec{r}$ J.Geom.81(2004), 81-92.
- [10] *B. Chen*, Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, Singapore, 1983.
- [11] *B.Y. Chen*, A report on submanifold of finite type, Soochow J. Math. 22 (1996), 117-337.
- [12] *M. Choi*, On the Gauss map of surfaces of revolution in a 3-dimensional Minkowski space, Tsukuba J. Math. 19 (1995), 351-367.

-
- [13] *F. Dillen, J. Pas and L. Vertraelen*, On surfaces of finite type in Euclidean 3-space, *Kodai Math. J.* 13 (1990), 10-21.
- [14] *O. J. Garay*, An extension of Takahashi's theorem, *Geom. Dedicata* 34 (1990), 105-112.
- [15] *H. Liu*, Translation surfaces with dependent Gaussian and mean curvature in 3-dimensional spaces. (Chinese) *J. Northeast Univ. Tech.* 14 (1) (1993), 88-93.
- [16] *H. Liu*, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. *J. Geom.* 64 (1-2) (1999), 141-149.
- [17] *R. Lopez*, Minimal translation surfaces in hyperbolic space. *Beitr. Algebra Geom.* 52 (1) (2011), 105-112.
- [18] *R. Lopez and M. Moruz*, Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature, *J. Korean Math. Soc.* 52(3) (2015), 523-535.
- [19] *H. Meng and H. Liu*, Factorable Surfaces in Minkowski 3-Space, *Bull. Korean Math. Soc.* 46(1) (2009), 155-169.
- [20] *H. Sachs*, *Isotrope Geometrie des Raumes*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1990.
- [21] *B. Senoussi and M. Bekkar*, Helicoidal surfaces with $\Delta^J r = Ar$ in 3-dimensional Euclidean space, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 60(3) (2015), 437-448.
- [22] *I. Van de Woestyne*, New characterization of the helicoids, *Geometry and topology of submanifolds, V* (Leuven/Brussels, 1992), 267—273, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [23] *Y. Yu and H. Liu*, The factorable minimal surfaces, *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry*, 33-39, Kyungpook Nat. Univ., Taegu, 2007.