

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djillali Liabes

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



Thèse de doctorat en sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Sciences des Matériaux

Présentée par

DAIKH AHMED AMINE

Intitulée

VIBRATION LIBRE ET FLAMBEMENT DES STRUCTURES SANDWICHES EN FGM

Soutenue le devant le Jury :

REFASSI Kaddour	Professeur	UDL SBA	Président
MEGUENI Abdelkader	Professeur	UDL SBA	Directeur de thèse
BOUCHIKHI Aboubakar Seddik	MCA	UDL SBA	Examineur
ELMEICHE Nouredine	Professeur	U. MASCARA	Examineur
YEGHNEM Redha	MCA	U. SAIDA	Examineur
REZGANI Laïd	MCA	U. SAIDA	Examineur

Année Universitaire 2017-2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ إِنِّي أَسْأَلُكَ عِلْمًا نَافِعًا، وَأَعُوذُ بِكَ مِنْ عِلْمٍ لَا يَنْفَعُ

Dédicace

لى زوجتي، ولدي، أمي، أبي، عائلتي وكل عزيز علي.

À ma femme, islamo, ma mère, mon père, ma famille et tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie particulièrement mon encadreur, monsieur MEGUENI Abdelkader pour son suivi constitutif, ses précieux conseils et sa disponibilité durant toute notre formation ainsi que lors de la préparation de ce mémoire, et je tien lui adresser mes vifs remerciements les plus respectueux.

Je tiens également à remercier les membres du jury, monsieur REFASSI Kaddour, professeur à l'université de Sidi Bel Abbes, monsieur BOUCHIKHI Aboubakar Seddik, maitre de conférences à l'université de Sidi Bel Abbes, monsieur ELMEICHE Nouredine, professeur à l'université de Mascara, monsieur YEGHNEM Redha, maitre de conférences à l'université de Saida et monsieur REZGANI Laïd, maitre de conférences à l'université de Saida d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes vifs remerciements vont aussi à mes professeurs de département de génie mécanique qui n'ont ménagé aucun effort pour nous transmettre leurs précieuses connaissances.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire mécanique des structures et des solides « LMSS » et aux personnels du département de Génie Mécanique de l'Université de Sidi Bel Abbes, et également aux membres de ma famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse.

Abmed Amine Daikh

RESUME

La vibration libre et le flambement thermique des structures sandwichs fonctionnellement graduées (FGM) sont présentés dans cette thèse. Deux types des structures sandwichs FGM sont considérées, des couches de face homogènes avec un cœur en FGM et des couches de face FGM avec un cœur homogène. Les propriétés des matériaux et le coefficient de dilatation thermique des couches FGM sont supposés varier continuellement dans l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple (P-FGM) ou selon une fonction sigmoïde (S-FGM) en termes de fractions volumiques des constituants. Les équations d'équilibre et de stabilité du sandwich FGM avec des conditions aux limites simplement appuyées sont dérivées en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. L'influence de la géométrie de la structure, de l'indice de gradient et des conditions de charge thermique sur la fréquence de vibration et la température critique de flambement du sandwich FGM est étudiée. Pour le flambement thermique, les charges thermiques sont supposées être uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Une nouvelle solution simple pour le flambement thermique des structures sandwichs FGM sous une charge thermique non linéaire est présentée.

Mots-Clés : Structure sandwich FGM ; Vibration libre ; Flambement thermique ; Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

ABSTRACT

Free vibration and thermal buckling of functionally graded sandwich structures are presented in this thesis. Two common types of FGM sandwich structures, namely, homogeneous face layers with FGM core and FGM face layers with homogeneous core are considered. Material properties and thermal expansion coefficient of FGM layers are assumed to vary continuously through-the-thickness according to a simple power-law distribution P-FGM or sigmoid function S-FGM in terms of the volume fractions of the constituents. Equilibrium and stability equations of FGM sandwich with simply supported boundary conditions are derived using the higher-order shear deformation plate theory. The influence of the structure geometry, the gradient index and the thermal loading conditions on the vibration frequency and critical buckling temperature of the FGM sandwich are investigated. For thermal buckling, the thermal loads are assumed to be uniform, linear and nonlinear distribution through-the-thickness. A new simple solution for thermal buckling of FGM sandwich structures under nonlinear temperature rise is presented.

Keywords: FGM sandwich structure; Free vibration; Thermal buckling; Higher-order shear deformation theory

ملخص

تم في هذه الأطروحة دراسة الاهتزاز الحر والانبعاج الحراري لهياكل سندويتش متدرجة وظيفيا. نستعمل نوعان من السندويتشات المتدرجة وظيفيا، سندويتش بطبقات خارجية متجانسة ولب متدرج وظيفيا، وسندويتش بطبقات خارجية متدرجة وظيفيا ولب متجانس. تتوزع الخصائص الميكانيكية ومعامل التمدد الحراري للطبقات المتدرجة وظيفيا بشكل مستمر على امتداد سمك الطبقات وفقا لدالة أسية P-FGM أو دالة موجية S-FGM. نتحصل على معادلات التوازن والاستقرار لهياكل متدرجة وظيفيا ممتوضعة فوق ركائز بسيطة كشرط حدي باستخدام نظرية تشوه القص. تم كذلك تحليل تأثير هندسة الهيكل، معامل تدرج المادة ومختلف الأحوال الحرارية على الاهتزاز والانبعاج الحراري لهذه الهياكل. بالنسبة للانبعاج الحراري، الأحوال الحرارية المطبقة موزعة بشكل منتظم، خطي وغير خطي على امتداد السمك. في هذه الدراسة، نقدم حلا جديدا وبسيطا للانبعاج الحراري لهياكل سندويتش تحت أحوال حرارية غير خطية.

الكلمات المفتاحية: هياكل سندويتش FGM، اهتزاز حر، انبعاج حراري، نظرية تشوه القص ذات حد عالي.

TABLE DES MATIERES

Dédicace	(i)
Remerciement	(ii)
Résumé	(iii)
Abstract	(iv)
ملخص	(v)
Table des Matières	(vi)
Liste des Figures	(ix)
Liste des Tableaux	(xi)
Liste des Notations	(xii)
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Généralités sur les sandwichs et les matériaux FGM	3
I.1. Matériaux sandwichs	3
I.1.1. Constituants des sandwichs	4
I.1.1.a. Ame	4
I.1.1.b. Peaux	5
I.1.1.c. Interface	6
I.1.2. Domaines d'application des matériaux sandwichs	6
I.1.2.a. Construction aérospatiale	6
I.1.2.b. Construction automobile et ferroviaire	7
I.2. Matériaux à gradient de propriétés (FGM)	7
I.2.1. Concept des matériaux FGM	7
I.2.2. Méthodes d'élaboration de FGM	8
I.2.2.a. Coulage en bande (tape casting)	9
I.2.2.b. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)	9
I.2.2.c. Dépôt par électrophorèse	9
I.2.2.d. Compaction sèche des poudres	10
I.2.2.e. Projection plasma	10
I.2.2.f. C.V.D et P.V.D	10
I.2.2.g. Frittage et infiltration	10
I.2.2.h. Frittage laser différentiel	10
I.2.2.i. Implantation ionique	11
I.2.2.j. Dépôt par centrifugation	11
I.2.3. Domaines d'application des FGM	11
I.2.3.a. Aéronautique	11
I.2.3.b. Matières industrielles	11
I.2.3.c. Optoélectronique	12
I.2.3.d. Biomatériaux	12
I.2.3.e. Energie	12
I.2.4. Propriétés matérielles des structures en FGM	12
I.2.4.a. Propriétés matérielles d'une plaque P-FGM	12
I.2.4.b. Propriétés matérielles d'une plaque S-FGM	13
I.2.4.c. Propriétés matérielles d'une plaque E-FGM	14
I.2.4.d. Propriétés matérielles des plaques sandwichs en FGM	15

CHAPITRE II : Théorie des plaques	20
II.1. Théorie d'Euler-Bernoulli	20
II.2. Théorie de premier ordre	21
II.3. Théorie d'ordre supérieur	23
CHAPITRE III : Analyse de la vibration libre des structures sandwichs en FGM	27
III.1. Etudes bibliographiques	27
III.1.1 Etudes sur la vibration des poutres en FGM	28
III.1.2 Etudes sur la vibration des plaques en FGM	30
III.2. Vibration libre des poutres sandwichs en FGM	32
III.2.1. Equations cinématiques	32
III.2.2. Efforts résultants	33
III.2.3. Energie de déformation	34
III.2.4. Energie cinétique	34
III.2.5. Energie potentielle externe	34
III.2.6. Principe de Hamilton	34
III.2.7. Equations du mouvement	35
III.2.8. Solution analytique	35
III.2.9. Résultats et analyses	36
III.2.10. Conclusion	43
III.3. Vibration libre des plaques sandwichs en FGM	44
III.3.1. Equations cinématiques	44
III.3.2. Efforts résultants	45
III.3.3. Energie cinétique	46
III.3.4. Energie cinétique	46
III.3.5. Equations du mouvement	46
III.3.6. Solution analytique	47
III.3.7. Résultats et analyses	48
III.3.8. Conclusion	56
CHAPITRE IV : Analyse du flambement thermique des structures sandwichs en FGM	58
IV.1. Etudes bibliographiques	58
IV.1.1. Etudes sur le flambement thermique des poutres en FGM	58
IV.1.2. Etudes sur le flambement thermique des plaques en FGM	60
IV.2. Charges thermiques	61
IV.2.1. Charge thermique uniforme	62
IV.2.2. Charge thermique non linéaire	62
IV.3. Flambement thermique des poutres sandwichs en FGM	66
IV.3.1. Champ des contraintes	66
IV.3.2. Efforts résultants	66
IV.3.3. Equations de stabilité	66
IV.3.4. Solution trigonométrique du flambement thermique	67
IV.3.4.a. Flambement des poutres sandwichs FGM sous une variation de température uniforme	68
IV.3.4.b. Flambement des poutres sandwichs FGM sous une variation linéaire de température	68
IV.3.4.c. Flambement des poutres sandwichs FGM sous une variation non linéaire de température	69

LISTE DES FIGURES

Figure I.1. Schema d'un sandwich	4
Figure I.2. Caractéristiques des matériaux composites FGM.	8
Figure I.3. Système de coordonnées d'une plaque sandwich à gradient de propriétés	13
Figure I.4. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM	13
Figure I.5. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque S-FGM	14
Figure I.6. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM	15
Figure I.7. Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés	15
Figure I.8. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM	18
Figure I.9. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich S-FGM	19
Figure II.1. Cinématique de la déformation de la plaque d'Euler-Bernoulli	21
Figure II.2. Cinématique de la théorie du premier ordre	22
Figure II.3. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur	24
Figure II.4. Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	25
Figure II.5. Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	26
Figure III.1. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S- FGM en fonction du paramètre d'inhomogénéité k ($a/h=5, m=1$)	41
Figure III.2. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction rapport a/h ($k=2, m=1$)	41
Figure III.3. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction du mode m ($a/h=5, k=2$)	41
Figure III.4. Fréquence adimensionnelle de différents types des poutres sandwichs S-FGM en fonction rapport a/h ($k=2, m=1$)	42
Figure III.5. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction du paramètre d'inhomogénéité k ($a/h=5, m=n=1$)	53
Figure III.6. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction rapport a/h ($k=2, a/b=1, m=n=1$)	53

Figure III.7. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction rapport a/b ($k=2, a/h=5, m=n=1$)	53
Figure III.8. Fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction rapport a/h ($k=2, a/b=1, m=n=1$)	54
Figure III.9. Fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction rapport a/b ($k=2, a/h=10, m=n=1$)	54
Figure IV.1. Variation de la distribution de la température à travers l'épaisseur d'une sandwich FGM (1-1-1) ($k=2$)	64
Figure IV.2. Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une sandwich FGM ($k=2$)	65
Figure IV.3. Température critique de flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h	73
Figure IV.4. Température critique de flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM en fonction du paramètre d'inhomogénéité k ($a/h=10$)	74
Figure IV.5. Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés	77
Figure IV.6. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM	90
Figure IV.7. Température adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM	91
Figure IV.8. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du rapport a/h ($a/b=1$)	92
Figure IV.9. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du rapport a/b ($a/h = 10$)	93
Figure IV.10. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du paramètre d'inhomogénéité k sous différents types de chargements thermiques ($a/h = 10$)	94

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1. L'effet du paramètre a/h sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM	38
Tableau III.2. L'effet de paramètre d'inhomogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM	39
Tableau III.3. L'effet du mode propre sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM	40
Tableau III.4. L'effet du paramètre a/h sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM	49
Tableau III.5. L'effet du paramètre a/b sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM	50
Tableau III.6. L'effet de paramètre d'inhomogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM	51
Tableau III.7. L'effet du mode propre sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM	52
Tableau IV.1. Propriétés des matériaux dépendant de la température	62
Tableau IV.2. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique uniforme	70
Tableau IV.3. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique linéaire	71
Tableau IV.4. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique non linéaire	72
Tableau IV.5. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique uniforme ($a/b=1$)..	85
Tableau IV.6. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique linéaire ($a/b=1$)	86
Tableau IV.7. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique non linéaire ($a/b=1$)	87
Tableau IV.8. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique uniforme ($a/h = 10$)	88
Tableau IV.9. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique linéaire ($a/h = 10$)..	88
Tableau IV.10. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique non linéaire ($a/h = 10$)	89

LISTE DES NOTATIONS

FGM	Matériaux à gradient de propriétés où bien fonctionnellement graduées
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
V	Fraction volumique
k	Paramètre d'inhomogénéité du matériau
K	Conductivité thermique
ρ	Masse volumique
α	Coefficient de dilatation thermique
ω	Fréquence naturelle
$\bar{\omega}$	Fréquence adimensionnelle
T_{cr}	Différence de la température critique du flambement
p	Force extérieure
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
U	Energie de déformation
T	Energie cinétique
V	Energie potentielle externe
$[M]$	Matrice de masse
$[K]$	Matrice de rigidité
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
\bar{K}	Facteur de correction
n	Nombre de couches
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement $f(z)$
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta\varepsilon_{xx}, \delta\varepsilon_{yy}, \delta\varepsilon_{zz}$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	Efforts normaux
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Moments de flexion
P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
R_{xz}, R_{yz}	Effort de cisaillement
$\bar{N}_{xx}^0, \bar{N}_{yy}^0$	Efforts due à la charge thermique
∂	Dérivée partielle
i, j	Nombres naturels
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij},$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij},$	Termes de la matrice de flexion
m, n	Modes propres
$T(x, y, z)$	Distribution du chargement thermique
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés

INTRODUCTION GNERLE

INTRODUCTION GENERALE

L'avancée scientifique est la clé de tout développement industriel, en effet c'est grâce aux recherches scientifiques et ce qu'elles apportent comme procédés novateurs que le monde industriel est en perpétuelle évolution.

Les matériaux sont l'axe d'une recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base d'un matériau, et inventer dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. Depuis très longtemps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche qui est associée d'une part, aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle et d'autre part, à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus afin de répondre à un besoin technologique spécifique.

Quand les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à dévoiler leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, l'industrie moderne est partie à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut obligatoirement utiliser des matériaux composites. Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans plusieurs structures d'ingénierie grâce à leurs performances dominantes. Par exemple, une couche homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un milieu à hautes températures. Néanmoins, les propriétés matérielles à travers l'interface du bi-matériau (céramique-métal) subissent un changement brusque, qui risque de provoquer le décollement ou la rupture de l'interface. La solution à ce problème est l'utilisation du matériau à gradient de propriétés appelés communément FGM (Functionally Graded Matériau). Le FGM est un matériau dont les propriétés mécaniques, physiques et thermiques varient continuellement à travers l'épaisseur suivant des lois. On distingue plusieurs types, le P-FGM (loi de puissance), le S-FGM (fonction sigmoïde) et le E-FGM (loi exponentielle). Les FGMs sont utilisés comme barrière thermique d'une part, et pour réduire considérablement les contraintes résiduelles thermiques nées lors de leur élaboration d'autre part.

Les matériaux sandwichs sont parmi les matériaux composites les plus utilisés. Les structures sandwichs occupent un large créneau dans la construction des pièces composites.

Avec le développement des procédés de fabrication, les FGM sont pris en compte dans les industries de structure sandwich. En général, le changement brusque des propriétés matérielles de

la structure sandwich d'une couche à l'autre peut causer des concentrations de contraintes qui conduisent à une délamination. Pour surmonter ce problème, une structure sandwich FGM basée sur la loi de puissance (P-FGM) est proposée en raison de la variation progressive des propriétés du matériau aux interfaces entre les couches de face et le cœur. Pour améliorer les propriétés des sandwichs FGM, nous avons créé d'autre type en se basant sur la fonction sigmoïde (S-FGM) qui offre une très bonne répartition des matériaux constituants et une bonne rigidité du sandwich.

Dans notre recherche, nous allons étudier la vibration libre et le flambement thermique des structures sandwichs FGM. Une solution exacte d'une distribution de la température non linéaire a été proposée avec la prise en compte de la conductivité thermique, la fraction volumique et le type du sandwich avec l'utilisation du logiciel MATLAB.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par définir les structures sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs procédés de fabrication, et leurs domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre, nous allons citer les différentes théories des plaques minces et épaisses.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter une analyse théorique sur la vibration libre des structures sandwichs en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

Le quatrième chapitre sera consacré à la formulation d'un modèle analytique de structure sandwich FGM basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse du flambement thermique des sandwichs FGM. La température critique du flambement est déterminée pour les trois cas de chargement thermique retenus.

CHAPITRE I

Généralités sur les sandwichs et les matériaux FGM

I. Généralités sur les sandwichs et les matériaux FGM

I.1. Les matériaux sandwichs

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes.

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.). Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Les structures sandwichs occupent un large créneau dans la construction des pièces composites

Un sandwich composite structuré typique se compose de deux peaux qui sont minces et forts, et d'une âme plus molle et légère. Chaque peau peut être un matériau isotrope ou un stratifié composite renforcé par des fibres. La fonction principale des peaux est de fournir à la flexion et la rigidité requises dans le plan de cisaillement, et de porter la flexion axiale, et dans le plan de cisaillement chargement. L'âme doit être assez fort pour garder les peaux dans leurs positions relatives pendant le chargement, et rigide en cisaillement de sorte que les visages ne glissent pas sur l'autre. Afin de forcer les parements et l'âme à coopérer et à agir en tant que partie intégrante de l'ossature, on utilise un adhésif entre les deux. La plupart des colles utilisées sont des époxy, des époxy modifiés ou des polyamides époxy. La ténacité de l'adhésif se réfère à la capacité à résister à des charges qui agissent pour séparer les revêtements d'âme dans des conditions soit statiques ou dynamiques. Chaque composant est relativement faible et flexible par lui-même, mais lorsqu'il est combiné à un panneau sandwich, le résultat est une structure très forte.

Lors du choix de revêtement, d'âme, d'adhésif et de tout autre matériel pour une application, toutes les propriétés et les attributs de la matière doivent être examinées car ils touchent directement le succès du produit final.

Les Sandwichs Composites deviennent très populaires pour leur capacité à augmenter la rigidité, diminuer le poids et améliorer la performance mécanique. Les résultats de la réduction de poids dans un certain nombre d'avantages, y compris à la consommation de carburant moindre, la vitesse accrue, la capacité de charge, et la réduction de l'empreinte de carbone de l'environnement. Selon la théorie de l'ingénierie, de la rigidité d'un panneau est proportionnelle au cube de son épaisseur.

Ainsi, l'ajout d'un matériau de base à faible densité afin d'épaissir le panneau sandwich, peut augmenter de manière significative la rigidité des composites avec une très petite pénalité de poids.

L'exemple le plus courant et bien connu de produit de matériau sandwich est panneaux métalliques de polyuréthane, largement utilisés dans la construction de bâtiments industriels. La fine feuille de métal de peau est un peu mou seule, mais en combinaison avec l'âme en polyuréthane, le produit résultant est très rigide.

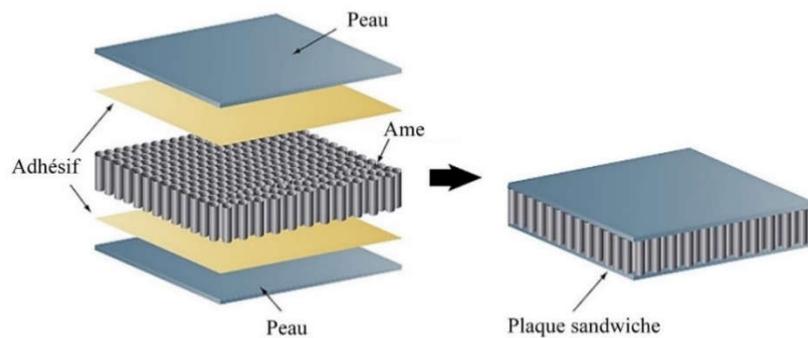


Figure I.1. Schéma d'un sandwich.

I.1.1. Constituants des sandwichs

Le concept de sandwich est une technique bien établie de construction qui combine le poids avec la rigidité et la force. On peut dire que, le sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique sur lequel sont collées deux semelles minces en matériau plus fort et plus rigide. La **figure I.1** présente les différents éléments constitutifs d'un matériau composite en construction sandwich. Les peaux (ou semelles) doivent résister aux moments de flexion. Elles peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique.

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement.

I.1.1.a. Ames

Dans les matériaux sandwichs, l'âme doit être constituée d'un matériau ayant une faible masse volumique et de bonnes propriétés en cisaillement, afin de transmettre les contraintes de traction-compression exercées sur le sandwich. Pour les âmes creuses, les nids d'abeilles, sont généralement

utilisées dans les structures à hautes performances mécaniques. Elles ont des performances relativement élevées mais un coût de fabrication onéreux. Pour âmes pleines, les mousses ou le balsa, sont utilisées dans réalisation des structures sandwichs planes ou courbées, avec un rapport performance-prix relativement élevé. Les différents types d'âmes qui existent sur le marché sont :

- **Mousses** : utilisées en grande quantité, elles sont élaborées à partir de polychlorure de vinyle, polystyrène, polyuréthane ou d'autres polymères synthétiques. Les masses volumiques de ces dernières varient de 30 à 300 kg/m³ et leurs épaisseurs de 3 à 40 mm. Leurs propriétés mécaniques sont bonnes, elles adhèrent bien à la résine et absorbent peu d'eau. Néanmoins leur point faible réside dans une faible résistance à l'impact.
- **Bois** : il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression notamment pour les supports d'accastillage. Le balsa est la variante la plus utilisée pour sa légèreté : 100 kg/m³ de masse volumique. L'inconvénient du matériau bois est sa porosité.
- **Nid d'abeilles** : c'est une structure hexagonale, élaborée à partir de différents matériaux, comme le papier et l'aluminium. Ses caractéristiques mécaniques dépendent du matériau et de la taille des cellules. Sa masse volumique varie de 15 à 100 kg/m³ et son épaisseur de 3 à 50 mm. Il admet des courbures modérées, alors les propriétés mécaniques changent selon l'orientation. Le collage peut aussi être un problème, car il se réalise sur la tranche de la structure. Les propriétés des nids d'abeilles sont excellentes, mais leurs difficultés résident dans leurs formations ainsi que leurs prix élevés. Les variétés les plus utilisées sont le Nomex et le Korex fabriquées à partir de Kevlar.

I.1.1.b. Peaux

Les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibres (mat ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine. Il existe plusieurs types de fibres parmi lesquelles, on trouve :

- **Fibres de verre** : qui sont produites à partir du verre en fusion passant à travers des filières de 3 à 25 µm, où il est refroidi. Les propriétés des fibres de verre dépendent de la nature du verre (pourcentage d'oxydes métalliques) et peu de leur technique de fabrication.
- **Fibres de Kevlar ou aramide** : qui sont produites par polymérisation de polyamides, ayant des modules allant de 60 à 180 GPa, avec une masse volumique d'environ 1400 kg/m³. Ces fibres ont deux avantages particuliers, elles sont les moins denses et les plus résistantes aux chocs.
- **Fibres de carbone** : qui sont fabriquées à partir d'un précurseur (polyacrylonitrile) oxydé, carbonisé et graphité. Les fibres de carbone ont des modules qui varient de 150 à

800 GPa et une masse volumique en général inférieure à 2000 kg/m³. Possédant une mauvaise résistance à l'impact, elles sont considérées comme inflammables et conductrices d'électricité.

I.1.1.c. Interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants. Les matériaux sandwichs sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint-Pierre (45 mètres de portée) et de 2600 kg/m² (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de 33kg/m²
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques. En revanche, les matériaux sandwichs n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

I.1.2. Domaines d'application des matériaux sandwichs

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

I.1.2.a. Construction aérospatiale

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films. Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone/epoxyde collés sur des âmes en nida aluminium. Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides. Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux. Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida. Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/epoxyde et l'âme en nida nomex.

I.1.2.b. Construction automobile et ferroviaire

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé. Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

I.2. Matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Dans les structures multicouches classiques, des couches homogènes sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustiques,...) de la Structure (plaques sandwichs, structures renforcées par matériaux composites,...). L'inconvénient, de cette démarche est de créer des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

La solution d'une transition continue des propriétés, par un gradient de composition, permet d'atténuer ces singularités par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Material "FGM"). Les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

I.2.1. Concept des matériaux FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de Fonction et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux [1].

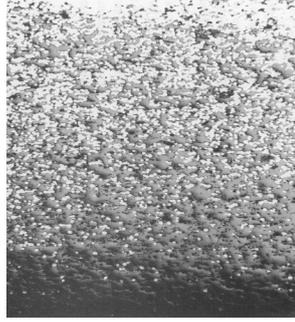


Figure I.2. Caractéristiques des matériaux composites FGM.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... [2].

I.2.2. Méthodes d'élaboration de FGM

Il ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des FGM. Ces techniques sont brièvement expliquées ci-après :

I.2.2.a. Coulage en bande (tape casting)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan en couches minces et régulières. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement, un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage. Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par [3] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [4].

I.2.2.b. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)

Le coulage en barbotine consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou "prise".
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre [5] (coulage classique).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.2.2.c. Dépôt par électrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, il se fait par le mouvement des particules

chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [6].

I.2.2.d. Compaction sèche des poudres

Dans cette technique, les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Généralement, ce procédé est suivi par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [7].

I.2.2.e. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température, se transforme en état ionisé. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [8].

I.2.2.f. C.V.D et P.V.D

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes compliquées [9, 10].

I.2.2.g. Frittage et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [11]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.2.2.h. Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau,

provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

I.2.2.i. Implantation ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [12, 13].

I.2.2.j. Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches [14, 15, 16].

I.2.3. Domaines d'application des FGM

I.2.3.a. Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champs regarder deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau. A l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structures, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et la construction de station spatiale. FGM sont également applicable à un mur externe d'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.2.3.b. Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergétique de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité. Ainsi nous pouvons dire que la demande des FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une auto lubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec

succès à l'aide de diamants et l'acier, et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.2.3.c. Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des fibres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filet le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu la longue longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure.

I.2.3.d. Biomatériaux

Dans le corps humain, le FGM peut remplacer les os et les articulations car il a une grande résistance, dureté et une longue durée de vie.

I.2.3.e. Energie

Les FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également de barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur les aubes de turbine à gaz.

I.2.4. Propriétés matérielles des structures en FGM

Les matériaux à gradient de propriétés peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux avec microstructure non uniformes et des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume [2].

I.2.4.a Propriétés matérielles d'une plaque P-FGM :

Considérons une plaque sandwich rectangulaire en FGM. Comme montré dans la **Figure I.3**. La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est le paramètre du matériau qui reflète le type de distribution des propriétés matérielles à travers l'épaisseur de la structure. Les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$P(z) = V(z).P_1 + [1 - V(z)].P_2 \quad (I.2)$$

Où P_1 et P_2 sont respectivement les propriétés matérielle de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM.

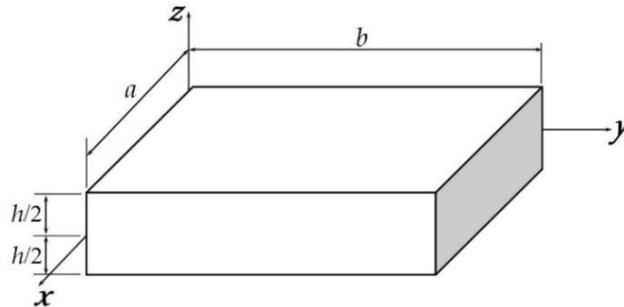


Figure I.3. Système de coordonnées d'une plaque sandwich à gradient de propriétés (FGM).

La **figure I.4** montre la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure P-FGM.

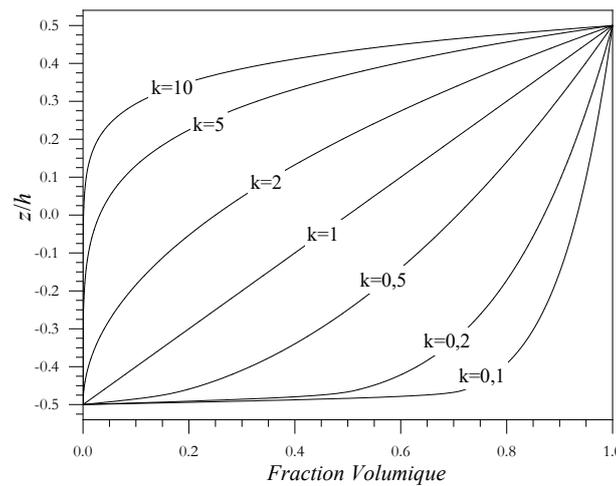


Figure I.4. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM

I.2.4.b Propriétés matérielles d'une plaque S-FGM :

Pour la plaque S-FGM, on définit la fraction de volume en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une distribution harmonieuse des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance et les propriétés matérielles sont définies par :

Pour $-h/2 \leq z \leq 0$:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (I.3)$$

$$P(z) = V_1(z).P_1 + [1 - V_1(z)].P_2 \quad (I.4)$$

Pour $0 \leq z \leq h/2$:

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^k \quad (\text{I.5})$$

$$P(z) = V_2(z) \cdot P_1 + [1 - V_2(z)] \cdot P_2 \quad (\text{I.6})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM est représentée sur la **figure I.5**.

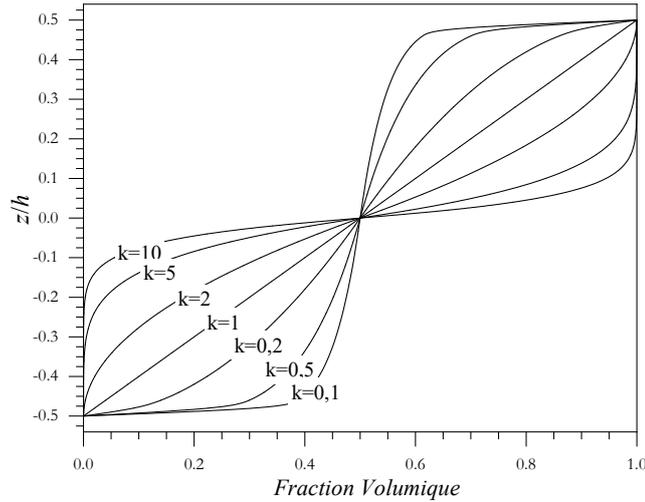


Figure I.5. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque S-FGM

I.2.4.c Propriétés matérielles d'une plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$P(z) = P_2 \cdot e^{B \left(z + \frac{h}{2} \right)} \quad (\text{I.7})$$

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (\text{I.8})$$

La **figure I.6** montre que la variation du module de Young définie par l'équation (I.7).

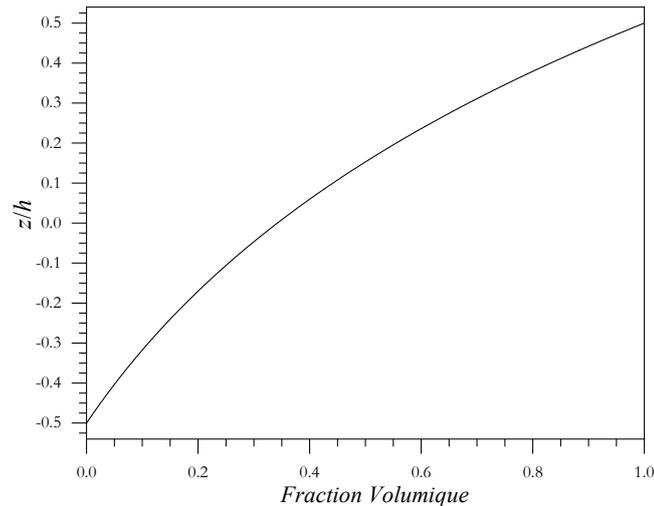


Figure I.6. La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM

I.2.4.d Propriétés matérielles des plaques sandwichs en FGM

Le modèle mathématique a été construit pour résoudre une plaque sandwich composée de trois couches. La structure considérée a une épaisseur totale h . Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , à la surface $z=0$, coïncidant avec la surface médiane de la structure. Les faces supérieures et inférieures de la poutre sont à $z = \pm h / 2$. Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par $h_0 = -h/2, h_1, h_2$ et $h_3 = h/2$, respectivement. Deux types de sandwichs sont utilisés :

les sandwichs FGM Type-A qui ont des propriétés matérielles des couches de surface (peaux) variant dans la direction de l'épaisseur selon une fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou selon une fonction sigmoïde (S-FGM) et avec un cœur homogène en céramique, et les structures sandwichs FGM Type-B qui ont des propriétés matérielles des couches de surface homogènes (la surface inférieure en métal et la surface supérieure en céramique) et un cœur en P-FGM ou S-FGM.

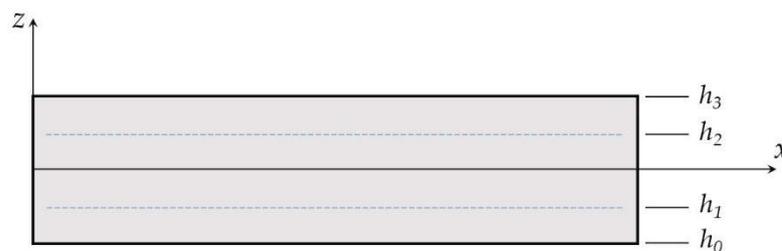


Figure I.7. Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés (FGM).

A. Plaque sandwich en P-FGM :

• Plaque sandwich P-FGM de type A

Le sandwich est composé de trois couches, un cœur isotrope et deux couches de faces en P-FGM (**Figure I.5**). Les couches de faces sont graduées du métal à la céramique tandis que le cœur est en céramique. La fraction volumique varie à travers l'épaisseur comme suit

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^k, & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= 1, & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^k, & h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Où la valeur k est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro. La valeur de k est égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique.

• Plaque sandwich P-FGM de type B

Dans ce type de plaques sandwich, la couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= 0, & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^k, & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= 1, & h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

B. Plaque sandwich en S-FGM :

• Plaque sandwich S-FGM de type A

Les couches de faces en S-FGM et le cœur est en céramique (**Figure I.8**). Le cœur est gradué du métal à la céramique. La fraction volumique varie à travers l'épaisseur comme suit

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_0}{h_m-h_0} \right)^k, & h_0 \leq z \leq h_m \\ V_2^{(1)}(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_1}{h_m-h_1} \right)^k, & h_m \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= 1, & h_1 \leq z \leq h_2 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

$$V_1^{(3)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_2}{h_n-h_2} \right)^k, \quad h_2 \leq z \leq h_n$$

$$V_2^{(3)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_3}{h_n-h_3} \right)^k, \quad h_n \leq z \leq h_3$$

Où $hm = (h_1 + h_2) / 2$ et $hn = (h_2 + h_3) / 2$ désigne les positions de la surface moyenne de la couche inférieure et la couche supérieure, respectivement.

• Plaque sandwich S-FGM de type B

La couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique selon une fonction sigmoïde (S-FGM).

$$V^{(1)}(z) = 0, \quad h_0 \leq z \leq h_1$$

$$V_1^{(2)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_1}{h_s-h_1} \right)^k, \quad h_1 \leq z \leq h_s$$

$$V_2^{(2)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_2}{h_s-h_2} \right)^k, \quad h_s \leq z \leq h_2 \quad (\text{I.4})$$

$$V^{(3)}(z) = 1, \quad h_2 \leq z \leq h_3$$

Où $h_s = (h_1 + h_2) / 2$ désigne la position de la surface moyenne du cœur.

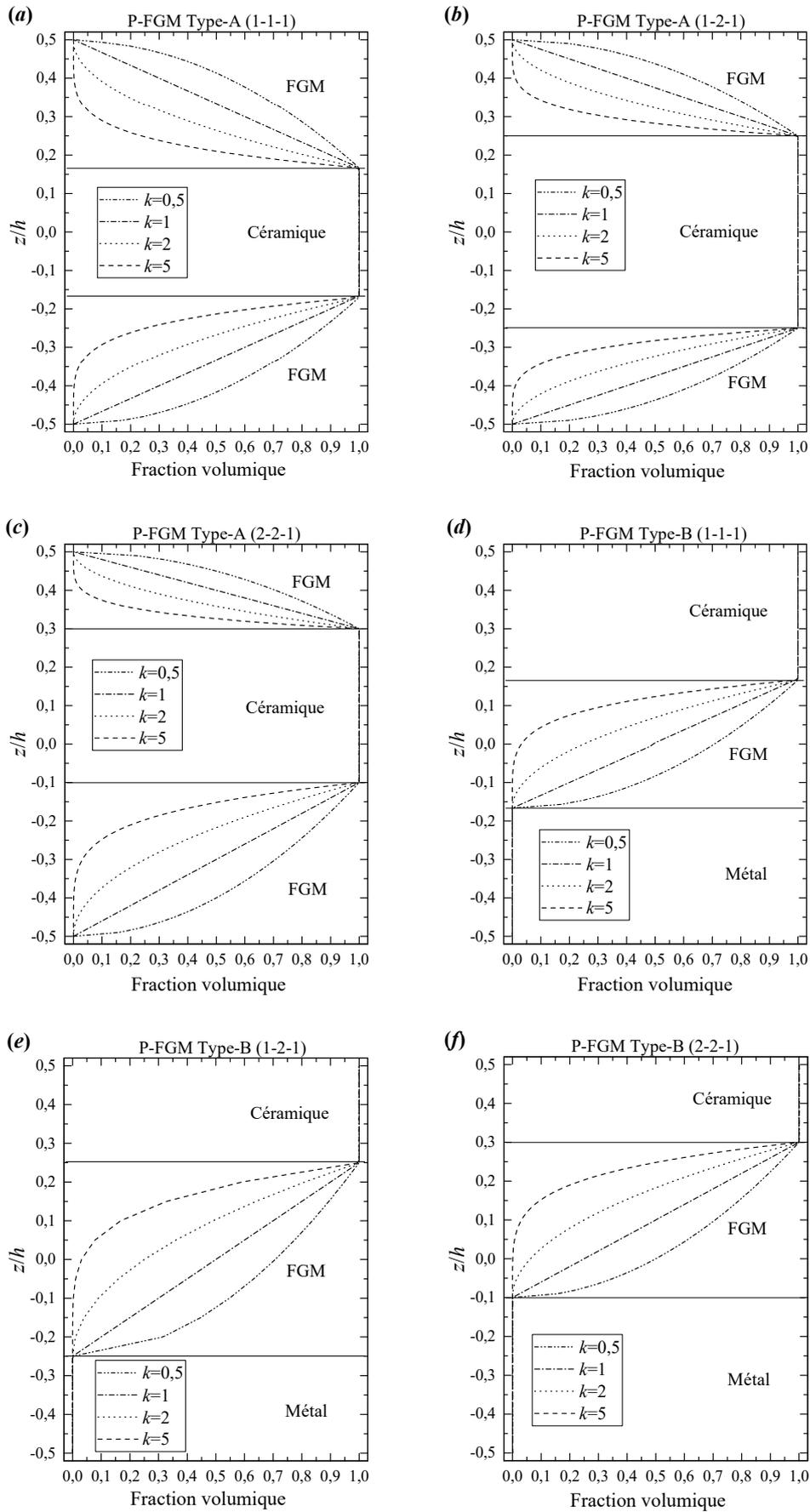


Figure I.8. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM.

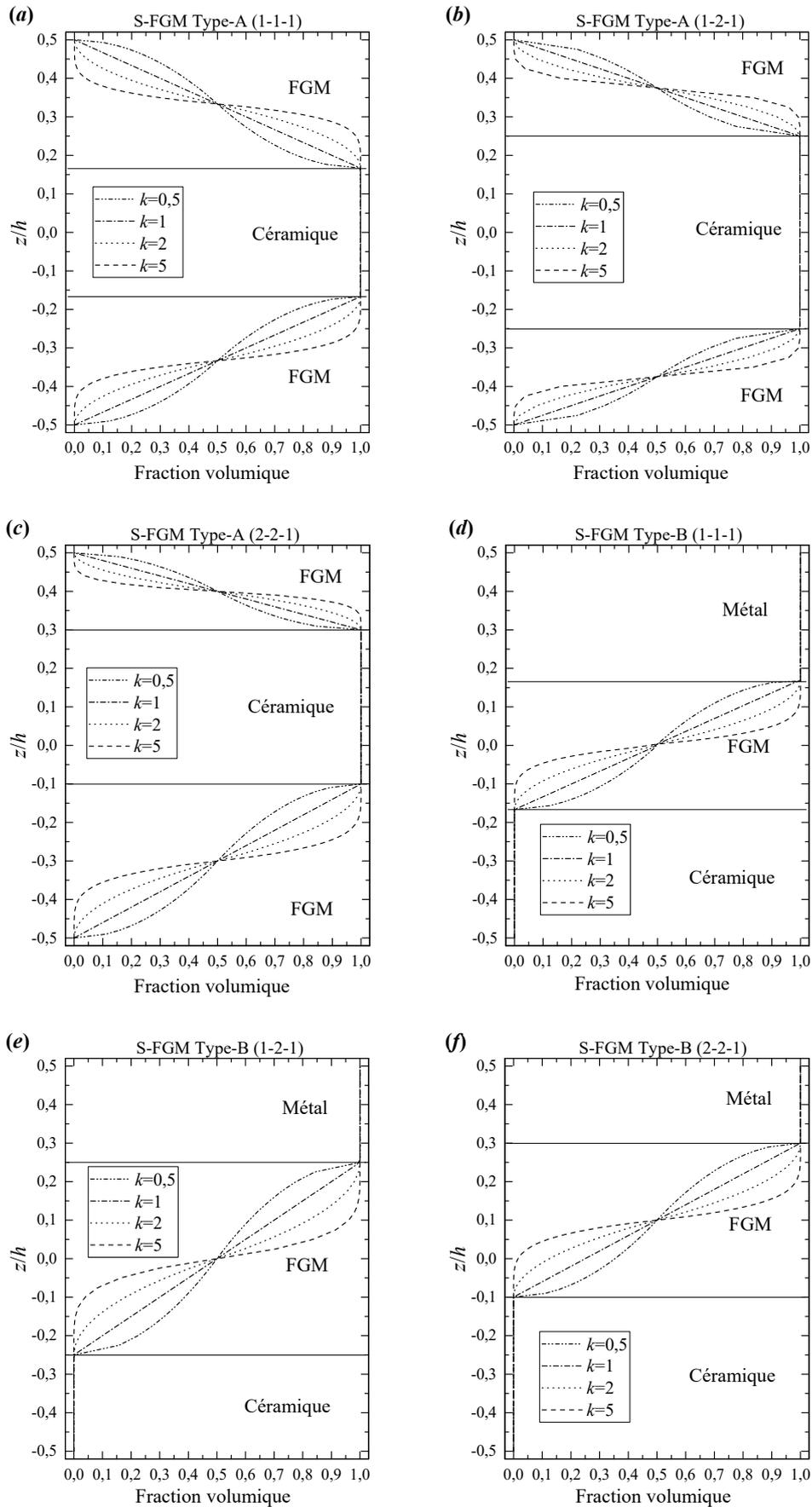


Figure I.9. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich S-FGM.

CHAPITRE II
Théorie des plaques

II. Théorie des plaques

L'utilisation des matériaux composites est devenue de plus en plus fréquente et ce dans plusieurs domaines industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, et le génie civil. Cette utilisation est due au fait que ces matériaux présentent plusieurs avantages, parmi lesquels on note la haute résistance et la grande rigidité par rapport à leur poids, des caractéristiques supérieures de fatigue ainsi que la capacité de changer des orientations des fibres pour répondre à des exigences de conception. Puisque ces matériaux se composent de deux matériaux ou plus, ils posent beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales telles que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles, force de flambement et l'effet des états de frontière et des chargements externes. Du fait de l'importance de l'utilisation des plaques composites dans la conception des structures industrielles, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales de ces plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques composites.

II.1. Théorie d'Euler-Bernoulli (Classical Plate Theory CPT)

La théorie des plaques minces, ou théorie d'Euler-Bernoulli (Classical plate theory CPT), est un modèle de base utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des plaques est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire.

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par [17]

- 1) Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- 2) La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes.

3) Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après la déformation.

4) L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

Considérons une plaque FGM de longueur « a » et de largeur « b », avec une épaisseur « h ». Le déplacement de la plaque s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$, sont les déplacements de la plaque, u_0 , v et w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque (Figure II.1).

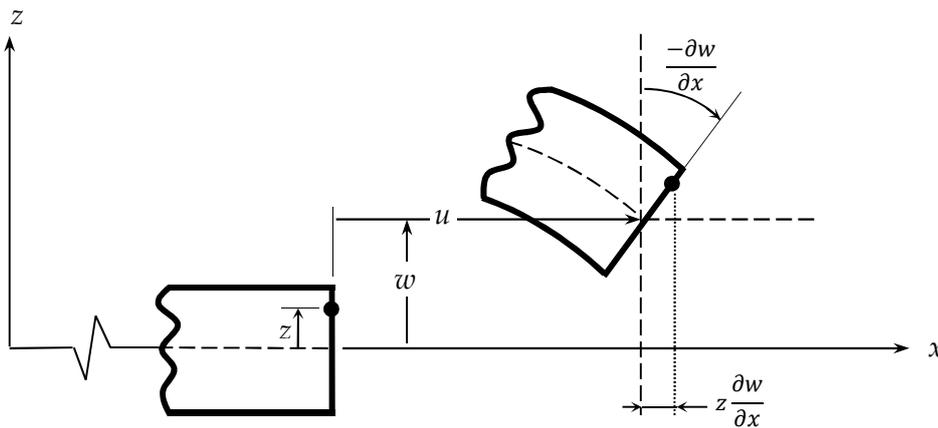


Figure II.1. Cinématique de la déformation de la plaque d'Euler-Bernoulli.

II.2. Théorie de premier ordre (First-order Shear Deformation Plate Theory FPT)

La troisième hypothèse de la théorie d'Euler-Bernoulli veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Il y a eu beaucoup de théories de plaques prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. Reissner [18] a proposé la théorie de plaque la plus simple en introduisant l'effet

de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin [19] a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues.

Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée. Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie rotation est incluse.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (**Figure II.2**) est exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 + z\varphi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Où φ_x et φ_y , sont les rotations autour des axes x et y, respectivement (**Figure II.2**).

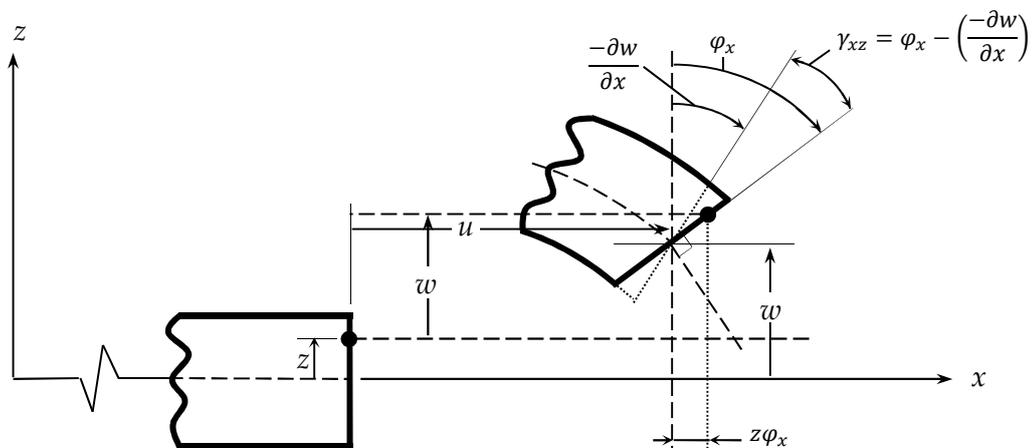


Figure II.2. Cinématique de la théorie du premier ordre.

II.3. Théorie d'ordre supérieur (High-order Shear Deformation Plate Theorie HPT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée.

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en séries de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u(x, z, t) = u(x, t) + z\varphi^{(1)}(x, t) + z^2\varphi^{(2)}(x, t) + z^3\varphi^{(3)}(x, t) + z^4\varphi^{(4)}(x, t) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordre, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en troisième ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur φ_i détermine la nature de la théorie. Ainsi la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : φ_i pour $i=2, 3, 4\dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles de premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement. C'est-à-dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètre de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\varphi^{(2)} = \varphi^{(4)} = 0$

Et pour la facilité d'écriture, Le champ de déplacement d'un point matériel dans la plaque basé sur la théorie d'ordre supérieur

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$w(x, y, z) = w_0$$

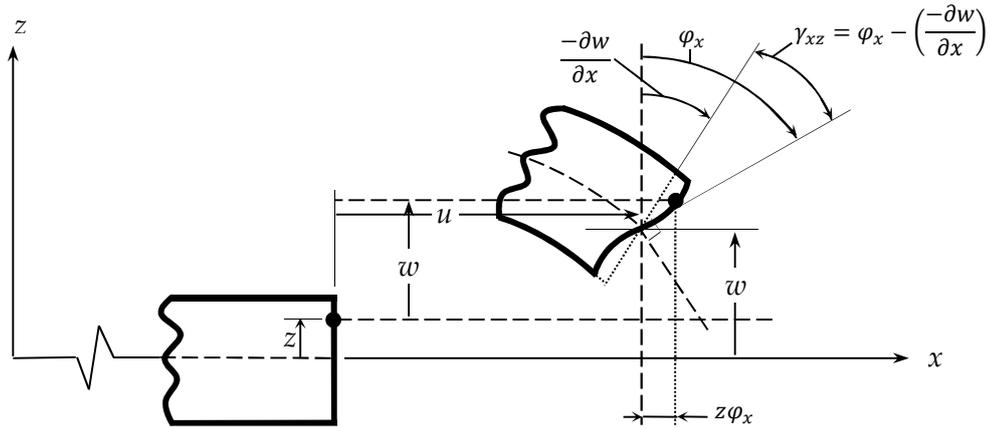


Figure II.3. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $f(z) = 0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory FSDT) est obtenue en posant $f(z) = z$.

Quelques contributions de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de forme $f(z)$

- L'approche d'Ambartsumian [20] avec

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche d'Kruszewski [21] avec

$$f(z) = \frac{5z}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- La théorie des déformations du troisième ordre de Reddy [22] avec

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversal et parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- La théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal (Sinusoidal Shear Deformation Theory SSDT) de Touratier [23] est obtenue en posant

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche Soldatos [24] avec

$$f(z) = z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.9})$$

- Karama [25] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transversale est de la forme

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

- L'approche de Akavci [26] avec

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} \left[h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sec^2 h \left(\frac{1}{2}\right) \right] \quad (\text{II.11})$$

- L'approche de Mantari et al. [27] avec

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{m \pi z}{h}, m \geq 0 \quad (\text{II.12})$$

Les figures suivantes présentent la variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur et la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$, en fonction de l'épaisseur de la plaque.

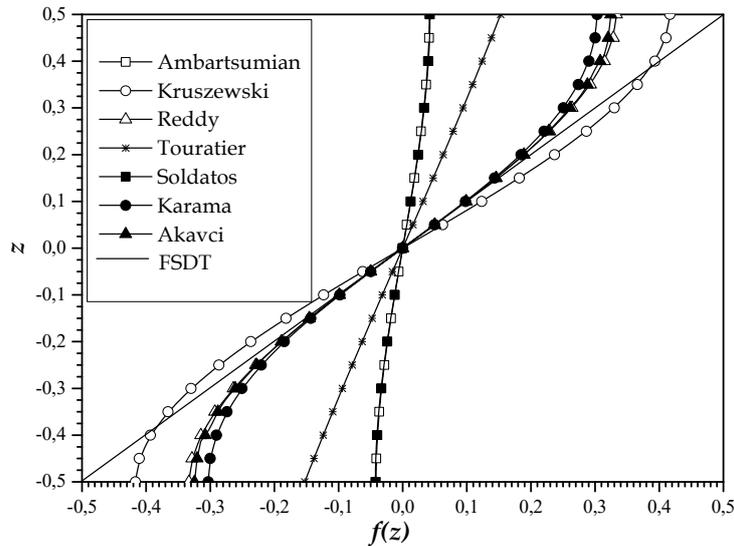


Figure II.4. Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

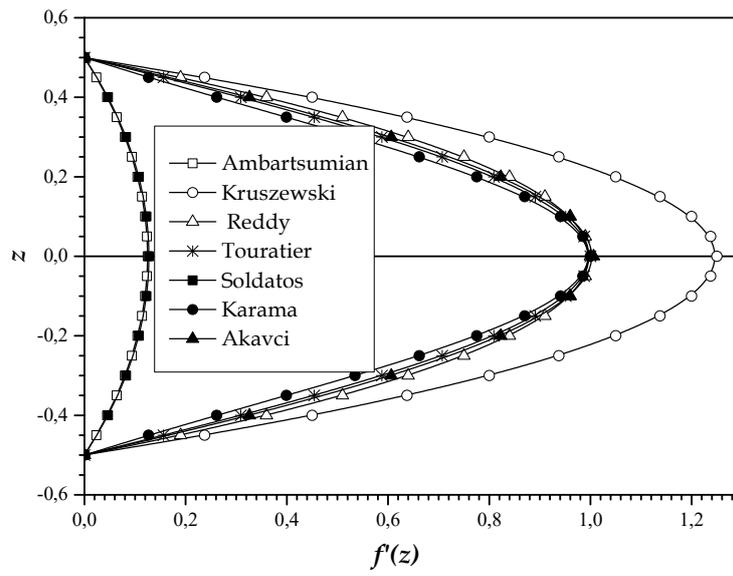


Figure II.5. Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

CHAPITRE III

Analyse de la vibration libre des structures sandwichs en FGM

III. Analyse de la vibration des structures sandwichs en FGM

III.1. Etudes bibliographiques

Dans les problèmes traités dans le cadre de la statique, on suppose que le chargement imposé (déplacement, efforts, température, ...) passe instantanément de sa valeur initiale à sa valeur finale, faisant ainsi passer le milieu considéré d'une configuration initiale stable à une autre configuration contrainte mais stable. Les paramètres à calculer (contraintes, déformations, déplacements, réactions, ...) sont relatifs à l'état final et par conséquent ne dépendent pas du temps.

Dans le cadre de la dynamique au contraire les chargements imposés varient dans le temps. De plus, même dans la configuration initiale le milieu peut être caractérisé par des fonctions du temps (conditions de position et de vitesse). Les paramètres à calculer sont donc également des fonctions du temps, et de nouvelles grandeurs apparaissent pour caractériser le mouvement, c'est-à-dire la variation de configuration dans le temps. Ce sont les paramètres cinématiques tels que les vitesses, les accélérations, les fréquences, ... qui n'existent pas dans le cas de la statique.

Le calcul des modes et fréquences propres d'une poutre est très utilisé dans l'analyse vibratoire de ces éléments de structure. Il permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, c'est à dire qui ne dépend pas des sollicitations extérieures, et qui définit le spectre des fréquences et déformées (modes) qu'il faudra éviter de solliciter si l'on veut que la structure n'ait pas un comportement critique.

Notamment, la connaissance des fréquences propres permet de dimensionner les sections de manière à éviter les phénomènes de résonance. Ce phénomène bien connu de résonance survient lorsque la fréquence d'une ou plusieurs sollicitations extérieures est en phase, ou très peu déphasé (proche), d'une des fréquences propres du système. On a alors, en l'absence d'amortissement, l'amplitude de la déformée qui tend rapidement vers l'infini, ce qui conduit généralement à la ruine de la structure. Pour exemple, on peut citer le décret interdisant les marches militaires sur les ouvrages civils tels que les ponts, ceci suite à l'effondrement d'un pont sous les pas cadencés d'un régiment.

Lorsque le spectre des fréquences propres est connu on peut, en modifiant la géométrie ou la masse volumique des sections, décaler le spectre ou bien modifier son étendue. Dans le cadre de la vibro-acoustique par exemple, la note émise par un diapason dépend de la géométrie (longueur, section) des branches aussi bien que du matériau employé.

III.1.1 Etudes sur la vibration des poutres FGM

Sur la base de la théorie d'Euler-Bernoulli, certains auteurs ont étudié la vibration des poutres FGM par différentes approches analytiques et numériques [28-36]. Alshorbagy et al. [28] ont étudié la vibration libre d'une poutre FGM par la méthode des éléments finis. Şimşek et Kocatürk [29] ont étudié la réponse dynamique d'une poutre FGM sous une charge concentrée, dans laquelle les effets du gradient de matériau, de la vitesse de la charge harmonique mobile et de la fréquence d'excitation. Le même problème a également été étudié par Khalili et al. [30] en utilisant une méthode mixte (Ritz-différentielle en quadrature). Pradhan et Murmu [31] ont présenté une recherche numérique sur la vibration thermomécanique d'une poutre sandwich simplement appuyée avec deux couches de surface en FGM, reposant sur une fondation élastique variable axialement et soumise à une température transversalement non uniforme par la méthode différentielle en quadrature (DQM). En supposant que les propriétés du matériau changent dans la direction de l'épaisseur, Yang et Chen [32] ont analysé les vibrations et le flambement des poutres FGM avec des fissures de bord verticales. Les effets des paramètres du gradient de matériau et les conditions aux limites sur les fréquences naturelles et les charges de flambement ont été examinés. Li et Liu [33] ont montré les déflexions, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles des poutres FGM. Li et al. [34] ont étudié la vibration libre des poutres FGM avec des couches piézoélectriques dans un environnement thermique par une méthode numérique. Huang et Li [35] ont étudié la vibration libre des poutres à section non uniforme en utilisant une technique d'intégration pour transformer les équations différentielles en équations intégrales de Fredholm. Plus récemment, Liu et Shu [36] ont présenté une solution analytique pour la vibration libre de poutres à des propriétés matérielles changent continuellement à travers l'épaisseur de la poutre conformément à une fonction exponentielle (E-FGM) avec une simple délamination.

En utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, d'autres chercheurs ont traité de la réponse dynamique des poutres FGM [37-46]. Sina et al. [37] ont utilisé une nouvelle théorie des poutres différente de la théorie traditionnelle de déformation de cisaillement du premier ordre pour analyser la vibration libre des poutres FGM. En introduisant une nouvelle fonction pour découpler les équations gouvernantes, Li [38] a présenté des solutions analytiques pour la flexion et la vibration libre des poutres FGM. Pradhan et Chakraverty [39] ont mené une étude sur la vibration libre des poutres FGM par la méthode de Rayleigh-Ritz basée sur la théorie classique et du premier ordre. La vibration libre et forcée d'une poutre FGM stratifié d'épaisseur variable sous contrainte thermique initiale a été étudiée par Xiang et Yang [40] en utilisant le DQM. Par la méthode des éléments finis, Shahba et al. [41] ont examiné l'analyse des vibrations libres de

poutres FGM avec des conditions aux limites classiques et non classiques. Huang et al. [42] ont étudié la vibration libre des poutres géométriquement et physiquement non homogènes, dans laquelle les auteurs ont introduit une fonction auxiliaire similaire à celle de la Référence [38]. Nguyen et al. [43] ont obtenu une solution analytique pour le flambement statique et la vibration libre des poutres FGM simplement appuyées et soumises à une charge axiale. Plus récemment, Rajasekaran et Tochaei [44] ont utilisé la méthode de transformation différentielle des éléments (DTEM) et la méthode des éléments différentiels en quadrature (DQEM) pour réaliser l'analyse des vibrations libres des poutres fonctionnellement axiaux. Par le DQEM, Li et Fan [45] ont étudié la vibration libre des poutres FGM avec une délamination à travers la largeur. Li et al. [46] ont également étudié la vibration libre des poutres FGM basée sur les théories des poutres classique et du premier ordre.

Afin d'obtenir une plus grande précision dans la prise en compte de la déformation de cisaillement transverse, des études sur la vibration libre des poutres FGM ont été effectuées sur la base de la théorie de la poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur [47-53]. Aydogdu et Taskin [47] ont étudié la vibration libre d'une poutre FGM simplement appuyée et ont obtenu des fréquences naturelles en utilisant la méthode de la solution de Navier et basée sur les théories des poutres de déformation de cisaillement parabolique et exponentielle. Şimşek [48, 49] a étudié les réponses dynamiques des poutres FGM basés sur différentes théories de déformation de cisaillement, dans lesquelles des équations de mouvement ont été dérivées en utilisant les équations de Lagrange. Mahi et al. [50] ont analysé la vibration libre des poutres FGM avec les propriétés du matériau dépendant de la température. Les effets de la contrainte thermique initiale sur les fréquences naturelles ont également été discutés. Pradhan et Chakraverty [51] ont étudié la réponse de vibration libre des poutres FGM dans différentes conditions aux limites basées sur différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. Thai et Vo [52] ont présenté une solution analytique sous forme de séries trigonométriques pour la flexion statique et la vibration libre des poutres FGM supportés simplement en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Des résultats numériques ont été donnés pour examiner les effets de différentes théories sur les réponses statiques et dynamiques. Plus récemment, Vo et al. [53, 54] ont étudié la flexion statique, le flambement et la vibration libre des poutres FGM basés sur la théorie de déformation de cisaillement raffiné en utilisant la méthode des éléments finis. Shen et Wang [55] ont effectué des analyses géométriques non linéaires pour la vibration, la flexion et le flambement thermique des poutres FGM reposant sur une fondation élastique dans un environnement thermique basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

III.1.2 Etudes sur la vibration des plaque FGM

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la compréhension du comportement statique et dynamique des plaques à gradations fonctionnelles. Reddy [56] a effectué des analyses statiques et dynamiques non linéaires des plaques à gradient fonctionnel par la méthode des éléments finis en utilisant la solution de Navier. Vel et Batra [57] ont présenté des solutions tridimensionnelles exactes pour les vibrations libres et forcées de plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle simplement appuyées. Huang et Shen [58] ont étudié la vibration non linéaire et la réponse dynamique des plaques FGM dans un environnement thermique. Zenkour [59] a démontré que lorsque le composant de la céramique augmente, la charge critique de flambement et la fréquence de vibration de la plaque sandwich FGM augmentent. Li et al. [60] ont effectué une analyse de vibration libre des plaques rectangulaires sandwichs en FGM avec des bords simplement appuyés et encastés. Matsunaga [61] a présenté des analyses de vibrations libres et de flambement des plaques FGM à l'aide d'une théorie bidimensionnelle (2D) d'ordre supérieur. Li et al. [62] ont proposé une solution tridimensionnelle pour l'analyse vibratoire des plaques FGM simplement appuyées et encastées à une seule couche dans un environnement thermique. Wang et Shen [63] ont réalisé des analyses non linéaires de vibrations, de flexion et de flambement pour une plaque sandwich avec des couches FGM dans un environnement thermique reposant sur une fondation élastique. Xiang et al. [64] ont présenté une théorie de la déformation de cisaillement de l'ordre n pour la vibration libre des plaques sandwichs composites et à gradient fonctionnel.

Shen et Zhang [65] ont effectué des analyses non linéaires des vibrations et de flexion en compression des plaques stratifiées FGM renforcées et reposant sur des fondations élastiques de Pasternak et Winkler dans différentes conditions d'environnement hygro-thermique. Neves et al. [66] ont présenté des analyses statiques, de vibration libre et de flambement de plaques isotropes et de plaques sandwichs FGM en utilisant des théories de cisaillement hyperboliques et sinusoidales d'ordre supérieur. Shen et Wang [67] ont réalisé des analyses de vibration de petite et grande amplitude de plaques rectangulaires reposant sur des bases élastiques de Pasternak dans un environnement thermique utilisant des schémas de Voigt et Mori-Tanaka et la théorie d'ordre supérieur. Khalili et Mohammadi [68] ont présenté une théorie améliorée des plaques d'ordre supérieur pour analyser la vibration libre des plaques sandwich dans divers environnements thermiques. Xiang et al. [69] ont utilisé la méthode de collocation globale sans mailles pour l'analyse de vibrations libres de plaques sandwichs à gradient fonctionnel et un cœur homogène. Thai et Vo [70] ont examiné une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement sinusoidale pour la flexion, le flambement et la vibration des plaques à gradations fonctionnelles. Fazzolari et Carrera [71] ont

réalisé une analyse de vibrations libres de plaques sandwichs dans un environnement thermique en utilisant la formulation trigonométrique de Ritz.

Dozio [72] a proposé une méthode de Ritz unifiée pour l'évaluation précise des fréquences naturelles des plaques sandwichs FGM épaisses et minces avec diverses conditions aux limites. Selon Dozio, les théories monocouches équivalentes donnent de bons résultats pour les plaques minces et modérément épaisses, mais ne permettent pas de prédire des résultats précis pour les plaques épaisses et sandwichs où les propriétés élastiques des faces et du cœur sont significativement différentes. Dans de tels cas, l'utilisation de théories «layerwise» devient obligatoire. Dozio [73] a également présenté une analyse de vibration libre de plaques FGM de Levy en utilisant des théories cinématiques 2D d'ordre supérieur. Naves et al. [74] ont effectué des analyses statiques, de vibrations libres et de flambement de plaques isotropes et sandwichs à gradient fonctionnel en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une technique sans maillage. Jha et al. [75] ont étudié le comportement en vibration libre d'une plaque fonctionnellement graduée avec une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une théorie de déformation normale. Kamarian et al. [76] ont étudié les caractéristiques de vibration libre de plaques rectangulaires sandwichs fonctionnelles reposant sur des fondations de Pasternak. Récemment, Alibeigloo [77] a présenté des solutions de vibration libres tridimensionnelles pour des panneaux cylindriques sandwichs avec un cœur fonctionnellement gradué. Thai et al. [78] ont étudié la vibration libre, la flexion et le gauchissement d'une plaque sandwich FGM rectangulaire avec un cœur en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Nguyen [79] a proposé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour la flexion, le flambement critique et les fréquences naturelles des plaques fonctionnellement graduées. Fazzolari et Carrera [80] ont étudié le comportement de vibration forcée non linéaire de plaques rectangulaires épaisses en FGM en considérant des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Tous les travaux cités ci-dessus ont utilisé des formulations analytiques, qui impliquent des procédures de solution encombrantes. De plus, l'application de conditions aux limites est une tâche difficile dans les méthodes analytiques, par conséquent les méthodes comme la méthode des éléments finis (FEM) sont devenues plus populaires parmi les chercheurs pour étudier l'effet de différentes conditions aux limites. Talha et Singh [81] ont examiné le comportement de vibration libre des plaques graduées fonctionnellement en utilisant une formulation d'éléments finis C_0 . Natrajan et Manickam [82] ont étudié le comportement de flexion et de vibration libre d'une plaque sandwich FGM en utilisant des différentes théories d'ordres élevés. Thai et Choi [83] ont réalisé

des analyses de flexion et de vibration de plaques à gradient fonctionnel en utilisant quatre nouvelles théories de déformation de cisaillement.

Le calcul de modes propres est quant à lui notamment utilisé dans le domaine de l'analyse modale qui consiste à exprimer le déplacement quelconque d'une structure dans la base (infinie dans le cas des milieux continus) formée par ses vecteurs propres. C'est une technique couramment employée au niveau analytique aussi bien que dans les codes de calculs par éléments finis par exemple, qui permet de réduire considérablement la taille du système à résoudre. La connaissance de cette base modale permet également d'étudier la stabilité d'une structure soumise à une excitation proportionnelle à un ou plusieurs modes propres.

Dans cette partie, nous allons étudier la vibration libre de deux structures sandwichs en FGM, poutres et plaques, en utilisant la théorie du troisième ordre.

Dans premier temps, on détermine le champ de déplacement et le tenseur de déformation. Et après, les équations de mouvement en appliquant le principe de Hamilton. Et enfin on trouve les solutions mathématique, les fréquences naturelles et modes propres de la structure sandwich FGM en utilisant logiciel de simulation MATLAB (ANNEX A, B).

III.2. Vibration libre des poutres sandwichs en FGM

Prenons le cas d'une poutre sandwich en FGM d'épaisseur uniforme, composée de trois couches, de longueur a et d'épaisseur h . Les faces supérieure et inférieure de la poutre sont à $z = \pm h / 2$ (**Figure I.3**). Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 and $h_3 = h/2$, respectivement.

III.2.1. Equations cinématiques

Le modèle utilisé dans notre étude est le model du troisième ordre de Reddy (TSDT), parce qu'il donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversal et parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Le champ de déplacement est exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x \\ w(x, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Les valeurs u_0 et w_0 sont les composants de déplacement dans les directions de x et de z , respectivement, et φ_x est la rotation de la section transversale de la poutre.

Les déformations associées aux déplacements sont

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 - z\varepsilon_{xx}^1 + f(z)\varepsilon_{xx}^2 \quad (\text{III.2})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{df(z)}{dz} \varphi_x$$

on donne

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^2 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (\text{III.3})$$

Les relations constitutives peuvent être écrites comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients de rigidité sont exprimés comme

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.5})$$

III.2.2. Efforts résultants

Les résultantes de force et de moment peuvent être exprimées en termes de contraintes comme

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} \sigma_x^{(n)} dz, \quad Q_{xz} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{df(z)}{dz} \sigma_{xz}^{(n)} dz \quad (\text{III.6})$$

On peut simplifier l'équation (III.6) comme

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ C_{11} & F_{11} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \end{Bmatrix}, \quad R_{xz} = J_{66} \gamma_{xz} \quad (\text{III.7})$$

Avec

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}, C_{11}, F_{11}, H_{11}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2\} dz, \quad (\text{III.8})$$

$$J_{66} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{66}^{(n)} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^2 dz$$

III.2.3. Energie de déformation

La fonctionnelle de l'énergie de déformation de la poutre à gradient fonctionnel est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{xx}^{(n)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{III.9})$$

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta \varepsilon_x^1 + P_x \delta \varepsilon_x^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dx \quad (\text{III.10})$$

III.2.4. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la poutre en n'importe instant peut être exprimé comme

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dA dx \quad (\text{III.11})$$

III.2.5. Energie potentielle externe

La variation d'énergie potentielle externe donne comme

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L p(x, t) \delta w dx \quad (\text{III.12})$$

Ou $p(x, t)$ est la force appliquée transversale à la surface supérieure de la poutre. Dans l'analyse des vibrations libre de la poutre FGM, on va négliger l'effet de la force.

III.2.6. Principe de Hamilton

Les hypothèses cinématiques (champ de déplacement) étant définies pour la géométrie et le type d'excitation étudiées, l'approche vibrationnelle comprend systématiquement les points suivants

1. Calculs des déformations.
2. Construction de la fonctionnelle de Hamilton.
3. Externalisation de la fonctionnelle de Hamilton.

Afin d'obtenir l'énergie cinétique et de déformation, le principe de Hamilton est écrit comme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt \quad (\text{III.13})$$

III.2.7. Equations du mouvement

Les équations du mouvement appropriées pour le déplacement peuvent être dérivées avec l'utilisation du principe de Hamilton en substitution les **équations (III.10, 11)** dans l'**équation (III.13)**

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2}$$

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - R_{xz} = I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

Où les inerties sont définis par

$$\{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \rho(z)^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2\} dz \quad (\text{III.15})$$

et $\bar{N}_x^0 = -N_T$.

Substitution de l'**équation (III.7)** dans l'**équation (III.14)**

$$A_{11} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w^1}{\partial x^3} + C_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x^1}{\partial x^2} - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} - I_3 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w^1}{\partial x^4} + F_{11} \frac{\partial^3 \varphi_x^1}{\partial x^3} - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} = 0$$

$$C_{11} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} - F_{11} \frac{\partial^3 w^1}{\partial x^3} + H_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x^1}{\partial x^2} - J_{66} \varphi_x^1 - I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} - I_5 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0$$

III.2.8. Solution analytique

Les équations de mouvement sont analytiquement résolues pour des problèmes de vibration libre. Le procédé de solution de Navier est employé pour déterminer les solutions analytiques pour une poutre simplement appuyée. On assume que la solution est de la forme

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ \varphi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Où $\lambda = m\pi/L$, et ω dénote la fréquence naturelle et U_m, W_m, X_m sont des paramètres arbitraires. En remplaçant les **équations (III.17)** dans **(III.16)**, les équations du mouvement devient comme la forme

$$([L] - \omega^2[M]) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Où la matrice $[L]$ et $[M]$ sont la matrice de rigidité et de masse, respectivement

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Avec

$$L_{11} = -A_{11}\lambda^2, \quad L_{12} = B_{11}\lambda^3, \quad L_{13} = -C_{11}\lambda^2, \quad L_{22} = -D_{11}\lambda^4, \quad L_{23} = F_{11}\lambda^3, \quad (\text{III.20})$$

$$L_{33} = -(H_{11}\lambda^2 + J_{66})$$

Et

$$M_{11} = I_0, \quad M_{12} = -I_1\lambda, \quad M_{13} = I_3, \quad M_{22} = I_0 + I_2\lambda^2, \quad (\text{III.21})$$

$$M_{23} = -I_4\lambda, \quad M_{33} = I_5$$

Pour la théorie classique (CPT), $L_{13} = L_{23} = L_{33} = 0$ et $M_{13} = M_{23} = M_{33} = 0$

III.2.9. Résultats et analyses

Considérons une structure sandwich en FGM simplement appuyée, composée d'un mélange de métal et de céramique. La combinaison des matériaux se compose d'alliage de titane et de zircone (Ti-6Al-4V / ZrO₂). Le module de Young pour l'alliage de titane est $E_m=66,2$ GPa et pour la zircone est $E_c=244,27$ GPa. Le coefficient de Poisson est constant ($\nu=0.3$). Le facteur de correction de cisaillement pour FPT est égal à 5/6. Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel est défini par :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (\text{III.22})$$

Dans cette partie, Deux type sandwichs ont été considérée, un sandwich à un cœur isotrope et deux couches de faces en S-FGM (S-FGM Type-A), et un sandwich à une couche inférieure en métal, un cœur en S-FGM et à une couche supérieure en céramique (S-FGM Type-B). Différent types de sandwich sont utilisés :

Le sandwich FGM (1-1-1) : La plaque est composée de trois couches d'épaisseur égales. Dans ce cas, nous avons :

$$h_1 = -\frac{h}{6} , \quad h_2 = \frac{h}{6}$$

Le sandwich FGM (1-2-1) : L'épaisseur du cœur est égale à la somme des épaisseurs des couches des faces. Donc, on obtient :

$$h_1 = -\frac{h}{4} , \quad h_2 = \frac{h}{4}$$

Le sandwich FGM (2-2-1): Dans ce cas, l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la couche inférieure et le double du celle de la couche supérieur

$$h_1 = -\frac{h}{10} , \quad h_2 = \frac{3h}{10}$$

La fréquence adimensionnelle a été donnée dans le **tableau III.1** avec un rapport géométrique $a/h=5$ et $a/h=20$, pour différentes théories et pour différentes distributions de matériaux. Ce tableau montre que la fréquence adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport a/h . On voit que la fréquence adimensionnelle pour $k=0,5$ est plus élevée que pour $k=2$.

L'effet du paramètre de non homogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM a été illustré dans le **tableau III.2** pour le rapport $a/h=5$ et $a/h=20$. On voit que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation du paramètre k .

Pour une valeur fixe de k ($k=2$), les variations des cinq premières fréquences avec le rapport a/h ($a/h=5$ et $a/h=20$) sont montrées sur le **tableau III.3**. Les fréquences sont augmentées quand le mode propre m augmente.

La différence entre les fréquences prédites par la théorie de CBT et les théories déformation de cisaillement (FPT et HPT) diminue avec l'augmentation du rapport a/h , l'augmentation du paramètre k et la diminution du mode propre m .

Tableau III.1. L'effet du paramètre a/h sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM.

Schéma		k	Théorie	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=15$	$a/h=20$	$a/h=25$	$a/h=30$
S-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HBT	4.64738	4.83022	4.86719	4.88039	4.88655	4.88990
			FBT	4.62996	4.82515	4.86487	4.87907	4.88570	4.88931
			CBT	4.81110	4.87551	4.88773	4.89202	4.89401	4.89510
		2	HBT	4.41292	4.57691	4.60990	4.62167	4.62715	4.63014
			FBT	4.39850	4.57268	4.60796	4.62056	4.62644	4.62964
			CBT	4.55271	4.61546	4.62737	4.63156	4.63350	4.63456
	1 2 1	0.5	HBT	4.96047	5.16178	5.20258	5.21715	5.22395	5.22765
			FBT	4.94566	5.15743	5.20058	5.21601	5.22321	5.22714
			CBT	5.14334	5.21245	5.22556	5.23017	5.23230	5.23347
		2	HBT	4.81717	5.00806	5.04664	5.06041	5.06683	5.07033
			FBT	4.80599	5.00472	5.04510	5.05953	5.06627	5.06994
			CBT	4.98663	5.05493	5.06789	5.07245	5.07456	5.07571
	2 2 1	0.5	HBT	4.79894	4.99351	5.03294	5.04702	5.05359	5.05717
			FBT	4.78406	4.98915	5.03094	5.04589	5.05286	5.05667
			CBT	4.97525	5.04237	5.05510	5.05958	5.06166	5.06278
		2	HBT	4.59183	4.76899	4.80473	4.81749	4.82343	4.82667
			FBT	4.57886	4.76516	4.80297	4.81648	4.82279	4.82622
			CBT	4.74540	4.81145	4.82398	4.82839	4.83043	4.83154
S-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HBT	4.15336	4.34118	4.37971	4.39351	4.39995	4.40347
			FBT	4.15038	4.34039	4.37935	4.39331	4.39983	4.40338
			CBT	4.31512	4.38693	4.40054	4.40533	4.40755	4.40876
		2	HBT	4.10477	4.28807	4.32564	4.33910	4.34538	4.34881
			FBT	4.10076	4.28699	4.32516	4.33882	4.34520	4.34869
			CBT	4.25926	4.33181	4.34556	4.35040	4.35264	4.35386
	1 2 1	0.5	HBT	4.23512	4.43050	4.47063	4.48500	4.49172	4.49538
			FBT	4.23363	4.43013	4.47046	4.48491	4.49166	4.49534
			CBT	4.40924	4.47967	4.49301	4.49770	4.49988	4.50106
		2	HBT	4.13274	4.31861	4.35673	4.37038	4.37676	4.38023
			FBT	4.12930	4.31770	4.35632	4.37015	4.37661	4.38013
			CBT	4.29137	4.36350	4.37717	4.38198	4.38421	4.38542
	2 2 1	0.5	HBT	3.97829	4.17497	4.21565	4.23025	4.23708	4.24080
			FBT	3.98523	4.17714	4.21666	4.23083	4.23745	4.24106
			CBT	4.15719	4.22585	4.23885	4.24342	4.24554	4.24670
		2	HBT	3.94848	4.14740	4.18864	4.20345	4.21037	4.21415
			FBT	3.95987	4.15091	4.19026	4.20437	4.21097	4.21457
			CBT	4.12817	4.19868	4.21203	4.21673	4.21891	4.22009

La **figure III.1** représente la variation de la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction du paramètre de non homogénéité k pour le rapport $a/h=5$ et pour le mode $m=1$. Les fréquences sont plus élevées pour $k=0$, et décroît rapidement dans la zone de $k=0$ à $k=2$.

Ensuite, plus l'indice k prend des valeurs supérieures, ces fréquences gardent des valeurs sensiblement constantes.

L'effet du rapport d'épaisseur a/h sur la fréquence adimensionnelle est représenté dans la **figure III.2** pour une valeur de $k=2$ et $m=1$. Dans la zone de $a/h=5$ à $a/h=10$, la fréquence adimensionnelle augmente rapidement, et ensuite, ces fréquences gardent des valeurs sensiblement constantes.

Tableau III.2. L'effet de paramètre de non homogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM.

a/h	k	Théorie	S-FGM TYPE-A			S-FGM TYPE-B		
			1 1 1	1 2 1	2 2 1	1 1 1	1 2 1	2 2 1
5	0	HBT	4.92485	5.13579	5.04398	4.21136	4.34730	4.00888
		FBT	4.90460	5.11639	5.02737	4.20957	4.34772	4.01032
		CBT	5.12186	5.33643	5.25102	4.38199	4.53909	4.18601
	0.5	HBT	4.64738	4.96047	4.79894	4.15336	4.23512	3.97829
		FBT	4.62996	4.94566	4.78406	4.15038	4.23363	3.98523
		CBT	4.81110	5.14334	4.97525	4.31512	4.40924	4.15719
	1	HBT	4.52140	4.88293	4.68764	4.12719	4.18090	3.96268
		FBT	4.50558	4.87011	4.67379	4.12366	4.17840	3.97202
		CBT	4.67186	5.05844	4.85143	4.28502	4.34675	4.14206
	2	HBT	4.41292	4.81717	4.59183	4.10477	4.13274	3.94848
		FBT	4.39850	4.80599	4.57886	4.10076	4.12930	3.95987
		CBT	4.55271	4.98663	4.74540	4.25926	4.29137	4.12817
	5	HBT	4.33344	4.76958	4.52168	4.08841	4.09663	3.93764
		FBT	4.31996	4.75952	4.50925	4.08404	4.09244	3.95055
		CBT	4.46572	4.93473	4.66798	4.24048	4.24991	4.11752
20	0	HBT	5.19068	5.40997	5.32176	4.21136	4.34730	4.00888
		FBT	5.18916	5.40851	5.32051	4.20957	4.34772	4.01032
		CBT	5.20475	5.42429	5.33657	4.38199	4.53909	4.18601
	0.5	HBT	4.88039	5.21715	5.04702	4.15336	4.23512	3.97829
		FBT	4.87907	5.21601	5.04589	4.15038	4.23363	3.98523
		CBT	4.89202	5.23017	5.05958	4.31512	4.40924	4.15719
	1	HBT	4.74105	5.13226	4.92343	4.12719	4.18090	3.96268
		FBT	4.73985	5.13126	4.92237	4.12366	4.17840	3.97202
		CBT	4.75172	5.14474	4.93508	4.28502	4.34675	4.14206
	2	HBT	4.62167	5.06041	4.81749	4.10477	4.13274	3.94848
		FBT	4.62056	5.05953	4.81648	4.10076	4.12930	3.95987
		CBT	4.63156	5.07245	4.82839	4.25926	4.29137	4.12817
	5	HBT	4.53444	5.00845	4.74006	4.08841	4.09663	3.93764
		FBT	4.53341	5.00766	4.73910	4.08404	4.09244	3.95055
		CBT	4.54379	5.02018	4.75044	4.24048	4.24991	4.11752

Tableau III.3. L'effet du mode propre sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM.

a/h	m	Théorie	S-FGM TYPE-A			S-FGM TYPE-B		
			1 1 1	1 2 1	2 2 1	1 1 1	1 2 1	2 2 1
5	1	HBT	4.41292	4.81717	4.59183	4.10477	4.13274	3.94848
		FBT	4.39850	4.80599	4.57886	4.10076	4.12930	3.95987
		CBT	4.55271	4.98663	4.74540	4.25926	4.29137	4.12817
	2	HBT	15.68507	17.01065	16.26094	14.33668	14.42159	13.60306
		FBT	15.54522	16.90847	16.13729	14.28494	14.37639	13.69858
		CBT	17.30034	18.95498	18.02280	15.98340	16.11658	15.48451
	3	HBT	30.64434	33.02973	31.66362	27.65765	27.79531	25.94013
		FBT	30.24613	32.75882	31.31711	27.45273	27.61327	26.16579
		CBT	36.10288	39.57133	37.57607	32.71551	33.02192	31.65408
	4	HBT	47.32870	50.75834	48.77926	42.44321	42.61667	39.46750
		FBT	46.60630	50.30233	48.15778	41.93117	42.15550	39.77761
		CBT	58.69615	64.36054	61.01617	51.98161	52.51935	50.19154
	5	HBT	64.79863	69.21981	66.66118	58.00988	58.19949	53.60393
		FBT	63.73641	68.59638	65.75284	56.99986	57.27927	53.87513
		CBT	83.36054	91.43721	86.53210	72.14399	72.94517	69.49480
20	1	HBT	4.62167	5.06041	4.81749	4.33910	4.37038	4.20345
		FBT	4.62056	5.05953	4.81648	4.33882	4.37015	4.20437
		CBT	4.63156	5.07245	4.82839	4.35040	4.38198	4.21673
	2	HBT	18.30767	20.03224	19.07597	17.15228	17.27446	16.58960
		FBT	18.29074	20.01888	19.06065	17.14799	17.27080	16.60364
		CBT	18.46185	20.21973	19.24581	17.32724	17.45400	16.79473
	3	HBT	40.55252	44.32627	42.22890	37.87139	38.13601	36.53987
		FBT	40.47253	44.26363	42.15670	37.85029	38.11797	36.60476
		CBT	41.30103	45.23523	43.05246	38.71109	38.99791	37.52079
	4	HBT	70.60687	77.07483	73.46941	65.67642	66.12387	63.17582
		FBT	70.37602	76.89595	73.26177	65.61228	66.06883	63.35796
		CBT	72.84340	79.78618	75.92655	68.14829	68.66194	66.05074
	5	HBT	107.58247	117.25867	111.84645	99.62992	100.28856	95.51459
		FBT	107.07691	116.87182	111.39354	99.48046	100.15976	95.90091
		CBT	112.68232	123.42978	117.43990	105.16793	105.97743	101.92530

Sur la **figure III.3**, on représente la fréquence adimensionnelle en fonction du mode propre m . la fréquence augmente avec l'augmentation du mode m pour toutes les types de poutre sandwich.

Dans les **figures III.1-III.3** on note que les poutres sandwichs de type A ont donné des valeurs des fréquences plus grandes que les poutres de type B. Aussi, les valeurs obtenues pour les schémas (2-2-1) sont plus élevées que pour les autres schémas des poutres sandwichs FGM.

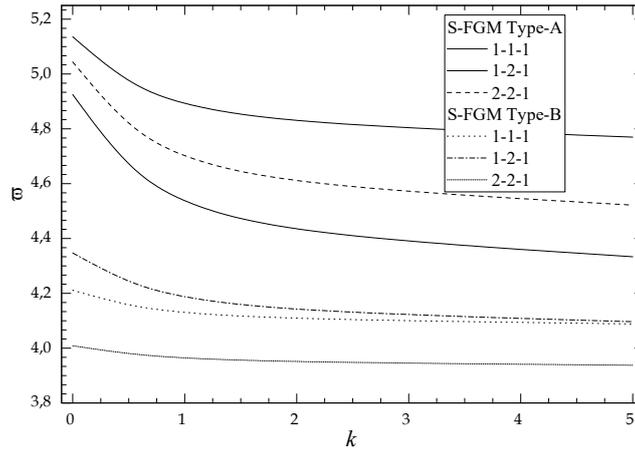


Figure III.1. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction du paramètre de non homogénéité k ($a/h=5, m=1$).

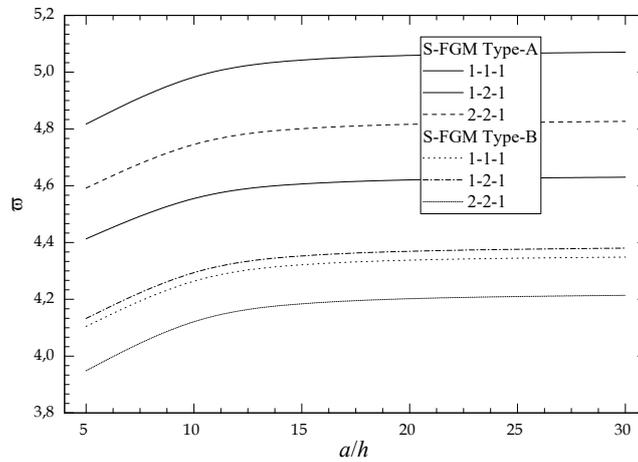


Figure III.2. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction rapport a/h ($k=2, m=1$).

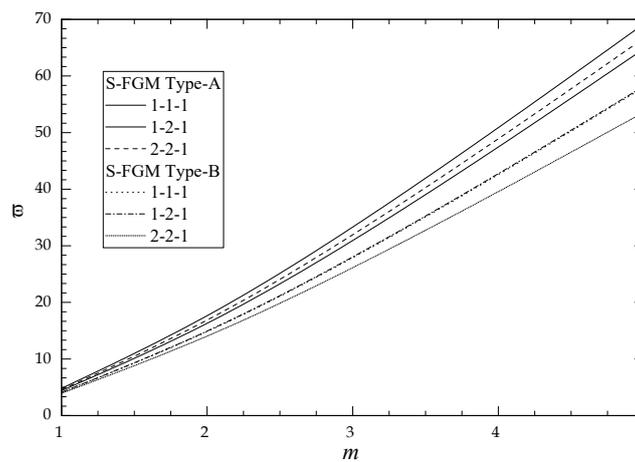


Figure III.3. Fréquence adimensionnelle d'une poutre sandwich S-FGM en fonction du mode m ($a/h=5, k=2$).

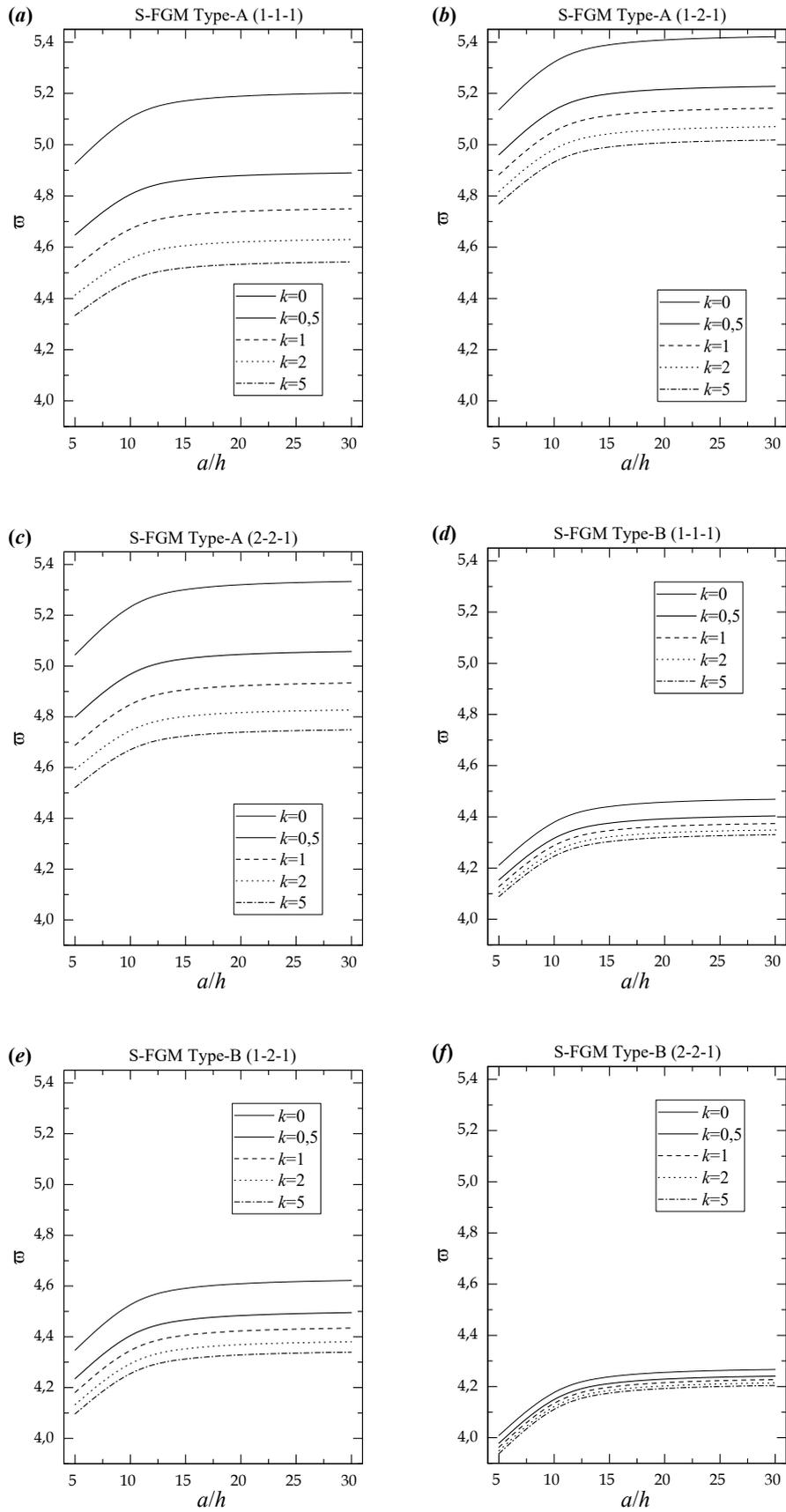


Figure III.4. Fréquence adimensionnelle de différents types des poutres sandwichs S-FGM en fonction du rapport a/h ($k=2, m=1$).

La **figure III.4** montre la variation de la fréquence $\bar{\omega}$ sous l'effet de l'indice k et du rapport géométrique a/h . On remarque que la différence des résultats de la fréquence adimensionnelle entre les schémas des poutres sandwichs de type A sont plus large que les schémas des poutres sandwichs de type B.

III.2.10. Conclusion

Dans cette partie, L'analyse des vibrations libres des poutres sandwichs fonctionnellement graduées et simplement appuyées est examinée en utilisant la théorie des poutres classique (CBT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FBT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HBT). On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre sandwich seulement selon une fonction sigmoïde (S-FGM). Deux types de poutre sandwich en S-FGM est considérés, sandwich avec des peaux en S-FGM et cœur homogène en céramique (Type-A), et sandwich avec deux peaux homogènes et un cœur S-FGM (Type-B). L'équation du mouvement de la poutre FGM est obtenue par le principe d'Hamilton. Les conclusions suivantes peuvent être tirées de l'analyse actuelle :

1. Les fréquences adimensionnelles de la poutre diminuent quand l'indice de la fraction volumique k augmente.
2. Les fréquences adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h et du mode propre m .
3. La variation des fréquences adimensionnelles des poutres sandwichs de type A sont plus grande que des poutres sandwichs de type B.

III.3. Vibration libre des plaques sandwichs en FGM

Considérons une plaque sandwichs en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la figure 1. Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$. Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par $h_0 = -h/2, h_1, h_2$ and $h_3 = h/2$, respectivement.

III.3.1. Equations cinématiques

Le champ de déplacement peut être donné comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Les déformations associées aux déplacements sont de la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Les déformations peuvent être exprimées comme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{zz} &= 0, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{df(z)}{dz} \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Avec

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

Les relations linéaires de contrainte-déplacement sont

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Où

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12}^{(n)} = \nu Q_{11}^{(n)}, \quad Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.28})$$

III .3.2. Efforts résultants

Les résultantes de force et de moment peuvent être exprimées en termes de contraintes comme

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} z dz \quad (\text{III.29})$$

Les contraintes associées aux effets de cisaillement transverse (P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}) et les résultantes des contraintes de cisaillement transverse (R_{yz}, R_{xz}) sont définis comme

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} f(z) dz, \quad \begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \frac{df(z)}{dz} dz \quad (\text{III.30})$$

Les efforts résultants dans la plaque FGM peuvent être reliés aux déformations par

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [B] & [D] & [F] \\ [C] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^2\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Où

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy}\}^T, \quad \{M\} = \{M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy}\}^T, \quad \{P\} = \{P_{xx} \quad P_{yy} \quad P_{xy}\}^T \\ \{\varepsilon^0\} &= \{\varepsilon_{xx}^0 \quad \varepsilon_{yy}^0 \quad \gamma_{xy}^0\}^T, \quad \{\varepsilon^1\} = \{\varepsilon_{xx}^1 \quad \varepsilon_{yy}^1 \quad \gamma_{xy}^1\}^T, \quad \{\varepsilon^2\} = \{\varepsilon_{xx}^2 \quad \varepsilon_{yy}^2 \quad \gamma_{xy}^2\}^T \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Ici, les coefficients $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ sont les éléments de la matrice de rigidités et définies par

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij}^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2\} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$J_{ii} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ii}^{(n)} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^2 dz, \quad (i = 4, 5) \quad (\text{III.33})$$

III.3.3. Energie de déformation

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{xx}^{(n)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(n)} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}^{(n)} \gamma_{xy} + \sigma_{yz}^{(n)} \gamma_{yz} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{III.34})$$

En intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque sandwich, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 + P_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^2 + \right. \\ \left. P_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^2 + P_{xy} \delta \gamma_{xy}^2 + R_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + R_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 \right] dx dy \quad (\text{III.35})$$

III.3.4. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la plaque en n'importe instant peut être exprimé comme

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dA dx \quad (\text{III.36})$$

III.3.5. Equations du mouvement

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton comme

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \\ I_4 \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_{xz} = I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - R_{yz} = I_3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

III.3.6. Solution analytique

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit

$$\begin{aligned} \{u_0, \varphi_x\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{mn}, X_{mn}\} \cos(\lambda x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \{v_0, \varphi_y\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{mn}, Y_{mn}\} \sin(\lambda x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\beta y) e^{i\omega t}$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer. $\lambda = m\pi/L$ et $\beta = n\pi/L$. Les équations du mouvement deviennent comme la forme

$$([L] - \omega^2[M]) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Où la matrice $[L]$ et $[M]$ sont la matrice de rigidité et de masse, respectivement.

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & M_{45} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

Les éléments de la matrice $[L]$ et $[M]$ sont donnés comme

$$\begin{aligned} L_{11} &= -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{A}, & L_{12} &= -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{A}, \\ L_{13} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B}, & L_{14} &= -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{C}, \\ L_{15} &= -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{C}, & L_{22} &= -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{A}, \\ L_{23} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B}, & L_{24} &= L_{15}, \\ L_{25} &= -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{C}, & L_{33} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D}, \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

$$L_{34} = 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F}, \quad L_{35} = 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F},$$

$$L_{44} = -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J}, \quad L_{45} = -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{H},$$

$$L_{55} = -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J}$$

Où

$$\mathfrak{N}_{11} = \mathfrak{N}_{22} = \bar{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N}_{12} = \nu\bar{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N}_{66} = \frac{1-\nu}{2}\bar{\mathfrak{N}}, \quad J_{44} = J_{55} = \bar{J}, \quad (\mathfrak{N} = A, B, C, D, F, H) \quad (\text{III.42})$$

et

$$\begin{aligned} M_{11} = I_0, \quad M_{12} = 0, \quad M_{13} = -\lambda I_1, \quad M_{14} = I_3, \quad M_{15} = 0, \quad M_{22} = I_0, \\ M_{23} = -\beta I_1, \quad M_{14} = 0, \quad M_{15} = I_3, \quad M_{33} = I_0 - I_2(\lambda^2 + \beta^2), \quad M_{34} = -\lambda I_4 \\ M_{35} = -\beta I_4, \quad M_{44} = I_5, \quad M_{45} = 0, \quad M_{55} = I_5 \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Pour la théorie classique (CPT) : $L_{14} = L_{15} = L_{24} = L_{25} = L_{34} = L_{35} = L_{44} = L_{45} = L_{55} = 0$

et $M_{14} = M_{15} = M_{24} = M_{25} = M_{34} = M_{35} = M_{44} = M_{45} = M_{55} = 0$

III.3.7. Résultat et analyses

L'effet du paramètre géométrique a/h sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM rectangulaire a été illustré dans le **tableau III.4** pour le paramètre $k=0.5$ et $k=2$ et pour des différentes théories des plaques.

Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel des plaques FGM est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (\text{III.44})$$

Où $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ et $E_0 = 1 \text{ GPa}$.

Tableau III.4. L'effet du paramètre a/h sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM.

		Schéma	k	Théorie	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=15$	$a/h=25$	$a/h=50$
S-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HPT	1.20243	1.29678	1.31751	1.32862	1.33341	
			FPT	1.19705	1.29497	1.31665	1.32830	1.33333	
			CPT	1.28944	1.32318	1.32972	1.33311	1.33454	
		2	HPT	0.92938	0.98991	1.00287	1.00977	1.01273	
			FPT	0.92217	0.98757	1.00177	1.00936	1.01263	
			CPT	0.97795	1.00441	1.00956	1.01222	1.01335	
	1 2 1	0.5	HPT	1.15955	1.24757	1.26682	1.27712	1.28157	
			FPT	1.15352	1.24556	1.26587	1.27677	1.28148	
			CPT	1.23876	1.27154	1.27790	1.28120	1.28259	
		2	HPT	1.12711	1.21082	1.22905	1.23879	1.24299	
			FPT	1.12267	1.20928	1.22831	1.23851	1.24292	
			CPT	1.20063	1.23301	1.23930	1.24255	1.24394	
2 2 1	0.5	HPT	1.22909	1.32747	1.34915	1.36078	1.36580		
		FPT	1.22446	1.32590	1.34840	1.36050	1.36573		
		CPT	1.32074	1.35534	1.36205	1.36552	1.36699		
	2	HPT	0.97518	1.04174	1.05609	1.06373	1.06702		
		FPT	0.96888	1.03967	1.05511	1.06336	1.06692		
		CPT	1.02967	1.05811	1.06364	1.06650	1.06771		
S-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HPT	1.08778	1.16793	1.18539	1.19473	1.19875	
			FPT	1.08062	1.16558	1.18428	1.19431	1.19865	
			CPT	1.15881	1.18937	1.19530	1.19837	1.19967	
		2	HPT	1.03520	1.10751	1.12313	1.13146	1.13504	
			FPT	1.02934	1.10555	1.12220	1.13111	1.13495	
			CPT	1.09604	1.12578	1.13156	1.13455	1.13582	
	1 2 1	0.5	HPT	1.11464	1.21707	1.24036	1.25297	1.25844	
			FPT	1.11384	1.21687	1.24027	1.25293	1.25843	
			CPT	1.19466	1.24307	1.25256	1.25749	1.25958	
		2	HPT	1.07823	1.17484	1.19673	1.20857	1.21371	
			FPT	1.07648	1.17435	1.19650	1.20849	1.21369	
			CPT	1.15027	1.19833	1.20776	1.21266	1.21474	
2 2 1	0.5	HPT	1.12185	1.20692	1.22552	1.23548	1.23977		
		FPT	1.11577	1.20490	1.22457	1.23512	1.23968		
		CPT	1.19818	1.23003	1.23621	1.23941	1.24076		
	2	HPT	1.07558	1.15343	1.17033	1.17935	1.18324		
		FPT	1.07034	1.15166	1.16949	1.17904	1.18316		
		CPT	1.14223	1.17353	1.17961	1.18276	1.18410		

Le **tableau III.5** représente la fréquence adimensionnelle en fonction du paramètre géométrique a/b pour la valeur de $k=0.5$ et $k=2$ et pour $a/h=10$. L'effet de paramètre de non homogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM a été représenté dans le **tableau III.6** pour $a/h=5$ et $a/h=20$. Le **tableau III.7** représente l'influence des modes

propres n et m sur la fréquence adimensionnelle. On remarque que les fréquences adimensionnelle sont augmentées quand les modes propres m et n augmentent. la différence entre la théorie classique et les théories de déformation des déformations augmente avec l'augmentation des nombre de modes.

Tableau III.5. L'effet du paramètre a/b sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM.

		Schéma	k	Théorie	$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
S-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HPT	0.81914	1.29678	3.11584	5.88043	9.33132	13.25342	
			FPT	0.81841	1.29497	3.10618	5.84955	9.26224	13.12950	
			CPT	0.82974	1.32318	3.26496	6.39377	10.56844	15.62425	
		2	HPT	0.62412	0.98991	2.39464	4.56024	7.30589	10.47170	
			FPT	0.62317	0.98757	2.38189	4.51854	7.21083	10.29902	
			CPT	0.62992	1.00441	2.47730	4.84791	8.00614	11.82431	
	1 2 1	0.5	HPT	0.78778	1.24757	3.00148	5.67428	9.02031	12.83341	
			FPT	0.78696	1.24556	2.99069	5.63963	8.94269	12.69417	
			CPT	0.79739	1.27154	3.13708	6.14194	10.14921	14.99949	
		2	HPT	0.76438	1.21082	2.91554	5.51764	8.78017	12.50214	
			FPT	0.76375	1.20928	2.90744	5.49238	8.72580	12.40930	
			CPT	0.77327	1.23301	3.04125	5.95200	9.83048	14.52029	
2 2 1	0.5	HPT	0.83872	1.32747	3.18704	6.00851	9.52411	13.51326		
		FPT	0.83808	1.32590	3.17869	5.98192	9.46489	13.40738		
		CPT	0.84991	1.35534	3.344277	6.54891	10.82427	16.00106		
	2	HPT	0.65709	1.04174	2.51603	4.78119	7.64233	10.92984		
		FPT	0.65624	1.03967	2.50482	4.74488	7.56044	10.78266		
		CPT	0.66364	1.05811	2.60902	5.10339	8.42289	12.43031		
S-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HPT	0.73725	1.16793	2.81304	5.32608	8.48063	12.08486	
			FPT	0.73630	1.16558	2.80030	5.28473	8.38676	11.91420	
			CPT	0.74585	1.18937	2.93449	5.74572	9.49537	14.03468	
		2	HPT	0.69873	1.10751	2.67275	5.07337	8.09927	11.56862	
			FPT	0.69793	1.10555	2.66223	5.03972	8.02454	11.43659	
			CPT	0.70604	1.12578	2.77653	5.43321	8.97214	13.24998	
	1 2 1	0.5	HPT	0.77037	1.21707	2.90408	5.43477	8.55661	12.07609	
			FPT	0.77029	1.21687	2.90281	5.42981	8.54286	12.04564	
			CPT	0.78091	1.24307	3.04573	5.89764	9.60558	13.95696	
		2	HPT	0.74340	1.17484	2.80652	5.26018	8.29531	11.72632	
			FPT	0.74320	1.17435	2.80363	5.24966	8.26804	11.66946	
			CPT	0.75292	1.19833	2.93427	5.67637	9.23420	13.39993	
2 2 1	0.5	HPT	0.76210	1.20692	2.90379	5.48997	8.72823	12.41954		
		FPT	0.76127	1.20490	2.89293	5.45495	8.64928	12.27693		
		CPT	0.77137	1.23003	3.03450	5.94050	9.81482	14.50212		
	2	HPT	0.72796	1.15343	2.77999	5.26793	8.39473	11.97022		
		FPT	0.72723	1.15166	2.77055	5.23796	8.32873	11.85456		
		CPT	0.73601	1.17353	2.89392	5.66165	9.34639	13.79695		

Tableau III.6. L'effet de paramètre de non homogénéité k sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM.

a/h	k	Théorie	S-FGM TYPE-A			S-FGM TYPE-B		
			1 1 1	1 2 1	2 2 1	1 1 1	1 2 1	2 2 1
5	0	HPT	1.50701	1.19905	1.50701	1.14929	1.15457	1.17606
		FPT	1.50668	1.19103	1.50668	1.14088	1.15473	1.16918
		CPT	1.65103	1.28579	1.65103	1.23444	1.24391	1.26542
	0.5	HPT	1.20243	1.15955	1.22909	1.08778	1.11464	1.12185
		FPT	1.19705	1.15352	1.22446	1.08062	1.11384	1.11577
		CPT	1.28944	1.23876	1.32074	1.15881	1.19466	1.19818
	1	HPT	1.05958	1.14201	1.09702	1.05958	1.09555	1.09702
		FPT	1.05312	1.13685	1.09140	1.05312	1.09426	1.09140
		CPT	1.12498	1.21810	1.16803	1.12498	1.17130	1.16803
	2	HPT	0.92938	1.12711	0.97518	1.03520	1.07823	1.07558
		FPT	0.92217	1.12267	0.96888	1.02934	1.07648	1.07034
		CPT	0.97795	1.20063	1.02967	1.09604	1.15027	1.14223
	5	HPT	0.82215	1.11632	0.87267	1.01730	1.06415	1.05985
		FPT	0.81413	1.11236	0.86573	1.01185	1.06205	1.05486
		CPT	0.85927	1.18801	0.91555	1.07493	1.13342	1.12339
20	0	HPT	1.68922	1.32075	1.68922	1.26716	1.29727	1.29906
		FPT	1.68921	1.32004	1.68921	1.26643	1.29730	1.29845
		CPT	1.70098	1.32770	1.70098	1.27399	1.30505	1.30625
	0.5	HPT	1.32506	1.27383	1.35705	1.19174	1.24892	1.23230
		FPT	1.32457	1.27328	1.35663	1.19110	1.24887	1.23175
		CPT	1.33203	1.28015	1.36442	1.19739	1.25593	1.23839
	1	HPT	1.15785	1.25317	1.20224	1.15785	1.22578	1.20224
		FPT	1.15727	1.25269	1.20173	1.15727	1.22569	1.20173
		CPT	1.16303	1.25923	1.20790	1.16303	1.23242	1.20790
	2	HPT	1.00757	1.23567	1.06129	1.12880	1.20478	1.17647
		FPT	1.00694	1.23525	1.06072	1.12826	1.20465	1.17598
		CPT	1.01137	1.24152	1.06559	1.13360	1.21111	1.18176
	5	HPT	0.88565	1.22302	0.94443	1.10757	1.18771	1.15763
		FPT	0.88497	1.22264	0.94383	1.10707	1.18755	1.15717
		CPT	0.88854	1.22872	0.94780	1.11211	1.19380	1.16267

Tableau III.7. L'effet du mode propre sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM.

a/h	m	Théorie	S-FGM TYPE-A			S-FGM TYPE-B		
			1 1 1	1 2 1	2 2 1	1 1 1	1 2 1	2 2 1
5	1, 1	HPT	0.92938	1.12711	0.97518	1.035208	1.07823	1.07558
		FPT	0.92217	1.12267	0.96888	1.02934	1.07648	1.07034
		CPT	0.97795	1.20063	1.02967	1.09604	1.15027	1.14223
	1, 2	HPT	2.10024	2.51799	2.19518	2.32537	2.37221	2.40869
		FPT	2.07017	2.50116	2.16938	2.30197	2.36315	2.38808
		CPT	2.32685	2.85717	2.44734	2.60753	2.66748	2.71592
	2, 2	HPT	3.10193	3.69029	3.23387	3.42043	3.45015	3.53602
		FPT	5.87941	3.66097	3.18595	3.37788	3.42999	3.49891
		CPT	3.04538	4.37083	3.73963	3.98800	3.99029	4.15149
	1, 3	HPT	3.20929	4.38943	3.52768	4.07606	4.09140	4.20968
		FPT	3.14306	4.35253	3.47421	4.02116	4.06227	4.16201
		CPT	3.81367	5.31360	4.17901	4.84754	4.78722	5.04443
	2, 3	HPT	4.53454	5.34686	4.71395	4.97644	4.97012	5.13362
		FPT	4.43396	5.29980	4.62994	4.90407	4.92561	5.07111
		CPT	5.40841	6.64321	5.67410	6.05946	5.88052	6.30222
3, 3	HPT	5.77097	6.76228	5.98772	6.31198	6.27420	6.50215	
	FPT	5.62898	6.70117	5.87034	6.21340	6.19991	6.41751	
	CPT	7.05872	8.67156	7.39528	7.90766	7.49027	8.21748	
20	1, 1	HPT	1.00757	1.23567	1.06129	1.12880	1.20478	1.17647
		FPT	1.00694	1.23525	1.06072	1.12826	1.20465	1.17598
		CPT	1.01137	1.24152	1.06559	1.13360	1.21111	1.18176
	1, 2	HPT	2.49648	3.05754	2.62836	2.79492	2.97361	2.91184
		FPT	2.49269	3.05502	2.62499	2.79172	2.97283	2.90895
		CPT	2.51970	3.09311	2.65459	2.82418	3.01170	2.94407
	2, 2	HPT	3.95966	4.84331	4.16699	4.43007	4.69937	4.61374
		FPT	3.95030	4.83715	4.15870	4.42222	4.69740	4.60665
		CPT	4.01767	4.93205	4.23247	4.50313	4.79332	4.69415
	1, 3	HPT	4.31592	6.01474	4.76805	5.50376	5.82741	5.73063
		FPT	4.30383	6.00540	4.75771	5.49183	5.82437	5.71985
		CPT	4.40398	6.15107	4.86584	5.61606	5.97070	5.85415
	2, 3	HPT	6.34445	7.74462	6.67202	7.09079	7.48777	7.38061
		FPT	6.32115	7.72952	6.65144	7.07139	7.48270	7.36313
		CPT	6.49173	7.96934	6.83801	7.27602	7.72149	7.58424
	3, 3	HPT	8.66637	10.55910	9.10793	9.67644	10.17635	10.06669
		FPT	8.62415	10.53213	9.07077	9.64153	10.16689	10.03532
		CPT	8.93819	10.97288	9.41389	10.01791	10.59955	10.44169

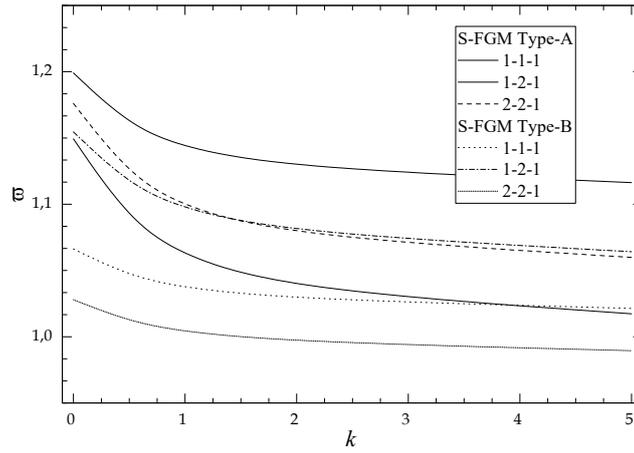


Figure III.5. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction du paramètre de non homogénéité k ($a/h=5, m=n=1$).

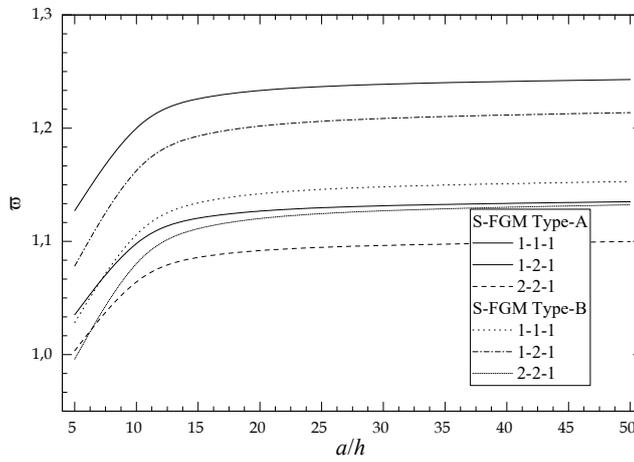


Figure III.6. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction du rapport a/h ($k=2, a/b=1, m=n=1$).

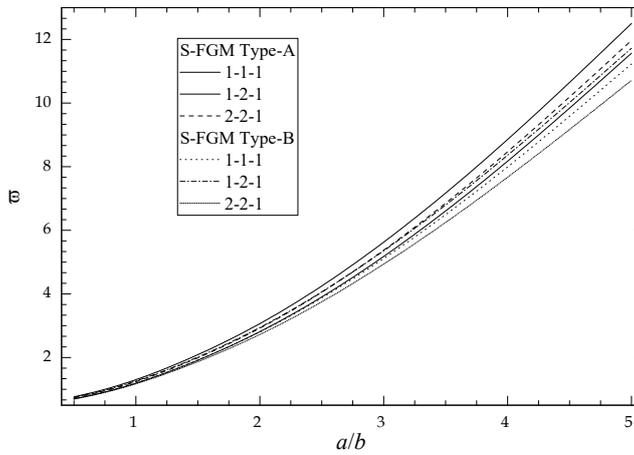


Figure III.7. Fréquence adimensionnelle d'une plaque sandwich S-FGM en fonction du rapport a/b ($k=2, a/h=5, m=n=1$).

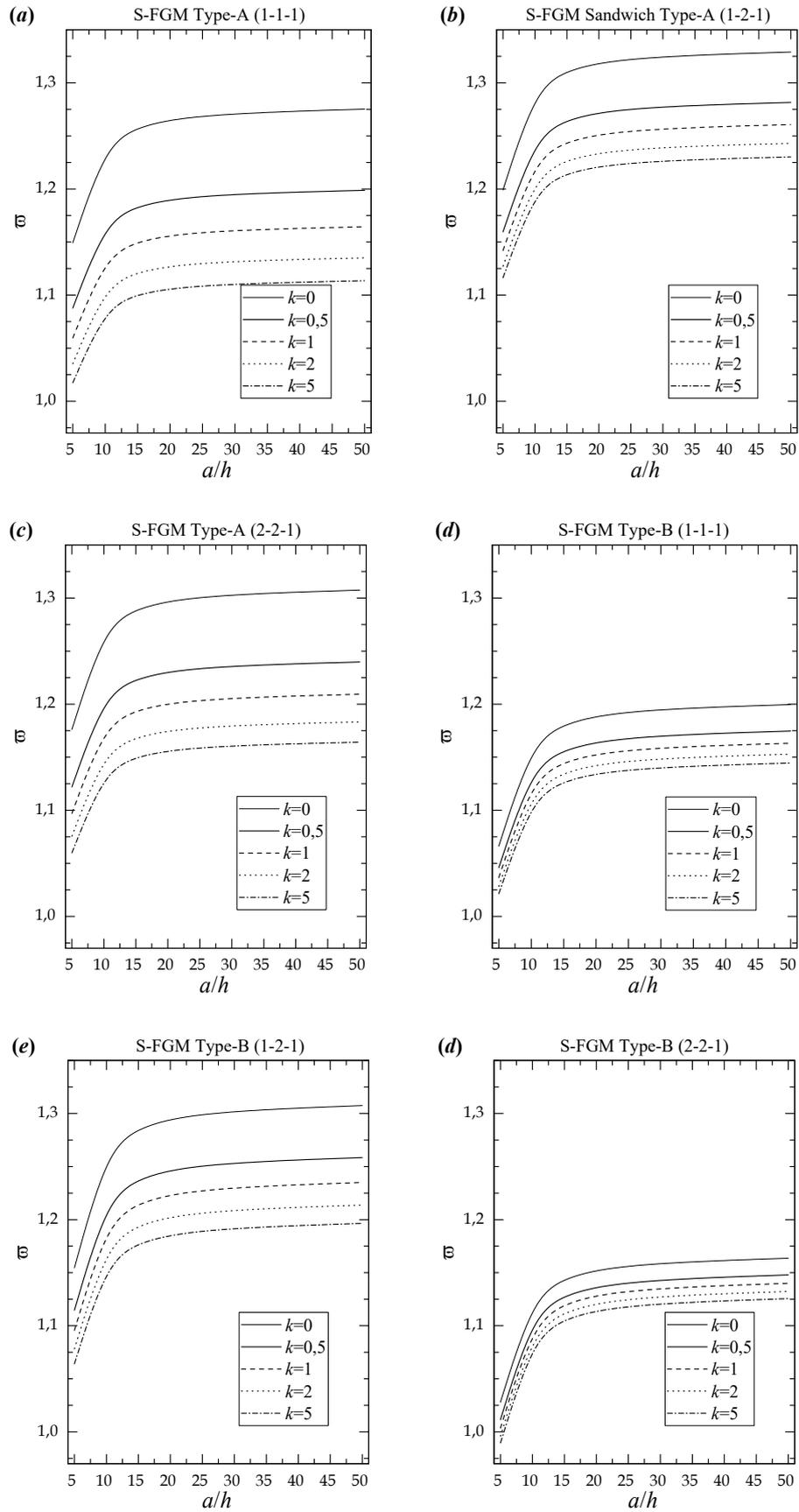


Figure III.8. Fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction du rapport a/h ($k=2, a/b=1, m=n=1$).

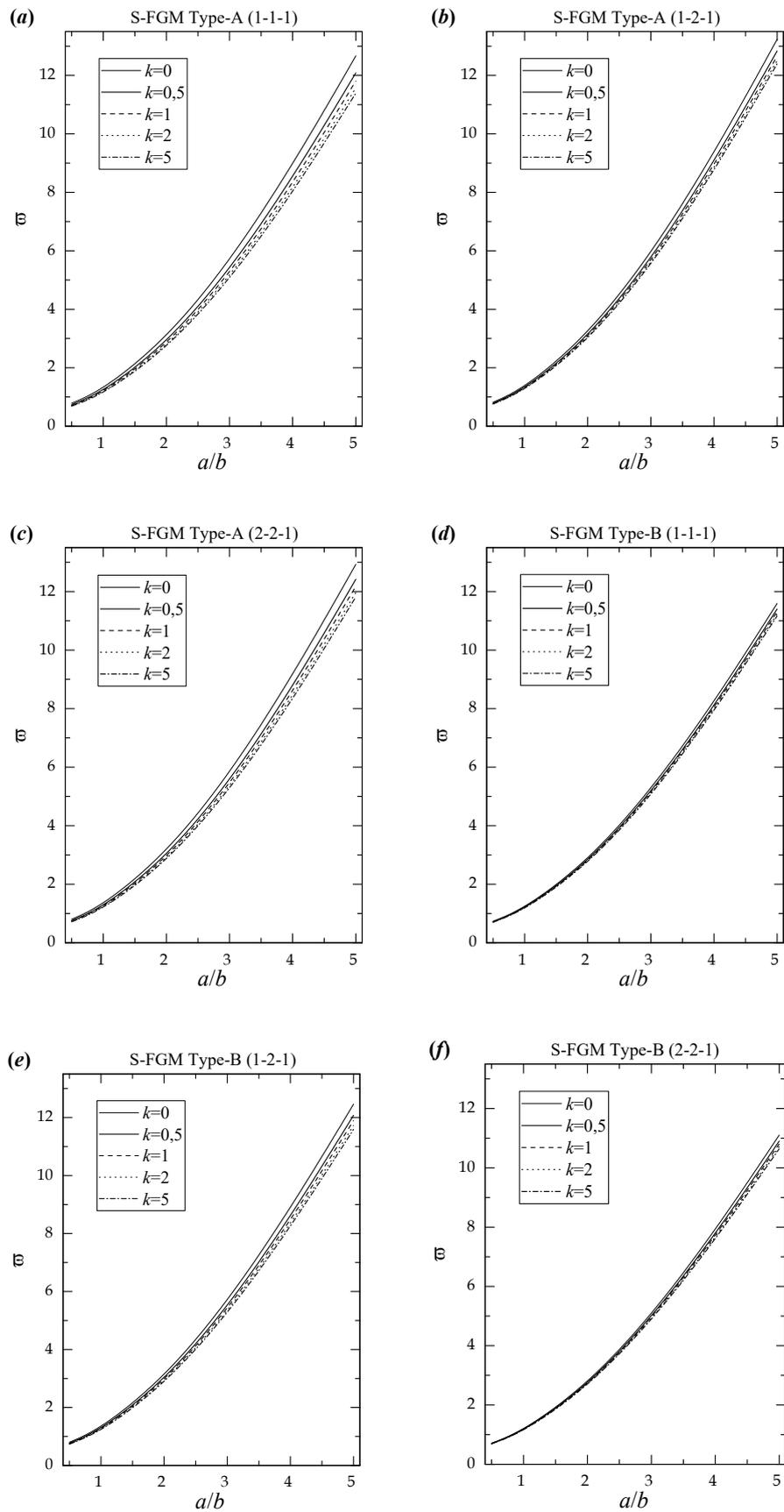


Figure III.9. Fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction du rapport a/b ($k=2, a/h=10, m=n=1$).

L'effet du paramètre de non homogénéité k sur la fréquence adimensionnelle pour différents schémas de sandwich a été illustré dans la **figure III.5**. Les fréquences sont plus élevées pour $k=0$, notamment dans les sandwichs de type A, et décroît rapidement dans la zone de $k=0$ à $k=2$. Ensuite, plus l'indice k prend des valeurs supérieures, ces fréquences gardent des valeurs sensiblement constantes.

Pour des valeurs fixes de $k=2$ et $a/b=1$, les fréquences propres adimensionnelles augmentent lorsque le rapport a/h augmente (**Figure III.6**), ces fréquences gardent des valeurs sensiblement constantes pour $a/h > 20$.

La fréquence en fonction du rapport géométrique a/b a été illustrée sur la **figure III.7**. Il est clair qu'avec l'augmentation du rapport a/b de la plaque, la fréquence adimensionnelle augmente également progressivement. On remarque que la différence des résultats de la fréquence adimensionnelle des schémas sandwich de type A sont plus élevées que les schémas sandwich de type B.

La fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction du rapport a/h est montrée dans la **figure III.8**. La **figure III.9** représente la fréquence adimensionnelle de différents types des plaques sandwichs S-FGM en fonction rapport a/b .

Dans les **figures III.8** et **III.9**, on note que la différence des résultats de la fréquence adimensionnelle entre les schémas des poutres sandwich de type A sont plus large que les schémas des poutres sandwich de type B.

III.3.8. Conclusion

Dans cette partie, nous avons analysés les vibrations libres des plaques sandwichs fonctionnellement graduées et simplement appuyées en utilisant la théorie des plaques classique (CPT), la théorie de la poutre de déformation de cisaillement du premier ordre (FPT) et la théorie de la poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HPT). On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une fonction sigmoïde (S-FGM). Deux type de plaque sandwich en S-FGM est considéré, sandwich avec des peaux en S-FGM et cœur homogène en céramique (Type-A), et sandwich avec deux peaux homogènes et un cœur S-FGM (Type-B). L'équation du mouvement pour la plaque FGM est obtenue par le principe d'Hamilton. Quelques conclusions peuvent être citées :

1. Les fréquences adimensionnelles de la plaque sandwich S-FGM diminuent quand l'indice de fraction volumique k augmente.
2. Les fréquences adimensionnelles de la plaque sandwich S-FGM augmentent quand le rapport d'épaisseur a/h et les modes propres m et n augmentent.
3. La fréquence adimensionnelle augmente progressivement quand le rapport géométrique a/b augmente.
4. La variation des fréquences adimensionnelles des plaques sandwichs de type A est plus grand que celle des plaques sandwichs de type B.

CHAPITRE IV

Analyse du flambement thermique des structures sandwichs en FGM

IV. Analyse du flambement thermique des structures sandwichs en FGM

IV.1. Etudes bibliographique

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement.

L'effet de la température sur une structure peut se manifester de deux façons. D'une part, les propriétés élastiques de la structure dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En effet, l'augmentation de la température induit, en général, un assouplissement des matériaux et une diminution de la limite élastique [84]. D'autre part, une variation non-uniforme ou rapide de la température, peut donner lieu à des contraintes thermiques, qui peuvent provoquer un flambement thermique [85].

En plus de la dégradation des propriétés des matériaux, le flambement thermique est probablement le phénomène le plus important issu de l'effet de l'élévation de la température sur les structures à paroi mince [86]. Il a été reconnu, au début des années cinquante, comme étant l'un des problèmes les plus graves lié à l'échauffement aérodynamique [87].

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaine condition aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure. La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure.

IV.1.1 Etudes sur le flambement thermique des poutres FGM

En raison de l'importance et de l'étendue des applications techniques des matériaux fonctionnels, plusieurs chercheurs ont abordé le problème du flambement thermique des poutres à gradations fonctionnelles. Shahsiah et al. [88] ont rapporté une solution analytique pour la

stabilité des poutres à gradient fonctionnel sous une température uniforme et axiale en utilisant la méthode variationnelle. Sur la base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, Kiani et Eslami [89] ont rapporté une solution analytique pour le flambement thermique de poutres à gradient fonctionnel sous trois types de charges thermiques. Ils ont également utilisé la théorie des poutres de Timoshenko pour étudier le flambement des poutres à gradations fonctionnelles sous chargement thermomécanique avec différents types de conditions aux limites [90]. Kiani et al. [91] ont analysé le problème du flambement des poutres FGM avec des couches piézoélectriques qui sont soumises à une charge thermique et à une tension constante en utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. L'analyse du flambement des poutres FGM de Timoshenko avec ou sans couches piézoélectriques soumises à une charge thermique et à une tension constante a été rapportée par Kiani et al. [92]. Fu et al. [93] ont utilisé la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et le concept de surface neutre physique pour étudier le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des poutres de FGM piézoélectriques dans un environnement thermique. Wattanasakulpong et al. [94] ont utilisé la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre pour étudier le flambement thermique et la vibration des poutres FGM pour divers types d'extrémités immobiles, en tenant compte des propriétés des matériaux dépendante et indépendante de la température. Le flambement thermique des poutres FGM de Timoshenko reposant sur des fondations élastiques non linéaires à l'aide d'une méthode de quadrature différentielle (DQM) en a été étudié par Esfahani et al. [95]. Kargani et al. [96] ont obtenu une solution exacte pour la stabilité non linéaire des poutres FGM hybrides avec les deux bords simplement appuyés ou encasté sous des charges thermiques et électriques. L'importance des effets piézoélectriques directs et inverses, du rapport d'épaisseur et des conditions aux limites sur la réponse d'une poutre monomorphe fonctionnellement gradué sous les charges thermiques et électriques a été étudiée par Komijani et al. [97]. Ghiasian et al. [98] ont étudié le flambement statique et dynamique de poutres FGM reposant sur une fondation élastique et soumis à une charge thermique uniforme et à une compression uniforme en tenant compte de l'imperfection initiale de la poutre. Le même auteur [99] ont présenté une analyse du flambement dynamique non linéaire et une sensibilité à l'imperfection d'une poutre FGM soumis à une température uniforme et reposante sur une fondation élastique. Tounsi et al. [100] ont développé une théorie des poutres d'ordre supérieur pour le flambement thermique des nano poutres. Vosoughi et al. [101] ont analysé le flambement thermique des poutres FGM soumis à une température uniforme en utilisant la théorie du premier ordre et la méthode de quadrature différentielle. Ebrahimi et Salari [102] ont analysé le flambement thermique et la vibration libre des nano poutres FGM soumis à une charge thermique. Ils ont utilisé la théorie d'élasticité non locale d'Eringen ainsi que la théorie des poutres

de Timoshenko pour modéliser les nano poutres. Wu et al. [103] Ont étudié le flambement thermique des poutres nanotubes en FGM renforcées en utilisant la théorie de Timoshenko et la méthode de quadrature différentielle. She et al. [104] ont présenté des solutions approximatives pour le flambement thermique des poutres FGM avec des actionneurs piézoélectriques basés sur le concept de surface neutre physique et la théorie de déformation d'ordre élevé. Ebrahimi et Barati [105] ont utilisé la théorie des poutres d'ordre supérieur et la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen pour examiner le flambement thermique des poutres FGM magnéto-électro-thermo-élastiques sous divers types de charges thermiques. Basé sur Euler-Bernoulli, Timoshenko et diverses théories des poutres d'ordre supérieur, She et al. [106] ont examiné le flambement thermique d'une poutre FGM sous une température uniforme en utilisant une méthode de perturbation en deux étapes.

IV.1.1 Etudes sur le flambement thermique des plaques FGM

Au cours des dernières années, le flambement mécanique et thermique de plaques FGM, basé sur la théorie classique des plaques (CPT), a été présenté [107, 108]. Javaheri et Eslami [109] ont étudié le flambement thermique des plaques FGM en utilisant la théorie de la déformation d'ordre supérieur. À l'aide de la théorie classique des plaques, Shariat et Eslami [110] ont présenté l'analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires FGM avec des imperfections géométriques. Ils ont considéré trois types de chargement thermique, uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. Le flambement thermique des plaques FGM rectangulaires a été présenté sur la base de la théorie du premier ordre [111-117]. Zenkour et Sobhy [118] ont étudié l'analyse du flambement thermique de plusieurs types de plaques sandwichs FGM. Ils ont également étudié le flambement thermique de plaques FGM reposant sur fondation de Pasternak [119]. Matsunaga [120] a analysé les températures critiques pour des charges thermiques uniforme et linéaire à travers l'épaisseur d'une plaque de FGM simplement appuyée en utilisant la théorie des plaques d'ordre supérieur 2D. Zenkour et Mashat [121] ont étudié, sous différents types de charges thermiques, le flambement thermique des plaques FGM céramique-métal basé sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale. En utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Reddy et la méthode de l'énergie, Bodaghi et Saidi [122] ont donné le comportement du flambement thermoélastique de plaques FGM épaisses. Malekzadeh [123] a étudié le flambement thermique tridimensionnel de plaques FGM basées sur la méthode de la quadrature différentielle. De nombreux chercheurs ont utilisé des théories de plaques raffinées à quatre variables pour étudier le flambement thermique de plaques FGM [124-133]. L'analyse du

flambement thermique de plaques isotropes et sandwichs a été réalisée en utilisant la théorie raffiné quasi-3D (Equivalent Single Layer) et la théorie de Zig-Zag [134]. La méthode des éléments finis a été utilisée par certains chercheurs pour analyser le flambement thermique des plaques FGM. Na et Kim [135] ont examiné le comportement du flambement thermique de la plaque à gradient fonctionnel en utilisant un élément solide à 18 nœuds. Prakash et Ganapathi [136] ont étudié les caractéristiques du flambement thermique et de vibration de plaques circulaires en FGM. Zhao et Liew [137] ont rapporté la réponse au flambement des panneaux cylindriques FGM à compression axiale et à charge thermique, basée sur la théorie du premier ordre et la méthode element-free kp-Ritz. Nguyen-Xuan et al [138] ont analysé les plaques à gradient fonctionnel soumises à diverses sollicitations mécaniques et thermiques basées sur la méthode des éléments finis. Tran et al [139] ont proposé une approche par éléments finis isogéométriques en combinaison avec la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre pour l'analyse du flambement thermique de plaques de matériau à gradient fonctionnel. Une méthode par éléments finis avec une technique de cisaillement discret ont été utilisées pour étudier la flexion statique, la vibration libre et le comportement du flambement mécanique et thermique des plaques FGM [140]. Kar [141] a étudié les réponses du flambement des panneaux à gradient fonctionnel en utilisant la méthode des éléments finis et un modèle de simulation développé dans l'ANSYS (Commercial Finite Element Package).

Dans cette partie, nous allons étudier le flambement thermique des poutres et plaques sandwichs en FGM, en utilisant la même théorie utilisée dans la partie précédente à l'aide d'un logiciel de simulation MATLAB (ANNEX C, D).

Dans premier temps on détermine le champ de déplacement et le tenseur de déformation, et après, les équations de stabilité. Et enfin on trouve les solutions des températures critiques du flambement des sandwichs FGM.

Avec la prise en compte l'effet de la charge thermique, il est obligé de reconstruire quelques définitions mathématiques comme le tenseur de contrainte par exemple.

IV.2. Charges thermiques

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps.

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche telle que le module de Young, et le coefficient de dilatation thermique peuvent être exprimées comme suit

$$P^{(n)}(z) = V^{(n)}(z).P_b + [1 - V^{(n)}(z)].P_t \quad (IV.1)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n ($n=1, 2, 3$). P_b et P_t désignent la propriété de la face inférieure et la face supérieure, respectivement. Les propriétés du matériau sont dépendent de la température et de la position est donné comme [142]

$$P(z, T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (IV.2)$$

$P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$, sont les coefficients des propriétés des matériaux dépendant de la température (Tableau IV.1).

Tableau IV.1. Propriétés des matériaux dépendant de la température.

	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
ZrO₂ (Céramique)					
E (Pa)	244.27 e+ 9	0	-1,371 e-03	1,214 e-06	-3,681e-10
a (K ⁻¹)	12.766 e-06	0	-1,491 e-03	1,006 e-05	-6,778e-11
ρ (K/m ³)	3000	0	1,133 e-04	0	0
K (W/mK)	1.7	0	0	0	0
ν	0.3	0	0	0	0
Ti-4V-6Al (Métal)					
E (Pa)	122.56e+9	0	4.586e-4	0	0
a (K ⁻¹)	7.5788e-6	0	6.638e-4	-3.147e-6	0
ρ (K/m ³)	4429	0	0	0	0
K (W/mK)	1	0	0	0	0
ν	0.3	0	0	0	0

Dans cette étude, nous supposons que la variation de température se produit dans la direction d'épaisseur seulement, et on assume que le champ de température est constant dans le plan de la plaque. Il existe trois types de charge thermique ; charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

IV.2.1. Charge thermique uniforme

La température initiale est T_i . La température augmente d'une manière uniforme pour atteindre une valeur finale de T_f . La variation de température est

$$\Delta T = T_f - T_i \quad (IV.3)$$

IV.2.2. Charge thermique non linéaire

De nombreuses formes ont été proposées pour définir la température non linéaire variation à travers l'épaisseur de la plaque sandwich :

A. Loi de puissance

La température varie à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance et donnée par [143–146]

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^Y \quad (IV.4)$$

Où la variation de T_t et T_b sont respectivement les températures de la surface supérieure et la surface inférieure du sandwich FGM. γ est l'exposant de température ($0 < \gamma < \infty$). Notant que la valeur de $\gamma = 1$, représente une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur. Tandis que pour des valeurs de γ qui diffèrent de l'unité, nous aurons une variation non linéaire.

B. Fonction exponentielle

La distribution de la température à travers l'épaisseur est supposée sous la forme [147, 148]

$$T(z) = T_b e^{\ln\left(\frac{T_t}{T_b}\right)\left(\frac{z+1}{2}\right)^\beta} \quad (\text{IV.5})$$

La valeur $\beta = 0$ représente la température de la surface supérieure du sandwich, et $\beta = \infty$ représente la température de la surface inférieure.

C. Fonction sinusoïdale

La distribution de la température est assurée par une fonction sinusoïdale suivant l'équation [149]

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{IV.6})$$

D. Solution exacte

Supposons que le champ de la température est constant dans le plan de la plaque et varie le long de l'épaisseur. Dans ce cas, la variation de température peut être obtenue en résolvant l'équation de transfert de chaleur

$$-\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Cette équation est résolue en imposant les conditions au limite $T = T_b$ à $z = -h/2$ et $T = T_t$ à $z = h/2$, La distribution de la température à travers l'épaisseur du sandwich FGM est obtenue comme

$$T(z) = T_m + (T_p - T_m) \Theta^{(n)} \quad (\text{IV.8})$$

$\Theta^{(n)}$ représente la température adimensionnelle où

Pour les sandwichs P-FGM

$$\Theta^{(1)} = \frac{\int_{h_0}^z (1/K^{(1)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_0 \leq z \leq h_1$$

$$\Theta^{(2)} = \frac{\int_{h_0}^{h_1} (1/K^{(1)}(z)) dz + \int_{h_1}^z (1/K^{(2)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (\text{IV.9})$$

$$\Theta^{(3)} = \frac{\int_{h_0}^{h_1} (1/K^{(1)}(z)) dz + \int_{h_1}^{h_2} (1/K^{(2)}(z)) dz + \int_{h_2}^z (1/K^{(3)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_2 \leq z \leq h_3$$

Et pour les sandwichs S-FGM

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^{(1)} &= \frac{\int_{h_0}^z (1/K_1^{(1)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_0 \leq z \leq h_m \\
 \Theta_2^{(1)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_m} (1/K_1^{(1)}(z)) dz + \int_{h_m}^z (1/K_2^{(1)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_m \leq z \leq h_1 \\
 \Theta^{(2)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_m} (1/K_1^{(1)}(z)) dz + \int_{h_m}^{h_1} (1/K_2^{(1)}(z)) dz + \int_{h_1}^z (1/K^{(2)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \\
 \Theta_1^{(3)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_m} (1/K_1^{(1)}(z)) dz + \int_{h_m}^{h_1} (1/K_2^{(1)}(z)) dz + \int_{h_1}^{h_2} (1/K^{(2)}(z)) dz + \int_{h_2}^z (1/K_1^{(3)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_2 \leq z \leq h_n \\
 \Theta_2^{(3)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_m} (1/K_1^{(1)}(z)) dz + \int_{h_m}^{h_1} (1/K_2^{(1)}(z)) dz + \int_{h_1}^{h_2} (1/K^{(2)}(z)) dz + \int_{h_2}^{h_n} (1/K_1^{(3)}(z)) dz + \int_{h_n}^z (1/K_2^{(3)}(z)) dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z)) dz}, \quad h_n \leq z \leq h_3
 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

La **figure I.6** illustre les différents modèles de la distribution de la température à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée (1-1-1) avec un indice de puissance $k=2$. On voit que, quel que soit le type de température présenté (**Equations IV.8**), la variation de la température le long de l'épaisseur des couches homogène est linéaire, alors que pour les couches FGM, la distribution est non linéaire.

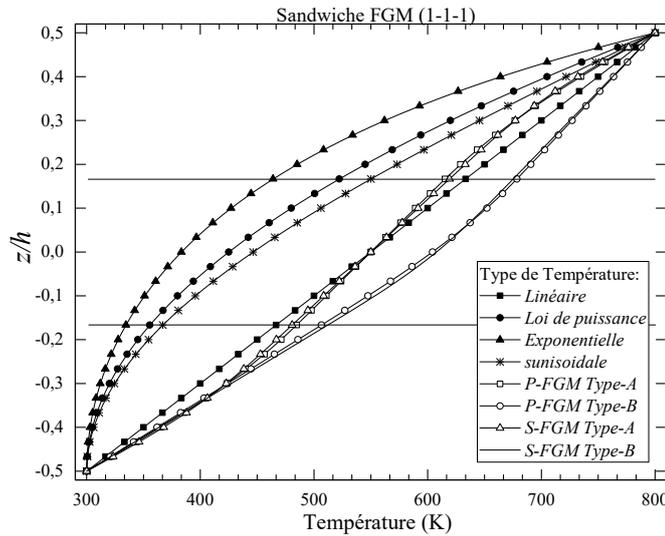


Figure IV.1. Variation de la distribution de la température à travers l'épaisseur d'un sandwich FGM (1-1-1) ($k=2$).

L'effet de type de la charge thermique sur le module de Young d'une plaque sandwich composée d'un alliage de titane Ti-6Al-4V et un céramique de type oxyde de zirconium (ZrO_2) est présenté

dans la **figure IV.2**. On peut voir que les propriétés matérielles (Module de Young) du sandwich P-FGM changent brusquement aux interfaces entre les couches de face et le cœur. Par contre, ces propriétés ont une bonne continuité parmi les interfaces du sandwich S-FGM.

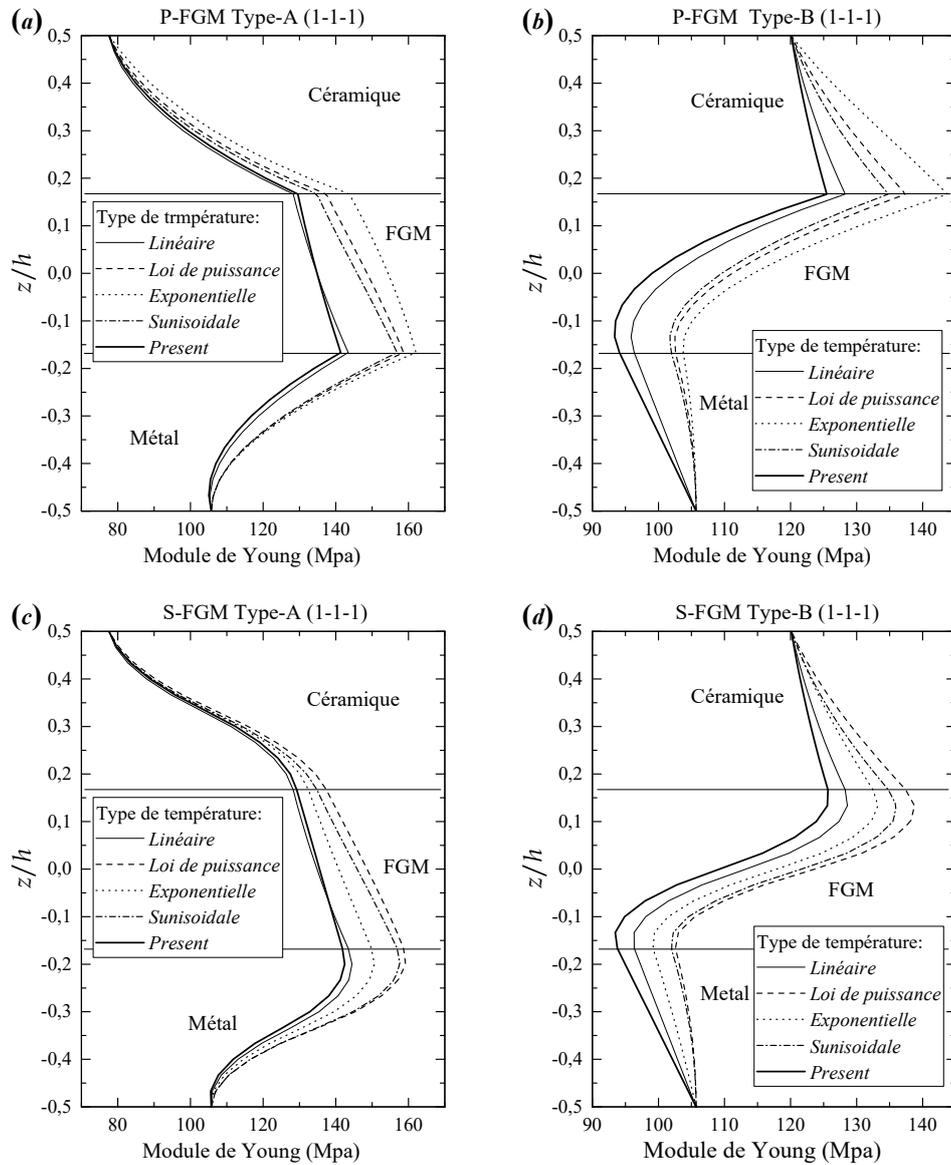


Figure IV.2. Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'un sandwich FGM ($k=2$).

IV.3. Flambement thermique des poutres sandwichs en FGM

IV.3.1 Champ des contraintes

Les relations constitutives peuvent être écrites comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)^n T(z) \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Où $\alpha(z)$ est le coefficient de dilatation thermique.

IV.3.2. Efforts résultants

Les efforts résultants dans la poutre en FGM peuvent être reliés aux déformations par

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ C_{11} & F_{11} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_T \\ M_T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad R_{xz} = J_{66} \gamma_{xz} \quad (\text{IV.12})$$

$\{N_T\}, \{M_T\}$ sont l'effort et le moment due à la charge thermique où

$$\{N_T, M_T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} \alpha^{(n)} T(z) \{1, z\} dz \quad (\text{IV.13})$$

IV.3.3. Equations de stabilité

L'énergie de déformation sous l'effet de la température est donné par

$$\delta U_t = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{xx}^{(n)} (\varepsilon_{xx} - \alpha^{(n)}(z)T) + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{IV.14})$$

Les équations de stabilités de la poutre peuvent être décrites par le critère de l'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la poutre sandwich en FGM sous le chargement thermique est défini en termes des composantes de déplacement (u_0^0, v_0^0, w_0^0) . Les composantes de déplacement d'un état adjacent stable diffère par (u_0^1, v_0^1, w_0^1) par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, le déplacement total d'un état adjacent est donné par

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_0 = w_0^0 + w_0^1 \quad (\text{IV.15})$$

Où l'indice « 1 » désigne l'état de stabilité et « 0 » l'état de condition d'équilibre.

Les efforts résultants et les moments peuvent être liés à l'équilibre

$$N_{xx} = N_{xx}^0 + N_{xx}^1, \quad M_{xx} = M_{xx}^0 + M_{xx}^1, \quad P_{xx} = P_{xx}^0 + P_{xx}^1, \quad Q_{xz} = Q_{xz}^0 + Q_{xz}^1 \quad (\text{IV.16})$$

En substituant les **équations (IV.11)** et **(IV.16)** dans l'**équation (IV.14)** et intégrant par parties, et par la suite égalant à zéro séparément les coefficients δu_0^1 , δv_0^1 , δw_0^1 , les équations de stabilité sont obtenues pour la théorie de déformation de cisaillement comme suit

$$\frac{\partial N_{xx}^1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^1}{\partial x^2} + \bar{N}_{xx}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

$$\frac{\partial P_{xx}^1}{\partial x} - R_{xz}^1 = 0$$

Où \bar{N}_{xx}^0 est l'effort de pré-flambement qui est définis par

$$\bar{N}_{xx}^0 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z) T}{1 - \nu} dz \quad (\text{IV.18})$$

IV.3.4. Solution trigonométrique du flambement thermique

Pour une solution analytique des **équations (IV.17)**, la méthode de Navier est utilisée pour une poutre sandwich FGM avec des conditions de bords spécifiques (appuyée- appuyée)

$$v_0^1 = w_0^1 = N_{xx}^1 = M_{xx}^1 = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{IV.19})$$

La solution approximative suivante satisfait à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^1 \cos(\lambda x)$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} W_m^1 \sin(\lambda x) \quad (\text{IV.20})$$

$$\varphi_x = \sum_{m=1}^{\infty} X_m^1 \cos(\lambda x)$$

En substituant l'**équation (IV.20)** dans **(IV.17)**, nous aurons

$$[L] \begin{Bmatrix} U_m^1 \\ W_m^1 \\ X_m^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Avec

$$\begin{aligned}
L_{11} &= -A_{11}\lambda^2, & L_{12} &= B_{11}\lambda^3, & L_{13} &= -C_{11}\lambda^2, & L_{22} &= -(D_{11}\lambda^4 + \bar{N}_x^0\lambda^2) \\
L_{23} &= F_{11}\lambda^3, & L_{33} &= -(H_{11}\lambda^2 + J_{66})
\end{aligned} \tag{IV.22}$$

IV.3.4.a. Flambement des poutres sandwichs en FGM sous une variation de température uniforme

La température critique du flambement ΔT_{cr} est obtenue pour la valeur minimale du mode ($m = 1$).

En utilisant la distribution uniforme de la température (équation IV.3), la variation de température critique du flambement en résolvant le déterminant $|L| = 0$ devient

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 L^2 H_{11} (A_{11} D_{11} - B_{11}^2) + \pi^4 [(D_{11} E_{11} - F_{11}^2) A_{11} - E_{11} B_{11}^2 + 2 B_{11} C_{11} F_{11} - D_{11} C_{11}^2]}{\beta_1 L^2 (\pi^2 (A_{11} E_{11} - C_{11}^2) + L^2 A_{11} H_{11})} \tag{IV.23}$$

Où

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z)}{1-\nu} dz \tag{IV.24}$$

Pour la théorie classique

$$\Delta T_{cr} = \frac{(\pi/L)^2 [(\pi/L)^2 (E_{11} B_{11}^2)]}{\beta_1 ((\pi/L)^2 (-A_{11} E_{11}))} \tag{IV.25}$$

IV.3.4.b. Flambement des poutres sandwichs en FGM sous une variation linéaire de température

De manière similaire, la température critique du flambement pour une variation linéaire de température (équation IV.4) à travers l'épaisseur de la poutre sandwich est donnée par

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 L^2 H_{11} (A_{11} D_{11} - B_{11}^2) + \pi^4 [(D_{11} E_{11} - F_{11}^2) A_{11} - E_{11} B_{11}^2 + 2 B_{11} C_{11} F_{11} - D_{11} C_{11}^2]}{\beta_2 L^2 (\pi^2 (A_{11} E_{11} - C_{11}^2) + L^2 A_{11} H_{11})} - \frac{T_m \beta_1}{\beta_2} \tag{IV.26}$$

Avec

$$\beta_2 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z)}{1-\nu} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) dz \tag{IV.27}$$

La température critique du flambement pour la théorie classique est donnée comme

$$\Delta T_{cr} = \frac{(\pi/L)^2 [(\pi/L)^2 (E_{11} B_{11}^2)]}{\beta_2 ((\pi/L)^2 (-A_{11} E_{11}))} - \frac{T_m \beta_1}{\beta_2} \tag{IV.28}$$

IV.3.4.c. Flambement des poutres sandwichs en FGM sous une variation non linéaire de température

En utilisant la distribution non linéaire de la température (équation (IV.9)), La variation de température est obtenue comme suit

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 L^2 H_{11} (A_{11} D_{11} - B_{11}^2) + \pi^4 [(D_{11} E_{11} - F_{11}^2) A_{11} - E_{11} B_{11}^2 + 2 B_{11} C_{11} F_{11} - D_{11} C_{11}^2]}{\beta_3 L^2 (\pi^2 (A_{11} E_{11} - C_{11}^2) + L^2 A_{11} H_{11})} - \frac{T_m \beta_1}{\beta_3} \quad (IV.29)$$

Où

$$\beta_3 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z)}{1-\nu} \Theta^{(n)} dz \quad (IV.30)$$

Pour la théorie classique

$$\Delta T_{cr} = \frac{(\pi/L)^2 [(\pi/L)^2 (E_{11} B_{11}^2)]}{\beta_3 ((\pi/L)^2 (-A_{11} E_{11}))} - \frac{T_m \beta_1}{\beta_3} \quad (IV.31)$$

IV.3.5. Résultats et analyses

Considérons une poutre sandwich en FGM simplement appuyée, composée d'un mélange de métal et de céramique. La combinaison des matériaux se compose d'alliage de titane et de zircone (Ti-6Al-4V / ZrO₂). Le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique pour l'alliage de titane sont $E_m=66,2$ GPa, $\alpha_m=10,3 \times 10^{-6}$ 1/°C, $K_m=18,1$ W/mK [118, 150, 151] et pour la zircone sont $E_c=244,27$ GPa, $\alpha_c=12,766 \times 10^{-6}$ 1/°C, $K_c=1,7$ W/mK [118, 150, 151]. Le coefficient de Poisson est constant ($\nu=0.3$). On suppose que la température T_m dans la surface inférieure de la plaque sandwich est égale à 25 °C. Le facteur de correction de cisaillement pour FPT est égal à 5/6.

La déference de la température critique du flambement ($T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr}$) pour divers types de poutres sandwichs à gradient fonctionnel sous une charge thermique à une distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur est calculée et présentée dans les tableaux IV.2, IV.3 et IV.4, respectivement. Dans ces tableaux, l'influence du type de chargement thermique est très important. On voit également que, quel que soit le type de poutre sandwich et le cas de charge thermique, la déference de la température critique du flambement est influencée par l'indice de puissance k et le rapport d'épaisseur a/h . La fraction volumique de valeur $k=1$ signifie que la distribution des propriétés du matériau est linéaire à travers l'épaisseur des couches FGM.

Les figures IV.3 montrent l'effet du rapport géométrique a/h sur la différence de la température critique du flambement pour divers types des poutres sandwichs FGM sous une température à

distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Il est clair que l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h diminue la différence de température du flambement critique. On voit que la température du flambement critique pour $k = 0,5$ est plus élevée que pour $k = 2$.

Tableau IV.2. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique uniforme.

Schéma		k	Théorie	a/h=5	a/h=10	a/h=15	a/h=20	a/h=25	a/h=30	
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HBT	1,52689	0,40555	0,18236	0,10300	0,06604	0,04591	
			FBT	1,53970	0,40646	0,18254	0,10306	0,06607	0,04592	
			CBT	1,65672	0,41418	0,18408	0,10354	0,06627	0,04602	
	2		HBT	1,24782	0,32603	0,14612	0,08244	0,05283	0,03672	
			FBT	1,24972	0,32616	0,14615	0,08245	0,05284	0,03672	
			CBT	1,32403	0,33101	0,14711	0,08275	0,05296	0,03678	
	1 2 1	0.5	HBT	1.55221	0.41346	0.18601	0.10508	0.06739	0.04684	
			FBT	1.56799	0.41457	0.18624	0.10515	0.06741	0.04686	
			CBT	3.33154	0.79538	0.32572	0.16134	0.08526	0.04393	
		2		HBT	1.29139	0.33899	0.15207	0.08582	0.05501	0.03823
				FBT	1.29718	0.33939	0.15215	0.08584	0.05502	0.03823
				CBT	2.70800	0.63950	0.25644	0.12237	0.06032	0.02661
	2 2 1	0.5	HBT	1,54684	0,33101	0,18514	0,10458	0,06707	0,04662	
			FBT	1,56154	0,41264	0,18535	0,10465	0,06709	0,04664	
			CBT	1,68254	0,42063	0,18695	0,10587	0,06730	0,04674	
		2		HBT	1,28349	0,33640	0,15086	0,08513	0,05456	0,03792
				FBT	1,28794	0,33671	0,15093	0,08515	0,05457	0,03793
				CBT	1,36767	0,34192	0,15196	0,08548	0,05471	0,03799
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HBT	1,44199	0,38160	0,17146	0,09682	0,06207	0,04315	
			FBT	1,45437	0,38246	0,17163	0,09687	0,06210	0,04316	
			CBT	1,55679	0,38920	0,17298	0,09730	0,06227	0,04324	
		2		HBT	1,54719	0,41321	0,18600	0,10510	0,06740	0,04686
				FBT	1,57274	0,41502	0,18637	0,10522	0,06745	0,04688
				CBT	1,69138	0,42285	0,18793	0,10571	0,06766	0,04698
	1 2 1	0.5	HBT	1.48050	0.39244	0.17639	0.09961	0.06387	0.04439	
			FBT	1.49398	0.39338	0.17658	0.09967	0.06389	0.04441	
			CBT	1.60200	0.40050	0.17800	0.10012	0.06408	0.04450	
		2		HBT	1.62077	0.4346399	0.19581	0.11067	0.07099	0.04935
				FBT	1.65191	0.4368606	0.19626	0.11081	0.07104	0.04938
				CBT	1.78178	0.4454468	0.19797	0.11136	0.07127	0.04949
	2 2 1	0.5	HBT	1,53659	0,40923	0,18411	0,10401	0,06670	0,04637	
			FBT	1,55735	0,41070	0,18440	0,10410	0,06674	0,04639	
			CBT	1,67338	0,41835	0,18593	0,10459	0,06694	0,04648	
		2		HBT	1,76502	0,47904	0,21634	0,12238	0,07853	0,05461
				FBT	1,81667	0,48278	0,21710	0,12263	0,07863	0,05466
				CBT	1,97257	0,49314	0,21917	0,12329	0,07890	0,05479

A partir des **figures IV.3(a)** et **IV.3(b)**, et pour les poutres sandwichs FGM symétriques (1-1-1) et (1-2-1), les mêmes résultats sont obtenus pour la température non linéaire et linéaire.

Tableau IV.3. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique linéaire.

		Schéma	k	Théorie	a/h=5	a/h=10	a/h=15	a/h=20	a/h=25	a/h=30
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HBT	3,00377	0,76110	0,31471	0,15599	0,08209	0,04182	
			FBT	3,02940	0,76291	0,31508	0,15611	0,08214	0,04185	
			CBT	3,26343	0,77836	0,31816	0,15709	0,08254	0,04204	
		2	HBT	2,44563	0,60205	0,24224	0,11487	0,05566	0,02343	
			FBT	2,44945	0,60232	0,24230	0,11489	0,05567	0,02344	
			CBT	2,59806	0,61201	0,24423	0,11550	0,05592	0,02356	
	1 2 1	0.5	HBT	3.05443	0.77692	0.32203	0.16017	0.08478	0.04369	
			FBT	3.08599	0.77915	0.32248	0.16031	0.08483	0.04372	
			CBT	3.33154	0.79538	0.32572	0.16134	0.08526	0.04393	
		2	HBT	2.44541	0.60633	0.24538	0.11745	0.05795	0.02555	
			FBT	2.45660	0.60710	0.24553	0.11750	0.05797	0.02556	
			CBT	2.61458	0.61744	0.24759	0.11815	0.05823	0.02569	
2 2 1	0.5	HBT	2,91785	0,74124	0,30704	0,15259	0,08065	0,04146		
		FBT	2,94603	0,74323	0,30745	0,15272	0,08071	0,04148		
		CBT	3,17803	0,75856	0,31051	0,15369	0,08111	0,04168		
	2	HBT	2,31739	0,57341	0,23177	0,11072	0,05444	0,02379		
		FBT	2,32559	0,57398	0,23188	0,11076	0,05445	0,02380		
		CBT	2,47240	0,58357	0,23379	0,11137	0,05470	0,02392		
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HBT	2,20031	0,55372	0,22742	0,11152	0,05757	0,02818	
			FBT	2,21954	0,55507	0,22769	0,11161	0,05760	0,02820	
			CBT	2,37858	0,56553	0,22978	0,11227	0,05788	0,02833	
		2	HBT	2,28016	0,58151	0,24117	0,11998	0,06352	0,03275	
			FBT	2,31843	0,58423	0,24172	0,12016	0,06359	0,03278	
			CBT	2,49615	0,59595	0,24406	0,12090	0,06390	0,03293	
	1 2 1	0.5	HBT	2.29459	0.58325	0.24152	0.11993	0.06329	0.03243	
			FBT	2.32610	0.58548	0.24197	0.12007	0.06335	0.03246	
			CBT	2.50223	0.59709	0.24429	0.12081	0.06365	0.03261	
		2	HBT	2.58034	0.67331	0.28375	0.14441	0.07938	0.04391	
			FBT	2.65693	0.67886	0.28487	0.14477	0.07953	0.04398	
			CBT	2.88812	0.69422	0.28794	0.14575	0.07993	0.04418	
2 2 1	0.5	HBT	2,29459	0,58326	0,24153	0,11993	0,06330	0,03244		
		FBT	2,32611	0,58548	0,24198	0,12008	0,06336	0,03247		
		CBT	2,50224	0,59710	0,24429	0,12081	0,06366	0,03261		
	2	HBT	2,58035	0,67332	0,28375	0,14442	0,07939	0,04392		
		FBT	2,65694	0,67887	0,28488	0,14478	0,07953	0,04399		
		CBT	2,88812	0,69423	0,28795	0,14575	0,07993	0,04418		

De plus, on peut voir que la différence de température critique pour les poutres sandwichs sous une distribution de température uniforme est inférieure à celle des poutres sous une température linéaires et que celle-ci est inférieure à celle des poutres sous une température non linéaire.

Tableau IV.4. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM sous un chargement thermique non linéaire.

	Schéma	k	Théorie	a/h=5	a/h=10	a/h=15	a/h=20	a/h=25	a/h=30
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HBT	3,00377	0,76110	0,31471	0,15599	0,08209	0,04182
			FBT	3,02940	0,76291	0,31508	0,15611	0,08214	0,04185
			CBT	3,26343	0,77836	0,31816	0,15709	0,08254	0,04204
		2	HBT	2,44563	0,60205	0,24224	0,11487	0,05566	0,02343
			FBT	2,44945	0,60232	0,24230	0,11489	0,05567	0,02344
			CBT	2,59806	0,61201	0,24423	0,11550	0,05592	0,02356
	1 2 1	0.5	HBT	3.05449	0.77692	0.32203	0.16017	0.08478	0.04369
			FBT	3.08599	0.77915	0.32248	0.16031	0.08483	0.04372
			CBT	3.33154	0.79538	0.32572	0.16134	0.08526	0.04393
		2	HBT	2.44541	0.60633	0.24538	0.11745	0.0579	0.02555
			FBT	2.45660	0.60710	0.24553	0.11750	0.05797	0.02556
			CBT	2.61458	0.61744	0.24759	0.11815	0.05823	0.02569
2 2 1	0.5	HBT	3,28406	0,83427	0,34558	0,17174	0,09078	0,04666	
		FBT	3,31577	0,83651	0,34603	0,17188	0,09084	0,04669	
		CBT	3,57689	0,85376	0,34948	0,17298	0,09128	0,04691	
	2	HBT	2,69932	0,66792	0,26996	0,12897	0,06341	0,02772	
		FBT	2,70888	0,66858	0,27010	0,12901	0,06343	0,02772	
		CBT	2,87988	0,67975	0,27232	0,12972	0,06372	0,02786	
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HBT	3,55727	0,89522	0,36768	0,18029	0,09307	0,04556
			FBT	3,58836	0,89740	0,36812	0,18043	0,09313	0,04559
			CBT	3,84548	0,91430	0,37149	0,18150	0,09357	0,04580
		2	HBT	3,76009	0,95895	0,39771	0,19786	0,10475	0,05400
			FBT	3,82321	0,96342	0,39861	0,19815	0,10486	0,05406
			CBT	4,11628	0,98275	0,40247	0,19937	0,10537	0,05430
	1 2 1	0.5	HBT	3.80438	0.96041	0.39570	0.19502	0.10159	0.05070
			FBT	3.83960	0.96289	0.39620	0.19518	0.10166	0.05073
			CBT	4.12193	0.98147	0.39990	0.19636	0.10214	0.05096
		2	HBT	4.21738	1.08261	0.45143	0.22642	0.12154	0.06437
			FBT	4.29969	1.08848	0.45261	0.22680	0.12169	0.06444
			CBT	4.64292	1.11117	0.45715	0.22824	0.12228	0.06473
2 2 1	0.5	HBT	3,93407	0,99999	0,41409	0,20562	0,10852	0,05561	
		FBT	3,98810	1,00381	0,41487	0,20587	0,10862	0,05566	
		CBT	4,29008	1,02372	0,41884	0,20713	0,10914	0,05591	
	2	HBT	4,49532	1,17301	0,49433	0,25159	0,13830	0,07651	
		FBT	4,62875	1,18268	0,49630	0,25222	0,13856	0,07663	
		CBT	5,03151	1,20944	0,50165	0,25392	0,13926	0,07697	

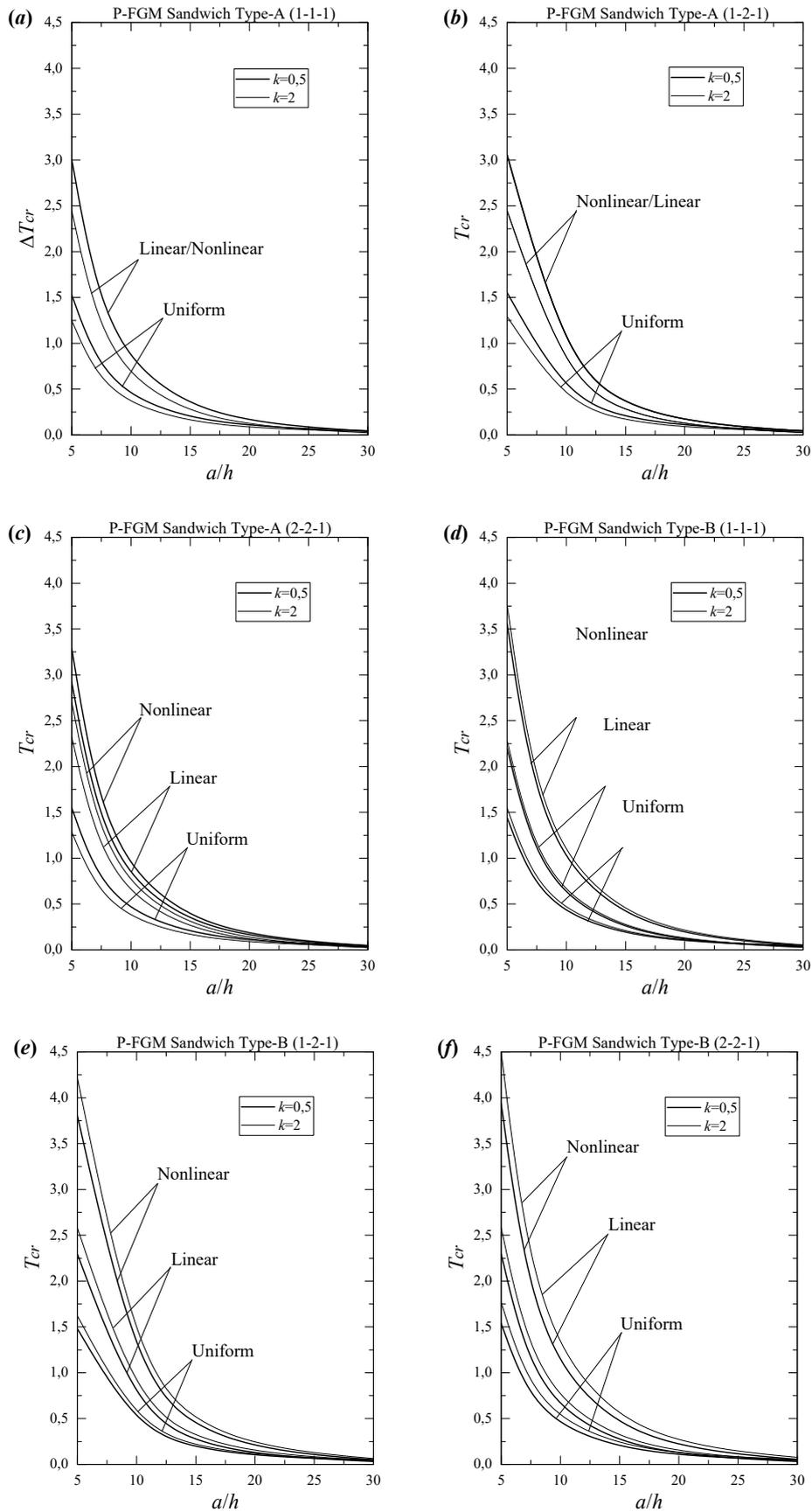


Figure IV.3. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h .

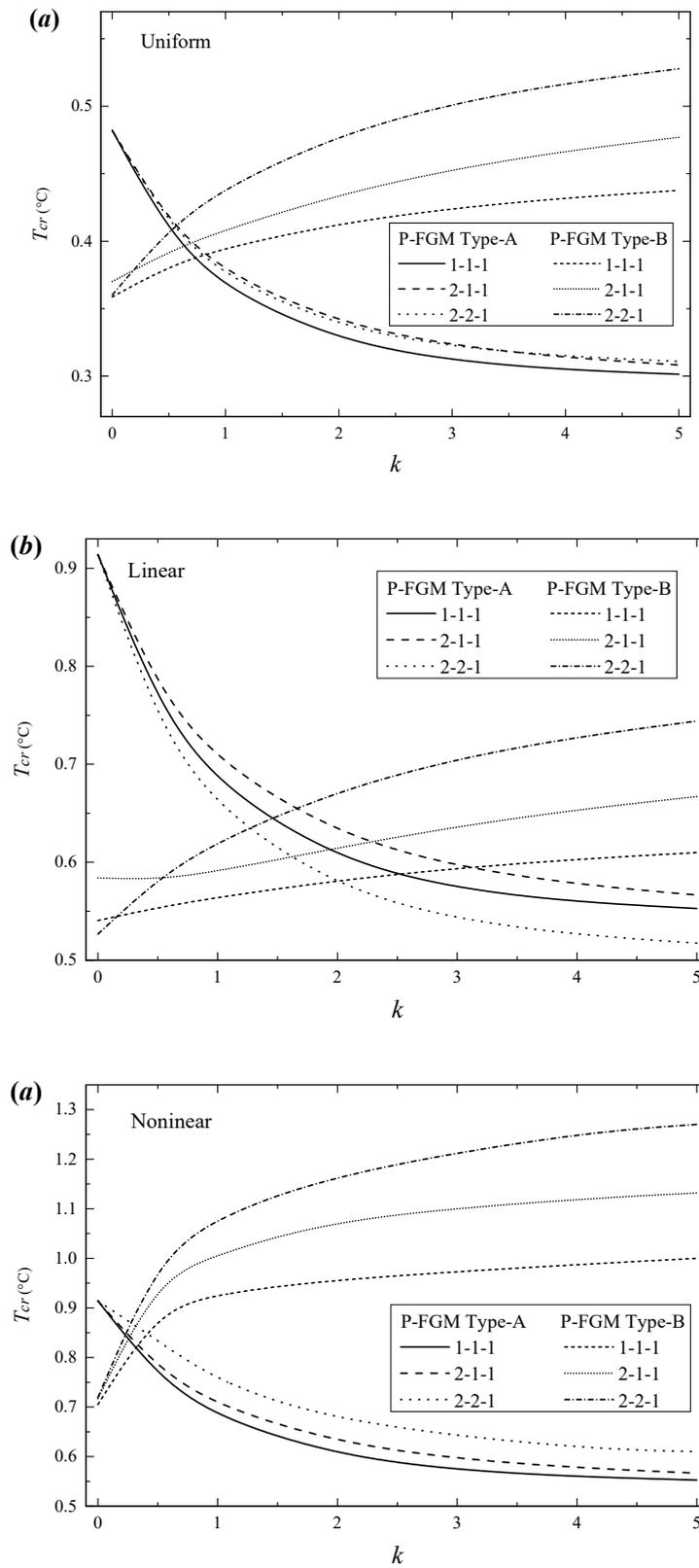


Figure IV.4. Température critique du flambement T_{cr} d'une poutre sandwich P-FGM en fonction du paramètre k ($a/h=10$).

Pour démontrer plus les résultats, l'effet de l'indice de puissance k sur la différence de température critique du flambement des poutres sandwichs FGM soumises à une distribution de température uniforme, linéaire et non linéaire est représenté sur les **figures IV.4**. Comme représenté, lorsque l'indice de puissance k augmente, la température critique diminue pour tous les types des chargements thermiques, et reste presque constante pour $k \geq 5$.

IV.3.6. Conclusion

Cette partie d'étude examine le flambement thermique de poutres sandwichs P-FGM. Deux types de poutres sandwichs fonctionnellement graduées avec différents schémas sont présentés. Les propriétés des matériaux et le coefficient de dilatation thermique des couches de P-FGM sont supposés varier continuellement à travers l'épaisseur en fonction de loi de puissance simple en fonction de fractions volumiques des constituants. Les équations d'équilibre et de stabilité des poutres sandwichs P-FGM sont dérivées en utilisant la théorie de la poutre de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy. Les charges thermiques sont supposées être uniformes, linéaires et non linéaires dans la direction de l'épaisseur. Une solution exacte pour la distribution de la température non linéaire à travers l'épaisseur des poutres sandwichs P-FGM est présentée. L'effet de l'indice de puissance, du rapport d'épaisseur et des types de charges thermiques sur la température critique du flambement pour plusieurs types de poutres sandwichs P-FGM est analysé. Les résultats principaux obtenus sont.

1. La température critique des poutres sandwichs FGM est élevée dans les poutres épaisses.
2. La différence de température critique du flambement ΔT_{cr} décroît avec l'augmentation de l'indice de puissance k .
3. La différence de température critique du flambement ΔT_{cr} des poutres soumis à une charge thermique uniforme est inférieure à celle des poutres soumis à une charge thermique linéaire et non linéaire.
4. Le schéma du sandwich FGM a un effet considérable sur la différence de température critique du flambement.

IV.4. Flambement thermique des plaques sandwichs en FGM

IV.4.1 Plaques sandwichs en FGM

Le modèle mathématique a été construit pour résoudre une structure sandwich composée de trois couches. La structure considérée à une épaisseur totale h . Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , à la surface $z=0$, coïncidant avec la surface médiane de la structure. Les faces supérieures et inférieures de la poutre sont à $z = \pm h / 2$. Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 et $h_3 = h/2$, respectivement. Deux types de sandwichs sont utilisés : les sandwichs FGM Type-A qui ont des propriétés matérielles des couches de surface (peaux) variant dans la direction de l'épaisseur selon une fonction de la loi de puissance (P-FGM) et un cœur homogène en céramique, et les structures sandwichs FGM Type-B qui ont des propriétés matérielles des couches de surface homogènes (métal/céramique) et un cœur en P-FGM (**Figure IV.5**).

A. Plaques sandwichs en FGM de type A

La plaque sandwich est composée de trois couches, un cœur isotrope et deux couches de faces en P-FGM. Les couches de faces sont graduées du métal à la céramique tandis que le cœur est en céramique. La fraction volumique varie à travers l'épaisseur comme suit

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^k, & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= 1, & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^k, & h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Où la valeur k est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro. La valeur de k est égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique.

B. Plaques sandwichs en FGM de type B

Dans ce type de plaques sandwichs, la couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= 0, & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^k, & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= 1, & h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche telle que le module de Young, et le coefficient de dilatation thermique peuvent être exprimées comme suit

$$P^{(n)}(z) = V^{(n)}(z) \cdot P_b + [1 - V^{(n)}(z)] \cdot P_t \quad (\text{IV.34})$$

Où k est l'indice de la fraction volumique et $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n ($n=1, 2, 3$). P_b et P_t est désigné la propriété de la face inférieure et la face supérieure, respectivement.

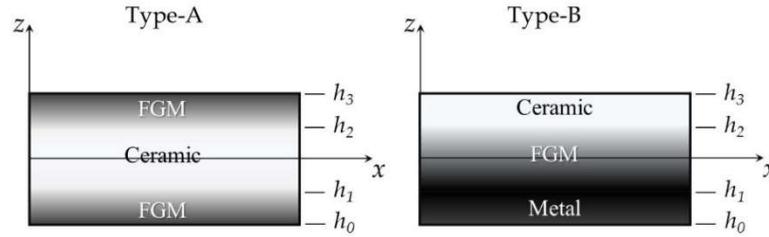


Figure IV.5. Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés (FGM).

IV.4.2. Equations cinématiques

Le champ de déplacement peut être donné comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Les déformations associées aux déplacements sont de la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Les déformations peuvent être exprimées comme

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{df(z)}{dz} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

IV.4.3 Champ des contraintes

Les relations constitutives linéaires de la plaque sandwich peuvent être écrites comme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha^{(n)}(z)T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha^{(n)}(z)T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

IV.4.4. Efforts résultants

Les efforts résultants dans la plaque sandwich en FGM sont définis comme

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [B] & [D] & [F] \\ [C] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^2\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \\ \{P^T\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Où $\{N^T\}$, $\{M^T\}$ et $\{P^T\}$ peuvent être écrites comme

$$\{\{N^T\}, \{M^T\}, \{P^T\}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \{\beta\}^{(n)} T \{1, z, f(z)\} dz \quad (\text{IV.41})$$

Avec

$$\{\beta\}^{(n)} = \begin{Bmatrix} (Q_{11} + Q_{12})\alpha \\ (Q_{12} + Q_{22})\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{IV.42})$$

Ici, les coefficients $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ sont les éléments de la matrice de rigidités et définies par

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij}^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2\} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$J_{ii} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ii}^{(n)} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^2 dz, \quad (i = 4, 5) \quad (\text{IV.43})$$

IV.4.5. Equations de stabilité

L'énergie potentielle totale de la plaque sandwich peut être exprimée comme

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{xx}^{(n)} (\varepsilon_{xx} - \alpha^{(n)}(z)T) + \sigma_{yy}^{(n)} (\varepsilon_{yy} - \alpha^{(n)}(z)T) + \sigma_{xy}^{(n)} \gamma_{xy} + \sigma_{yz}^{(n)} \gamma_{yz} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{IV.44})$$

Supposons que l'état d'équilibre de la plaque sandwich en FGM sous le chargement thermique est défini en termes des composantes de déplacement $(u_0^0, v_0^0, w_0^0, \varphi_x^0, \varphi_y^0)$. Les composantes de déplacement d'un état adjacent stable diffère par $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \varphi_x^1, \varphi_y^1)$ par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, le déplacement total d'un état adjacent est donné par

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_0 = w_0^0 + w_0^1, \quad \varphi_1 = \varphi_x^0 + \varphi_x^1, \quad \varphi_2 = \varphi_y^0 + \varphi_y^1 \quad (\text{IV.45})$$

En substituant les équations (IV.37), (IV.38) et (IV.45) dans l'équation (IV.44) et intégrant par parties, et par la suite égalant à zéro séparément les coefficients $\delta u_0^1, \delta v_0^1, \delta w_0^1, \delta \varphi_x^1, \delta \varphi_y^1$, les équations de stabilité sont obtenues comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}^1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^1}{\partial y^2} + \bar{N}_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + \bar{N}_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

$$\frac{\partial P_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^1}{\partial y} - R_{xz}^1 = 0$$

$$\frac{\partial P_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^1}{\partial y} - R_{yz}^1 = 0$$

Où \bar{N}_{xx}^0 et \bar{N}_{yy}^0 sont les efforts de pré-flambement résultants ($\bar{N}_{xx}^0 = \bar{N}_{yy}^0$).

IV.4.6. Solution trigonométrique du flambement thermique

Les conditions aux limites le long des bords de la plaque simplement appuyée peuvent être obtenues comme suit

$$v_0^1 = w_0^1 = \varphi_2^1 = N_{xx}^1 = M_{xx}^1 = P_{xx}^1 = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{IV.47})$$

$$u_0^1 = w_0^1 = \varphi_1^1 = N_{yy}^1 = M_{yy}^1 = P_{yy}^1 = 0 \quad \text{at } y = 0, b$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit

$$\{u_0^1, \varphi_1^1\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{mn}^1, X_{mn}^1\} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.48})$$

$$\{v_0^1, \varphi_2^1\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{mn}^1, Y_{mn}^1\} \sin(\lambda x) \cos(\mu y)$$

$$w_0^1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

En substituant l'équation (IV.48) dans (IV.46), on obtient

$$[L] \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \\ V_{mn}^1 \\ W_{mn}^1 \\ X_{mn}^1 \\ Y_{mn}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.49})$$

Les elements L_{ij} de la matrice $[L]$ sont donnés comme

$$L_{11} = -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{A},$$

$$L_{12} = -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{A},$$

$$L_{13} = 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B},$$

$$L_{14} = -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{C}, \quad (\text{IV.50})$$

$$L_{15} = -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{C},$$

$$L_{22} = -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{A},$$

$$L_{23} = 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B},$$

$$L_{24} = L_{15},$$

$$L_{25} = -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{C},$$

$$L_{33} = -2(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D} - 2\lambda^2\bar{N}_{xx}^0 - 2\mu^2\bar{N}_{yy}^0,$$

$$L_{34} = 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F},$$

$$L_{35} = 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F},$$

$$L_{44} = -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J},$$

$$L_{45} = -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{H},$$

$$L_{55} = -[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J}$$

Où

(IV.51)

$$\mathfrak{N}_{11} = \mathfrak{N}_{22} = \bar{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N}_{12} = \nu\bar{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N}_{66} = \frac{1-\nu}{2}\bar{\mathfrak{N}}, \quad J_{44} = J_{55} = \bar{J}, \quad (\mathfrak{N} = A, B, C, D, F, H)$$

IV.4.6.a. Flambement des plaques sandwichs en FGM sous une variation de température uniforme

La température initiale est T_i . La température augmente d'une manière uniforme pour atteindre une valeur finale de T_f . La variation de température est

$$\Delta T = T_f - T_i \quad (IV.52)$$

La température critique du flambement T_{cr} est obtenue pour la valeur minimale du mode m et n ($m = n = 1$).

En utilisant la distribution uniforme de la température, la variation de température critique du flambement est

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 [(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{H} - \bar{C}^2\bar{D} - \bar{A}\bar{F}^2 + 2\bar{B}\bar{C}\bar{F}] + a^2 b^2 \Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{J}}{a^2 b^2 \beta_1 [\Pi(\bar{A}\bar{H} - \bar{C}^2) + a^2 b^2 \bar{A}\bar{J}]} \quad (IV.53)$$

Avec

$$\Pi = (a^2 + b^2)\pi^2 \quad (\text{IV.54})$$

Pour la théorie classique

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)}{a^2 b^2 \bar{\beta}_1 \bar{A}} \quad (\text{IV.55})$$

IV.4.6.b. Flambement des plaques sandwichs en FGM sous une variation linéaire de température

La température à distribution linéaire à travers l'épaisseur de la plaque et donnée par

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV.56})$$

La température critique du flambement pour une variation linéaire de température à travers l'épaisseur de la plaque sandwich est donnée par

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 [(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{H} - \bar{C}^2\bar{D} - \bar{A}\bar{F}^2 + 2\bar{B}\bar{C}\bar{F}] + a^2 b^2 \Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{J}}{a^2 b^2 \bar{\beta}_2 [\Pi(\bar{A}\bar{H} - \bar{C}^2) + a^2 b^2 \bar{A}\bar{J}]} - \frac{T_m \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2} \quad (\text{IV.57})$$

La température critique du flambement pour la théorie classique est donnée par

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)}{a^2 b^2 \bar{\beta}_2 \bar{A}} - \frac{T_m \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2} \quad (\text{IV.58})$$

IV.4.6.c. Flambement des plaques sandwichs en FGM sous une variation non linéaire de température

Supposons que le champ de la température est constant dans le plan de la plaque et varie le long de l'épaisseur du sandwich. Dans ce cas, la variation de température peut être obtenue en résolvant l'équation de transfert de chaleur

$$-\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (\text{IV.59})$$

Cette équation est résolue en imposant les conditions au limite $T = T_b$ à $z = -h/2$ et $T = T_t$ à $z = h/2$, La distribution de la température à travers l'épaisseur du sandwich FGM est obtenue comme

$$T(z) = T_m + (T_p - T_m)\Theta^{(n)} \quad (\text{IV.60})$$

$\Theta^{(n)}$ représente la température adimensionnelle où

Pour les sandwichs P-FGM

$$\begin{aligned}\Theta^{(1)} &= \frac{\int_{h_0}^z (1/K^{(1)}(z))dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z))dz} , \quad h_0 \leq z \leq h_1 \\ \Theta^{(2)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_1} (1/K^{(1)}(z))dz + \int_{h_1}^z (1/K^{(2)}(z))dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z))dz} , \quad h_1 \leq z \leq h_2 \\ \Theta^{(3)} &= \frac{\int_{h_0}^{h_1} (1/K^{(1)}(z))dz + \int_{h_1}^{h_2} (1/K^{(2)}(z))dz + \int_{h_2}^z (1/K^{(3)}(z))dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1/K^{(n)}(z))dz} , \quad h_2 \leq z \leq h_3\end{aligned}\quad (IV.61)$$

La variation de température critique du flambement peut être obtenue comme suit

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 [(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{H} - \bar{C}^2\bar{D} - \bar{A}\bar{F}^2 + 2\bar{B}\bar{C}\bar{F}] + a^2 b^2 \Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)\bar{J}}{a^2 b^2 \bar{\beta}_3 [\Pi(\bar{A}\bar{H} - \bar{C}^2) + a^2 b^2 \bar{A}\bar{J}]} - \frac{T_m \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} \quad (IV.62)$$

Pour la théorie classique

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}^2)}{a^2 b^2 \bar{\beta}_3 \bar{A}} - \frac{T_m \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_3} \quad (IV.63)$$

IV.4.7. Résultats et analyses

Considérons une plaque sandwich rectangulaire en FGM simplement appuyée, composée d'un mélange de métal et de céramique. La combinaison des matériaux se compose d'alliage de titane et de zircon (Ti-6Al-4V / ZrO₂). Le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique pour l'alliage de titane sont E_m=66,2 Gpa, α_m=10,3×10⁻⁶ 1/°C, K_m=18,1 W/mK [118, 150, 151] et pour la zircon sont E_c=244,27 Gpa, α_c=12,766×10⁻⁶ 1/°C, K_c=1,7 W/mK [118, 152, 153]. Le coefficient de Poisson est constant (ν=0.3). On suppose que la température T_m dans la surface inférieure de la plaque sandwich est égale à 25 °C. Le facteur de correction de cisaillement pour FPT est égal à 5/6. Plusieurs schémas des plaques sandwichs sont utilisés :

La plaque sandwich P-FGM (1-1-1) : La plaque est composée de trois couches d'épaisseur égales. Dans ce cas, nous avons :

$$h_1 = -\frac{h}{6} , \quad h_2 = \frac{h}{6}$$

La plaque sandwich P-FGM (1-2-1) : L'épaisseur du cœur est égale à la somme des épaisseurs des couches des faces. Donc, on obtient :

$$h_1 = -\frac{h}{4} , \quad h_2 = \frac{h}{4}$$

La plaque sandwich P-FGM (2-2-1) : Dans ce cas, l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la couche inférieure et le double de celle de la couche supérieure

$$h_1 = -\frac{h}{10} , \quad h_2 = \frac{3h}{10}$$

En utilisant les différentes théories comme la théorie des plaques classique (CPT), la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FPT) et la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HPT), la différence de la température critique du flambement ($T_{cr} = 10^{-3}\Delta T_{cr}$) pour différents types de chargement thermique a été listé dans les tableaux suivants. Dans les **tableaux IV.5-IV.7**, la température critique du flambement en fonction du rapport d'épaisseur a/h sous une charge thermique à distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur est illustrée. L'indice de puissance est fixé à $k = 0,5, 2$. On voit que la température critique du flambement pour $k=0,5$ est supérieure à celle pour $k=2$ dans le cas des plaques de type-A, et inférieure dans le cas des plaques Type-B, quel que soit le type de chargement. La différence de température du flambement critique T_{cr} en fonction du rapport a/b est illustrée dans les **tableaux IV.8-IV.10**. Les températures critiques du flambement obtenues sur la base de la théorie des plaques classique (CPT) sont plus grandes que les valeurs obtenues sur la base d'autres théories. On peut observer que la différence entre les théories de la plaque de déformation de cisaillement et la théorie classique diminue quand le rapport d'épaisseur a/h augmente ou le rapport a/b diminue parce que la plaque devient mince ou longue.

La **figure IV.6** montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour différents types des plaques sandwichs FGM. Six schémas différents de la plaque sandwich sont considérés.

En basant sur l'**équation (IV.61)**, la distribution de la température adimensionnelle le long de l'épaisseur pour différentes valeurs de l'indice de puissance k est présentée dans la **figure IV.7**.

Tableau IV.5. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique uniforme ($a/b=1$).

		Schéma	k	Théorie	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=15$	$a/h=25$	$a/h=50$
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HBT	2.83224	0.79456	0.36132	0.13164	0.03307	
			FBT	2.80230	0.79223	0.36084	0.13157	0.03307	
			CBT	3.31343	0.82835	0.36815	0.13253	0.03313	
	2	0.5	HBT	2.35999	0.64238	0.29028	0.10540	0.02644	
			FBT	2.31737	0.63921	0.28963	0.10532	0.02644	
			CBT	2.64805	0.66201	0.29422	0.10592	0.02648	
	1 2 1	0.5	HBT	2.86971	0.80925	0.36841	0.13430	0.03375	
			FBT	2.84659	0.80745	0.36804	0.13425	0.03375	
			CBT	3.38154	0.84538	0.37572	0.13526	0.03381	
	2	0.5	HBT	2.42873	0.66687	0.30189	0.10972	0.02754	
			FBT	2.39541	0.66436	0.30137	0.10965	0.02753	
			CBT	2.75800	0.68950	0.30644	0.11032	0.02758	
	2 2 1	0.5	HBT	2.86320	0.80590	0.36674	0.13366	0.03359	
			FBT	2.83740	0.80389	0.36632	0.13360	0.03358	
			CBT	3.36507	0.84126	0.37389	0.13460	0.03365	
2	0.5	HBT	2.41835	0.66211	0.29955	0.10884	0.02731		
		FBT	2.38152	0.65934	0.29899	0.10876	0.02731		
		CBT	2.73533	0.68383	0.30392	0.10941	0.02735		
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HBT	2.68634	0.74857	0.33993	0.12375	0.03108	
			FBT	2.66342	0.74683	0.33957	0.12370	0.03108	
			CBT	3.11358	0.77839	0.34595	0.12454	0.03113	
	2	0.5	HBT	2.85194	0.80801	0.36822	0.13430	0.03376	
			FBT	2.86421	0.80907	0.36845	0.13433	0.03376	
			CBT	3.38276	0.84569	0.37586	0.13531	0.03382	
	1 2 1	0.5	HBT	2.75276	0.76941	0.34961	0.12732	0.03198	
			FBT	2.73024	0.76769	0.34926	0.12727	0.03198	
			CBT	3.20400	0.80100	0.35600	0.12816	0.03204	
	2	0.5	HBT	2.97362	0.84870	0.38739	0.14141	0.03556	
			FBT	2.99792	0.85076	0.38782	0.14147	0.03556	
			CBT	3.56357	0.89089	0.39595	0.14254	0.03563	
	2 2 1	0.5	HBT	2.84152	0.80101	0.36464	0.13292	0.03340	
			FBT	2.83911	0.80088	0.36461	0.13291	0.03340	
			CBT	3.34676	0.83669	0.37186	0.13387	0.03346	
2	0.5	HBT	3.19501	0.93147	0.42717	0.15633	0.03935		
		FBT	3.27137	0.93798	0.42854	0.15651	0.03937		
		CBT	3.94513	0.98628	0.43834	0.15780	0.03945		

Tableau IV.6. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique linéaire ($a/b=1$).

	Schéma	k	Théorie	a/h				
				5	10	15	25	50
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HPT	5.61448	1.53912	0.67265	0.21328	0.01615
			FPT	5.55460	1.53446	0.67169	0.21315	0.01614
			CPT	6.57686	1.60671	0.68631	0.21507	0.01626
	2		HPT	4.66999	1.23477	0.53057	0.16081	0.00289
			FPT	4.58474	1.22842	0.52927	0.16064	0.00288
			CPT	5.24611	1.27402	0.53845	0.16184	0.00296
	1 2 1	0.5	HPT	5.68943	1.56850	0.68682	0.21860	0.01751
			FPT	5.64318	1.56490	0.68608	0.21850	0.01750
			CPT	6.71309	1.64077	0.70145	0.22052	0.01763
	2		HPT	4.80746	1.28374	0.55378	0.16944	0.00508
			FPT	4.74083	1.27872	0.55275	0.16931	0.00507
			CPT	5.46601	1.32900	0.56289	0.17064	0.00516
	2 2 1	0.5	HPT	5.44174	1.49723	0.65522	0.20834	0.01647
			FPT	5.39227	1.49338	0.65443	0.20823	0.01646
			CPT	6.40398	1.56504	0.66894	0.21014	0.01658
2		HPT	4.40713	1.17318	0.50557	0.15438	0.00426	
		FPT	4.33933	1.16808	0.50452	0.15424	0.00425	
		CPT	4.99083	1.21318	0.51361	0.15543	0.00433	
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HPT	4.13256	1.12357	0.48903	0.15334	0.00945
			FPT	4.09696	1.12087	0.48847	0.15327	0.00944
			CPT	4.79597	1.16987	0.49837	0.15457	0.00952
	2		HPT	4.23460	1.17290	0.51413	0.16373	0.01312
			FPT	4.25298	1.17449	0.51447	0.16378	0.01313
			CPT	5.02974	1.22935	0.52557	0.16523	0.01322
	1 2 1	0.5	HPT	4.32245	1.179606	0.51439	0.16214	0.01107
			FPT	4.28676	1.17688	0.51383	0.16206	0.01106
			CPT	5.03749	1.22966	0.52450	0.16346	0.01115
	2		HPT	4.42537	1.23623	0.54388	0.17472	0.01585
			FPT	4.46184	1.23932	0.54453	0.17480	0.01586
			CPT	5.31079	1.29955	0.55673	0.17641	0.01596
	2 2 1	0.5	HPT	4.27547	1.17798	0.51557	0.16382	0.01276
			FPT	4.27180	1.17779	0.51553	0.16382	0.01276
			CPT	5.04242	1.23214	0.52653	0.16526	0.01285
2		HPT	4.70093	1.34424	0.59639	0.19475	0.02129	
		FPT	4.81417	1.35390	0.59842	0.19503	0.02131	
		CPT	5.81331	1.42552	0.61297	0.19694	0.02143	

Tableau IV.7. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/h sous un chargement thermique non linéaire ($a/b=1$).

		Schéma	k	Théorie	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=15$	$a/h=25$	$a/h=50$
P-FGM TYPE-A	1 1 1	0.5	HPT	5.61448	1.53912	0.67265	0.21328	0.01615	
			FPT	5.55460	1.53446	0.67169	0.21315	0.01614	
			CPT	6.57686	1.60671	0.68631	0.21507	0.01626	
		2	HPT	4.66999	1.23477	0.53057	0.16081	0.00289	
			FPT	4.58474	1.22842	0.52927	0.16064	0.00288	
			CPT	5.24611	1.27402	0.53845	0.16184	0.00296	
	1 2 1	0.5	HPT	5.68943	1.56850	0.68682	0.21860	0.01751	
			FPT	5.64318	1.56490	0.68608	0.21850	0.01750	
			CPT	6.71309	1.64077	0.70145	0.22052	0.01763	
		2	HPT	4.80746	1.28374	0.55378	0.16944	0.00508	
			FPT	4.74083	1.27872	0.55275	0.16931	0.00507	
			CPT	5.46601	1.32900	0.56289	0.17064	0.00516	
2 2 1	0.5	HPT	6.12471	1.68515	0.73746	0.23449	0.01854		
		FPT	6.06903	1.68081	0.73656	0.23437	0.01853		
		CPT	7.20772	1.76146	0.75290	0.23651	0.01866		
	2	HPT	5.13348	1.36653	0.58889	0.17983	0.00497		
		FPT	5.05449	1.36060	0.58768	0.17967	0.00496		
		CPT	5.81338	1.41312	0.59826	0.18105	0.00504		
P-FGM TYPE-B	1 1 1	0.5	HPT	6.68117	1.81650	0.79062	0.24791	0.01527	
			FPT	6.62363	1.81213	0.78972	0.24779	0.01527	
			CPT	7.75372	1.89136	0.80573	0.24989	0.01540	
		2	HPT	6.98307	1.93418	0.84783	0.27001	0.02165	
			FPT	7.01338	1.93680	0.84838	0.27008	0.02165	
			CPT	8.29430	2.02726	0.86669	0.27248	0.02180	
	1 2 1	0.5	HPT	6.76137	1.94573	0.84848	0.26745	0.01826	
			FPT	7.07091	1.94124	0.84756	0.26732	0.01825	
			CPT	8.30922	2.02829	0.86516	0.26963	0.01840	
		2	HPT	7.63012	2.13149	0.93775	0.30125	0.02733	
			FPT	7.69300	2.13681	0.93887	0.30140	0.02734	
			CPT	9.15673	2.24066	0.95991	0.30416	0.02752	
2 2 1	0.5	HPT	7.33028	2.01965	0.88395	0.28087	0.02188		
		FPT	7.32400	2.01932	0.88389	0.28087	0.02188		
		CPT	8.64521	2.11250	0.90274	0.28334	0.02203		
	2	HPT	8.18967	2.34185	1.03900	0.33929	0.03709		
		FPT	8.38695	2.35868	1.04254	0.33976	0.03712		
		CPT	10.12759	2.48345	1.06787	0.34310	0.03733		

Tableau IV.8. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique uniforme ($a/h = 10$).

	Schéma	Théorie	$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=5$
P-FGM TYPE-A	1 1 1	HPT	0.40600	0.64238	1.53766	2.87203	6.16775
		FPT	0.40473	0.63921	1.51951	2.80901	5.87947
		CPT	0.41375	0.66201	1.65503	3.31007	8.60618
	1 2 1	HPT	0.42198	0.66687	1.58903	2.94808	6.22845
		FPT	0.42098	0.66436	1.57477	2.89899	6.00795
		CPT	0.43093	0.68950	1.72375	3.44750	8.96351
	2 2 1	HPT	0.41880	0.66211	1.58006	2.93798	6.24046
		FPT	0.41770	0.65934	1.56433	2.88365	5.99516
		CPT	0.42739	0.68383	1.70958	3.41916	8.88984
P-FGM TYPE-B	1 1 1	HPT	0.51358	0.80801	1.89370	3.43082	6.86679
		FPT	0.51401	0.80907	1.89931	3.44812	6.92142
		CPT	0.52855	0.84569	2.11422	4.22845	10.99398
	1 2 1	HPT	0.54002	0.84870	1.98128	3.56982	7.05975
		FPT	0.54086	0.85076	1.99229	3.60437	7.17921
		CPT	0.55680	0.89089	2.22723	4.45446	11.58161
	2 2 1	HPT	0.59455	0.93147	2.14984	3.81326	7.29624
		FPT	0.59720	0.93798	2.18451	3.92177	7.68061
		CPT	0.61642	0.98628	2.46570	4.93141	12.82167

Tableau IV.9. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique linéaire ($a/h = 10$).

	Schéma	Théorie	$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=5$
P-FGM TYPE-A	1 1 1	HPT	0.76201	1.23477	3.02533	5.69407	12.28551
		FPT	0.75946	1.22842	2.98903	5.56803	11.70894
		CPT	0.77751	1.27402	3.26007	6.57014	17.16237
	1 2 1	HPT	0.79397	1.28374	3.12806	5.84617	12.40691
		FPT	0.79196	1.27872	3.09954	5.74798	11.96591
		CPT	0.81187	1.32900	3.39750	6.84501	17.87703
	2 2 1	HPT	0.72516	1.17318	2.86351	5.36399	11.44521
		FPT	0.72312	1.16808	2.83454	5.26396	10.99352
		CPT	0.74097	1.21318	3.10201	6.25005	16.32380
P-FGM TYPE-B	1 1 1	HPT	0.73187	1.17290	2.79920	5.10173	10.24863
		FPT	0.73251	1.17449	2.80761	5.1276	10.33046
		CPT	0.75430	1.22935	3.12954	6.29654	16.43093
	1 2 1	HPT	0.77296	1.23623	2.93605	5.32017	10.55795
		FPT	0.77422	1.23932	2.95256	5.37201	10.73724
		CPT	0.79815	1.29955	3.30517	6.64786	17.34449
	2 2 1	HPT	0.84461	1.34424	3.15102	5.61776	10.78282
		FPT	0.84855	1.35390	3.20242	5.77868	11.35281
		CPT	0.87705	1.42552	3.61942	7.27591	18.97670

Tableau IV.10. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich P-FGM en fonction du rapport a/b sous un chargement thermique non linéaire ($a/h = 10$).

	Schéma	Théorie	$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=5$
P-FGM TYPE-A	1 1 1	HPT	0.76201	1.23477	3.02533	5.69407	12.28551
		FPT	0.75946	1.22842	2.98903	5.56803	11.70894
		CPT	0.77751	1.27402	3.26007	6.57014	17.16237
	1 2 1	HPT	0.79397	1.28374	3.12806	5.84617	12.40691
		FPT	0.79196	1.27872	3.09954	5.74798	11.96591
		CPT	0.81187	1.32900	3.39750	6.84501	17.87703
	2 2 1	HPT	0.84467	1.36653	3.33545	6.24803	13.33151
		FPT	0.84230	1.36060	3.30170	6.13151	12.80537
		CPT	0.86309	1.41312	3.61325	7.28013	19.01414
P-FGM TYPE-B	1 1 1	HPT	1.20689	1.93418	4.61603	8.41301	16.90051
		FPT	1.20796	1.93680	4.62990	8.45574	17.03545
		CPT	1.24387	2.02726	5.16078	10.38332	27.09543
	1 2 1	HPT	1.33272	2.13149	5.06226	9.17291	18.20376
		FPT	1.33489	2.13681	5.09074	9.26230	18.51289
		CPT	1.37615	2.24066	5.69870	11.46209	29.90494
	2 2 1	HPT	1.47143	2.34185	5.48951	9.78692	18.78516
		FPT	1.47829	2.35868	5.57906	10.06725	19.77815
		CPT	1.52794	2.48345	6.30552	12.67564	33.06001

On voit que, quelle que soit le type de la plaque sandwich, la variation de température le long de l'épaisseur de couches homogènes est linéaire, alors que pour les couches FGM, cette variation est non linéaire. En raison de la faible conductivité thermique des couches de céramique, la température à travers l'épaisseur diminue rapidement.

La variation des températures critiques T_{cr} de plaques sandwichs FGM soumises à divers types de charges thermiques en fonction du rapport géométrique a/h est représentée sur la **figure IV.8**. On observe que la différence de température critique diminue avec l'augmentation du rapport a/h . On peut également voir que les températures critiques sous une charge thermique uniforme sont plus faibles que celles de la plaque sous une charge linéaire et que celle-ci est inférieure à celle de une plaque sous la charge non linéaire.

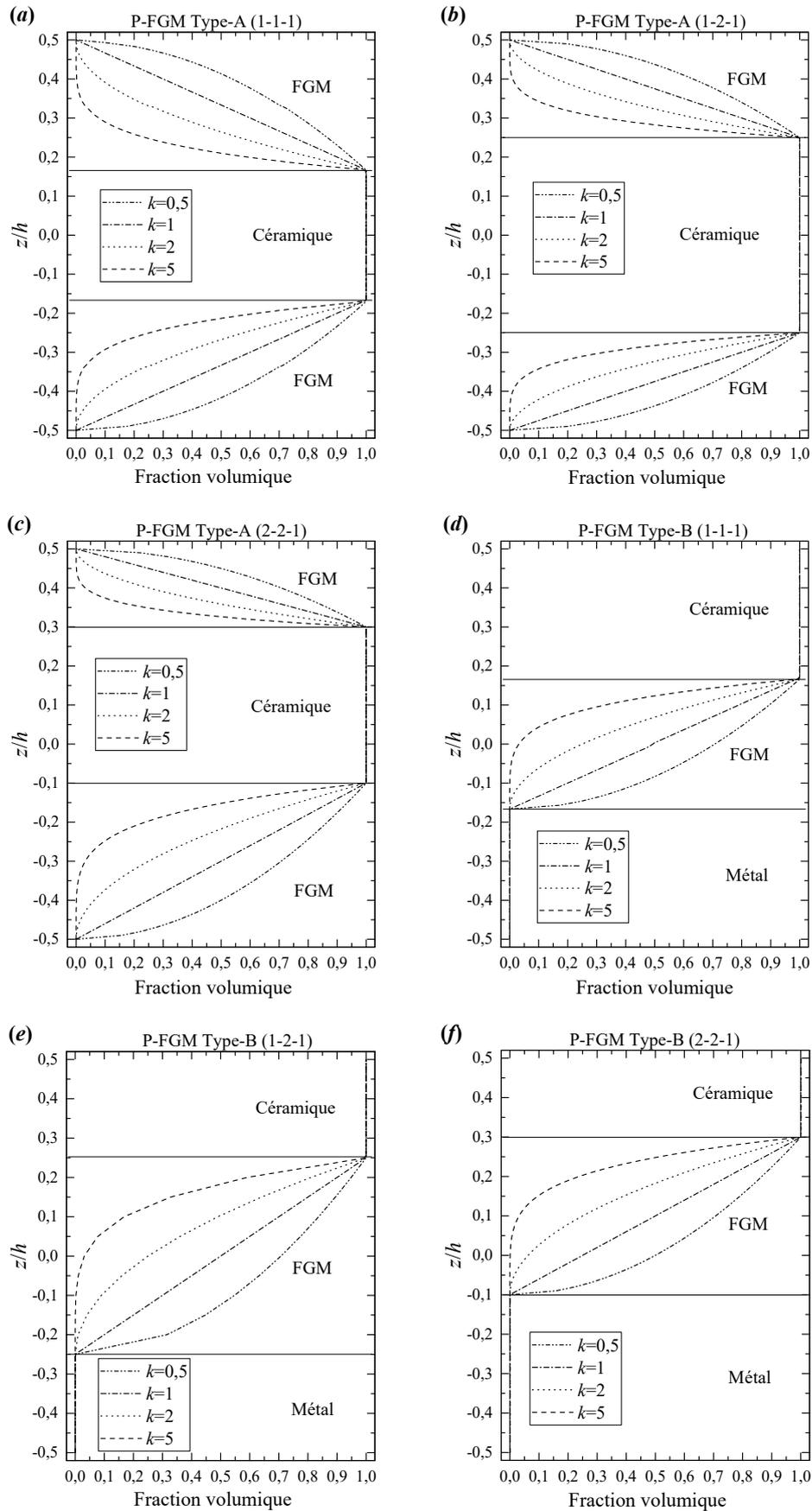


Figure IV.6. Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM.

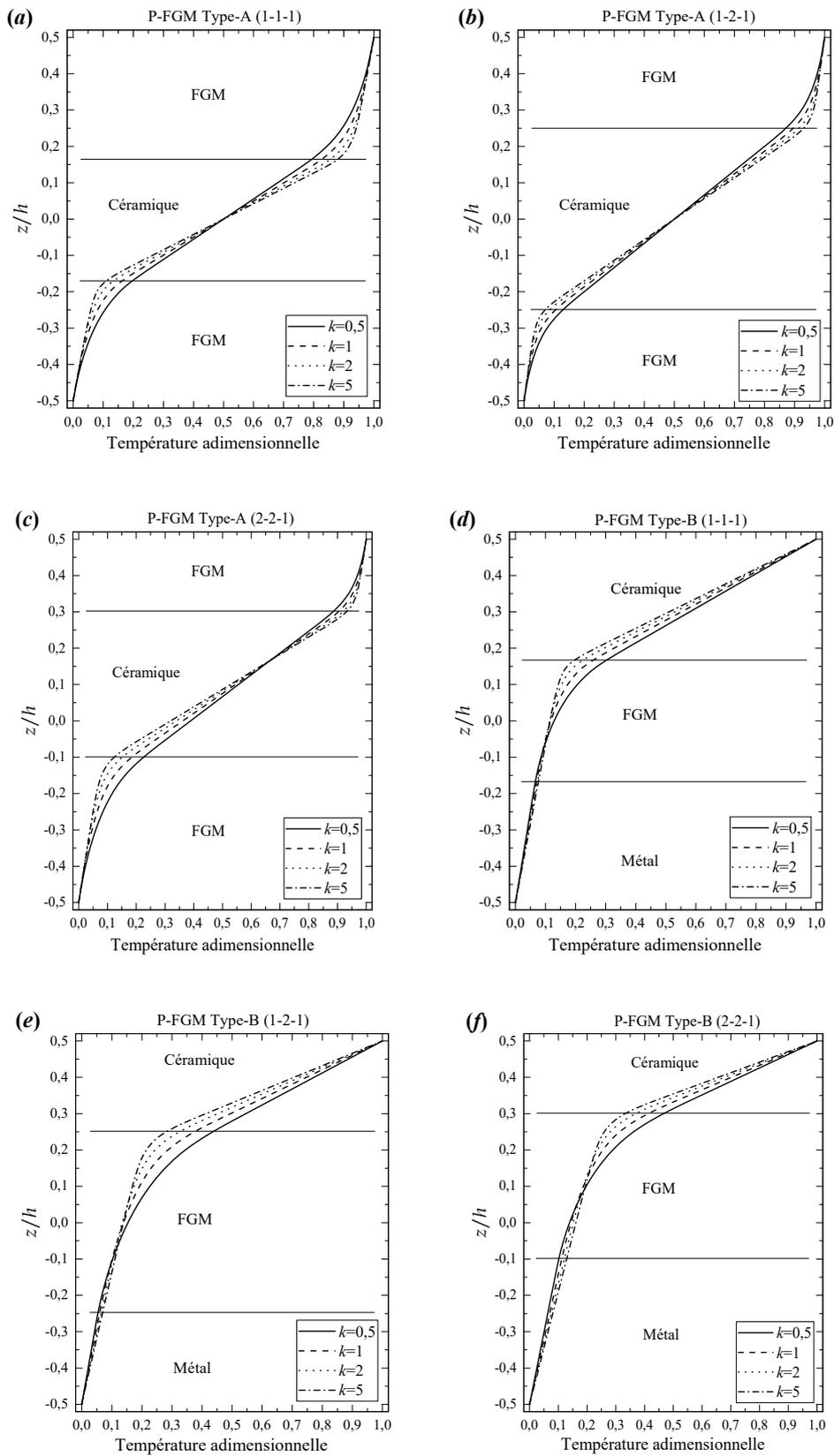


Figure IV.7. Température adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM.

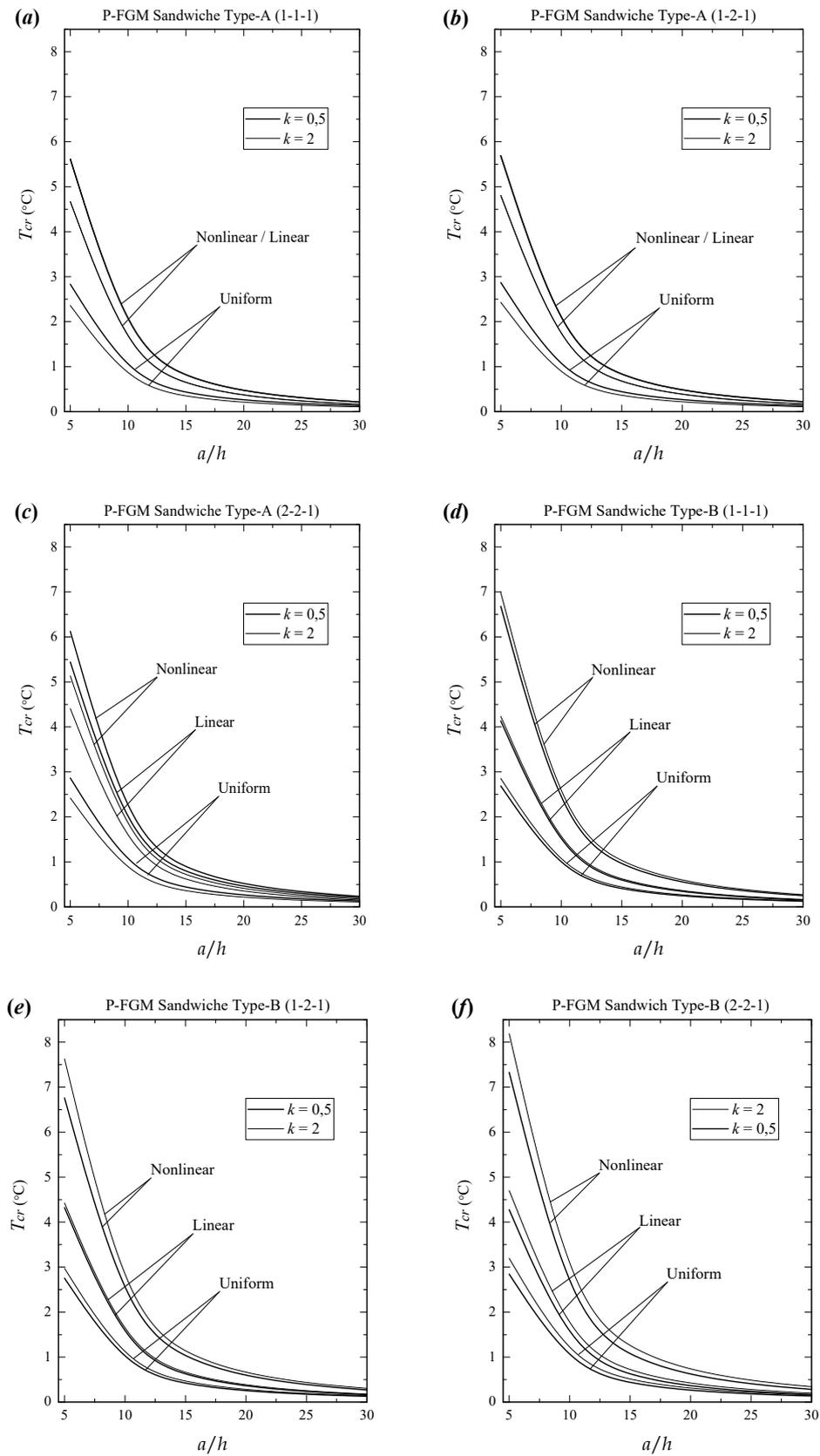


Figure IV.8. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du rapport a/h ($a/b=1$).

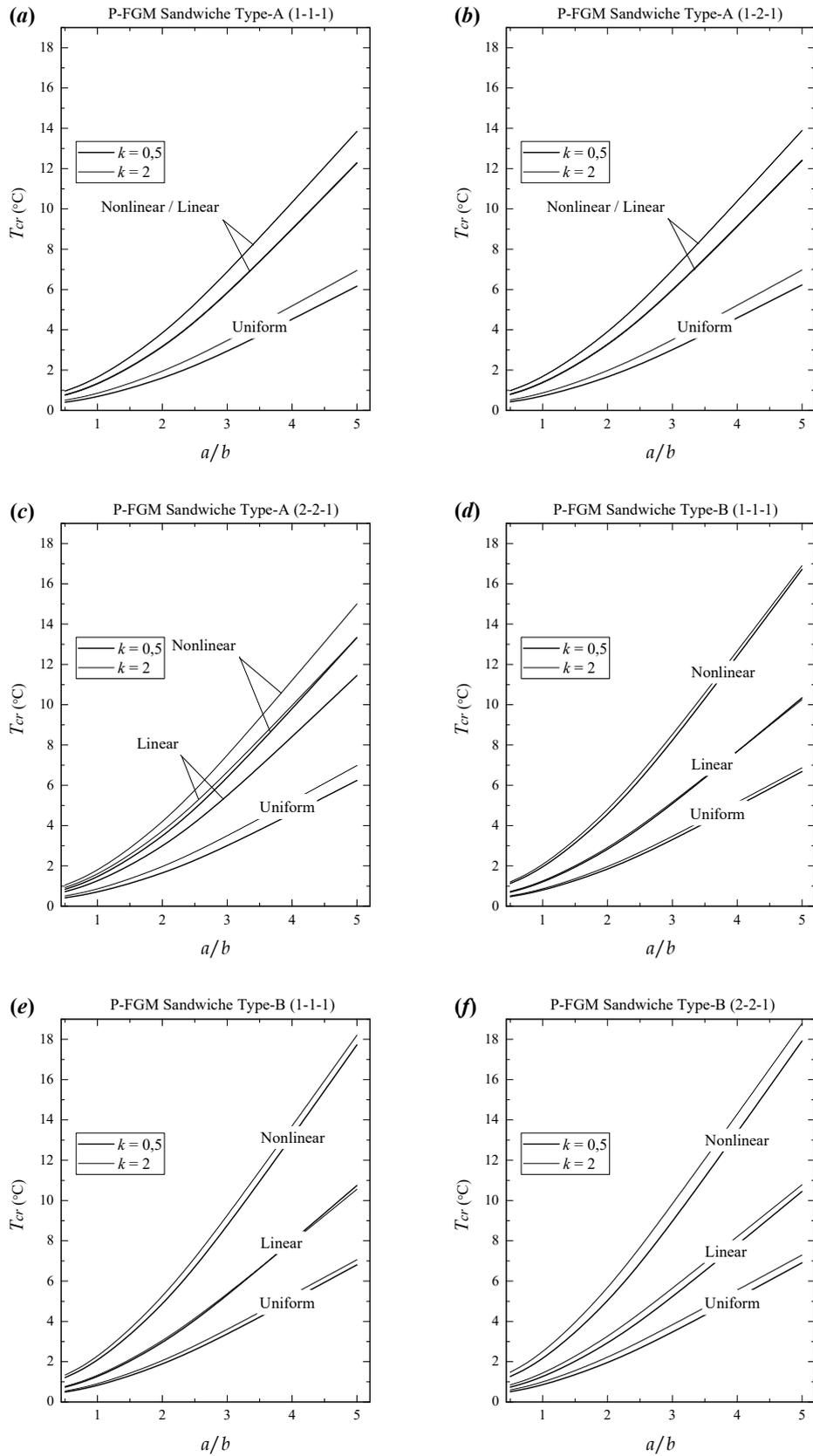


Figure IV.9. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du rapport a/b ($a/h=10$).

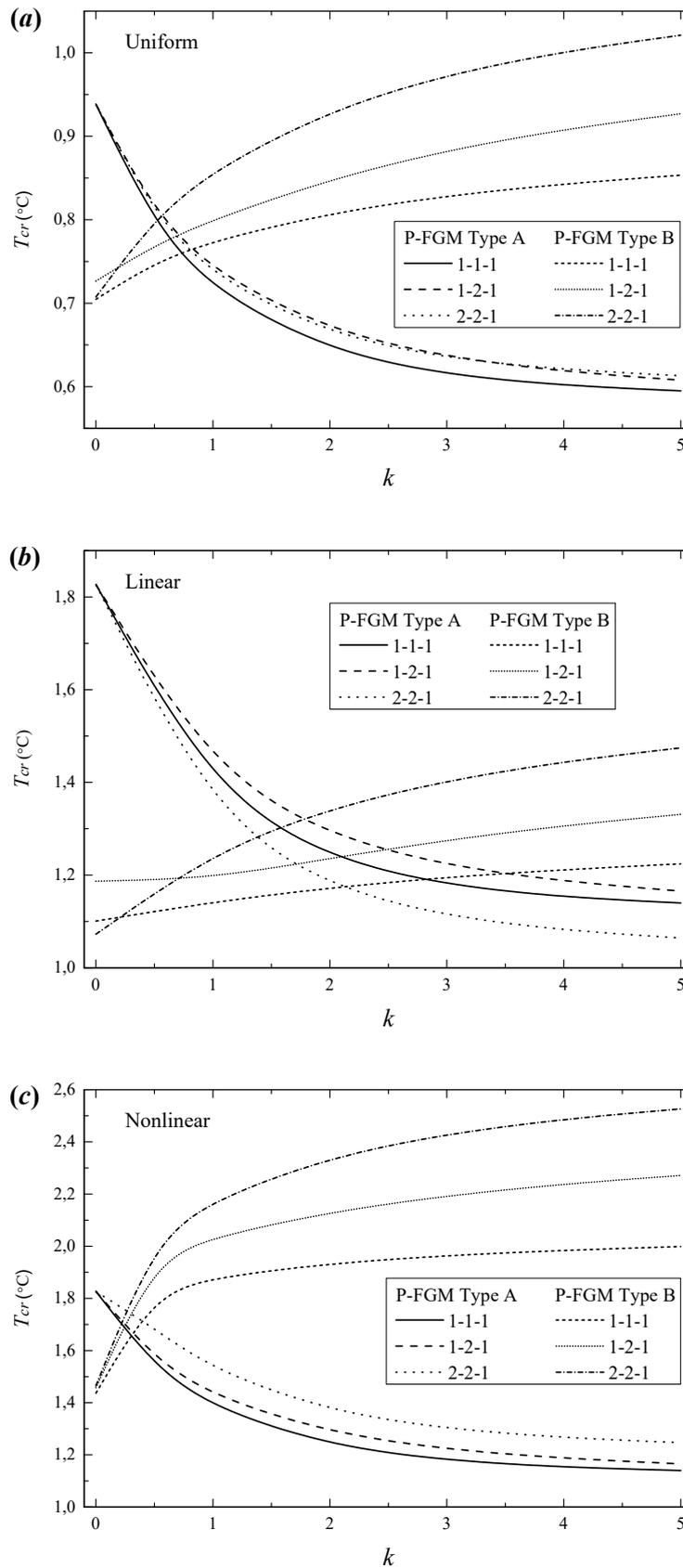


Figure IV.10. Température critique du flambement T_{cr} d'une plaque sandwich en FGM en fonction du paramètre k sous différents types de chargements thermiques ($a/h = 10$).

La différence de la température critique du flambement T_{cr} en fonction du rapport a/b sous des charges thermiques uniformes, linéaires et non linéaires est illustrée sur la **figure IV.9**. Il est clair qu'avec l'augmentation du rapport a/b de la plaque, la température critique du flambement augmente également progressivement. Les mêmes résultats ont été obtenus pour les plaques sandwichs symétriques (Type-A 1-0-1 et 1-2-1) sous une charge thermique linéaire et non linéaire (voir **Figure IV.8 (a, b)** et **Figure IV.9 (a, b)**).

La **figure IV.10** montre l'effet de l'indice de puissance k sur la température critique du flambement T_{cr} pour différents types des plaques sandwichs FGM sous une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire. Dans le cas des plaques sandwichs au cœur homogène (Type-A), on constate qu'avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique k , la température critique du flambement T_{cr} diminue quel que soit le type de chargement, tandis que T_{cr} augmente pour les plaques sandwichs au cœur en FGM (Type-B).

Pour les plaques sandwichs Type-A, la valeur de l'indice de fraction volumique $k=0$ représente une plaque isotrope homogène (céramique), et un bi-matériau (céramique/métal) pour les plaques sandwichs Type-B. Pour les plaques isotropes homogènes (Type-A, $k=0$) sous différents types des charges thermiques (voir **Figure IV.9 (a-c)**), nous obtenons les mêmes résultats de température critique du flambement T_{cr} quel que soit le type de sandwich. On observe en outre que la différence de la température critique du flambement pour la plaque sandwich de type B (2-2-1) avec des valeurs d'indice de loi de puissance supérieures à $1/2$ est plus élevée que pour les autres plaques sandwichs FGM.

IV.4.8. Conclusion

Dans cette partie, l'analyse du flambement thermique de plaques sandwichs fonctionnellement graduées a été analysée. Différents types de plaques sandwichs FGM sont présentés. Les propriétés matérielles des couches de FGM sont supposées varier continuellement dans l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Les équations d'équilibre et de stabilité des plaques sandwichs FGM ont été dérivées sur la base de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Trois types de charges thermiques comme la charge uniforme, linéaire et non linéaire ont été considérées. Une nouvelle solution pour la température critique du flambement des plaques sandwichs FGM sous un chargement thermique à une distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur est présentée.

En conséquence, les caractéristiques du flambement thermique des plaques sandwichs FGM sont significativement influencées par le champ de température, l'indice de fraction volumique et les paramètres géométriques du système. L'indice de puissance k a un effet considérable sur la différence de température critique du flambement de la plaque sandwich FGM. La température critique du flambement sous une charge non linéaire a la valeur la plus élevée dans les trois cas de conditions de charge thermique. La température critique T_{cr} du flambement des plaques sandwichs FGM est plus élevée dans les plaques épaisses et courtes. La différence de température critique du flambement diminue avec l'augmentation du rapport a/h , et augmente quand le rapport a/b augmente.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté avait pour objectif l'étude du comportement en statique et en dynamique des matériaux sandwichs fonctionnellement gradués. Les propriétés matérielles de la structure utilisée varient selon une loi de puissance (P-FGM) ou selon une fonction sigmoïde (S-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants.

Le troisième chapitre de cette étude a été consacré à l'analyse du comportement vibratoire d'une structure sandwich fonctionnellement graduée avec des propriétés matérielles tel que le module de Young varient selon une fonction sigmoïde (S-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants.

Dans la première partie de ce chapitre, une formulation basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée a été mise en place permettant de décrire le comportement statique d'une poutre sandwich en FGM simplement appuyée. Afin d'obtenir les équations de stabilité, une solution trigonométrique en utilisant la méthode de Navier a été appliquée pour calculer la fréquence naturelle due à la vibration libre de la poutre sandwich FGM.

Dans la deuxième partie, la même théorie d'ordre élevée et les mêmes procédures d'analyse sont utilisées pour examiner la vibration libre des plaques sandwichs rectangulaire en S-FGM.

Le quatrième chapitre de ce travail a été consacré à l'analyse du flambement thermique des poutres et des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées. Les propriétés matérielles telles que le module de Young et le coefficient de la dilatation thermique varient à travers l'épaisseur de la structure selon une fonction de loi de puissance (P-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants. On a déterminé le champ de déplacement et le tenseur de déformation, et après, les équations d'équilibre en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions des températures critiques du flambement des sandwichs FGM sont trouvées en basant sur la procédure de Navier. Trois types de charge thermique varient à travers la direction d'épaisseur sont proposés : charge thermique uniforme, charge thermique linéaire et charge thermique non linéaire. Nous avons proposé dans ce chapitre une solution exacte de la distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur de la structure sandwich.

En conséquence, les types de matériaux à gradient fonctionnel traités montrent une grande influence sur la fréquence adimensionnelle et le flambement thermique lorsque l'exposant de la fraction volumique varie.

La fréquence adimensionnelle augmente lorsque a/h augmente et se stabilise pour les plaques très minces. Tandis que la température critique du flambement est proportionnelle à l'épaisseur. D'autre part, La fréquence adimensionnelle et la température critique du flambement augmentent avec l'augmentation du rapport a/b . La température critique du flambement est influencée aussi par le type de la charge thermique et le schéma du sandwich.

Dans l'application de technologie, l'étude de ces phénomènes est très essentielle pour choisir les paramètres du matériau appropriés afin de s'assurer de la réponse des structures.

REFERENCES

REFERENCES

- [1] M. Koizumi, (1992). The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* 34, 3–10.
- [2] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, (1993) *Functionally graded materials: design, processing and applications*, Springer Science & Business Media.
- [3] R.E. Mistler, (1973). High strength substrates produced by multiple layer casting technique, *American Ceramic Society Bulletin* 52 (1), 850–854.
- [4] P. Boch, T. Chartier, M. Huttepain, (1986). Casting of Al_2O_3/ZrO_2 laminated Composites, *Journal of the American Ceramic Society* 69 (8), 191–192.
- [5] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia, R. Moreno, (1992). Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters* 14, 333–35.
- [6] J.H. Adair, S.A. Touse, P.J. Melling, (1987). Chemically Derived Multilayer. *Ceramics, American Ceramic Society Bulletin* 66 (10), 1490–1494
- [7] A.M. Bishop, C.Y. Lin, M. Navaratnam, R.D. Rawlings, H.B. McChane, (1993). A functionally graded material produced by a powder metallurgical process, *journal of materials science letters* 12, 1516–1518.
- [8] H.D. Steffens, M. Dvorak, M. Wewel, (1990). Plasma sprayed functionally Gradient materials – Processing and application, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 1990*, 139–143
- [9] S. Uemura, Y. Sohda, Y. Kude, (1990). SiC/C Functionally Gradient Material Prepared by Chemical Vapor Deposition, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 237–242*.
- [10] C. Kawai, S. Wakamatsu, S. Sakagami, T. Igarashi, (1990). Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced composite by CVD, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 77–82*.
- [11] M. Takahashi, Y. Itoh, H. Kashiwaya, (1990). Fabrications and evaluations of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 129–134*.
- [12] H. Benien, M. Meyer, R. Suchentrunk, (1990). Application of Functional Gradient. *Materials in the Aerospace Industry, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 135–38*.
- [13] M. Chigasaki, Y. Kojima, S. Nakashima, Y. Fukaya, (1990). Partially Stabilized. ZrO_2 and Cu FGM Prepared by Dynamic Ion Mixing Process, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 269–72*.
- [14] E. Lucchini, O. Sbaizero, (1995). Alumina/Zirconia Multilayer Composites Obtained by Centrifugal Consolidation, *Journal of the European Ceramic Society* 15, 975–81.
- [15] C. Hillman, Z. Suo, F.F. Lange, (1996). Cracking of laminates subjected to biaxial tensile stresses. *Journal of the American Ceramic Society* 79 (8), 2127–2133.
- [16] O. Sbaizero, E. Lucchini, (1996). Influence of residual stresses on the mechanical properties of layered ceramic composite, *Journal of the European Ceramic Society*, 16, 813–818.

- [17] G.R. Kirchhoff, (1850). *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40, 51–88.
- [18] E. Reissner, (1945). The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* 12, 69–77.
- [19] R.D. Mindlin, (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* 18, 31–38.
- [20] S.A. Ambartsumyan, (1958). On the theory of bending plates, *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR* 5, 69–77.
- [21] E.T. Kruszewski, (1909). Effect of transverse shear and rotatory inertia on the natural frequency of a uniform beam, *National Advisory Committee for Aeronautics*.
- [22] J.N. Reddy, (1990). A general non-linear third order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Non-linear Mechanics* 25 (6), 677–686.
- [23] M. Touratier, (1991). An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science* 29 (8) 901–916.
- [24] K.P. Soldatos, (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica* 94, 195–200.
- [25] M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, (2003). Mechanical behavior of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures* 40, 1525–1546.
- [26] S.S. Akavci, (2007). Buckling and free vibration analysis of symmetric and anti-symmetric laminated composite plates on an elastic foundation, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (18), 907–1 919.
- [27] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C.G. Soares, (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Composites Part B* 43, 489–1499.
- [28] A.E. Alshorbagy, M.A. Eltahir, F.F. Mahmoud, (2011). Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element. *Applied Mathematics Modeling*, 35, 412–425.
- [29] M. Şimşek, T. Kocatürk, (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 90, 465–473 (2009)
- [30] S.M.R. Khalili, A.A. Jafari, S.A. Eftekhari, (2010). A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Composite Structures*, 92, 2497–2511.
- [31] S.C. Pradhan, T. Murmu, (2009). Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundation using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 321, 342–362.
- [32] J. Yang, Y. Chen, (2011). Free vibration and buckling analysis of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures*, 93, 48–60.
- [33] S.R. Li, P. Liu, (2010). Analogous transformation of static and dynamic solutions between functionally graded material and uniform beams (in Chinese). *Mechanics and Engineering*, 32, 45–49.
- [34] S.R. Li, H.D. Su, C.J. Cheng, (2009). Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 30(8), 969–982.

- [35] Y. Huang, X.F. Li, (2010). A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2291–2303.
- [36] Y. Liu, D.W. Shu, (2014). Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination. *Composites: Part B*, 59, 166–172.
- [37] S.A. Sina, H.M. Navazi, H. Haddadpour, (2009). An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials and Design*, 30, 741–747.
- [38] X.F. Li, (2008). A unified approach for analyzing static and dynamic behaviours of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 318, 1210–1229.
- [39] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method. *Composites Part B*, 51, 175–184.
- [40] H.J. Xiang, J. Yang, (2008). Free and forced vibration of laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction. *Composites: Part B*, 39, 292–303.
- [41] M. Shahba, R. Attarnejad, M. Tavanaie Marvi, M.S. Hajilar, (2011). Free vibration and stability analysis axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42, 801–808.
- [42] Y. Huang, L.E. Yang, Q.A. Luo, (2013). Free vibration of axially graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites: Part B*, 44, 1493–1498.
- [43] T.K. Nguyen, T.P. Vo, H.T. Thai, (2013). Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order-shear deformation theory. *Composites: Part B*, 55, 147–157.
- [44] S. Rajasekaran, E.N. Tochaei, (2014). Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica*, 49, 995–1009.
- [45] S.R. Li, L.L. Fan, (2014). Free vibration of FGM Timoshenko beams with through-width delamination. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 57, 927–934.
- [46] S.R. Li, Z.Q. Wan, J. H. Zhang, (2014). Free vibration of functionally graded beams based on both classical and the first-order shear deformation beam theories. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 35(5), 591–606 (2014).
- [47] M. Aydogdu, V. Taskin, (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Material Design*, 28, 1651–1656.
- [48] M. Simsek, (2010). Vibration analysis of a functionally graded beam under moving mass by using different beam theories. *Composite Structures*, 92, 904–917.
- [49] M. Simsek, (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240, 697–705.

- [50] A.Mahi, E.A. Adda-Bedia, A. Tounsi, I. Mechab, (2010). An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions. *Composite Structures*, 92, 1877–1887.
- [51] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, (2014). Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams. *International Journal of Mechanical Science*, 82, 149–160.
- [52] H.T. Thai, T.P. Vo, (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62, 57–66.
- [53] T.P. Vo, H.T. Thai, T.K. Nguyen, F. Inam, (2014). Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. *Meccanica*, 49, 155–168.
- [54] T.P. Vo, H.T. Thai, T.K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, (2014). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. *Engineering Structures*, 64, 12–22.
- [55] H.S. Shen, Z.X. Wang, (2014). Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 195–206.
- [56] J.N. Reddy, (2000). Analysis of functionally graded plates. *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*. 47, 663-684.
- [57] S.S. Vel, R.C. Batra, (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272, 703–730.
- [58] Huang, X.L., Shen, H.S., 2004. Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structure*, 41, 2403-2427.
- [59] A. Zenkour, (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 - buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structure*, 42, 5243–5258.
- [60] Q. Li, V.P. Lu, K.P. Kou, (2008). Three dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311, 498–515.
- [61] H. Matsunaga, (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*. 82, 499-512.
- [62] Q. Li, V.P. Lu, K.P. Kou, K.P. (2009). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration*, 324 (3-5), 733-750.
- [63] X.Z. Wang, H.S. Shen, (2011). Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Composite Structures*, 93, 2521-2532.

- [64] S. Xiang, X.X. Jin, Z.Y. Bi, S.X. Jiang, M.S. Yang, (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93, 11, 2826-2832.
- [65] H.S. Shen, C.L. Zhang, (2012). Non-linear analysis of functionally graded fiber reinforced composite laminated plates. Part II: Numerical results. *Int. International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47, 1055-1064.
- [66] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N Jorge, C.M.M. Soares, (2012). A quasi 3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Composite Structures*, 94, 1814-1825.
- [67] H.S. Shen, X.Z. Wang, (2012). Assessment of Voigt and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94, 2197-2208.
- [68] S.M.R. Khalili, Y. Mohammadi, (2012). Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 35, 61-74.
- [69] S. Xiang, G.W. Kang, M.S. Yang, Y. Zhao, (2013). Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures*, 96, 226-231.
- [70] T.H. Thai, T.P. Vo, (2013). A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 3269-3281.
- [71] F.A. Fazzolari, E. Carrera, (2013). Free vibration analysis of sandwich plates with anisotropic face sheets in thermal environment by using the hierarchical trigonometric Ritz formulation. *Composite Part B*, 50, 67-81.
- [72] Dozio, L., 2013. Natural frequencies of sandwich plates with FGM core via Variable kinematic 2D Ritz models. *Composite Structures*, 96, 561–568.
- [73] L. Dozio, (2014). Exact free vibration analysis of Levy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories. *Composite Structures*, 111, 415-425.
- [74] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N Jorge, C.M.M. Soares, (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Part B*, 43, 711-725.
- [75] D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh, (2013). Free vibration of functionally graded plates with a higher order and normal deformation theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamic*, 13, DOI:10.1142/S0219455413500041.
- [76] S. Kamarian, M.H. Yas, A. Poursgha, (2013). Free vibration analysis of three-parameter functionally graded material sandwich plates resting on Pasternak foundations. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15 (3), 292-308.
- [77] A. Alibeigloo, (2014). Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Composite Structures*, 113, 23-30.

- [78] H.T. Thai, T.K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee(2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 45, 211-225.
- [79] T.K. Nguyen, (2014). A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, DOI 10.1007/s10999-014-9260-3.
- [80] F.A. Fazzolari, E. Carrera, (2014). Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 113, 89-107.
- [81] M. Talha, B.N. Singh, (2011). Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 394-401.
- [82] S. Natarajan, G. Manickam, (2012). Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57, 32-42.
- [83] H.T. Thai, D.H. Choi, (2013). Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 75, 50–61.
- [84] D. Zenkert, (1997). *The Handbook of Sandwich Construction*, Engineering Materials Advisory Service Ltd., London.
- [85] H.G. Allen, (1969). *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Oxford: Pergamon Press.
- [86] J. Woo, S. Meguid, (2001). Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells,» *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409–21.
- [87] M. Sudharsan, (2003). *Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panel*, Coimbatore, India: Phd thesis, Bharathiar University.
- [88] R. Shahsiah, K.M Nikbin, M.R. Eslami, M.R., (2009). Thermal Buckling of Functionally Graded Beams. *Iranian Journal of Mechanical Engineering*10: 65–81.
- [89] Y. Kiani, M.R. Eslami, (2010). Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Material Beams. *Int J Mech Mater Des* 6: 229–238.
- [90] Y. Kiani, M.R. Eslami, (2013). Thermomechanical Buckling of Temperature-dependent FGM Beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10, 223–245.
- [91] Y. Kiani, M. Rezaei, S. Taheri, M.R. Eslami, (2011). Thermal-electrical Buckling of Piezoelectric Functionally Graded Material Timoshenko Beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 7, 185–197.
- [92] Y. Kiani, S. Taheri, M.R. Eslami, (2011). Thermal Buckling of Piezoelectric Functionally Graded Material Beams. *Journal of Thermal Stresses* 34: 835–850.

- [93] Y. Fu, J. Wang, Y. Mao, (2012). Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 4324–4340.
- [94] N. Wattanasakulpong, B.G Prusty, D.W Kelly, (2013). Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 734–743.
- [95] S.E. Esfahani, Y. Kiani, M.R. Eslami, (2013). Non-linear Thermal Stability Analysis of Temperature Dependent FGM Beams Supported on Non-linear Hardening Elastic Foundations. *Int J Mech Sci* 69: 10–20.
- [96] A. Kargani, Y. Kiani, M.R. Eslami, (2013). Exact Solution for Nonlinear Stability of Piezoelectric FGM Timoshenko Beams Under Thermo-electrical Loads. *Journal of Thermal Stresses*, 36, 1056–1076.
- [97] M. Komijani, Y. Kiani, M.R. Eslami, (2013). Non-linear Thermo-electrical Stability Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Material Beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24, 399–410.
- [98] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, M.R. Eslami, (2013). Dynamic Buckling of Suddenly Heated or Compressed FGM Beams Resting on Nonlinear Elastic Foundation. *Composite Structures*, 106, 225–234.
- [99] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, M.R. Eslami, (2015). Nonlinear Thermal Dynamic Buckling of FGM Beams. *European Journal of Mechanics –A/Solids* 54: 232–242.
- [100] A. Tounsi, A. Semmah, A.A. Bousahla, (2013). Thermal buckling behavior of nanobeam using an efficient higher-order nonlocal beam theory. *Journal of Nanomechanics and Micromechanics* 3: 37–42.
- [101] A.R. Vosoughi, (2014). Thermal Postbuckling Analysis of Functionally Graded Beams. *Journal of Thermal Stresses* 37: 532–544.
- [102] F. Ebrahimi, E. Salari, (2015). Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments. *Composite Structure*, 128, 363–380.
- [103] H. Wu, S. Kitipornchai, J. Yang, (2016). Thermal buckling and postbuckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Applied Mechanics and Materials* 846: 182–187.
- [104] G.L She, X. Shu, Y.R. Ren, (2016). Thermal buckling and postbuckling analysis of piezoelectric FGM beams based on high-order shear deformation theory. *Journal of Thermal Stresses* 40: 783–797.
- [105] F. Ebrahimi, M.R. Barati, (2016). Buckling analysis of smart size-dependent higher order magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nanosize beams. *Journal of Mechanics* 33:23–33.

- [106] G.L. She, F.G Yuan, Y.R. Ren, (2017). Thermal buckling and postbuckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformationn theory. *Applied Mathematical Modelling* 47: 340–357.
- [107] R. Javaheri, M.R. Eslami, (2002). Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA Journal*, 40, 162–169.
- [108] Y. Kiani, E. Bagherizadeh, M.R. Eslami, (2011). Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 91 (7), 581–593.
- [109] R. Javaheri, M.R. Eslami, (2002). Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *Journal of Thermal Stresses*, 25, 603–25.
- [110] B. Shariat, M. R. Eslami, Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, *Int. J. Solids. Struct.*, vol.43, pp. 4082–4096, 2006.
- [111] X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, (2009). Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Composite Structures*, 90, 161–171.
- [112] M. Ganapathi, T. Prakash, (2006). Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates, *Composite Structures*, 74, 247–250.
- [113] W. Lanhe, (2004). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Composite Structures*, 64, 211–218.
- [114] M. Bouazza, A. Tounsi, E.A. Adda-Bedia, A. Megueni, (2010). Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: an analytical approach, *Computational Materials Science*, 49, 865–870.
- [115] M. Bouazza, A. Tounsi, A. Megueni, (2009). Buckling Analysis of Functionally Graded Plates with Simply Supported Edges, *Leonardo Journal of Sciences*, 15, 21–32.
- [116] H. A. Atmane, E. A. Adda-Bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Fekrar, (2016). On the thermal buckling of simply supported rectangular plates made of a sigmoid functionally graded Al/Al₂O₃ based material, *Mechanic of Solids*, 51, 177–187.
- [117] H. Yaghoobi, M. Torabi, (2013). Exact Solution for Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations with Various Boundary Conditions, *Journal of Thermal Stresses*, 36, 869–894.
- [118] A. M. Zenkour, M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Composite Structures*, vol. 93, pp. 93–102, 2010.
- [119] A.M. Zenkour, M. Shoby, (2011). Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory, *Journal of Thermal Stresses*, 34, 1119–1138.
- [120] H. Matsunaga, (2009). Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory, *Composite Structures*, 90, 76–86.

- [121] A.M. Zenkour, D.S. Mashat, (2010). Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates, *Natural Science.*, 2, 968–978.
- [122] M. Bodaghi, A.R. Saidi, (2011). Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates, *Archive of Applied Mechanics*, 81, 1555–1572.
- [123] P. Malekzadeh, (2011). Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Arbitrary Straight-Sided Quadrilateral Plates Using Differential Quadrature Method, *Composite Structures*, 93, 246–1254.
- [124] R.B. Bouiadjra, E.A. Adda Bedia, A. Tounsi, (2013). Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory, *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 547–567.
- [125] Y. Khalfi, M.S.A. Houari, A. Tounsi, (2014). A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation, *International Journal of Computational. Methods*, 11 (5), 1350077, 2014.
- [126] H. Yaghoobi, A. Fereidoon, (2014). Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory, *Composite Part B*, 62, 54–64.
- [127] Z. Abdelhak, L. Hadji1, T.H. Daouadj, E.A Bedia, (2015). Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory, *Advanced Materials Research*, 4 (1), 31-44.
- [128] A. Bouhadra, S. Benyoucef, A. Tounsi, F. Bernard, R.B. Bouiadjra, M.S.A. Houari, (2015). Thermal buckling response of functionally graded plates with clamped boundary Conditions, *Journal of Thermal Stresses*, 38, 630–650.
- [129] A. A. Bousahla, S. Benyoucef, A. Tounsi, S.R. Mahmoud, (2016). On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion, *Structural Engineering and Mechanics*, 60 (2), 313–335.
- [130] W. Tebboune, K.H. Benrahou, M.S.A. Houari, A. Tounsi, (2015). Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 443–465.
- [131] M. Bourada, A. Tounsi, M.S.A. Houari, (2012). A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates, *Journal of Sandwich Structure and Materials*, 14, 5–33.
- [132] B. Boudierba, M.S.A. Houari, A. Tounsi, S.R. Mahmoud, (2016). Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory, *Structural Engineering and Mechanics*, 58 (3), 397–422.
- [133] F.Z. Kettaf, M.S.A. Houari, M. Benguediab, A. Tounsi, (2013). Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel and Composite Structures*, 15, 399–423.

- [134] F.A. Fazzolari, E. Carrera, (2014). Thermal Stability of FGM Sandwich Plates Under Various Through-the-Thickness Temperature Distributions, *Journal of Thermal Stresses*, 37, 1449–1481.
- [135] K.S. Na, J.H. Kim, (2004). Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composite Part B*, 35, 429–437.
- [136] T. Prakash, M. Ganapathi, (2006). Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method. *Composite Part B*, 37, 642–649.
- [137] X. Zhao, K.M. Liew, (2010). A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels, *Computational Mechanics*, 45, 297–310.
- [138] H. Nguyen-Xuan, L.V. Tran, C.H. Thai, T. Nguyen-Thoi, (2012). Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing, *Thin-Walled Structure*, 54, 1–18.
- [139] L.V. Tran, C.H. Thai, H. Nguyen-Xuan, (2013). An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, 73, 65–76.
- [140] S. Natarajan, A.J.M. Ferreira, S. Bordas, E. Carrera, M. Cinefra, A.M. Zenkour, (2014). Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Triangular Elements with Cell-Based Smoothed Discrete Shear Gap Method, *Mathematical Problems in Engineering*, ID. 247932, 1–13.
- [141] V.R. Kar, S.K. Panda, T.R. Mahapatra, (2016). Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties, *Advanced Materials Research*, 5(4), 205-221.
- [142] Y.S. Touloukian, (1967). *Thermo-Physical Properties of High Temperature Solid Materials*. Macmillan, New York.
- [143] A.M. Zenkour, M. Sobhy, (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Composite Structures* 93, 93–102.
- [144] M. Bourada, A. Tounsi, and M.S.A. Houari, (2012). A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates, *Journal of Sandwich Structures and Materials* 14, 5–33.
- [145] B. Boudarba, M.S.A. Houari, A.Tounsi, S.R. Mahmoud, (2016). Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory, *Structural Engineering and Mechanics* 58 (3), 397–422.
- [146] F.Z. Kettaf, M.S.A. Houari, M. Benguediab, A. Tounsi, (2013). Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model,” *Steel and Composite Structures*, 15, 399–423.
- [147] A.M. Zenkour, M. Sobhy, (2013). Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology* 29, 7–17.
- [148] M. Sobhy A.M. Zenkour, (2014). Thermodynamical bending of FGM sandwich plates resting on Pasternak’s elastic foundations, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 7, 116–134.

- [149] H.A. Atmane, E.A.A. Bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Fekrar, (2016). On the thermal buckling of simply supported rectangular plates made of a sigmoid functionally graded Al/Al₂O₃ based material, *Mechanics of Solids*, 51 (2), 177–187.
- [150] R.B. Hetnarski and M. R. Eslami, *Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*. New York: Springer, 2008.
- [151] J. J. Skrzypek, A. W. Ganczarski, F. Rustichelli, and H. Egner, (2008). *Advanced Materials and Structures for Extreme Operating Conditions*. New York: Springer,
- [152] J. N. Reddy and C.D. Chin, (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, *Journal of Thermal Stresses*, 21, 593–626.
- [153] B. Mirzavand, M.R. Eslami, (2011). A closed form solution for thermal buckling of piezoelectric FGM hybrid cylindrical shells with temperature dependent properties, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 18, 185–193.

ANNEXES

Annexe A : Code Matlab : Flambement thermique des Poutres sandwich P-FGM TYPE-A:

```

% Beam Geometry
syms z
L=1; % .....Side
h=L/5;% .....Thickness
h0=-h/2;% .....Bottom surface position
h0=-h/2; h1=-h/10; h2=h/10; h3=h/2;% positions
beta=pi/L;

%Volume fraction
p=2; % .....Volume Fraction Index
V1=((z-h0)/(h1-h0)).^p;
V2=1;
V3=((z-h3)/(h2-h3)).^p;

%Material Properties
v=0.3;% .....Poisson ratio
Em=66.2;% .....Young's modulus Ti-6Al-4v
ALPHAm=10.3e-6;% .....coefficient of thermal expansion Ti-6Al-4v
km=18.1;% .....Thermal conductivity Ti-6Al-4v
Ec=244.27;% .....Young's modulus ZrO2
ALPHAc=12.766e-6;% .....coefficient of thermal expansion ZrO2
kc=1.7;% .....Thermal conductivity ZrO2
Ez1=Em+(Ec-Em)*V1; Ez2=Em+(Ec-Em)*V2; Ez3=Em+(Ec-Em)*V3;
ALPHAz1=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V1;
ALPHAz2=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V2;
ALPHAz3=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V3;
kz1=km+(kc-km)*V1; kz2=km+(kc-km)*V2; kz3=km+(kc-km)*V3;

Tm=25;% .....Temperature

%Shape Function
f=z*[1-((4*z^2)/(3*h^2))]; g=diff(f);

% Stiffness Matrix
A=int((Ez1/(1-v^2)),h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2)),z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2)),h2,h3);
B=int((Ez1/(1-v^2))*z,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*z,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-
v^2))*z,h2,h3);
D=int((Ez1/(1-v^2))*z^2,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*z^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-
v^2))*z^2,h2,h3);
C=int((Ez1/(1-v^2))*f,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-
v^2))*f,h2,h3);
F=int((Ez1/(1-v^2))*f*z,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f*z,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-
v^2))*f*z,h2,h3);
E=int((Ez1/(1-v^2))*f^2,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-
v^2))*f^2,h2,h3);
H=int((Ez1/(2*(1+v)))*g^2,h0,h1)+int((Ez2/(2*(1+v)))*g^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(2*(1+v)
))*g^2,h2,h3);
C11=-A*(beta^2); C12=B*(beta^3); C13=-C*(beta^2); C23=F*(beta^3); C33=-
(E*beta^2+H);

% NONLINEAR TEMPERATURE DISTRIBUTION
H1=int(1/kz1,h0,z,'PrincipalValue', true) / [int(1/kz1,h0,h1) + int(1/kz2,z,h1,h2)
+ int(1/kz3,h2,h3)];
H2=[int(1/kz1,h0,h1) + int(1/kz2,z,h1,z)] / [int(1/kz1,h0,h1) + int(1/kz2,z,h1,h2)
+ int(1/kz3,h2,h3)];
H3=[int(1/kz1,h0,h1) + int(1/kz2,z,h1,h2) + int(1/kz3,h2,z,'PrincipalValue', true)]
/ [int(1/kz1,h0,h1) + int(1/kz2,z,h1,h2) + int(1/kz3,h2,h3)];
B1=int((ALPHAz1*Ez1)/(1-v),h0,h1)+int((ALPHAz2*Ez2)/(1-
v),z,h1,h2)+int((ALPHAz3*Ez3)/(1-v),h2,h3);
B3=vpa(int(H1*((ALPHAz1*Ez1)/(1-v)),h0,h1,'PrincipalValue', true) +
int(H2*((ALPHAz2*Ez2)/(1-v)),z,h1,h2) + int(H3*((ALPHAz3*Ez3)/(1-
v)),h2,h3,'PrincipalValue', true),15);
Tcr=eval(( (C11*C23^2 + C33*C12^2 - 2*C12*C13*C23) / (-B3*beta^2*(C13^2-
C11*C33) ) ) + D*beta^2/B3 - B1*Tm/B3)

```

Annexe B : Code Matlab : Flambement thermique des plaques sandwich P-FGM TYPE-A:

```

% Plate Geometry
syms z
a=1; % .....Side
b=a/1;% .....Length
h=a/5;% .....Thickness
h0=-h/2; h1=-h/10; h2=h/10; h3=h/2;% positions

%Volume fraction
p=2; % .....Volume Fraction Index
V1=((z-h0)/(h1-h0)).^p;
V2=1;
V3=((z-h3)/(h2-h3)).^p;

%Material Properties
v=0.3;% .....Poisson ratio
Em=66.2;% .....Young's modulus Ti-6Al-4v
ALPHAm=10.3e-6;% .....coefficient of thermal expansion Ti-6Al-4v
km=18.1;% .....Thermal conductivity Ti-6Al-4v
Ec=244.27;% .....Young's modulus ZrO2
ALPHAc=12.766e-6;% .....coefficient of thermal expansion ZrO2
kc=1.7;% .....Thermal conductivity ZrO2
Ez1=Em+(Ec-Em)*V1; Ez2=Em+(Ec-Em)*V2; Ez3=Em+(Ec-Em)*V3;
ALPHAz1=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V1;
ALPHAz2=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V2;
ALPHAz3=ALPHAm+(ALPHAc-ALPHAm)*V3;
kz1=km+(kc-km)*V1; kz2=km+(kc-km)*V2; kz3=km+(kc-km)*V3;

T1=25;% .....Temperature

%Sahpe Function
f=z*(1-((4*z^2)/(3*h^2))); g=diff(f);

% Stiffness Matrix
A=int((Ez1/(1-v^2)),h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2)),z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2)),h2,h3);
B=int((Ez1/(1-v^2))*z,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*z,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2))*z,h2,h3);
D=int((Ez1/(1-v^2))*z^2,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*z^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2))*z^2,h2,h3);
C=int((Ez1/(1-v^2))*f,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2))*f,h2,h3);
F=int((Ez1/(1-v^2))*f*z,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f*z,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2))*f*z,h2,h3);
H=int((Ez1/(1-v^2))*f^2,h0,h1)+int((Ez2/(1-v^2))*f^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(1-v^2))*f^2,h2,h3);
J=int((Ez1/(2*(1+v)))*g^2,h0,h1)+int((Ez2/(2*(1+v)))*g^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(2*(1+v)))*g^2,h2,h3);

% NONLINEAR TEMPERATURE DISTRIBUTION
H1=int(1/kz1,h0,z,'PrincipalValue',true)/[int(1/kz1,h0,h1)+int(1/kz2,z,h1,h2)+int(1/kz3,h2,h3)];
H2=[int(1/kz1,h0,h1)+int(1/kz2,z,h1,z,'PrincipalValue',true)]/[int(1/kz1,h0,h1)+int(1/kz2,z,h1,h2)+int(1/kz3,h2,h3)];
H3=[int(1/kz1,h0,h1)+int(1/kz2,z,h1,h2)+int(1/kz3,h2,z,'PrincipalValue',true)]/[int(1/kz1,h0,h1)+int(1/kz2,z,h1,h2)+int(1/kz3,h2,h3)];
Beta1=int((ALPHAz1*Ez1)/(1-v),h0,h1)+int((ALPHAz2*Ez2)/(1-v),z,h1,h2)+int((ALPHAz3*Ez3)/(1-v),h2,h3);
Beta3=int(H1*((ALPHAz1*Ez1)/(1-v)),h0,h1)+int(H2*((ALPHAz2*Ez2)/(1-v)),z,h1,h2)+int(H3*((ALPHAz3*Ez3)/(1-v)),h2,h3);
Pi=(a^2+b^2)*pi^2; s=a/b;
Tr=eval(-[T1*Beta1/Beta3]+(Pi^2*[(A*D-B^2)*H-D*C^2-A*F^2+2*B*C*F]+a^2*b^2*Pi*(A*D-B^2)*J)/(a^2*b^2*Beta3*[Pi*(A*HC^2)+a^2*b^2*A*J]))

```

Annexe C : Code Matlab : Vibration des Poutres sandwich P-FGM TYPE-A:

```

% Material and Geometry Properties
syms z ; p=0; h=1; a=5*h; m=1; beta=m*pi/a; h0=-h/2; h3=h/2;
h1=-h/6; h2=h/6; v=0.3;
Em=66.2; Dm=4410; % Young's Modulus, Density Ti-6Al-4v
Ec=244.27; Dc=3000; % Young's Modulus, Density % ZrO2
V1=((z-h0)/(h1-h0)).^p; V2=1; V3=((z-h3)/(h2-h3)).^p; % Volume Fraction
Ez1=Em+(Ec-Em)*V1; Ez2=Em+(Ec-Em)*V2; Ez3=Em+(Ec-Em)*V3;
D1=Dm+(Dc-Dm)*V1; D2=Dm+(Dc-Dm)*V2; D3=Dm+(Dc-Dm)*V3;

% Shape Function
f=z*[1-((4*z^2)/(3*h^2))]; g=diff(f);

% Stiffness Matrix
A=int(Ez1,h0,h1)+int(Ez2,z,h1,h2)+int(Ez3,h2,h3);
B=int(Ez1*z,h0,h1)+int(Ez2*z,z,h1,h2)+int(Ez3*z,h2,h3);
D=int(Ez1*z^2,h0,h1)+int(Ez2*z^2,z,h1,h2)+int(Ez3*z^2,h2,h3);
C=int(Ez1*f,h0,h1)+int(Ez2*f,z,h1,h2)+int(Ez3*f,h2,h3);
F=int(Ez1*f*z,h0,h1)+int(Ez2*f*z,z,h1,h2)+int(Ez3*f*z,h2,h3);
H=int(Ez1*f^2,h0,h1)+int(Ez2*f^2,z,h1,h2)+int(Ez3*f^2,h2,h3);
J=int((Ez1/(2*(1+v)))*g^2,h0,h1)+int((Ez2/(2*(1+v)))*g^2,z,h1,h2)+int((Ez3/(2*(1+v)))*g^2,h2,h3);
C11=-A*(beta^2); C12=B*(beta^3); C22=-((D*beta^4)+(0*beta^2)); C13=-C*(beta^2);
C23=F*(beta^3); C33=-(H*beta^2+J);
C=[C11 C12 C13 ; C12 C22 C23 ; C13 C23 C33];

% Mass Matrix
I0=int(D1,h0,h1)+int(D2,z,h1,h2)+int(D3,h2,h3);
I1=int(D1*z,h0,h1)+int(D2*z,z,h1,h2)+int(D3*z,h2,h3);
I2=int(D1*z^2,h0,h1)+int(D2*z^2,z,h1,h2)+int(D3*z^2,h2,h3);
I3=int(D1*f,h0,h1)+int(D2*f,z,h1,h2)+int(D3*f,h2,h3);
I4=int(D1*z*f,h0,h1)+int(D2*z*f,z,h1,h2)+int(D3*z*f,h2,h3);
I5=int(D1*f^2,h0,h1)+int(D2*f^2,z,h1,h2)+int(D3*f^2,h2,h3);
M11=-I0; M12=I1*beta; M13=-I3; M22=-I0-I2*beta^2; M23=I4*beta;
M33=-I5;
M=[M11 M12 M13 ; M12 M22 M23; M13 M23 M33];

% Solution :
syms w; Sol=vpa((sqrt(solve(det(C-w*M)))*a^2/h)*sqrt(Dm/Em))

```

Annexe D : Code Matlab : Vibration des Poutres sandwich P-FGM TYPE-A:

```

% Material and Geometry Properties
syms z; h=1; h0=-h/2; h3=h/2; p=1; a=5*h; b=a/1; n=1; m=1; h1=-h/6; h2=h/6;
beta=n*pi/b; alpha=m*pi/a;
Em=70; Dm=2707; Ec=380; Dc=3800; v=0.3; % Ti-6Al-4v % ZrO2
V1=((z-h0)/(h1-h0)).^p; V2=1; V3=((z-h3)/(h2-h3)).^p;
Ez1=Em+(Ec-Em)*V1; Ez2=Em+(Ec-Em)*V2; Ez3=Em+(Ec-Em)*V3; D1=Dm+(Dc-Dm)*V1;
D2=Dm+(Dc-Dm)*V2; D3=Dm+(Dc-Dm)*V3; f=z*[1-((4*z^2)/(3*h^2))];

% Shape Function
f=z*[1-((4*z^2)/(3*h^2))]; g=diff(f);

% Stiffness Matrix
A11=vpa(int(Ez1/(1-v^2),h0,h1),10)+vpa(int(Ez2/(1-v^2),z,h1,h2),10)+vpa(int(Ez3/(1-
v^2),h2,h3),10);
B11=vpa(int(Ez1*z/(1-v^2),h0,h1),10)+vpa(int(Ez2*z/(1-
v^2),z,h1,h2),10)+vpa(int(Ez3*z/(1-v^2),h2,h3),10);
D11=vpa(int(Ez1*z^2/(1-v^2),h0,h1),10)+vpa(int(Ez2*z^2/(1-
v^2),z,h1,h2),10)+vpa(int(Ez3*z^2/(1-v^2),h2,h3),10);
C11=0; E11=0; G11=0;
A12=v*A11; B12=v*B11; D12=v*D11; C12=v*C11; E12=v*E11;
G12=v*G11; A66=(1-v^2)*A11/(2*(1+v)); B66=(1-v^2)*B11/(2*(1+v));
D66=(1-v^2)*D11/(2*(1+v)); C66=(1-v^2)*C11/(2*(1+v));
E66=(1-v^2)*E11/(2*(1+v)); G66=(1-v^2)*G11/(2*(1+v)); A22=A11;
B22=B11; C22=C11; D22=D11; E22=E11; G22=G11; F44=0; F55=0;
c11=A11*alpha^2 + A66*beta^2; c12=alpha*beta*(A12+A66);
c13=-B11*alpha^3 - alpha*beta^2*(B12+2*B66); c14=0; c15=0;
c22=A66*alpha^2 + A22*beta^2; c23=-B22*beta^3 - alpha^2*beta*(B12+2*B66);
c24=0; c25=0; c33=D11*alpha^4 + (2*D12+4*D66)*alpha^2*beta^2 + D22*beta^4;
c34=0; c35=0; c44=0; c45=0; c55=0;
c=[c11 c12 c13 ;c12 c22 c23 ;c13 c23 c33];

% Mass Matrix
I0=int(D1,h0,h1)+int(D2,z,h1,h2)+int(D3,h2,h3);
I1=int(D1*z,h0,h1)+int(D2*z,z,h1,h2)+int(D3*z,h2,h3);
I2=int(D1*z^2,h0,h1)+int(D2*z^2,z,h1,h2)+int(D3*z^2,h2,h3);
I3=0; I4=0; I5=0;
M11=I0; M12=0; M13=-alpha*I1; M14=I3; M15=0; M22=I0; M23=-beta*I1; M24=0; M25=I3;
M33=I0+I2*(alpha^2+beta^2); M34=-I4*alpha; M35=-I4*beta; M44=I5; M45=0; M55=I5;
M=[M11 M12 M13;M12 M22 M23 ;M13 M23 M33];

% Solution:
syms w; w2=vpa((sqrt(solve(det(c-w*M)))*a^2/h)*sqrt(Dm/Em))

```