

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes



Faculté de Technologie
Département de Génie Civil & Travaux Publics
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie
Thèse de Doctorat en Sciences

Option : Structure & Matériaux

Présentée Par :

MR : MEKSI RAFIK

Sujet de Thèse :

**INVESTIGATION SUR LES DIFFERENTS COMPORTEMENTS
MECANIQUES DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES
AVANCES**

Soutenue le : 16/12/2018

Devant le Jury composé de :

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|-----------|
| • Mr. TOUNSI Abdelouahed | Pr.Président | UDL-SBA |
| • Mr. BENYOUCEF Samir | Pr.Directeur de Thèse | UDL-SBA |
| • Mr. BOURADA Mohamed | MCA.Examinateur | UDL-SBA |
| • Mr. DRAICHE Kada | MCA.Examinateur | U- TIARET |
| • Mr.YEGHNEM Redah | Pr.Examinateur | U-SAIDA |
| • Mr. KACI Abdelhakim | MCA.Examinateur | U-SAIDA |

Année Universitaire: 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur BENYOUCEF Samir, de m'avoir confié un sujet de recherche passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et indéfectibles, et son soutien amical qui m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma gratitude et ma reconnaissance à Monsieur TOUNSI Abdelouahed Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à mes parents, ma femme, ma petite fille, mon frère et ma sœur qui m'ont toujours encouragé en m'apportant leur soutien toute au long de ces années d'études, ainsi une grande partie de cette thèse leur revient. Et à tous ceux qui se sont intéressés à mes préoccupations et qui ont toujours su m'encourager et reconforter.

Je leur exprime mes remerciements les plus cordiaux.

Table des Matières

Résumé.....	06
Abstract.....	07
ملخص.....	08
Liste des Tableaux et des Figures.....	09
Liste des Notations.....	12
Introduction Générale.....	15
Chapitre I : Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGMs)	
I.1. Introduction.....	19
I.2. Concept des Matériaux à Gradient de Propriétés.....	19
I.3. Histoire du Développement Architectural du Concept FGM.....	24
I.4. Nouveaux Procédés Pour le Traitement des FGM.....	28
I.4.1. Processus de Formation et de Consolidation des FGM.....	28
I.4.2. Densification des Poudres Compactes pour FGM	33
I.5. Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM	35
I.5.1. Propriétés Matérielles de la Plaque P-FGM.....	37
I.5.2. Les Propriétés Matérielles de la Plaque S-FGM.....	38
I.5.3. Les Propriétés Matérielles de la Plaque E-FGM.....	39
I.6. Loi de Comportement Matériel de l'Elasticité 3D.....	40
I.7. Conclusion.....	44
Chapitre II : Revue des Recherches sur les Structures en Matériaux à Gradient de Propriété.	
II.1. Introduction	46
II.2. Etudes sur les Contraintes Résiduelles.....	46
II.3. Transfert de Chaleur dans les Matériaux à Gradient de Propriétés.....	47
II.4. Analyse de la Flexion, de la Vibration et de l'Instabilité Elastique des Structures en FGM Sous Différents Types de Chargement.....	47
II.5. Etude sur les Problèmes de Vibration des Plaques en FGM.....	52
II.6. Conclusion.....	56
Chapitre III : Les Théories des Structures FGM	
III.1. Introduction	58
III.2. Les Différents Modèles des Structures Composites dans l'Elasticité Bi-Dimensionnelle.....	58
III.2.1. Approches Monocouche Equivalentes.....	58

III.2.2. Les Modèles Classiques Love-Kirchoff (Théorie Classique des Plaques CLPT).....	58
III.2.3. Les Modelés Reissner-Mindlin (Théorie de Déformation en Cisaillement du Premier Ordre FSDT).....	59
III.2.4. Les Modèles d'Ordre Supérieur.....	61
III.2.5. La Théorie d'Ordre Elevé à Deux Variables (Les Théories Raffinées)....	65
III.2.6. Approche Par Couche.....	65
III.2.7. Les Modèles Zig-Zag.....	66
III.2.8. Les Modèles Couches Discrètes.....	68
III.3. Théorie des Plaques Tridimensionnelles, Elasticité 3D.....	69
III.4 Approche Quasi-Tridimensionnelle.....	71
III.5 Conclusion.....	73
 Chapitre IV : Etude du Comportement Mécanique des Plaques « Sandwiches » en FGM en Utilisant la Théorie d'Ordre Elevé à Quatre Variables.	
IV.1. Introduction.....	75
IV.2. Enoncé du Problème.....	77
IV.3. Cinématique.....	79
IV.4. Relations Constitutives.....	81
IV.5. Équations de Mouvement.....	81
IV.6. La Solution Navier Pour Plaques Rectangulaires Simplement Appuyées.....	85
IV.7 Conclusion.....	87
 Chapitre V : Résultats et Discussions	
V.1. Introduction.....	89
V.2. Résultats Numériques.....	89
V.3 Analyse de la Flexion.....	90
V.4 Analyse du Flambement.....	97
V.5. Analyse de la Vibration Libre.....	99
V.6. Conclusion.....	104
Conclusion Générale et Perspectives.....	106
Références Bibliographiques.....	109

Résumé

Un système à gradient de propriété est un matériau hétérogène, présentant des propriétés mécaniques, physique et/ou chimique différentes suivant une ou plusieurs directions de ce système. Le travail qui va suivre est consacré à la recherche des différents comportements mécaniques des structures en matériaux composites avancés. A cet effet ; une nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques est présentée pour l'étude des réponses en flexion, flambement et vibration des plaques sandwiches en FGM. Un nouveau champ de déplacement contenant des formes intégrales est proposé qui ne comporte que quatre variables. Sur la base de la théorie proposée, les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Cette théorie ne comporte que quatre fonctions inconnues avec une distribution quasi parabolique de la contrainte de cisaillement transversale.

En outre, les contraintes de cisaillement transversales s'annulent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sandwich. La solution Navier est utilisée pour trouver des solutions analytiques pour les plaques sandwiches rectangulaires simplement appuyées. La précision du présent modèle est vérifiée en le comparant avec des recherches antérieures.

Une analyse numérique détaillée est présentée pour voir l'influence des charges critiques de flambement, flexion, contraintes, fréquences naturelles et le type de plaques sandwiches sur les réponses de flexion, flambement, vibration libre des plaques sandwiches FGM.

Mots-clés: Plaques sandwiches FGM, déformation de cisaillement à quatre variables, intégrale, charges critiques de flambement, flexion, contrainte, vibration libre.

Abstract

A property gradient system is a heterogeneous material, having different mechanical, physical and / or chemical properties following one or more directions of this system. The work that will be followed is dedicated to the search for the different mechanical behavior of the structures in advanced composite materials. To this effect; a new shear deformation plate theory is introduced to illustrate the bending, buckling and free vibration responses of FGM sandwich plates. A new displacement field containing integrals is proposed which involves only four variables. Based on the suggested theory, the equations of motion are derived from Hamilton's principle. This theory involves only four unknown functions and accounts for quasi-parabolic distribution of transverse shear stress.

In addition, the transverse shear stresses are vanished at the top and bottom surfaces of the sandwich plate. The Navier solution technique is adopted to derive analytical solutions for simply supported rectangular sandwich plates. The accuracy and effectiveness of proposed model are verified by comparison with previous research.

A detailed numerical study is carried out to examine the influence of the critical buckling loads, deflections, stresses, natural frequencies and sandwich plate type on the bending, buckling and free vibration responses of FG sandwich plates.

Keywords: FG sandwich plates, a four-variable shear deformation, integral, critical buckling loads, bending, stress, free Vibration.

ملخص

نظام تدرج الخاصية هو مادة غير متجانسة، له خصائص ميكانيكية، فيزيائية و / أو كيميائية مختلفة، تتبع اتجاه واحد أو أكثر من هذا النظام. العمل الذي يلي مخصص للبحث عن مختلف السلوك الميكانيكي للهياكل بالمواد المركبة المتطورة . لهذا الغرض ; تم عرض نظرية جديدة للصفائح للتشوه القص لدراسة جواب الصفائح ساندويتش FGM (مواد متدرجة الخاصية) للالتواء، الانحناء والاهتزاز. تم عرض مجال جديد للحركة على أشكال تكاملية الذي يحتوي إلى على أربع متغيرات.

على أساس النظرية المقدمة، ومعادلات الحركة المستمدة من مبدأ هاملتون (Hamilton) هذه النظرية تحتوي فقط على أربع وظائف غير معروفة مع توزيع بالقطع المكافئ للإجهاد القص العرضي. بالإضافة، الإجهادات للقص العرضي تنعدم على السطح العلوي والسفلي للصفائح ساندويتش.

تم استعمال حل نافير (Navier) لإيجاد نتائج تحليلية للصفائح ساندويتش مستطيلة بسيطة المسند. يتم التحقق من دقة هذا النموذج بالمقارنة مع البحوث السابقة.

تم تقديم تحليل رقمي تفصيلي لمعرفة تأثير خصائص التحميل الحرجة للالتواء، الإجهاد، التردد الطبيعي ونوع الصفائح ساندويتش في الإجابة على الانحناء، الالتواء، الاهتزاز الحر للصفائح ساندويتش (FGM) مواد متدرجة الخاصية.

الكلمات الرئيسية:

الصفائح ساندويتش FGM مواد متدرجة الخاصية، تشوه القص يحتوي على أربع متغيرات، تكاملية، التحميل الحرجة للالتواء، الإجهاد، التردد الطبيعي.

Liste des Figures

Chapitre I :	Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)	
Figure I.1.a	Variation continue.	20
Figure I.1.b	Variation discontinue.	20
Figure I.2.	Concept des matériaux à gradient de propriétés.	21
Figure I.3.	Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.	22
Figure I.4.	Variation continue de la microstructure.	23
Figure I.5.	Protection thermique.	24
Figure I.6.	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.	25
Figure I.7.	Résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « Etude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».	27
Figure I.8.	Processus de traitement des Poudres pour les FGMs.	29
Figure I.9.	Procédé électrophorétique de dépôt pour des matériaux FGM.	31
Figure I.10.	Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al_2O_3/ZrO_2).	32
Figure I.11.	Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM.	32
Figure I.12.	(a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al_2O_3/ZrO_2 .	33
Figure I.13.	Géométrie d'une plaque FGM.	36
Figure I.14.	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	38
Figure I.15.	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	39
Figure I.16.	Variation du module de young dans une plaque E-FGM.	40
Figure I.17.	Définition des matériaux isotropes et anisotropes.	41
Figure I.18.	Les composantes des contraintes et des déformations dans le système des Coordonnées Cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGM.	41
Chapitre II :	Revue des recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriété	
Figure II.1.	Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse.	49
Figure II.2	Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique.	50

Figure II.3	Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM (Si3N4/SUS3O4).	51
Chapitre III: Les théories des structures FGM		
Figure III.1	Illustration de la plaque de Love-Kirchoff.	59
Figure III.2	Illustration de la plaque de Reissner-Mendlin.	60
Figure III.3	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur.	61
Figure III.4	Illustration de la plaque d'ordre élevé.	62
Figure III.5	Variation de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.	64
Figure III.6	Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Psi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	64
Figure III.7	Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.	66
Figure III.8	Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.	66
Figure III.9	Champs de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre.	66
Figure III.10	Champs de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur.	67
Figure III.11	Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.	71
Chapitre IV: Etude du Comportement Mécanique des Plaques Sandwiches en FGM en Utilisant la Théorie d'Ordre Elevé à Quatre Variables.		
Figure IV.1	Géométrie de la plaque sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM)	78
Chapitre V: Résultats et Discussions		
Figure V.1	Effet de l'indice de loi de puissance p sur la déformation adimensionnelle \hat{w} des plaques carrées ($a/h = 10$).	94
Figure V.2	Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ adimensionnelle à travers l'épaisseur des plaques carrées ($a/h = 10$).	95
Figure V.3	Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ dans l'épaisseur des plaques carrées ($a/h = 10$).	96
Figure V.4	Effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge de flambement \bar{N} critique adimensionnelle des plaques carrées ($a/h = 10$).	99
Figure V.5	Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées avec un rapport d'épaisseur différent a/h .	103
Figure V.6	Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées ($a/h = 10$).	104

Liste Des Tableaux

Chapitre I :	Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	
Tableau I.1.	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	22
Chapitre V:	Résultats et Discussions	
Tableau V.1.	Flèche adimensionnelle \hat{w} des plaques carrées ($a / h = 10$).	91
Tableau V.2.	Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ ($h / 2$) des plaques carrées ($a / h = 10$).	92
Tableau V.3.	Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0)$ des plaques carrées ($a / h = 10$).	93
Tableau V.4.	Charge de flambement adimensionnelle \bar{N} des plaques carrées sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, a / h = 10$).	97
Tableau V.5.	Charge de flambement adimensionnelle \bar{N} des plaques carrées sous compression biaxiale ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a / h = 10$).	98
Tableau V.6.	Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées ($a / h = 10$).	100
Tableau V.7.	Les dix premières fréquences adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées ($a / h = 10, p = 2$).	101
Tableau V.8.	Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques d'épaisseur carrée ($a / h = 5$).	102

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation dans la direction x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de cisaillement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	variation du travail
δK	variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel

N_x, N_y	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion dans la plaque
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion dans la plaque
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire dus au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i \text{ et } j$	Nombres naturels
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La réussite d'un projet qu'entreprend l'homme pour ses différents besoins repose sur un élément essentiel: **des matériaux appropriés**. L'évolution humaine et notre niveau de vie ont été influencés par nos choix de matériaux dans les différents domaines tels que la construction, l'industrie,...

Beaucoup des matériaux utilisés depuis des siècles ont été améliorés et sont encore employés aujourd'hui (*acier, bois,...*).chaque matériaux est conçu pour répondre à un besoin technologique spécifique. Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites.

Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées.

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Des matériaux plus modernes sont récemment arrivés sur le marché grâce aux investissements et à la recherche constante dans les technologies novatrices. Cette nouvelle classe de matériaux appelée matériaux à gradient fonctionnel (En anglais: Functionally Graded Materials, FGM) a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions.

Ce sont une classe des composites (matériaux composites avancés) qui possède des propriétés matérielles variant d'une surface à une autre, de façon à éliminer la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. Ils sont caractérisés par l'évolution continue

INTRODUCTION GENERALE

ou discontinue d'une propriété physique du matériau dans une direction de l'espace. Cette variation de comportement est induite par une modification de composition chimique, de microstructure (taille et morphologie de grains, fraction volumique et morphologie de phases), d'architecture et/ou de l'état de contraintes résiduelles.

Les propriétés qui sont souvent mesurées sont les grandeurs électriques, thermiques (coefficient d'expansion thermique, pouvoir isolant, etc.), magnétiques et mécaniques. Les systèmes à gradient de propriétés peuvent être souhaités, en vue d'améliorer certaines propriétés d'un substrat par exemple (FGM : Functionally Graded Materials), ou être subis, lors d'une dégradation surfacique en service (oxydation/corrosion, écrouissage, érosion tribologique, etc.). Les systèmes à gradient de propriétés sont nombreux et touchent des domaines d'applications divers et variés.

Ils peuvent donc allier entre les propriétés de deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le flux de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Leur champ d'utilisation pour l'aéronautique et l'espace par exemple, est en relation étroite avec l'amélioration des procédés dont ils découlent et la maîtrise des structures qu'ils constituent. Dans ces domaines, la conception des véhicules aéronautiques et spatiaux de demain doit répondre à des exigences de sûreté de fonctionnement de plus en plus grandes et prendre en compte la complexité croissante des environnements. Elle doit également intégrer des préoccupations accrues de rationalisation des dépenses de matières premières et d'énergie, en s'appuyant de manière de plus en plus efficace sur les possibilités de la simulation, et minimiser les coûts de mise au point et de développement. Ces contraintes se conjuguent pour motiver une demande forte d'innovation et de ruptures technologiques dans toute la chaîne couvrant les procédés, les matériaux et les structures.

De ce qui précède, Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement des pièces ou éléments élaborés à partir de ces matériaux. Les efforts dans ce travail de thèse visent à développer une nouvelle théorie simple de la

INTRODUCTION GENERALE

déformation du cisaillement de l'ordre supérieur pour l'analyse de la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques sandwiches FG. Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application. Dans le second chapitre, une revue générale sur les travaux de littérature concernant les structures FGM est présentée. Toutes les théories des plaques ainsi que les travaux de recherche qui lui sont associés sont exposés. Dans le troisième chapitre nous rappelons les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement des structures en « FGM ». Le chapitre quatre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de plaques sandwiches FGM basé sur la théorie d'ordre supérieur pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM à la flexion, le flambement et les réponses aux vibrations libres.

Le dernier chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur les plaques sandwiches FGM. Une validation des résultats ainsi qu'une étude paramétrique sont présentés.

CHAPITRE I

Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)

I.1 Introduction :

Les matériaux avancés désignent les matériaux fonctionnels, les matériaux à haute performance, les matériaux à haute valeur ajoutée, etc. Ils constituent une famille large de matériaux qui concerne de nombreux domaines d'application. Ils répondent à des besoins de hautes performances telles qu'une forte résistance mécanique, thermique ou à la corrosion par exemple.

Les matériaux composites à gradients évalués FGM représentent un des derniers développements. Ils sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatial, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicale [Baron et Naili, 2008].

Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermique de la structure qu'ils constituent. Les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière, ceci en choisissant selon les applications spécifiques et charges environnementales le matériau adéquat pour chaque interface. Ces matériaux possèdent de multiples avantages avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très élevés, qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telle que la réduction des contraintes locales [Miyamoto et al, 1999], [Sursh et Mortensen, 1998], ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [Ochsner et al.2008]

I.2 Concept des Matériaux à Gradient de Propriétés

L'invention du matériau à gradient de fonction (FGM) est attribuée à M. Niino et ses collègues à Sendai en 1984 dans le cadre de son travail sur les barrières thermiques [Yamanouchi, M.,et al, 1990]. Il s'agit d'une classe de composites constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes. Un FGM est caractérisé par un changement graduel et continu des propriétés du matériau [Bohidar, S., et al, 2014]. Ils présentent donc une microstructure hétérogène et contrôlée, modulée par un gradient de

composition, de porosité, de distribution de phase ou de texture qui induit des différences de propriétés (densité, dureté, conductivité thermique, conductivité électrique...).

Dans l'absolu, un FGM peut être fabriqué avec n'importe quelle combinaison de matériaux adaptée à l'application visée. Les FGM sont classés en deux catégories : les FGM continus (**Figure I.1a**) et les FGM discontinus sous forme de multicouche (**Figures I.1b**).



Fig. I.1a.Variation continue.



Fig. I.1b.Variation discrète

La loi de distribution de puissance [Chi, S.-H. et al, 2006], [Jin, Z. et al, 2001] et les fonctions exponentielles [Gu, P. et al, 1997], [Nejad, M., et al, 2013], [Helal, W. et al, 2014] sont fréquemment utilisées pour décrire l'évolution des propriétés dans le FGM.

Dans la pratique, les FGM trouvent leurs applications dans de nombreux domaines : les biomatériaux (par exemple Ti-Co pour les implants dentaires), l'ingénierie, l'optique (matériau à indice de réfraction graduel), l'aérospatial, l'électronique, les outils de coupe (WC-Co)... [Bohidar, S. et al, 2014], [Udupa, G., et al, 2014], [Kieback, B., et al, 2003].

En prenant l'exemple des navettes spatiales ou des avions supersoniques dans le domaine aérospatial, leurs composants sont soumis à des températures élevées, sur les parties les plus exposées tel le cône d'entrée, où les matériaux doivent supporter une température de 1800°C en atmosphère sur une face, et résister à un gradient thermique d'environ 1300°C pour une épaisseur d'une dizaine de millimètres. A ce jour il n'y a aucuns matériaux monolithiques pouvant supporter une telle contrainte thermique [Koizumi.M., 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

Vient alors le concept de matériau à gradient de fonction. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la (**Figure I.2**). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés du FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [**P. Boch et al, 1986**].

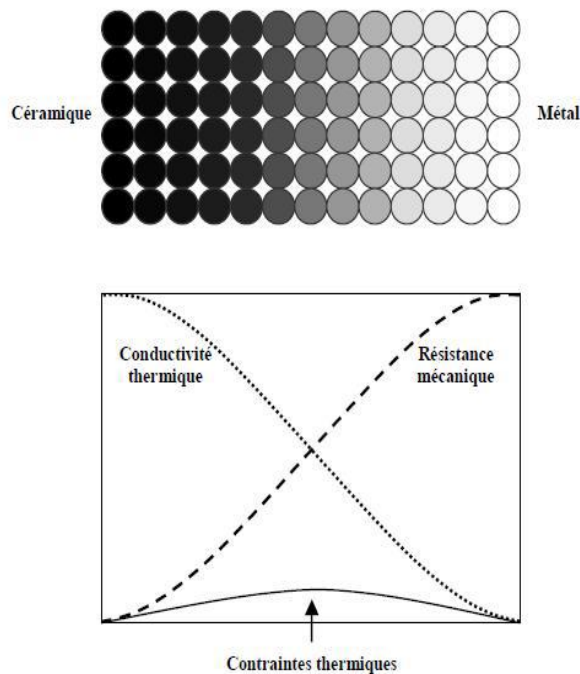


Fig.I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés [**P. Boch et al, 1986**].

Chapitre I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES (FGM)

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Markworth A.J et al, 1995]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes [M. Koizumi, 1992].

La plupart des FGM sont constitués de céramiques et de métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le (Tableau I.1).

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [MSA. Houari, 2011].

LA FACE DE HAUTE TEMPERATURE.	CERAMIQUE	-BONNE RESISTANCE THERMIQUE. -BONNE RESISTANCE A L' OXYDATION. -FAIBLE CONDUCTIVITE THERMIQUE.
CONTINUTE DU MATERIAU D'UN POINT A L' AUTRE « COUCHES INTERMEDIAIRES ».	CERAMIQUE-METAL	-ELIMINATION DES PROBLEMES DE L' INTERFACE. -RELAXER LES CONTRAINTES THERMIQUES.
LA FACE A BASSE TEMPERATURE.	METAL	-BONNE RESISTANCE MECANIQUE. -CONDUCTIVITE THERMIQUE ELEVEE. -TRES BONNE TENACITE.

Donc un FGM (Functionally Graded Material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées [Ait Atmane. H, 2011]. Une comparaison exemple d'un tel matériau est montrée sur la (Figure I.3) et (Figure I.4) [Yin H.M., et al, 2004]

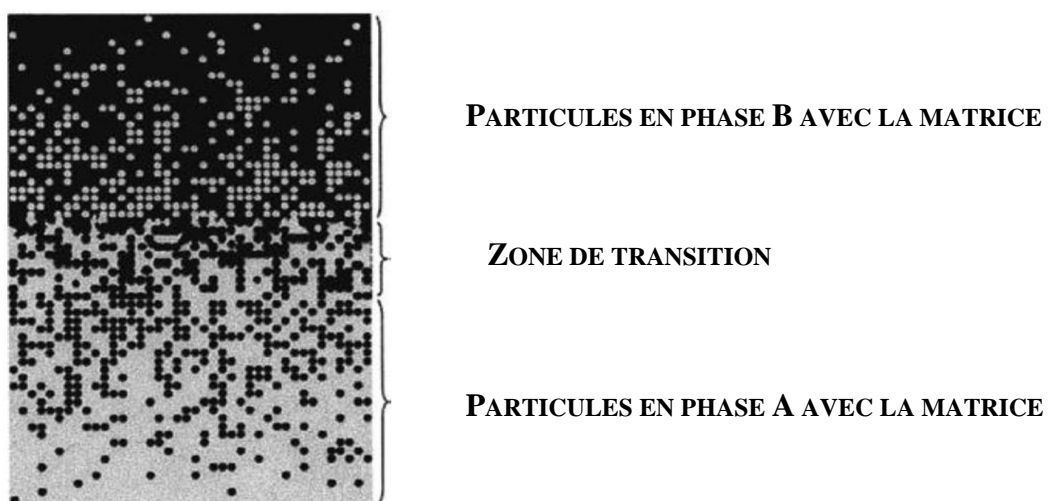


Fig.I.3. Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [Yin H.M., et al, 2004]



FIG. I.4. VARIATION CONTINUE DE LA MICROSTRUCTURE (PHOTO)

Concernant la distribution des différentes sollicitations, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes, en ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée. Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu des engins spatiaux et aérospatiaux [Jian, Hashida et al, 1995], [Kawasaki et Watanabe, 1997].

La (Figure I.5) montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles [Houari. MSA, 2011].

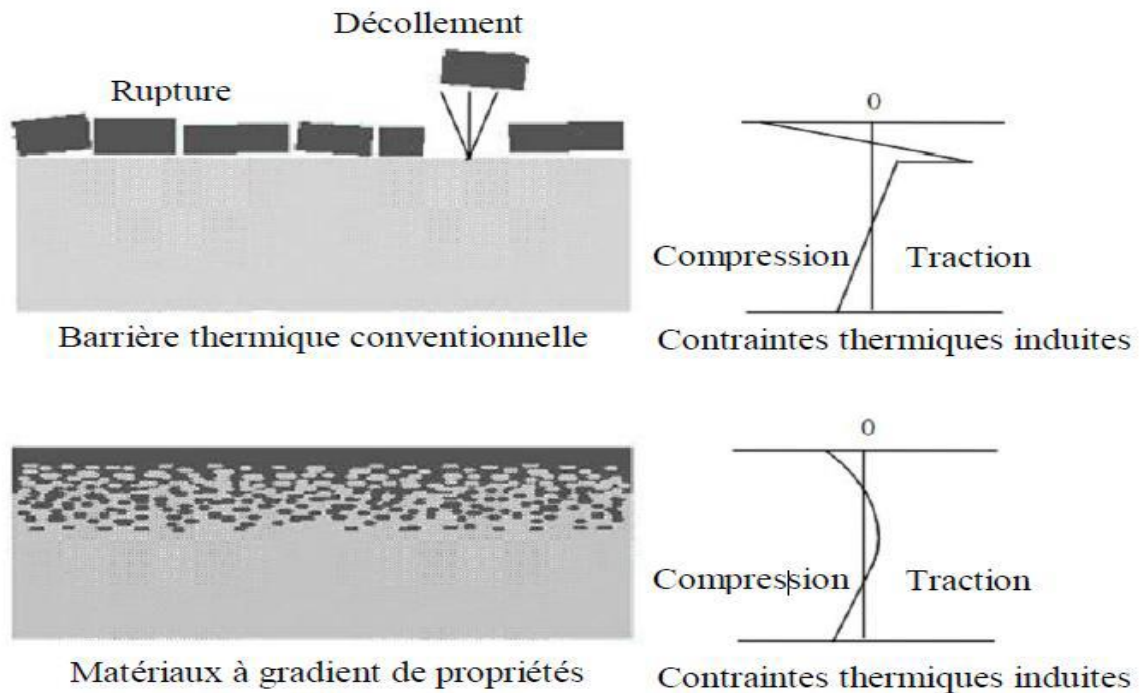


Fig. I.5. Protection thermique [Houari. MSA, 2011].

I.3 Histoire du Développement Architectural du Concept FGM

Devant l'évolution croissante de la technologie, et les exigences de plus en plus pressantes de l'industrie moderne pour trouver des matériaux performants, où certains matériaux sont soumis à des conditions environnementales sévères qui peuvent conduire à des dégradations surfaciques (atmosphère, température, tribologie, etc.). Ces conditions environnementales génèrent des modifications progressives des propriétés du matériau de base (électroniques, magnétiques, thermiques, mécaniques). C'est pourquoi ; il a été envisagée la mise en œuvre de matériaux composites, et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés.

Le concept peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Durant les années 1980 et 1990, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduit au japon afin de développer l'architecture des FGM. et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives [Ait Atmane. H, 2011].

Les FGMs sont des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Ils sont constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs des matériaux composites conventionnels (Monocouches, Stratifiés, Sandwiches) comme c'est illustré dans la (Figure I.6) [Koizumi. M, 1993]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM.

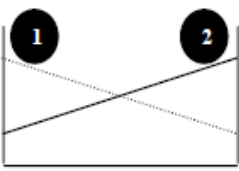
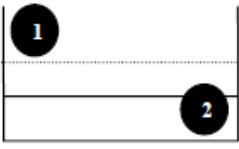
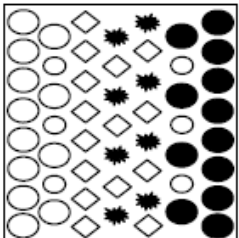
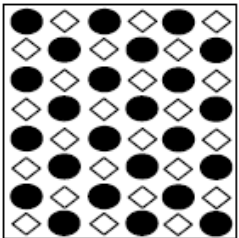
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Fig I.6. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi. M, 1993]

I.3.1 Utilisations Structurales des FGMs (Intégration du Caractère Réfractaire et de la Dureté)

La conception de machine dans l'industrie aérospatiale nécessite des matériaux ultra performants, les matériaux constituant les parois de ses engins travaillent à des températures très élevées. A cet effet, en 1987 le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « Etude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un thermique dans les programmes aérospatiaux.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci été de développer l'architecture

fondamentale des FGM ainsi que leurs applications. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh H, 1997].

Pour combiner toute ses caractéristiques dans un seul matériau, l'idée nouvelle des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté hautes températures) et des métaux (côté basse température).

La (Figure. I.7) montre les principaux résultats du programme de recherche [T.Hirai, 1996], [Ichiro chiota et al, 1996]. Par exemple du côté de la conception et de la modélisation, ils ont développés un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisé des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service.

Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établis une approche micromécanique pour corrélér les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales (similaires) et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées; la méthode FEM (Méthode des Eléments Finis) a été employée pour modéliser la distribution des efforts internes.

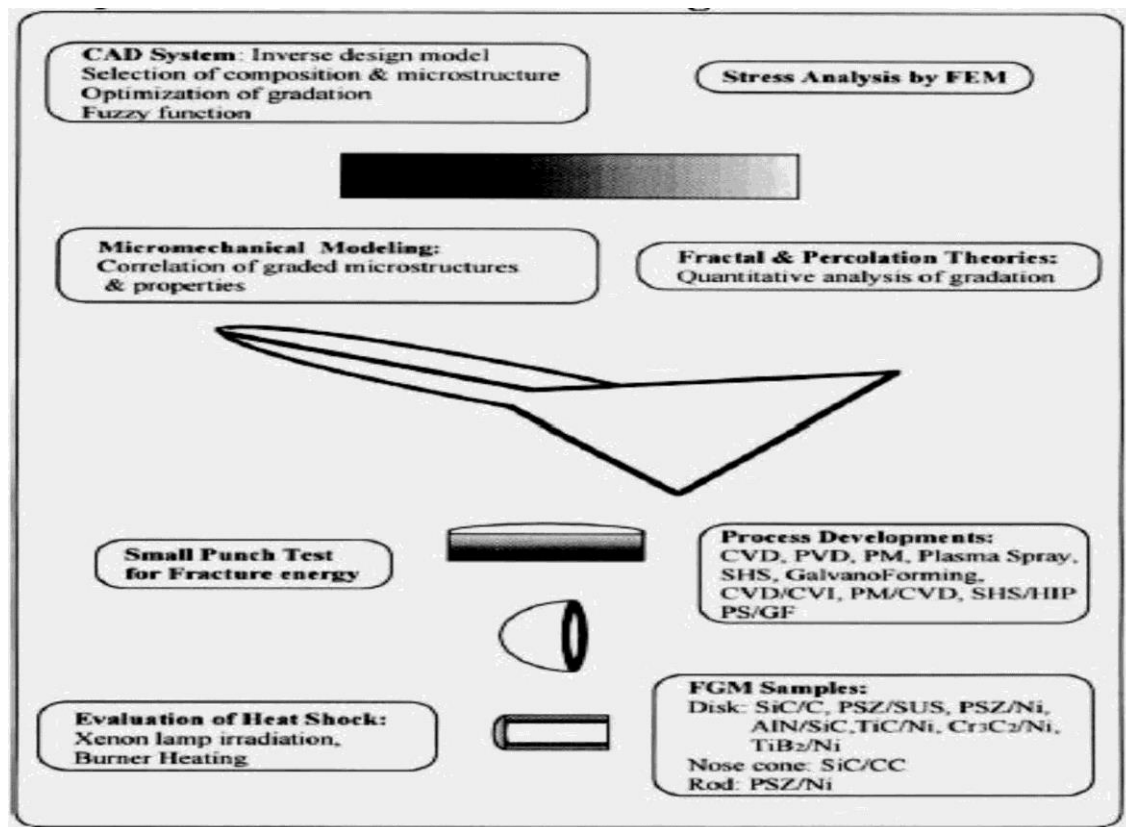


Fig. I.7. Résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur : « Etude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».

Cette première étape a duré de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD (Dépôt chimique en phase vapeur), PVD (Dépôt physique en phase vapeur), jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 1727°C (température de surface) et à un gradient de température de 727°C. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ/acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr₃C₂/Ni, TiB₂/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au-delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. A nos jours, des outils de coupe de haute performance en CN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés [Ichiro chiota, 1996]. Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

I.4 Nouveaux procédés pour le traitement des FGM

S'il y'a une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles [Anne. G et al, 2006]. Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand on choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrêmes importances. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé.

Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

I.4.1 Processus de formation et de consolidation des FGM

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, le corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de graduation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (**Figure I.8**) [Neubrand, A et al, 1997].

Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent

dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.

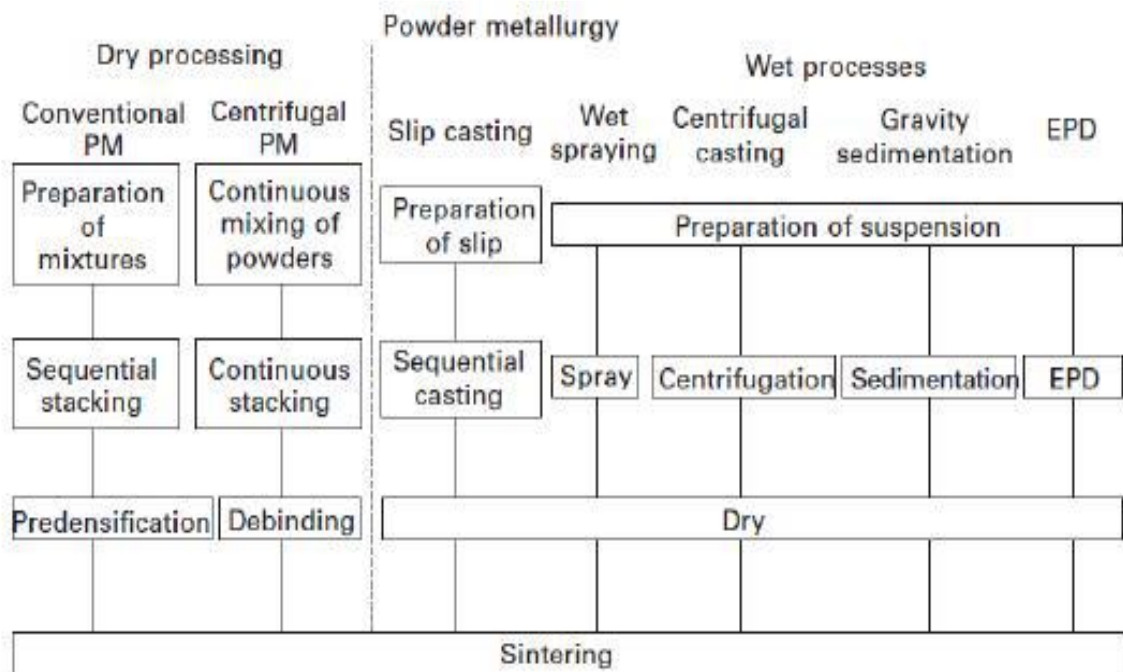


Figure. I.8 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM [Neubrand, A et al, 1997].

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage diffèrent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre [Requenna, J et al, 1993]. En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption [Chu, J et al, 1997].

Dans un processus appelé la pulvérisation humide [Schindler, J et al, 1998], des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créée en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation

[Watanabe, Y et al, 1998] est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale.

Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle [Bernhardt, R et al, 1999].

La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM. Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électrophorétique de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse [Anné, G et al, 2004] parce que c'est un processus assez rapide qui ne coûte pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électrophorétique est un processus en deux étapes (**Figure. I.9**).

Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse).

Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposée est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (**Figure. I.9**).

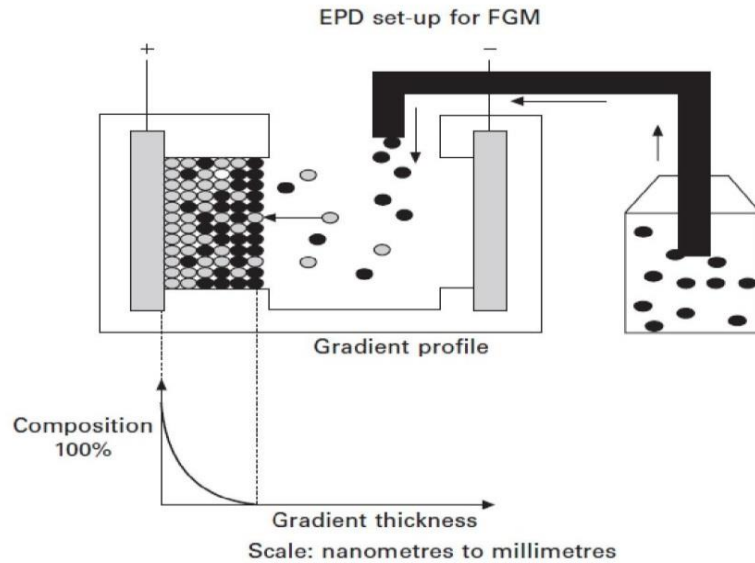


Fig. I.9. Procédé électrophorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [Anné G et al, 2006]

L'adaptation judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue. Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres et en polymères [Van der Biest, O et al, 1999]. Généralement avec la limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, ZrO_2/WC , et WC/Co ont déjà été explorés au moyen du processus EPD [Anné G et al, 2006].

Réquisit une pré-réquisition d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen de (EPD) méthode électrophorétiques de dépôt [Anné G et al, 2006], s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen de (EPD) [Put, S et al, 2003].

Comme exemple, on présente une composition d'un profil (Figure. I.10) et sa microstructure (Figure. I.11) ; c'est un disque en FGM $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ [Vleugels J, 2003] avec un noyau homogène (75% volume d' Al_2O_3), une couche Al_2O_3 extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90% volume d' Al_2O_3) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graphe, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses

contraintes de traction au noyau du disque. Les phases ZrO_2 (blanc) et Al_2O_3 (grises) peuvent être clairement différenciées dans la microstructure. La phase ZrO_2 est bien dispersée dans la matrice Al_2O_3 dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

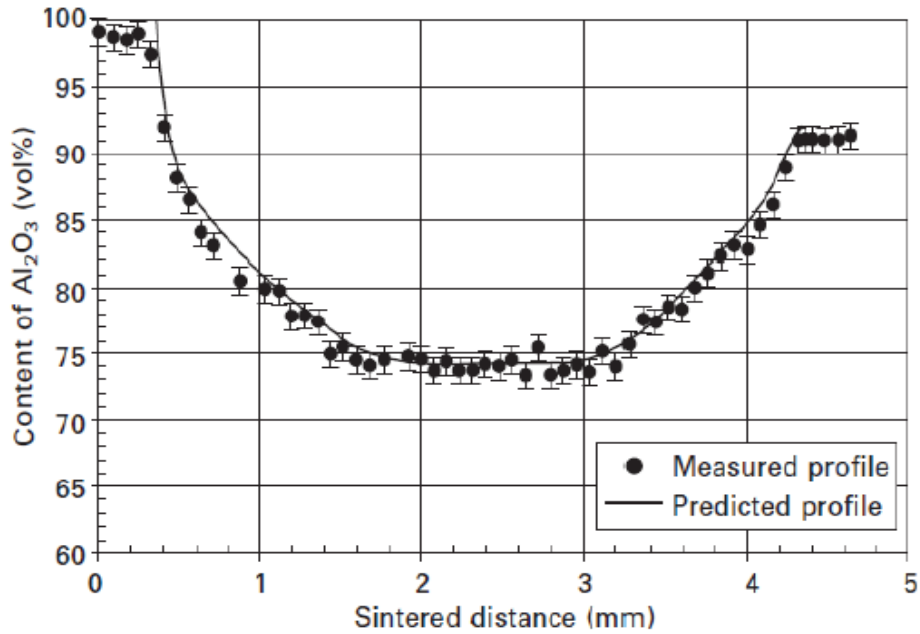


Fig.I.10. Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al_2O_3/ZrO_2) [Anné G et al, 2006]

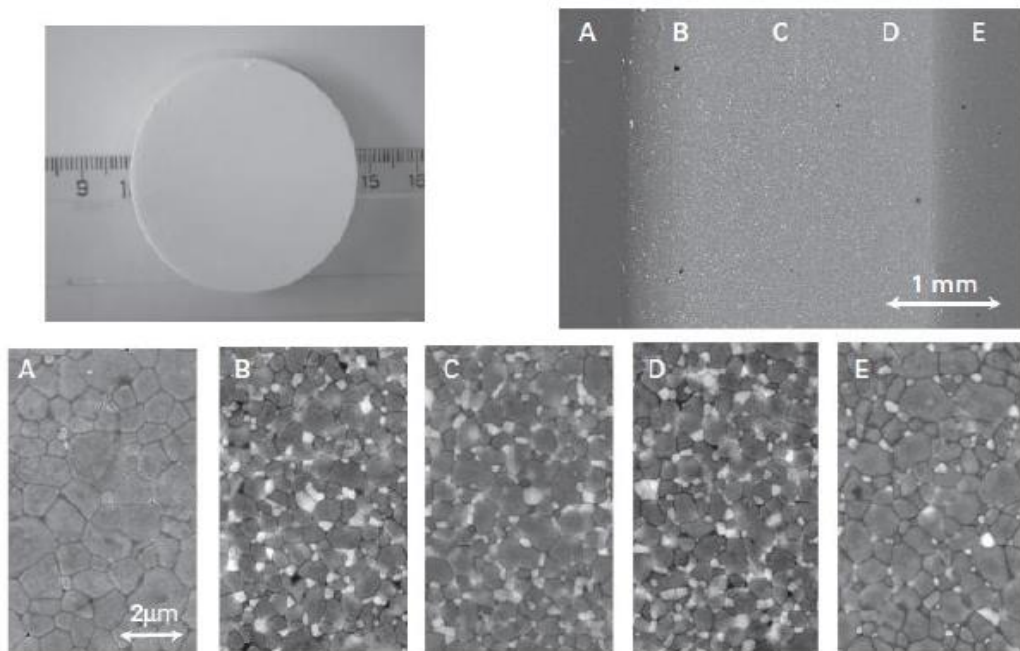


Fig.I.11. Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [Anné G et al, 2006].

I.4.2 Densification des poudres compactes pour FGM

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. A cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent être observés dans le composant FGM final à moins que des corrections soient apportées [Miyamoto, Y et al, 1999].

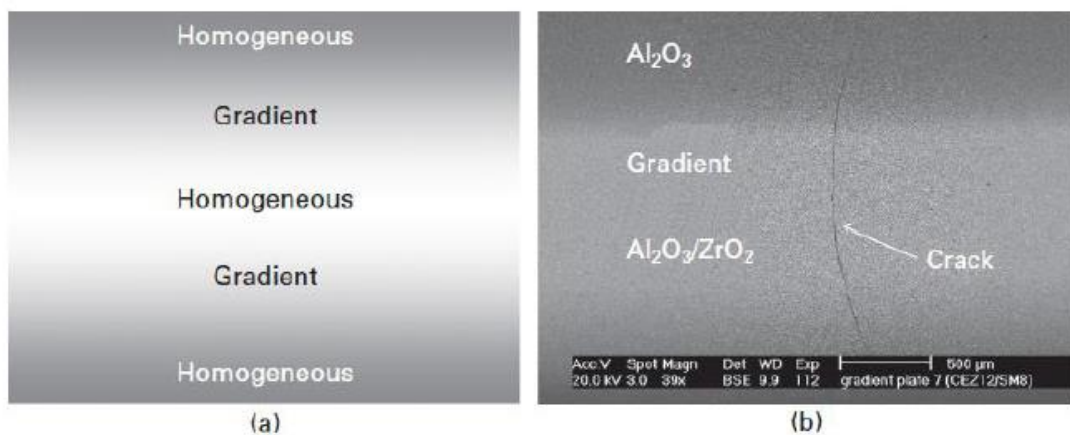


Fig.I.12. (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al_2O_3/ ZrO_2 [Anné G, 2006].

La (Figure.I.12) montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en AL_2O_3/ZRO_2 , formés par les dépôts électrophorétiques et densifiés par frittage a basse pression. A partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en ZRO_2 d'un disque symétrique fritté en TZP/ Al_2O_3 . Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe AL_2O_3 , indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. [Hillman, C et al, 1999] a observé des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches AL_2O_3/ZRO_2 sur les surfaces et une couche médiane en ZRO_2 .

Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dû au coefficient de dilatation thermique élevé de zircone. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches Al_2O_3 et AL_2O_3/ZRO_2 . Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes

pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitationnels.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les différentes couches [Cai, P.Z et al, 1997a- Cai, P.Z et al, 1997b] ou en ajustant la densité verte des différentes couches [Beraniè. S et al, 2005]. Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement pendant le frittage [Cai, P.Z et al, 1997b]. Les forces résiduelles pendant Le cycle de chauffage sont diminuées par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent; ceci est probablement dû à la relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de frittage des deux composants [Anné G et al, 2006]. Dans un FGM métal/ céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles [Neubrand, A et al, 1997]. Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM [Anné G et al, 2006]. C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que les méthodes conventionnelles.

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique [Zhao C, 2000]. Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenue par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Un matériau à gradient de propriétés est un matériau fonctionnel. La combinaison de matériaux distincts permet d'améliorer les propriétés électriques, magnétiques, mécaniques, thermiques du système global.

Les propriétés mécaniques sont intimement liées à la microstructure sollicitée. La nature des phases, leurs pourcentages, leurs morphologies sont des paramètres qui vont jouer sur les propriétés mécaniques. Différentes voies peuvent être utilisées pour modéliser le comportement de matériaux multi-phases : Loi de mélange ou modélisation numérique de la microstructure [Texier D, 2013]. Différentes lois de mélange existent et découlent des travaux menés sur composites. Nous citons à titre d'exemple : le modèle de Voight, Reuss, Hirsch-Dougill, Les approches de Tsai-Pagano ou de Popovics qui sont des cas particuliers du modèle de Hirsch-Dougill, Modèle de Hashin-Shtrikman,..etc

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen, 2009].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad \text{I.1}$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec:

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad \text{I.2}$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1V_1 + P_2V_2 \quad \text{I.3}$$

Avec

$$V_1 + V_2 = 1 \quad \text{I.4}$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

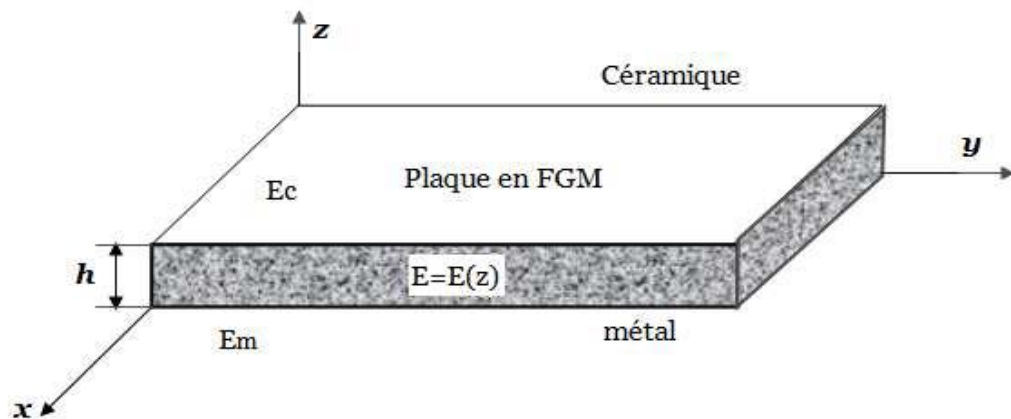


Fig. I.13. Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit :

$$E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z).$$

[Jin et Batra, 1996] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad \text{I.5}$$

Où « k » est un paramètre matériels et « h » est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale « V(z) » a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang, 1995]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad \text{I.6}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure $z = -h/2$ et de la surface supérieure $z = +h/2$ de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (**Figure I.14**). Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour « $K < 1$ », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $K > 1$ ».

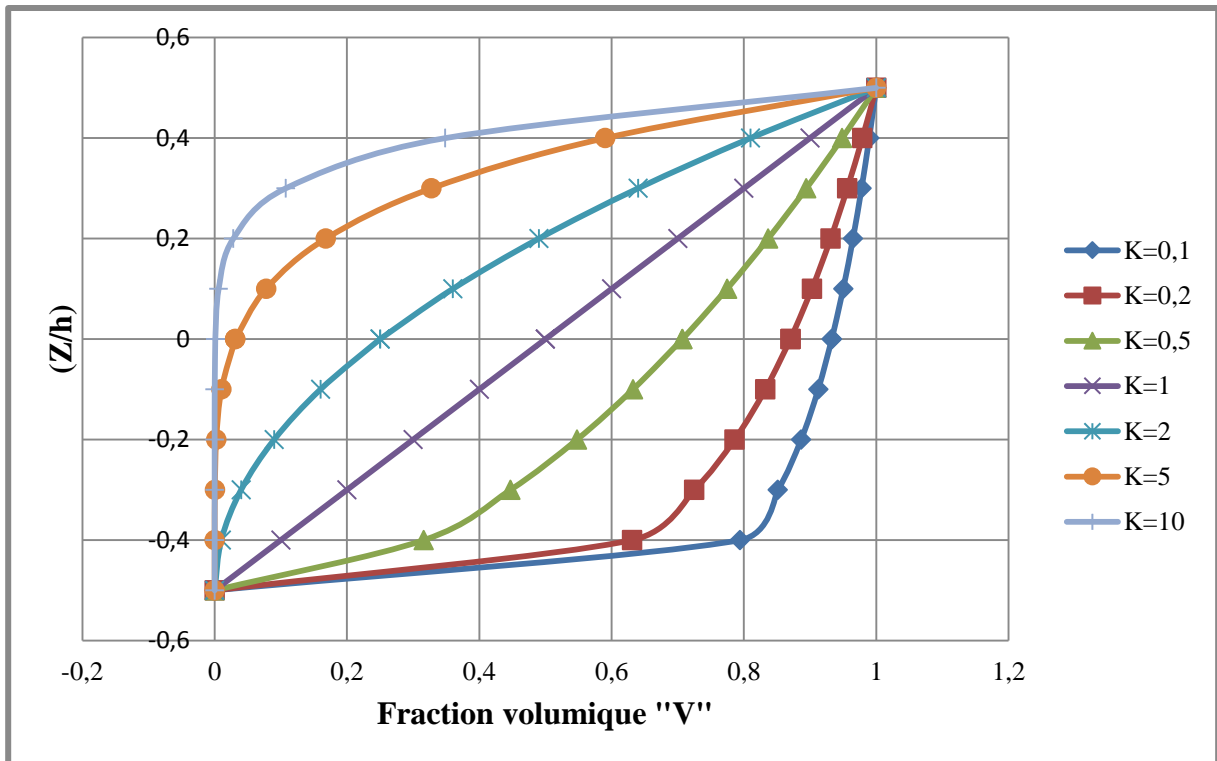


Fig. I.14. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

[Chung et chi, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.7a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.7b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{Pour } -h/2 < z < 0 \quad \text{I.8a}$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{Pour } 0 < z < h/2 \quad \text{I.8b}$$

La (**Figure I.15**) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-7a) et (I-7b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

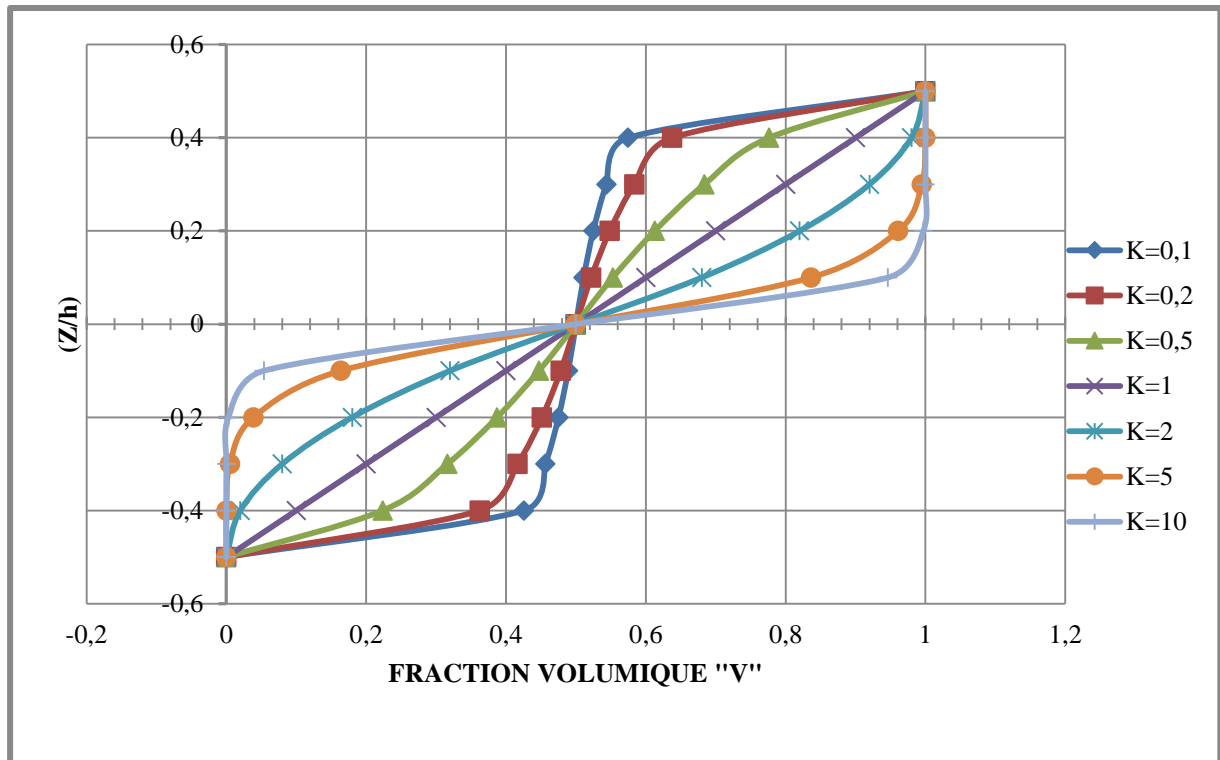


Fig. I.15. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGMs, les chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [Delale et Erdogan, 1983].

$$E(z) = E_2 e^{B(z+1/2)} \quad \text{I.9a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad \text{I.9b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la (**Figure I.16**).

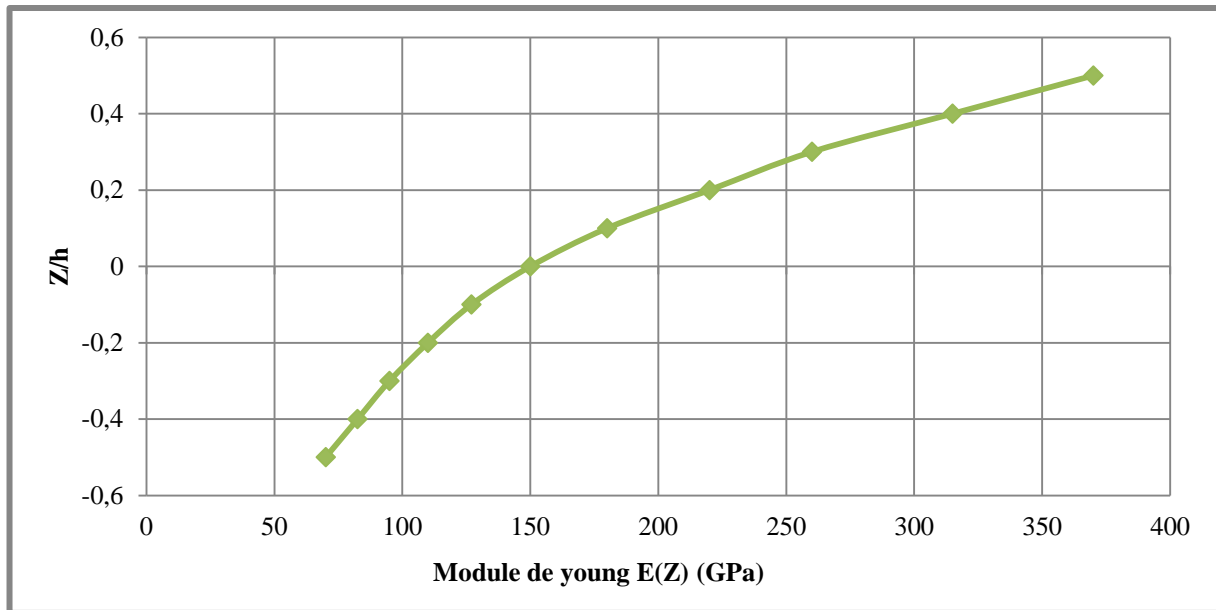


Fig. I.16. Variation du module de young dans une plaque E-FGM

I.6 Loi de comportement matériel de l'élasticité 3D

Dans un système des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (**Figure I.17**), il est coutumier d'écrire l'état de déformation par six composantes de contraintes et de déformations. A savoir, trois composantes normales et trois du cisaillement. Une relation linéaire entre les contraintes et les déformations est connue comme la loi de Hooke généralisée, et elle est exprimée comme :

$$\sigma_k = C_{kj} \varepsilon_j \quad \text{Avec } (k=1,2,\dots,6) \quad \text{I.10}$$

Où C_{kj} sont connus comme des coefficients élastiques. Notant que l'Eq (I.10) est une abréviation de la forme du tenseur adéquate de la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{I.11}$$

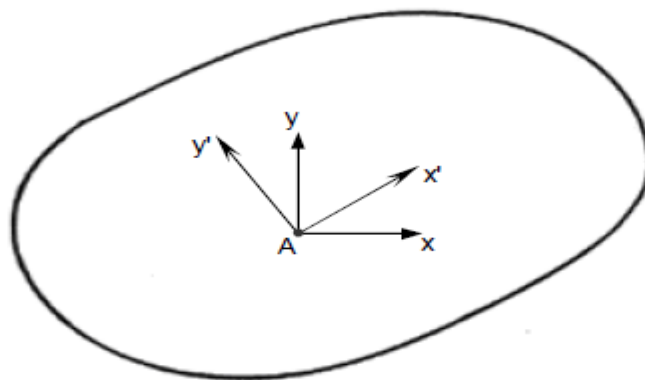
Quand C_{kj} sont en fonction d'une position, le matériau est hétérogène, et quand ils sont constants partout dans le matériau, le matériau est homogène. Nous notons que C_{kj} sont des entrées dans le k -ème rangée et j -ème colonne d'une matrice carré de (6x6). Cependant, C_{kj} ne sont pas les composantes du tenseur de deuxième ordre. Aussi, la notation en un seul indice pour les composantes des contraintes et des déformations sont basées sur la convention,

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$$

I.12

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$$

ici $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ présentent les contraintes normales, et $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ présentent les contraintes de cisaillement; $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$ sont les contraintes en plan et $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ sont les contraintes hors plan (c'est-à-dire., transversal). Une terminologie semblable est utilisée pour les composantes de déformation .



m : une propriété matérielle mesurée par respect de système (x, y)
 m' : une propriété matérielle mesurée par respect de système (x', y')
 Un matériau isotrope : $m=m'$, un matériau anisotrope : $m \neq m'$

Fig. I.17. Définition des matériaux isotropes et anisotropes.

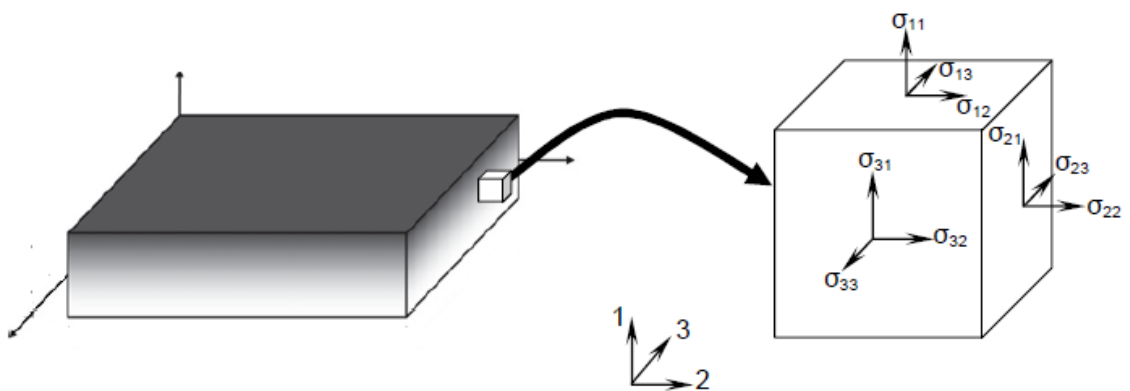


Fig. I.18. Les composantes des contraintes et des déformations dans le système des coordonnées cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGMs.

Les trente-six coefficients C_{ij} ne sont pas tous indépendants de l'un à l'autre. Le nombre des constantes indépendantes dépend de la constitution matérielle. En premier, nous montrons que $C_{kj}=C_{jk}$, ils sont symétriques pour les matériaux pour les quels la fonction de la densité d'énergie de déformation « U_0 » est définie par :

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_k} = \sigma_k \quad \text{I.13}$$

Pour illustrer ceci, nous considérons la densité d'énergie de déformation du matériau comme :

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_k d\varepsilon_k \quad \text{I.14}$$

substituant l'équation (I.10) dans l'équation (I.14) et nous l'intégrons, nous obtenons :

$$U_0 = \frac{1}{2} C_k \varepsilon_k \varepsilon_j \quad \text{I.15}$$

En remplaçant U_0 d'éq. (I.15) dans l'éq. (I.13), nous arrivons à l'expression :

$$\sigma_k = \frac{1}{2} (C_{kj} + C_{jk}) \varepsilon_j \quad \text{I.16}$$

Nous comparons les expressions (I.16) et (I.10), nous concluons que $C_{kj}=C_{jk}$. à cause de cette symétrie, il y a seulement (21) constantes élastiques indépendantes pour les matériaux anisotropes. L'Eq (I.10) peut exprimer par la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & \text{Sym} & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I.17}$$

En générale, les coefficients élastiques C_{ij} relient les composantes cartésiennes de déformations et de contraintes dépendent de système des coordonnées (X_1, X_2, X_3) utilisées.

Nous faisons la référence à un autre système des coordonnées cartésiennes ($\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$) les coefficients élastiques sont \overline{C}_{ij} , et en général $\overline{C}_{ij} \neq C_{ij}$. Si $\overline{C}_{ij} = C_{ij}$, alors ils sont indépendants de système des coordonnées (X_1, X_2, X_3) et le matériau est dit un matériau isotrope.

Quelques matériaux anisotropes peuvent posséder des symétries matérielles et leurs comportements constitutifs décrivent avec moins de (21) constantes. Quand les coefficients élastiques en un point ont les mêmes valeurs pour chaque paire de systèmes des coordonnées $(X1, X2, X3)$ et $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3)$ qu'ils sont l'image inverse de l'un à l'autre dans un certain plan, ce plan est appelé plan de symétrie élastique.

Les matériaux avec un plan de symétrie élastique sont appelés les matériaux monocliniques, et le nombre des coefficients élastiques pour de tels matériaux est réduits à (13). Si le plan de symétrie est $X3=0$, les relations constitutives deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & \text{Sym} & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I.18}$$

Notons que les contraintes de cisaillement hors plan σ_4 et σ_5 sont indépendantes de contraintes normales et de cisaillement en plan.

Si un système matériel a trois plans mutuellement perpendiculaires à un plan de symétrie élastique, alors le nombre de coefficients élastiques indépendants est réduit à neuf.

De tels matériaux sont connus sous le nom d'orthotrope. La relation contraintes-déformations pour un matériau orthotrope est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & \text{Sym} & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I.19}$$

Les coefficients de C_{ij} pour un matériau orthotrope sont exprimés en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z)$$

I.20

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

Ou

$$\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

$$\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

E , G sont les modules d'Young et de cisaillement respectivement.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel FGM, l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

Revue des Recherches sur les Structures en Matériaux à Gradient de Propriétés

II.1 Introduction:

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient de propriétés, et il est prudent de réduire la recherche bibliographique dans ce chapitre en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes liés aux plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements ou encore les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y'a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

II.2 Etudes sur les contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à températures élevées, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécaniques et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujéti à un environnement haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par [Drak et al, 1993] et [Williamson et al, 1993]. Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al_2O_3 -Ni) dans trois configurations différentes, et le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. [Giannakopoulos et al, 1995] ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants

de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de [Hill et Lin, 2002] qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

II.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

[Jin, 2002] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidies à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes.

Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par [Ootao et Tanigawa, 2004] où les deux, la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par [Sladek, 2003] en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrits et un cylindre avec une température constante appliquée sur sa surface.

II.4 Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement.

[Sankar et Tzeng, 2002] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. [Sankar, 2001] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli).

Les résultats montrent que la théorie classique des poutres donne des résultats acceptables si la poutre est élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par la théorie classique des poutres. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produisent sur la surface de chargement sont plus élevées dans une poutre en FGM par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le

Chapitre II: REVUES DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques. Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée par la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [**Chakraborty A, 2003**].

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par [**Reddy, 2000**] en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. [**Reddy et Cheng, 2001**] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par [**Vel et Batra, 2002**] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau.

La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par [**Kashtalyan, 2004**] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

[**Chi et Chang, 2006**] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

[**Zenkour, 2005**] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwiches en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoidale » de la théorie de déformation de cisaillement. Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid [**Woo J, 2001**].

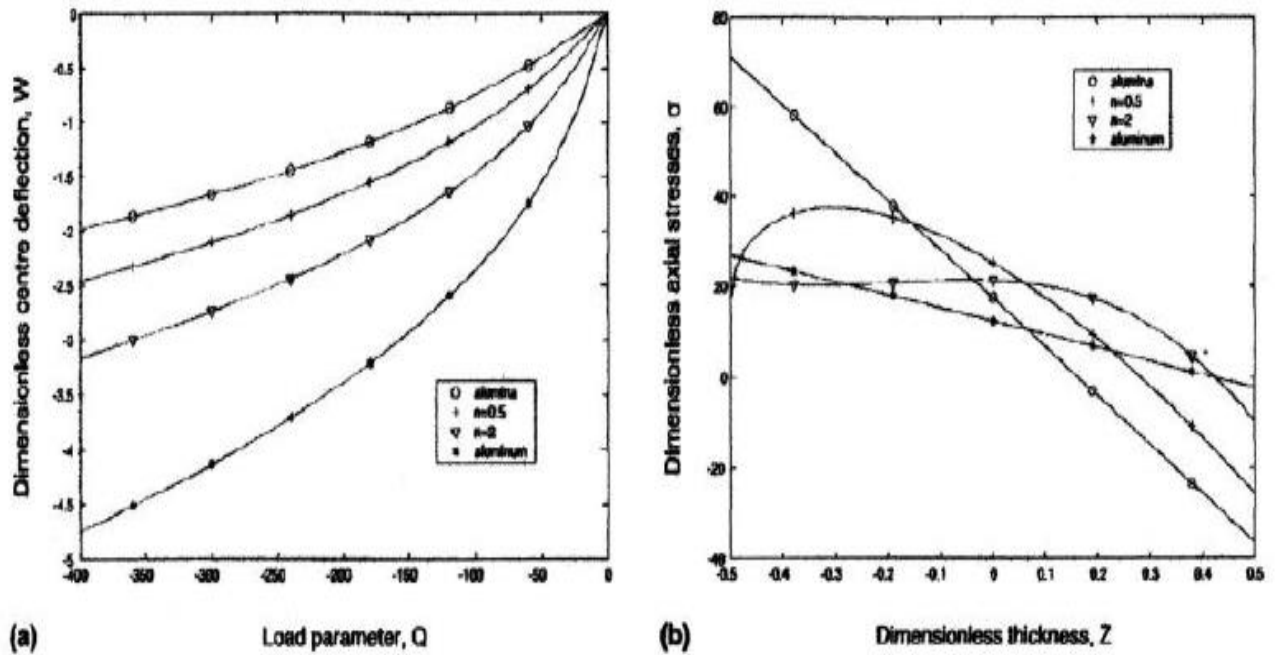


Fig.II.1. Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse [Woo J, 2001].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la (Figure II.1). On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ($n = 2$) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur.

Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes. [Tarn, 2001] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique.

La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant le cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par [Javaheri et Eslami, 2002].

[Na et Kim, 2004] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM. Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par [Yang et al, 2005] qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes.

L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par [Shen et al, 2003]. Un exemple de cette analyse est illustrés sur la (Figure II.2), où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par [Matsunaga, 2009] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. [Zhao et al, 2009] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, [Fuchiyama et Noda, 1995] ont étudié le flambement d'une plaque FGM (ZrO₂/ Ti-6Al-4V) sous un chargement thermique.

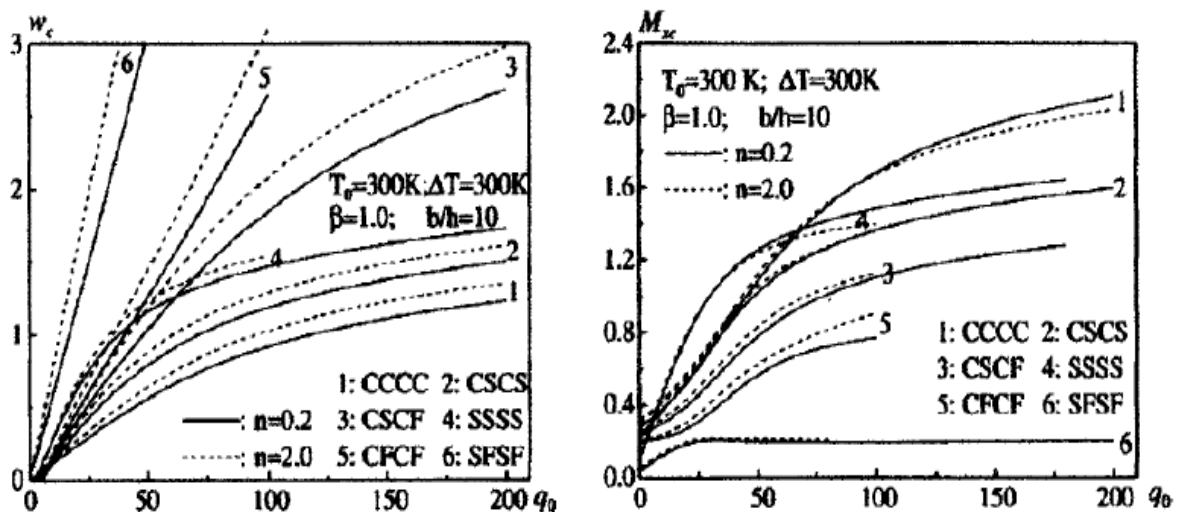


Fig.II.2. Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [J.Yang. J. et al, 2005]

[Zenkour et Sobhy, 2005] ont utilisé la version sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwiches en FGM. Une étude récente publiée par [Park et Kim, 2005] contient une analyse par éléments finis de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique. Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la (Figure II.3).

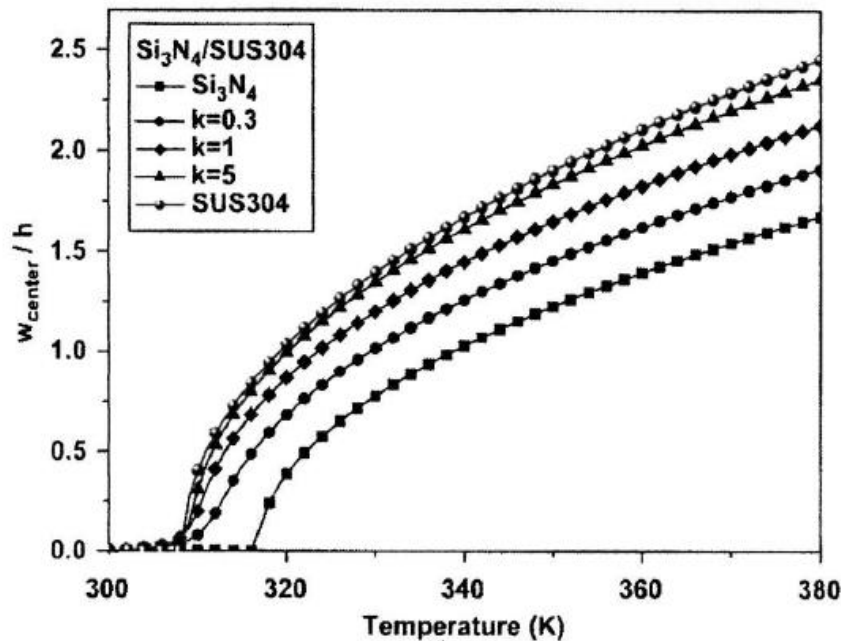


Fig.II.3. Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM (Si₃N₄/SUS304) [J. Yang, J. et al, 2005].

[Hashemi Sh-H et al, 2010] ont employé une méthode analytique pour analyser les problèmes de vibration des plaques annulaire épaisses en FGM avec des couches piézoélectriques intégrés. La plaque avec différentes conditions aux limites sur les bords est modélisée sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy « TSDT ». La variation des propriétés des matériaux de la plaque suit une distribution de loi de puissance. La distribution de potentiel électrique le long de la direction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique est supposée être une fonction sinusoïdale.

Récemment, les mêmes auteurs [Hashemi Sh-H et al, 2012] ont développé une solution exacte de la vibration libre des plaques épaisses piézoélectriques couplés circulaires / annulaires pour les différentes conditions aux limites en utilisant la théorie de premier ordre de « Reissner et Mindlin ». Les effets de couplage entre les déplacements dans le plan transversal et sur les paramètres de fréquence sont avérés être significatifs dans cette étude. Il est conclu dans ce

travail, que le modèle développé peut décrire le comportement vibratoire de plaques FGM avec couche piézoélectrique de manière plus réaliste.

Les solutions sont obtenues en utilisant la technique de la solution de Navier avec un excellent accord des solutions d'élasticité 3D disponibles dans la littérature. [Shen et Wang, 2012] ont présenté les petites et grandes vibrations d'amplitude d'une plaque rectangulaire en FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans des environnements thermiques envisagent deux types de modèles micromécaniques des FGM. [Khorramabadi et al, 2008] ont étudié la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT et de troisième ordre TSDT pour comprendre l'effet de l'application de ces deux théories de déformation de cisaillement sur la vibration des plaques non homogènes.

Récemment, de nouvelles théories des plaques prennent en compte seulement quatre fonctions inconnues et peuvent tenir compte des déformations de cisaillement, sont développées par Tounsi et ses collègues [Mechab et al, 2010]; [Houari et al, 2011]; [Ameur et al, 2011]; [El Meiche et al, 2011]; [Benachour et al, 2011]; [Hadji et al, 2011]; [Tounsi et al, 2013].

Ces théories qui ressemblent à la théorie d'ordre élevé utilisent seulement quatre fonctions inconnues afin de réduire les équations d'équilibres pour les plaques à gradient de propriétés à quatre équations. La caractéristique la plus intéressante de ces théories c'est qu'elles ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement, et en satisfaisant une distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales, et satisfait les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement.

Cependant, dans ces théories des plaques de quatre variables et d'autres théories de déformation de cisaillement, généralement les plaques FGM ont été analysées en négligeant l'étirement d'épaisseur z , le déplacement transversal considéré comme indépendant de coordonnées de l'épaisseur. L'effet de la déformation normale dans les plaques FGM a été étudié par [Carrera et al, 2011], en utilisant une approximation par éléments finis.

II.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peut

Chapitre II: REVUES DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Nous le présentons dans le but de monter l'importance que la communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverses sollicitations. [Praveen et Reddy, 1998] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. [Reddy, 2000] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

[Yang et Shen, 2001] ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM. [Reddy et Chen, 2003] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2004, [Huang et Shen, 2004] ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations. Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par [Vel et Batra, 2004] pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses.

Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. [Qian, Batra

et al, 2004] ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur.

En 2006, les travaux de [**Ferreira et al, 2006**] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. [**Uymaz et Aydogdu, 2007**] ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGMs minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations.

Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par [**Li et al, 2008**]. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM.

L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse.

[**Matsunaga, 2008**], a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

[**Ait Atmane et al, 2010**] ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

[**Hasani Baferani et al, 2011**] ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

[**Hadji et al, 2011**] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches. [**Benachour et al, 2011**] ont utilisé la même théorie développée par [**Hadji et al, 2011**] pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité.

[**Hadji et al, 2017**] ont présente une étude dynamique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriété type FGM en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement transverse d'ordre élevé à quatre variables. Les équations du mouvement ont été obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les fréquences de vibration trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres. La théorie proposée est efficace dans la résolution du comportement dynamique des plaques sandwiches à gradient de propriété type FGM.

[**Fatima Zahra Taibi., et al, 2015**] ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwiches FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres.

[**Mahi, A., et al, 2015**] ont développé une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse des vibrations libres des plaques isotropes, plaques fonctionnellement gradués, plaques sandwiches et plaques stratifiées.

[**Tounsi, A., et al, 2013**] ont présenté des formulations analytiques et des solutions pour les fréquences naturelles de plaques composites et sandwiches simplement appuyées sur la base d'une théorie raffinée d'ordre supérieur.

[**T. Kant et K. Swaminatha, 2001**] ont utilisé une théorie de déformation trigonométrique raffinée pour l'analyse de la flexion thermo-élastique de plaques sandwiches à gradient fonctionnel.

[**Ait Amar Meziane, et al, 2014**] ont présenté une théorie de déformation de cisaillement raffinée efficace et simple pour la vibration et le flambement de la plaque sandwich exponentielle reposant sur des fondations élastiques avec différentes conditions d'appuis.

[**Hebali, H., et al, 2014**] ont proposé une nouvelle théorie de déformation du cisaillement hyperbolique quasi-tridimensionnelle (3D) pour l'analyse des flexions et des vibrations libres de la plaque FGM. [**Hamidi, A., et al, 2015**] ont présenté une théorie des plaques sinusoïdales avec 5 inconnues et un effet d'étirement pour la flexion thermomécaniques des plaques sandwiches FG.

[**Aicha Bessaim, et al, 2013**] ont présenté une nouvelle théorie de flexion et de déformation normale de l'ordre supérieur pour l'analyse des flexions et des vibrations des plaques sandwiches.

[**Li, Q., et al, 2008**] ont présenté une solution tridimensionnelle pour la vibration libre des plaques sandwiches FGMs multicouches FGMs symétriques et asymétriques utilisant la méthode Ritz.

Récemment, [**Tounsi, A., et al, 2016**] et [**Houari, MSA, et al, 2016**] ont développé une nouvelle théorie de la plaque non polynomiale avec 3-inconnue pour les structures à gradient fonctionnel.

II.6 Conclusion

En conclusion, les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénieries avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

CHAPITRE III

Les Théories des Structures

FGM

III.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff- Love).

La théorie des plaques moyennement épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2 Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle:

III.2.1 Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de *Love-Kirchhoff* et de *Reissner-Mindlin*, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

III.2.2 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques) :

On commence par le modèle le plus simple est le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [E. Reissner., et al, 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [G. Kirchhoff., 1850] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées.

La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (**Figure. III.1**).

Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger. [**Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959**], [**Reddy, 1997**] et [**Reddy, 1999**]. En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \text{III.1.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \text{III.1.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{III.1.c}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

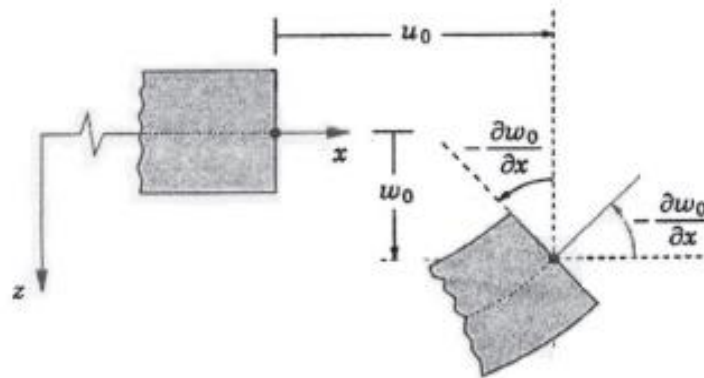


Fig.III.1. Illustration de la plaque de Love Kirchoff [**Reddy, 1997**].

Puisque ce modèle ne prend pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.2.3 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT):

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en

cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959], [Reddy, 1997] et [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad \text{III.2.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad \text{III.2.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{III.2.c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

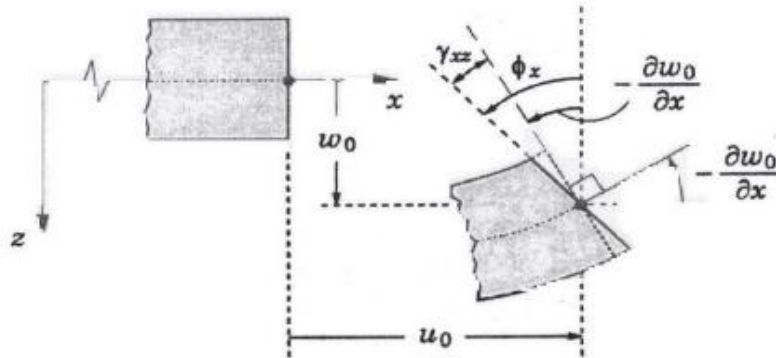


Fig.III.2. Illustration de la plaque de Reissner-Mendlin [Reddy, 1997].

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [Whitney, 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix

empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

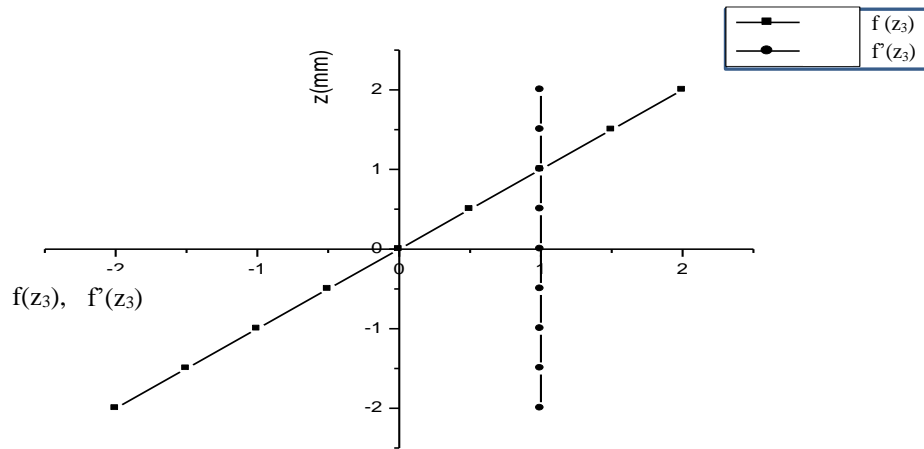


Fig.III.3. Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.2.4 Les modèles d'ordre supérieur:

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand et al, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], [Kant et Swaminathan, 2002]. Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

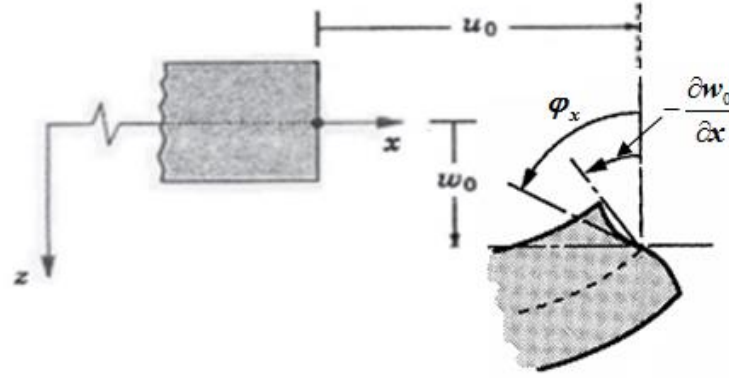


Fig.III.4. Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad \text{III.3.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad \text{III.3.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{III.3.c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

La théorie de déformation en cisaillement d'ordre trois de Reddy (TSDT) [Reddy, 1997], [Reddy, 1999] sont obtenus par:

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad \text{III.4}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{III.5}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory **ESDPT**) développée par [Karama et al, 2003] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad \text{et} \quad \varphi_z = 0 \quad \text{III.6}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory **HSDPT**) développée par [Ait Atmane et al, 2010] est obtenue en prenant:

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{et} \quad \varphi_z = 0 \quad \text{III.7}$$

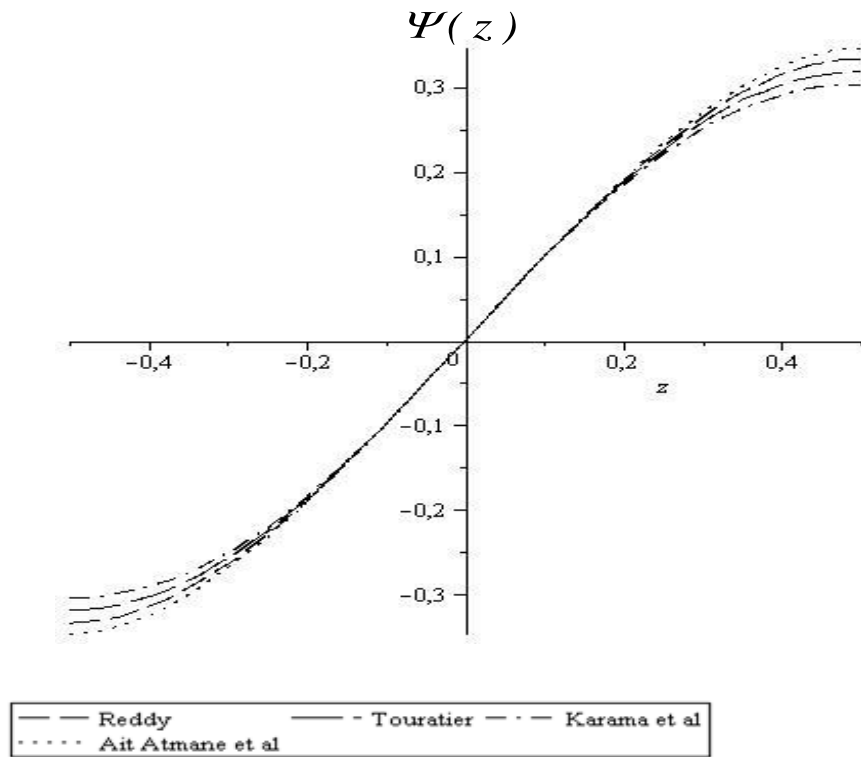


Fig.III.5. Variation de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

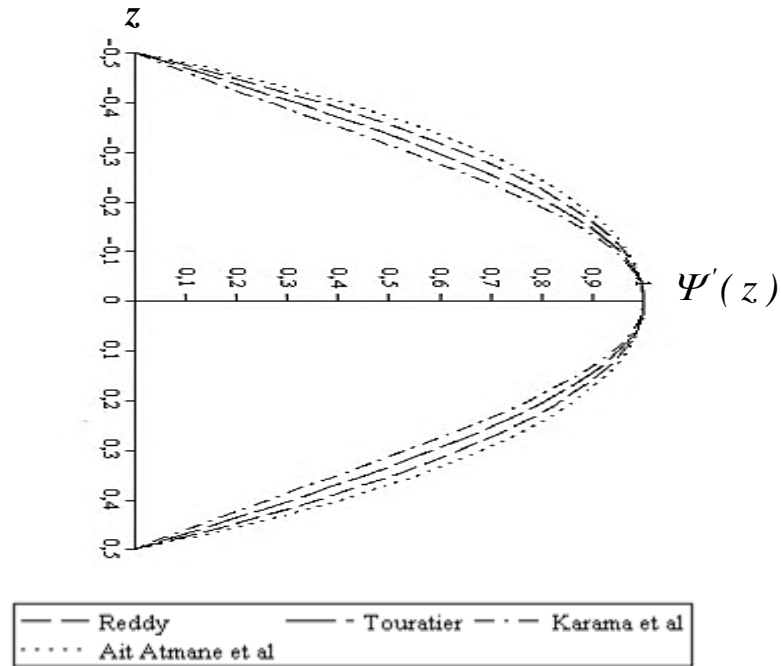


Fig.III.6. Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Psi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

III.2.5 La théorie d'ordre élevé à deux variables (Les théories raffinées) :

Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre des inconnues dans la présente théorie d'ordre élevé à deux variables est seulement quatre, par contre, égale à cinq ou plus pour les autres théories d'ordre élevé [H. Ait Atmane., et al, 2010], [J.N. Reddy, 1984], [M. Touratier, 1991], [M. Karama., et al. 2003].

La présente théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

III.2.6 Approche par couche:

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les (Figures I.2 et I.3) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par [Chabot, 1997], [Carrera, 2000], [Afaq et al, 2003], [Reddy, 1984], [Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures : III.7 et III.8).

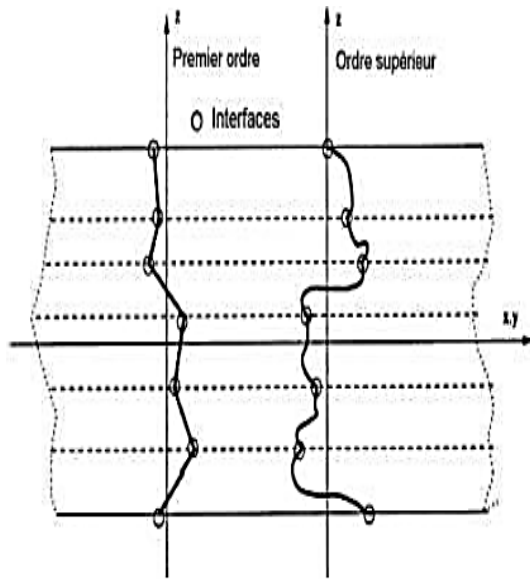


Fig. III.7. Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen, 2004]

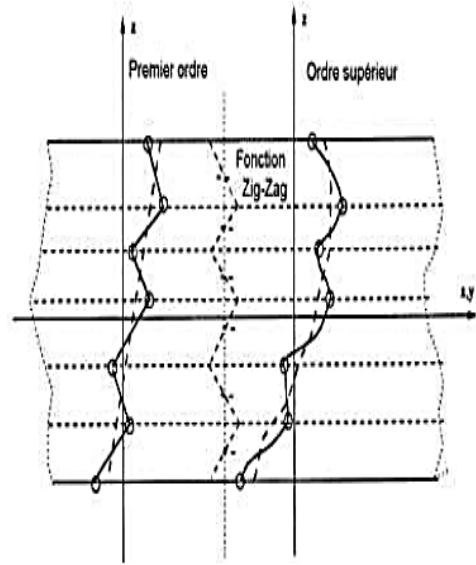


Fig. III.8. Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen, 2004]

III.2.7 Les modèles zig-zag:

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva, 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'heaviside).

La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface voir (Figure. III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

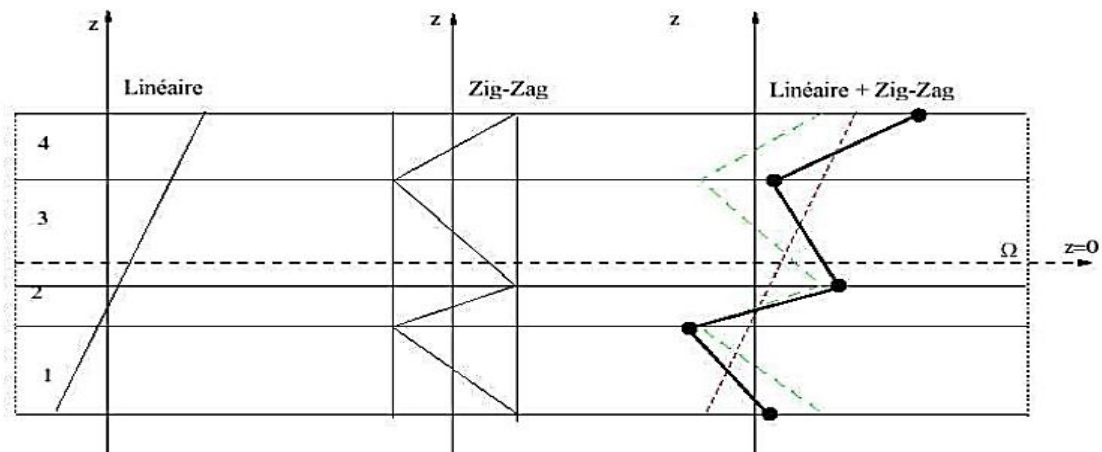


Fig. III.9. Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [Nguyen, 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction en se basant sur le concept de plusieurs auteurs a réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag, [Nguyen, 2004].

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) voir (**Figure.III.10**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

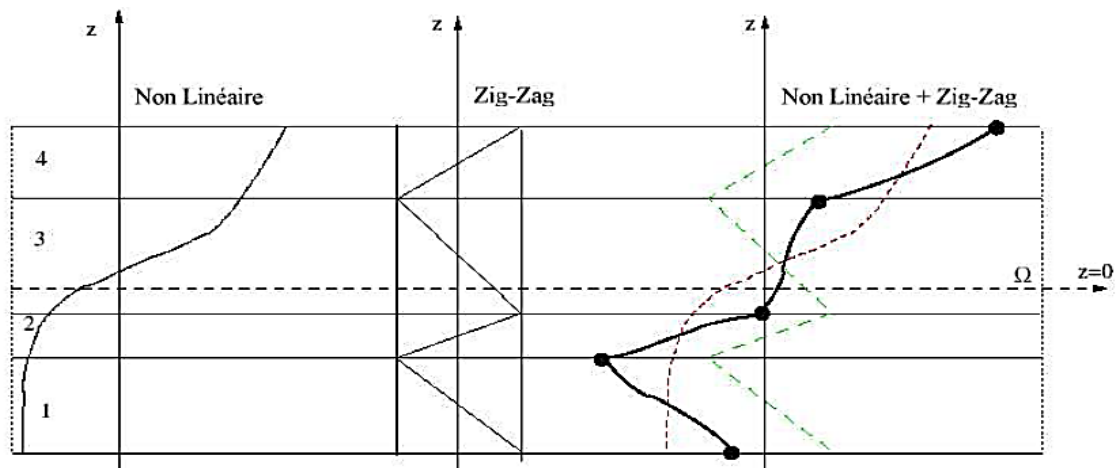


Fig.III.10. Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur [Nguyen, 2004]

Dans les travaux de [Karama et al, 1998], [Ossadzow et Touratier, 2001], la fonction sinus de [Touratier, 1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, [Afaq, 2003] a combiné le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [Icardi et Bertetto, 1995]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles

d'ordre supérieur est la continuité de type « C1 » demandée qui complique leur implémentation numérique.

III.2.8 Les modèles couches discrètes:

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale voir (**Figure. III.7**). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [**Srinivas, 1973**], [**Reddy, 1987**], [**Tahani et Nosier, 2003**], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [**Ren, 1986**], [**Kassapoglou et Lagace, 1987**], [**Yin, 1994**] Utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [**Ren, 1986**] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [**Kassapoglou et Lagace, 1987**], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [**Yin, 1994**], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [**Pagano, 1978**]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, « n » étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen, 2004].

III.3 Théorie de plaques tridimensionnelles (élasticité 3D) :

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur, On note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont consacré leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximatives pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités.

[Vel S.S et al, 2004] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGM, [Uymaz et al, 2007] ont proposé une solution approchée par une série des études utilisant les polynômes de « Chebyshev », les mêmes problèmes ont été traités par [Li et al, 2008] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \text{III.8}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettent d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

Plus récemment, [Huang et al, 2008], [Amini e al, 2009] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, [Malekzadeh, 2009] a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, [Zenkour, 2007] a étudié des plaques en FGM épaisses se basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle des propriétés matériels à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

III.4 Approche quasi- tridimensionnelles :

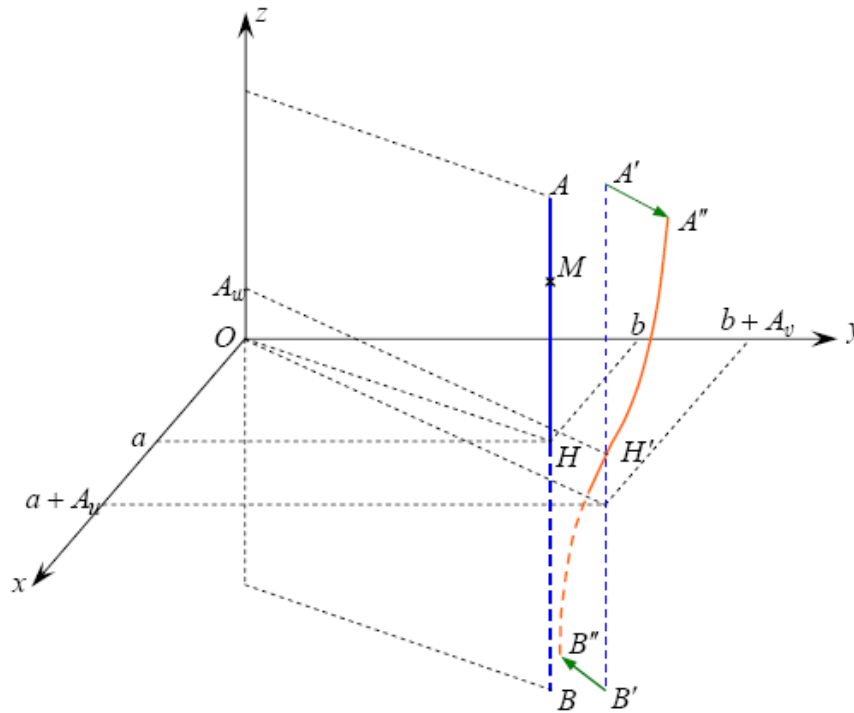


Fig.III.11. Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse, Cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire. De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles considèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [Car, 2001], [Car, 2003], [Car, 2005], et récemment évoluée par Demasi [Dem, 2009a], [Dem, 2009b], [Dem, 2009c], [Dem, 2009d] et [Dem,2009e].

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al [Car, 2011a] et [Car, 2011b] font l'objet. De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures [Mat, 2009], [Tal, 2010], [Red, 2011], ces théories sont lourdes et coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important d'inconnus.

[Talha et al, 2010] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé.

[Jha et al, 2013] ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement. [Reddy, 2011] présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre d'inconnus élevé nécessite un large système d'équations qui conduit aux difficultés de résolution.

Neves et al. [Nev, 2012a], [Nev, 2012b], [Nev, 2013] ont traité des problèmes des plaques en FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par [Zenkour, 2007] et récemment par Mantari et Guedes Soares [Man, 2012], [Man, 2013], elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre. Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. En effet, Thai et Kim [Tha, 2013b] ont présenté plus récemment une théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGM.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre

variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z), alors la cinématique devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.9}$$

III.5 Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente en élasticité bi-dimensionnelle dont le modèle d'ordre supérieur et la théorie raffinée, l'approche par couche, et enfin les théories tridimensionnelles. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

CHAPITRE IV

Étude du Comportement Mécanique des
Plaques « Sandwiches » en FGM en
Utilisant la Théorie d'Ordre Elevé à
Quatre Variables

IV.1 Introduction

Les structures en sandwichs composées d'un noyau lié à deux feuilles faciales sont couramment utilisées dans les véhicules aérospatiaux en raison de leur rigidité en flexion exceptionnelle, de leur faible poids spécifique, de leurs excellentes caractéristiques de vibration et de bonnes propriétés de fatigue. Cependant, la modification soudaine des propriétés du matériau d'une couche à l'autre peut entraîner des concentrations de contraintes qui conduisent souvent à un délaminage. Pour surmonter ce problème, le concept des plaques FGM est proposé. Dans de tels matériaux, deux feuilles faciales sont fabriquées à partir de FGM isotropes tandis que le noyau est constitué d'un matériau homogène isotrope. Grâce à la variation uniforme et continue des propriétés des FGM, la concentration de contrainte qui se trouve dans les structures sandwichs stratifiées est éliminée dans les structures sandwichs FG [Huu-Tai Thai et al, 2014].

Certains chercheurs ont étudié la flexion, le flambement et les vibrations libres des plaques à gradient fonctionnel en utilisant les théories des plaques. La théorie de la déformation la plus fondamentale est la théorie classique des plaques (CPT) qui suppose que la normale au plan médium avant flexion reste perpendiculaire à ce dernier après flexion. Il néglige l'effet de toutes les contraintes transversales et est moins précise. Par conséquent, elle donne des résultats précis pour les plaques minces seulement.

[Feldman E, Aboudi J, 1997], [Javaheri R, Eslami MR., 2002] et [Chi SH, Chung YL, 2006] ont obtenu une réponse statique des FGP (Functionally Graded Plates) en utilisant CPT. L'inconvénient du CPT a été surmonté par la théorie de la déformation de cisaillement (FSDT) de premier ordre proposée par [Reissner E., 1945] et [Mindlin RD, 1951] qui considèrent l'effet de la déformation de cisaillement transversale. Cette théorie ne satisfait pas les conditions aux limites des contraintes sur les surfaces de la plaque et nécessite un facteur de correction de cisaillement. De nombreuses études sur le comportement mécanique des plaques ont été effectuées à l'aide de FSDT voir Réf. [(Mena R., et al, 2012)-(Rashidi MM., et al, 2012)-(Zhao X, et al, 2009)- Moradi S., et al, 2012)]. [Yaghoobi H., et al, 2013] ont présenté des solutions analytiques pour le flambement de plaques sandwichs symétriques avec des feuilles de face FGM fondation élastique basée sur la théorie de la plaque de déformation du cisaillement de premier ordre et soumis à des charges mécaniques, thermiques et thermo-mécaniques. [Reddy JN., et al, 1999] ont utilisé une théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre pour les analyses de flexion et d'étirement pour les plaques axisymétrique

annulaire. Ils ont exprimé des termes classiques en se basant sur la théorie des plaques de Kirchhoff.

Pour éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement, plusieurs théories de plaques de déformation par cisaillement (HSDTs) ont été proposées. La théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre (TSDT) de [Reddy JN., 1984] qui est exempte de tout facteur de correction du cisaillement et qui satisfait l'état de la contrainte de cisaillement transversale nulle aux parties supérieures et inférieures de la plaque. Ses théories sont utilisées par [Reddy JN., 2000], [Ferreira AJM., et al, 2005], [Oktem AS., et al, 2012], [Tran LV, et al, 2013] et [Taj G., et al, 2013].

[(Zenkour AM., Part-1- 2005)-(Zenkour AM., Part-2- 2005)] a étudié en détail la réponse de flexion, le flambement et la vibration libre d'une plaque sandwich FGM simplement appuyée en utilisant la théorie sinusoïdale du cisaillement. [Neves AMA, et al, 2012] ont utilisé la théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour l'analyse linéaire du flambement des plaques sandwichs FGM. Les équations gouvernant le flambement et les conditions aux limites ont été dérivées à l'aide de la Formulation unifiée de Carrera et interpolées par collocation avec des fonctions de base radiale. [Neves AMA, 2013] ont présenté des équations gouvernantes explicites et des conditions aux limites de la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur et axée sur le problème d'étirement de l'épaisseur sur l'analyse statique, des vibrations libres et du flambement des plaques sandwichs FGM par une technique sans maille. Sur la base d'une théorie globale de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur, la fréquence de flexion et la fréquence naturelle des plaques sandwichs soumises à des charges thermomécaniques ont été illustrées par [Shariyat M., 2010].

[Benyoucef, S., et al, 2010] ont analysé la réponse de flexion des plaques épaisses FG reposant sur une fondation élastique en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. En utilisant une théorie trigonométrique de cisaillement des plaques, [Zenkour, A.M. et al, 2010] ont étudié la réponse de flexion des plaques sandwich FG soumises à des charges thermomécaniques.

Différentes théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur sont développées en utilisant cinq fonctions inconnues, la théorie présentée par [Hadji L, et al, 2011], [Houari M.SA., et al, 2011], [Abdelaziz H.H., et al, 2011], [Merdaci S., et al, 2011], [Bourada M., et al, 2012] et [Bennoun, M., et al, 2016] est une nouvelle théorie de la plaque raffinée pour

la réponse au flexion, le flambement et la vibration libre de la plaque sandwich FGM simplement appuyé avec seulement quatre fonctions inconnues. Cette théorie variationnelle, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et entraîne une variation de contrainte de cisaillement transversale de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement à travers l'épaisseur, ce qui permet de satisfaire les conditions de surface exemptes de contraintes de cisaillement. En utilisant la même théorie, Taibi et al.

Ce travail vise à développer une nouvelle théorie simple de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur pour les analyses de flexion, de flambement et de vibration libre des plaques sandwiches FG. La théorie proposée n'a que quatre inconnus et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions aux limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sandwich sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues pour la plaque sandwich avec des feuilles faciales FG et sa précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

Les effets de diverses variables, tels que les rapports d'épaisseur, l'indice de gradient et le type de plaque sandwich sur le flambement, la flexion et la vibration libre de la plaque sandwich FG, sont tous discutés.

IV.2 Enoncé du problème

La géométrie et les dimensions de la plaque rectangulaire en FGM considérée sont représentées sur la (**Figure IV.1**). Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire des déformations infinitésimales d'une plaque élastique en sandwich à trois couches occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$.

La plaque a une longueur a , largeur b , et une épaisseur uniforme h . Le plan médian de la plaque sandwich composée est défini par $z = 0$ et ses plans de délimitation externes étant défini par

$$z = \pm \frac{h}{2} .$$

Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre lame et les couches de faces, et la surface supérieure sont indiquées, respectivement $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 et $h_3 = h/2$. Les couches de faces de la plaque sandwich sont constituées d'un matériau isotrope avec des

propriétés de matériau variant graduellement uniquement dans la direction z (Epaisseur). La couche de noyau est constituée d'un matériau homogène isotrope, comme le montre la (figure IV.1).

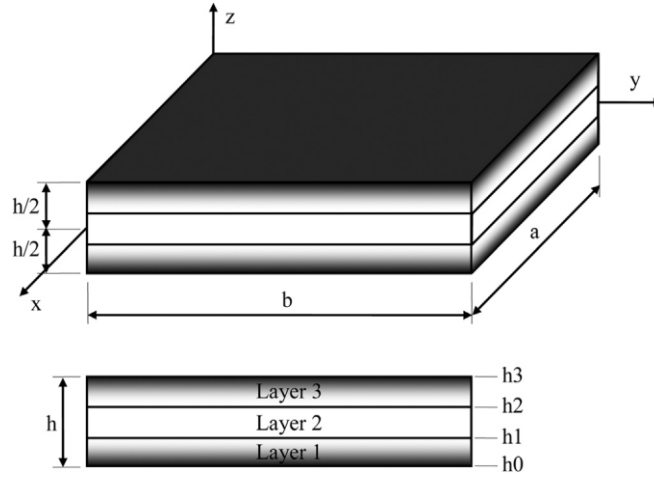


Figure IV.1. Géométrie de la plaque sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM)

Pour la brièveté, le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois nombres, c'est-à-dire "1-0-1", "2-1-2" et ainsi de suite. On suppose que la fraction de volume des FGM obéit à une fonction de loi de puissance selon la direction de l'épaisseur:

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad \text{IV.1.a}$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad \text{IV.1.b}$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad \text{IV.1.c}$$

Où $V^{(n)}$, ($n=1, 2, 3$) désigne la fonction de fraction de volume de la couche n ; k est l'indice de fraction de volume ($0 \leq k \leq +\infty$), qui indique le profil de variation de matériau à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α , sont exprimées par la loi de mélange [Marur P.R, 1999] comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2) V^{(n)} \quad \text{IV.2}$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de FGM de couche n. Notez que P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$, (n=1,2,3)

IV.3 Cinématique :

Dans cette étude, une hypothèse simplificatrice est introduite sur la théorie à ordre élevé conventionnel HSDT afin de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{IV.3}$$

$u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ Sont les cinq inconnus de déplacements du plan médium de la plaque. En considérant que : $\varphi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$

Le champ de déplacement mentionné ci-dessus peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{IV.4}$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et les champs de déplacement peuvent être réécrits comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{IV.5}$$

Où:

$$k_1 = \alpha^2, k_2 = \beta^2,$$

IV.6

Les coefficients A' et B' sont exprimés selon la solution de type Navier et sont donnés par:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, B' = -\frac{1}{\beta^2},$$

IV.7.a

Et

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b},$$

IV.7.b

La fonction de forme $f(z)$ est donnée comme suit:

$$f(z) = z - \frac{h \sinh\left(\frac{10z}{h}\right)}{10 \cosh(5)} + \frac{h}{100}$$

IV.8

On voit que le champ de déplacement dans les équations. (IV.4) et (IV.5) contient seulement quatre inconnus u_0, v_0, w_0 et θ

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}$$

IV.9

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

IV.10.a

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{IV.10.b}$$

IV.4 Relations constitutives :

Les relations constitutives linéaires sont:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad \text{IV.11}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composants de contraintes et de déformations, respectivement.

IV.5 Equations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad \text{IV.12}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δK est la variation de l'énergie cinétique; et δV est la variation du travail.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est exprimée:

$$\delta U = \int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \quad \text{IV.13}$$

En remplaçant les équations. (IV.9) et (IV.11) dans l'équation (IV.13) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.13) peut être réécrit comme :

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{aligned} &N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ &- 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} dA \quad \text{IV.14}$$

Les contraintes résultant N, M et S sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad \text{IV.15a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \quad \text{IV.15b}$$

En utilisant l'équation (IV.11) dans l'équation (IV.15), la résultante de contraintes de la plaque FG peuvent être liées aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad \text{IV.16}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad \text{IV.17a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad \text{IV.17b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad \text{IV.17c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \text{IV.17.d}$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad \text{IV.17.e}$$

Où, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} etc., sont la rigidité de la plaque, définie par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad \text{IV.18.a}$$

Où

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad \text{IV.18.b}$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad \text{IV.18.c}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad \text{IV.18.d}$$

La variation de l'énergie cinétique s'exprime comme

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}_0) \rho(z) dA dz \quad \text{IV.19}$$

$$\delta K = \int_A \left[\begin{aligned} & I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & + J_1 \left[k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] \\ & + K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right] - J_2 \left[k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] \end{aligned} \right] dA \quad \text{IV.20}$$

Où la notation indique la dérivée par rapport à la variable temps \mathbf{t} ; $\rho(\mathbf{z})$ est la densité de masse; et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont des inerties de masse définies comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) dz \quad \text{IV.21}$$

La variation du travail effectué peut s'exprimer comme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA + \int_A (N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y}) dA \quad \text{IV.22}$$

En remplaçant les expressions δU ; δV et δk les équations. (IV.14); (IV.20) et (IV.22) dans l'équation (IV.12) et intégrant par parties et collecter les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, les équations de mouvement suivantes de la plaque sont obtenues:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad \text{IV.23}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \delta w : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & + J_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

En remplaçant l'équation (IV.16) dans l'équation (IV.23), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements comme :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \\ & + k_2 B' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad \text{IV.24.a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{22} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \quad \text{IV.24.b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\
 & + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \quad \text{IV.24.c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \quad \text{IV.24.d} \\
 & - (k_1 A')^2 H_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - [2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - (k_2 B')^2 H_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 & + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

IV.6 La solution Navier pour plaques rectangulaires simplement appuyées :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type d'appui utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte des équations (IV.24) pour une plaque FG simplement appuyée. La plaque est soumise à deux types de chargement, à une charge transversale q et à des forces planes dans deux directions $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$

Les fonctions de déplacement suivantes sont choisies pour satisfaire les conditions limites de la plaque et sont exprimées en série de Fourier :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \Theta_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad \text{IV.25}$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta = \frac{n\pi}{b}$. ω est la fréquence naturelle. U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et θ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer.

La charge transversale q est également étendue dans la série des sinus de Fourier double comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad \text{IV.26}$$

Pour le cas d'une charge distribuée sinusoïdale, nous avons

$$m=n=1 \text{ et } q_{11}=q_0 \quad \text{IV.27}$$

Où : q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En remplaçant les équations. (IV.25) et (IV.26) dans l'équation (IV.24), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + \lambda & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & -I_1\alpha & k_1A'J_1\alpha \\ 0 & I_0 & -I_1\beta & k_2B'J_1\beta \\ -I_1\alpha & -I_1\beta & I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2) & -J_2(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2) \\ k_1A'J_1\alpha & k_2B'J_1\beta & -J_2(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2) & K_2[(k_1A')^2\alpha^2 + (k_2B')^2\beta^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.28}$$

Où :

$$\lambda = N_{cr}(\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2) \quad \text{IV.29}$$

Les coefficients a_{ij} de rigidité sont les suivants :

$$a_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$$

$$a_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$$

$$a_{13} = -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2$$

$$a_{14} = k_1A'C_{11}\alpha^3 + [k_2B'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66}]\alpha\beta^2$$

$$a_{22} = A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2$$

$$a_{23} = -B_{22}\beta^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta$$

$$a_{24} = [k_1A'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66}]\alpha^2\beta + k_2B'C_{22}\beta^3$$

$$a_{33} = D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + k_w + k_p(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$a_{34} = -k_1A'E_{11}\alpha^4 - k_2B'E_{22}\beta^4 - (k_1A' + k_2B')(E_{12} + 2E_{66})\alpha^2\beta^2$$

$$a_{44} = (k_1A')^2G_{11}\alpha^4 + (k_2B')^2G_{22}\beta^4 + [2k_1A'k_2B'G_{12} + (k_1A' + k_2B')^2G_{66}]\alpha^2\beta^2 + (k_1A')^2F_{55}\alpha^2 + (k_2B')^2F_{44}\beta^2$$

IV.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'établir les considérations de la présente théorie. C'est une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur pour les analyses de flexion, de flambement et de vibration libre des plaques sandwiches FG, elle présente une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Le modèle est aussi capable de tenir en compte de dépassement de la limite des théories classiques et/ou de premier ordre des plaques en FGM, et possède un nombre réduit d'inconnus.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques pour la plaque sandwich avec des feuilles faciales FG en se basant sur la méthode de Navier en doubles séries de Fourier. Cette méthode nous offre des solutions aux problèmes d'une plaque en analyse statique et dynamique (vibration libre).

CHAPITRE V

Résultats et Discussions

V.1 Introduction :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier la précision de la théorie actuelle pour l'analyse de la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques sandwiches FG simplement appuyées.

V.2 Résultats numériques :

Sauf indication contraire, une plaque sandwich de type Al / Al₂O₃, simplement appuyée, composée de couche de face en aluminium (en métal) et âme en alumine (en céramique) est étudiée. POUR L'ANALYSE A LA FLEXION, ON CONSIDERE UNE PLAQUE SOUMISE A UNE CHARGE SINUSOÏDALE.

Les propriétés de matériau suivantes sont utilisées:

- Métal (aluminium): $E_M = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 1/3$; $\rho_M = 2702 \text{ Kg} / \text{m}^3$.
- Céramique (Alimina): $E_C = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 1/3$; $\rho_C = 3800 \text{ Kg} / \text{m}^3$.

Plusieurs types de plaques sandwiches sont présentés en fonction de l'épaisseur de la couche centrale entièrement céramique tandis que la surface inférieure et supérieure de la plaque est riche en métal.

- La plaque sandwich (1-0-1) FGM: la plaque est symétrique et ne comporte que deux couches FGM à épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi : $h_1 = h_2 = 0$.
- La plaque sandwich (1-1-1) FGM: ici la plaque est symétrique et est faite de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h / 6$, $h_2 = h / 6$.
- La plaque sandwich (2-1-2) FGM: la plaque est symétrique et on a: $h_1 = -h / 10$, $h_2 = h / 10$.
- La plaque sandwich (2-2-1) FGM: La plaque n'est pas symétrique et nous avons: $h_1 = -h / 10$, $h_2 = 3h / 10$.
- La plaque sandwich (1-2-1) FGM: la plaque est symétrique et nous avons : $h_1 = -h / 4$, $h_2 = h / 4$.

Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\hat{w} = \frac{10E_0h}{q_0a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \bar{\sigma}_x(z) = \frac{10h^2}{q_0a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)$$

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{100E_0 h^3} \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$$

Lorsque les valeurs de référence sont prises comme : $E_0 = 1GPa$ $\rho_0 = 1Kg / m^3$

Pour illustrer la précision de l'approche générale décrite dans les sections précédentes, des comparaisons sont faites avec des solutions obtenues en utilisant d'autres théories de déformation du cisaillement issues de la littérature.

V.3 Analyse de la flexion :

L'âme choisie pour la plaque sandwich FG pour cette étude est la céramique (**Zirconia, ZrO₂**). Le module de Young et le coefficient de Poisson sont respectivement de **151 GPa** et **0,3**.

Afin de prouver la validité de la théorie actuelle de la plaque de déformation de cisaillement à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus de cette théorie et ceux obtenus par [Zenkour AM.,2005] sur la base de la théorie de déformation du cisaillement sinusoïdal (SSDT), la théorie de la déformation du cisaillement trigonométrique (TSDT), la théorie conventionnelle de déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) et la nouvelle déformation par cisaillement de premier ordre développée par [Huu-Tai Thai, et al, 2004] comme indiqué dans les tableaux V.1, V.2, V.3

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau V.1: Flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées ($a / h = 10$).

p	Théorie	Schema				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT, [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	TSDT, [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Huu-Tai Thai et al 2014.	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Présente	0.1958	0.1958	0.1958	0.1958	0.1958
1	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3235	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3236	0.3063	0.2920	0.2809	0.2709
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3248	0.3075	0.2930	0.2817	0.2717
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.3237	0.3064	0.2920	0.2809	0.2710
	Présente	0.3236	0.3063	0.2919	0.2801	0.2707
2	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3732	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3734	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3751	0.3541	0.3344	0.3174	0.3037
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.3737	0.3526	0.3330	0.3163	0.3027
	Présente	0.3736	0.3525	0.3330	0.3161	0.3025
5	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4091	0.3916	0.3713	0.3495	0.3347
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4093	0.3918	0.3715	0.3496	0.3348
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4112	0.3942	0.3736	0.3512	0.3363
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.4101	0.3927	0.3720	0.3501	0.3350
	Présente	0.4097	0.3924	0.3718	0.3497	0.3348
10	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4175	0.4037	0.3849	0.3492	0.3412
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4177	0.4041	0.3855	0.3622	0.3482
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4192	0.4066	0.3879	0.3640	0.3500
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.3988	0.3894	0.3724	0.3492	0.3361
	Présente	0.4179	0.4048	0.3861	0.3623	0.3484

Tableau V.2: Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ (h / 2) des plaques carrées (a / h = 10).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758
	Présente	1.9882	1.9882	1.9882	1.9882	1.9882
1	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.5820	1.4986	1.4289	1.3234	1.3259
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.5792	1.4959	1.4262	1.3206	1.3231
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.5325	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.5324	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Présente	1.5404	1.4591	1.3902	1.2847	1.2879
2	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.8245	1.7241	1.6303	1.4739	1.4828
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.8217	1.7214	1.6275	1.4710	1.4799
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Présente	1.7796	1.6829	1.5900	1.4329	1.4431
5	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.9957	1.9155	1.8184	1.6148	1.6411
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.9927	1.9130	1.8158	1.6118	1.6381
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Présente	1.9458	1.8733	1.7778	1.5720	1.6006
10	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	2.0336	1.9731	1.8815	1.6198	1.6485
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	2.0304	1.9713	1.8838	1.6666	1.7042
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	1.9678	1.9217	1.8375	1.6165	1.6584
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.9678	1.9217	1.8375	1.6165	1.6584
	Présente	1.9787	1.9305	1.8457	1.6242	1.6663

Tableau V.3: Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0)$ des plaques carrées ($a/h = 10$).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387
	Présente	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027
1	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2991	0.2777	0.2681	0.2668	0.2600
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2920	0.2710	0.2612	0.2595	0.2526
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2610	0.2432	0.2326	0.2276	0.2206
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.2566	0.2593	0.2602	0.2582	0.2593
	Présente	0.2577	0.2389	0.2287	0.2254	0.2184
2	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3329	0.2942	0.2781	0.2763	0.2654
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3262	0.2884	0.2719	0.2694	0.2583
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.2973	0.2675	0.2508	0.2432	0.2326
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.2552	0.2617	0.2650	0.2624	0.2655
	Présente	0.2924	0.2593	0.2424	0.2370	0.2260
5	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3937	0.3193	0.2915	0.2890	0.2715
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3863	0.3145	0.2864	0.2827	0.2651
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3454	0.2973	0.2721	0.2610	0.2460
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.2468	0.2576	0.2649	0.2627	0.2694
	Présente	0.3465	0.2882	0.2609	0.2523	0.2358
10	SSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4415	0.3364	0.2953	0.2967	0.2768
	TSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.4321	0.3324	0.2957	0.2908	0.2690
	FSDT [Zenkour AM.2005, Partie1]	0.3728	0.3132	0.2830	0.2700	0.2526
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.2419	0.2534	0.2627	0.2611	0.2698
	Présente	0.3818	0.3057	0.2717	0.2609	0.2413

A partir de ces tableaux, on peut conclure que les résultats de cette théorie présentent un bon accord avec d'autres théories, à l'exception du cas de contrainte de cisaillement transversale où une petite différence entre les résultats est observée (voir tableau V.3). Ceci est dû aux différentes approches utilisées pour prédire les contraintes transversales de cisaillement.

L'influence de l'indice de fraction de volume "p" sur la variation de la flèche est indiquée à la (Figure V.1) pour différents types de plaques sandwiches avec un rapport entre épaisseur a / h = 10. On peut voir à partir de la (Figure V.1) que la flèche des plaques symétriques est supérieure à celle non symétrique et, en général, la flèche augmente à mesure que l'indice de fraction de volume "p" augmente.

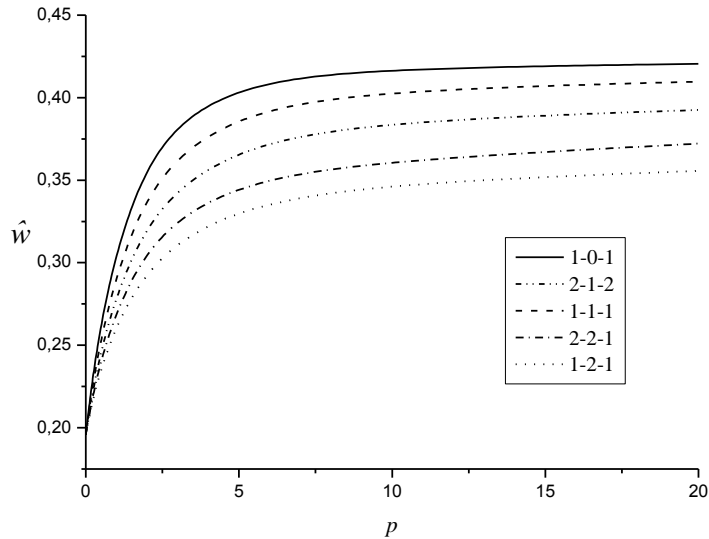
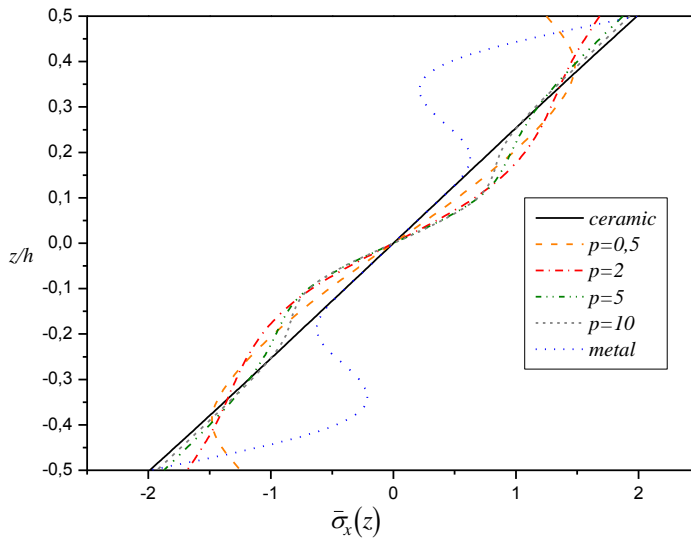
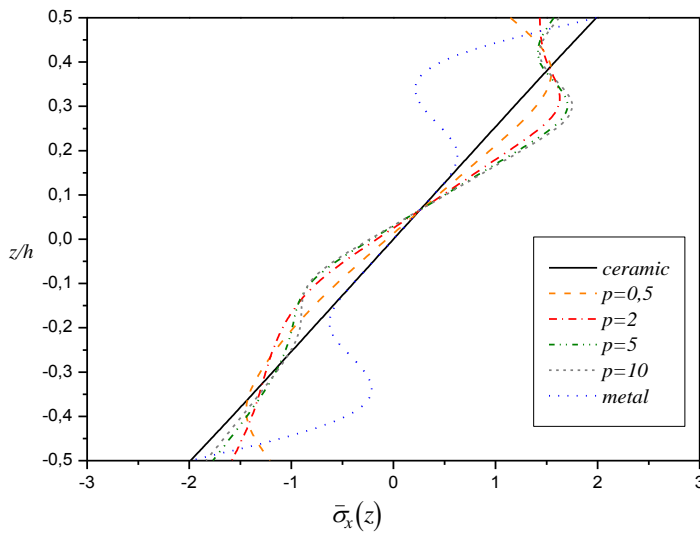


Fig. V.1. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la déformation adimensionnelle \hat{w} des plaques carrées (a / h = 10).

Sur la (Figure V.2 (a) et (b)), la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x(z)$ est de type traction à la surface supérieure et compression à la surface inférieure. Pour la plaque sandwich symétrique et asymétrique, la plaque céramique homogène ou la plaque métallique donne les contraintes de compression maximales à la surface inférieure et les contraintes de traction maximales sur la surface supérieure de la plaque sandwich.



(a) : 2-1-2

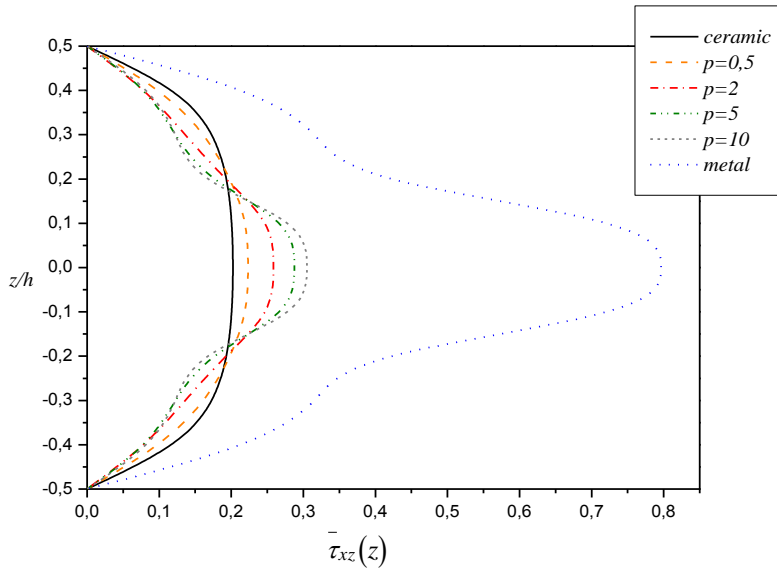


(b): 2-2-1

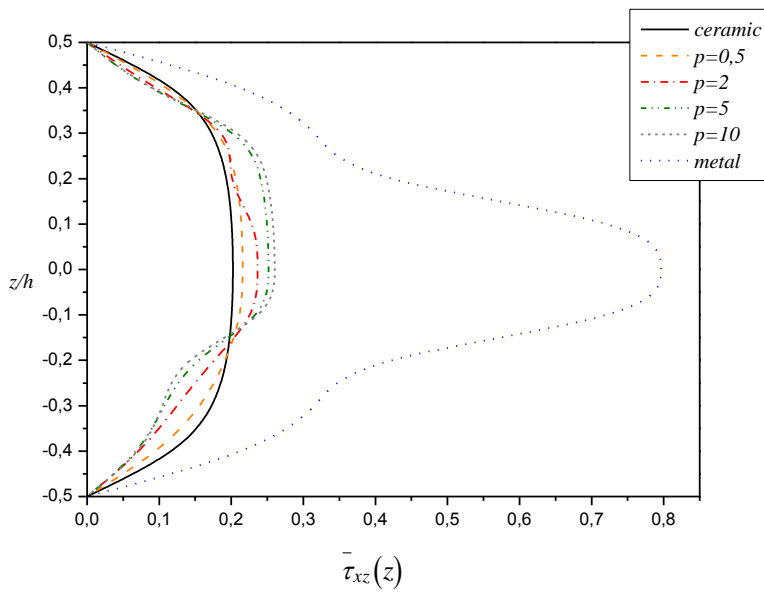
Figure V.2. Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ adimensionnelle à travers l'épaisseur des plaques carrées ($a/h = 10$).

La (Figure V.3) montre la variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\sigma}_{xz}$ adimensionnel à travers l'épaisseur pour les plaques sandwichs symétriques et asymétriques. Il est noté que la variation des contraintes de cisaillement n'est pas parabolique dans les deux cas. Les contraintes les plus élevées sont obtenues pour la plaque métallique homogène et la plus basse pour la céramique. En outre, l'augmentation de l'indice de loi de puissance "p" a

entraîné une réduction des contraintes sur la face de la plaque qui évite une éventuelle délamination.



2-1-2



2-2-1

Figure V.3. Variation de la contrainte de cisaillement transversale sans dimension $\bar{\sigma}_{xz}$ dans l'épaisseur des plaques carrées ($a/h = 10$).

V.4 Analyse du flambement

Tout d'abord, pour le but de la vérification, les résultats calculés par la théorie actuelle de la plaque de déformation de cisaillement à quatre variables sont comparés à ceux obtenus par la théorie de déformation du cisaillement (HSDT) développée par El Meiche et al. [El Meiche N., et al, 2001], Zenkour [Zenkour AM., 2005] basé sur le SSDT, TSDT et la théorie FSDT développé par Huu-Tai Thai et al. [Huu-Tai Thai, et al, 2014]. Les comparaisons sont données dans les tableaux V.4 et V.5 pour la compression uniaxiale et biaxiale respectivement.

Tableau V.4: Charge de flambement adimensionnelle \bar{N} des plaques carrées sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, a / h = 10$).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [El Méiche et al 2011]	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	Huu-Tai Thai et al 2014	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	Présent	13.0236	13.0236	13.0236	13.0236	13.0236
0.5	HSDT [El Méiche et al 2011]	7.3638	7.9405	8.4365	8.8103	9.2176
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	7.3657	7.9420	8.4371	8.8104	9.2167
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	7.3373	7.9132	8.4103	8.7867	9.1952
	Huu-Tai Thai et al 2014	7.3634	7.9403	8.4361	8.8095	9.2162
	Présent	7.3664	7.9442	8.4423	8.8182	9.2277
1	HSDT [El Méiche et al 2011]	5.1663	5.8394	6.4645	6.9495	7.5072
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	5.1685	5.8412	6.4654	6.9498	7.5063
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	5.1424	5.8138	6.4389	6.9257	7.4837
	Huu-Tai Thai et al 2014	5.1648	5.8387	6.4641	6.9485	7.5056
	Présent	5.1651	5.8392	6.4664	6.9536	7.5138
5	HSDT [El Méiche et al 2011]	2.6568	3.0414	3.5787	4.1116	4.7346
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.6601	3.0441	3.5806	4.1129	4.7349
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.6384	3.0225	3.5596	4.0929	4.7148
	Huu-Tai Thai et al 2014	2.6415	3.0282	3.5710	4.1024	4.7305
	Présent	2.6518	3.0369	3.5756	4.1103	4.7351
10	HSDT [El Méiche et al 2011]	2.4857	2.7450	3.1937	3.7069	4.2796
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.4893	2.7484	3.1946	3.1457	4.3818
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.4690	2.7263	3.1752	3.6889	4.2604
	Huu-Tai Thai et al 2014	2.4666	2.7223	3.1795	3.6901	4.2728
	Présent	2.4808	2.7397	3.1898	3.7048	4.2789

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau V.5: Charge de flambement adimensionnelle \bar{N} des plaques carrées sous compression biaxiale ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, $a/h = 10$).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [El Méiche et al 2011]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	Huu-Tai Thai et al 2014	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	Présente	6.5118	6.5118	6.5118	6.5118	6.5118
0.5	HSDT [El Méiche et al 2011]	3.6819	3.9702	4.2182	4.4051	4.6088
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	3.6828	3.9710	4.2186	4.4052	4.6084
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	3.6687	3.9566	4.2052	4.3934	4.5976
	Huu-Tai Thai et al 2014	3.6817	3.9702	4.2181	4.4047	4.6081
	Présente	3.6832	3.9721	4.2212	4.4091	4.6138
1	HSDT [El Méiche et al 2011]	2.5832	2.9197	3.2323	3.4748	3.7536
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.5842	2.9206	3.2327	3.4749	3.7531
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	2.5712	2.9069	3.2195	3.4629	3.7418
	Huu-Tai Thai et al 2014	2.5824	2.9193	3.2320	3.4742	3.7528
	Présente	2.5826	2.9196	3.2332	3.4768	3.7569
5	HSDT [El Méiche et al 2011]	1.3284	1.5207	1.7894	2.0558	2.3673
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.3300	1.5220	1.7903	2.0564	2.3674
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.3291	1.5213	1.7898	2.0561	2.3673
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.3192	1.5113	1.7798	2.0464	2.3574
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.3208	1.5141	1.7855	2.0512	2.3652
	Présente	1.3259	1.5185	1.7878	2.0551	2.3676
10	HSDT [El Méiche et al 2011]	1.2429	1.3725	1.5969	1.8534	2.1398
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2448	1.3742	1.5973	1.8538	2.1400
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2345	1.3631	1.5876	1.8445	2.1302
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.2333	1.3612	1.5897	1.8450	2.1364
	Présente	1.2404	1.3699	1.5949	1.8524	2.1395

On constate que les résultats actuels pour les charges critiques de flambement sont en accord avec les résultats publiés pour des plaques sandwiches FG carrées simplement appuyées et ceci pour la sollicitation uniaxial et biaxiale.

La (Figure V.4) représente l'effet de l'indice de puissance " p " sur la charge de flambement critique adimensionnel \bar{N} pour différentes configurations de plaques sandwiches. On constate que l'augmentation des valeurs de l'indice de loi de puissance a conduit à réduire la charge critique de flambement. Il est également montré que la variation de la charge de flambement critique maintient une forme plus ou moins constante après une valeur de $p = 7$ et ceci pour toute la configuration de la plaque sandwich.

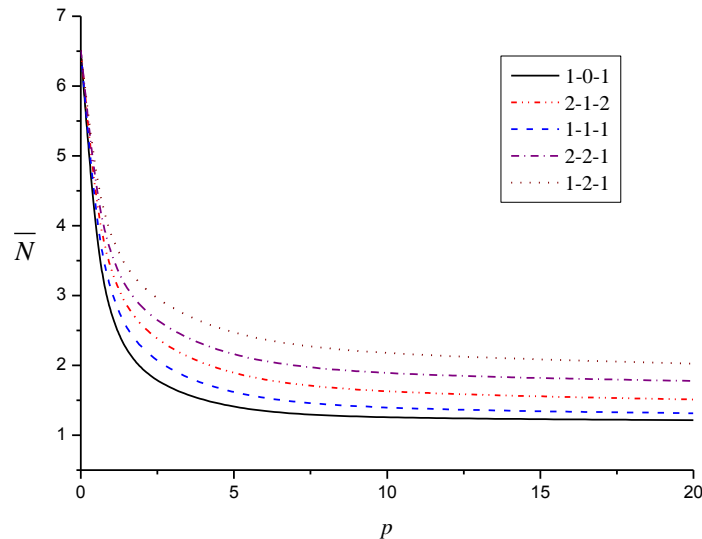


Figure V.4. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge de flambement \bar{N} critique adimensionnelle des plaques carrées ($a/h = 10$).

V.5 Analyse de la vibration libre :

D'autres exemples pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la fréquence naturelle des plaques sandwiches FG sont présentés dans les tableaux V.6 - V.8.

Le tableau V.6 donne une comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ adimensionnelle des plaques carrées ($a/h = 10$) entre les résultats actuels et ceux des solutions tridimensionnelles (3D) [Li, Q., et al, 2008], HSDT [El Meiche N., et al, 2011], SSDT, TSDT et FSDT [Zenkour AM., 2005] et FSDT [Huu-Tai Thai, et al, 2014]. Un excellent accord entre les différents résultats est obtenu, en particulier entre la théorie actuelle et la 3D élasticité de Li et al. [Li, Q.,

et al, 2008]. Il est a rappelé que la théorie actuelle est basée sur l'élasticité 2D. Cela démontre la précision de la théorie actuelle.

Tableau V.6: Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées (a / h = 10).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	3D [Li, Q et al 2008]	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268
	HSDT [El Méiche et al 2011]	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244
	Présente	1.8257	1.8257	1.8257	1.8257	1.8257
0.5	3D [Li, Q et al 2008]	1.4461	1.4861	1.5213	1.5493	1.5767
	HSDT [El Méiche et al 2011]	1.4442	1.4841	1.5192	1.5471	1.5746
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.4444	1.4842	1.5193	1.5520	1.5745
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.4442	1.4841	1.5192	1.5520	1.5727
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.4417	1.4816	1.5170	1.5500	1.5727
	Huu-Tai Thai et al. [1]	1.4442	1.4841	1.5192	1.5471	1.5745
	Présente	1.4448	1.4847	1.5199	1.5481	1.5756
1	3D [Li, Q et al 2008]	1.2447	1.3018	1.3552	1.3976	1.4414
	HSDT [El Méiche et al 2011]	1.2431	1.3000	1.3533	1.3956	1.4394
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2434	1.3002	1.3534	1.4079	1.4393
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2432	1.3001	1.3533	1.4079	1.4393
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	1.2403	1.2973	1.3507	1.4056	1.4372
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.2429	1.3000	1.3533	1.3956	1.4393
	Présente	1.2434	1.3004	1.3538	1.3964	1.4403
5	3D [Li, Q et al 2008]	0.9448	0.9810	1.0453	1.1098	1.1757
	HSDT [El Méiche et al 2011]	0.9457	0.9817	1.0446	1.1088	1.1740
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9463	0.9821	1.0448	1.1474	1.1740
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9460	0.9818	1.0447	1.1473	1.1740
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9426	0.9787	1.0418	1.1447	1.1716
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.9431	0.9796	1.0435	1.1077	1.1735
	Présente	0.9455	0.9815	1.0446	1.1092	1.1744
10	3D [Li, Q et al 2008]	0.9273	0.9408	0.9952	1.0610	1.1247
	HSDT [El Méiche et al 2011]	0.9281	0.9428	0.9954	1.0608	1.1231
	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9288	0.9433	0.9952	1.0415	1.1346
	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9284	0.9430	0.9955	1.1053	1.1231
	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	0.9251	0.9396	0.9926	1.1026	1.1207
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.9246	0.9390	0.9932	1.0587	1.1223
	Présente	0.9279	0.9424	0.9952	1.0611	1.1234

Dans le tableau V.7, nous présentons une comparaison des dix premières fréquences $\bar{\omega}$ des plaques carrées. Les fréquences sont considérées pour « $a / h = 10, p = 2$ » et pour deux types de plaques sandwiches FGM symétriques (1-2-1) et non symétriques (2-2-1). Encore une fois, un bon accord entre les résultats est obtenu pour tous les modes de vibration qui confirment la précision de la théorie actuelle.

Tableau V.7: Les dix premières fréquences adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées ($a / h = 10, p = 2$).

Schéma	Mode (m,n)	Théorie					Présente
		HSDT [El Méiche et al 2011]	SSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	TSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	FSDT [Zenkour AM 2005 partie 2]	[Huu-Tai Thai et al 2014]	
1-2-1	1 (1,1)	1.3025	1.3024	1.3025	1.3002	1.3023	1.3032
	2 (1,2)	3.1573	3.1569	3.1570	3.1445	3.1563	3.1602
	3 (2,2)	4.9098	4.9085	4.9088	4.8802	4.9079	4.9161
	4 (1,3)	6.0289	6.0262	6.0267	5.9849	6.0262	6.0378
	5 (2,3)	7.6415	7.6360	7.6367	7.5722	7.6384	7.6556
	6 (1,4)	9.6847	9.6712	9.6723	9.5728	9.6811	9.7062
	7 (3,3)	10.1782	10.1619	10.1631	10.0542	10.1746	10.2018
	8 (2,4)	11.1464	11.1232	11.1246	10.9961	11.1430	11.1742
	9 (3,4)	13.4665	13.4176	13.4194	13.2380	13.4640	13.5057
	10 (4,4)	16.5069	16.3982	16.4004	16.1372	16.5076	16.5635
2-2-1	1 (1,1)	1.2438	1.2678	1.2678	1.2652	1.2436	1.2444
	2 (1,2)	3.0170	3.0738	3.0735	3.0597	3.0163	3.1094
	3 (2,2)	4.6946	4.7807	4.7800	4.7482	4.6932	4.6995
	4 (1,3)	5.7666	5.8702	5.8692	5.8226	5.7648	5.7739
	5 (2,3)	7.3132	7.4400	7.4385	7.3664	7.3110	7.3239
	6 (1,4)	9.2744	9.4255	9.4232	9.3120	9.2719	9.2917
	7 (3,3)	9.7485	9.9044	9.9018	9.7801	9.7459	9.7657
	8 (2,4)	10.6789	10.8426	10.8395	10.6959	10.6764	10.7003
	9 (3,4)	12.9101	13.0826	13.0781	12.8754	12.9084	12.9389
	10 (4,4)	15.8376	15.9939	15.9870	15.6935	15.8383	15.8776

Afin de vérifier l'exactitude de la présente méthode pour le cas de plaques épaisses, nous présentons dans le tableau V.8 une comparaison entre la fréquence fondamentale adimensionnelle de cette théorie et celle de la littérature. Deux cas de plaques sandwiches sont envisagés, âme céramique (hardcore) et âme métallique (softcore). La fréquence fondamentale adimensionnel est considérée pour $p = 0, 0.5, 1, 5, 10$, et pour différentes configurations de la plaque sandwich.

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

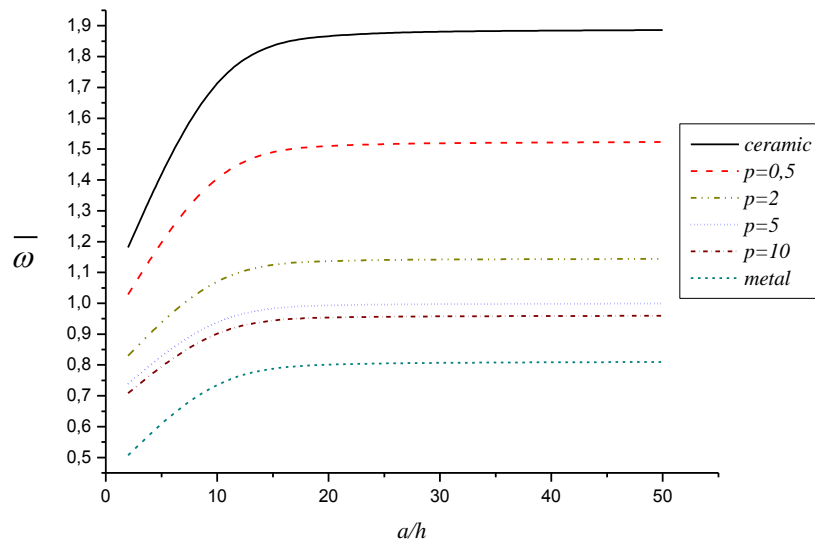
Tableau V.8: Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques d'épaisseur carrée (a / h = 5).

p	Théorie	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
Hardcore (Ame céramique rigide)						
0	3D [Li, Q et al 2008]	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697
	Présente	1.6737	1.6737	1.6737	1.6737	1.6737
0.5	3D [Li, Q et al 2008]	1.3536	1.3905	1.4218	1.4454	1.4694
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.3473	1.3841	1.4152	1.4386	1.4626
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.3395	1.3764	1.4081	1.4326	1.4571
	Présente	1.3484	1.3854	1.4170	1.4410	1.4656
1	3D [Li, Q et al 2008]	1.1749	1.2292	1.2777	1.3143	1.3534
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.1691	1.2232	1.2714	1.3078	1.3467
	Huu-Tai Thai et al. [1] (k=5/6)	1.1607	1.2145	1.2632	1.3007	1.3403
	Présente	1.1696	1.2236	1.2724	1.3095	1.3493
5	3D [Li, Q et al 2008]	0.8909	0.9336	0.9980	1.0561	1.1190
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.8853	0.9286	0.9916	1.0488	1.1118
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	0.8836	0.9256	0.9862	1.0447	1.1056
	Présente	0.8916	0.9335	0.9941	1.0525	1.1139
10	3D [Li, Q et al 2008]	0.8683	0.8923	0.9498	1.0095	1.0729
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.8599	0.8860	0.9428	1.0012	1.0648
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	0.8613	0.8881	0.9406	1.0006	1.0596
	Présente	0.8687	0.8961	0.9484	1.0083	1.0677
Softcore (Ame métallique flexible)						
0	3D [Li, Q et al 2008]	0.8529	0.8529	0.8529	0.8529	0.8529
	Huu-Tai Thai et al 2014	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491
	Présente	0.8519	0.8519	0.8519	0.8519	0.8519
0.5	3D [Li, Q et al 2008]	1.3789	1.3206	1.2805	1.2453	1.2258
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.3686	1.3115	1.2729	1.2380	1.2185
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.4242	1.3816	1.3423	1.2969	1.2766
	Présente	1.4027	1.3526	1.3095	1.2683	1.2426
1	3D [Li, Q et al 2008]	1.5090	1.4333	1.3824	1.3420	1.3213
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.4915	1.4156	1.3702	1.3302	1.3104
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.5626	1.5237	1.4835	1.4278	1.4101
	Présente	1.5418	1.4903	1.4414	1.3904	1.3605
5	3D [Li, Q et al 2008]	1.6587	1.5801	1.5028	1.4601	1.4267
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.6305	1.5125	1.4589	1.4195	1.4026
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.6774	1.6718	1.6491	1.5895	1.5876
	Présente	1.6730	1.6525	1.6157	1.5577	1.5331
10	3D [Li, Q et al 2008]	1.6728	1.6091	1.5267	1.4831	1.4410
	Huu-Tai Thai et al 2014	1.6495	1.5196	1.4642	1.4266	1.4101
	Huu-Tai Thai et al 2014, (k=5/6)	1.6778	1.6827	1.6672	1.6100	1.6130
	Présente	1.6776	1.6688	1.6393	1.5826	1.5624

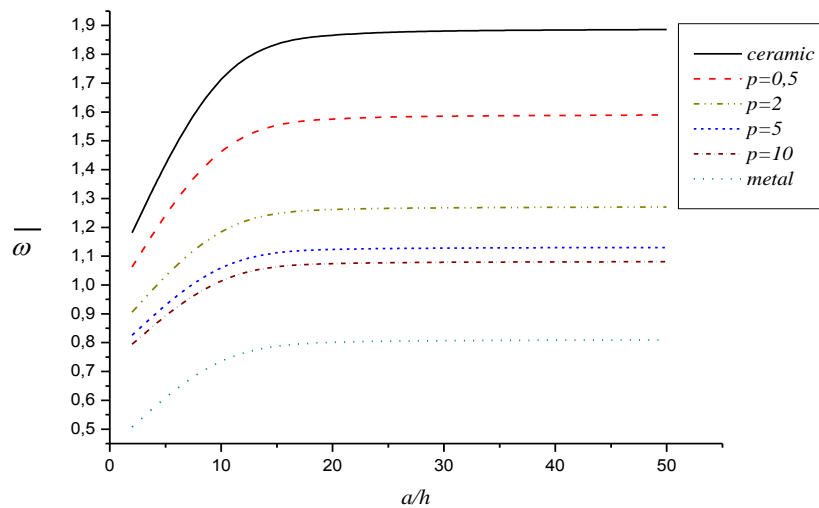
La théorie actuelle donne une bonne prédiction de la fréquence des plaques sandwiches FG à la fois hardcore (rigide) et softcore (flexible). De plus, on constate que la théorie actuelle prédit la

fréquence fondamentale avec le même degré de précision que celui des solutions d'élasticité 3D.

La (**figure V.5**) illustre la variation de la fréquence naturelle fondamentale en fonction de l'épaisseur des plaques sandwiches en FG carrées simplement appuyées. Dans les deux cas, symétrique et asymétrique, on a observé une augmentation rapide de la fréquence naturelle fondamentale jusqu'à ce que la valeur de $a/h = 20$, à partir de cette valeur, la plaque devient mince, la fréquence naturelle tend à conserver une forme plus ou moins constante.



2-1-2



2-2-1

Figure V.5. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées avec un rapport d'épaisseur différent a/h .

La (**figure V.6**) montre les effets de l'indice de puissance " p " sur la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées. L'augmentation de l'indice de la loi de puissance réduira la rigidité de la plaque due à une grande partie du métal par rapport à la partie céramique et, par conséquent, entraînera une réduction de la fréquence naturelle.

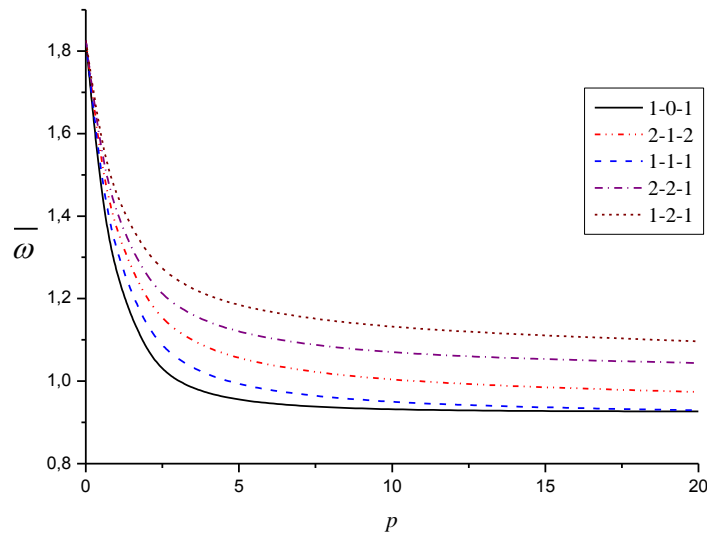


Figure V.6. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées ($a/h = 10$).

V.6 Conclusion :

L'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration de la plaque sandwich à gradient fonctionnel est réalisée dans la présente étude par une nouvelle théorie de la plaque de déformation par cisaillement à quatre variables. La théorie vérifie en soi l'état des contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sandwich.

Les résultats générés dans le présent travail pour diverses analyses sont comparés aux résultats existants. La comparaison prouve la précision de la théorie de la déformation du cisaillement actuellement considérée et, par conséquent, elle peut être utilisée avec succès pour les analyses structurelles de la plaque sandwich.

Conclusion Générale

Et

Perspective

Conclusion Générale et Perspective

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et des structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate permettant d'analyser les plaques en FGM avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

L'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration de la plaque sandwich à gradient fonctionnel est réalisée dans la présente étude par une nouvelle théorie de la plaque de déformation par cisaillement à quatre variables.

La théorie vérifie en soi l'état des contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sandwich. Les résultats générés dans le présent travail pour diverses analyses sont comparés aux résultats publiés. La comparaison prouve la précision de la théorie de la déformation du cisaillement actuellement considérée et, par conséquent, elle peut être utilisée avec succès pour les analyses structurelles de la plaque sandwich.

L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement où un excellent accord a été observé. L'étude paramétrique menée a permis de souligner les effets des différents paramètres influant la réponse totale des plaques FGM.

Les structures sandwichs en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyses adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

En perspective, il est prévu de proposer de nouveaux champs de déplacement pour l'étude de la réponse globale des plaques FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis, sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique).

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des différents chargement.

Références

Bibliographiques

Références bibliographiques

-A-

Abdizadeh.H., (1997), Elaboration et caractérisation de composites «composites laminaires tricouches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997, 212 P.

Abdelaziz H., Atmane H.A., Mechab I., Boumia L., Tounsi A, Adda Bedia E.A, « Analyse statique de plaques sandwich à gradient fonctionnel en utilisant une théorie raffinée efficace et simple ». Menton. J. Aeronaut., 2011, 24: 434-448.

Afaq et al, (2003), K.S. Afaq M. Karama & Mistou S. « Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches ». Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

Aicha Bessaim, Mohammed SA Houari, Abdelouahed Tounsi, SR Mahmoud et El Abbes Adda Bedia, "Une nouvelle théorie de déformation et de déformation normale de l'ordre supérieur pour l'analyse vibratoire statique des plaques sandwich avec des feuilles de face isotropes fonctionnellement classées" J. of Sand. Struct. et Mat., 2013,15 (6), 671-703.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. et Tounsi, A., "Une théorie raffinée efficace et simple pour le flambement et la vibration libre de plaques sandwich à gradient exponentiel dans diverses conditions aux limites", J. Sandw. Struct. Mater., 2014, 16 (3), 293-318.

Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A, (2010). "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121.

Ait Atmane H, (2011). Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement, 2011.

Ameur M., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia, E.A. (2011). "A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations." KSCE Journal of Civil Engineering., 15(8), 1405-1414.

Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A., (2009), Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct* 2009; 18(8):085015.

Anné G., Vanmeensel K., Vleugels J., (2004), Electrophoretic deposition as a near net shaping technique for functionally graded biomaterials, *Mat. Sci. Forum*, 492–493, 213–218.

Anné G, Vleugels J et O Van der biest., (2006), Katholieke University Leuven, Belgium *Functionally graded ceramics* Woodhead Publishing Limited, 2006.

-B-

Baron C., Naili S, (2008), Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue écanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.

Benachour A., Tahar, H.D., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A (2011). "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient." *Composites: Part B.*, 42, 1386–1394.

Bennoun, M., Houari, MSA, Tounsi, A., "Une nouvelle théorie des plaques raffinées variables pour l'analyse des vibrations des plaques sandwich à gradient fonctionnel", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, 23 (4), 423 - 431.

Beraniè S., (2005), „Densification of step graded Al₂O₃–ZrO₂ composites“, *Mat.Sci. Forum*, 492–493, 207–212.

Bernhardt R., Meyer-Olbersleben F., Kieback B., (1999), „The influence of hydrodynamic effects on the adjustment of gradient patterns through gravity sedimentation of polydisperse particle systems in newtonian and viscoelastic fluid“, *Mat. Sci. Forum*, 308–311:31–35.

Benveniste Y, A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mat.*6 (1987) 147-157.

Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H. et Adda Bedia, EA "Cintrage de plaques épaisses classées fonctionnellement reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak", *Mech. Compos. Mater.*, 2010, 46 (4), 425-434.

Boch P., Chartier T., Huttepain M; (1986), Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192, 1986.

Bohidar S. K., Sharma R. & Mishra P. R. Functionally Graded Materials: A Critical Review. International Journal of Research 1, 289-301 (2014).

Bourada M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., «Une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich à gradient fonctionnel». J. Sandw. Struct. Mater., 2012,14: 5-33.

-C-

Cai P.Z., Green D.J., Messing G.L., (1997a), Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 1. Experimental observations of processing defects□, J.Am. Ceram Soc., 80(8), 1929–1939.

Cai P.Z., Green D.J., Messing G.L., (1997b), Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 2. Viscoelastic stress computation□, J. Am. Ceram. Soc., 80(8), 1940–1948.

Carrera E., (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.

Carrera E, (2001). Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. Appl. Mech. Revs. 54 (2001) 301-329.

Carrera E, (2003). Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. Arch. Comp. Meth. Eng. 10 (2003) 215-296.

Carrera E, A. (2005). Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. Compos. Struct. 69 (2005) 271-293.

Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M. (2011). "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells." Composites: Part B., 42, 123–133.

Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. (2011a). Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* 42 (2011)123-133.

Carrera E, Brischetto S, Nali P. (2011b). Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis, Wiley, New York, USA (2011).

Chabot A, (1997). Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhDthesis, ENPC, 1997.

Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539,2003.

Chan S.H. (2001), Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.

Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

Chi, S.-H. & Chung, Y.-L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures* 43, 3657-3674 (2006).

Chu, J., Ishibashi, H., Hayashi, K., Takebe, H., Morinaga, K., (1993), „Slip casting of continuous functionally gradient material”, *J. Ceram. Soc. Japan*, 101, 818–820.

-D-

Delale. F, Erdogan. F. (1983), —The crack problem for a non homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

Demasi L. (2009a), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* 87 (2009) 1-11.

DEMASI L. (2009B), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos. Struct.* 87 (2009) 183-194.

DEMASI L. (2009C), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories. Compos. Struct. 87 (2009)195-205.

DEMASI L. (2009D), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. Compos. Struct. 88 (2009) 1-16.

DEMASI L. (2009E), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories. Compos. Struct. 87 (2009) 12-22.

DI SCIUVA M. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. Journal of AppliedMechanics, vol. 54, pages 589(596, 1987).

Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H. (1993), "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", Journal of Applied Physics, 74, 1321-1326.

-E-

El Meiche N., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia EA. "Une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de la plaque sandwich à gradient fonctionnel". Int. J. Mech. Sci., 2011, 53, 237-247.

-F-

Fatima Zahra Taibi, Samir Benyoucef, Abdelouahed Tounsi, Rabbab Bachir Bouiadjra, El Abbas Adda Bedia et SR Mahmoud, "La théorie de la déformation du cisaillement pour le comportement thermo-mécanique des plaques sandwich classées fonctionnellement sur les fondations élastiques". J. Sandw. Struct. Mater., 2015, 17 (2) 99-129.

Feldman E, Aboudi J., "Analyse de flambement de plaques classées fonctionnellement soumises à un chargement uniaxial". Compos. Struct. , 1997, 38, 29-36.

Ferreira AJM., Batra RC., Roque CMC., Qian LF., Martins pals., "Analyse statique de plaques fonctionnellement classées en utilisant la théorie de la déformation du cisaillement de troisième ordre et une méthode sans maille". Compos. Struct., 2005,69, 449-57.

Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., (2006), "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Composite Structures*, 75, 593–600.

Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S. (1996), "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al₂O₃ Multi-Layered Material", *Materials Science and Engineering*, 205, 59-71.

Fuchiyama T. and Noda N. (1995), Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Review*, 16, 263–268.

-G-

Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M. (1995), "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", *Acta Metallurgica et Materialia*, 43, 1335-1354.

Gu, P. & Asaro, R. J. Crack deflection in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures* 34, 3085-3098 (1997).

-H-

Hadji L, Atmane HA., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia EA., "Vibration libre de plaques sandwich à gradient fonctionnel en utilisant une théorie de la plaque à quatre épaisseurs variables". *Appl. Math. Mech*; 2011, 32: 925-942.

Hadji. L, et al 2017, « vibration des plaques sandwiches en FGM », 23ème Congrès Français de Mécanique Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. et Tounsi, A., "Une théorie des plaques sinusoïdales avec 5 inconnues et un effet d'étirage pour la flexion thermomécanique des plaques sandwich classées en fonction", *Steel Compos. Struct.*, 2015, 18 (1), 235-253.

Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. et Ehteshami, H., (2011), "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structures*, 1842–1853.

Hashemi Sh-H, Es'haghi M, Karimi M. (2010), Closed-form vibration analysis of thick annular functionally graded plates with integrated piezoelectric layers. *Int J Mech Sci* 2010; 52:410–28.

Hashemi Sh-H, Khorshidi K, Es'haghi M, Fadaee M, Karimi M. (2012), On the effects of coupling between in-plane and out-of-plane vibrating modes of smart functionally graded circular/annular plates. *Appl Math Model* 2012;36:1132–47.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, MSA, Bessaim, A. et Adda Bedia, EA, "Nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse vibratoire statique et libre des plaques à gradient fonctionnel", *J. Eng. Mech., ASCE*, 2014, 140, 374-383.

Helal, W. M. K. & Shi, D. Optimum Material Gradient for Functionally Graded Rectangular Plate with the Finite Element Method. *Indian Journal of Materials Science*, 7 (2014).

Hildebrand F.B., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*, 1949.

Hill, R. et Lin, W. (2002), "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191.

Hillman, C., Suo, Z.G., Lange, F.F., (1996), Cracking of laminates subjected to biaxial tensile stresses, *J. Am. Ceram. Soc.*, 79(8), 2127–2133.

Hirai T (1996), Chapter 20,"Functional Gradient Materials", *Mater. Sci. and Tech. vol.17B*, R.W.Chan, P.Hassen and E.J.Kramer (eds.), VCH, Weinheim, Germany 293, 1996.

Hirai T. et Chen L. (1999), Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.

Houari M.SA., Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Adda Bedia EA., "Deux variables de la théorie de la plaque raffinée pour l'analyse de flexion thermoélastique des plaques sandwich à gradient fonctionnel". *J. Therm. Stress.*, 2011, 34: 315-334.

Huang Z.Y, C.F. Lu, W.Q. Chen, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* 85 (95) (2008) 104

Huang, X.-L. et Shen, H.-S., (2004), "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427.

Huu-Tai Thai, Trung-Kien Nguyen, Thuc P. Vo, Jaehong Lee. "Analyse des plaques sandwich à gradient fonctionnel en utilisant une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre", *European Journal of Mechanics A / Solids*, 2014, 45, 211-225.

-I-

Icardi U & A.M. Bertetto. An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555,571, 1995.

Ichiro Chiota; Yoshinari Miyamoto, *Functionally Graded Materials* 1996 Elsevier.

-J-

Javaheri R, Eslami MR., "Bouclage de plaques fonctionnellement classées sous chargement compressif dans le plan". *ZAMM*, 2002, 82, 277-83.

Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nucl Eng Des* 2012; 250:8–13.

Jha D.K, Tarun Kant, R.K. Singh, A critical review of recent research on functionally graded plates, *Compos. Struct.* 96 (2013) 833–849.

Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.

Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339

Jin, Z. H. & Paulino, G. Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture* 107, 73-98 (2001).

Jin Z.H, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material," *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895. 2002.

Kant T et K. Swaminatha, "Solutions analytiques pour la vibration libre de plaques stratifiées en composite et en sandwich basées sur une théorie raffinée d'ordre supérieur", *Compos. Struct.*, 2001, 53, 73-85.

Kant T., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.

Karama M, B. AbouHarb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.

Karama M., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.

Kashtalyan M, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates," *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.

Kassapoglou C & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.

Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35.

Khorramabadi MK, Najafizadeh MM, Shahraki AJ, Khazaeinejad P. Effect of shear theories on free vibration of functionally graded plates. *World Acad Sci Eng Technol* 2008; 48:216–21.

Kieback, B., Neubrand, A. & Riedel, H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A* 362, 81-106 (2003).

Kirchhoff G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.

Kitipornchai S, J. Yang, K.M. Liew. Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 1075-1095.

Koizumi M, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc;* 13 (7-8): 333-347, 1992.

Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan.

Koizumi, M., "The concept of FGM", *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, 34, 3–10, (1993).

-L-

Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., (2008), "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration*, 498-515.

-M-

Mahi, A., Adda Bedia, EA, Tounsi, A., "Une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse des vibrations libres des plaques composites isotropes, classées fonctionnellement, sandwichs et stratifiées", *Applied Mathematical Modeling*, 2015, 39, 2489-2508.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.* 94 (2012) 1991-2000.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94 (2012) 2561- 2575.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* 45 (2013) 268 – 281.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Composite Structures* 96 (2013) 545–553.

Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995), Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.

Marur P.R "Comportement de fracture de matériaux fonctionnellement classés", thèse de doctorat, 1999, Auburn University, Alabama.

Matsunaga H, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86, 2009.

Mechab, I., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Belhadj, H.A., Adda Bedia, E.A. (2010). "A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates." *Acta Mech Sin.*, 26, 941–949.

Mena R., Tounsi A., Mouaici F, Mechab I., Zidi M., Adda Bedia EA., "Solutions analytiques pour le facteur de correction de cisaillement statique des faisceaux rectangulaires à gradient fonctionnel". *Mech. Advan. Mater. Struct.*, 2012, 19, 641-52.

Merdaci S., Tounsi A., Houari M.SA., Mechab I., Hebali H., Benyoucef S., "Deux nouveaux modèles de déplacement de cisaillement raffiné pour des plaques sandwich à gradient fonctionnel". *Cambre. Appl. Mech.*, 2011, 81: 1507-1522.

Mindlin RD. "Influence de l'inertie rotative et du cisaillement sur les mouvements de flexion des plaques élastiques isotropes". *J. Appl. Mech.*, 1951, 18, 31-8.

Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G., (eds) (1999), *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, (Kluwer Academic Boston/Dordrecht/London).

Moradi S., Mansouri MH., "Analyse du flambement thermique des plaques orthotropes laminées déformables de cisaillement par quadrature différentielle". *Steel Compos. Struct.*, 2012,12, 129-47.

Mori T, K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 21 (1973) 571-574.

Matsunaga, H., (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 499–512.

-N-

Na K.S., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.

Naghdi P.M, on the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.

Nejad M., Abedi, M., Lotfian, M. & Ghannad, M. Elastic analysis of exponential FGM disks subjected to internal and external pressure. *cent.eur.j.eng* 3, 459-465 (2013).

Neubrand, A., Rödel, J., (1997), Gradient materials: an overview of a novel concept, *Z. Metallk*, 88(5), 358–371.

Neves AMA, Ferreira AJM., Carrera E., Cinefra M., Jorge RMN., Soares CMM, Analyse de flambement de plaques sandwich avec des nuances fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement sinus hyperbolique quasi- 3D et une collocation avec radial fonctions de base ". *Z. Angew. Math. Mech.*, 2012, 92 (9): 749-766.

Neves AMA, Ferreira AJM., Carrera E., Cinefra M., Roque CMC., Jorge RMN., Soares CMM, "Analyse statique, vibratoire et de flambement libre de plaques isotropes et sandwich à gradient fonctionnel à l'aide d'une quasi-3D plus élevée - théorie de la déformation du cisaillement et une technique sans maillage ". ***Composites, partie B*, 2013, 44 (1): 657-674.**

Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* 43 (2012) 711-725.

Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al.. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 94 (2012) 1814-1825.

Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Comp. Part B: Eng.* 44 (2013) 657-674.

Nguyen, Viet.Tung. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

-O-

Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.

Oktem AS., Mantari JL., Soares CG., "Réponse statique des plaques à gradient fonctionnel et des coquilles doublement courbes basées sur une théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur". EUR. J. Mech. A / Solids., 2012, 36: 163-72.

Ootao Y., Y. Tanigawa, Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, Compos. Struct; 63 (2): 139–146, 2004.

Ossadzow C & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2001.

-P-

Pagano NJ. Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.

Park J.S., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, J. Sound Vib; 289 (25-28): 77–93, 2005.

Put, S., Vleugels, J., Van der Biest, O., (2003), „Gradient profile prediction in functionally graded materials processed by electrophoretic deposition”, Acta. Mater., 51(20), 6303– 6317.

Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", International Journal of Solids and Structures, 4457-4476.

-Q-

Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., (2004), "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", Composite: Part B, 685-697.

-R-

- Rashidi MM., Shoostari A., Anwar Bég O., "Etude de perturbation de l'homotopie de la vibration non linéaire des plaques rectangulaires Von Kármán". *Comput. Struct.*, 2012, 106/107, 46-55.
- Ravichandran, K.S. (1995), "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", *Materials Science and Engineering*, A-201, 269-276.
- Reddy J.N., Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Methods Eng*; 47: 663-684, 2000.
- Reddy J.N., Wang C., Kitipornchai S., "Cintrage axiométrique de plaques circulaires et annulaires à gradient fonctionnel". *EUR. J. Mech.*; 1999, 18, 185-99.
- Reddy J.N, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- Reddy J.N, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- Reddy J.N, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
- Reddy J.N. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int. J. Aerospace Lightweight Structures* 1 (2011) 1-21.
- Reddy. J. N. (2002), —Analysis of Functionally Graded Plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 47, pp. 663–684.
- Reissner E., "L'effet de la déformation du cisaillement transversal sur la flexion des plaques élastiques". *J. Appl. Mech.* , 1945, 12 (2), 69-77.
- Reissner E & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- Reissner E, on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502, 1975.
- Ren J.G. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.

Requenna, J., Moya, J.S., Pena, P., (1993), „Al₂TiO₃–Al₂O₃ functionally gradient materials obtained by sequential slip casting□, in Holt, J.B., Koisumi, M., Hirai, T., Munir, Z.A., Functionally Gradient Materials, American Ceramic Society, Westerville, O.H., 203–210.

-S-

Sankar B.V, An elasticity solution for functionally graded beams, Compos. Sci. Technol; 61 (5):689–696, 2001.

Sankar B.V., J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, AIAA J; 40 (6): 1228–1232, 2002.

Schindler, J., Meyer-Olbersleben, F., Kirbach, B., (1998), „Fabrication of FGM-foils for joining application by wet powder spraying□, presented at 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 1998.

Shahrjerdi A, Mustapha F, Bayat M, Sapuan SM, Zahari R, Shahzamanian MM. Natural frequency of F.G. rectangular plate by shear deformation theory. IOP Conf Ser Mater Sci Eng 2011; 17(1):1–6.

Shariyat M., "Une théorie généraliste généralisée de l'ordre supérieur pour les analyses de flexion et de vibration des plaques sandwich soumises à des charges thermo-mécaniques". Int. J. Mech. Sci., 2010, 52 (3): 495-514.

Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Shen H-S, Wang Z-X. Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. Compos Struct 2012; 94 (7):2197–208.

Sladek J., V. Sladek., Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, Comput. Mater. Sci; 28 (3-4): 494–504, 2003.

Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. Journal of

Sound and Vibration, vol. 30, no. 4, pages 495,507, 1973.

Suresh, S., Mortensen, A. (1998), —Fundamentals of Functionally Graded Materials, (IOM Communications Ltd., London).

-T-

Tahani M & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.

Taj G., Chakrabarti A., Sheikh AH., "Analyse des plaques à gradient fonctionnel utilisant la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur". *Appl. Math. Model.*, 2013, 37: 8484-94.

Talha M, B.N. Singh. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 (2010) 3991-4011.

Tarn J-Q, 2001, exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206, 2001.

Texier damien, 2013: « Mesure et évolution des gradients de propriétés mécaniques dans le système superalliage à base de nickel MC2 revêtu MCrAlY », Institut national polytechnique de toulouse (INP Toulouse France)

Thai H.T, S.E. Kim. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Compos. Struct.* 99 (2013) 172-180.

Timoshenko S.P., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. et Adda Bedia, E.A., "Une théorie trigonométrique raffinée de la déformation du cisaillement pour le pliage thermoélastique des plaques sandwich classées fonctionnellement", *Aerospace Sci. Tech.*, 2013, 24, 209-220.

Tounsi, A., Houari, M.S.A. et Bessaim, A., "Une nouvelle théorie de la plaque non polynomiale à 3 inconnues pour le flambement et la vibration de la plaque sandwich à gradient fonctionnel", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 2016, 60 (4), 547 - 565.

Touratier M, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.

Tran LV, Ferreira AJM, Xuan HN, "Analyse isogéométrique de plaques classées fonctionnellement en utilisant la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur". Compos: Partie B; 2013, 51: 368-83.

-U-

Udupa, G., Rao, S. S. & Gangadharan, K. V. Functionally Graded Composite Materials: An Overview. Procedia Materials Science 5, 1291-1299 (2014).

Uemura S. (2003), the activities of FGM on new applications, Materials Science Forum, 423–25, 1–10.

-V-

Van der Biest, O., Vandeperre, L, (1999), Electrophoretic deposition of materials□, Ann. Rev. Mat. Sci., 29, 327–352.

Vel. S.S, R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, AIAA J; 40 (7): 1421–1433, 2002.

Vel S.S, Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. J Sound Vib 2004; 272(3–5):703–30.

Vleugels, J., Anné, G., Put, S., Van der Biest, O., (2003), „Thick plate-shaped Al₂O₃/ZrO₂ composites with a continuous gradient processed by electrophoretic deposition□, mat. Sci. Forum., 423–425, 171–176.

-W-

Watanabe, Y., Yamanaka, N., Fukui, Y., (1998), “Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method”, Composites Part A, 29A, 595–601.

Whitney J.M. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.

Williamson, R.L., Rabin, B.H. Drake, J.T. (1993), "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320.

Woo J., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.

-X-

Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct* 2011; 93:2826–32.

-Y-

Yaghoobi H., Yaghoobi P., "Analyse de flambement de plaques sandwich avec des feuilles de face FGM reposant sur un appui élastique avec diverses conditions aux limites: une approche analytique". *Meccanica*, 2013, 48; 2019-35.

Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. & Shiota, I. On the design of functionally gradient materials in First International Symposium on Functionally Gradient Materials. (1990).

Yang, J. Shen, H.-S., (2001), "Dynamic response of initially stressed functionally graded", *Composite Structures*, 497-508.

Yang J, J., H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.

Yang J, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175, 2005.

Yang J, K.M.Liew, S. Kitipornchai. Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading. *Int. J. Mech. Sci.* 47 (2005) 1519-1541.

Yin W.L. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.

Yin H.M., Sun L.Z., Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

-Z-

Zenkour AM., "Une analyse complète des plaques sandwich à gradient fonctionnel: Part1-déviations et contraintes". *Int. Jour. de Sol. et struc.*, 2005, 42; 5224-42.

Zenkour AM., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part2-buckling and free vibration". *Int. Jour. of Sol. and struc.*, 2005, 42:5243–58.

Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006; 77(4):197–214

Zenkour AM., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.

Zenkour, A.M. et Alghamdi, N.A., "Analyse de flexion de plaques sandwich classées fonctionnellement sous l'effet de charges mécaniques et thermiques", *Mech. The Advanced Mater. and Struct.*, 2010, 17 (6), 419-432.

Zhao, C., Vleugels, J., Vandeperre, L., Van Der Biest, O., (2000), Cylindrical Al₂O₃/TZP functionally graded materials by EPD, *Brit. Cer. Trans.*, 99(6), 284–287.

Zhao X, Lee YY., Liew KM., "Analyse mécanique et thermique du flambement des plaques à gradient fonctionnel". ***Compos. struct.*, 2009, 90 (2), 161-71.**

Zhong Z., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4):481-488, 2007.