

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Monsieur : **HEBBAR Nabil**

Intitulé de la thèse

**ETUDE DE L'EFFET DE DEFORMATION DE CISAILLEMENT
SUR LA REPOSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES
STRUCTURES COMPOSITES EPAISSES**

Soutenue le : 09 Décembre 2018 devant le jury :

Président	TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Directeur de thèse	BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Co-Directeur de thèse	OUINAS Djamel	Pr	U.de Mostaganem
Examineur	FAHSI Bouazza	MCA	U.D.L SBA
Examinatrice	BESSAIM Aicha	MCA	U.de Mascara
Examineur	HOUARI Mohammed Sid ahmed	MCA	U de Mascara

Année universitaire 2018-2019

Remerciements

Le remerciement infini au bon Dieu et aux responsables du laboratoire des matériaux et hydrologie.

Je dois exprimer mes profonds remerciements à mon Directeur de thèse Docteur **Bourada Mohamed**, pour son chaleureux accueil, pour son encadrement, ses conseils et ses encouragements le long de ce travail.

Mes remerciements vont également à mon Co-encadreur Professeur **Ouinass Djamel** pour son support, sa rigueur scientifique.

Je remercie le Président de jury Professeur **Tounsi Abdelouahed**, d'avoir accepté la présidence de ce modeste travail et messieurs les membres de jury Dr. **Fahsi Bouazza**, Dr. **Houari Mohammed Sid Ahmed** et Dr. **Bessaim Aicha** d'avoir bien voulu expertiser cette thèse.

Au risque de répéter certains noms, je voudrais exprimer mes plus vifs remerciements à toutes personnes ayant contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Tous mes remerciements à mes parents, ma femme,
mes frères et ma sœur

Résumé

DANS CETTE THÈSE, UNE THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT QUASI-3D À QUATRE INCONNUES POUR L'ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES ÉPAISSES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES (FG) EST DÉVELOPPÉE. L'AVANTAGE DE CETTE THÉORIE EST QUE EN PLUS D'INTRODUIRE L'IMPACT D'ÉTIREMENT DE L'ÉPAISSEUR ($\varepsilon_z \neq 0$), LE CHAMP DE DÉPLACEMENT EST MODÉLISÉ AVEC SEULEMENT QUATRE VARIABLES, CE QUI EST MÊME INFÉRIEUR À LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT DU PREMIER ORDRE (FSDT). LE PRINCIPE D'HAMILTON EST UTILISÉ POUR DÉTERMINER LES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT. LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES OBTENUS À PARTIR DE LA THÉORIE PROPOSÉE SONT COMPARÉS AUX CPT, FSDT ET AUTRES HSDTs QUASI-3D.

Mots-clés: THÉORIE QUASI-3D, FLEXION, VIBRATION LIBRE, PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES.

Abstract

IN THIS THESIS A FOUR UNKNOWN QUASI-3D SHEAR DEFORMATION THEORY FOR THE BENDING AND THE FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED (FG) PLATES IS DEVELOPED. THE ADVANTAGE OF THIS THEORY IS THAT IN ADDITION TO INTRODUCING THE THICKNESS STRETCHING IMPACT ($\varepsilon_z \neq 0$), THE DISPLACEMENT FIELD IS MODELED WITH ONLY FOUR VARIABLES, WHICH IS EVEN LESS THAN THE FIRST ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY (FSDT). THE PRINCIPLE OF HAMILTON'S IS UTILIZED TO DETERMINE THE EQUATIONS OF MOTION. THE OBTAINED NUMERICAL RESULTS FROM THE PROPOSED THEORY ARE COMPARED WITH THE CPT, FSDT, AND OTHER QUASI-3D HSDTs.

Keywords: QUASI -3D THEORY, BENDING, FREE VIBRATION, FUNCTIONALLY GRADED PLATE.

في هذه الأطروحة، تم تطوير نظرية التشوه شبه القص ثلاثي الأبعاد بأربعة متغيرات للتشوه شبه القص لتحليل الانحناء والاهتزاز للألواح (FG) الوظيفية. تكمن ميزة هذه النظرية في أنه بالإضافة إلى إدخال تأثير سمك التمدد ($\varepsilon_z \neq 0$)، تم تصميم حقل الإزاحة بأربعة متغيرات فقط، وهو أقل حتى من نظرية تشوه القص الأول (FSDT). يتم استخدام مبدأ هاملتون لتحديد معادلات الحركة. تتم مقارنة النتائج الرقمية التي تم الحصول عليها من النظرية المقترحة مع CPT، FSDT، وغيرها من HSDTs شبه 3D.

الكلمات المفتاحية: نظرية شبه 3D، الانحناء، الاهتزاز حر، صفيحة وظيفية متدرجة.

SOMMAIRE

Résumé	I
Abstract	II
	III
Liste des figures	VII
Liste des tableaux	IX
Liste des notations	X
INTRODUCTION GENERALE	1
<u>CHAPITRE I: GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES AVANCÉS</u>	
I.1.Introduction	5
I.2. historique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)	5
I.3.Concept des matériaux fonctionnellement gradués	6
I.4. Comparaison entre FGM et les matériaux composites Traditionnels	8
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	11
I.5.1. Procédé de poudre sèche	11
I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	12
I.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting)	13
I.5.4. Coulage en bande	14
I.5.5. Pressage à chaud	15
I.5.6. Processus de frittage	16
I.5.7. Processus d'infiltration	16
I.5.8. Projection thermique	16
I.6.Avantages et inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués	17
I.6.1. Avantages des matériaux fonctionnellement gradués	17
I.6.2. Inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués	17
I.7.Domains d'application des matériaux fonctionnellement gradués	18
I.7.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile	19

I.7.2. Dans l'industrie	19
I.7.3. Dans les biomatériaux	20
I.7.4. Dans la défense	20
I.7.5. Dans les capteurs et les applications énergétiques	21
I.7.6. Dans l'optoélectrique	21
I.7.7. Articles de sports	21
I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	23
I.8.1. La loi des mélanges	23
I.8.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	24
I.8.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	25
I.8.1.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	26
I.8.2. Le modèle auto-cohérent	27
I.8.3. Le modèle Mori-Tanaka	28
I.9. Conclusion	31

CHAPITRE II: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES THÉORIES DE DÉFORMATION DES PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES

II.1. Introduction	32
II.2. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés	32
II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love- Kirchhoff (CLPT)	32
II.2.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	33
II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	35
II.2.4. La théorie raffinée de déformation des plaques	38
II.2.5. La théorie quasi-3D de déformation des plaques	39
II.3. Conclusion	41

CHAPITRE III: ETUDE ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES ÉPAISSES EN UTILISANT UNE NOUVELLE THÉORIE DE DÉFORMATION DE CISAILLEMENT QUASI-3D

III.1. Introduction	42
III.2. Revue des travaux antérieurs sur les plaques fonctionnellement graduées	42
III.3. Formulation théorique	43
III.3.1. Hypothèses de la présente théorie	43
III.3.2. Configuration géométrique	45

III.3.3. Propriétés matérielles des plaques FGM	45
III.4. Cinématique et équation constitutives	47
III.4.1. Champs de déplacement	47
III.4.2. Champs de déformation	48
III.4.3. Les équations constitutives	49
III.4.4. Détermination des équations gouvernantes	50
III.4.5. Les équations gouvernantes de la plaque	51
III.5. Solution exacte pour une plaque en FGM	54
III.6. Conclusion	57
CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	
IV.1. Introduction	58
IV.2. Résultat numériques et discussions	58
IV.2.1. Validation dans le cas de l'analyse statique	59
IV.2.1.1. Plaque graduée exponentiellement (EGP)	59
IV.2.1.2. Plaque graduée en puissance (PGP)	68
IV.2.2. Validation dans le cas de l'analyse dynamique	74
IV.2.2.1. Plaque graduée en puissance (PGP)	74
IV.3. Conclusion	78
Conclusion Générale & Perspectives	79
Références Bibliographiques	81

Liste des figures

Figure I.1: Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différent endroit.	7
Figure I.2 : Schéma d'une microstructure graduée avec les constituants céramique et métal.	7
Figure I.3: Les types de matériaux composites:(a) Monocouches, (b) stratifiés, (c) sandwichs.	8
Figure I.4: Une vue microscopique d'un matériau fonctionnellement gradué.	9
Figure I.5: La microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué.	10
Figure I.6: Microphotographie d'un matériau fonctionnellement gradué Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique.	10
Figure I.7: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.	12
Figure I.8: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée).	13
Figure I.9: Installation du coulage centrifuge verticale.	14
Figure I.10: Système de processus de coulage en bande.	15
Figure I.11: Les principaux domaines d'application des FGM.	18
Figure I.12: Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'automobile).	19
Figure I.13: Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'os et hanches).	20
Figure I.14: Plaque à gradient de propriété.	23
Figure I.15: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.	25
Figure I.16: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.	26
Figure I.17: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.	27

Figure I.18: Phase matérielles avec microstructure squelettique.	27
Figure I.19: Phase matérielles avec microstructure particulaire.	29
Figure II.1: Modèle des plaques dans le cas de la théorie classique des plaques minces de love- kirchhoff (CPT).	33
Figure II.2: Modèle des plaques dans le cas de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).	34
Figure II.3: Modèle des plaques dans le cas de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).	35
Figure III.1: Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée.	45
Figure III.2: Fonction graduée exponentiellement $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un EGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .	46
Figure III.3: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .	47
Figure IV.1: Variation de la flèche adimensionnel $\bar{w}(a/2, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec $(a/h = 4$ et $p = 0.5)$.	65
Figure IV.2: Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec $(a/h = 4$ et $p = 0.5)$.	66
Figure IV.3: Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec $(a/h = 4$ et $p = 0.5)$.	67
Figure IV.4: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'une plaque en PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .	68
Figure IV.5.1: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.	71
Figure IV.5.2: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.	72
Figure IV.5.3: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.	73

Liste des tableaux

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	8
Tableau I.2: Les propriétés des FGM et leurs applications significatives	22
Tableau I.3: Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM	30
Tableau II.1: Différentes fonctions des théories HSDT pour des plaques FGM.	38
Tableau IV.1: La propriété mécanique du matériau de la plaque EGP	59
Tableau IV.2: Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle d'une plaque $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ pour divers EGPs ($a/h = 2$).	60
Tableau IV.3: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_y(a/2, b/2, h/2)$ pour divers EGPs ($a/h = 4$).	61
Tableau IV.4: Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ pour divers EGPs ($a/h = 10$).	62
Tableau IV.5: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_y(a/2, b/2, h/2)$ pour divers EGPs ($a/h = 10$).	63
Tableau IV.6: Comparaison de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$ pour divers EGPs ($a/h = 10$).	64
Tableau IV.7 : Les propriétés mécaniques des matériaux de la plaque PGP.	68
Tableau IV.8: Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en PGPs.	69
Tableau IV.9: Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée en PGPs.	70
Tableau IV.10: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega}$ d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée.	74
Tableau IV.11: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en PGPs simplement appuyée.	75
Tableau IV.12: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles β d'une plaque carrée en PGPs simplement appuyée.	76

Liste des notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations, symboles et abréviations utilisées dans cette thèse.

<i>FGM</i>	Les matériaux à gradient de propriétés où fonctionnellement gradués.
<i>CSPM</i>	Méthode particule-solide centrifuge.
<i>PM</i>	Métallurgie des poudres.
<i>2D, 3D</i>	Bidimensionnelle et tridimensionnelle respectivement.
<i>E</i>	Le module de Young.
<i>E(z)</i>	Module de Young en fonction de « z ».
<i>E_c</i>	Module de Young de la céramique.
<i>E_m</i>	Module de Young du métal.
<i>Al₂O₃</i>	Alumine ou oxyde d'aluminium.
<i>Al</i>	Aluminium.
<i>G</i>	Le module de cisaillement.
<i>G(z)</i>	Module de cisaillement en fonction de « z ».
<i>ν</i>	Le coefficient de Poisson.
<i>ν(z)</i>	Coefficient de Poisson en fonction de « z ».
<i>V</i>	La fraction volumique. La masse volumique.
<i>P</i>	Les propriétés matérielles de la plaque.
<i>a</i>	Longueur de la plaque suivant la direction de x.
<i>b</i>	Largeur de la plaque suivant la direction de y.
<i>h</i>	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.
<i>u, v, w</i>	Les déplacements dans les directions x,y,z.
<i>u₀, v₀, w₀</i>	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
<i>u_s, v_s, w_s</i>	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement.
<i>u_b, v_b, w_b</i>	Les composantes du champ de déplacement de flexion.
<i>φ_x, φ_y</i>	Les rotations autour des axes x et y.

$f(z)$	Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z.
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion.
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement.
δU	Variation de l'énergie de déformation.
δV	Variation du travail virtuel externe.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel.
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel.
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux.
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion.
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement.
∂	Dérivée partielle.
$i, j, l \text{ et } m$	Des nombres naturels.
$\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$	Les variables intégrales indéterminées.
k_1, k_2	Les coefficients dépendant de la géométrie de la plaque.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque.
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque.
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque.
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
$q(x, y)$	Charge transversale.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.
$\{ f \}$	Le vecteur des efforts généralisés.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en évolution permanente et une quête dans le perfectionnement de la recherche. Ce développement ne peut être réalisé sans le progrès de la science qui fournit les résultats de la recherche scientifique dans l'industrie, ce qui permet de féconder des processus innovants dans le domaine de l'industriel.

Les matériaux sont considérés comme une composante de recherche prometteuse, car on trouve leurs applications dans tous les domaines. A cet effet, le développement de ces matériaux engendre systématiquement la révolution du monde de l'industrie, vu leur importance pour répondre au besoin technologique.

Par contre, les matériaux à base de métal qui sont des matériaux classiques commençaient à montrer leur limite, les composants des machines devenaient plus complexes, de ce fait les matériaux composites ont été développés pour trouver des solutions à ces limites.

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément; car leurs propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids et d'autres sont améliorées par rapport aux matériaux classiques.

Bien que ces matériaux composites présentent un problème d'interfaces et dans la discontinuité des propriétés, cette dernière provoque des niveaux élevés de concentration de contraintes, de fissuration de la matrice et un grave problème de délamination causé par une brutale transition de combinaison, précisément dans un environnement de température élevée.

À cet effet, naissent les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux à gradation fonctionnelle, qui a été développés par des chercheurs japonais tels que Niino au laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 [Niino et al. 1988]. Ces matériaux intelligents sont capables de supporter des gradients de température très élevés et qui représentent une innovation récente en science des matériaux, ce sont des composites compliqués avec une variation progressive continue des fractions volumiques de chaque constituant, induisant des changements et éliminent les discontinuités aux interfaces, tandis que les propriétés des matériaux sont conservées. Il est donc possible de joindre entre les propriétés de deux composants complètement différents sans que nul ne fasse des concessions au profit de l'autre.

Actuellement, la plupart des recherches dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur les principes de joindre deux constituants, la combinaison de la céramique et le métal améliore la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, l'usure et l'oxydation de la céramique. En conséquence, ce sont de nouveaux matériaux qui peuvent répondre aux spécifications multicritères pour combiner des propriétés mécaniques et thermiques.

Durant ces trois dernières décennies, les matériaux FGM ont captivé une attention particulière et un intérêt en raison de leurs avantages; de ce fait leur utilisation est en surcroît dans plusieurs domaines comme l'aéronautique, les réacteurs nucléaires, les constructions navales et aussi comme source d'énergie biomécanique [Koizumi M.1993; Tounsi et al.2013; Boudierba et al. 2013; Ait Amar Meziane et al.2014; Hebali et al.2014; Hamidi et al. 2015; Tagrara et al.2015; Bennai et al.2015; Larbi Chaht et al.2015; Boukhari et al.2016; Turan et al.2016; El-Hassar et al.2016]. Ces structures sont soumises à des chargements et des contraintes, ces derniers induisent la ruine de ces structures [M. Savoia et al.1995].

À cet effet, il faut développer des calculs efficaces et plus exacts, afin de comprendre l'impact de la transformation mécanique sur le comportement de ces structures épaisses en matériaux à gradient de propriété dans un but de déterminer la variation des déplacements, des déformations et des contraintes en chaque élément de ces structures ainsi que les fréquences de vibration.

Ces contraintes étant normales ou de cisaillement ainsi que les fréquences de vibration dans les différents types de structures que ce soit plaques ou coques en matériau à gradient de propriété sont déterminé en se basant sur des hypothèses du champ de déplacement développé et la théorie appropriée choisie.

Dans cette catégorie de recherche, plusieurs chercheurs ont élaboré des études dans le comportement statique et vibratoire des plaques fonctionnellement graduées FGM. [Ferreira et al.2006] ont étudié les vibrations des plaques fonctionnellement graduées pour un modèle des plaques que soit de premier et troisième ordre de déformation de cisaillement en utilisant une technique globale de collocation.

[Qian et al.2015] ont étudié la flexion et les vibrations libres d'une plaque fonctionnellement graduées épaisse de forme géométrique rectangulaire en utilisant une théorie de cisaillement d'ordre supérieur, et une théorie de déformation normale.

[Matsunaga,H. 2008] a étudié les fréquences naturelles et le flambement des plaques fonctionnellement graduées en considérant les effets de déformations transversales.

[Lu et al. 2009] ont présenté une analyse des vibrations libres des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique tridimensionnelle, [Malekzadeh, P. 2009] a utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour la réponse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduée reposante sur des fondations élastiques du type Winkler-Pasternak.

[Neves et al. 2012a; Neves et al. 2012b] ont proposé une formule de déformation de cisaillement sinusoidal, et une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi- 3D pour l'analyse statique et dynamique de plaques fonctionnellement graduées. [Bessaim et al. 2013] ont développé une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur pour la déformation normale dans le cas de l'analyse statiques et la vibration libre des plaques sandwich avec des feuilles de face isotropes fonctionnelles. [Akavci, SS. 2014] a utilisé une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour une analyse de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique. [Hebali et al. 2014] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi- 3D pour l'analyse statique et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées. [Nguyen et al. 2015] ont développé une théorie de déformation de cisaillement à ordre supérieur pour l'analyse de la flexion, la vibration et le flambement des plaques sandwiches à gradation fonctionnelle. [Hamidi et al. 2015] ont développé une théorie pour la plaque sinusoidale avec cinq inconnues avec prise en compte de l'effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwich à gradation fonctionnelle. [Ramu et al. 2015] ont étudié la vibration libre ainsi que la stabilité dynamique des plaques en matériau à gradations fonctionnelles sur une fondation élastique.

Dans ce travail de recherche, une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques FGM dans le cas de la flexion et la vibration libre est fournie, ces éléments structurels étant les composants de base de structures primaire et secondaire. Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux développés pour atténuer les problèmes causés par un niveau environnemental de température très élevée.

L'objectif de cette thèse est de développer sur la base d'un modèle mathématique une nouvelle théorie quasi -3D qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur dans un but d'étudier la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées épaisses. Dans cette théorie le nombre d'inconnu est de quatre au lieu de cinq et six dans d'autre théorie publié dans la littérature, ce manuscrit s'organise ainsi en quatre chapitres :

- dans le premier chapitre,nous décrivons le contexte de l'étude sur la base d'une recherche bibliographique sur les matériaux composites avancés, sur l'histoire de ces matériaux, les méthodes d'élaboration de ces matériaux, leurs avantages et inconvénients et leurs domaines application.

- le second chapitre donne une rétrospective sur les différentes théories des plaques existantes, que soit la théorie classique des plaques minces de love-kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des plaques.

- le troisième chapitre présente la nouvelle théorie de la déformation de cisaillement quasi-3D à quatre inconnus pour les plaques fonctionnellement graduées épaisses dans un but d'étudier l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques sous un chargement mécanique.

- dans le quatrième chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus de l'analyse du comportement mécanique dans le cas de la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées et seront comparés avec les résultats des travaux d'autre chercheurs.

Des conclusions générales et des perspectives pour des travaux futurs sont présentées.

CHAPITRE I:
GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX
COMPOSITES AVANCÉS

I.1.INTRODUCTION

Durant ces dernières décennies, une nouvelle catégorie des matériaux composites a vu le jour dans ce vaste domaine de recherches, ce sont les matériaux fonctionnellement gradués, étant donné que les matériaux classiques, malgré leurs avantages que soit grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté et réduction des coûts, ne répondent pas toujours aux exigences demandées. Ces matériaux fonctionnellement gradués ont une microstructure qui varie graduellement et constamment à travers l'épaisseur dans le but d'optimiser leurs performances que soit mécanique ou thermique ou les deux en même temps.

De ce fait, ces matériaux possèdent alors un potentiel important dans le domaine de leurs applications.

I.2.Histoire sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Dans les années quatre-vingts, un concept de matériaux à gradient de propriété a vu le jour au niveau du laboratoire national d'aérospatial au Japon, élite dans ce vaste domaine.

À partir de 1984, les chercheurs Niino et ses collègues [Niino et al. 1988], ont eu l'intelligence de développer des matériaux qui ont une grande résistance thermique pour les structures spatiales et les propulseurs à fusion [Koizumi, M.1992]. Les changements des propriétés matérielles mécaniques et thermiques sont induits par les changements continus dans la microstructure et même dans la porosité de ces matériaux [Koizumi, M.1997]. Plusieurs domaines d'application comme les moteurs et les turbines font appel à cette catégorie de matériaux [T. K. Nguyen et al. 2007].

Un vaste programme de développement des matériaux à gradient de propriétés a été lancé par le gouvernement japonais en 1987, il s'est focalisé sur le développement de cette technologie de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. Plusieurs laboratoires de recherche ont imprégné dans ce programme dans le but de développer des matériaux dans leurs structures, servants comme barrières thermiques dans le domaine de l'aérospatial [Koizumi. M. 1997].

Pendant la période de 1987 jusqu'à 1989, c'est née la première innovation des pièces expérimentales d'une section de 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre qui peuvent résister à des températures de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K [H. Okamura, 1991].

La fabrication des matériaux présentant un gradient de composition et de structure passe par quatre procédés qui sont:

- système SiC/C par C.V.D. ;
- système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- système TiB₂/Cu par synthèse à haute température par auto-propagation;
- et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [H. Okamura, 1991].

Durant la deuxième période de 1990 jusqu'à 1991 c'est la phase où ils ont peu conçu des pièces de sections plus grandes avec des formes plus complexes qui induisent un champ d'application plus vaste [H. Okamura, 1991].

Ce n'est qu'en 1992 qu'un nouveau projet de recherche a été né, dans un but de développer les matériaux fonctionnellement gradués afin d'améliorer leur efficacité dans la conservation d'énergie dont l'intitulé est : « recherche sur les matériaux pour une conservation d'énergie en tenant compte de la structure à gradient de propriété ».

I.3. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Dans la catégorie des matériaux composites, il y a les matériaux fonctionnellement gradués, ce concept a vu le jour dans les années quatre-vingts au Japon par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA), où ils ont développé un matériau ayant des caractéristiques pour résister aux sollicitations thermiques et mécaniques [Niino et al. 1988].

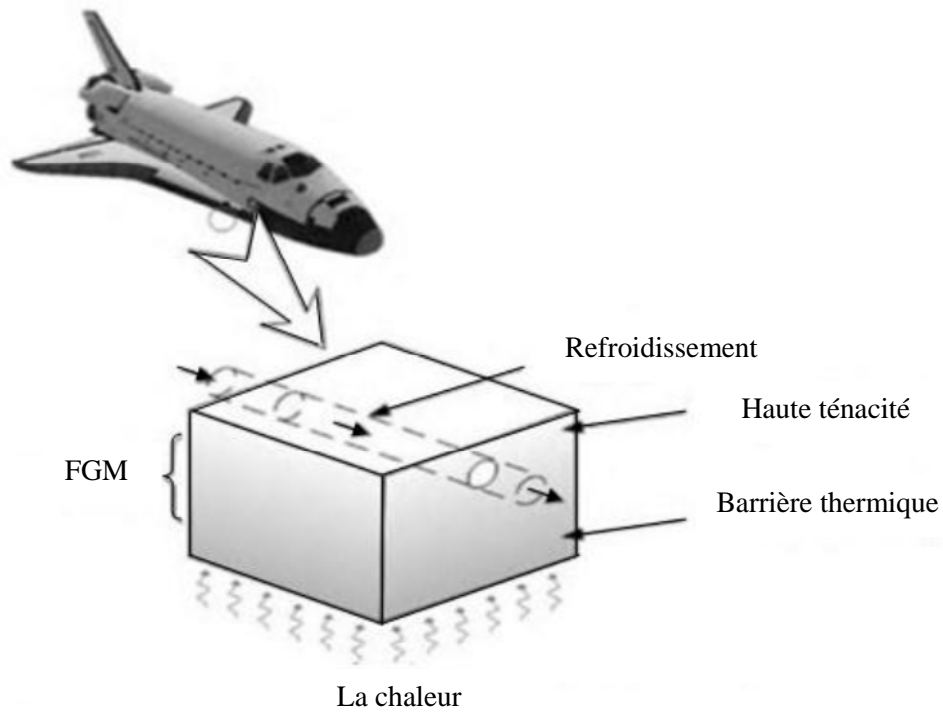


Figure I.1. Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différents endroits [Hopkinson et al. 2006].

Un matériau FGM est un matériau qui est constitué d’au moins de deux matériaux qui se distribuent continuellement où dis-continuellement au cœur de la structure.

Dans le cas où la distribution est continue, on fait référence à un matériau à gradient continu dans la microstructure graduée et variable [Kawasaki et al. 1997]. Cette répartition permet de créer des changements à l’intérieur même du matériau (figure I.2).

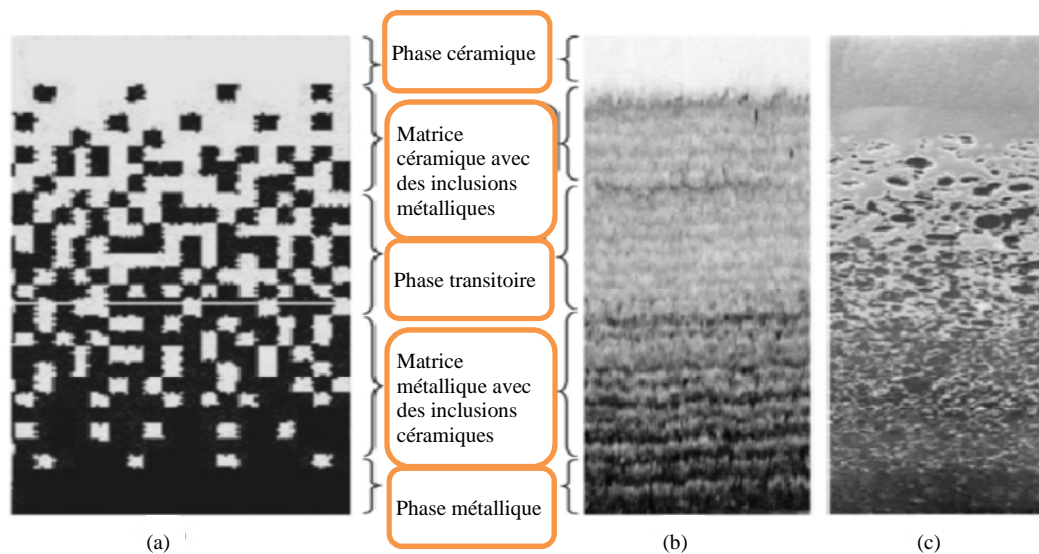


Figure I.2: Schéma d’une microstructure graduée avec les constituants céramique et métal [D.k.Jha, 2013].

Usuellement, les matériaux fonctionnellement gradués se composent d'un mélange distinct de céramique et de métal sous forme de plusieurs couches ainsi que les vides qui sont une composante indissociable du matériau fonctionnellement gradué [K. Kokini et al 1990]. De ce fait, ces matériaux composites sont macroscopiquement inhomogènes et qui se présentent dans le tableau I.1.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

[K. Kokini et al 1990].

Couches	Matériau	Observation
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface -Relaxation les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

I.4.Comparaison entre matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites traditionnels

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément de telles manières à avoir un matériau qui a des propriétés convoitées tels que la rigidité, la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure ainsi que la réduction de poids.

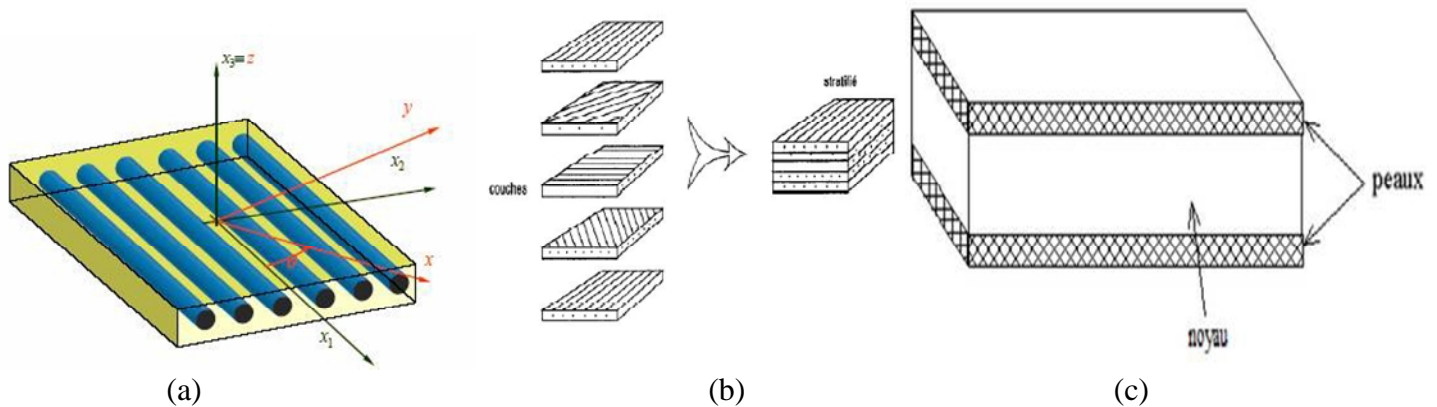


Figure I.3: Les types de matériaux composites :(a) Monocouches, (b) stratifiés, (c)sandwichs.

Les structures composites ont une anisotropie qui se traduit par des discontinuités géométriques ainsi qu'une concentration de contraintes à l'intérieur du matériau, ces derniers engendrent des fissurations au niveau de la matrice, la séparation des assemblages et le délaminage.

Les matériaux à gradient de propriété sont des matériaux intelligents qui font partie des matériaux composites, dont leurs variations des propriétés sont continuées d'une surface à une autre. Cette variation progressive continue des fractions volumiques de chaque constituant induit des changements et élimine les discontinuités aux interfaces, tandis que les propriétés des matériaux sont conservées. Ces matériaux sont usuellement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des céramiques et des métaux, les céramiques présentent une résistance à la chaleur et à la corrosion contrairement au métal qui procure la ténacité et la résistance.

Les matériaux à gradient de propriétés «FGM» sont des matériaux composites non homogènes macroscopiquement. À cet effet, les changements continus dans leur microstructure particularisent les matériaux à gradient de propriété par rapport aux matériaux composites classiques (figures, I.4, I.5 et I.6).

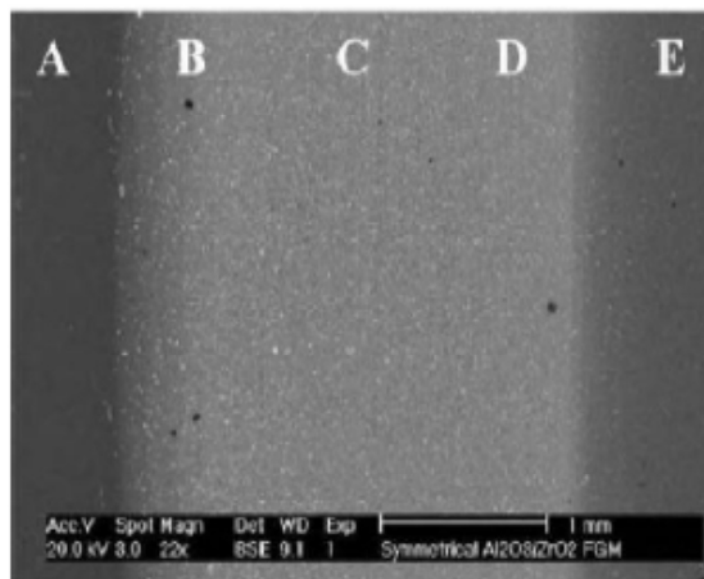


Figure I.4: Une vue microscopique d'un matériau fonctionnellement gradué [Hashmi et al. 2014].

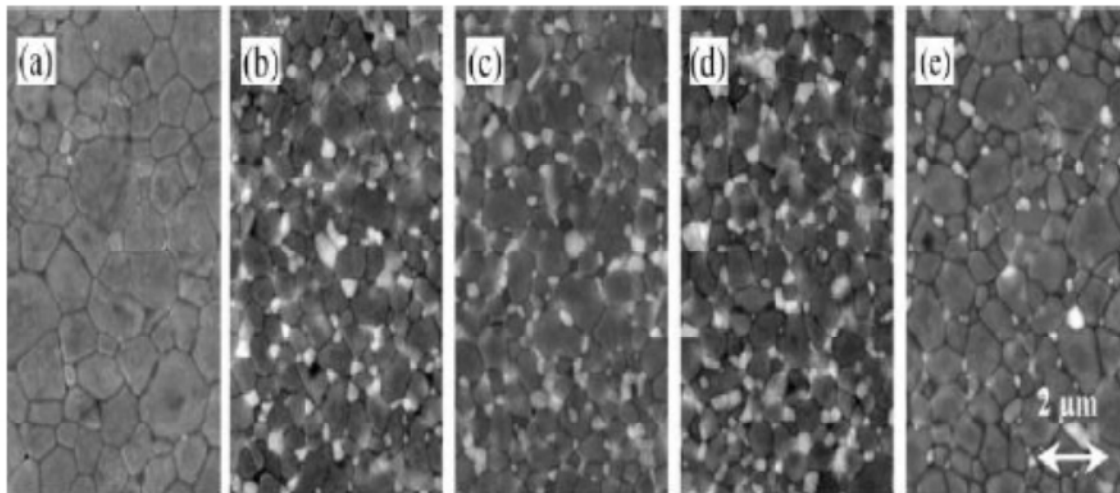


Figure I.5: La microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué [Hashmi et al. 2014].

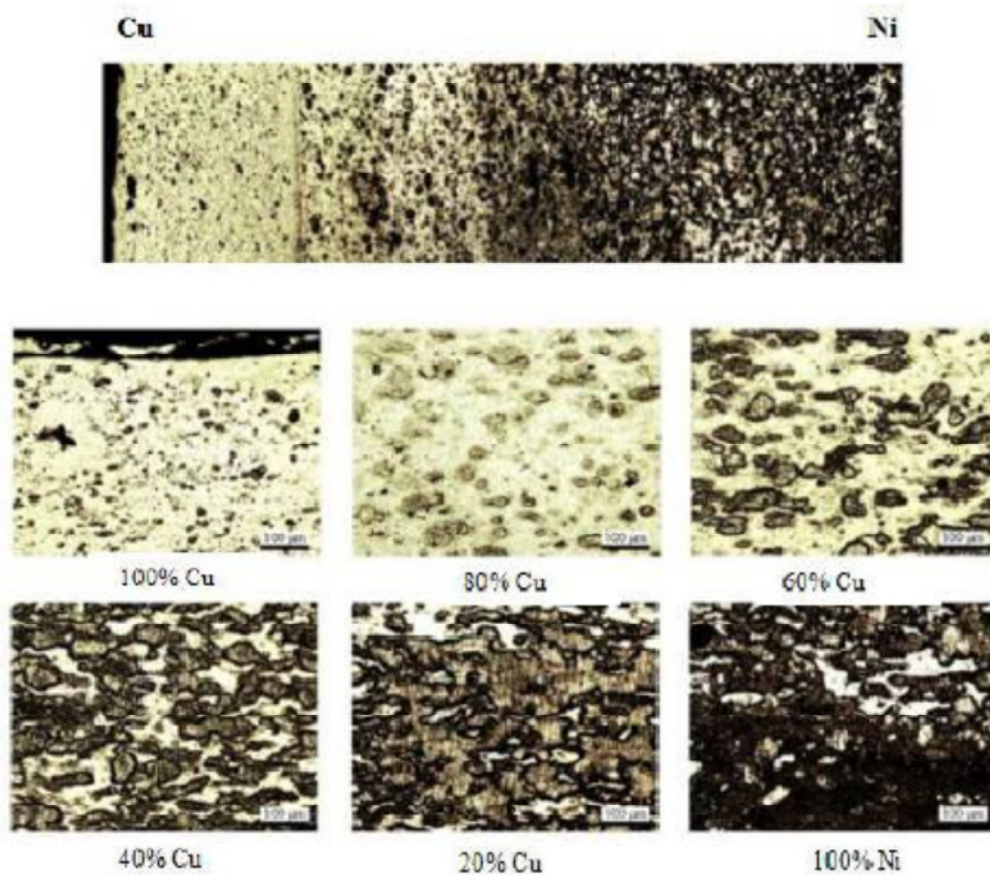


Figure I.6: Microphotographie d'un matériau fonctionnellement gradué Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [Hashmi et al. 2014].

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Depuis toujours, les chercheurs ont consacré leurs réflexions à la fabrication des structures en gradient de propriété, de ce fait ils ont essayé de concevoir des compositions optimales de plusieurs méthodes en fonction des propriétés des composants de matériaux [Miyamoto et al.1999; Kiebeck et al.2003; Li et al. 2003; Jamaludin et al. 2013]. Les procédés existants et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront expliqués ci-après :

I.5.1. Procédé de poudre sèche

Pour la fabrication des matériaux à gradient de propriété utilisant des matériaux solides on fait appel à la technique de PM (métallurgie des poudres).

Ce procédé de fabrication se présente sous trois phases qui sont structurées de la manière suivante: premièrement le panachage de poudre et ceci en fonction de la répartition spatiale de telle façon à respecter l'exigence appropriée, en second l'empilage et damage des poudres pré-mélangées et finalement le frittage (figure I.7).

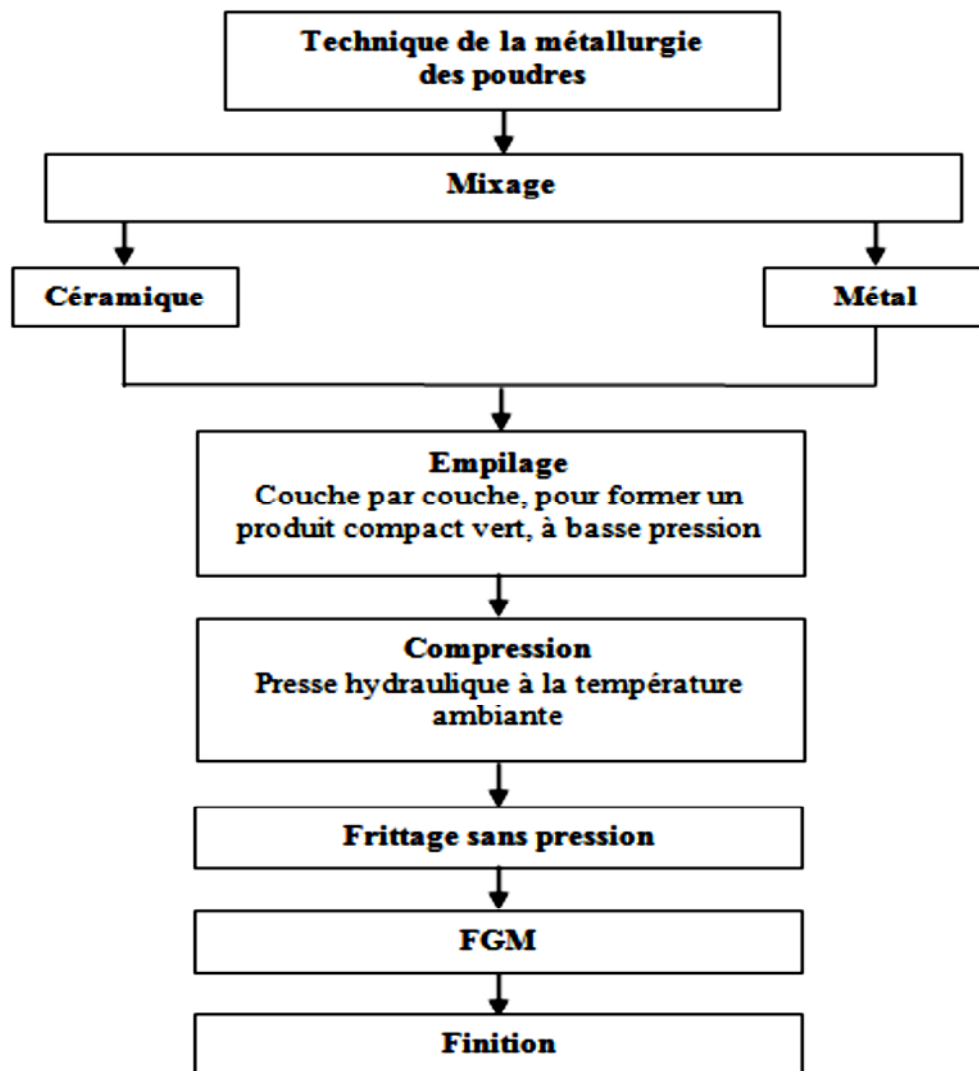


Figure I.7: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM [Saiyathibrahim et al. 2015].

Cette méthode fait partie des procédés les plus utilisés est cela grâce à son contrôle dans le concept de la composition [El-Wazery et al. 2012; Ramachandran et al. 2015; Saiyathibrahim et al. 2015].

I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

C'est une méthode traditionnelle qui se base sur le principe du versement de la poudre dans un moule en plâtre poreux, de ce fait le liquide engendré élimine la suspension, dont les particules sont involontairement poussées vers les parois. Au cours de la procédure d'écoulement dans la barbotine, la taille des grains de la suspension de poudre change et

forme de ce fait le gradient qui est ensuite densifié ou consolidé et finalement la structure de gradient de propriété est constituée [Katayama et al. 2011].

I.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting)

La méthode de centrifugation qui consiste à la fabrication de gradient est divisée en deux catégories est cela en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Dans la première catégorie la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification, à la particule et à la matrice dans le cas où la température de traitement est plus élevée par rapport au point de la particule de renfort de fusion, par contre dans la deuxième catégorie la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide dans le cas où la température de traitement est significativement inférieure par rapport au point de fusion.

Cette méthode est baptisée CSPM qui signifie la méthode de particule-solide centrifuge, elle permet un renforcement électif de la surface du composant obtenue des résultats qui sont un maintien d'une haute ténacité en vrac et une résistance à l'usure plus élevée à la surface extérieure [Katayama et al. 2011].

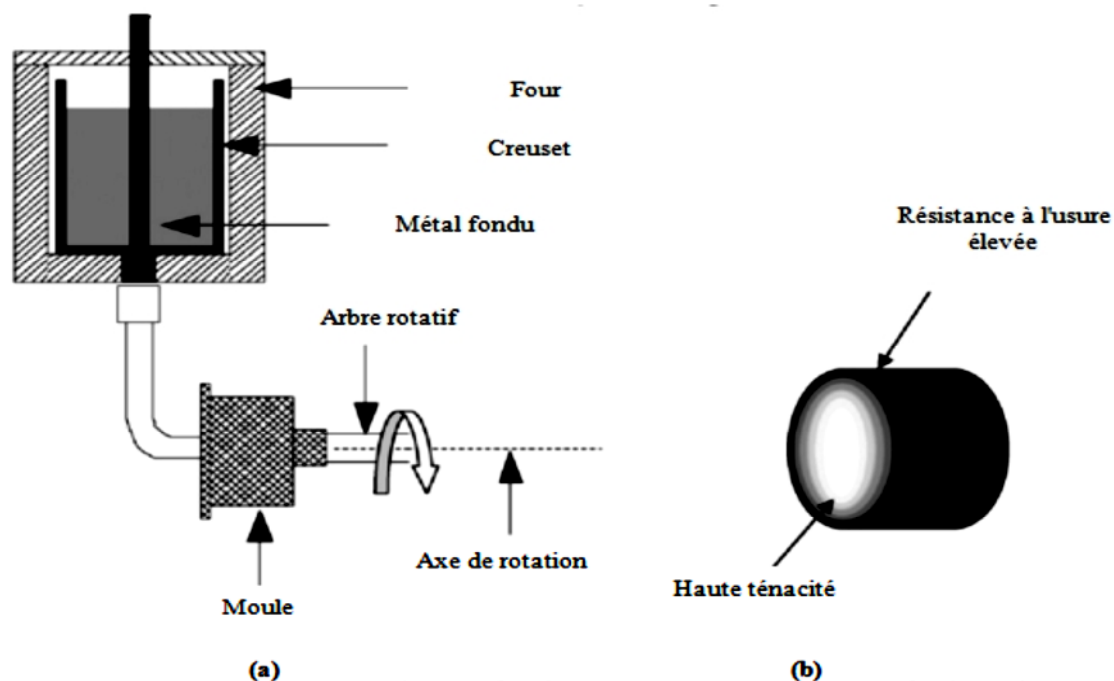


Figure I.8: Représentation schématique du: (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al: haute ténacité et SiC: résistance à l'usure élevée) [Saiyathibrahim et al. 2015].

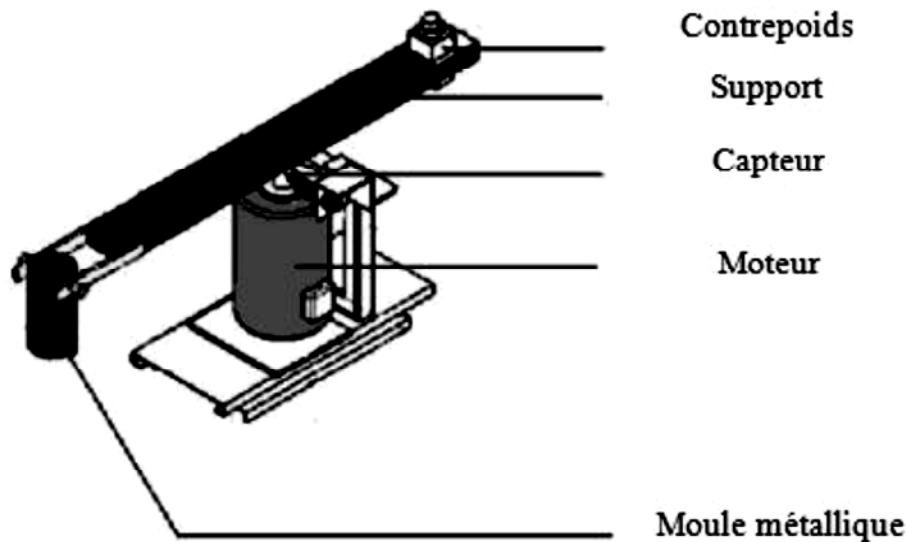


Figure I.9: Installation du coulage centrifuge verticale [Saiyathibrahim et al. 2015].

I.5.4. Coulage en bande

Le procédé de coulage en bande est présenté sur la figure I.10, l'intervalle de la bande de coulée est de 25 μ m et 1mm par contre pour les bandes minimales la production est inférieure à 1 μ m.

Le coulage se présente sous trois phases qui sont :

- l'élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant ;
- le séchage du corps vert ou de la bande ;
- la consolidation de la matière dense de bande.

Dans un but d'obtenir un matériau à gradient de propriété, des bandes ont été préparées et sont ensuite coupées sous forme des unités carrées à partir des bandes vertes et placés les uns contre les autres avec une épaisseur de l'ordre de 200 μ m. Et par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent des matériaux sont produits en métal-céramique et céramique-céramique.

D'autres chercheurs ont utilisé une autre méthode qui est une combinaison de coulage en bande ainsi que la réaction auto-entretenue à haute température évoquant les travaux d'Anne-Laure Dumont [Dumont et al. 2001], où ils ont fabriqué un matériau à gradient de propriété en $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ avec des teneurs en alumine variante de 20 à 80 %, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Pour une bonne amélioration de la densification de composition progressive les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible [Dumont et al. 2001].

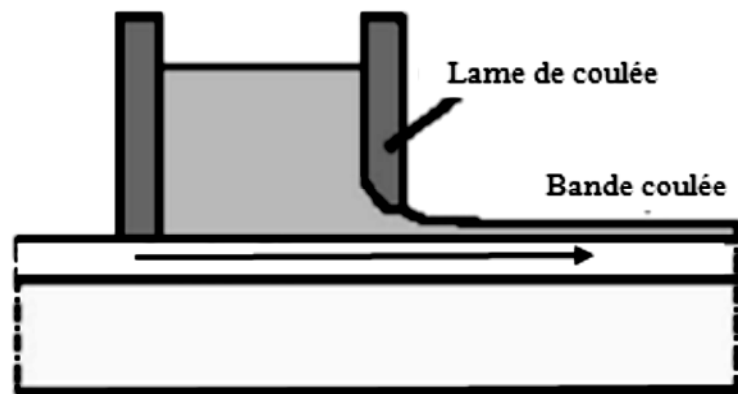


Figure I.10: Système de processus de coulage en bande [Saiyathibrahim et al. 2015].

I.5.5. Pressage à chaud

Les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche sont la Zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et les nickels 20 chromes (NiCr) à travers la méthode de pressage à chaud [Li et al. 2003]. Dans la boule fraiseuse, la poudre (YSZ) et (NiCr) est mélangée pendant 12 heures avant d'être empilée couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. La méthode du concept de dégradation progressive arrange la disposition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure à (10 MPa), le précompactage des couches doit être réalisé sous une pression inférieure dans le but d'assurer une distribution exacte de composition dans les couches ; ce qui concerne la jonction d'YSZ-NiCr élaboré pour une durée d'une heure à une température de 1200 °C, cette jonction présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000°C avant d'initier la fissure [Wu et al. 2005 ; Jamaludin et al. 2013 ; Ramachandran et al. 2015].

I.5.6. Processus de frittage

Ce procédé est élaboré dans la même période que le processus de compactage dans le cas où le matériau fonctionnellement gradué est préparé par traitement de pressage à chaud, par contre le procédé de frittage est effectué après que les poudres soient compactées dans le cas où le matériau fonctionnellement gradué est préparé par le traitement de pressage à froid.

Au cours du processus de frittage ou de consolidation la gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée. Il faut bien choisir le type de poudre dans un processus étant donné qu'il y a des poudres métalliques légères, telles que l'aluminium et magnésium ont une tendance à réagir avec l'oxygène et de se disséminer dans l'atmosphère et par conséquent ce phénomène doit être évité dans un but d'obtenir des matériaux adéquats [Watari et al 2003 ; Jamaludin et al. 2013].

I.5.7. Processus d'infiltration

L'infiltration est un terme qui signifie chez les scientifiques l'hydrologie et qui est défini comme la précipitation du fluide présent sur la surface dans le sol. Il est régi par la force d'action capillaire ou la gravité par contre le taux d'entrisme est en corrélation aux caractéristiques du sol, tel que le taux de transmission à travers le sol, la facilité d'entrée et l'aptitude de stockage. La capacité et le taux d'infiltration dépendent de plusieurs paramètres qui sont les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la texture du sol, la température du sol et enfin l'intensité des précipitations.

À la suite de plusieurs travaux énumérés dans la littérature, le processus d'infiltration était germé, il y a de cela plusieurs années, dans le but de traiter les matériaux fonctionnellement gradués, en utilisant la méthode d'infiltration sans aucune pression. De ce fait, un gradient de composition Al/SiCp a été réalisé avec une conductivité thermique non linéaire et une fraction volumique de la céramique en diminution [Cho et al. 2004 ; Jamaludin et al. 2013].

I.5.8. Projection thermique

Est un processus de pulvérisation de matériaux fondus sur une structure, ces matériaux fondus sont des matériaux à gradient qui se constituent sous formes de couches de revêtement, ces derniers peuvent être épais. Pour le précurseur de revêtement, il doit être chauffé

chimiquement ou électriquement. C'est dans ce contexte qu'en 2002, on a pu concevoir des revêtements à gradient de propriété de barrière thermique (TBCs) et des revêtements en double avec la même résistance thermique dans un but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures fonctionnellement graduée [Jamaludin et al. 2013].

I.6. Avantages et inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux fonctionnellement gradués exhibent des avantages et des inconvénients.

I.6.1 Avantages des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux fonctionnellement gradués procurent plusieurs propriétés dans des domaines différents et pourraient être conceptualisées sur la base d'un simple revêtement [Narottam et al. 2011].

D'autre part, plusieurs chercheurs tel Narottam P. Bansal [Narottam et al. 2011] ont fourni divers avantages et potentiels concernant les matériaux fonctionnellement gradués qui sont cités ci-dessous:

- ils permettent de créer un accroissement du périmètre fonctionnel et cela en amont d'atteindre la limite de déformation plastique;
- ils ont une capacité à amoindrir les contraintes thermiques qui sont causées par les diversités des coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés;
- le meilleur contrôle des contraintes qui sont déduites à l'absence d'interface nette;
- une très bonne adhérence entre différents matériaux, à titre exemple un matériau composé de céramique et métal;
- une ténacité élevée à la rupture;
- et enfin élimination du phénomène de délaminage.

I.6.2 Inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués

La fabrication des matériaux fonctionnellement gradués pose un grand obstacle et cela à cause de l'inadéquation entre les différentes propriétés des matériaux utilisés, on peut évoquer la taille des particules, la morphologie et la température, etc. Et afin d'être plus explicite on présume que le matériau fonctionnellement gradué est composé de deux

matériaux, l'un est la céramique avec une température (T_1) et l'autre le métal avec une température de (T_2).

Généralement, un tel mélange est couramment défini par T_2 inférieur à T_1 , alors une semblable composition présente en premier lieu une porosité élevée et une faible adhérence entre les différents constituants et en second lieu une application bornée de ce matériau.

De ce fait la fabrication de ce type de matériau doit être dans des conditions comme une atmosphère protectrice ou à une pression basse mais malheureusement ces deux procédés sont très onéreux [Narottam et al. 2011].

I.7. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient de propriété sont introduit dans plusieurs domaines (figure I.11), cela grâce à leurs potentielles très importantes et ceci en fonction de leur caractéristique telle que la conductivité thermique, la ténacité, la résistance et la légèreté de ces matériaux.

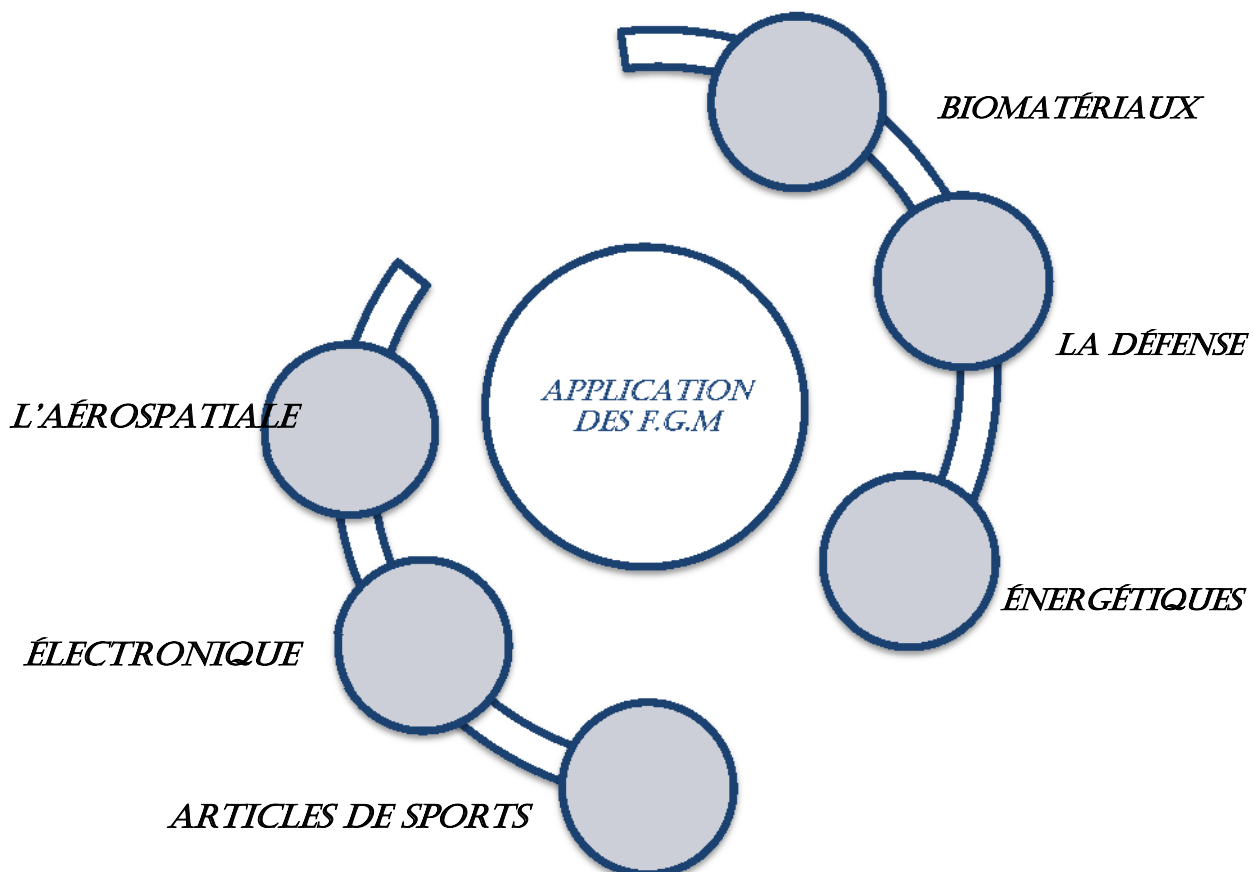


Figure I.11: Les principaux domaines d'application des FGM.

Les matériaux à gradient de propriété ont un large intervalle d'application dans des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de transformation d'énergie, nucléaire et biomécanique. Certaines des applications des matériaux à gradient de propriété sont discutées ci-dessous :

I.7. 1. Dans l'aérospatiale et l'automobile :

Les matériaux à gradient de propriété sont en évolution constante dans le domaine de l'aérospatiale grâce au programme de développement de la NASA. Cette évolution est due au problème rencontré dans les coûts très élevés des navettes spatiales qui est en rapport avec le poids. À cet effet, et afin de réduire ce coût très élevé, il est indispensable d'élaborer une conception optimale qui induit de créer un équilibre entre le poids et la performance de ces navettes spatiales en utilisant des plaques FGM. Plusieurs travaux présentés par Arnold [Arnold, S. M. 2001] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [Hopkinson et al. 2006 ; Saiyathibrahim et al. 2015].



Figure I.12: Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'automobile) [Cox, H. 2004].

I.7.2. Dans l'industrie :

Dans un domaine important qui a une relation avec l'économie il est nécessaire d'investir au maximum étant donné que dans le domaine de l'industrie l'innovation de l'outil est primordiale, vu que récemment l'industrie exige des pièces récentes avec des paramètres qui admettent des résistances à l'usure et la ténacité, étant des éléments maîtres dans l'innovation de l'industrie et qui induisent la réduction des coûts de ces composants. De ce fait, la solution à cette problématique est l'utilisation des matériaux à gradient de propriété.

Parmi les matériaux à gradient de propriété qui ont été utilisés dans des applications importantes ont fait allusion aux matériaux à gradient à matrice d'aluminium, ces derniers ont été utilisés dans l'industrie à une étendue échelle telle que les emballages électroniques et des matériaux de blindage [Saiyathibrahim et al. 2015].

I.7.3. Dans les biomatériaux

Aujourd'hui ce domaine sensible sollicite l'admission de ce type de matériaux, car les matériaux à gradient de propriété sont l'innovation du siècle dans ce domaine sensible, pour éclaircir mieux on prend l'exemple de la réparation de l'os et ligaments humains ou son remplacement en cas de fissuration, plusieurs chercheurs ont travaillé sur cette thématique comme Miao et Sun [Xigeng Miao et al. 2010], où les recherches expérimentales ont montré que ces matériaux ont une capacité de résistance et de durabilité.



a. L'os



b. hanche biocompatible

Figure I.13: Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'os et hanches).

I.7.4. Dans la défense

Les matériaux à gradient de propriété sont la base de la fabrication du sabre japonais traditionnel. Ce dernier est fabriqué par plusieurs plaques d'acier de forge avec une teneur en carbone qui permet de se présenter dans la surface extérieure en grande quantité par rapport à la partie intérieure. Ils induisent une résistance élevée et une dureté remarquable [Misra et al. 2011]. Parmi les capacités du matériau fonctionnellement gradué est d'empêcher la propagation des fissures.

I.7.5. Dans les capteurs et les applications énergétiques

Les matériaux à gradient de propriété procurent une variété de fonction, par exemple le thermoélectrique gradué, ces matériaux piézoélectriques sont appliqué dans les ultrasonores à large bande et les électrodes composites graduées pour les combustibles à base d'oxydes solides [Müller et al. 2003]. Les matériaux à gradient de propriété sont utilisés dans les procédés de changement d'énergie, protection des aubes de turbine comme revêtement.

I.7.6. Dans l'optoélectronique

Aujourd'hui, il est possible de réaliser des procédés photoniques qui pourraient fonctionner dans une large gamme spectrale et cela en utilisant des matériaux à gradient de propriété [Wo et al. 2005].

Il existe plusieurs domaines d'application des FGM comme les revêtements, les composants des moteurs, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires etc. [Rasheedat et al, 2012; Bohidar et al, 2014]. A cet effet, en remarque une amélioration dans le coût de production et les propriétés des matériaux à gradient de propriété.

I.7.7. Articles de sports :

Aujourd'hui les matériaux à gradient de propriété sont introduits comme un composant dans la production des articles de sport de haute performance telle que les chaussures de baseball et les outils d'escalade sur glace (crampons et piolets) dans le même concept de réduction d'usure [Hopkinson et al, 2006 ; Saiyathibrahim et al, 2015].

Tableau I.2 : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives

[Bohidra et al, 2014 ; Makwana et al, 2014 ; Udupa et al, 2014].

FGM	Propriétés	Applications
Al ₂ O ₃ / Alliage d'aluminium	Barrière thermique et anti-usure	Buse à fusée, ailes et pièces moulées
Fibre de verre / Epoxy	Résistance à la dureté et à l'amortissement	Rotors de frein, dômes solaires, Systèmes de tuyauterie composite.
Carbone / Epoxy	Légers et de bonnes propriétés d'amortissement	Composants d'hélicoptères Portes de trains d'atterrissage Panneaux d'échangeurs de chaleur Pièces de moteur
TiAl / SiC SiC/C	Revêtements résistants aux températures et aux chocs	Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine.
Graphite / Epoxy	Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques.	Coques de pression cylindriques Télescopes spatiaux Réservoirs cryogéniques Antennes satellites
Alliage d'aluminium / Nanotubes de carbone (CNT)	Légèreté et haute rigidité	Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie.
SiCw / Alliage d'aluminium	Légèreté et haute rigidité	Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules de course
WC / Co	Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure	Machines et les outils de formage, les outils de coupe et les os artificiels.
Al / SiC	Dureté et ténacité	Chambres de combustion, Garnitures de cylindre moteur, Volants.
BaTiO ₃ / Si	Contrôle de perte de signal à haute fréquence	Moteurs diélectriques

I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués sont généralement composés de deux matériaux, habituellement céramique et métal, malheureusement dans plusieurs cas les renseignements sur les caractéristiques du matériau que soit la forme, la taille et la distribution sont indisponibles, vu que le module d'élasticité est évalué sur la base de la forme et la distribution de la fraction volumique. À cet effet, des modèles micromécaniques ont vu le jour dans un but de définir les propriétés des matériaux macroscopiquement homogènes.

Parmi les méthodes d'homogénéisation évoquées dans la littérature seules trois d'entre elles sont les plus utilisées à savoir: l'approche du modèle auto-cohérent d'Hill [Hill, R. 1965], la méthode Mori-Tanaka [Mori et Tanaka, 1973] et enfin la loi des mélanges [Markworth et al. 1995].

I.8.1. La loi des mélanges

Une des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués est déterminée par le paramètre p et il varie le long d'une direction en fonction des fractions volumiques et les propriétés des matériaux qui le composent.

Dans les plaques FGM la direction est variable suivant le sens de l'épaisseur (figure I.14).



Figure I.14: Plaque à gradient de propriété.

p est représenté par le module d'élasticité, la masse volumique et le coefficient de Poisson, elle se présente sous la formule suivante :

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.1a})$$

P_1 , P_2 et V_1 , V_2 sont les propriétés du matériau ainsi que les fractions volumiques, la somme des fractions volumiques est égale à 1 :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.1b})$$

La fraction volumique V_1 a une distribution de la loi de puissance suivante [Markworth et al, 1995]:

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1c})$$

En remplaçant (I.1c) dans (I.1b) on obtient :

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1d})$$

Avec : h est l'épaisseur de la plaque et n est l'indice de loi de puissance.

Les matériaux V_1 et V_2 peuvent être en céramique et métal suivant cette distribution, $z = h/2$ est la couche de céramique et qui représente la surface supérieure, $z = -h/2$ est la couche de métal et qui représente la surface inférieure de la plaque à gradient de propriété.

Plusieurs chercheurs basent leurs recherches soit sur la fonction de la loi de puissance, de la fonction sigmoïde ainsi que celle de la fonction exponentielle dans un but de décrire les fractions volumiques d'un matériau fonctionnellement gradué.

I.8.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

Dans une plaque P-FGM, la fraction volumique obéit à une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p \quad (\text{I.2})$$

Où p est le paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque et z présente coordonné suivant l'épaisseur. Les propriétés matérielles de la plaque sont déterminées par la loi des mélanges [Mori et Tanaka, 1973].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.3})$$

Les modules d'Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM sont respectivement E_m et E_c . La figure I.15 illustre la variation de la fraction volumique dans le sens de l'épaisseur de la plaque. D'après la figure, on remarque que près de

la surface inférieure pour $P < 1$ la fraction volumique diminue rapidement par contre près de la surface supérieure pour $P > 1$ la fraction volumique augmente rapidement.

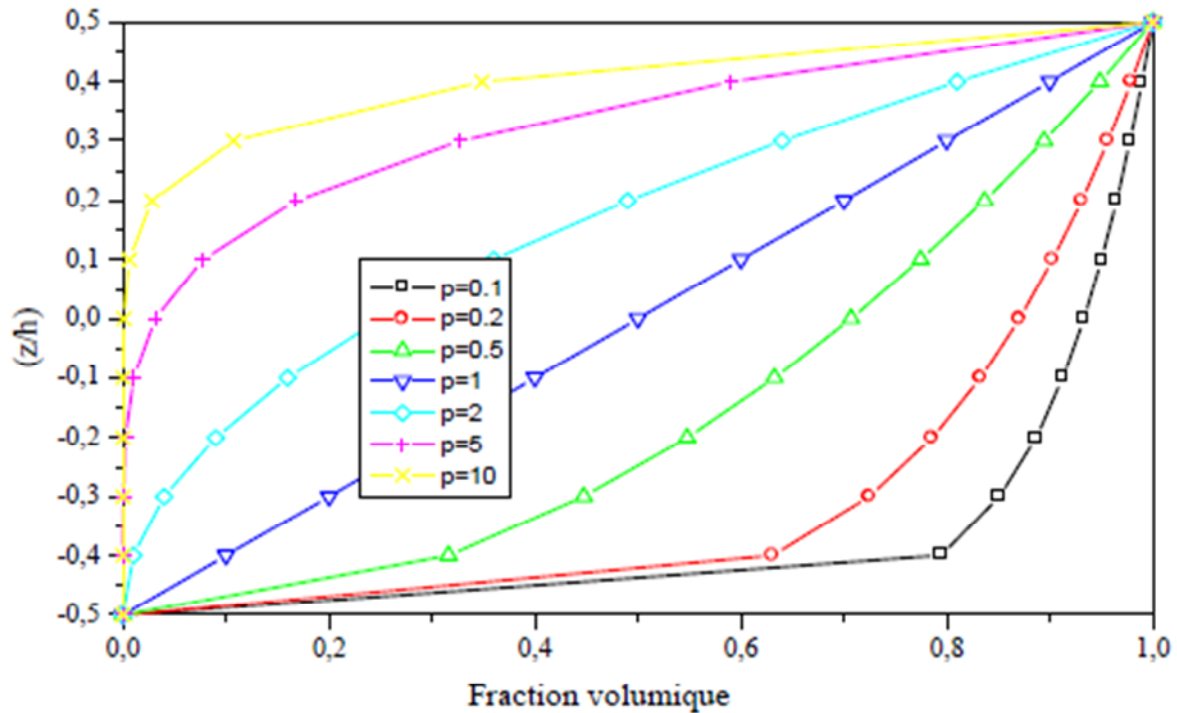


Figure I.15: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM [Bao, 1995]

I.8.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et Chung [Chi et al, 2003] ont défini la fraction volumique par l'utilisation de deux fonctions de la loi de puissance dans le but d'assurer une distribution des contraintes dans toutes les interfaces de la plaque. Les fonctions de la loi de puissance se présentent sous la forme :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4b)$$

Le module d'Young de la plaque S-FGM est calculé en utilisant la loi des mélanges comme suit :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + (1 - V_1(z)) E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.5a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + (1 - V_2(z)) E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.5b)$$

La variation de la fraction volumique qui est défini par les équations (I.5a) et (I.5b) représente les distributions sigmoïdes, illustrée sur la figure I.16.

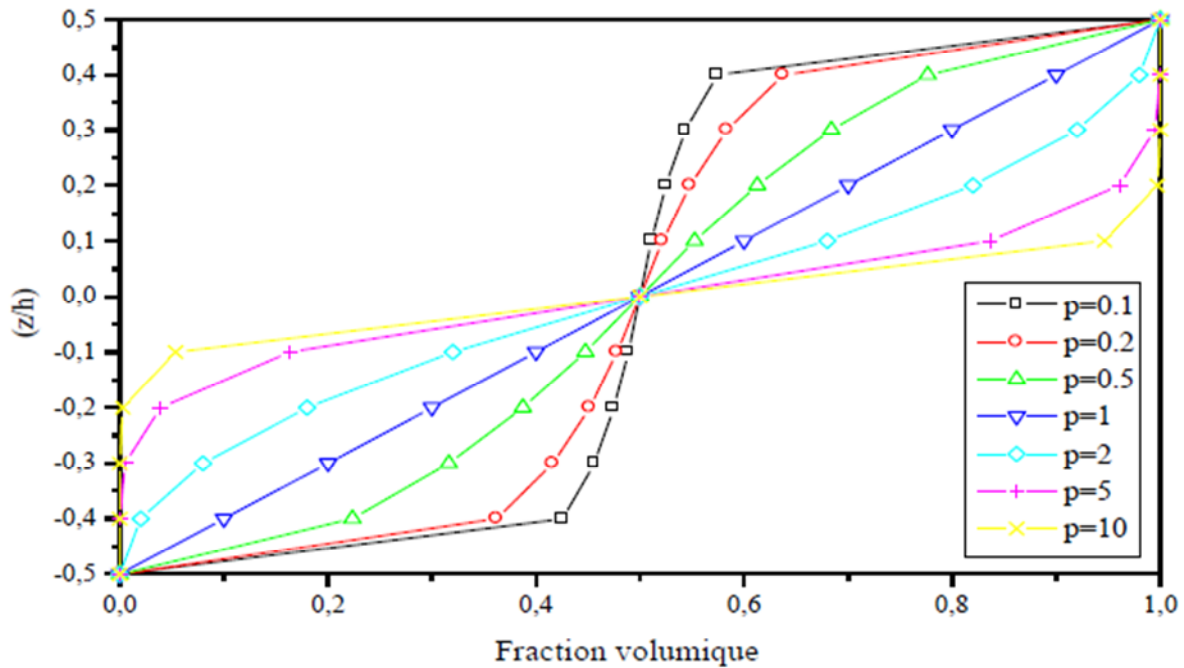


Figure I.16: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM [Chi et al. 2003].

I.8.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM

Afin de définir les propriétés matérielles des matériaux, plusieurs chercheurs ont une tendance à utiliser la fonction exponentielle, la variation du module d'Young à travers l'épaisseur (figure I.17).

Delale [F. Delale et al.1983] ont défini la fonction exponentielle sous forme :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (I.6a)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (I.6b)$$

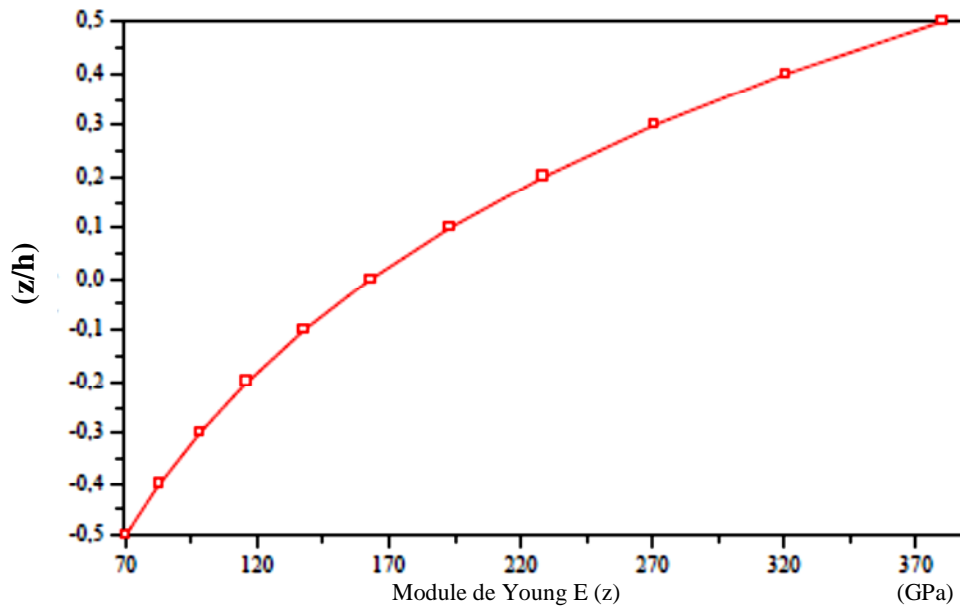


Figure I.17: La variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

[F. Delale et al.1983].

I.8.2. Le modèle auto-cohérent de Hill

Ce modèle est élaboré dans le principe de noyer dans un matériau continu chaque inclusion de renforcement, dont ses propriétés sont celles du composite, la méthode nommée ne permet pas de faire une distinction entre la matrice et les phases de renforcement quoique le module d'ensemble soit le même qui est présagé dans un autre composite alors qu'un remplacement des rôles respectifs des phases est élaboré. Elle est donc en mesure de déterminer dans des régions dont leur microstructure squelettique interconnecté [Hill, 1965; Reiter et al.1997] (figure I.18).



Figure I.18: Phase matérielles avec microstructure squelettique [Kanaun et al. 2008].

Par la méthode d'auto-cohérent des modules élastiques locale K et μ sont donnés :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K-K_2} \frac{V_2}{K-K_1} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{\eta}{\mu} = \frac{V_1}{\mu-\mu_2} \frac{V_2}{\mu-\mu_1} \quad (\text{I.8})$$

Ou :

$$\delta = 3 - 5\eta = \frac{K}{K+\frac{3\mu}{3}} \quad (\text{I.9})$$

Après remplacement du paramètre dans l'équation (I.7), l'équation est écrite sous la forme :

$$\frac{1}{K+\frac{4\mu}{3}} = \frac{V_1}{K_1+\frac{4\mu}{3}} + \frac{V_2}{K_2+\frac{4\mu}{3}} \quad (\text{I.10})$$

Et ensuite elle est donnée comme suit:

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1+\frac{4\mu}{3}}} + \frac{1}{\frac{V_2}{K_2+\frac{4\mu}{3}}} - \frac{4\mu}{3} \quad (\text{I.11})$$

Le paramètre μ est obtenu en résolvant de l'équation suivante :

$$(1 - \eta)\mu^2 + [\eta(\mu_1 + \mu_2) - (V_1\mu_1 + V_2\mu_2)]\mu - \eta\mu_1\mu_2 = 0 \quad (\text{I.12})$$

Le paramètre dans l'équation est défini en utilisant l'équation (I.9), en revanche le module de cisaillement μ est défini dans l'équation (I.12) et pour résoudre l'équation il est plus facile d'utiliser la méthode Mori-Tanaka que le modèle d'auto-cohérent.

I.8.3 Le modèle Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur l'évaluation des propriétés effectives du matériau, la méthode est applicable aux régions de la microstructure graduée possédant une phase particulière discontinue et une matrice continue bien définie (figure I.19) [Kanaun et al. 2008].

Dans ce cas de figure, la phase matricielle désignée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière désignée par l'indice 2. K_1 , μ_1 et V_1 désignent respectivement la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase matrice par contre la phase particulière et désignée par K_2 , μ_2 et V_2 , qui

représentent les propriétés matérielles qui sont la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique [Hill, R. 1965 ; Mori et Tanaka, 1973 ; Benyeniste, Y.1987].



Figure I.19:Phase matérielles avec microstructure particulaire [Kanaun et al. 2008].

Dans la méthode de Mori-Tanaka [Mori et Tanaka, 1973] les différentes propriétés locales sont présenter de la manière suivante : K qui est défini comme le module de compressibilité, μ le module de cisaillement, V la fraction volumique, le coefficient de dilatation thermique et cela dans une matrice isotrope pour une distribution aléatoire des particules isotropes et qui sont donnés [Vel et al. 2004 ; Shen, H.S. 2009].

$$\frac{K-K_1}{K_2-K_1} = \frac{V_2}{1+V_1(K_2-K_1)/(K_1+4/3\mu_1)} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} = \frac{V_2}{1+V_1(\mu_2-\mu_1)/(\mu_1+f_1)} \quad (\text{I.14})$$

Ou :

$$f_1 = \mu_1 \frac{9K_1 + 8\mu_1}{6(K_1 + 2\mu_1)} \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\left(\frac{1}{K}\right) - \left(\frac{1}{K_1}\right)}{\left(\frac{1}{K_2}\right) - \left(\frac{1}{K_1}\right)} \quad (\text{I.16})$$

Dans les deux modèles de Hill et Mori-Tanaka le module de Young et le coefficient de Poisson sont défini respectivement par les équations suivante :

$$E = \frac{9K\mu}{(3K+\mu)} \quad (\text{I.17})$$

$$\nu = \frac{(3K-2\mu)}{2(3K+\mu)} \quad (\text{I.18})$$

Tableau I.3: Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM [K. Swaminathan. 2016].

	Matériaux	Module d'élasticité (GPa)	Coefficient de dilatation thermique (10^{-6} 1/K)	Densité (10^3 Kg/m^3)
Céramique	Zircone	100-250	1.7-2.7	5- 6.15
	Alumine	215-413	4.5-10.9	3.5-3.98
	Silicium	140-180	7-8	2.28-2.38
	Carbure de tungstène	600-686	28-88	15.25-15.88
	Carbure de bore	362-472	17-42	2.35-2.55
Métal	Fers	20-150	11-13	6.9-7.35
	Alliages d'aluminium	68-82	21-24	2.5-2.9
	Alliages de zinc	68-95	23-28	4.95-7
	Alliages de nickel	150-245	9-16	7.75-8.65
	Aciers	189-203	16-18	7.85-8.1

I.9. Conclusion

Ce chapitre était dédié à une généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués ou appelés aussi les matériaux à gradient de propriété, nous avons essayé dans cette partie de présenter en amont une introduction sur ces matériaux intelligents, qui sont l'innovation du siècle, tout en débutant par une présentation d'un historique ainsi d'une conceptualisation de ces matériaux à gradient de propriété, étant donné que dans chaque matériau il y a toujours un élément déclencheur qui a permis son apparition, elle est subséquentement articulée par un aperçu sur les méthodes qui existent pour l'élaboration de ces matériaux, que soit le procédé de (poudre sèche, frittage, infiltration), le coulage (séquentiel, centrifuge, en bande), pressage à chaud et enfin la projection thermique.

Et afin d'éviter de se contenter des informations stériles on s'est penché sur des informations distinctives sur ces matériaux dans la diversification qui existe avec les matériaux composites traditionnels, et vu que ces matériaux fonctionnellement gradués montrent des avantages et des inconvénients de plusieurs phénomènes, en conséquence nous avons jugé nécessaire de présenter cette partie et de l'articuler par une présentation sur leurs domaines d'exploitations puisque ces matériaux sont actuellement introduits dans des champs d'applications vastes et sensibles, à titre d'exemple le domaine médical qui est en relation directe avec la survie de l'humanité.

Et en dernier lieu, nous avons évoqué les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des plaques que soit de puissance, sigmoïde ou exponentielle à travers l'épaisseur d'une plaque par la variation des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de poisson et la masse volumique). Dans le chapitre qui va suivre, nous nous attacherons à étudier les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) par une présentation d'une revue bibliographique.

CHAPITRE II:
REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES
THÉORIES DE DÉFORMATION DES
PLAQUES FONCTIONNELLEMENT
GRADUÉES

II.1.INTRODUCTION

À travers ce chapitre, nous allons faire une représentation des différents modèles sur les théories des plaques fonctionnellement graduées dans le cadre de l'analyse et de la modélisation des plaques fonctionnellement graduées dans un but de décrire les réponses statiques et dynamiques de ces plaques sous différents chargement que soit mécanique et/ou thermiques ainsi que le bon choix de la méthode de détermination à appliquer.

Nous allons ci-dessous faire une rétrospective sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), la théorie classique des plaques (CPT) qui est dédiée aux plaques minces, la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) qui est dédiée aux plaques semi-épaisses ensuite vient les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDT) qui est dédiée aux plaques dans leur épaisseur est plus important et enfin la théorie trois dimensions (3D) qui est une théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle.

II.2.Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés

II.2.1.La théorie classique des plaques minces de love-kirchhoff (CLPT)

Cette théorie est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff qui stipule qu'une droite normale au plan moyen d'une plaque reste perpendiculaire après déformation. Dans cette théorie, l'effet de cisaillement transversal est négligeable de ce fait, la déformation est due à la déformation de flexion et de membrane. Ce modèle est référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959; Reddy, 1997; Reddy,1999].

À partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champs de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$) voir figure II.1.

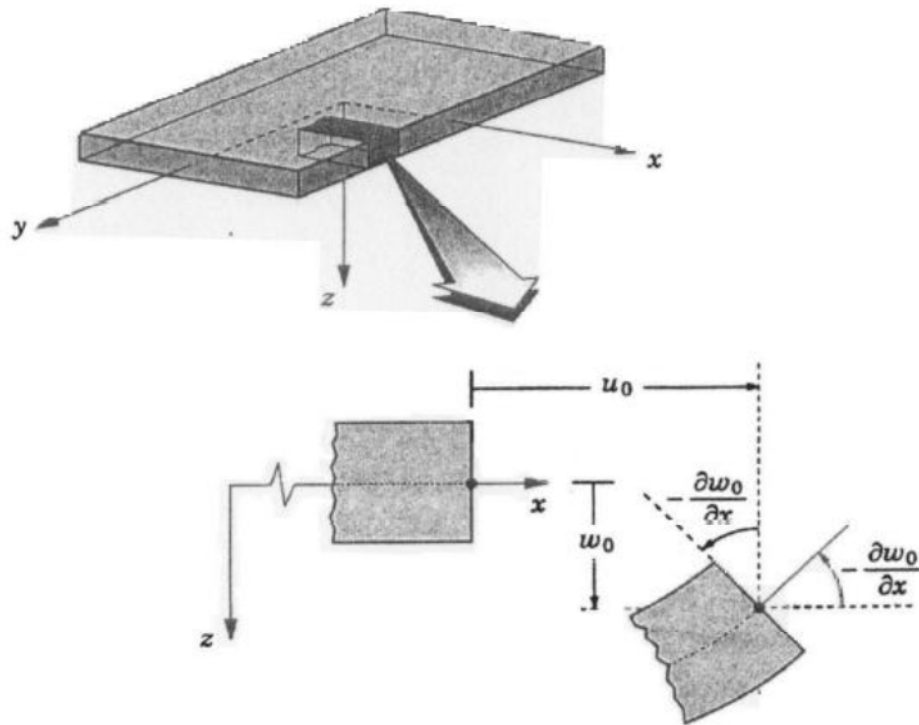


Figure II.1:Modèle des plaques dans le cas de la théorie classique des plaques minces de love- kirchhoff (CPT)[Reddy, 1997].

L'effet de cisaillement transversal n'est pas prise en compte dans cette méthode, de ce fait les résultats pour les plaques épaisses seront surestimer et inexacts. À cet effet survient la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

II.2.2 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Par rapport à la théorie précédente, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre prend en considération l'effet de cisaillement transversal. De ce fait elle nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement puisque les contraintes et les déformations sont constantes le long de l'épaisseur de la plaque. Plusieurs études ont été élaboré dans le contexte de cette théorie [Reissner, 1945; Reissner, 1975; Mindlin, 1951] qui ont abouti au modèle de Reissner-Mindlin ainsi que d'autre travaux comme Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959; Reddy, 1997; Reddy, 1999] et Miara et Podio-Guidugli [Miara et al. 2006].

À partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champs de déplacement en membrane et (ϕ_x, ϕ_y) sont les rotations autour de l'axe x et y voir figure II.2 et qui sont données respectivement : $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

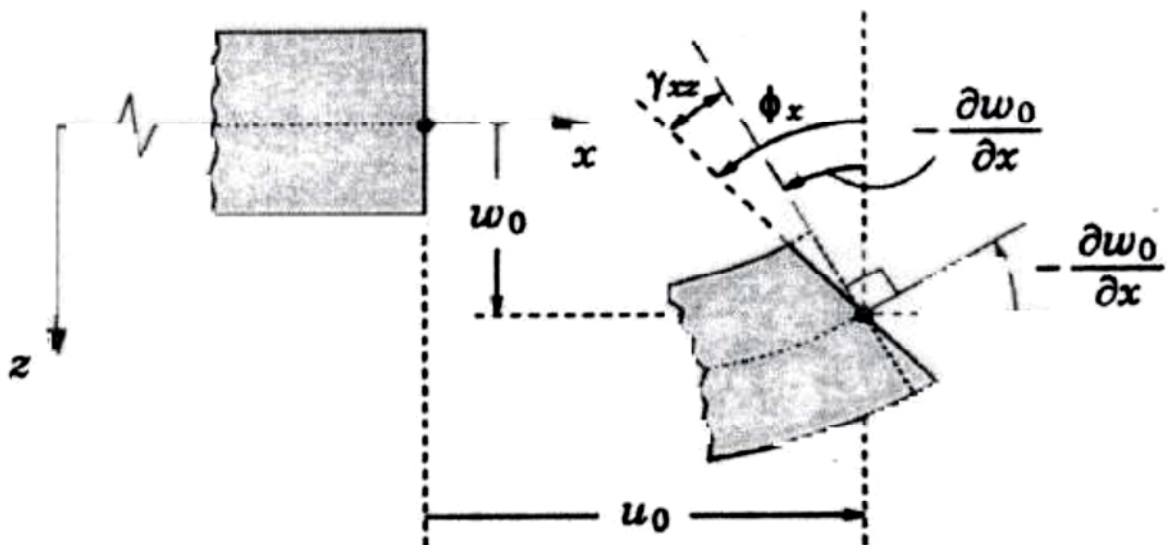


Figure II.2: Modèle des plaques dans le cas de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)[Reddy, 1997].

Et afin d'améliorer ces méthodes et d'éviter d'introduire le facteur de correction de cisaillement, des théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été développées pour remédier à ce problème.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Plusieurs travaux sur les théories d'ordre élevé ont été développés, nous citons à titre d'exemple les travaux faites par [F.B.Hildebrand, 1949; P. M.Naghdi, 1957; Reddy, 1984; Reddy et al. 1985; Reddy, 2000; Iyengar et al. 1974; Iyengar et al.1982; Krishna Murty, 1977; Krishna Murty, 1986; Krishna Murty, 1987; T. Kant et Swaminathan, 2002] dans un but de négliger l'utilisation du facteur de correction en cisaillement, la plupart de ces théories sont basées sur un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_\alpha(x, y) + z^2\phi_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\phi_\alpha^n(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Où n définit l'ordre utilisé dans la théorie, la cinématique d'un modèle d'ordre élevé est illustré dans la figure II.3 ci-dessous :

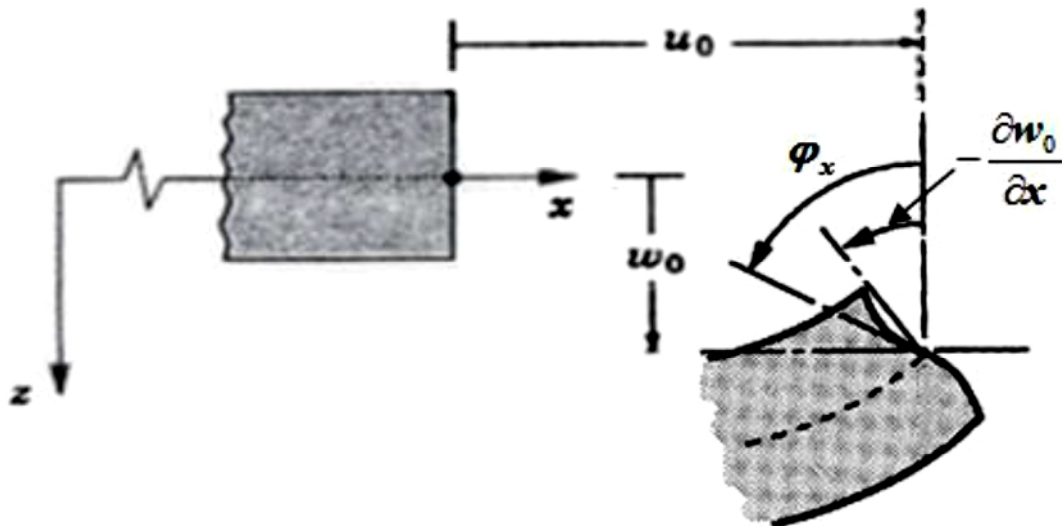


Figure II.3:Modèle des plaques dans le cas de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) [Reddy, 1997].

Dans un but de définir comment ces théories d'ordre supérieur étaient développées ont ses basées sur les hypothèses faites par Reddy [Reddy, 1990], Mallikarjuna et kant [Mallikarjuna et al. 1993] qui se présente comme suit :

- Après déformation, les sections transversales ne restent pas forcément planes et normales au plan moyen ;

- Par rapport à l'épaisseur de la plaque, les déplacements sont petits ;
- Dans la direction transversale, la déformation axiale n'est pas négligeable ;
- Généralement, dans la direction transversale, la contrainte normale n'est pas négligeable.

La recherche dans la littérature montre que la majorité des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé sont fondées sur des approches de Reissner [Reissner, 1945], Henchy-Mindlin [Mindlin, 1951] et Ambartsumian [Ambartsumian, 1969], qui se présente sous le champ de déplacements suivant:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II.4.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{II.4.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.4.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champs de déplacement en membrane et (ϕ_x, ϕ_y) sont les rotations autour de l'axe x et y et qui sont données respectivement :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \text{ et } \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$ est la fonction de cisaillement transversale défini en fonction de la théorie appliqué, à titre d'exemple dans la théorie classique des plaques la fonction de cisaillement transversale $f(z) = 0$ par contre dans le cas de la théorie de premier ordre $f(z) = z$.

Une théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) est développée par Reddy [Reddy, 1997] ont utilisant la fonction suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.5})$$

Le champ de déplacement dans le modèle de Reddy est membranaire et cubique, il permet d'avoir une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur ainsi qu'une satisfaction sur les conditions aux limites dans les surfaces libres. À cet effet, ce modèle permet d'avoir une bonne approximation des contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Touratier parvient à développer un nouveau modèle (SSDT) en se basant sur une fonction trigonométrique sinusoidale par rapport aux autres modèles d'ordre élevé qui utilisent des fonctions polynomiales et qui permet une modélisation des contraintes de cisaillement [Touratier, 1991] cette fonction se présente de la façon suivante :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.6})$$

Ce modèle SSDT a une exactitude plus que le modèle TSDT de Reddy et permis de déterminer les contraintes de cisaillement transverses, il se présente sous une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque.

[M..Karama et al. 2003] ont développé un modèle basé sur une fonction exponentielle pour la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, on utilisant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.7})$$

Et à toute fin utile, un tableau est présenté ci-dessous et qui illustre quelques contributions dans la théorie d'ordre élevé :

Tableau II.1: Différentes fonctions des théories HSDT pour des plaques FGM.

Théorie	Fonction $f(z)$
PSDPT, Reddy [Reddy, 1997]	$f(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2}z^2)$
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin(\frac{\pi z}{h})$
ESDPT, Karama [Karama et al. 2003]	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Reissner [Reissner 1975]	$f(z) = \frac{5z}{4} (1 - \frac{4}{3h^2}z^2)$
Soldatos [K. P. Soldatos, 1993]	$f(z) = h \sin(\frac{z}{h}) - z \sinh(\frac{1}{2})$
Mantari [Mantari et al. 2012]	$f(z) = \sin(\frac{\pi z}{h}) e^{m \cos(\frac{\pi z}{h})} + m(\frac{\pi z}{h})$
Ait Atmane [H. Ait Atmane et al. 2010]	$f(z) = \frac{\cosh(\frac{\pi}{z})}{[\cosh(\frac{\pi}{z}) - 1]} z - \frac{(\frac{h}{\pi}) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{[\cosh(\frac{\pi}{z}) - 1]}$
El meiche [El meiche et al. 2011]	$f(z) = \frac{(\frac{h}{\pi}) \sin(\frac{\pi z}{h})}{\cosh(\frac{\pi}{z}) - 1} - z$
Aydogdu [Aydogdu, 2009]	$f(z) = z \frac{z(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, > 0$
Nguyen [T. K. Nguyen, 2007]	$f(z) = \sinh^{-1}(\frac{3z}{h}) - z(\frac{6}{h \cdot 13})$
Benachour [Benachour A., 2011]	$f(z) = z_{ns} + C - \sin(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h})$

II.2.4 La théorie raffinée de déformation des plaques

En 2002, Un modèle raffiné de déformation des plaques, RPT a été développé par le chercheur Shimpi pour les plaques isotropes dans un but de réduire le nombre de variables par rapport aux théories d'ordre élevé existante [Shimpi, 2002].

Cette théorie raffinée de déformation elle présente une similitude par rapport à la théorie classique des plaques (CPT) et ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement. Plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que Kim et Thai [Kim et al. 2009] et [H. Ait atmane et al. 2010] ou ils ont appliqué cette théorie dans le cas de la flexion des plaques FGM dans le cas statique ainsi que d'autres travaux de Thai et Kim [Thai et al. 2011] et [Hadji et al. 2011] dans le cas du flambement des plaques orthotropes.

De ce fait, le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{II.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{II.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.8.c})$$

Avec (u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y .

(w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse.

II.2.5 La théorie quasi-3D de déformation des plaques

Dans ce type de théorie quasi-3D le déplacement transversal est scindé en trois constituantes qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque en anglais: « stretching effect ». Plusieurs chercheurs ont travaillé dans ce type de théorie tel que Kim et Thai [Kim et al. 2009] qui avait proposé une théorie à cinq variables pour la déformation au cisaillement de premier ordre au lieu des théories d'ordre élevé à six variables, d'autre chercheurs ont proposée par le biais de plusieurs fonctions des théories quasi-3D à cinq variable tel que [Hebali et al. 2014], [Bennoun et al.2016], [Abdelaziz et al. 2017], [Benchohra et al. 2018], [Bouhadra et al. 2018] et [Meksi et al. 2018], [Abualnour et al. 2018]. Des théories quasi-3D à quatre variable en vue le jours est cela grâce à l'introduction de nouvelle hypothèses pour les théories quasi-3D à six inconnues suivant les travaux de Zenkour qui à développer une nouvelle théorie quasi-3D a quatre inconnues pour différents types de plaques: FGM [Zenkour. 2013], pour les plaques sandwich [Zenkour. 2013] et les plaques composite stratifiées [Zenkour. 2015], il y a aussi Mantari et Guedes Soares [Mantari et al. 2014] qui ont développer une théorie quasi -3D à quatre inconnues en combinant à l'aide d'une fonction hyperbolique l'effet de cisaillement et l'effet de l'étirement du déplacement transversal.

De ce fait le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{II.9.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{II.9.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \phi(x, y) \quad (\text{II.9.c})$$

Avec (u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y.

(w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement.

$g(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec :

$$g(z) = 1 - f(z) \quad (\text{II.10})$$

II.3. Conclusion

Ce chapitre était dédié à donner une lecture sur la littérature des différentes théories des plaques monocouches existante ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine à savoir : la théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) et une nouvelle théorie qui permet de réduire le nombre d'inconnus ce qui implique l'optimisation du temps de calcul, c'est la théorie de la déformation des plaques quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque.

Dans ce contexte cette nouvelle théorie de déformation quasi- 3D va être utilisée dans notre travail pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques sous l'effet d'un chargement mécanique.

CHAPITRE III:

ETUDE ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT
STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES
FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES ÉPAISSES
EN UTILISANT UNE NOUVELLE THÉORIE DE
DÉFORMATION DE CISAILLEMENT QUASI-3D

III.1.INTRODUCTION

Afin de résoudre des problèmes de la mécanique des milieux continus plusieurs théories, on était développé par des calculs approximatif sur la base d'un système d'équations d'équilibre, on prenant en considération des conditions aux limites.

Une modélisation du comportement mécanique dans le cas de l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques épaisses en FGM est présentée dans ce chapitre par l'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec seulement quatre variables, cette dernière tient en compte de l'effet d'étirement dans le sens de l'épaisseur de la plaque « Stretching effect ».

L'utilisation des termes d'intégrales dans le champ de déplacement implique la réduction du nombre de variables, par conséquence permet de déterminer leurs modèles mathématiques. Pour les équations de mouvement et les conditions aux limites, ils seront déterminés selon le principe d'Hamilton.

III.2.Revue des travaux antérieurs sur les plaques fonctionnellement graduées

Plusieurs travaux ont été publiés tels que [Akavci.2014] qui a présenté un HSDT hyperbolique efficace pour la vibration libre des plaques rectangulaires épaisses en FG sur une fondation élastique. [Hebali et al.2014] ont proposé un HSDT hyperbolique quasi-3D pour l'analyse statique et vibratoire des plaques FG. [Ahmed.2014] a étudié le comportement post-flambement des poutres sandwich avec des faces à gradations fonctionnelles en utilisant une théorie cohérente d'ordre supérieur. [Belabed et al. 2014] ont développé un HSDT efficace et simple pour les analyses de flexion et dynamiques des plaques FG. Le nombre de variables et d'équations directrices a été réduit à cinq au lieu de six en divisant le déplacement transversal en trois parties qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement en épaisseur. [Akavci.2016] a proposé un nouveau HSDT hyperbolique quasi-3D pour l'analyse des contraintes de flexion, des fréquences naturelles et des charges de flambement des plaques sandwich FG. [Mantari.2016] a utilisé une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D non polynomiale généralisée pour les plaques composites avancées. [Liu et al.2017] ont présenté une analyse des plaques FG par une méthode isogéométrique hyperbolique quasi-3D. [Bennoun et al.2016] ont proposé une nouvelle théorie de la plaque raffinée à cinq variables pour l'analyse vibratoire des plaques sandwich fonctionnelles. [Abdelaziz et al.2017] ont

développé une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique efficace pour la flexion, le flambage et la dynamique des plaques sandwich FG avec diverses conditions aux limites. [Hachemi et al.2017] ont exposé une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement à trois inconnues pour l'analyse en flexion des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. [Sekkal et al.2017b] a présenté un nouveau HSDT quasi-3D pour le flambement et la vibration de la plaque FG. [Abualnour et al.2018] ont proposé une nouvelle théorie de la plaque trigonométrique quasi-3D pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites avancées.

D'autres travaux peuvent également être consultés dans les articles tels que les travaux [Attia et al et al.2015 et 2018], [Belabed et al. 2018], [Benchohra et al. 2018], [Bouhadra et al. 2018] et [Meksi et al. 2018].

III.3.Formulation théorique

III.3.1.Hypothèses de la présente théorie

Dans cette théorie les hypothèses sont définies comme suit :

- Les déformations considérées sont infinitésimales puisque les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque.

- Les termes : $(\varphi_x) = k_1 f(z) \theta(x, y) dx$ et $(\varphi_y) = k_2 f(z) \theta(x, y) dx$.

-Le terme (φ_z) est égale à().

- Les déplacements (u) dans la direction des x et (v) dans la direction des y se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements u et v dans les directions (x) et (y) peuvent être divisées en trois termes :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y) \quad \text{(III.1)}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y) \quad \text{(III.2)}$$

Les constituantes u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane.

Les constituantes u_b et v_b , sont les composantes de la flèche semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Leurs expressions est donnée par :

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \quad v_b(x, y) = z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

Les termes u_s et v_s sont les constituantes de cisaillement, elles permet d'avoir une variation parabolique de déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} , ainsi qu'une variation parabolique des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} qui sont nulles aux bords inférieure et supérieure de la plaque.

Le nombre de variables est réduit par l'utilisation de l'intégral d'où les expressions u_s et v_s dépendent et sont attribuée par :

$$u_s(x, y) = k_1 f(z) \theta(x, y) dx, \quad v_s(x, y) = k_2 f(z) \theta(x, y) dy \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque.

La variation des contraintes à travers l'épaisseur ainsi que les contraintes de cisaillement transversales sont décrits par la fonction $f(z)$.

Notre choix des fonctions est déterminé sur la base de la fonction hyperbolique donnée par Mantari and Guedes Soares (2014):

$$f(z) = \frac{4h}{5} \sinh\left(\frac{5}{4h} z\right) + z \left[-\cosh\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{8}\right) \right], \quad g(z) = -\frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{4h} z\right) \quad (\text{III.5})$$

Le déplacement transversal (w) est scindé en deux termes :

Le premier est (w_0) qui définit une partie de la flèche de la plaque, vu que la dérivé est égal numériquement à la rotation de la section transversale.

Le deuxième terme (φ_z) tient en compte de la flèche qui est due à l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque en incluant la fonction $g(z)$ qui est donnée par l'équation (III.7).

Ces deux constituantes se consignent sous la forme suivante:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Avec :} \quad g(z) = \frac{d_f(z)}{dz} \quad (\text{III.7})$$

III.3.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque en matériau à gradient de propriétés d'une configuration rectangulaire de longueur (a), de largeur (b) et d'épaisseur (h) uniformes, elle est représentée dans la figure (III.1). Le système de coordonnées cartésien rectangulaire (x, y, z), à z = 0 le plan x, y coïncide avec la surface médiane de la plaque.

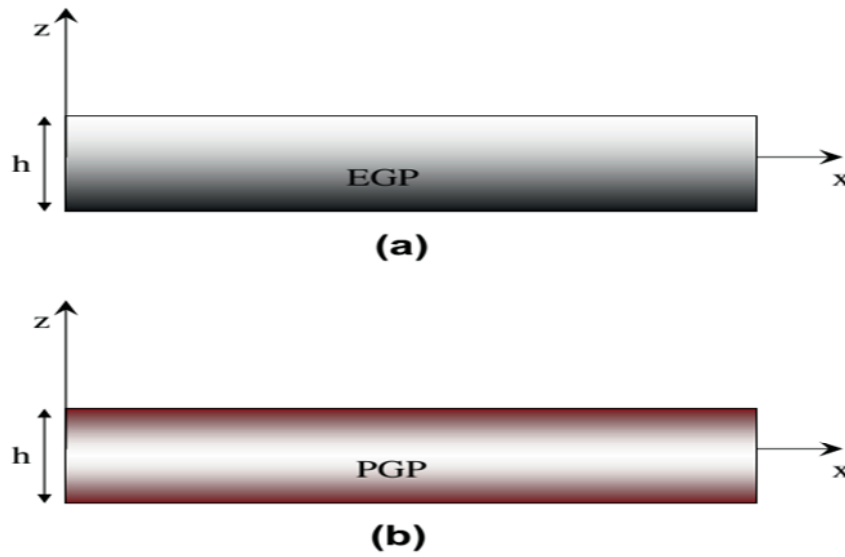


Figure III.1: Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée.

III.3.3. propriétés matérielles des plaques FGM

Les caractéristiques du matériau peuvent changer selon l'épaisseur et la fonction donnée dans l'équation suivante:

$$P(z) = \begin{cases} P_m V(z) & V(z) = e^{p\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)}, \text{ Cas 1 (modèle exponentiel)} & \text{(III.8.a)} \\ (P_c - P_m)V(z) + P_m & V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, \text{ Cas 2 (modèle de la loi de puissance)} & \text{(III.8.b)} \end{cases}$$

Où P_m et P_c présente la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, p est l'indice de la variation matérielle à travers l'épaisseur. Dans ce travail, le module de Young E et le module de cisaillement G , changent en fonction du cas de problème selon l'équation (III.8), et le coefficient de Poisson ν est considéré comme constant.

La figure III.2 indique la fonction exponentielle $V = \left(\bar{z} = \frac{z}{h} \right)$ le long de l'épaisseur d'une plaque graduée exponentiellement (EGP) pour différentes valeurs du paramètre matériel p .

Le champ de déplacement satisfait les conditions de contraintes transversales de cisaillement en un point $(x, y, \pm h / 2)$ sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

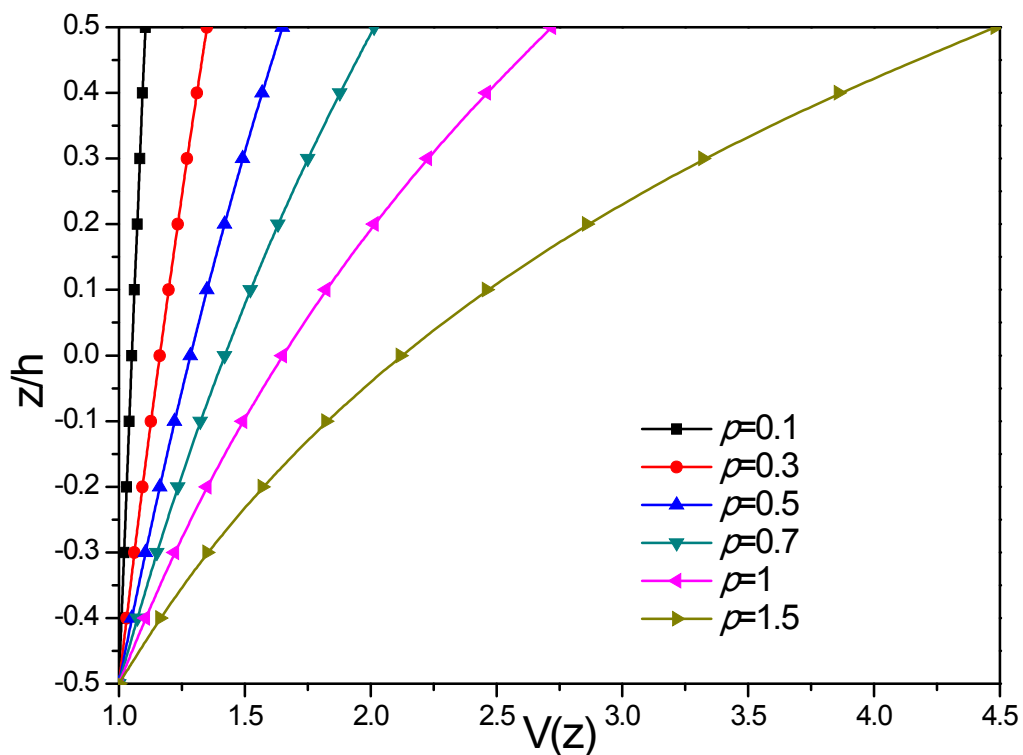


Figure III.2: Fonction graduée exponentiellement $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un EGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .

La figure III.3 montre la fonction en puissance pour les plaques graduées en puissance (PGP).

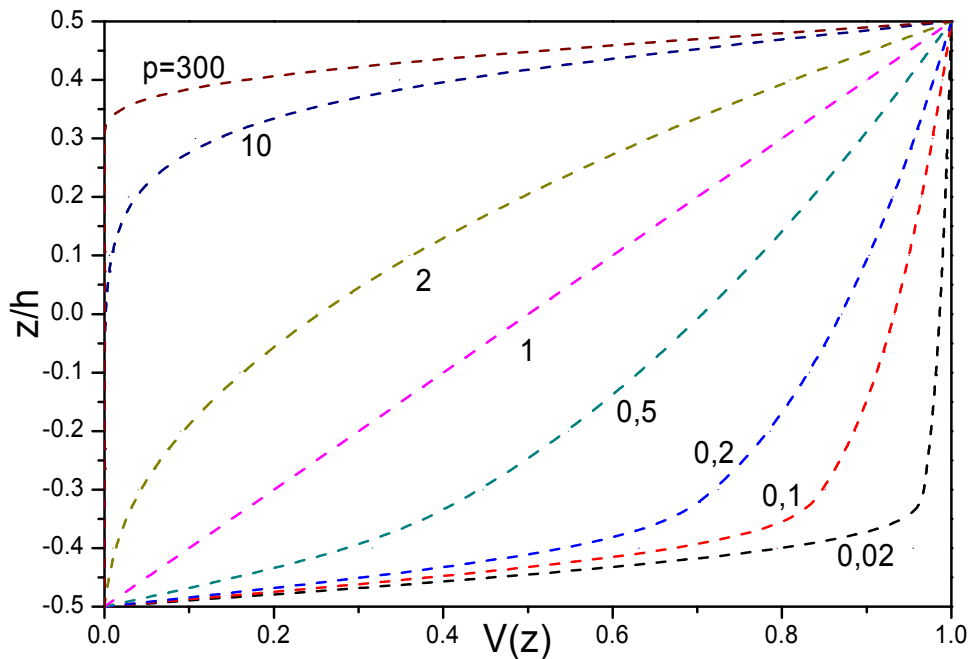


Figure III.3: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'un PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .

III.4. Cinématique et équation constitutives

III.4.1. Champs de déplacement

Des hypothèses réductrices sus-cités sont introduites dans le but de modifier les théories de déformation des plaques traditionnelles quasi-3D dont l'effet de l'étirement est pris en compte de manière à ce que le nombre d'inconnues soit réduit. Dans les théories quasi-3D traditionnelles le champ de déplacement est défini par:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) dx \quad (III.9.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) dy \quad (III.9.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (III.9.c)$$

Où u_0 ; v_0 ; w_0 , φ_x , φ_y , et φ_z sont les déplacements inconnus du plan médian de la plaque et $f(z)$ est la fonction définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur.

Notre champ de déplacement est obtenu en s'appuyant sur les hypothèses sus-cités:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{III.10.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{III.10.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y) \quad (\text{III.10.c})$$

Où k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque.

Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont définis dans l'équation (III.5).

III.4.2.Champs de déformation

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements définis dans l'équation (III.10.a-c)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.11})$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.12.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \theta \quad (\text{III.12.b})$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III.12.c})$$

Les intégrales présentées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.13})$$

Les coefficients A' et B' sont formulés en fonction de la méthode de Navier et sont définis par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = -\alpha^2, \quad k_2 = -\beta^2 \quad (\text{III.14})$$

$$\alpha \text{ et } \beta \text{ sont données par: } \quad \alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \quad (\text{III.15})$$

III.4.3. Les équations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour les plaques fonctionnellement graduée est définie par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations.

Les coefficients de rigidité C_{ij} sont exprimés par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.17.a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.17.b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.17.c})$$

III.4.4. Détermination des équations gouvernantes

Le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué dans le but d'élaborer les équations du mouvement et les conditions aux limites d'une plaque fonctionnellement graduée. Le principe d'Hamilton est exprimé par :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{III.18})$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle, δV est le travail virtuel externe sous l'effet d'un chargement externe appliquée à la plaque et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est définie par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \quad (\text{III.19}) \\ \delta U &= \int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1 \right] dx dy \end{aligned}$$

En substituant les équations (III.11) et (III.16) dans l'équation (III.19) et en l'intégrant dans l'épaisseur de la plaque, l'équation (III.19) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1 \right] dA \quad (\text{III.20}) \end{aligned}$$

Où les résultantes des contraintes N , M , S et Q sont données par :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy); \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{III.21.a})$$

Et

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (III.21.b)$$

La variation de l'énergie de déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta V = - \int_{\Omega} q \delta w dx dy \quad (III.22)$$

Où q est la charge transversale répartie et Ω est la surface supérieure.

La variation de l'énergie cinétique est exprimé par:

$$\delta K = \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \quad (III.23)$$

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{w}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & + J_1 \left[(k_1 A') (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{v}_0) + (k_2 B') (\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0) \right] + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] \\ & + K_2 \left[(k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right] + J_1^s [\theta \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\theta}] \\ & - J_2 \left[(k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right] + K_2^s \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \} dA \end{aligned} \quad (III.24)$$

$\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (III.8) et les moments d'inertie sont exprimé par :

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2) \rho(z) dz \quad (III.25)$$

III.4.5. Les équations gouvernantes de la plaque

En substituant les expressions de déplacement par déformation ainsi que contrainte par déformation qui sont définie respectivement par les l'équation (III.20), (III.22) et (III.24) dans l'équation (III.18), ensuite en intégrant par parties tout en mettant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 , et $\delta \theta$ égal à zéro. Les équations du mouvement obtenues sont données sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + (k_1 A') J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + (k_2 B') J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left((k_1 A') \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B') \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : \quad & -(k_1 A') \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_2 B') \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - N_z + (k_1 A') \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + (k_2 B') \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} \\
 & + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = J_1 \left((k_1 A') \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + (k_2 B') \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 & + J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\theta} + \frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{8}\right) q_m
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

En substituant l'équation (III.11) dans l'équation (III.16) et les résultants trouvés dans l'équation (III.21), les contraintes résultantes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \theta \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix}, \tag{III.27.a}$$

$$N_z = L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) + R^a \varepsilon_z^0 \tag{III.27.b}$$

Où:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{III.28.a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{III.28.b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{III.28.c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \tag{III.28.d}$$

$$Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}^t, S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}^t \quad (III.28.e)$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{55}^s & 0 \\ 0 & F_{44}^s \end{bmatrix}, X^s = \begin{bmatrix} X_{55}^s & 0 \\ 0 & X_{44}^s \end{bmatrix}, A^s = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \quad (III.28.f)$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (III.28.g)$$

Les coefficients de rigidité sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ \nu \\ 1-2\nu \\ 2\nu \end{Bmatrix} dz, \quad (III.29.a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (III.29.b)$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} ([f'(z)]^2, f'(z)g(z), g^2(z)) dz \quad (III.29.c)$$

$$(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s) = (F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) \quad (III.29.d)$$

En substituant l'équation (III.27) dans l'équation (III.26), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prennent la forme suivante:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B') + B_{12}^s k_2 B')d_{122}\theta + B_{11}^s k_1 A' d_{111}\theta + Ld_1\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + (k_1A')J_1d_1\ddot{\theta}\delta v_0 \quad (III.30.a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A') d_{112} \theta + B_{22}^s k_2 B' d_{222} \theta + L d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta} \delta w_0 \quad (\text{III.30.b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} \theta + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} \theta + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} \theta + L^a (d_{11} \theta + d_{22} \theta) + q = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\theta} + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.30.c})$$

$$-k_1 A' B_{11}^s d_{1111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1222} u_0 - (B_{22}^s k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} v_0 - B_{22}^s k_2 B' d_{2222} v_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} w_0 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} w_0 - H_{11}^s (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - H_{22}^s (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - (2H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) d_{11} \theta + ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) d_{22} \theta - 2R(k_1 A' d_{11} \theta + k_2 B' d_{22} \theta) - L(d_1 u_0 + d_2 v_0) + L^a (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) - R^a \theta - \frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{8}\right) q_m = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - k_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \delta \theta + J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\theta} \quad (\text{III.30.d})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.31})$$

III.5. Solution exacte pour une plaque en FGM

La solution de Navier est employée afin de déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables du déplacement sont écrites comme produit de paramètres arbitraires et fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

La charge transversale q est également exprimée par la série double de sinus de Fourier sous la forme suivante:

$$Q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.33})$$

En remplaçant les équations (III.28) dans les équations (III.26), on obtient l'équation suivante:

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ -\frac{3}{20} \cos\left(\frac{5}{8}\right)q \end{Bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Où

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$$

$$S_{12} = \alpha\beta (A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = -\alpha(B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2)$$

$$S_{14} = \alpha((k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s)\beta^2 + k_1 A' B_{11}^s \alpha^2 - L)$$

$$S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$$

$$S_{23} = -\beta(B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2)$$

(III.35)

$$S_{24} = \beta((k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s)\alpha^2 + k_2 B' B_{22}^s \beta^2 - L)$$

$$S_{33} = -D_{11}\alpha^4 - 2D_{12}\alpha^2\beta^2 - D_{22}\beta^4 - 4D_{66}\alpha^2\beta^2$$

$$S_{34} = -k_1 A' D_{11}^s \alpha^4 + 2D_{12}^s k_2 B' \alpha^2 \beta^2 + 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta^2 + k_2 B' D_{22}^s \beta^4 - L^a (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$S_{44} = (k_1 A')^2 H_{11}^s \alpha^4 + (2k_1 k_2 A' B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 - A_{44}^s \alpha^2 - A_{55}^s \beta^2 + (k_2 B')^2 H_{22}^s \beta^4 - R^a + 2R(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2)$$

Et

$$m_{11} = m_{22} = I_0$$

$$m_{12} = 0$$

$$m_{13} = -\alpha I_1$$

$$m_{14} = \alpha k_1 A' J_1$$

$$m_{23} = -\beta I_1$$

$$m_{24} = \beta k_2 B' J_1$$

(III.36)

$$m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$m_{34} = -J_2 + (k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 + J_0$$

$$m_{44} = K_2 + (k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 + K_0$$

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution pour l'analyse du comportement mécanique dans le cas de la flexion et la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » par l'utilisation d'une récente théorie quasi-3D pour la déformation de cisaillement.

En dissociant le déplacement transversal en deux constituants qui sont : le terme (w_0) défini la flèche de la plaque, et () qui tient en compte de la flèche due à l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque, de ce fait le nombre d'inconnues est réduit à quatre au lieu de plusieurs dans d'autres théories de déformation de cisaillement citées dans la littérature.

Dans cette présente théorie, l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque est pris en compte sans la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement. Elle admet une distribution parabolique à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité sur les bords libres de la plaque.

Dans le chapitre qui suit, les résultats obtenus par cette théorie sont présentés et permettront d'apprécier l'apport de la nouvelle théorie en les comparants avec les résultats obtenus par l'utilisation d'autres théories d'ordre élevé avec ou sans prise en compte de l'effet d'étirement.

CHAPITRE IV :
RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, sont présentés les résultats numériques pour le comportement mécanique des plaques rectangulaires et carrées en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » dans le cas de la flexion et la vibration libre par l'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Dans cette théorie l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque est pris en compte sans la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement avec une distribution parabolique à travers l'épaisseur. Le nombre d'inconnues dans cette nouvelle théorie est de quatre contrairement à d'autre théorie d'ordre élevé.

Le module d'Young est évalué en utilisant deux modèles de distribution à travers l'épaisseur de la plaque en matériaux fonctionnellement gradués sous la forme suivante :

Modèle 1 : modèle exponentiel

$$E(z) = E_m V(z) \quad \text{avec} \quad V(z) = e^{p\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{IV.1})$$

Modèle 2 : modèle de la loi de puissance

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \quad \text{avec} \quad V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (\text{IV.2})$$

IV.2. Résultat numériques et discussions

Les résultats de l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués sont présentés, d'où différentes plaques en matériaux fonctionnellement gradués sont étudiées avec des caractéristiques géométriques et matériels différents dans le but d'évaluer la précision de la théorie proposée.

On a utilisé des plaques fonctionnellement graduées avec des propriétés élastiques qui varient exponentiellement dans la direction « z », ainsi que d'autres plaques fonctionnellement graduées avec des propriétés élastiques qui varient en puissance dans la direction de l'épaisseur « z ».

IV.2. 1.Validation dans le cas de l'analyse statique :

IV.2.1.1. plaque graduée exponentiellement (EGP)

Tableau IV.1 : La propriété mécanique du matériau de la plaque EGP.

Matériaux	Propriétés		
	Module de Young(GPa)	Coefficient de poisson	La masse volumique (Kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	0,3	2702

Les solutions sont attribuées sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement de la flèche maximale adimensionnelle \bar{w} , la contrainte $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ et la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$:

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \frac{10E_b h^3}{q_0 a^4}, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \frac{h^2}{q_0 a^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \frac{h^2}{q_0 a^2},$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right) \frac{h}{q_0 a}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (\text{IV.3})$$

Les tableaux IV.2 jusqu'à IV.6 montrent les résultats de la flèche maximale adimensionnelle (\bar{w}), les contraintes normales adimensionnelles ($\bar{\sigma}_y$) et les Contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles ($\bar{\tau}_{xz}$), pour différentes valeurs du paramètre p , du rapport (b/a) et du rapport d'épaisseur (a/h). Ces résultats sont comparés avec les solutions exactes 3D et HSDT en tenant en compte de l'effet d'étirement [Zenkour. 2007], ainsi qu'un HSDT quasi-3D développé avec six inconnues [Mantari et Guedes Soares. 2013] et un HSDT quasi-3D récent proposé par [Mantari et Guedes Soares. 2014].

Il y a lieu de préciser que les solutions quasi-3D [Mantari et Guedes Soares. 2012d] sont fondées sur une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation parabolique du déplacement transversal dans l'épaisseur, bien que les solutions quasi-3D [Zenkour.2007] et [Mantari et Guedes Soares. 2013] soient fondées sur une variation trigonométrique des déplacements.

Tableau IV.2 : Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ d'une plaque pour divers EGPs ($a/h = 2$).

b/a	Théorie	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$
6	3-D (Zenkour, 2007)	1.638	1.352	1.059	0.826
	Mantari and Guedes Soares (2014)	1.658	1.354	1.045	0.802
	Mantari and Guedes Soares (2013)	1.637	1.336	1.033	0.794
	Mantari and Guedes Soares (2012d)	1.735	1.418	1.100	0.850
	TPT (Zenkour, 2007)	1.629	1.331	1.028	0.791
	HPT (Zenkour, 2007)	1.548	1.265	0.980	0.756
	Présente	1.658	1.354	1.045	0.802
1	3-D (Zenkour, 2007)	0.577	0.477	0.373	0.289
	Mantari and Guedes Soares (2014)	0.600	0.489	0.377	0.288
	Mantari and Guedes Soares (2013)	0.578	0.472	0.365	0.279
	Mantari and Guedes Soares (2012d)	0.636	0.519	0.402	0.308
	TPT (Zenkour, 2007)	0.573	0.468	0.361	0.277
	HPT (Zenkour, 2007)	0.586	0.478	0.369	0.282
	Présente	0.600	0.489	0.376	0.287

Le tableau IV.2 montre la comparaison de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) des différents types de plaques que soit carrée ou rectangulaire pour différentes valeurs de l'indice p qui prend les valeurs de 0.1, 0.5, 1 et 1.5 avec ($a/h = 2$). D'après la lecture du tableau on observe que la flèche (\bar{w}) adimensionnelle est en diminution avec décroissance du rapport (b/a) et elle décroît avec la croissance de l'indice matériel p . Les résultats obtenus correspondent à ceux obtenus par 3-D (Zenkour, 2007), TPT (Zenkour, 2007), HPT (Zenkour, 2007), Mantari and Guedes Soares (2012d), Mantari and Guedes Soares (2013) et Mantari and Guedes Soares (2014).

Tableau IV. 3: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_y(a/2, b/2, h/2)$ pour divers EGP ($a/h = 4$).

b/a	Théorie	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$
6	3-D (Zenkour, 2007)	0.206	0.231	0.266	0.309
	Mantari and Guedes Soares (2014)	0.218	0.247	0.289	0.337
	Mantari and Guedes Soares (2013)	0.213	0.239	0.280	0.329
	Mantari and Guedes Soares (2012d)	0.201	0.230	0.271	0.319
	TPT (Zenkour, 2007)	0.237	0.268	0.314	0.370
	HPT (Zenkour, 2007)	0.282	0.322	0.380	0.448
	Présente	0.219	0.247	0.286	0.333
1	3-D (Zenkour, 2007)	0.217	0.247	0.290	0.340
	Mantari and Guedes Soares (2014)	0.225	0.256	0.302	0.359
	Mantari and Guedes Soares (2013)	0.224	0.255	0.301	0.356
	Mantari and Guedes Soares (2012d)	0.216	0.248	0.293	0.345
	TPT (Zenkour, 2007)	0.235	0.268	0.317	0.374
	HPT (Zenkour, 2007)	0.241	0.276	0.326	0.385
	Présente	0.224	0.255	0.300	0.352

Le tableau IV.3 montre une comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_y$) des différents types de plaques que soit carrée ou rectangulaire pour des différentes valeurs de l'indice p qui prend les valeurs de 0.1, 0.5, 1 et 1.5 avec ($a/h = 4$). On remarque que la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_y$) augmente avec la décroissance du rapport (b/a) et elle augmente avec la croissance de l'indice matériel p . On déduit que les résultats obtenus concordent aux résultats trouvés par 3-D, TPT, HPT (Zenkour, 2007), Mantari and Guedes Soares (2012d), Mantari and Guedes Soares (2013) et Mantari and Guedes Soares (2014).

Tableau IV. 4: Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ pour divers EGPs ($a/h = 10$).

b/a	Théorie	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$	$p = 2.5$	$p = 3$
6	Ref ^(a)	1.034	0.845	0.655	0.507	0.391	0.302	0.232
	Ref ^(b)	1.035	0.846	0.656	0.507	0.391	0.302	0.232
	Ref ^(c)	1.039	0.852	0.667	0.524	0.412	0.323	0.254
	TPT ^(b)	1.032	0.844	0.654	0.505	0.39	0.301	0.231
	Présente	1.034	0.845	0.655	0.507	0.391	0.302	0.232
1	Ref ^(a)	0.279	0.228	0.177	0.137	0.106	0.081	0.063
	Ref ^(b)	0.280	0.229	0.177	0.137	0.106	0.081	0.063
	Ref ^(c)	0.282	0.231	0.181	0.142	0.111	0.087	0.068
	TPT ^(b)	0.279	0.228	0.177	0.137	0.105	0.081	0.062
	Présente	0.279	0.228	0.177	0.137	0.106	0.081	0.063

^(a) Mantari and Guedes Soares (2014).

^(b) Mantari and Guedes Soares (2013).

^(c) Mantari and Guedes Soares (2012d).

Le tableau IV.4 montre une comparaison de la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) des différents types de plaques que soit carrée ou rectangulaire pour des différentes valeurs de l'indice p qui prend les valeurs de 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 et 3 avec ($a/h = 10$). D'après la lecture du tableau IV.4 on observe que la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) est en diminution avec la décroissance du rapport (b/a) et elle décroît avec la croissance de l'indice matériel p . Les résultats coïncident à ceux obtenus par Mantari and Guedes Soares (2012d), Mantari and Guedes Soares (2013) et Mantari and Guedes Soares (2014).

Tableau IV.5: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_y(a/2, b/2, h/2)$ pour divers EGPs ($a/h = 10$).

b/a	Théorie	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$	$p = 2.5$	$p = 3$
6	Ref ^(a)	0.607	0.693	0.817	0.960	1.127	1.322	1.549
	Ref ^(b)	0.601	0.686	0.808	0.951	1.118	1.312	1.539
	Ref ^(c)	0.603	0.688	0.811	0.954	1.120	1.315	1.542
	TPT ^(b)	0.627	0.717	0.845	0.993	1.165	1.364	1.593
	Présente	0.607	0.693	0.816	0.960	1.127	1.322	1.549
1	Ref ^(a)	0.210	0.239	0.281	0.329	0.387	0.455	0.534
	Ref ^(b)	0.206	0.234	0.275	0.324	0.382	0.451	0.532
	Ref ^(c)	0.206	0.235	0.277	0.326	0.385	0.450	0.528
	TPT ^(b)	0.220	0.250	0.294	0.346	0.407	0.477	0.560
	Présente	0.210	0.238	0.280	0.329	0.386	0.454	0.534

^(a) Mantari and Guedes Soares (2014).

^(b) Mantari and Guedes Soares (2013).

^(c) Mantari and Guedes Soares (2012d).

Le tableau IV.5 présente une comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_y$) des différents types de plaques que soit carrée ou rectangulaire pour des différentes valeurs de l'indice p qui prend les valeurs de 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 et 3 avec ($a/h = 10$). On remarque que la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_y$) est en diminution avec la décroissance du rapport (b/a) et elle augmente avec la croissance de l'indice matériel p . Ces résultats coïncident avec ceux obtenus par Mantari and Guedes Soares (2012d), Mantari and Guedes Soares (2013) et Mantari and Guedes Soares (2014).

Tableau IV.6: Comparaison de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$ pour divers EGP_s ($a/h=10$).

b/a	Théorie	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$	$p = 2.5$	$p = 3$
6	Ref ^(a)	0.558	0.549	0.524	0.486	0.440	0.389	0.338
	Ref ^(b)	0.463	0.461	0.454	0.442	0.425	0.407	0.384
	Ref ^(c)	0.463	0.461	0.454	0.441	0.425	0.406	0.384
	TPT ^(b)	0.478	0.475	0.468	0.456	0.44	0.421	0.398
	Présente	0.537	0.529	0.505	0.468	0.423	0.373	0.324
1	Ref ^(a)	0.274	0.271	0.260	0.243	0.221	0.198	0.174
	Ref ^(b)	0.238	0.237	0.233	0.227	0.218	0.209	0.199
	Ref ^(c)	0.238	0.237	0.233	0.227	0.218	0.209	0.198
	TPT ^(b)	0.245	0.244	0.24	0.234	0.226	0.216	0.204
	Présente	0.265	0.262	0.251	0.234	0.214	0.191	0.167

^(a) Mantari and Guedes Soares (2014).

^(b) Mantari and Guedes Soares (2013).

^(c) Mantari and Guedes Soares (2012d).

Le tableau IV.6 présente une comparaison de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle ($\bar{\tau}_{xz}$) des différents types de plaques, carrée ou rectangulaire, pour différentes valeurs de l'indice p qui prend les valeurs de 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 et 3 avec ($a/h=10$). On remarque que la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle ($\bar{\tau}_{xz}$) décroît avec la décroissance du rapport (b/a) et l'augmentation de l'indice matériel p . Les résultats correspondent à ceux obtenus par Mantari and Guedes Soares (2012d), Mantari and Guedes Soares (2013) et Mantari and Guedes Soares (2014).

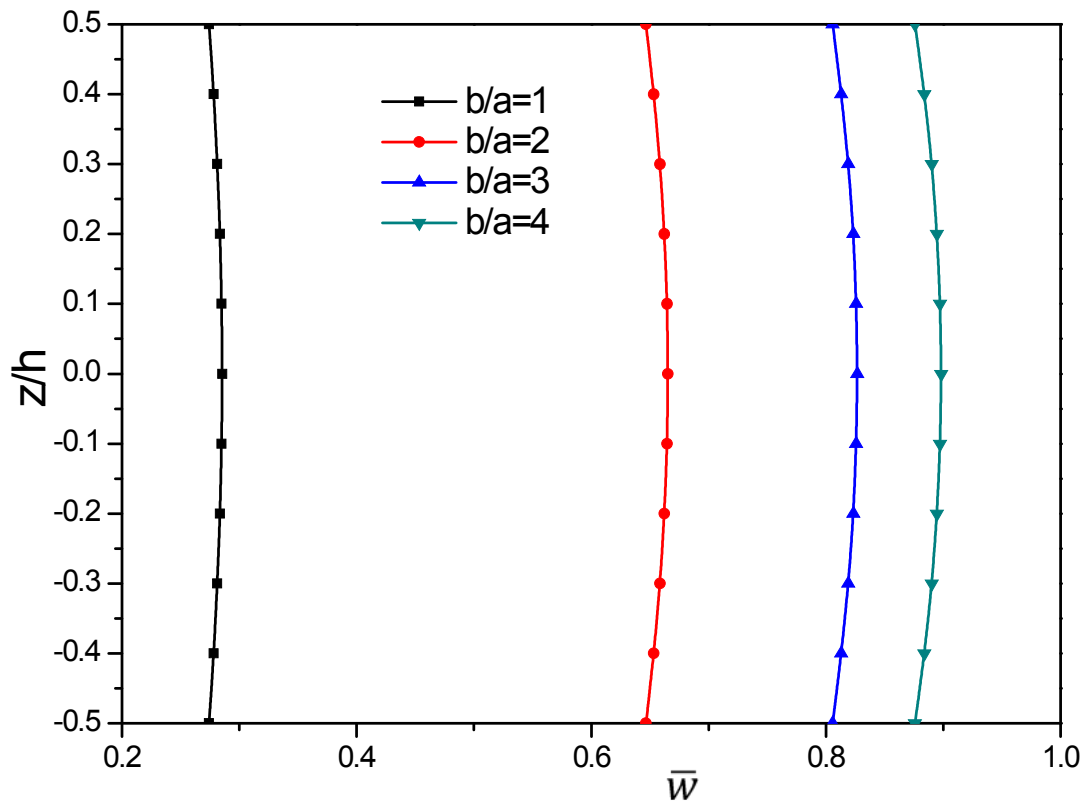


Figure IV.1: Variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec ($a/h = 4$ et $p = 0.5$).

La figure IV.1 présente la variation adimensionnelle de la flexion maximale à travers l'épaisseur de la plaque et des différentes valeurs du rapport $b/a = \{1, 2, 3, 4\}$ et ($a/h = 4$) avec un indice matériel $p = 0.5$. On peut voir que la flexion maximale est fortement influencée par le rapport d'aspect géométrique de la plaque (b/a) vu que la flèche maximale adimensionnelle (\bar{w}) augmente tant que le rapport (b/a) augmente.

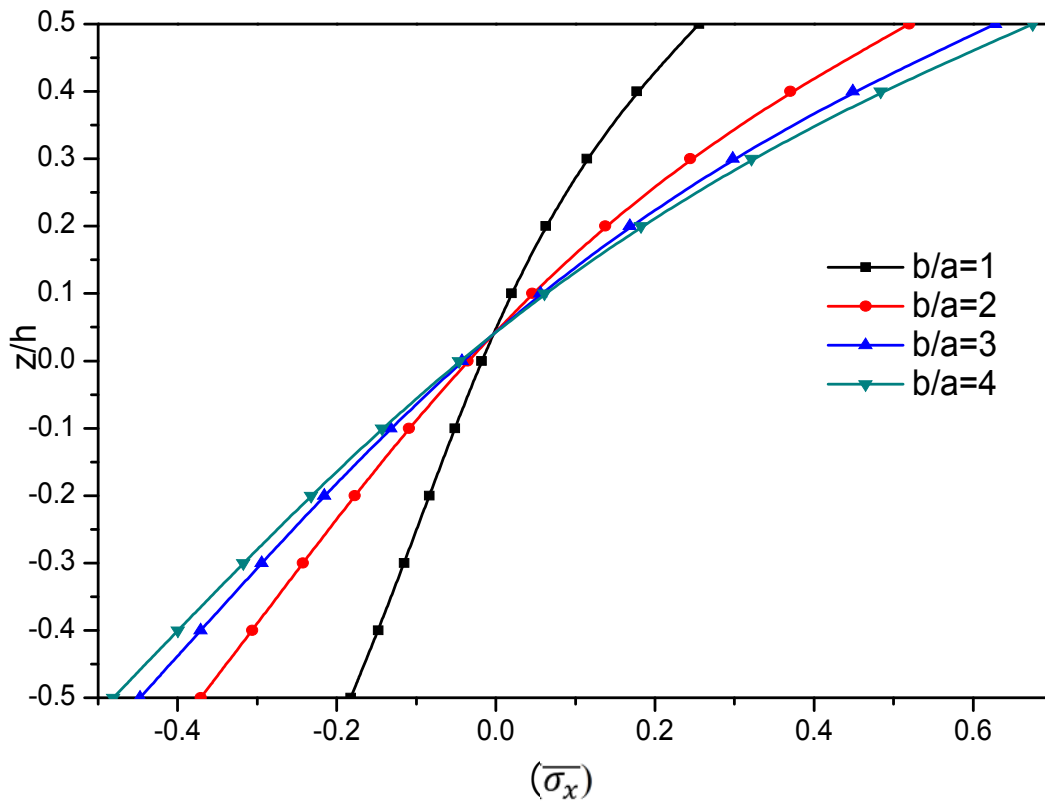


Figure IV.2: Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec ($a/h = 4$ et $p = 0.5$).

La figure IV.2 trace les contraintes normales adimensionnelles ($\bar{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur de la plaque. On remarque à travers ces courbes que la contrainte calculée ($\bar{\sigma}_x$) est influencée par le rapport d'aspect géométrique de la plaque (b/a) étant donné que la contrainte adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) augmente tant que le rapport (b/a) augmente.

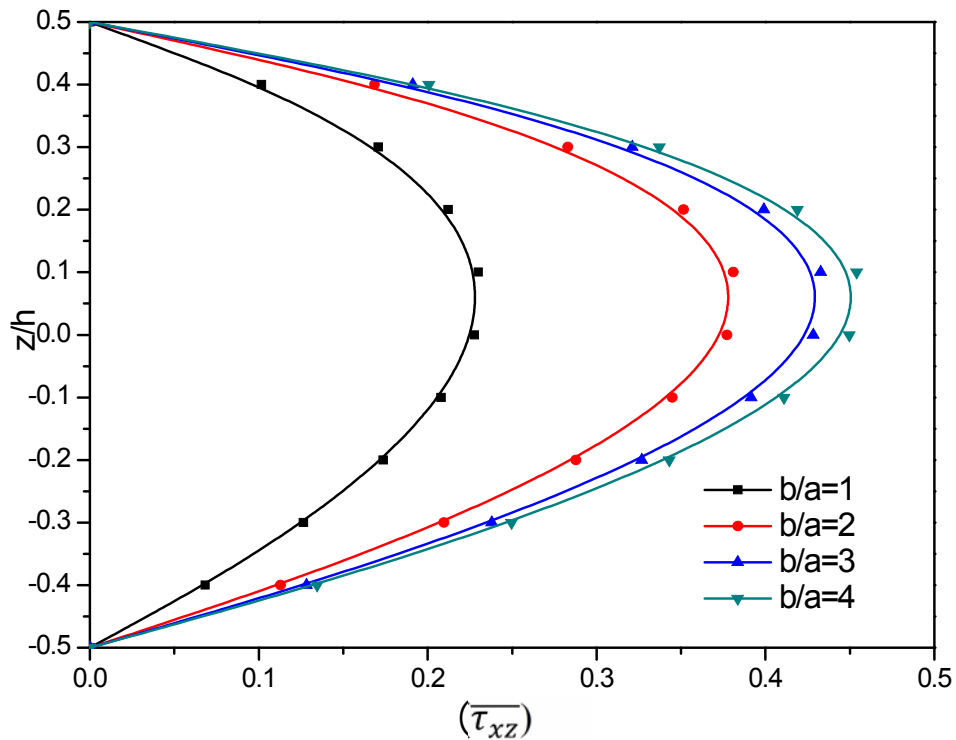


Figure IV.3: Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, z)$ à travers l'épaisseur d'une plaque en EGP épaisses avec ($a/h = 4$ et $p = 0.5$).

La figure IV.3 présente la variation des contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles $(\bar{\tau}_{xz})$ à travers l'épaisseur de la plaque. On observe qu'en augmentant le rapport d'aspect (b/a) les contraintes de cisaillement adimensionnelles $(\bar{\tau}_{xz})$ augmentent et prennent une valeur maximale pour un rapport $z/h = 0$.

Les résultats obtenus dans les tableaux sus-cités sont en bonne concordance avec les solutions de [Mantari et Guedes Soares. 2012d], quasi-3D [Mantari et Guedes Soares. 2013], [Mantari et Guedes Soares. 2014] et quasi-3D sinusoïdale [Zenkour, A. 2007].

Cependant, la théorie proposée est plus simple et efficace que les théories quasi-3D [Mantari et Guedes Soares. 2012d], [Mantari et Guedes Soares. 2013], [Mantari et Guedes Soares. 2014] et 3D [Zenkour. 2007], nécessitant seulement quatre inconnus contrairement aux autres théories ayant cinq et six inconnus.

IV.2.1.2. Plaque graduée en puissance (PGP)

Dans le deuxième cas on a utilisé une plaque carrée fabriquée en métal et céramique graduellement classifiée, son épaisseur est présentée sur la figure III.1.b. Le module d'Young varie dans la direction de l'épaisseur de la plaque FG selon la règle des mélanges et il est montré sur la figure IV.4.

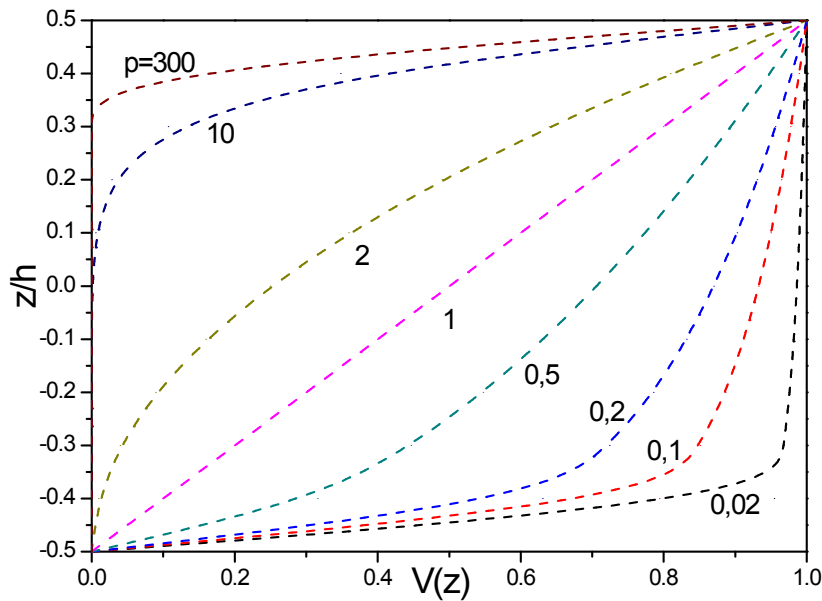


Figure IV.4: Fonction graduée en puissance $V(z)$ le long de l'épaisseur d'une plaque en PGP pour différentes valeurs du paramètre matériel p .

Tableau IV.7 : Les propriétés mécaniques des matériaux de la plaque PGP.

Matériaux	Propriétés		
	Module de Young (GPa)	Coefficient de poisson	La masse volumique (Kg/m ³)
Métal (aluminium Al)	70	0,3	2702
Céramique (alumine Al ₂ O ₃)	380		3800

Les quantités adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\begin{aligned} \bar{u} = u\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \frac{100E_t h^3}{qa^4}, \quad \bar{w} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \frac{10E_t h^3}{qa^4}, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \frac{h}{qa}, \\ \bar{\sigma}_y = \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \frac{h}{qa}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}(0, 0, z) \frac{h}{qa}, \quad \bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right) \frac{h}{qa}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \frac{h}{qa}, \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Tableau IV.8: Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en PGPs.

p	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$			$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/3)$		
		a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
1	Carrera et al. (2008)	0.717	0.588	0.563	0.622	1.506	14.969
	Mantari and Guedes Soares (2014)	0.693	0.568	0.546	0.588	1.459	14.496
	Neves et al. (2011)	0.700	0.585	0.562	0.593	1.495	14.969
	FSDT (Carrera et al., 2011)	0.729	0.589	0.563	0.806	2.015	20.150
	CPT (Carrera et al., 2011)	0.562	0.562	0.562	0.806	2.015	20.150
	Présente	0.693	0.569	0.546	0.576	1.457	14.482
4	Carrera et al. (2008)	1.159	0.882	0.829	0.488	1.197	11.923
	Mantari and Guedes Soares (2014)	1.092	0.841	0.793	0.434	1.116	11.326
	Neves et al. (2011)	1.118	0.875	0.829	0.440	1.178	11.932
	FSDT (Carrera et al., 2011)	1.113	0.874	0.829	0.642	1.605	16.049
	CPT (Carrera et al., 2011)	0.828	0.828	0.828	0.642	1.605	16.049
	Présente	1.092	0.841	0.793	0.417	1.115	11.310
10	Carrera et al. (2008)	1.375	1.007	0.936	0.370	0.897	8.908
	Mantari and Guedes Soares (2014)	1.305	0.979	0.914	0.323	0.836	8.527
	Neves et al. (2011)	1.349	0.875	0.829	0.323	1.178	11.932
	FSDT (Carrera et al., 2011)	1.318	0.997	0.936	0.480	1.199	11.990
	CPT (Carrera et al., 2011)	0.935	0.935	0.935	0.480	1.199	11.990
	Présente	1.322	0.978	0.914	0.306	0.836	8.518

Le tableau IV.8 montre les résultats de la flexion adimensionnelle (\bar{w}) et de la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) à la position indiquée dans l'équation (IV.2) pour une plaque carrée homogène simplement appuyée sous une charge répartie bi-sinusoidale avec différentes valeurs de l'indice $p = \{1, 4, 10\}$. Le modèle proposé donne de bons résultats par rapport à ceux donnés par Carrera (2008), Mantari et Guedes Soares (2014), Neves et al. (2011), FSDT et CPT (Carrera et al. 2011).

Tableau IV.9: Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée en PGP avec $a/h=10$.

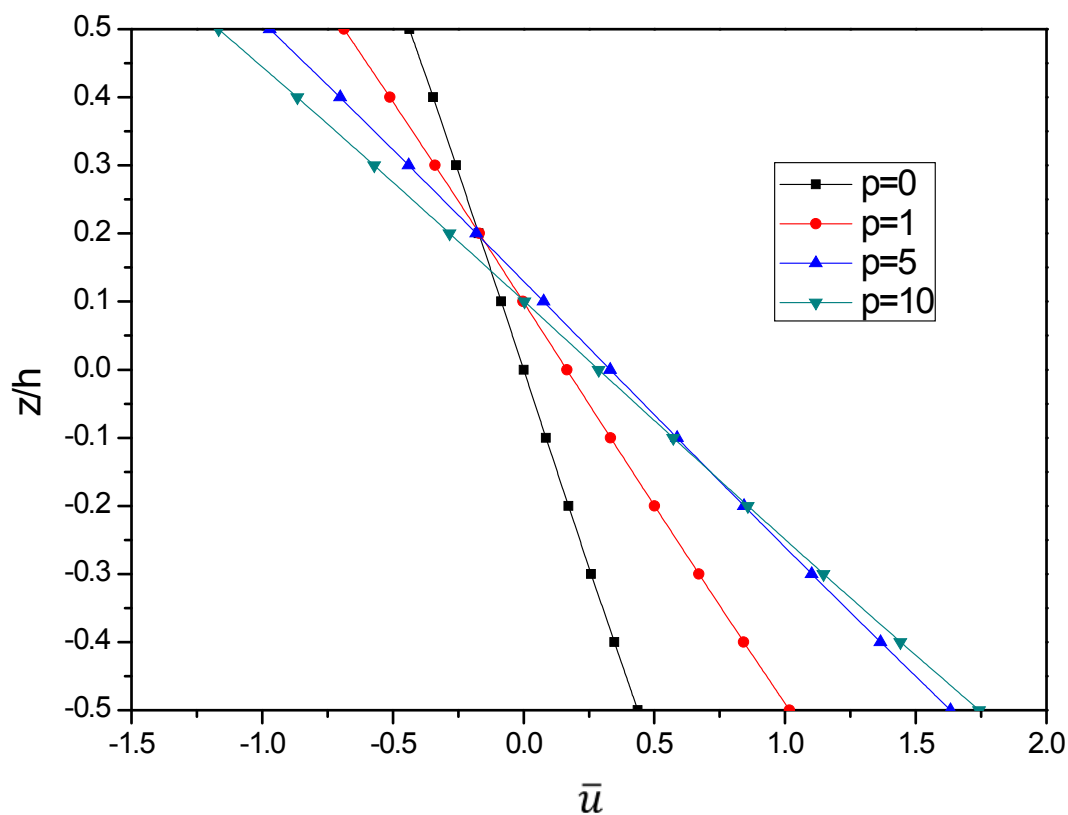
p	Théorie	$\bar{u}(-h/4)$	$\bar{u}(-h/6)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\tau}_{yz}(h/6)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$
1	Ref ^(a)	0.584	0.444	0.568	3.13	1.459	0.299	0.275	0.562
	Ref ^(b)	0.663	0.509	0.589	3.087	1.489	0.262	0.246	0.611
	Présente	0.585	0.445	0.569	3.124	1.457	0.291	0.266	0.563
2	Ref ^(a)	0.808	0.629	0.722	3.635	1.344	0.277	0.222	0.494
	Ref ^(b)	0.928	0.731	0.757	3.609	1.395	0.276	0.227	0.544
	Présente	0.809	0.630	0.722	3.630	1.342	0.269	0.214	0.495
3	Ref ^(a)	0.907	0.71	0.798	3.876	1.214	0.244	0.185	0.503
	Ref ^(b)	1.045	0.827	0.838	3.874	1.275	0.272	0.211	0.553
	Présente	0.908	0.711	0.797	3.870	1.213	0.236	0.178	0.503
5	Ref ^(a)	0.971	0.756	0.872	4.213	1.043	0.195	0.158	0.529
	Ref ^(b)	1.116	0.879	0.912	4.249	1.103	0.243	0.202	0.576
	Présente	0.972	0.757	0.871	4.209	1.042	0.189	0.152	0.530
10	Ref ^(a)	1.001	0.762	0.979	5.031	0.836	0.162	0.171	0.554
	Ref ^(b)	1.137	0.876	1.009	5.089	0.878	0.204	0.22	0.589
	Présente	1.002	0.762	0.978	5.028	0.836	0.157	0.164	0.554

^(a) Mantari and Guedes Soares (2014).

^(b) Zenkour (2006).

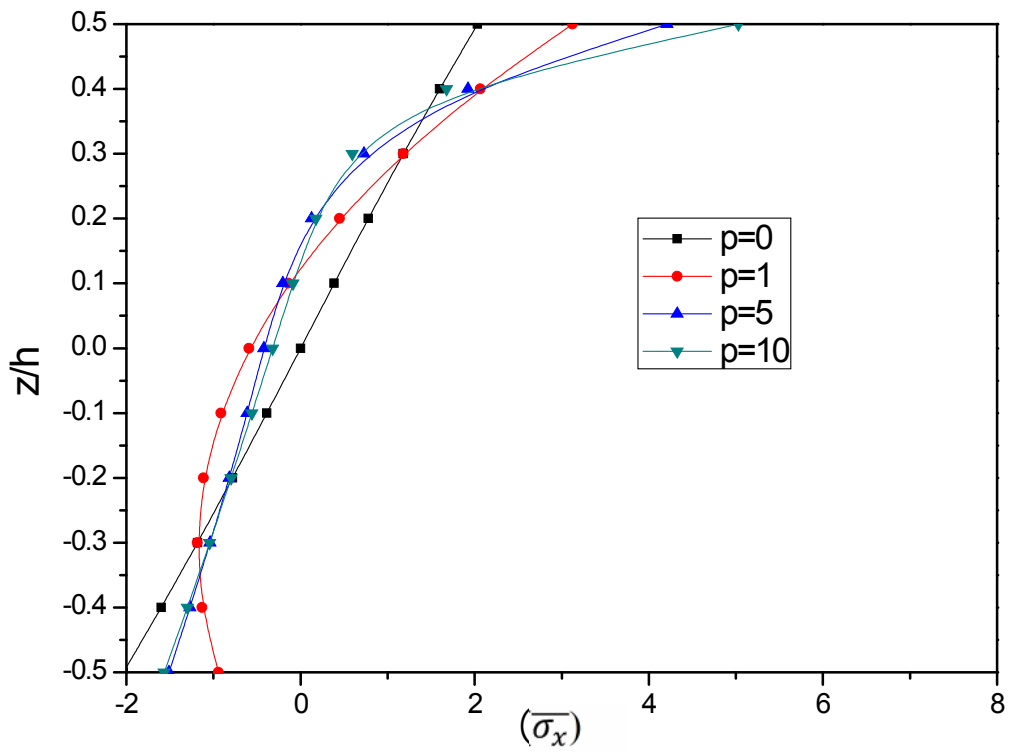
Le tableau IV.9 donne les résultats des déplacements adimensionnels (\bar{u} et \bar{w}) et des contraintes normales, en cisaillement plan et transversal, à la position spécifiée (voir l'équation (IV.2)) pour une plaque carrée homogène simplement appuyée sous une charge répartie bi-sinusoidale avec différentes valeurs de l'indice $p = \{1, 2, 3, 5, 10\}$ et $a/h=10$ de bons résultats sont obtenus par le modèle proposé par rapport à ceux donnés par Mantari et Guedes Soares (2014) et Zenkour (2006). Il convient d'indiquer que la théorie présentée par Zenkour (2006) utilise cinq inconnues sans tenir compte de l'influence de l'éirement de l'épaisseur.

Les variations des déplacements en fonction de l'épaisseur et des contraintes sont également illustrées sur la figure IV.5 pour les plaques carrées avec $a/h = 10$.

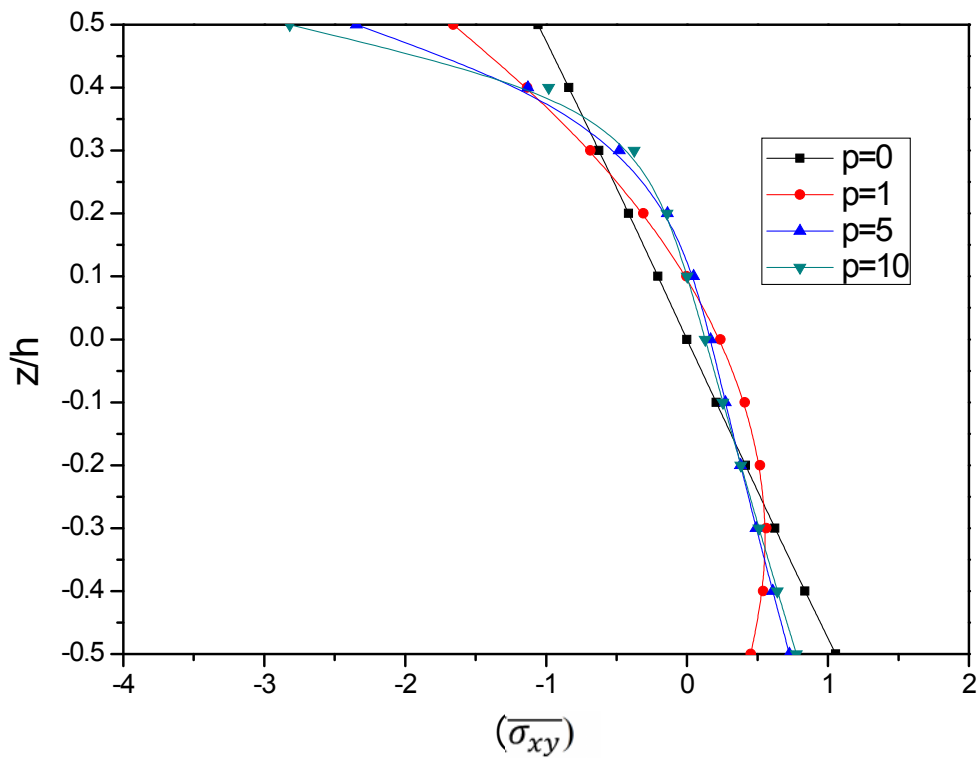


(a) Déplacement en plan

Figure IV.5.1: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.

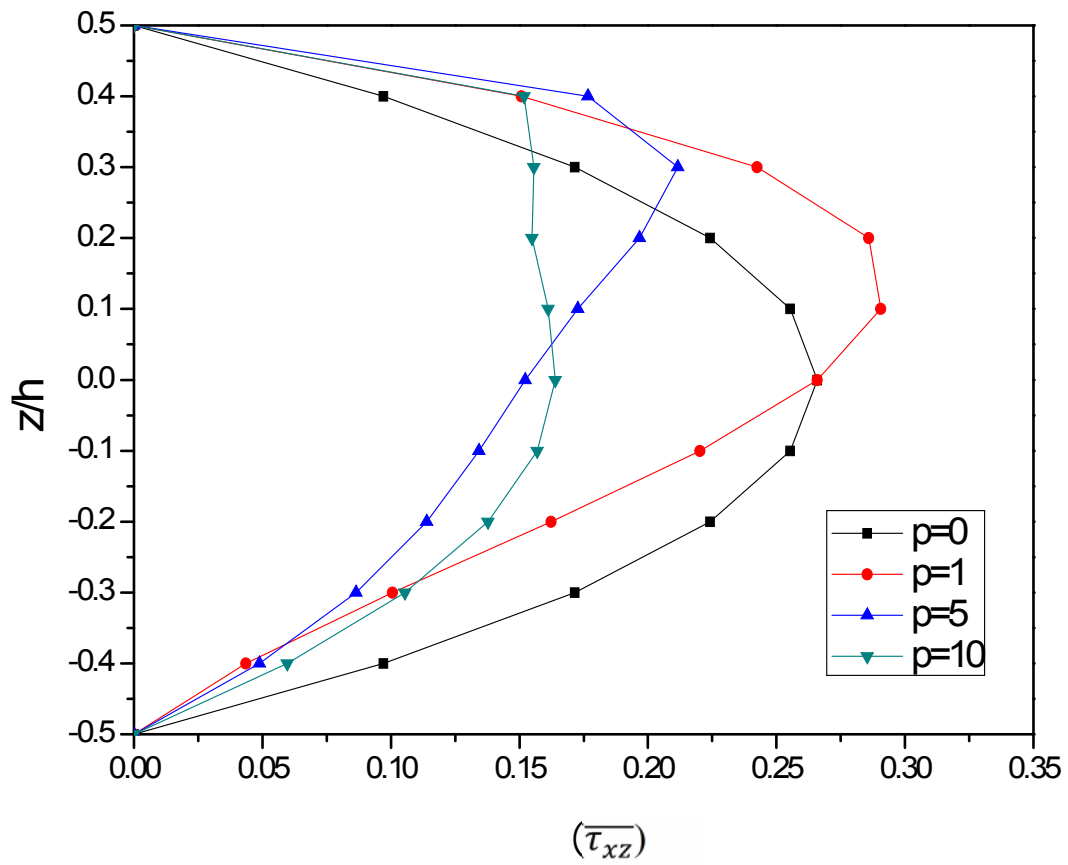


(b) Contrainte normale



(c) Contrainte de cisaillement en plan

Figure IV.5.2: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.



(d) Contrainte de cisaillement transversale

Figure IV.5.3: Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques FG carrées.

IV.2. 2.Validation dans le cas de l'analyse dynamique :

IV.2.2.1. Plaque graduée en puissance (PGP)

Dans le cas de l'analyse dynamique, le modèle de la loi de puissance est adopté. On a utilisé une plaque carrée fabriquée en métal et céramique graduellement classifiée, son épaisseur est présentée sur la figure III.1.b. Le module d'Young varie dans la direction de l'épaisseur de la plaque FG selon la règle des mélanges et il est montré sur la figure IV.4.

Les solutions sont attribuées sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement des fréquences adimensionnelles en fonction des fréquences propres :

$$\hat{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{ph/D_0} \quad \text{avec} \quad D_0 = Eh^3 / [12(1-\nu^2)], \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (\text{IV.5})$$

Tableau IV.10: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega}$ d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée.

a/h	Théorie	Mode							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1000	Leissa (1973)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou et al. (2002)	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci(2014)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020	128.3020
	Mantari.(2015)	19.7405	49.3486	49.3486	78.9580	98.6967	98.6967	128.3049	128.3049
	Présente	19.7400	49.3493	49.3493	78.9585	98.6977	98.6977	128.3064	128.3064
100	Leissa (1973)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Zhou et al. (2002)	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Akavci(2014)	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0120	128.0120
	Mantari.(2015)	19.7332	49.3086	49.3086	78.8550	98.5365	98.5365	128.0346	128.0346
	Présente	19.7332	49.3084	49.3084	78.8539	98.5345	98.5345	128.0307	128.0307
10	Leissa (1973)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Zhou et al. (2002)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci(2014)	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040	107.3040
	Mantari.(2015)	19.1190	45.7339	45.7339	70.3148	85.7622	85.7622	107.7376	107.7376
	Présente	19.1110	45.7100	45.7100	70.2647	85.7000	85.7000	107.6572	107.6572
5	Leissa (1973)	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Zhou et al. (2002)	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci(2014)	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Mantari.(2015)	17.5899	38.6582	38.6582	56.0674	66.3474	66.3474	80.3365	80.3365
	Présente	17.5700	38.6000	38.6000	55.9712	66.2300	66.2300	80.1810	80.1810

Le tableau IV.10 montre la comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega}$ d'une plaque carrée en PGP simplement appuyée. On observe que les fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega}$ décroît avec la décroissance du rapport (a/h).

Les huit premières fréquences naturelles sont calculées et comparées aux résultats rapportés par les solutions exactes 3D de [Leissa.1973], [Zhou et al. 2002], [Akavci.2014] et [Mantari.2015]. On peut voir d'après ces résultats que les calculs basés sur la nouvelle théorie quasi-3D présentent un excellent accord avec ceux prédits par [Leissa.1973], [Zhou et al. 2002], [Akavci.2014] et ils sont très proches des résultats donnés par [Mantari.2015] baser sur un HSDT quasi-3D pour tous les modes de vibration.

Tableau IV.11: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en PGP simplement appuyée.

b/a	a/h	p	Théorie		
			Jin et al.(2014)	Mantari.(2015)	Présente
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1136
		1	0.0870	0.0883	0.0883
		2	0.0789	0.0806	0.0806
		5	0.0741	0.0756	0.0756
	5	0	0.4169	0.4183	0.4178
		1	0.3222	0.3271	0.3267
		2	0.2905	0.2965	0.2962
		5	0.2676	0.2726	0.2728
	2	0	1.8470	1.8543	1.8539
		1	1.4687	1.4803	1.4801
		2	1.3095	1.3224	1.3227
		5	1.1450	1.1565	1.1575
2	10	0	0.0719	0.0719	0.0719
		1	0.0550	0.0558	0.0558
		2	0.0499	0.0510	0.0510
		5	0.0471	0.0480	0.0480
	5	0	0.2713	0.2721	0.2717
		1	0.2088	0.2121	0.2118
		2	0.1888	0.1928	0.1927
		5	0.1754	0.1789	0.1789
	2	0	0.9570	1.3075	1.3071
		1	0.7937	1.0371	1.0368
		2	0.7149	0.9297	0.9298
		5	0.6168	0.8248	0.8255

Dans le tableau IV.11, les fréquences fondamentales adimensionnelles pour des différentes valeurs de l'indice p , le rapport d'épaisseur (a/h) et le rapport d'aspect (b/a). D'après la lecture du tableau on observe que la fréquence naturelle est en diminution avec la croissance du rapport (b/a) et de l'indice matériel p . Les résultats coïncident à ceux obtenus par la solution 3D exacte proposée par [Jin et al.2014] et la théorie raffinée présentée par [Mantari.2015].

Tableau IV.12: Comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles β d'une plaque carrée en PGP's simplement appuyée.

a/h	Mode	Théorie	p				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini et al. (2011.b)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed et al. (2014)	0.2121	0.1805	0.1640	0.1383	0.1306
		Présente	0.2126	0.1831	0.1663	0.1411	0.1322
	2(1,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Hosseini et al. (2011.b)	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Belabed et al. (2014)	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Présente	0.4672	0.4056	0.3685	0.3051	0.2819
	3(2,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Hosseini et al. (2011.b)	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Belabed et al. (2014)	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Présente	0.6775	0.5911	0.5376	0.4387	0.4018
10	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Hosseini et al. (2011.b)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Belabed et al. (2014)	0.0578	0.0494	0.0494	0.0389	0.0368
		Présente	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	2(1,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Hosseini et al. (2011.b)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0856
		Belabed et al. (2014)	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Présente	0.1383	0.1187	0.1078	0.0923	0.0869
	3(2,2)	Hosseini et al. (2011.a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini et al. (2011.b)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Belabed et al. (2014)	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Présente	0.2126	0.1831	0.1663	0.1411	0.1322
20	1(1,1)	Hosseini et al. (2011.a)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Hosseini et al. (2011.b)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0098
		Belabed et al. (2014)	0.0148	0.0126	0.0115	0.0098	0.0095
		Présente	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Le tableau IV.12 présente une comparaison des trois premières fréquences propres adimensionnelles d'une plaque carrée en PGP simplement appuyée pour différentes valeurs de l'indice p et le rapport d'épaisseur (a/h). On remarque que la fréquence naturelle est en diminution avec la croissance du rapport (a/h) et de l'indice matériel p . Les résultats obtenus par la nouvelle théorie quasi-3D sont en bonne concordance avec les solutions données par la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Hosseini et al.2011a], théorie de déformation de cisaillement de premier ordre [Hosseini et al.2011b] et la théorie quasi-3D HSDT donnés par [Belabed et al. 2014].

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) quasi tridimensionnel avec seulement quatre variables est présentée pour l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques épaisses avec prise en compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque. Les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques sont déterminées pour des plaques rectangulaires et carrées simplement appuyées. En considérant des hypothèses simplificatrices à la théorie quasi-3D, le nombre de variables de la théorie quasi-3D original est diminuée d'une variable dans un but de rendre la nouvelle théorie simple et efficace à utiliser.

Les résultats numériques montrent que ces suppositions ont une influence minime sur la précision des résultats pour les problèmes examinés. Par conséquent, on peut déduire que la nouvelle théorie quasi-3D est non seulement précise mais aussi simple dans la prédiction de la réponse en flexion et de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées.

CONCLUSION GÉNÉRALE & PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Dans ce travail de recherche, une contribution à l'étude du comportement mécanique des structures composites est fournie, ces éléments structurels étant les composants de base des structures que soit industrielle, santé...etc. Les matériaux à gradient fonctionnel sont largement utilisés dans plusieurs domaines, car ils permettent d'avoir une légèreté du poids ainsi qu'une résistance supérieure par rapport à d'autres matériaux. De ce fait plusieurs chercheurs s'imprègnent dans cet axe de recherche.

L'objectif de notre travail est d'étudier le comportement mécanique dans le cas de la flexion et la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » en utilisant une récente théorie quasi-3D pour l'étude de la déformation de cisaillement.

L'avantage de cette théorie est qu'en plus d'intégrer l'influence d'étirement en épaisseur ($\epsilon_z \neq 0$), appelé en anglais « Thickness Stretching Effect », le champ de déplacement est modélisé avec seulement quatre inconnues, étant inférieur à la théorie FSDT et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement.

La fonction de cisaillement utilisée est une fonction hyperbolique qui souscrit une description de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur est doit satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les bords de la plaque.

Le principe d'Hamilton est utilisé pour obtenir les équations de mouvement donnant des résultats analytiques de la nouvelle théorie qui ont été comparés avec les CPT, FSDT et HSDT quasi- 3D. Cette théorie est aussi précise que les autres théories HSDTs quasi -3D avec un nombre moindre de variables.

Les résultats obtenus montrent que la flèche et les contraintes parvenues dans les tableaux sont quasiment égales aux résultats publiés par d'autres auteurs, ce qui implique que la nouvelle théorie proposée est plus précise et permettra d'optimiser le temps de calcul.

Comme perspectives, nous prévoyons d'élargir le champ d'application de cette nouvelle théorie quasi-3D à quatre inconnus pour l'analyse statique et dynamique des structures fonctionnellement graduées et cela à travers:

- l'utilisation d'autres formes géométriques,
- les changements dans les propriétés des matériaux
- la prise en compte d'autres paramètres tels que celui de la température qui est un élément important dans l'analyse de la stabilité thermique des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » sous différents types de chargement (mécanique, thermique et hygrothermique).

En fin, il serait captivant d'étudier la porosité qui est due à l'influence des défauts de confection des matériaux sur la réponse des plaques fonctionnellement graduées sous différentes conditions d'appuis et différentes sollicitations.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

- [Abdelaziz et al.2017] **Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S.** (2017) ,“An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- [Abualnour et al.2018] **Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.** (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates ” , *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- [Ahmed.2014] **Ahmed, A.** (2014), “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”, *Int. J. Civil Struct. Environ.*, 4(2), 59-64.
- [Ait Amar et al.2014] **Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A.** (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- [Akavci.2014] **Akavci, S.S.** (2014), "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Compos Struct*, 108, 667e676.
- [Akavci.2016] **Akavci, S.S.** (2016), “Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation”, *Composites Part B*, 96, 136– 152.

- [Ambartsumian. 1969] **Ambartsumian, S.A.** (1969), "Principal equations and correlations in different modulus theory of elasticity of anisotropic bodies". *Izvestija ANSSSR, MTT*, 3.
- [Arnold, S. M. 2001] **Arnold, S.M.** (2001), "Higher-order-theory structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9.
- [Attia et al. 2015] **Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R.** (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and Composite Structures*, 18(1), 187-212.
- [Attia et al. 2018] **Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S.** (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.
- [Aydogdu. 2009] **Aydogdu, M.** (2009), "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94- 101.

B

- [Bao. 1995] **Bao, G., Wang, L.** (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [Belabed et al. 2014] **Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O.** (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, 60, 274-283.
- [Belabed et al. 2018] **Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R.** (2018), "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate", *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115.

- [Benachour A. 2011] **Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A.**(2011) "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient". *Composites: Part B* 42, 1386–1394
- [Benchohra et al. 2018] **Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R.** (2018), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct. Eng. Mech.*, 65(1), 19-31.
- [Bennai et al.2015] **Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A.** (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 521-546.
- [Bennoun et al.2016] **Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.** (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [Benyeniste, Y.1987] **Benveniste, Y.** (1987), "A New Approach to the Application of Mori–Tanaka’s Theory of Composite Materials". *Mechanics of Materials*, Vol. 6, pp. 147–157.
- [Bessaim et al.2013] **Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A.** (2013), "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15, 671–703.
- [Bohidar et al. 2014] **Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R.** (2014), "Functionally Graded Materials: A critical Review". *International journal of research*, 1(7), 289–301.
- [Bouderba et al. 2013] **Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.** (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting

on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct.*, 14(1), 85-104.

[Bouhadra et al.2018] **Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R.** (2018), "Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates", *Struct. Eng. Mech.*

[Boukhari et al.2016] **Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.** (2016), "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.

C

[Carrera et al. 2008] **Carrera, E., Brischetto, S. and Robaldo, A.** (2008), "Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates", *AIAA J.*, 46, 194-203.

[Carrera et al. 2011] **Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M. and Soave, M.** (2011), "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos.: Part B*, 42, 123-133.

[Chi et al. 2003] **Chi. Shyang-ho, Chung Yen-Ling.** (2003), "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227 –1243.

[Cho et al. 2004] **Cho, K-M. Choi, I-D. Park, I.** (2004), "Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. *Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials*". *Mater. Sci. Forum*, 449:621-624.

[Cox, H. 2004] **Cox, H. et al.** (2004), *Nanocomposites systems for automotive applications; 4th World Congress in Nanocomposites, EMC, San Francisco, September 1-3.*

D

- [D.k.Jha. 2013] **D.K. Jha, Tarun Kant, R.K. Singh.** (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Compos Struct.*96, 833–849.
- [Dumont et al.2001] **Dumont, A. L. Jean-Pierre, Bonnet. Thierry, Chertier. and Jose, M.F. Ferreira.** (2001), "MoSi₂/Al₂O₃ FGM: elaboration by tape casting and SHS". *Journal of the European Ceramic Society*, 21, 2353-2360.

E

- [El Meiche et al. 2011] **El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A.** (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237– 247.
- [El-Hassar et al. 2016] **El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H., Tounsi, A.** (2016), "Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory", *Geomechanics and Engineering*, 10(3), 357-386.
- [El-Wazery et al. 2012] **El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan.** (2012), "Preparation and Mechanical Properties of Zirconia/Nickel Functionally Graded materials". *Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications*, 45(2), 435-446.

F

- [F. Delale et al.1983] **F. Delale., F. Erdogan,** (1983), "The crack problem for a nonhomogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- [F.B. Hildebrand. 1949] **F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas,** (1949), " Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". *NACA T. N. N°:1833.*

- [Ferreira et al.2006] **Ferreira, AJM, Batra, RC, Roque, CMC, Qian, LF, Jorge, RMN.** (2006), "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Compos Struct*, 75, 593-600. functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 703-730.

H

- [H. Ait Atmane et al.2010] **H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia,** (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [H. Okamura. 1991] **H. Okamura.** (1991), "State of the art of material design projects for severe service applications", *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.
- [Hachemi et al.2017] **Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, M., Tounsi, A. Mahmoud, S.R.** (2017), " A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, 25(6), 717-726.
- [Hadji et al. 2011] **Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A.** (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.
- [Hamidi et al. 2015] **Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A.** (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [Hashmi et al. 2014] **Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J.Yilbas, B.S.** (2014), "Comprehensive materials processing. livre électronique", Oxford, Walltham, MA. Elsevier.
- [Hebali et al. 2014] **Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A.** (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation

theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383.

[Hill, R. 1965]

Hill, R. (1965), "A self-consistent mechanics of composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (4), 213-222.

[Hopkinson et al. 2006]

Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, (2006), "P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age". John Wiley and Sons, Ltd .

[Hosseini et al. 2011a]

S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. (2011) Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. *Compos. Struct.* 93 722-735.

[Hosseini et al. 2011b]

S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. (2011) A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int. J.Mech. Sci.* 53(1):11-22.

I

[Iyengar et al.1982]

Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K. (1982),"Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, 149–156.

[Iyengar et al.1974]

Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K. (1974), "On the analysis of thick rectangular plates", *Z Angew Math Mech*, 589–591.

J

[Jamaludin et al. 2013]

Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. (2013), "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828- 840, 4 June.

- [Jin et al. 2014] **Jin GSuZ, Shi S-Ye-T, Gao S.** (2014) Three-dimensional exact solution the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Compos Struct*; 108:565e77.
- K**
- [K. Kokini et al. 1990] **K. Kokini, Y. Takeuchi,** (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90*, Sendai, Japan; 31-36.
- [K. P. Soldatos. 1993] **K. P. Soldatos and T. Timarci .** (1993), "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, fivedegrees- of-freedom cylindrical shell theories". *Composite Structures*, 25:165–171.
- [K. Swaminathan. 2016] **K. Swaminathan, D.M. Sangeetha,** (2016), "Thermal Analysis of FGM Plates – A Critical Review of Various Modelling Techniques and Solution Methods"*Composite Structures*.
- [Kanaun et al. 2008] **Kanaun, S. K . Levin, V. M.** (2008), "Self-consistent methods for composites". *Solid mechanics and its applications*, v. 148, 150, Dordrecht : Springer.
- [Karama et al. 2003] **Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou,** (2003). "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [Katayama et al. 2011] **Katayama, T. Sohei, Sukenaga. Noritaka, Saito. Hajime, Kagata. and Kunihiko, Nakashima.** (2011), "Fabricated of Al₂O₃-W functionally graded materials by slip casting method", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 18.
- [Kawasaki et al.1997] **Kawasaki A., Watanabe R.** (1997), "Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials". *Ceramics International*, 8842(95):73–83.

- [Kiebeck et al.2003] **Kiebeck, B. Neubrand, A. Riedel, H.** (2003), "Processing techniques for functionally graded materials". *Mat. Sci. Eng, A* 3 62, 81-105.
- [Kim et al.2009] **Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J.** (2009), "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", 47(4), 455–462.
- [Koizumi, M.1992] **Koizumi, M.** (1992), "Recent Progress of functionally graded materials in Japan". *Ceram. Eng.Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.
- [Koizumi, M.1993] **Koizumi, M .** (1993) "The concept of FGM". *Ceram Trans Funct Grad Mater* ;34:3–10.
- [Koizumi, M.1997] **Koizumi, M.** (1997), "FGM activities in Japan". *Composites*; 28 (1-2),1– 4.
- [Krishna Murty. 1977] **Krishna Murty, A.V.** (1977), "Higher-order theory for vibrations of thick plates", *AIAA Journal*, 1823–1824.
- [Krishna Murty. 1986] **Krishna Murty, A.V.** (1986), "Toward of consistent plate theory", *AIAA Journal*, 1047–1048.
- [Krishna Murty. 1987] **Krishna Murty, A.V.** (1987), "Flexural of composite plates", *Composite Structures*, 161–177.
- L
- [Larbi Chaht et al.2015] **Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R.** (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos.Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- [Li et al. 2003] **Li, JQ. Zeng, XR. Tang, JN. Xiao, P.** (2003), "Fabrication and thermal properties of an YSZ-NiCr joint with an interlayer of YSZ-NiCr functionally graded material". *J. Eur. Ceram. Soc*, 23, 1847-1853.

- [Leissa.1973] **Leissa AW.** (1973), The free vibration of rectangular plates. *J Sound Vib* ;31(3):257e93.
- [Liu et al.2017] **Liu, S., Yu, T., Bui, T.Q., Yin, S., Thai, D.K., Tanaka, S.** (2017), "Analysis of functionally graded plates by a simple locking-free quasi-3D hyperbolic plate isogeometric method", *Composites Part B: Engineering*, 120, 182-196.
- [Lu et al. 2009] **Lu, CF, Lim, CW, Chen, WQ.** (2009), "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mech Advan Mater Struct*, 16, 576–584.

M

- [M. Karama et al. 2003] **M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou,** (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity". *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [M. Savoia et al.1995] **M. Savoia, J.N. Reddy.** (1995), "Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates", *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608.
- [Makwana et al. 2014] **Makwana AB, Panchal KC.** (2014), "A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out". *Int J Eng Res Technol* ; 3:2020–5.
- [Malekzadeh, P. 2009] **Malekzadeh, P.** (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Compos Struct*, 89, 367–373.
- [Mallikarjuna et al.1993] **Mallikarjuna, M. et Kant, T.** (1993), "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", 23(4).
- [Mantari et al. 2012d] **Mantari, J.L. and Guedes Soares, C.** (2012d), "Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, 94, 1991-2000.

- [Mantari et al. 2013] **Mantari, J.L. and Guedes Soares, C.** (2013), "A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates", *Compos.: Part B*, 45, 268-281.
- [Mantari et al. 2014] **Mantari, J.L. and Guedes Soares, C.** (2014), "Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates", *Compos. Struct.*, 109, 231-239.
- [Mantari. 2015] **Mantari J.L.**(2015), A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation. *Mech Mater*; 86:31–43.
- [Mantari. 2016] **Mantari, J.L.** (2016), "General recommendations to develop 4-unknowns quasi-3D HSDTs to study FGMs", *Aerospace Science and Technology*, 58, 559 – 570.
- [Markworth et al. 1995] **Markworth, Alan. J. Saunders, James. H.** (1995), "A model of structure optimization for a functionally graded material". *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107.
- [Matsunaga, H. 2008] **Matsunaga, H.** (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 82, 499–512.
- [Meksi et al. 2018] **Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, SR.**(2018), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw . Struct.Mater.*, 1099636217698443.
- [Miara et al. 2006] **Miara, B., Podio-Guidugli, P.** (2006), "Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques". *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343, 375-678.
- [Mindlin. 1951] **Mindlin, R. D.** (1951), " Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates". *J Appl Mech* ,18(1):31–8.

- [Misra et al. 2011] **Misra, N., Kapusetti, G., Pattanayak, D. K., & Kumar, A.** (2011), "Fabrication and characterization of epoxy/silica functionally graded composite material". Indian journal of physics.
- [Miyamoto et al.1999] **Miyamoto, Y. Kaysser, W.A. Rabin, B.H. Kawasaki, A.** (1999), "and ford, R.G. functionally graded Material", Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [Mori et Tanaka. 1973] **Mori, T. Tanaka, K.** (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". Acta Metallurgica, 21 (5), 571-574.
- [Müller et al. 2003] **Müller, E., Drašar, ., Schilz, J., & Kaysser, W.** (2003), "Functionally graded materials for sensor and energy applications". Materials Science and Engineering: A, 362(1-2), 17–39.

N

- [Narottam et al. 2011] **Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi,** (2011), "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons; page 110, 4 août .
- [Neves et al. 2011] **Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M.** (2011), "Bending of FGM plates by a sinusoidal plate formulation and collocation with radial basis functions", Mech. Res. Commun., 38, 368-371.
- [Neves et al. 2012a] **Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, et al.** (2012a), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", Composites: Part B, 43, 711–725.
- [Neves et al. 2012b] **Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, et al.** (2012b), "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", Compos Struct, 94, 1814–1825.

[Nguyen et al. 2015] **Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P.** (2015), "A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 91-120.

[Niino et al. 1988] **Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Uroishi.** (1988), " Method of producing a functionally gradient material". U.S. Patent 457,1099.

P

[P. M. Naghdi. 1957] **P. M. Naghdi.** (1957), "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math.*, 14: 369-380.

Q

[Qian et al. 2015] **Qian, LF, Batra, RC, Chen, LM.** (2004), "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Composites: Part B*, 35, 685–697.

R

[Ramachandran et al.2015] **Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James.** (2015), "Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication", *Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.

[Ramu et al. 2015] **Ramu, I., Mohanty, S.C.** (2015), "Free vibration and dynamic stability of functionally graded material plates on elastic foundation", *Defence Science Journal*, 65(3), 245 – 251.

[Rasheedat et al. 2012] **Rasheedat, M., Mahamood, E., Akinlabi, T., Shukla, M., & Pityana, S.** (2012), "Functional Graded Material An Overview". In *proceeding of the world congress on engineering 2012 Vol III*, London , U.K. *proceedings of the world congress on engineering.*

- [Reddy. 1984] **Reddy , J.N.** (1984), " A simple higher-order theory for laminated composite plates". J Appl Mech; 51:745–52.
- [Reddy et al. 1985] **Reddy, J.N. et Phan, N.D.** (1985), "Analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2201–2219.
- [Reddy. 1990] **Reddy, J.N.** (1990), "A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", 22(7).
- [Reddy. 1997] **Reddy, J.N.** (1997), "Mechanics of Laminated composites plates: Theory and analysis". CRC Press, Boca Raton.
- [Reddy. 1999] **Reddy, J.N.** (1999),"Theory and analysis of Elastic Plates". Taylor Francis, Philadelphia.
- [Reddy. 2000] **Reddy, J.N.** (2000), "Analysis of functionally graded plates", International Journal Numerical Methods in Engineering, 47(41–43):663–684.
- [Reissner. 1945] **Reissner, E.** (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME, 69–77.
- [Reissner. 1975] **Reissner, E.**(1975), " On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". Int. J. Solids Struct. 11, 569-573.
- [Reiter et al.1997] **Reiter, T., and Dvorak, G.J.** (1997), "Micromechanical Modelling of Function- ally Graded Materials", IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials, edited by Y.Bahei-El-Din and G.J. Dvorak, Kluwer Academic, London, pp. 173–184.

S

- [Saiyathibrahim et al. 2015] **Saiyathi brahim, A. Mohamed, Nazirudeen,** (2015), "S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded

materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication", engineering and technology.

[Sekkal et al.2017b] **Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.** (2017b), "A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate", *Struct. Eng. Mech.*, 64(6), 737-749.

[Shen, H.S. 2009] **Shen, H. S.** (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[Shimpi. 2002] **Shimpi, R.P.** (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146.

T

[T. K. Nguyen et al. 2007] **T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet.** (2007), "Shear correction factors of functionally graded plates". *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.

[Kant et Swaminathan. 2002] **T. Kant and K.Swaminathan.** (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". *Composite Structures*, 56(4):329-344.

[Tagrara al. 2015] **Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A.** (2015), "On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Steel Compos. Struct. , Int. J.*, 19(5), 1259-1277.

[Thai et al.2013] **Thai HT, Kim S.E.** (2013), "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates". *Compos Struct*; 99:172–80.

[Thai et al.2011] **Thai, H.-T., Kim, S.E.** (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.

- [Timoshenko. 1959] **Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S.** (1959), "Theory of plates and Shells". Mc Graw-Hill, New York.
- [Tounsi et al. 2013] **Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A.** (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [Touratier. 1991] **Touratier. M.** (1991). "An efficient standard plate theory". *Engng .Sci*, vol. 29, no 8, pages901-916.
- [Turan et al. 2016] **Turan, M., Adiyaman, G., Kahya, V., Birinci, A.** (2016), "Axisymmetric analysis of a functionally graded layer resting on elastic substrate", *Structural Engineering and Mechanics*, 58(3), 423 - 442.

U

- [Udupa et al. 2014] **Udupa G, Shrikantha SR, Gangadharan K V.** (2014), "Functionally graded composite materials": An overview. *Procedia Mater Sci* ; 5:1291–9.

V

- [Vel et al. 2004] **Vel, S.S. et Batra, R.C.** (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, 272(3–5), 703–730.

W

- [Watari et al. 2003] **Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T.** (2003), "Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application". *Mater. Sci. Forum*, 423-425:321-326.
- [Wo et al. 2005] **Wo, M., Paszkiewicz, B., & Piasecki, T.** (2005), "Application and modeling of functionally graded materials for optoelectronic

devices. International student and young scientist workshop, photonics and microsystem, 8–10.

[Wu et al. 2005]

Wu, AH. Cao, WB. Ge, CC. Li, JE. Kawasaki, A. (2005), "Fabrication and characteristics of plasma facing SiC/C functionally graded composite material". Mater. Chem. Phys, 91(2-3), 545-550.

X

[Xigeng Miao et al. 2010]

Xigeng Miao, Dan Sun. (2010), "Graded/Gradient Porous Biomaterials". Materials, 3, 26-47.

Z

[Zenkour.2006]

Zenkour, A.M. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", Appl. Math. Model, 30, 67-84.

[Zenkour.2007]

Zenkour, A.M. (2007), "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", Appl. Math. Model, 77, 197-214.

[Zenkour.2013]

Zenkour AM. (2013), "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates ". Appl Math Model; 37(20–21):9041–51.

[Zenkour.2013]

Zenkour AM. (2013), "Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory". J Sandwich Struct Mater ; 15(6):629–56.

[Zenkour.2015]

Zenkour AM. (2015), "Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using fourunknown shear and normal deformations theory". Compos Struct; 122:260–70.

[Zhou et al.2002]

Zhou D, Cheung YK, Au FTK, Lo SH. (2002) Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. Int J Solids Struct; 39:6339e53.

RÉSUMÉ

DANS CETTE THÈSE, UNE THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT QUASI-3D À QUATRE INCONNUES POUR L'ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES ÉPAISSES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES (FG) EST DÉVELOPPÉE. L'AVANTAGE DE CETTE THÉORIE EST QUE EN PLUS D'INTRODUIRE L'IMPACT D'ÉTIREMENT DE L'ÉPAISSEUR ($\varepsilon_z \neq 0$), LE CHAMP DE DÉPLACEMENT EST MODÉLISÉ AVEC SEULEMENT QUATRE VARIABLES, CE QUI EST MÊME INFÉRIEUR À LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT DU PREMIER ORDRE (FSDT). LE PRINCIPE D'HAMILTON EST UTILISÉ POUR DÉTERMINER LES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT. LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES OBTENUS À PARTIR DE LA THÉORIE PROPOSÉE SONT COMPARÉS AUX CPT, FSDT ET AUTRES HSDTs QUASI-3D.

Mots-clés: THÉORIE QUASI-3D, FLEXION, VIBRATION LIBRE, PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES.

في هذه الأطروحة، تم تطوير نظرية التشوه شبه القص ثلاثي الأبعاد بأربعة متغيرات للتشوه شبه القص لتحليل الانحناء والاهتزاز حر للألواح (FG) الوظيفية. تكمن ميزة هذه النظرية في أنه بالإضافة إلى إدخال تأثير سمك التمدد ($\varepsilon_z \neq 0$)، تم تصميم حقل الإزاحة بأربعة متغيرات فقط، وهو أقل حتى من نظرية تشوه القص الأول (FSDT). يتم استخدام مبدأ هاملتون لتحديد معادلات الحركة. تتم مقارنة النتائج الرقمية التي تم الحصول عليها من النظرية المقترحة مع CPT، FSDT، وغيرها من HSDTs شبه 3D.

الكلمات المفتاحية: نظرية شبه 3D، الانحناء، الاهتزاز حر، صفيحة وظيفية متدرجة.

ABSTRACT

IN THIS THESIS A FOUR UNKNOWN QUASI-3D SHEAR DEFORMATION THEORY FOR THE BENDING AND THE FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED (FG) PLATES IS DEVELOPED. THE ADVANTAGE OF THIS THEORY IS THAT IN ADDITION TO INTRODUCING THE THICKNESS STRETCHING IMPACT ($\varepsilon_z \neq 0$), THE DISPLACEMENT FIELD IS MODELED WITH ONLY FOUR VARIABLES, WHICH IS EVEN LESS THAN THE FIRST ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY (FSDT). THE PRINCIPLE OF HAMILTON'S IS UTILIZED TO DETERMINE THE EQUATIONS OF MOTION. THE OBTAINED NUMERICAL RESULTS FROM THE PROPOSED THEORY ARE COMPARED WITH THE CPT, FSDT, AND OTHER QUASI-3D HSDTs.

Key words: QUASI-3D THEORY, BENDING, FREE VIBRATION, FUNCTIONALLY GRADED PLATE.