N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mme DOUINI HENNIA

Option: Mathématiques Appliquées.

Intitulée

Estimation locale de la fonction de hasard conditionnelle pour variables explicative fonctionnelle

Soutenue le : 03/10/2018

Devant le jury composé de :

Président : BENAISSA Samir	Prof Univ. Sidi Bel Abbès
Examinateurs :	
GUENDOUZI Toufik	Prof Univ. Saida
KANDOUCI Abdeljabbar	Prof Univ. Saida
CHIKR El MEZOUAR Zouaoui	Prof Univ. Abha (Arabie Saoudi)
Directeur de thèse : LAKSACI Ali	Prof Univ. Sidi Bel Abbès
Co-directeur de thèse: ATTOUCH Med Kadi.	Prof Univ. Sidi Bel Abbès

À la mèmoire de mon père.
Á la mémoire de professeur Benamar Chouaf.

Remerciments

L'art de remerciement est une chose difficile lorsqu'on a le sentiment de devoir beaucoup à beaucoup de monde !

En premier lieu, je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes directeurs de thèse les Professeurs **Ali Laksaci** et **Attouch M.K** pour leur encadrement et leurs encouragements durant toute la période de la réalisation de ce travail. Je voudrais leur exprimer ma gratitude pour leur disponibilité, pour le temps qu'ils ont passé à m'aider et pour les moyens mis à ma disposition pour mener à bien cette thèse. Je les remercie profondément pour leur disponibilité, leurs orientations et leurs remarques fructueuses.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le Professeur **Benaissa Samir** pour m'avoir honoré de sa présence et pour l'intérêt qu'il a accordé à ce travail en acceptant de le juger et d'en présider le jury.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Professeur **Kandouci.A** pour avoir accepté d'examiner ce travail et de le juger.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur le Professeur **Guendouzi Toufik** de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie profondément Monsieur **Chiker El Mezouar. Z** pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail en acceptant de le juger.

Il me reste à adresser un grand merci à ma chère Maman Khadra, Mon Mari Benameur, Mes enfants Yasser et Sirine, mes frères, mes soeurs et le reste de ma famille pour leurs encouragements et leur soutien constants.

Enfin, merci à tous mes amis(es), mes collègues. À tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans y associer tant d'autres sans le soutien desquels je n'aurai pu entreprendre ces études. À toutes et à tous je leur dis merci.

Table des matières

Résumé **7**

Summary **7**

1 Introduction et Présentation **11**

1.1 Modèles non paramétriques conditionnels et variables fonctionnelles : Motivation et contexte bibliographique 11

1.1.1 Variables et données fonctionnelles 15

1.1.2 Domaines d'applications des données fonctionnelles . . 16

1.1.3 Exemples d'applications des données fonctionnelles . . 17

1.2 Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard 19

1.3 Estimation par polynômes locaux : historique et résultats . . . 20

1.4 Quelques résultats sur l'estimation local linéaire pour des modèles fonctionnels 22

1.4.1 Notations et hypothèses 22

1.4.2 Estimation de la loi et de la densité conditionnelle . . . 23

1.4.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle . . . 24

1.5 Plan de la thèse 25

2 Local linear nonparametric estimation of the point at high risk **31**

2.1 Introduction 32

2.2 The Model and its estimator 33

2.3 Pointwise almost-complete convergence 35

2.4 Appendix 39

3 Local linear estimation of the conditional disrtibution for functional data : Spatial data case **51**

3.1 Introduction 51

3.2 Presentation of the spatial estimate 53

3.3 Conditional cumulative distribution estimation 54

3.4 Conditional density estimation 57
3.5 Estimation of the conditional hazard function 58
3.6 Appendix 59

4 Conclusion et perspectives 77
4.1 Conclusion 77
4.2 Perspectives 78

Bibliographie générale 79

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à l'estimation non paramétrique, par la méthode locale linéaire, de la fonction de hasard conditionnelle lorseque la variable explicative est de type fonctionnelle.

Dans un premier temps, nous considérons une suite d'observations indépendantes et identiquement distribuées et nous construisons un estimateur, par la méthode locale linéaire, du point à haut risque qui est basée à l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle. Nous étudions ensuite, la convergence presque-complète de cet estimateur en précisant sa vitesses de convergence.

Dans un second temps, nous généralisons nos résultats au cadre spatial. Dans ce contexte, nous construisons des estimateurs localement linéaires pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et la fonction de hasard conditionnelle, nous établissons, sous des hypothèses générales ses vitesse de convergence presque complète.

Summary

In this thesis, we are interested to estimation of the conditional hazard function by the local linear method when the regressor is valued in an infinite dimensional space.

First, we consider a sequence of independent and identically distributed observations. Then, we state the almost-complete convergence, with rates, of this estimator.

Secondly, we generalize our results to the spatial framework. In fact, we construct first local linear estimators of the conditional cumulative distribution, the conditional density and the conditional hazard function and we establish the almost complete convergence under some conditions of spatial dependence.

Chapitre 1

Introduction et Présentation

1.1 Modèles non paramétriques conditionnels et variables fonctionnelles : Motivation et contexte bibliographique

La statistique fonctionnelle est devenue ces dernières années un champ d'étude important dans la recherche en statistique. Il s'agit d'un domaine important de la Statistique moderne suscitant l'intérêt tant sur le plan théorique que sur celui des applications. Grâce à la précision des appareils de mesures moderne et aux progrès de l'outil informatique au niveau des capacités de stockage qui permettent de la récupération de données volumieuses. Ainsi, les outils statistiques sont confrontés à des données nombreuses ou complexes (courbes, images, surfaces,...) est qui prennent ces valeurs dans des espaces de dimension infinie. Par ailleurs ce type de variables ainsi que leurs champs d'application sont de plus en plus nombreux comme la chimie quantitative, la météorologie, l'économétrie, la biométrie ou l'imagerie médicale. Cette question de modélisation statistique des données fonctionnelles a été traités depuis les années 60, et que les premiers travaux ont été réalisé par Obhukov (1960), Holmstrom (1961) en climatologie, Buell (1971), Deville (1974) en économétrie. En fait, ce domaine a été popularisé en particulier par Ramsay et Silverman (1997) pour les aspects appliqués, puis par Bosq (2000) pour les aspects théoriques, Ferraty et Vieu (2006) pour une étude non paramétrique et Ferraty et Romain (2011) pour des développements récents. Récemment et dans le même contexte, nous nous référons à Cardot et al. (2004), Manteiga et Vieu (2007) ainsi que Ferraty (2010). Ce traitement non paramétrique des données fonctionnelles qui souffre du fléau de la dimension et le choix de points de discrétisation est beaucoup plus récent que l'analyse parametrique qui nécessitant des hypothèses contraignantes. Pour pallier cet inconvénient, la statistique fonctionnelle est axée sur l'utilisation de la structure topologique de l'espace fonctionnelle des données. Cette structure topologique nous permet de trouver une solution amorce pour le problème du fléau de la dimension. Les premiers résultats sur le traitement non paramétrique ont été obtenus par Gasser et al. (1998) (ont considéré des données médicales) puis Hall et Heckman (2002) se sont intéressés à l'estimation non paramétrique du mode de la distribution d'une variable fonctionnelle. Cadre (2001) est étudié l'estimaton de la médiane de la distribution d'une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un espace de Banach. Dabo-Niang (2002) a obtenu, la convergence presque sûre et la normalité asymptotique d'un estimateur de la densité d'une variable aléatoire dans un espace de dimension infinie, il a donné aussi une application déterminant l'expression de la vitesse de convergence dans le cas de l'estimation de la densité d'un processus de diffusion par rapport à la mesure de Wiener. En utilisant la propriété de concentration de la mesure de probabilité d'une variable explicative fonctionnelle, Dabo-Niang et Rhomari (2004) ont étudié la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau de la régression non paramétrique, Ferraty et al. (2004) ont étudié la convergence presque complète pour le cas fortement mélangeant, Masry (2005) a prouvé la normalité asymptotique dans le cas de données fonctionnelles α-mélangeantes. Les premiers résultats sur l'application de la modélisation statistique par des variables fonctionnelles sur des données réelles ont été obtenus par plusieurs auteurs . A titre d'exemple, Ferraty et Vieu (2002, 2003) se sont intéressés à des données spectrométriques, Besse et al. (2000) à des données météorologiques. D'autres résultats sur l'estimation non paramétrique des modèles conditionnels ont été déterminés par Ferraty et al. (2006) Ils ont été construit un estimateur à noyau pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et ses dérivées, le mode conditionnel et les quantiles conditionnels en considérant des observations indépendantes identiquement distribuées. Comme résultats asymptotique, ils ont précisé la vitesse de convergence presque complète des estimateurs construits. Nous renvoyons à Ferraty et Vieu (2006) pour un ample éventail d'applications de ces modèles en statistique fonctionnelle. Dabo-Niang et Laksaci (2007) ont inséré des résultats sur la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau du mode conditionnel et les quantiles conditionnels dans le cas i.i.d. Laksaci (2007) a obtenu la détermination des termes dominants de l'erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Ferraty et al (2008) ont établi la convergence presque complète de l'estimateur à noyau de la fonction du hasard conditionnelle. La normalité asymptotique des estimateurs du mode conditionnel et des quantiles conditionnels dans les cas (i.i.d. et α-mélengeant) a été obtenu par Ezzahrioui et Ould-Saïd en (2008). Dabo-

Niang et Laksaci (2011, 2012) ont traité la convergence en norme L^p pour le mode conditionnel et les quantiles conditionnels. En considérant des observations α- mélangeantes, Quantela-del Rio (2008) a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al (2008) sur la fonction de hasard conditionnelle et il a appliqué ces résultats asymptotique aux données sismiques. Un autre estimateur des quantiles conditionnels a été proposé par Laksaci et al. (2009). Ils ont établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur robuste appartenant à la classe des M-estimateurs dans le cas i.i.d. La généralisation de ces résultats au cas fortement mélangeant a été étudié par les mêmes auteurs. Récemment Ferraty et Laksaci et al. (2010) ont donné la version uniforme de la vitesse de convergence ponctuelle étudié par Ferraty et al. (2006). Ils ont formulé cette vitesse de convergence en fonction de l'entropie de Kolmogrov et l'hypothèse de concentration de la variable explicative. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation de la fonction de régression en utilisant d'autres approches, telles que la méthode des k plus proches voisins de Burba et al. (2008), les techniques robustes, voir Azzidine et al. (2008), Crambes et al. (2008), et Attouche et al. (2009, 2010). Pour l'estimation par la méthode des polynomes locaux, on peut citer Baillo et Grane (2009) Barrientos-Marin et al. (2010), Berlinet et al. (2011) et Demongeot et al. (2012). Dans la statistique fonctionnelle, la littérature sur le cas d'une variable réponse fonctionnelle est très restreinte. On peut voir, dans ce contexte l'article de Dabo-Niang et Rhomari (2009) pour la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau de la régression comme élément banachique. La convergence presque complète de cet estimateur est étudié par Ferraty et al. (2011). Nous renvoyons à Van Keilegom en collaboration avec Ferraty et Vieu (2012) pour la normalité asymptotique de cet estimateur dans le cas où les deux variables (réponse, explicative) sont fonctionnelles. Tous ces travaux ont été réalisés dans le cas où les observations sont indépendantes identiquement distribuées. Le cas dépendant a été récemment examiné par Ferraty et al. (2012). Dans cet article, les auteurs ont prouvé la convergence presque complète de l'estimateur à noyau de la régression pour des observations β-mélangeantes. Comme la statistique fonctionnelle ait les mêmes buts que les autres domaines de la statistique (statistique inférentielle, analyse de données, , . . .), ces données prennent leurs valeurs dans des espaces de dimension infinie (ou espaces de fonctions), et les méthodes usuelles de la statistique multivariée sont ici mises en défaut. Par exemple, considérons que l'on a des observations de n courbes en p points de discrétisation, ces courbes étant utilisées comme prédicteur d'une autre variable. Si on rassemble ces données notées c_{ij} (pour i varié de 1 à n et j de 1 à p) sous forme d'une matrice de taille $n \times p$,

$$X = \begin{pmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1p} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ c_{n1} & . & . & . & c_{np} \end{pmatrix}$$

la méthode des moindres carrés ordinaires, trés courante en statistique multivariée, peut donner des mauvais résultats dans cette situation, puisque cette méthode conduit à l'inversion de la matrice $X^T X$ qui peut indiquer difficile voire impossible pour deux raisons. La première est que p est généralement très élevé (ou $p > n$, et ainsi une matrice $X^T X$ non inversible).
La seconde raison est d'avoir une colinéarité importante entre les p prédicteurs du fait qu'ils sont les points de mesure d'une même fonction. Pour contourner ce problème, quelques solutions ont été proposées :

- La "régression ridge" (présentée au début par Hoerl et Kennard, 1980), qui consiste à minimiser la somme des carrés des termes erreurs auxquels on a ajouté une pénalité. Cela amène à inverser la matrice $(X^T + \lambda I_p)$ (avec λ réel strictement positif et I_p matrice identité de taille p) au lieu de $X^T X$,
- la régression sur composantes principales ou PCR (Principal Components Regression), qui consiste à diminuer la dimension p en utilisant les k premières composantes principales issues de l'analyse en composantes principales du tableau X (avec k entier non nul "convenablement" choisi),
- la régression PLS "partial least squares" (voir Helland, 1990), qui est une méthode algorithmique permet de relier un ensemble de variables dépendantes Y à un ensemble de variables indépendantes X lorsque le nombre de variables est élevé.

Ces différentes méthodes sont détaillées dans un article de Frank et Friedman (1993). Il a été souligné par Hastie et Mallows (1993) dans un débat relatif à cet article, l'accés qui consiste à déterminer une courbe seulement à travers un vecteur de points de mesure est réductrice, ne serait-ce que par le fait que les points de mesure demeurent les mêmes pour chaque courbe observée, ce qui toujours le cas en pratique. Cette approche amène au problème que l'on perd la forme de courbe si on utilise seulement les mesures de la courbe en certains points. C'est pour cela qu'il paraît mieux de traiter les données en se basant de leur nature fonctionnelle.

Rao (1958) et Tucker (1958) se basent sur l'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle pour des données fonctionnelles. En suite, Ramsay (1982) donne la notion de données fonctionnelles et pose la question de l'adaptation des méthodes de la statistique multivariée à ce domaine fonctionnel. Actuellement, les travaux d'exploration de la statistique fonctionnelle aboutissent à des ouvrages faisant référence en la matière, comme par exemple les monographies de Ramsay et Silverman (2002 et 2005).

1.1.1 Variables et données fonctionnelles

L'axe principal de la statistique fonctionnelle est celui des données fonctionnelles qui sont des courbes construites par des mesures de phénomènes naturelles continues, ce sont des fonctions ou des vecteurs de points de mesure, de telles données apparisent dans nombreux domaines (médecine, économie, biostatistique,...).

Definition 1.1 (Ferraty et Vieu (2006)) *: Une variable aléatoire est dite fonctionnelle si ses valeurs sont dans un espace de dimension infinie. Une observation d'une variable fonctionnelle est appelée donnée fonctionnelle.*

$$X = \{X_{t,t\in\mathcal{T}}, X_t : \Omega \to \mathbb{R}\}.$$

- $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ *: courbe.*
- $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2$ *: image.*

Tout modèle prenant en compte au moins une variable aléatoire fonctionnelle (v.a.f), est appelé modèle fonctionnel.

En pratique, une donnée fonctionnelle est observée dans un nombre fini d'instants :
$0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = T$:
$\{(t_0, X_{t_0}), (t_1, X_{t_1}), ..., (t_k, X_{t_k})\}$(Figure1.1).

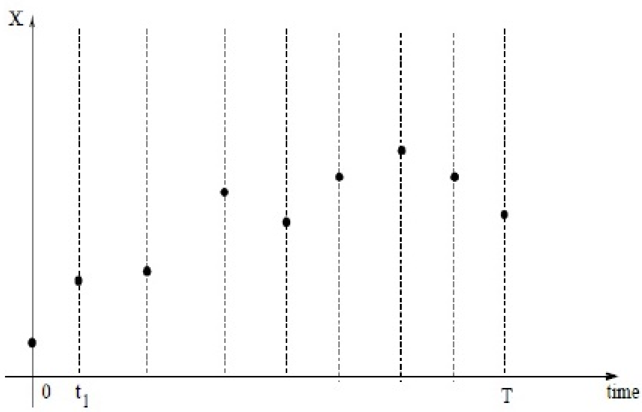

Figure 1.1-Les données fonctionnelles

Definition 1.2 *Un modèle fonctionnel est dit paramétrique si C est indexé par un nombre fini de paramètres appartenant à $\mathcal{F}$, où C n'est qu'un sous-ensemble de $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$ ($\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$ l'ensemble des fonctions definies sur l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ et a valeurs dans l'espace $\mathcal{F}'$). Dans le cas contraire, un modèle fonctionnel est dit non-paramétrique.*

1.1.2 Domaines d'applications des données fonctionnelles

On dèsire mentionner quelques domaines dans lesquels apparaissent les données fonctionnelles, pour donner une idée du type de problèmes que la statistique fonctionnelle permet de résoudre.

- *En science de la nature*, En premier lieu le travail précurseur de Rao (1958) relatif à une étude de courbes de croissance. Plus récemment, Ramsay et Silverman (2002), ont 'etudié les variations de l'angle du genou au cours de la marche. Concernant la biologie animale, des études de la ponte de mouches méditerranéennes ont été effectuées par plusieurs auteurs (Chiou, Müller, Wang et Carey, 2003, Chiou, Müller et Wang, 2003, Cardot, 2006). Les données consistent en des courbes donnant pour chaque mouche la quantité d'oeufs pondus en fonction du temps.
- *La chimiométrie* est utilisée parmi les méthodes dédiées aux analyses statistiques fonctionnelles. Un ensemble des travaux consacrés à ce sujet, on peut mentionner Frank et Friedman (1993), ainsi que Hastie et

Mallows (1993) qui ont commenté l'article de Frank et Friedman (1993) en donnant un exemple de courbes mesurant la log-intensité d'un rayon laser réfracté en fonction de l'angle de réfraction. Dernièrement, Ferraty et Vieu (2002) se sont intéressés à l'étude de la contenance de graisse de morceaux de viande (variable d'intérêt) étant données les courbes d'absorbsions de longueurs d'ondes infra-rouge de ces morceaux de viande (variable explicative).

– *L'environnement* fait aussi partie des domaines d'étude propices à l'utilisation de méthodes de la statistique fonctionnelle. On peut citer par exemple Aneiros-Perez, Cardot, Estevez-Perez et Vieu (2004) qui ont fait un travail sur un problème de prévision de pollution. Il s'agit d'étudier des mesures de pics de pollution par l'ozone chaque jour (de l'année 2000 à 2004). étant données des courbes météorologiques de la veille.
– Des applications liées à *la climatologie* ont été étudiées par Besse, Cardot et Stephenson (2000)(courant chaud de l'océan Pacifique). Dans cette étude, les données consistent en des mesures de la température de ce courant en fonction du temps, en utilisant un modèle autorégressif fonctionnel (voir à ce sujet Bosq, 2000).
– Dans le domaine de *la linguistique*, l'apport de la statistique fonctionnelle a là aussi trouvé une application. On peut citer par exemple Hastie, Buja et Tibshirani (1995), Berlinet, Biau et Rouvière (2005) et aussi Ferraty et Vieu (2003). Dans ces travaux, les données sont des courbes correspondant à des enregistrements de phonèmes prononcés par différentes personnes. Le but est d'établir une classification à chaque phonème de ces courbes (variable d'intérêt) en utilisant comme variable explicative la courbe enregistrée.
– *En graphologie*, des travaux ont également réalisés, notamment concernant l'écriture manuscrite. On peut citer sur ce problème Hastie, Buja et Tibshirani (1995) et Ramsay (2000). Ce dernier modélise par exemple la position du stylo (abscisses et ordonnées en fonction du temps) à l'aide d'équations différentielles.
– Des applications liées à *l'économie* ont été étudiées par Kneip et Utikal (2001), et dernièrement par Benko, Härdle et Kneip (2005), basés notamment sur une analyse en composantes principales fonctionnelle.

1.1.3 Exemples d'applications des données fonctionnelles

Deux exemples d'applications sont étudiés. Le premier (cf. Laksaci, Thèse Doctorat (2005)) s'est intéressé à l'étude d'un problème de contrôle de qualité sur de la viande hachée. La variable fonctionnelle est donnée par la courbe d'absorbance de la lumière en fonction de la longueur d'onde. Les courbes spectrométriques X_i correspondant à 215 morceaux de viande sont présentées ci-dessous.

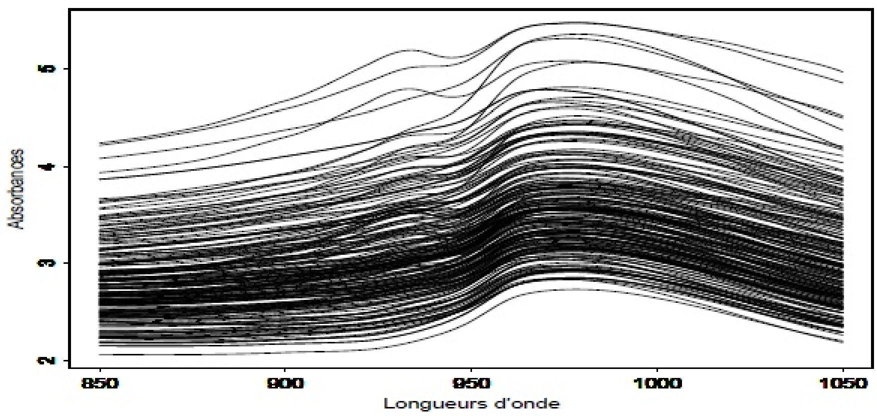

Figure 1.2-Données spectrométrique

L'objectif de ce travail est de prévoir le taux de matière grasse (Y) dans un morceau de viande sachant sa courbe spéctrométrique (X).

Le second exemple est tiré du domaine indistruel, (le centre de recherche de Danone Vitapole, Paris) concerne la prédiction de la qualité des biscuits à partir de la courbe de pétrissage associée à la farine dont le biscuit est fabriqué. La courbe de pétrissage mesure durant 480 secondes la résistance de la pâte pendant le processus de pétrissage (Figure1.3). L'objectif ici est double : mesurer la capacité de prédiction des courbes de pétrissage pour la qualité des biscuits et, deuxièmement, d'anticiper sur la qualité du biscuit le plus tôt possible (avant $480s$).

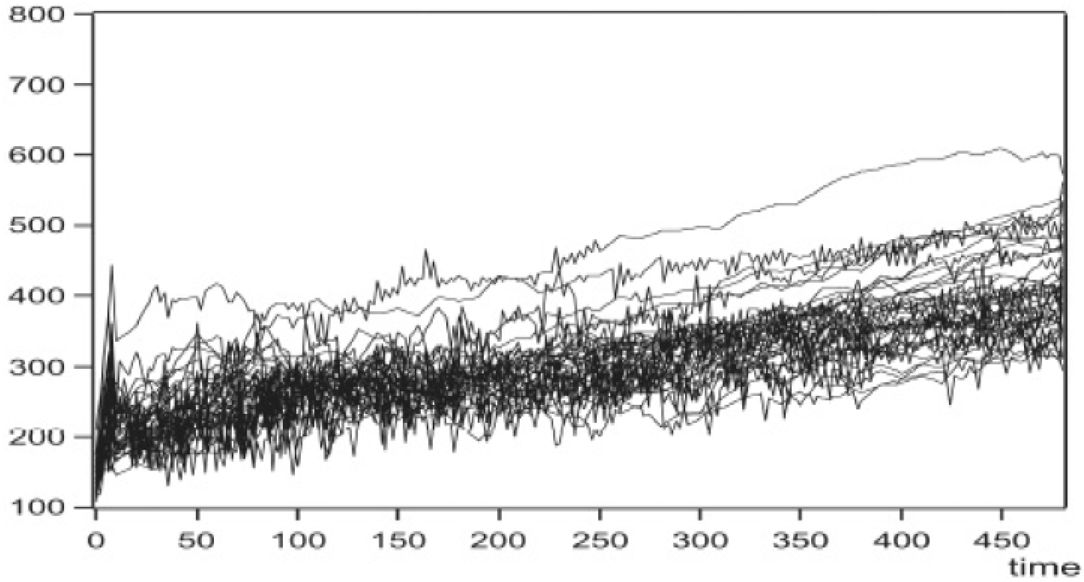

Figure 1.3-Les données de pétrissage : la dureté des 115 farines observées durant 480 secondes.

1.2 Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard

Le taux de hasard est un outil utile dans l'analyse de survie, il reflète la probabilité instantanée que la durée se terminera dans l'instant suivant. L'estimation du taux de hasard, est une question importante en statistique, selon la variété de ses possibilités d'application, ce sujet peut être inspecté sous plusieurs angles selon la complexité du problème posé : présence éventuelle de dépendance entre les variables observées (phénomène courant dans les applications sismologiques par exemple), présence éventuelle de censure dans l'échantillon observé (phénomène courant dans les applications médicales par exemple). La littérature de l'estimation de fonction de hasard conditionnelle en statistique fonctionnelle est très restreinte. Ferraty et al. (2008) ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées, ils ont traité aussi le cas dépendant. Dans le même contexte, Ezzahrioui (2007) a étudié la normalité asymptotique. En considérant des observations α-mélangeantes, Quantela-del Rio (2008) a étudié la convergence presque complète, la convergence en moyenne quadratique et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al (2008). L'auteur a appliqué ces résultats asymptotiques sur des données sismiques. On pourra citer aussi le récent article de Laksaci et Mechab (2010) sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour des données fonctionnelles spatialement dépendantes.

Dans cette thèse, nous étudions l'estimation locale linéaire de la fonction de hasard d'une réponse réelle conditionnellement à une variable fonctionnelle.

1.3 Estimation par polynômes locaux : historique et résultats

L'étude de l'estimation par polynômes locaux liés à la distribution conditionnelle dans le cas multivarié a été largement utilisée en statistique non paramétrique. Historiquement, les premiers résultats sur cette estimation a été obtenus par Stone (1977,1980,1982). Il a traité l'estimation par polynômes locaux de la régression. Lejeune (1985) et Müller (1987) ont considérè l'efficacité de l'estimation par la méthode des polynômes locaux. L'optimisation de la vitesse de convergence de la méthode des polynômes locaux dans le cas d'estimation robuste a été étudié par Tsybakov (1986). Tibshirani et Hastie dans (1987) ont exploité le principe de l'approximation localement polynômiale. La généralisation de ces résultats a été donnés par Cleveland et Devlin (1988). Ioffe et Atkovnik (1989) ont obtenu la convergence presque-sûre ponctuelle et uniforme de l'estimateur polynomial local de la régression, et en (1990), ils ont déterminé les vitesses de leurs estimateurs.
Récement, Fan (1992) a étudié l'estimateur local linéaire de la régression et a établi la vitesse de convergence de l'erreur quadratique moyenne conditionnelle et celle de l'erreur quadratique moyenne conditionnelle intégrée. En 1993, le même auteur a traité le problème du risque minimax. Fan et Gijbels (1992) ont fait un travail sur le problème de choix du paramètre de lissage dans l'estimation locale linéaire de la fonction de régression, et ils ont abordé le même problème pour des degrés supérieurs, en estimant la régression et ses dérivées par (Fan,J et Gijbels,I. 1995). Tandis que, Ruppert et Wand (1994), ont établi la variance asymptotiques de l'estimateur par polynômes locaux de la régression multivariée. Par ailleurs, Masry et Fan (1997) ont

étudié le problème d'estimation de l'espérance conditionnelle et ses dérivées via la méthode des polynômes locaux dans le cas de données dépendantes. La généralisation de ces résultats au cas fortement mélangeant a été étudié par les mêmes auteurs, et ils ont établi aussi la normalité asymptotique des estimateurs des moments conditionnels, de densité conditionnelle ainsi que de la fonction de répartition conditionnelle. Le développement de ces résultats au cadre spatial a été opérée par Hallin et al. (2004). Nous renvoyons à Fan et Gijbels (1996) pour une présentation générale de cette méthode et de ses applications.

Dans le cadre fonctionnel, l'utilisation de la méthode d'estimation par polynômes locaux est très restreinte. En effet, Hallin et Tran (2004), q'ils ont établi la normalité asymptotique de l'estimateur de la régression ainsi que sa dérivée d'ordre 1. Dans le même contexte Xu et Wang (2008) ont étudié l'estimation locale linéaire de la régression spatiale en minimisant le cirière de l'erreur absolue. Barrientos et al. (2010) ont utilisé une modélisation locale linéaire fonctionnelle rapide pour étudier l'opérateur de régression. Baíllo et Grané (2009) a établi la performance de la méthode locale linéaire, en faisant une comparaison avec l'estimateur de Nadaraya-Watson dans le cas fonctionnel. Une autre méthode d'estimation locale linéaire fonctionnelle a été réalisée par Boj et al. (2010). On peut aussi citer le travail de Berlinet et al. (2011) ce qui a donné une majoration de l'erreur quadratique moyenne. Demongeot et al. (2010) ont obtenu, dans des conditions standards, les convergences ponctuelle et uniforme presque-complètes ainsi que les vitesses de convergence de l'estimateur local linéaire de la densité conditionnelle ; puis, ils ont appliqué ces résultats pour donner les propriétés asymptotiques de l'estimateur local linéaire du mode conditionnel. Dans (Demongeot.J,Laksaci.A, Madani.F et Rachdi.M.2011), les mêmes auteurs ont traité le cas de mélangeance forte des observations fonctionelles et ils ont utilisé leurs résultats au problème de prédiction d'une série temporelle par l'estimation du mode conditionnel. En 2014, ces auteurs ont réussi à établir la vitesse de convergence asymptotiquement exacte de l'estimateur de la densité conditionnelle, permettant d'exprimer l'erreur quadratique moyenne. Chouaf et Laksaci (2011) ont établi la généralisation des résultats de Barrientos et al. (2010) pour des données spatialement dépendantes. Demongeot et al. (2012) ont établi l'estimation de la densité conditionnelle par cette méthode. Ils ont étudié aussi dans cet article la convergence presque complète de l'estimation du mode conditionnel dans le cas i.i.d.

1.4 Quelques résultats sur l'estimation local linéaire pour des modèles fonctionnels

Nous donnons ci-après un brève présentation des résultats obtenus pour l'estimation local linéaire dans la thèse.

1.4.1 Notations et hypothèses

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique. On note d la semi métrique sur $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in \mathcal{F}$ on définit la fonction de hasard conditionnelle noté h^x et donnée par :

$$h^x(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(Y \leq y + \Delta y / Y > y, X)}{\Delta y}$$

qui s'écrit aussi naturellement :

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)} = \frac{f^x(y)}{S^x(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{F}$$

dès que $F^x(y) < 1$.
Où F^x est la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, définie par :

$$F^x(y) = P(Y \leq y / X = x), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

On suppose que cette distribution conditionnelle de Y sachant X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et f^x sa densité. S^x est la fonction de survie conditionnelle définie par : $S^x(y) = 1 - F^x(y)$.

Comme dans tout problème d'estimation nonparamétrique, la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ joue un rôle important dans les propriétés de concentration de la variable X. Ainsi, lorsque cette dimension n'est pas nécessairement finie, les fonctions de probabilité de petites boules définies par

$$\Phi_x(h) = P(X \in B(x, h)) = P(X \in \{x' \in \mathcal{F}, d(x, x') < h\}),$$

interviennent de manière directe dans le comportement asymptotique de tout estimateur non-paramétrique fonctionnel (voir Ferraty and Vieu (2006)).
Dans ce qui suit, nous fixons x dans $\mathcal{F}$, et nous désignons par N_x un voisinage de x, $S_{\mathbb{R}}$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, et par $\Phi_x(r_1, r_2) = P(r_2 \leq \delta(X, x) \leq r_1)$.
Notons que notre modèle non-paramétrique sera plus général, dans le sens où nous n'aurons besoin que des hypothèses suivantes :

(H1) Pour tout $r > 0, \Phi_x(r) = \Phi_x(-r, r) > 0$.

(H2) La densité conditionnelle f^x est telle que : $\exists b_1 > 0, b_2 > 0, \forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}}^2$ et $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x, |f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2})$, où $C_x > 0$ (dépend de x).
et
$\forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}}^2, \forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x, |F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2})$.

(H3) La fonction $\beta(.,.)$ est telle que :

$$\forall x' \in \mathcal{F},\ C_1 d(x, x') \leq |\beta(x, x')| \leq C_2 d(x, x'),\ \text{ où } C_1 > 0, C_2 > 0.$$

(H4) K est une fonction positive, différentiable et de support $[-1, 1]$.

(H5) H est une fonction positive, bornée, Lipschitzienne, et telle que :

$$\int |t|^{b_2} H(t)dt < \infty \text{ et } \int H^2(t)dt < \infty.$$

(H6) La largeur de fenêtre h_K vérifie

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : -\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi_x(zh_K, h_K) \frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz > C_3 > 0$$

et

$$h_K \int_{B(x, h_K)} \beta(u, x)dP(u) = o\left(\int_{B(x, h_K)} \beta^2(u, x)dP(u)\right)$$

où $B(x, r) = \{x' \in \mathcal{F}/d(x', x) \leq r\}$ désigne une boule fermée de centre x et de rayon r, et $dP(x)$ est la fonction cumulative.

(H7) La largeur de fenêtre h_H satisfait :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma h_H = \infty \text{ pour tout } \gamma > 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{nh_H \Phi_x(h_k)} = 0.$$

où H est un noyau, $h_K = h_{K,n}$ (respectivement, $h_H = h_{H,n}$) est une suite de nombres réels positifs tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

1.4.2 Estimation de la loi et de la densité conditionnelle

Soit$(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ des couples ayant la même loi que (X, Y). On construit un estimateur pour la densité conditionnelle (voir Demongeot. J, Laksaci. A, Madani. F et Rachdi. M (2010)), en minimisant l'expression suivante :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (h_H^{-1} H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h_H^{-1}\delta(x, X_i))$$

où $\beta(.,.)$ est une fonction réelle connue, définie sur $\mathcal{F}^2$ et telle que, $\forall \xi \in \mathcal{F}, \beta(\xi,\xi) = 0$. De plus $\delta(.,.)$ est une fonction réelle connue, définie sur $\mathcal{F}^2$, telle que, $d(.,.) = |\delta(.,.)|$.
Cet estimateur noté $\hat{f}^x$, défini par :

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{h_H \sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)}$$

où $W_{ij}(x) = \beta(X_i,x)(\beta(X_i,x) - \beta(X_j,x))K(h_K^{-1}\delta(x,X_i))K(h_K^{-1}\delta(x,X_j))$, avec la convention $0/0 = 0$.
Le théorème suivant donne la convergence (p.co.) presque complète de l'estimateur $\hat{f}^x(y)$

Theorem 1.3 *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H4)-(H8), nous avons*

$$\sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n h_H \Phi_x(h_K)}}\right) .p.co.$$

De cet estimateur on déduit un estimateur pour la fonction de répartition conditionnelle, noté $\hat{F}^x$, défini par :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x) H^0(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x)}$$

où H^0 est la fonction primitive de H.
Le théorème ci-dessous donne la convergence (p.co.) presque complète de l'estimateur $\widehat{F}^x(y)$

Theorem 1.4 *Sous les hypothèses (H1)-(H8), nous avons :*

$$\sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \phi_x(h_K)}}\right) .p.co.$$

1.4.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle

L'estimateur local linéaire de la fonction de hasard conditionnelle h^x peut se construire de la manière suivante :

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\hat{f}^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Le théorème suivant donne la convergence (p.co.) presque complète de l'estimateur $\widehat{h}^x(y)$

Theorem 1.5 *Sous les hypothèses (H1)-(H8), nous avons :*

$$\sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right).p.co.$$

La démonstration du résultats ci-dessus et les hypothèses imposées seront donnés au chapitre 2.

1.5 Plan de la thèse

Notre principale étude est celle de l'estimation non paramétrique des modèles conditionnels par la méthode locale linéaire, l'orsequ'on dispose d'une variable réponse réelle conditionnée à une variable explicative fonctionnelle dans le but par la suite est d'étudier les propriétés asymptotiques de notre estimateur, les propriétés asymptotiques sont énoncées en termes de convergence presque complète.

Nous avons préféré commencer par un chapitre introductif afin de présenter des éléments sur les fondements de notre thématique qui est l'estimation nonparamétrique des données fonctionnelles via la méthode locale linéaire. Nous y offrons de nombreuses références bibliographiques sur le sujet.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons l'estimation locale linéaire du point à haut risque qui est basée sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour une variable de réponse réelle et une variable exogène fonctionnelle. Ce travail à fait l'objet d'une publication acceptée dans le journal International Journal of Statistics and Economics.

Le troisième chapitre consiste à étendre les résultats précédents au cadre spatial lorsque le champ aléatoire prend ses valeurs dans un espace abstrait de dimension infinie. On considère la variable aléatoire fonctionnelle spatiale discrète $\{X_n\}$ indexée par $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$, l'idée est de faire une extension des résultats asymptotiques obtenus dans le deuxième chapitre pour $N = 1$ au cas spatial lorsque $N > 1$. Cette généralisation permet de traiter le problème de prévision dans les champs aléatoires. Pour ce faire, nous construiserons des estimateurs locaux linéaires pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et la fonction de hasard conditionnelle. Nous établirons ensuite la convergence presque-complète de ces estimateurs.

Enfin, Nous consacrons le dernier chapitre aux prolongements possibles de nos travaux et aux perspectives rattachées au contenu de ce domaine de recherche.

Bibliographie

[1] Aneiros-Perez, G., Cardot, H., Estevez-Perez, G. and Vieu, P. Maximum ozone concentration forecasting by functional nonparametric approaches. *Environmetrics*, 15, (2004), 675-685.

[2] Baìllo, A. and Grané, A. Local linear regression for functional predictor and scalar response, *J. of Multivariate Anal.*, 100, (2009), 102-111.

[3] Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. and Vieu, P. Locally Modelled Regression and Functional Data. *J. of Nonparametric Stat.*, 22, (2010), 617-632.

[4] Benko, M., Härdle, W. and Kneip, A. Common functional principal components. SFB 649 Economic Risk Discussion Paper, (2005), 2006-010.

[5] Berlinet, A., Biau, G. and Rouvière, L. Functional classification with wavelets. Preprint. (2005).

[6] Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. Local linear regression for functional data. Inst. Statist. Math., 63, (2011), 1047-1075.

[7] Besse, P., Cardot, H. and Stephenson, D. Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27, (2000), 673-687.

[8] Boj, E., Delicado, P. and Fortiana, J. Distance-based local linear regression for functional predictors. Computational Statistics and Data Analysis, 54, (2010), 429-437.

[9] Bosq, D. Linear processes in function spaces. Lecture Notes in Statistics, 149, (2000), Springer.

[10] Chiou, J-M., Müller, H.-G., Wang, J-L and Carey, J.R. A functional multiplicative effects model for longitudinal data, with application to reproductive histories of female med ies. *Statistica Sinica*, 13, (2003), 1119- 1133.

[11] Chiou, J-M., Müller, H.-G. and Wang, J-L. Functional quasilikelihood regression models with smooth random effects. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 65, (2003), 405-423.

[12] Chouaf, A. and Laksaci, A. On the functional local linear estimate for spatial regression. Statistics and Risk Modeling, 29, (2011), 189-214.

[13] Cleveland, W.S. and Devlin, S.J. Locally-weighted regression : an approach to regression analysis by local fitting. J. Amer. Statist. Assoc., 83, (1988), 597-610.

[14] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. et Rachdi, M. Estimation locale linéaire de la densité conditionnelle pour des données fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris, I 348, (2010), (15-16), 931-934.

[15] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. A fast functional locally modeled conditional density and mode for functional time-series. In : Recent Advances in Functional Data Analysis and Related Topics. In : Contributions to Statistics, Physica-Verlag/Springer, pp. 85- 90. http ://dx.doi.org/10.1007/978-3-7908-2736-1-13. (2011b).

[16] El Methni, M. and Rachdi, M. Local weighted average estimation of the regression operator for functional data, *Communications in Statistics-Theory and Methods.* 40. (2010), 3141-3153.

[17] Ezzahrioui, M. Prévision dans les modèles conditionnels en dimension infinie. PhD Thesis. Univ. du Littoral Côte d'Opale. (2007).

[18] Fan, J. and Gijbels, I. Variable bandwidth and local linear regression smoothers. Ann. of Statist., 20, (1992), 2008-2036.

[19] Fan, J. and Gijbels, I. Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting : variable bandwidth and spatial adaptation. J. Royal Statist. Soc. B., 57, (1995a), 371-394.

[20] Fan, J. and Gijbels, I. Adaptive order polynomial fitting : bandwidth robustification and bias reduction. J. *Comput. Graph. Statist.*, 4, (1995b), 213-227.

[21] Fan, J. Design-adaptive nonparametric regression. J. *Amer. Statist. Assoc.*, 87, (1992), 998-1004.

[22] Fan, J. Local linear regression smoothers and their minimax efficiency. *Ann. of Statist.*, 20, (1993), 196-216.

[23] Fan, J., Gijbels, I. Local Polynomial Modelling and its Applications. London, Chapman and Hall. (1996).

[24] Ferraty, F. and Vieu, P. The functional nonparametric model and application to spectrometric data. Computational Statistics, 17, (2002), 545-564.

[25] Ferraty, F. and Vieu, P. Curves discrimination : a nonparametric functional approach. Special issue in honour of Stan Azen : a birthday celebration. *Computational Statistics and Data Analysis*, 44, (2003), 161-173.

[26] Ferraty, F. and Vieu, P. Nonparametric functional data analysis : theory and practice. Springer, New York. (2006).

[27] Ferraty, F., Rabhi, A., Vieu, P. Estimation non paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. Rom. J. Pure and Applied Math. 52, (2008), 1-18.

[28] Frank, I.E. and Friedman, J.H. A statistical view of some chemometrics regression tools. *Technometrics*, 35, (1993), 109-135.

[29] Hallin, M., Lu, Z. and Tran, L.T. Local linear spatial regression, *Ann. of Statist.*, 32, (2004), 2469-2500.

[30] Hastie, T., Buja, A. and Tibshirani, R. Penalized discriminant analysis. *Annals of Statistics*, 23, (1995), 73-102.

[31] Hastie, T. and Mallows, C. Discussion of "A statistical view of some chemometrics regression tools." by Frank, I.E. and Friedman, J.H. Technometrics, 35, (1993), 140-143.

[32] Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. Ridge regression : advances, algorithms and applications. *American Journal of Mathematical Management Sciences*, 1, (1980), 5-83.

[33] Helland, I.S. Partial least squares regression and statistical models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 17, (1990), 97-114.

[34] Ioffe,M. D. and Katkovnik, V. Ya. Pointwise and uniform convergence with probability 1 of nonparametric regression estimators. *Automat. and Remote Control*, 12, (1989), 1659-1667.

[35] Ioffe, M. D. and Katkovnik, V. Ya. Rate of pointwise and uniform convergence with probability 1 of nonparametric estimates of a regression function. *Automat. and Remote Control*, 51, (1990), 23-30.

[36] Kneip, A. and Utikal, K.J. Inference for density families using functional principal component analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 96, (2001), 519-542.

[37] Laksaci, A., Mechab, B. Estimation non parametrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle cas des donnees spatiales. Rev : Roumaine, Math Pures Appl. 55, (2010), 35-51.

[38] Lejeune, M. Estimation non-parametrique par noyaux : regression polynomiale mobile. *Revue de Statist. Appliq.*, 33, (1985), 43-68.

[39] Masry, E. and Fan, J. Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, (1997), 165-179.

[40] Müller, H.G. Weighted local regression and kernel methods for nonparametric curve fitting. J. Amer. Statist. Assoc., 82, (1987), 231-238.

[41] Quintela-del-Rio, A. On non-parametric techniques for areacharacteristic seismic hazard parameters. Geophys. J. Int. 180, (2010), 339-346.

[42] Rachdi, M., Laksaci, A., Demongeot, J., Abdali, A. and Madani, F. Theoretical and practical aspects on the quadratic error in the local linear estimation of the conditional density for functional data. *Computational Statistics and Data Analysis*, accepted. (2014).

[43] Ramsay, J.O. When the data are functions. Psychometrika, 47, (1982), 379-396.

[44] Ramsay, J.O. Functional components of variation in handwriting. *Journal of the American Statistical Association*, 95, (2000), 9-15.

[45] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. Applied functional data ana- lysis. Springer, New York. (2002).

[46] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. Functional data analysis (Second Edition). Springer, New York. (2005).

[47] Rao, C.R. Some statistical methods for comparison of growth curves. *Biometrics*, 14, (1958), 1-17.

[48] Ruppert, D. and Wand, M.P. Multivariate weighted least squares regression. *Ann. Statist.*, 22, (1994), 1346-1370.

[49] Stone, G.J. Consistent nonparametric regression. Ann. Statist., 5, (1977), 595-645.

[50] Stone, G.J. Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. Ann. Statist.,8, (1980), 1348-1360.

[51] Stone, G.J. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. Ann. Statist., 10, (1982), 1040-1053.

[52] Tibshirani, R. and Hastie, T.J. Local likelihood estimation. J. Amer. Statist. Assoc., 82, (1987), 559-567.

[53] Tsybakov, A.B. Robust reconstruction of functions by the local approximation method. Problems of Information Transmission, 22, (1986), 133-146.

[54] Tucker, L.R. Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. *Psychometrika*, 23, (1958), 19-23.

Chapitre 2

Local linear nonparametric estimation of the point at high risk

Attouch M.K.[1] **and Douini H.**[2]

[1]Department of Probability and Statistics
Djillali Liabes University
Laboratoire de Processus Stochastiques BP 89, Sidi Bel Abbès, 22000, Algérie
attou_kadi@yahoo.fr

[2]Department of Mathematics and Informatics
Tahri Mohamed University
8000, Béchar, Algérie
douini_h@yahoo.fr

Abstract. *In this work, we propose to estimate the point at high risk, which are based on the estimation of the conditional hazard function, so we introduce a new nonparametric estimation procedure of the conditional hazard function of a scalar response variable given a random variable taking values in a semi-metric space. Under some general conditions, we establish both the pointwise and the almost-complete consistencies with rates of this estimator. Moreover, we give some particular cases of our results which can also be considered as novel in the finite-dimensional setting.*

Keywords : the point at high risk ; functional data ; local linear estimator ; conditional hazard function ; nonparametric model ; small balls probability.

Résumé. *Dans ce travail, nous proposons d'estimer le point à haut risque, qui est basée sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle, nous introduisons donc une nouvelle procédure d'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle quand la variable réponse est scalaire et la variable explicative est à valeurs dans un espace semi-métrique. Sous certaines conditions, nous établissons la convergence presque-complète, et nous donnons également les vitesses de convergence correspondantes.*
De plus, nous donnons des cas particuliers de nos résultats qui peuvent également être considérés comme nouveaux dans le cadre de la dimension finie.

Mots-clés : le point à haut risque ; données fonctionnelles ; estimateur local linéaire ; fonction de hasard conditionnelle ; modèle non paramétrique ; probabilités des petites boules.
2000 Mathematics Subject Classification : 62G05 · 62G08 · 62G20 · 62G35.

2.1 Introduction

The estimation of the hazard function plays a very important role in statistics. Indeed, it is used in the risk analysis or the study of phenomena of survival in many areas such (medicine, geophysics, reliability,...).

The literature on the estimation of the hazard function is very abundant. Cite, for instance, [24], [23], [16], [5] and [19] for recent references. In all these works the authors consider independent observations or dependent data from real time series. The first results on the nonparametric estimation of the conditional hazard function in functional data cases were obtained by [10]. They obtained the almost complete convergence with rates of a kernel estimator of hazard function when the predictor is functional. Asymptotic normality of the latter estimator was obtained, in the case of α- mixing, by [20]. The uniform almost complete convergence of the functional component of this nonparametric model is given in [11].

This paper deals with local polynomial modeling of the maximum of the conditional hazard function when the explanatory variable is of functional type. This estimator is defined as the maximum of the ratio of local linear estimators for the conditional density and survivor function. It is well known that local polynomial smoothing has various advantages over the kernel method, namely this method has superior bias properties to the previous one (cf. [3],[6] for an extensive discussion on the comparison between these methods).

Notice that these questions in infinite-dimensional spaces are particularly interesting, both for the fundamental problems they formulate and also for many applications they may allow [1, 15]. Moreover, the kernel method is known for being a particular case of the local polynomial method. Notice that in nonparametric functional statistics, the first results about almost-complete consistency were obtained in [8], for the kernel type estimator of the conditional hazard function when the data are independent and identically distributed.

In this work, we introduce a new nonparametric estimation of the conditional hazard function for functional data. Our estimator is based on the local linear approach. Notice that the local linear estimator of the conditional hazard function has been studied, when the explicative variable lies in a finite dimensional space. For a general treatment or study of the local polynomial estimation, we refer to [**?**, 18] and the references therein.

Thus, in this paper, we are concerned in proving, under some general conditions, the almost-complete convergence with rates of the maximum risk estimation conditional. More precisely, section 2, is dedicated to fix notations and the presentation of the model. We introduce the assumptions and the main result, the almost complete convergence and the almost complete convergence rate in Section 3, subsequently, in Section 5, we show the proofs of our main result

2.2 The Model and its estimator

Let us introduce n pairs of random variables (X_i, Y_i) for $i = 1, ..., n$ which we assume are drawn from the pair (X, Y) which is valued in $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric space equipped with a semi-metric d.
Furthermore, we assume that there exists a regular version of the conditional probability of Y given X, which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$ and admits a bounded probability density, denoted by f^x.
The functional parameter study in this article is the point at high risk $\theta(x)$ in $S_{\mathbb{R}}$ (fixed compact subset in $\mathbb{R}$), defined by

$$h^x(\theta(x)) = \max_{y \in S_{\mathbb{R}}} h^x(y). \tag{2.1}$$

Where h^x, is defined by, for all $y \in \mathbb{R}$ such that $F^x(y) < 1$,

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}$$

with F^x is the conditional cumulative distribution function of Y given $X = x$. The local polynomial smoothing is based on the assumption that the functional parameter to be estimated is smooth enough to be locally well approximated by a polynomial. In functional statistics, there are several ways for extending the local linear ideas [10, 9]. Thus, we adopt here the fast functional local modeling, that is, we estimate the conditional density f^x by the statistic $\hat{a}$, which is obtained by minimizing the following quantity :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (h_H^{-1} H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h_K^{-1}\delta(x, X_i))$$

where $\beta(.,.)$ is a known bi-functional operator from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$ such that $\forall \xi \in \mathcal{F}, \beta(\xi, \xi) = 0$, with K and H are kernels and $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) is chosen as a sequence of positive real numbers and $\delta(.,.)$ is a bi-functional operator from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$ such that $|\delta(.,.)| = d(.,.)$.

Clearly, by simple algebra, we get explicitly the following definition of $\hat{f}^x$ (see [4]) :

$$\hat{f}^x(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{h_H \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x)}.$$

Where $W_{ij} = \beta(X_i, x)(\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x))K(h_K^{-1}\delta(x, X_i))K(h_K^{-1}\delta(x, X_j))$, with the convention $0/0 = 0$.
Obviously, if $b = 0$ then we obtain the Nadaraya-Watson estimator studied, in the functional case, in [8, 9, 21] and the references therein.

From $\hat{f}^x$, we can fined the estimator of conditional cumulative distribution function, denoted by $\hat{F}^x$, is defined by :

$$\hat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x) H^0(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x)}$$

where H^0 is the primitive of H.

The natural estimator of $\theta(x)$, denoted $\hat{\theta}(x)$, is such that

$$\hat{h}^x(\hat{\theta}(x)) = \max_{y\in S_{\mathbb{R}}} \hat{h}^x(y). \tag{2.2}$$

where

$$\hat{h}^x(y) = \frac{\hat{f}^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

In general, this estimator is not unique. So, $\hat{\theta}(x)$ mean any random variable checking (2.2).
To study the almost-complete convergence of the estimator $\hat{\theta}(x)$, we keep the assumptions of the follow section and assume that the function h^x is of class C^2 for y and such that

$$h^{x\prime}(\theta(x)) = 0 \text{ and } h^{x\prime\prime}(\theta(x)) > 0. \tag{2.3}$$

The aim of this article is to study the almost-complete convergence of the estimator $\hat{\theta}(x)$ to $\theta(x)$.

2.3 Pointwise almost-complete convergence

In what follows, x denotes a fixed point in $\mathcal{F}$, N_x denotes a fixed neighborhood of x, $S_{\mathbb{R}}$ will be a fixed compact subset in $\mathbb{R}$, and $\phi_x(u_1, u_2) = P(u_1 \leq \delta(X, x) \leq u_2)$.
Notice that our nonparametric model will be quite general in the sense that we just need the following assumptions :

(H1) For any $u > 0, \phi_x(u) = \phi_x(-u, u) > 0$.

(H2) for all $(x_1, x_2) \in N_x \times N_x, \exists b_1 > 0; b_2 > 0, \forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}}^2$

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2}),$$

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2}).$$

Where C_x is a positive constant depending on x.

(H3) The function $\beta(.,.)$ is such that :
$\exists\, 0 < C_1 < C_2, \forall x' \in \mathcal{F}, C_1 d(x, x') \leq |\beta(x, x')| \leq C_2 d(x, x')$.

(H4) The kernel K is a positive, differentiable function and supported within $(-1, 1)$.

(H5) The kernel H is a positive, bounded and Lipschitzian continuous function, satisfying that :
$\int |t|^{b_2} H(t)dt < \infty$ and $\int H^2(t)dt < \infty$

(H6) The bandwidth h_K satisfies :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : -\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi_x(zh_K, h_K) \frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz > C_3 > 0$$

and

$$h_K \int_{B(x,h_K)} \beta(u, x)dP(u) = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u, x)dP(u)\right)$$

where $B(x,r) = \{x' \in \mathcal{F}/d(x',x) \leq r\}$ is a ball centered at x and radius r, and $dP(x)$ is the probability measure of X.

(H7) The bandwidth h_H satisfies : $\lim_{n\to\infty} n^{\nu} h_H = \infty$ for some $\nu > 0$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n h_H \phi_x(h_K)} = 0.$

Observe that these conditions are very standard in this context. Conditions (H1), (H3) and (H6) are the same as those used in [1]. On the other hand, assumption (H2) is a regularity condition which characterizes the functional space of our model and is needed to evaluate the bias term in the asymptotic results of this paper. Then, hypotheses (H5) and (H7) are technical conditions and are, also, similar to those considered in [8].

The following theorem gives the almost-complete convergence (a.co.) of $\hat{\theta}(x)$.

Theorem 2.1 *Under assumptions (H1)-(H7) and (2.3), we have that :*

$$\hat{\theta}(x) - \theta(x) = o(h_K^{b_1/2} + h_H^{b_2/2}) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Corollary 2.2 *Under assumptions (H1)-(H7), we have that :*

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n h_H \phi_x(h_K)}}\right)$$

Proof of Theorem 2.1 . Under the assumption (2.3), the Taylor expansion of the function h^x near $\theta(x)$, especially for point $\hat{\theta}(x)$, is

$$h^x(\hat{\theta}(x)) = h^x(\theta(x)) + (\hat{\theta}(x) - \theta(x))^2 \frac{h^{x\prime\prime}(\theta^*)}{2!},$$

where θ^* is between $\hat{\theta}(x)$ and $\theta(x)$, it is therefore necessary in the compact $S_{\mathbb{R}}$. Thus

$$|\hat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{2!}{\min\limits_{y\in S_{\mathbb{R}}} h^{x\prime\prime}(y)} |h^x(\hat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))|$$

and using analytical arguments we show that

$$|h^x(\hat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))| \leq 2 \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

From where

$$|\hat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{C}{\min\limits_{y\in S_{\mathbb{R}}} h^{x\prime\prime}(y)} \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

Using the result of Corollary 2.2, we show that

$$|\hat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\left(\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

For the later we consider the decomposition :

$$\hat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1-\hat{F}^x(y)}\left[\hat{f}^x(y) - f^x(y)\right] + \frac{h^x(y)}{1-\hat{F}^x(y)}\left[\hat{F}^x(y) - F^x(y)\right].$$

The proof of Corollary 2.2 is a direct consequence of the following decompositions :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}^x(y) - F^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \qquad \text{(a.co.)} \qquad (2.4)$$

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{f}^x(y) - f^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \qquad \text{(a.co.)} \qquad (2.5)$$

$$\exists\eta > 0 \text{ such that} \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\inf_{y\in S_{\mathbb{R}}}|1-\hat{F}^x(y)| < \eta\right\} < \infty, \qquad (2.6)$$

where their demonstrations are based on the decompositions :

for all $y \in S_{\mathbb{R}}$,

$$\hat{f}^x(y) - f^x(y) = \frac{1}{\hat{f}_D^x}\left\{\left(\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)]\right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)]\right)\right\} +$$

$$+\frac{f^x(y)}{\hat{f}_D^x}(1 - \hat{f}_D^x)$$

and

$$\hat{F}^x(y) - F^x(y) = \frac{1}{\hat{F}_D^x}\left\{\left(\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y)\right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y)\right)\right\} +$$

$$+\frac{F^x(y)}{\hat{F}_D^x(y)}(1 - \hat{F}_D^x)$$

where

$$\hat{f}_N^x(y) = \sum_{i \neq j} W_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_i))/(n(n-1)h_H \mathbb{E}[W_{12}(x)]),$$

$$\hat{f}_D^x = \hat{F}_D^x = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}(W12(x))}\sum_{i \neq j} W_{ij}(x)$$

and

$$\hat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}(W12(x))}\sum_{i \neq j} W_{ij}(x) H^0(h_H^{-1}(y - Y_i)).$$

Finally, the Corollary 2.2 is a direct consequence of the following Lemmas, for which the proofs are given in the appendix.

Lemma 2.3 *[1] Under assumptions(H1), (H3), (H4) and (H6), we have that :*

$$1 - \hat{F}_D^x = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \qquad (a.co.)$$

and

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\hat{F}_D^x < \delta) < \infty.$$

Lemma 2.4 *Under assumptions (H1), (H2) and (H4), we obtain :*

$$\sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |F^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \qquad (a.co.)$$

Lemma 2.5 *Under assumptions of Corollary 2.2, we get :*

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y)| = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \qquad \textit{(a.co.)}$$

Lemma 2.6 *Under assumptions (H1),(H2) and (H4) we have that :*

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |f^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y)| = o(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \qquad \textit{(a.co.)}$$

Lemma 2.7 *Under assumptions of Corollary 2.2, we obtain :*

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y)| = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \qquad \textit{(a.co.)}$$

2.4 Appendix

In what follows, we will denote by C and C' some strictly positive generic constants. Moreover, we put, for any $x \in \mathcal{F}$, and for all $i = 1, ..., n$:

$$K_i = K(h^{-1}\delta(x, X_i)).\ \ \beta_i(x) = \beta(X_i, x) \text{ and } H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i)).$$

Proof of Lemma 2.6 :

Since the pairs (X_i, Y_i) are identically distributed, then from assumption (H4), we obtain :

$$\forall y \in S_{\mathbb{R}}, \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)] = \mathbb{E}\left[W_{12}\left[\mathbb{E}\left[h_H^{-1}H_1(y)/X\right]\right]\right]$$

By the classical change of variables $t = \frac{y-z}{h_H}$, we obtain :

$$h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1(y)/X] = \int_{\mathbb{R}} H(t)f^X(y - h_Ht)dt;$$

therefore

$$|h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1(y)/X] - f^x(y)| \le \int_{\mathbb{R}} H(t)|f^X(y - h_Ht) - f^x(y)|dt.$$

Thus, by the assumption (H2), we have :

$$\forall y \in S_{\mathbb{R}}, 1_{B(x,h_K)}(X)|h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1(y)/X] - f^x(y)| \le \int_{\mathbb{R}} H(t)(h_K^{b_1} - |t|^{b_2}h_H^{b_2})dt.$$

Since H is a probability density function, then the claimed result in this lemma is a direct consequence of (H5).
Proof of Lemma 2.7 :

The compactness property of $S_{\mathbb{R}}$ allows us to write that there exists a sequence of real numbers $(t_k)_{k=1,\dots,s_n}$, such that :

$$S_{\mathbb{R}} \subset \bigcup_{k=1}^{s_n} [t_k - \iota_n, t_k + \iota_n]$$

with $\iota_n = n^{-3\nu/2-1/2} and\ s_n \leq n^{3\nu/2+1/2} \quad : s_n = o(\iota_n^{-1})$.

Let $t_y = argmin_{t\in\{t_1,\dots,t_{s_n}\}}|y-t|$ and consider the following decomposition :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)]| \leq \underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y)|}_{A_1} + \underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)]|}_{A_2} + \underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)] - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)]|}_{A_3}.$$

First, for the terms A_1 and A_3, we use Lipschitz's condition on the kernel H to show that :

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y)| \leq & \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \frac{1}{n(n-1)h_H\mathbb{E}(W_{12}(x))}\sum_{i\neq j} W_{ij}(x)|H_i(y) - H_i(t_y)| \\
\leq & \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \frac{C|y-t_y|}{h_H}\left(\frac{1}{n(n-1)h_H\mathbb{E}(W_{12}(x))}\sum_{i\neq j} W_{ij}(x)\right) \\
\leq & C\frac{\iota_n}{h_H^2}\hat{f}_D^x.
\end{aligned}$$

The almost-complete consistency of $\hat{f}_D^x$ (cf.Lemma 2), permit us to write that :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y)| \leq C\frac{\iota_n}{h_H^2}.$$

Since $\iota_n = n^{-3\nu/2-1/2}$, then :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y)| = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right), \text{a.co.} \tag{E_1}$$

Indeed, the term A_3 may be considered as a direct consequence of the following known inequality : :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\mathbb{E}[\hat{f}_N^x(y)] - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y)|\right]. \tag{E_2}$$

Secondly, about the term A_2, we can write for all $\eta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\max_{t_y\in\{t_1,...,t_{s_n}\}} |\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right)$$

$$\leq s_n \max_{t_y\in\{t_1,...,t_{s_n}\}} \mathbb{P}\left(|\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right).$$

Then, all it remains to compute is the following quantity :

$$\mathbb{P}\left(|\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for all } \ t_y \in \{t_1, ..., t_{s_n}\}.$$

This latter quantity's value is given by a straightforward adaptation of the proof of ([1], Lemma 2). To do that, we consider the following decomposition :

$$\hat{f}_N^x(t_y) = \underbrace{\frac{n^2h_K^2\phi_x^2(h_K)}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12})}}_{Q}[\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)H_j(t_y)}{h_H\phi_x(h_K)}\right)}_{S_1}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i^2(x)}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)H_j(t_y)\beta_j(x)}{h_Hh_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_3}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i(x)}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}]$$

It follows that :

$$\hat{f}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{f}_N^x(t_y)] = Q[(S_1S_2 - \mathbb{E}[S_1S_2]) - (S_3S_4 - \mathbb{E}[S_3S_4])].$$

Moreover, observe that :

$$S_1S_2-\mathbb{E}[S_1S_2] = (S_1-\mathbb{E}[S_1])(S_2-\mathbb{E}[S_2])+(S_2-\mathbb{E}[S_2])\mathbb{E}[S_1]+(S_1-\mathbb{E}[S_1])\mathbb{E}[S_2]+\mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[S_2]-\mathbb{E}[S_1S_2].$$

And in the same way :

$$S_3S_4-\mathbb{E}[S_3S_4] = (S_3-\mathbb{E}[S_3])(S_4-\mathbb{E}[S_4])+(S_4-\mathbb{E}[S_4])\mathbb{E}[S_3]+(S_3-\mathbb{E}[S_3])\mathbb{E}[S_4]+\mathbb{E}[S_3]\mathbb{E}[S_4]-\mathbb{E}[S_3S_4].$$

So, the claimed result will be obtained as soon as the following assertions have been checked :

$$\sum_n s_n\mathbb{P}\left\{|S_i - \mathbb{E}[S_i]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right\} < \infty, \text{ for } i = 1, 2, 3, 4. \tag{E_3}$$

$$Q = o(1) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}[S_i] = o(1) \text{for } i = 1, 2, 3, 4, \tag{E_4}$$

and

$$\mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[S_2] - \mathbb{E}[S_1 S_2] + \mathbb{E}[S_3]\mathbb{E}[S_4] - \mathbb{E}[S_3 S_4] = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n h_H \phi_x(h_K)}}\right) \qquad \text{a.co.} \tag{E_5}$$

Proof of Equation (E_3). For this aim, we use Bernstein's exponential inequality for which the main point is to evaluate asymptotically the mth-order moment of :

$$Z_i^{l,k} = \frac{1}{h_K^l h_H^k \phi_x(h_K)} (K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x) - \mathbb{E}[K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x)]) \text{ for } l = 0, 1, 2 \text{ and } k = 0, 1.$$

Notice that by Newton's binomial expansion, we obtain :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|(K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x) - \mathbb{E}[K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x)])^m| \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{d=0}^{m} C_m^d (K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x))^d \mathbb{E}[K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x)])^{m-d}\right| \\
&\leq \sum_{d=0}^{m} C_m^d (\mathbb{E}|K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x)|^d) |\mathbb{E}[K_i(x) H_i^k(t_y) \beta_i^l(x)]|^{m-d} \\
&\leq \sum_{d=0}^{m} C_m^d \mathbb{E}|K_1^\delta(x) \beta_1^{dl}(x) \mathbb{E}[H_1^{dk}(t_y)|X_1]||\mathbb{E}[K_1(x) \beta_1^l(x) \mathbb{E}[H_1^k(t_y)|X_1]]|^{m-d}.
\end{aligned}$$

Where $C_m^k = m!/(k!(m-k)!)$.

Using the same arguments as those invoked in the proof of lemma 2.6 and replacing H_1 by H_1^d, we show that, for all $d \leq m$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{H_1^d(t_y)}{X}\right] = h_H \int_{\mathbb{R}} H_1^d(t) f^X(t_y - h_H t) dt.$$

So, conditions (H2) and (H5) allow us to write that :

$$\mathbb{E}\left[\frac{H_1^d(t_y)}{X}\right] = o(h_H^k). \text{ for all } d \leq m \text{ and } k = 0, 1.$$

Moreover, it is shown in [1] that :

$$h_K^{lm} \phi_x^{-m}(h_K) \sum_{d=0}^{m} C_m^d \mathbb{E}|K_1^\delta(x) \beta_1^{dl}(x)||\mathbb{E}[K_1(x) \beta_1^l(x)]|^{m-d} \leq C \phi_x(h_K)^{-m+1}.$$

Therefore, for $l = 0, 1, 2$ and $k = 0, 1$. we obtain that :

$$\mathbb{E}|Z_i^{l,k}|^m = o((h_H^k \phi_x(h_K))^{-m+1}).$$

Thus, to achieve this proof, it suffices to use the classical Bernstein's inequality (cf.[12]), first with $a_n = (h_H\phi_x(h_K))^{-1/2}$ to treat the terms S_1 and S_3, and second with $a_n = (\phi_x(h_K))^{-1/2}$, for the terms S_2 et S_4. In conclusion, we obtain for all $\eta > 0$:

$$\mathbb{P}\left\{|S_1 - \mathbb{E}[S_1]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right\} \leq C'n^{-C\eta^2}$$

$$\mathbb{P}\left\{|S_3 - \mathbb{E}[S_3]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right\} \leq C'n^{-C\eta^2}$$

and for $i = 2, 4$

$$\mathbb{P}\left\{|S_i - \mathbb{E}[S_i]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right\} \leq \mathbb{P}\left\{|S_i - \mathbb{E}[S_i]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right\} \leq C'n^{-C\eta^2}.$$

Therefore, an appropriate choice of η permits us to deduce that :

$$s_n\mathbb{P}\left\{|S_i - \mathbb{E}[S_i]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right\} \leq C'n^{-1-\gamma}. \text{ for } i = 1, 2, 3, 4.$$

Proofs of Equations (E_4) *and* (E_5). Notice that the first part of Equation (E_4) has been treated in [1]. We now proceed in proving the second part of Equations (E_4) and (E_5). For this aim, since the pairs (X_i, Y_i) for $i = 1, ..., n$ are identically distributed, we obtain that :

$$\mathbb{E}[S_1] = \frac{\mathbb{E}[K_1(x)H_1(t_y)]}{h_H\phi_x(h_K)}. \qquad \mathbb{E}[S_2] = \frac{\mathbb{E}[K_1(x)\beta_1^2(x)]}{h_K^2\phi_x(h_K)}.$$

$$\mathbb{E}[S_3] = \frac{\mathbb{E}[K_1(x)H_1(t_y)\beta_1(x)]}{h_Kh_H\phi_x(h_K)}. \qquad \mathbb{E}[S_4] = \frac{\mathbb{E}[K_1(x)\beta_1(x)]}{h_K\phi_x(h_K)}.$$

and

$$\mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[S_2] - \mathbb{E}[S_1S_2] - \mathbb{E}[S_3]\mathbb{E}[S_4] + \mathbb{E}[S_3S_4] = \left(1 - \frac{n(n-1)}{n^2}\right) h_K^{-2}\phi_x(h_K)^{-2}\mathbb{E}[K_1(x)\beta_1^2(x)]\mathbb{E}[K_1(x)H_1(t_y)].$$

Thus, for both Equations (E_4) and (E_5), we have to evaluate :

$$\mathbb{E}[K_i(x)H_i^k(t_y)\beta_i^l(x)]. \qquad \text{for } l = 0, 1, 2, \qquad \text{and } k = 0, 1.$$

As previously, we condition on X_1 to show that, for all $l = 0, 1, 2$ and $k = 0, 1$, we have :

$$\mathbb{E}[K_i(x)H_i^k(t_y)\beta_i^l(x)] = o(h_H^k \mathbb{E}[K_i(x)\beta_i^l(x)])$$

and by ([1].Lemma3), we obtain that :

$$\mathbb{E}[K_i(x)H_i^k(t_y)\beta_i^l(x)] = o(h_H^k h_K^l \phi_x(h_K)). \qquad (E_6)$$

On the other hand, equality (E_6) leads directly to :

$$\mathbb{E}[S_i] = o(1), \text{ for } i = 1, 2, 3, 4.$$

$$|\mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[S_2] - \mathbb{E}[S_1 S_2] - \mathbb{E}[S_3]\mathbb{E}[S_4] + \mathbb{E}[S_3 S_4]| = o(h_H^{-1}).$$

which implies that :

$$\mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[S_2] - \mathbb{E}[S_1 S_2] - \mathbb{E}[S_3]\mathbb{E}[S_4] + \mathbb{E}[S_3 S_4] = \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n h_H \phi_x(h_K)}}\right).$$

Finally, lemma 2.7 is a direct consequence of assertions $(E_1) - (E_5)$.

Proof of Lemma 2.4 : Since the pairs (X_i, Y_i) for $i = 1, ..., n$ are identically distributed, we obtain that :
$\forall y \in S_{\mathbb{R}} : F^x(y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(y)] = \mathbb{E}[W_{12}(x) 1_{B(x,h_K)}(X)[\mathbb{E}[H_1^0(y)/X] - F^x(y)]]$.
With integration by parts, we show that :

$$\mathbb{E}[H_1^0(y)/X] = \int_{\mathbb{R}} H^0(h_H^{-1}(y-z)) f^X(z)dz = h_H^{-1} \int_{\mathbb{R}} H(h_H^{-1}(y-z)) F^X(z)dz.$$

We consider the classical change of variables $t = \frac{y-z}{h_H}$ we obtain that :

$$\mathbb{E}[H_1^0(y)/X] = \int_{\mathbb{R}} H(t) F^X(y - h_H t)dt,$$

so

$$|\mathbb{E}[H_1^0(y)/X] - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H(t) F^X(y - h_H t) - F^x(y)dt$$

Under assumption (H2), we have that :

$$\forall y \in S_{\mathbb{R}},\ 1_{B(x,h_K)}(X)|\mathbb{E}[H_1^0(y)/X] - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2})dt.$$

Since H is a probability density function, then the claimed result in this lemma is a direct consequence of (H5).

Proof of Lemma 2.3 :[1]. The proof of this lemma is based on the same decomposition kind as used to prove Lemma 2.7, it suffices to replacing H_i and h_H by 1, and remark that $\mathbb{E}[\hat{F}_D^x] = 1$. We show that,

$$\hat{F}_D^x = \underbrace{\frac{n^2 h_K^2 \phi_x^2(h_K)}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12})}}_{Q}[\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)}{\phi_x(h_K)}\right)}_{S_0}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i^2(x)}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$
$$-\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)\beta_j(x)}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i(x)}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}].$$

For the second result of lemma 2.3, we have : $\mathbb{E}[\hat{F}_D^x] = 1$, so $\mathbb{P}(|\hat{F}_D^x(x) - \mathbb{E}[\hat{F}_D^x(x)]| \leq \frac{1}{2}) \leq \mathbb{P}(|\hat{F}_D^x(x) - \mathbb{E}[\hat{F}_D^x(x)]| > \frac{1}{2})$.

Then, the result is a direct consequence of the first one obtained in Lemma 2.3.

Proof of Lemma 2.5 : The proof is very similar to that of lemma 2.7. Indeed, considering the recovery

$$S_{\mathbb{R}} \subset \bigcup_{k=1}^{s_n}[t_k - \iota_n, t_k + \iota_n]$$

where $(t_k)_{k=1,\ldots,s_n}$ is a sequence of real values , with $\iota_n = n^{-3\nu/2-1/2}$ *and* $s_n \leq n^{3\nu/2+1/2}$ ie $s_n = o(\iota_n^{-1})$.
We put $t_y = argmin_{t\in\{t_1,\ldots,t_{s_n}\}}|y-t|$, we obtain the following decomposition

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(y)]| \leq$$

$$\underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y)|}_{T_1} + \underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)]|}_{T_2} + \underbrace{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)] - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(y)]|}_{T_3}.$$

Treatment of the terms T_1 and T_3. Similar to the study of the terms A_1 and A_3 in lemma 2.7, by using the facts that H is a function of class C^2 with compact support. We obtain :

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y)| \leq \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}\frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12}(x))}\sum_{i\neq j}W_{ij(x)}|H_i^0(y) - H_i^0(t_y)| \leq \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}C|y-t_y|\left(\frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12}(x))}\sum_{i\neq j}W_{ij(x)}\right) \leq C\frac{\iota_n}{h_H}\hat{F}_D^x.$$

From the definition of ι_n and the almost-complete consistency of $\hat{F}_D^x$ (cf. Lemma 3), allows us to write

$$\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y)| = o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \text{ a.co.}$$

For T_3, we used the same result for A_3 in the proof of lemma 2.7.

Concerning the term T_2, we follow the same steps as for proving A_2 in the lemma 2.7 ; $\forall\eta > 0$, we get

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} |\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\max_{t_y\in\{t_1,\dots,t_{s_n}\}} |\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right)$$

$$\leq s_n \max_{t_y\in\{t_1,\dots,t_{s_n}\}} \mathbb{P}\left(|\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right)$$

So, we need study this latter quantity :

$$\mathbb{P}\left(|\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)]| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for all } \ t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}$$

Is done with a simple adaptation of the proof of ([1].Lemme 2). To do that, we consider the following decomposition :

$$\hat{F}_N^x(t_y) = h_H \underbrace{\frac{n^2h_K^2\phi_x^2(h_K)}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12})}}_{Q}[\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)H_j(t_y)}{h_H\phi_x(h_K)}\right)}_{S_1}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i^2(x)}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$
$$-\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(x)H_j(t_y)\beta_j(x)}{h_Hh_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_3}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i(x)\beta_i(x)}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}]$$

That allows us to write :

$$\hat{F}_N^x(t_y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(t_y)] = h_HQ[(S_1S_2 - \mathbb{E}[S_1S_2]) - (S_3S_4 - \mathbb{E}[S_3S_4])].$$

Clearly, we have the same decomposition kind as used to prove lemma 2.7. Thus, by using the facts that : $Lim_{n\to\infty}h_H = 0$, we get the required result.

Proof of (2.6). It suffices to note that

$$\inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} |1 - \hat{F}^x(y)| \leq (1 - \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2 \Rightarrow \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2.$$

In terms of probability, we obtain

$$\mathbb{P}\left\{ \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} |1 - \hat{F}^x(y)| \leq (1 - \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2 \right\} \leq$$

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2 \right\} < \infty.$$

Then, just take that $\eta = (1 - \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2$ and apply the results of lemma 2.3-2.5 to complete the proof of result (2.6).

Bibliographie

[1] Barrientos-Marin,J and Ferraty,F and Vieu,Ph, Locally modelled regression and functional data, J. Nonparametric. Stat, 22, (2010), 617-632.

[2] Bosq,D, Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications, Lecture Notes in Statistics, 149, Springer, 2000.

[3] Chu,C.-K and Marron,J.-S, Choosing a kernel regression estimator, With comments and a rejoinder by the authors, Statist. Sci, 6, (1991), 404-436.

[4] Demongeot, J. Laksaci, A. Madani, F. and Rachdi, M, Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application, *Statistics*, 00, 0, (2011), 1-19.

[5] Estévez-Pérez, G. and Quintela-del-Rio, A. and Vieu, Ph., Convergence rate for crossvalidatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples, *J. Statist. Plann. Inference*, 104, (2002), 1–30.

[6] Fan,J, Design-adaptive nonparametric regression, J. Amer. Statist. Assoc, 87, (1992), 998-1004.

[7] Fan, J and Gijbels,I., Local Polynomial Modelling and Its Applications, *Chapman and Hall*, London, (1996).

[8] Ferraty,F and Laksaci,A and Vieu,Ph, Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, Stat. Inference Stoch. Process, 9, (2006), 47-76.

[9] Ferraty,F and Laksaci,A and Tadj,A and Vieu,Ph, Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables, J. statist. plann. inference, 140, (2010), 335-352.

[10] Ferraty,F and Rabhi,A and Vieu,Ph, Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle, Rev. Roumaine Math. Pures Appl, 53, (2008), 1-18.

[11] Ferraty,F and Tadj,A. and Laksaci,A and Vieu,Ph, Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables, J. Statist. Plann. Inference (accepté).

[12] Ferraty,F and Vieu,Ph, Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and Practice, Springer Ser. Statist., Springer, New York, (2006).

[13] Laksaci,A, Contribution aux modèles non paramétriques conditionnels pour variables explicatives fonctionnelles, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse (France), (2005).

[14] Laksaci,A, Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, 3, (2007), 69-80.

[15] Laksaci,A et Mechab,B, Estimation non-paramétrique de la fonction de Hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales, Pures Appl, 53, (2008), 1-18.

[16] Lecoutre, J.P and Ould-Said, E, Estimation de la densité et de la fonction de hasard conditionnelle pour un processus fortement mélangeant avec censure, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 314, (1992), 295-300.

[17] Liebscher. E, Central limit theorem for α-mixing triangular arrays with applications to nonparemetric statistics, Mathematical Methods of Statistics, 10, (2001), 194-214.

[18] Muller,H.-G and Stadtmuller,U, Generalized functional linear models, Ann. Statist, 33, (2005), 774-805.

[19] Quintela-del-Rio, A., Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions, *Statist. Probab. Lett*, 76, (2006), 1117-1124.

[20] Quintela-del-Rio, A., Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions, J. Nonparametr. Stat., 20, (2008), 413-430.

[21] Rachdi,M and Vieu,Ph, Nonparametric regression for functional data : Automatic smoothing parameter selection, J. Statist. Plann. Inference, 137, (2007), 2784-2801.

[22] Ramsay, J.-O and Silverman,B.-W, Functional Data Analysis, Springer Series in Statistics, New York, 1997.

[23] Roussas, G, Hazard rate estimation under dependence conditions, *J. Statist. Plann. Inference*, 22, (1989), 81-93.

[24] Watson, G.S and Leadbetter, M.R, Hazard analysis, *Sankhyia*, 26, (1964), 101-116.

Chapitre 3

Local linear estimation of the conditional disrtibution for functional data : Spatial data case

Abstract. :

In this paper, we estimate nonparametrically the conditional cumulative distribution, the conditional density and the conditional hazard function of a scalar response given functional random variables by the local linear approach. The almost completely convergence with rates of this estimate is obtained when the sample considered is collected in spatial order with mixing structure.

Keyword : Functional data, Local linear estimation, Conditional cumulative distribution, Strongly mixing process, Spatial data, Conditional hazard function.

3.1 Introduction

One of the most important statistical analysis is the study of the conditional distribution, in nonparametric functional statistic.
In this work, we consider the problem of the estimation of certain conditional function by using the local linear approach, when the observations are spatially dependent and of functional nature. The infatuation for this topic is linked with many fields of applications in which the data are collected in the spatial order. Key references on spatial statistic can be found in [29] or [8]. Notice that, the nonparametric treatment of such data is relatively

recent. The first results have been obtained by Tran (1990) [30]. For more references on the nonparametric modelization of spatial data, see Biau and Cadre (2004), Lu and Chen (2004), Carbon et al. (2007) or Tran (2009). In this paper, we are interested in the local linear estimation of some conditional functions. It is well known that the kernel method suffers from some drawbacks, namely, in the bias term. Otherwise, in the nonfunctional case i.e., in the finite dimensional framework, the local polynomial fitting has been recognized to have superior bias properties than the kernel method (cf. [17] for more discussions on this subject). An alternative definition of this estimator when data take values in a semi-metric space is given in [2]. In this paper, the almost-complete convergence, with rates, of the proposed estimator is obtained (cf. also [16]).

We focus, in this paper, on the extension of investigations on this approach to the local linear modelling when a spatial dependence structure occurs. More precisely, we construct an estimators of the conditional cumulative distribution function, the conditional density and the conditional hazard function, which is quit important in a variety of fields including medicine, econometrics, survival analysis or in seismology. Historically, the hazard estimate was introduced by Watson and Leadbetter (1964), since, several results have been added, see for example, Roussas (1989), Li and Tran (2007).

Notice that, one of the main difficulties in the analysis of spatial data comes mainly from the fact that points in the N-dimensional space do not have a linear order. So, the classical techniques of time series data analysis can not be used here. Moreover, extending classical nonparametric statistic results for functional random fields is far from being trivial. In practice, noticed that the interest of our study comes mainly from the fact that the main fields of application of functional statistical methods related to the analysis of continuously indexed spatial processes.
the local linear modelling of spatial data has not yet been fully explored, as far as we known, only the papers [10], [7], [21], [22] and [32], have paid attention to this thematic.
Among the recent papers on the functional statistic of spatial data , we refer to Dabo-Niang et al. (2011) [13], Dabo-Niang and Laksaci (2011) [12], Laksaci and Maref (2009) [23].

This paper is organized as follows : the next section we present the general framework of our study. In Section 3, we consider the spatial local linear estimation of the conditional distribution function. The estimation of the conditional density is treated in Section 4. Section 5 is devoted to study the estimation of the conditional hazard function. Finally, the last section is reserved to the technical proofs of the results of this paper.

3.2 Presentation of the spatial estimate

In the remainder of the paper, we consider $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}), \mathbf{i} \in \mathbb{N}^N, N \geq 1$, be a $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$-valued measurable strictly stationary spatial process, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, where $(\mathcal{F}, d)$ is a semi-metric space. Moreover, a point $\mathbf{i} = (i_1, ..., i_N) \in \mathbb{N}^N$ will be referred to as a site.

On the other hand, we supose that the process $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$ is observed a rectangular domain : $\mathcal{I}_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, ..., i_N)\}$, for $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_N) \in \mathbb{N}^N$, we assume that the process under study $Z_{\mathbf{i}}$ is observed on $\mathcal{I}_{\mathbf{n}}$. We set $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$, $\widehat{\mathbf{n}} = n_1 \times ... \times n_N$, and we write $\mathbf{n} \to \infty$ if $\min\{n_k\} \to \infty$ and $|\frac{n_j}{n_k}| < C$ for a constant C such that $0 < C < \infty$ for all $1 \leq j, k \leq N$. This kind of design is known as an asymptotically increasing domain, which allows the area of observations to become larger but keeping a minimum distance between observation sites.

In the following, we denote by $\mathcal{N}_x$ a fixed neighborhood of a fixed point $x \in \mathcal{F}$, and by S a fixed compact subset of $\mathbb{R}$. We assume that the $Z_{\mathbf{i}}$'s are identically distributed to $Z = (X, Y)$ and that there exists a regular version of the conditional probability of Y given X. Moreover, we suppose that, for all $z \in \mathcal{N}_x$ the conditional distribution function of Y given $X = z$, F^z has a continuous probability density f^z with respect to (w.r.t.) the Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$ and we will denote by h^x the conditional hazard function defined, for all $y \in \mathbb{R}$ such that $F^x(y) < 1$, by

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}.$$

Then, in what follows, we mainly study the local linear estimation of the functions F^x, f^x and h^x when the random filed $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^N)$ satisfies the following mixing condition :

$$\begin{cases} \text{There existe a function} \quad \varphi(t) \downarrow 0 \text{ as } t \to \infty, \text{ such that} \\ \quad \forall E, E' \text{ subsets of } \mathbb{N}^N \text{ with finite cardinals} \\ \alpha\left(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E')\right) = \sup\limits_{B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(E)\mathcal{B}(E')} |\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)| \\ \quad \leq \psi\left(Card(E), Card(E')\right) \varphi\left(dist(E, E')\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

where $\mathcal{B}(E)$ (respectively, $\mathcal{B}(E')$) denotes the Borel σ-field generated by $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in E)$ (resp. $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in E')$), $Card(E)$ (resp. $Card(E')$) the is the cardinality of E (respectively, E'), $dist(E, E')$ is the Euclidean distance between E and E' and $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}^+$ is a symmetric positive function nondecreasing in each variable such that

$$\psi(n, m) \leq C \min(n, m), \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

We also assume that the process Z satisfies the following mixing condition :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\tau} \varphi(i) < \infty, \, \tau > 0. \tag{3.3}$$

Notice that conditions (3.2) and (3.3) are used in Tran (1990), Carbon et al (1996) and are satisfied by many spatial models (see Guyon (1987) for some examples). It should be noted that if $\psi = 1$, then Z_i is called strongly mixing (see Doukhan et al. (1994) for discussion on mixing and examples).

3.3 Conditional cumulative distribution estimation

The local linear modelling of the conditional distribution function F^x is based on the approximation of F^x by a linear function.
Here we adopt the fast functional locally modeling, that is, we estimate the conditional cumulative distribution function F^x by $\widehat{a}$ which is obtained by minimizing the following quantity :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}} (H(h_H^{-1}(y - Y_\mathbf{i})) - a - b\beta(X_\mathbf{i}, x))^2 K(h_K^{-1}\delta(x, X_\mathbf{i})) \tag{3.4}$$

with $\beta(.,.)$ is a known bi-functional operator from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$ such that

$$\forall \xi \in \mathcal{F}, \beta(\xi, \xi) = 0$$

and where the function K is a kernel, H is a distribution function and $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) is chosen as a sequence of positive real numbers which converges to 0 when $\mathbf{n} \to \infty$, and $\delta(.,.)$ is a bi-functional operator from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$ such that $|\delta(.,.)| = d(.,.)$.

Clearly, the estimator $\widehat{a}$, given by (3.4), can be explicitly written as follows :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n} \\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_\mathbf{j}))}{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n} \\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

where

$$W_{\mathbf{ij}} = \beta(X_{\mathbf{i}}, x)(\beta(X_{\mathbf{i}}, x) - \beta(X_{\mathbf{j}}, x))K(h_K^{-1}\delta(x, X_{\mathbf{i}}))K(h_K^{-1}\delta(x, X_{\mathbf{j}}))$$

All along the paper, when no confusion is possible, we will denote by C and C' some strictly positive generic constants.

In order to derive the almost-complete convergence of the functional locally modeled estimator of F^x, let us introduce the following additional hypotheses :

(H1) For all $r > 0$, $\mathbb{P}(-r < \delta(X, x) < r) = \phi_x(r) > 0$.

(H2) The random field $(X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$ satisfies :

$0 < \sup_{\mathbf{i} \neq \mathbf{j}} \mathbb{P}\left[(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}) \in B(x, h_K) \times B(x, h_K)\right] \leq C(\phi_x(h_K))^{(a+1)/a}$, for some $0 < a < \tau N^{-1}$.

(H3) For all $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x^2$ and for all $(y_1, y_2) \in S^2$:

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C(\left|\delta^{b_1}(x_1, x_2)\right| + |y_1 - y_2|^{b_2}),$$

for some positive constants b_1 and b_2.

(H4) The function $\beta(.,.)$ is such that :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}, C' \left|\delta(x_1, x_2)\right| \leq \left|\beta(x_1, x_2)\right| \leq C \left|\delta(x_1, x_2)\right|.$$

(H5) The kernel K is a positive, differentiable function which is supported within $(-1, 1)$.

(H6) The kernel H is a differentiable function which has a bounded first derivative such that :

$$\int |t|^{b_2} H'(t)dt < \infty \quad \text{and} \quad \int H'^2(t)dt < \infty$$

(H7) The bandwidth h_K satisfies that there exists an integer n_0, such that :

$$\forall n > n_0 : -\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi_x(zh_K, h_K) \frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz > C' > 0$$

and

$$h_K \int_{B(x,h_K)} \beta(u, x) d\mathbb{P}(u) = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u, x) d\mathbb{P}(u)\right)$$

where $B(x, r) = \{z \in \mathcal{F}/d(z, x) \leq r\}$ denotes the closed ball centered at x and of radius r, $d\mathbb{P}(x)$ is the cumulative distribution of the functional random variable X and $\phi_x(r_1, r_2) = \mathbb{P}(r_2 \leq \delta(X, x) \leq r_1)$.

(H8) There exist positive numbers $\alpha < (\tau - 5N)/2N$ and η_0 such that :

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \widehat{\mathbf{n}}^{\alpha} h_H = \infty \quad \text{and} \quad C\widehat{\mathbf{n}}^{\frac{(5+3\alpha)N-\tau}{\tau}+\eta_0} \leq \phi_x(h_K)$$

where $\widehat{\mathbf{n}} = n_1...n_N$

These assumptions are very standard in this context. Indeed, condition (H1) is the same as that used by Ferraty and vieu (2006). Condition (H2) measure the local dependance between the observations. See [2] for some examples of bi-functional operators δ and β which satisfy assumptions (H1), (H4) and (H7). Moreover, in [23] some examples of kernels K and H satisfying (H5) and (H6) are given.

Then, we are in position to announce the following theorem which gives the almost-complete convergence of $\widehat{F}^x$.

Theorem 3.1 *Under assumptions (H1)-(H8) and (3.1)-(3.3), we have that :*

$$\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right| = o\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln\widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) \qquad (a.co.)$$

Proof of Theorem 3.1. Remark that, the proof of Theorem 3.1 is a direct consequence of the following decomposition :

$$\begin{aligned}\widehat{F}^x(y) - F^x(y) = \ & \tfrac{1}{\widehat{f}_D^x}\left\{\left(\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right)\right\} \\ & + \frac{F^x(y)}{\widehat{f}_D^x(y)}(1 - \widehat{F}_D^x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Where

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}[W_{12}(x)]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} W_{\mathbf{ij}}(x)H(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{j}})).$$

$$\widehat{f}_D^x = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}[W_{12}(x)]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} W_{\mathbf{ij}}(x)$$

and of Lemmas 3.2, 3.3 and 3.4 below, for which the proofs are given in the Appendix.

Lemma 3.2 *Under assumptions (H1), (H2), (H4),(H5),(H7), (H8) and (3.1)-(3.3), we have that :*

$$1 - \widehat{f}_D^x = o\left(\frac{\log\widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \quad a.co., \quad as\, \boldsymbol{n}\to\infty$$

and

$$\exists \tau > 0, \textit{ such that} \sum_{\boldsymbol{n}} \mathbb{P}\left(\widehat{f}_D^x < \tau\right) < \infty.$$

Lemma 3.3 *Sous les hypothèses (H1),(H3), (H5) et (H6), on a :*

$$\sup_{y\in S}\left|F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right| = o\left(h_K^{b_1}\right) + o\left(h_H^{b_2}\right)$$

Lemma 3.4 *Under the assumptions of Theorem 3.1, we get :*

$$\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right| = o\left(\frac{\log \widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \quad a.co., \quad as\, \boldsymbol{n} \to \infty.$$

3.4 Conditional density estimation

In this section, similar results will be derived for the local linear estimator of the conditional density of Y given X. We assume that the conditional probability of Y given X is absolutely continuous with respect to the Lebesgues measure on $\mathbb{R}$ and we will denote by f^x the conditional density of Y given $X = x$. For this aim, we propose to construct the estimator $\widehat{f}^x$ of f^x by $\widehat{f}^x = \widehat{a}$ which is obtained from the following minimization procedure :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}} (h_H^{-1}H'(h_H^{-1}(y - Y_\mathbf{i})) - a - b\beta(X_\mathbf{i}, x))^2 K(h_K^{-1}\delta(x, X_\mathbf{i}))$$

where H' is the derivative of H defined in (3.4). So, $\widehat{f}^x$ can be re-expressed as a linear estimator in the following manner :

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum\limits_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x)H'(h_H^{-1}(y - Y_\mathbf{j}))}{h_H \sum\limits_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

In order to establish the almost-complete convergence of this estimator, we consider the following additional assumptions :

(H9) $\begin{cases} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |H'(y_1) - H'(y_2)| \leq C\,|y_1 - y_2|, \\ H' \text{ is a bounded function,} \end{cases}$

and instead of the assumption (H3), we need the following one :

(H3') For all $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x^2$ and $(y_1, y_2) \in S^2$,we have :

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C(\left|\delta^{b_1}(x_1, x_2)\right| + |y_1 - y_2|^{b_2})$$

for some positive constants b_1 and b_2.

Then, the next result concerns the asymptotic behavior of the local linear functional estimator $\widehat{f^x}$.

Theorem 3.5 *Under hypotheses (H1), (H2), (H3'),(H4)-(H9), we obtain :*

$$\sup_{y\in S}\left|\widehat{f^x}(y) - f^x(y)\right| = o\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln \widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}} h_H \phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) \qquad (a.co.)$$

Proof of Theorem 3.5. The proof of this result is based on the decomposition :

$$\begin{aligned}\widehat{f^x}(y) - f^x(y) = \ & \tfrac{1}{\widehat{f_D^x}}\left\{\left(\widehat{f_N^x}(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)]\right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)]\right)\right\} \\ & + \frac{f^x(y)}{\widehat{f_D^x}(y)}(1 - \widehat{f_D^x})\end{aligned}$$

where

$$\widehat{f_N^x}(y) = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}} - 1)h_H \mathbb{E}[W_{12}(x)]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} W_{\mathbf{ij}}(x)H'(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{j}})).$$

Then, the proof of the Theorem 3.5 can be deduced directly from both the following Lemmas 3.6 and 3.7, together with Lemma 3.2.

Lemma 3.6 *Under assumptions (H1), (H3'), (H5), (H6) and (H9), we obtain :*

$$\sup_{y\in S}\left|f^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)]\right| = o\left(h_K^{b_1}\right) + o\left(h_H^{b_2}\right)$$

Lemma 3.7 *Under the assumptions of Theorem 3.5, we have :*

$$\sup_{y\in S}\left|\widehat{f_N^x}(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)]\right| = o\left(\frac{\log \widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}} h_H \phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \quad a.co., \quad as\, \boldsymbol{n} \to \infty.$$

3.5 Estimation of the conditional hazard function

Recall that the conditional hazard function is defined by :

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}, \forall y \in \mathbb{R}, F^x(y) < 1, \forall x \in \mathcal{F}.$$

Naturally, the conditional hazard function estimator is closely linked to the conditional survival function estimate. Consider the local linear estimates of the functions F^x and f^x defined in the previous Section, and adopt the local linear estimator $\widehat{h}^x(y)$ of the conditional hazard function h^x defined by :

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)}.$$

Theorem 3.8 *Under assumptions (H1)-(H8) and (3.1)-(3.3), we have that :*

$$\sup_{y \in S} \left| \widehat{h}^x(y) - h^x(y) \right| = o\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln \widehat{\boldsymbol{n}}}{\widehat{\boldsymbol{n}} h_H \phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) \quad a.co, \, as \quad \boldsymbol{n} \to \infty.$$

Proof of Theorem 3.8 . We consider the decomposition :

$$\widehat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1 - \widehat{F}^x(y)} \left[\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right] + \frac{h^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)} \left[\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right].$$

Remark that, the proof of Theorem 3.8 is a direct consequence of Theorem (3.1), (3.5) and the following Lemma3.9.

Lemma 3.9 *Under the assumptions of Theorem 3.1, we get :*

$$\exists \eta > 0 \quad \text{such that} \quad \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^N} \mathbb{P}\left\{ \inf_{y \in S} \left| 1 - \widehat{F}^x(y) \right| < \eta \right\} < \infty.$$

3.6 Appendix

In the following, we will denote $\forall \mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}$

$$K_{\mathbf{i}} = K(h_H^{-1} d(x, X_{\mathbf{i}})), H_{\mathbf{i}} = H(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{i}})) \text{ and } H'_{\mathbf{i}} = H'(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{i}})).$$

Proof of Lemma 3.3. Since this term is not affected by the dependence structure of the data, we can write that :

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] = \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]} \mathbb{E}\left[W_{12}[\mathbb{E}(H_1/X)]\right]$$

So, by an integration by parts and by using assumptions (H3) and (H5) we get that :

$$1_{B(x,h_K)}(x) \left| \mathbb{E}(H_1/X) - F^x(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2}) dt$$

Thus, the claimed result of this lemma is a direct consequence of the assumption (H6).

Proof of Lemma 3.4. The compactness property of the set S allows us to write that, for some $t_1, t_2, ..., t_{z_n} \in S$:

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{z_n} (t_j - l_n, t_j + l_n) \quad \text{with}\, l_n = \widehat{\mathbf{n}}^{-\alpha-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad z_n \leq \widehat{\mathbf{n}}^{\alpha+\frac{1}{2}}$$

Thus, we consider the following decomposition :

$$\begin{aligned}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right| \leq & \underbrace{\left|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right|}_{T_1} + \underbrace{\left|\widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})]\right|}_{T_2} \\ & + \underbrace{\left|\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})] - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right|}_{T_3}\end{aligned} \tag{3.6}$$

where

$$j(y) = \arg min_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}} |y - t_j|$$

First, for the terms T_1 and T_3, we have that :

$$\begin{aligned}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right| \leq & \quad \tfrac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}[W_{12}(x)]} \textstyle\sum_{i\neq j} W_{ij}(x) \left|H_i(y) - H_i(t_{j(y)})\right|. \\ \leq & \quad C\tfrac{l_n}{h_H} f_D^x\end{aligned}$$

Clearly, from the definition of l_n and by the result of Lemma 3.2 we obtain, under assumption (H8), that :

$$\frac{l_n}{h_H} = o\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

Hence :

$$\left|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right| = o\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

and

$$\left|\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})] - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right| = o\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

Second, for the term T_2, we can write that, for any $\eta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})-\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})]\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right)\\
&\quad=\mathbb{P}\left(\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}}\left|\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)-\mathbb{E}[\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)]\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right)\\
&\quad\le z_{\mathbf{n}}\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)-\mathbb{E}[\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)]\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

Then, notice that this latter can be treated by using the following decomposition [2] :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})=&\underbrace{\frac{\widehat{\mathbf{n}}^2h_K^2\phi_x^2(h_K)}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}(W_{12})}}_{T_1}[\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{\phi_x(h_K)}\right)}_{S_1}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}\\
&-\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_3}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}]
\end{aligned}$$

by a similar fashion, the claimed result will be obtained as soon as the three following equalities (3.7), (3.8) and (3.9) have been checked :

$$\sum_{\mathbf{n}}z_{\mathbf{n}}\mathbb{P}\left\{|S_k-\mathbb{E}[S_k]|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right\}<\infty,\ \text{for } k=1,2,3,4 \tag{3.7}$$

$$cov(S_1,S_2)=o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi(h_K)}\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

and

$$cov(S_3,S_4)=o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi(h_K)}\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

In order to show the required result (3.7), we denote first :

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}=\frac{1}{h_K^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j)-\frac{1}{h_K^k}\mathbb{E}\left[K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j)\right]\quad\text{for } k=0,1,2,\ \text{and } l=0,1$$

Then, it can be seen that : for all $1\le i\le 4$, there exists some integers k,l such that :

$$S_i-\mathbb{E}[S_i]=\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

We consider the spatial decomposition of Tran [30]. More specifically, for a fixed integer $p_{\mathbf{n}}$, we define :

$$U(1,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

$$U(2,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N-1}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_N+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

$$U(3,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N-2}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_{N-1}=2j_{N-1}p_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_{N-1}+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+1}^{2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

$$U(4,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N-2}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}} \sum_{i_{N-1}=2j_{N-1}p_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_{N-1}+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_N+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

and so on. The last two terms are :

$$U(2^{N-1},\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N-1}}^{2(j_k+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+1}^{2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

and

$$U(2^{N},\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1\\ k=1,\dots,N}}^{2(j_k+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

For $\mathcal{J} = \{0,...,r_1-1\} \times ... \times \{0,...,r_N-1\}$ with $r_i = 2^{-1}n_ip_{\mathbf{n}}^{-1}$, $i = 1,...,N$, we denote by :

$$T(\mathbf{n},i) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}} U(i,\mathbf{n},\mathbf{j}) \text{ for } 1 \le i \le 2^N.$$

It is then clear that :

$$\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l} - \mathbb{E}\left[\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right] = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)} \sum_{i=1}^{2^N} T(\mathbf{n},i) \quad (3.10)$$

Notice that, $T(\mathbf{n},1)$ is the sum of the random variables $\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$ over large blocks, whereas the other terms, that is $T(\mathbf{n},i)$, for $2 \le i \le 2^N$, are sums over small blocks.

We remark also that as raised in Biau and Cadre [4], if one does not have the equalities $n_i = 2r_i p_{\mathbf{n}}$, the term say $T(\mathbf{n}, 2^N+1)$ (which contains the $\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$'s at the end and which is not included in the above blocks) can be added. So, this term does not impact too much on the demonstration. Thus, we can write, for all $\eta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l} - \mathbb{E}\left[\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right]\right| \ge \eta\right)$$

$$\le 2^N \max_{i=1,\dots,2^N} \mathbb{P}(T(\mathbf{n},1) \ge \eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K))$$

Therefore, the desired result follows from the evaluation of the following quantities :

$$\mathbb{P}\left(T(\mathbf{n},i) \ge \eta\phi_x(h_K)\right), \text{ for all } i = 1,\dots,2^N$$

We consider only the case when $i = 1$, because the other cases are very similar. To do that, we enumerate the random variables $U(1,\mathbf{n},\mathbf{j})$ for each $\mathbf{j} \in \mathcal{J}$ in the arbitrary way $Z_1^{k,l},\dots,Z_M^{k,l}$ where

$$M = \prod_{k=1}^{N} r_k = 2^{-N}\widehat{\mathbf{n}}p_{\mathbf{n}}^{-N} \le \widehat{\mathbf{n}}p_{\mathbf{n}}^{-N}.$$

Thus, for each $Z_{\mathbf{j}}^{k,l}$ there exists certain j in $\mathcal{J}$ such that :

$$Z_{\mathbf{j}}^{k,l} = \sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{j})} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

where $I(1,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \{\mathbf{i} : 2j_k p_{\mathbf{n}} + 1 \le i_k \le 2j_k p_{\mathbf{n}} + p_{\mathbf{n}};\ k = 1,\dots,N\}$. Notice that, the set $I(1,\mathbf{n},\mathbf{j})$ contains $p_{\mathbf{n}}^N$ sites, and these sites are distant from each other by at least $p_{\mathbf{n}}$. Moreover, under assumptions (H4) and (H5), there exists a positive constant C such that :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{h_K^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k H_{\mathbf{i}}^l(t_j) & \le & \frac{1}{h_K^k}K_{\mathbf{i}}|\delta(X_{\mathbf{i}},x)|^k \\
 & \le & \frac{1}{h_K^k}K(h_K^{-1}\delta(x,X_{\mathbf{i}}))|\delta(X_{\mathbf{i}},x)|^k \mathbf{I}_{]-1,1[}(h_K^{-1}\delta(x,X_{\mathbf{i}})) \\
 & \le & K(h_K^{-1}\delta(x,X_{\mathbf{i}})) \le C
\end{array}$$

Then, according to Lemma 4.5 of Carbon [5] one can find independent random variables $Z_1^*,\dots,Z_M^*$ which are identically distributed as $Z_j^{k,l}$ for $j =$

$1, ..., M$ and such that :

$$\sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}\left|Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^{*}\right| \leq 2CMp_{\mathbf{n}}^{N}\psi((M-1)p_{\mathbf{n}}^{N}, p_{\mathbf{n}}^{N})\varphi(p_{\mathbf{n}})$$

Now, we write :

$$\mathbb{P}(T(\mathbf{n},1) \geq \eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)) \leq B_1(\mathbf{n}) + B_2(\mathbf{n})$$

where

$$B_1(\mathbf{n}) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{M} Z_{\mathbf{j}}^{*}\right| \geq \frac{M\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2M}\right)$$

and

$$B_2(\mathbf{n}) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{M}\left|Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^{*}\right| \geq \frac{\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2}\right)$$

– Concerning the term $B_1(\mathbf{n})$: by using the Bernstein inequality we obtain that :

$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{n}) = & \quad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{M} Z_{\mathbf{j}}^{*}\right| \geq \frac{M\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2M}\right) \\ \leq & \quad 2\exp\left(-\frac{(\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K))^2}{MVar[Z_1^{*}] + Cp_{\mathbf{n}}^{N}\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right) \end{aligned}$$

In order to determine the behavior of this term, we have to evaluate $Var[Z_1^{*}]$. Indeed :

$$Var[Z_1^{*}] = Var\left[\sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},1)} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right] = \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},1)} |Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})|.$$

Let $Q_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},1)} Var(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l})$ and $R_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},1)} |Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})|$. By assumption (H1), we get that :

$$Var[\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}] \leq C(\phi_x(h_K) + (\phi_x(h_K))^2)$$

hence

$$Q_{\mathbf{n}} = o(p_{\mathbf{n}}^{N}\phi_x(h_K))$$

Now, for $R_{\mathbf{n}}$, we use Masry's techniques [26] and we consider the following sets :

$$E_1 = \{\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(1,\mathbf{n},1) : 0 < \|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| \leq c_{\mathbf{n}}\}$$

and

$$E_2 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(1, \mathbf{n}, 1) : \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\| > c_{\mathbf{n}}\}$$

where $c_{\mathbf{n}}$ is a real sequence that diverges to $+\infty$.

By splitting the sum in $R_{\mathbf{n}}$ into two separate summations over sites within E_1 and E_2, we can write :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}} = & \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1} |Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})| + \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2} |Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})| \\ = & \quad R_{\mathbf{n}}^1 + R_{\mathbf{n}}^2 \end{aligned}$$

On one hand, we have :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^1 &= \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1} |\mathbb{E}[K_{\mathbf{i}}K_{\mathbf{j}}]| - |\mathbb{E}[K_{\mathbf{i}}]\mathbb{E}[K_{\mathbf{j}}]| \\ &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)((\phi_x(h_K))^{1/a} + \phi_x(h_K)) \\ &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)^{(a+1)/a} \end{aligned}$$

and on the other hand, we have :

$$R_{\mathbf{n}}^2 = \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2} \left| Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}) \right|$$

As from Lemma 2.1(ii) of Tran [30], we get :

$$\left| Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}) \right| \leq C\varphi(\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|)$$

then :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^2 &\leq \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2} \varphi(\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|) \leq Cp_{\mathbf{n}}^N \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \varphi(\|\mathbf{i}\|) \\ &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi(\|\mathbf{i}\|) \end{aligned}$$

Let $c_{\mathbf{n}} = (\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, then we obtain :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^2 &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi(\|\mathbf{i}\|) \\ &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K) \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi(\|\mathbf{i}\|) \end{aligned}$$

and, because of (3.3), we get :

$$R_{\mathbf{n}}^2 \leq Cp_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)$$

Furthermore, under the same choice of $c_{\mathbf{n}}$ as above, we obtain also :

$$R^1_{\mathbf{n}} \leq C p_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)$$

So,

$$Var[Z_1^*] = o(p_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K))$$

This last result combined with the definitions of $p_{\mathbf{n}}, M$ and η are enough to show that :

$$B_1(\mathbf{n}) \leq \exp(-C\eta_0 \log \widehat{\mathbf{n}})$$

Consequently, an appropriate choice of η_0 allows us to write that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}} B_1(\mathbf{n}) < \infty.$$

– Concerning the term $B_2(\mathbf{n})$: by using the Markov inequality we can write that :

$$\begin{aligned} B_2(\mathbf{n}) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{M} |Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^*| \geq \frac{\eta \widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)}{2}\right) \\ &\leq \frac{2}{\eta \widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)} \sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}|Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^*| \\ &\leq 2\frac{M p_{\mathbf{n}}^N}{\eta \widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)} \psi\left((M-1)p_{\mathbf{n}}^N, p_{\mathbf{n}}^N\right) \varphi(p_{\mathbf{n}}^N) \end{aligned}$$

Then, since $\widehat{\mathbf{n}} = 2^N M p_{\mathbf{n}}^N$ and $\psi\left((M-1)p_{\mathbf{n}}^N, p_{\mathbf{n}}^N\right) \leq p_{\mathbf{n}}^N$, and by choosing $\eta = \eta_0 \left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$ we get that :

$$B_2(\mathbf{n}) \leq \widehat{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}}^N (\log \widehat{\mathbf{n}})^{-1/2} \varphi(p_{\mathbf{n}})$$

Moreover, by taking $p_{\mathbf{n}} = C\left(\frac{\widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)}{\log \widehat{\mathbf{n}}}\right)^{1/2N}$, we arrive at :

$$B_2(\mathbf{n}) \leq \widehat{\mathbf{n}} \varphi(p_{\mathbf{n}})$$

This last inequality together with the assumption (H8) is enough to prove that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}} B_2(\mathbf{n}) < \infty.$$

Now, we show results (3.8) and (3.9). To do that, we write :

$$\begin{aligned} Cov(S_1, S_2) &= \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2}\right) \\ &+ \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2}\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Cov(S_3, S_4) &= \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K}\right) \\ &+ \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}}{h_K}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K}\right) \end{aligned}$$

Under assumptions (H4) and (H6), for $k' = 0, 1$ and $l' = 1, 2$, we obtain that :

$$\begin{aligned} \left|Cov\left(\frac{K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}^2H_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'+l'}}{h_K^{l'+k'}}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}}{h_K^{k'}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right]\right| \\ &\leq C\left[\mathbb{E}(K_{\mathbf{i}}^2) + \mathbb{E}(K_{\mathbf{i}})\mathbb{E}(K_{\mathbf{i}})\right] \leq C\phi_x(h_K) \end{aligned}$$

It follows that :

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) = o(\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K))$$

Concerning the quantity :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)$$

we use the following decomposition :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)$$
$$= \sum_{\substack{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\\(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1}} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) + \sum_{\substack{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\\(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2}} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)$$

Once again, we use assumptions (H4) and (H6) to show that :
for all $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ in E_1 :

$$\left|Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)\right| \leq C\left(\phi_x^{(a+1)/a}(h_K) + \phi_x(h_K)^2\right)$$

and for all $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ in E_2 :

$$\left| Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}} \right) \right| \leq C\varphi(\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|)$$

So,

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}} \right) \leq C\widehat{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)^{(a+1)/a}$$

and

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}} \right) \leq C\widehat{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na}\varphi(\|\mathbf{i}\|)$$

Because of the same choice, as above, of the sequence $c_{\mathbf{n}} = (\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, we obtain :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{K_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}} \right) = o(\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K))$$

Finally, on the first hand, the case $(k', l') = (0, 2)$ implies that :

$$Cov(S_1, S_2) = o\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

and, on the second hand, the case $(k', l') = (1, 1)$ gives :

$$Cov(S_3, S_4) = o\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

Proof of Lemma 3.2. The proof of Lemma 3.2 is omitted, because it is very close to the proof of the last part of Lemma 3.3 for which it suffices to replace $H_{\mathbf{j}}$ by 1.

Proof of Lemma 3.6. By using the stationarity of observations, the conditioning by the explanatory variable and the change of the usuel variable $t = \dfrac{y-z}{h_H}$ we obtain :

$$h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1'(y)/X] = h_H^{-1}\int_{\mathbb{R}} H'(y) f^X(y - h_H t)dt,$$

we then deduce :

$$\left| h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1'(y)/X] - f^x(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t) \left| f^X(y - h_H t) - f^x(y) \right| dt.$$

Finally, by assumption (H3') that becomes :

$$\left|h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1'(y)/X] - f^x(y)\right| \leq C\int_{\mathbb{R}} H'(t)(h_K^{b_1} + (|t|h_H)^{b_2})dt$$

By remarking that the last inequality is uniform on y, the use of the assumption (H6) achieve the proof of Lemma 3.6.

Proof of Lemma 3.7. The proof of this lemma is very close to the proof of Lemma 3.4. Specifically, by keeping the same notations as those used in Lemma 3.4 and by recovering topologically the compact S by intervals of lengths $l_{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{n}}^{-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}}$ and $z_{\mathbf{n}} \leq \widehat{\mathbf{n}}^{\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}}$ allow us to get :

$$\frac{l_n}{h_H^2} = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

Therefore, by assumption (H9) and Lemma **??** we obtain :

$$\begin{cases} \sup_{y\in S}\left|\widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \\ \text{and} \\ \sup_{y\in S}\left|\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \end{cases} \tag{3.11}$$

On the other hand, for all $\eta > 0$, we write :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}\left|\widehat{f}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})]\right| > \eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}}\left|\widehat{f}_N^x(t_j) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(t_j)]\right| > \eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) \\
&\qquad \leq z_{\mathbf{n}}\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{f}_N^x(t_j) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(t_j)]\right| > \eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

Then, it remains to show that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}}\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_n\}}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{f}_N^x(t_j) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(t_j)]\right| > \eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right) < \infty \tag{3.12}$$

Clearly, the proof of (3.12) is very close to the proof of the convergence of the term T2 in (3.6). More precisely, it is based on the following decomposition :

$$\widehat{f}_N^x(t_j) = T_1[\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{h_H\phi_x(h_K)}\right)}_{T_2}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{h_Kh_H\phi_x(h_K)}\right)}_{T_3}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}]$$

Thus, it suffices to show that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}}\mathbb{P}\left\{|T_k - \mathbb{E}[T_k]| > \eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right\} < \infty, \text{ for } k = 2,3 \tag{3.13}$$

$$Cov(T_2, S_2) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

and

$$Cov(T_3, S_4) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2} \tag{3.15}$$

The result (3.13) is given by a straightforward modification of the spatial decomposition used in the proof of (3.7) where $\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$ is replaced by :

$$\Delta_{\mathbf{i}}'^k := \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}(t_{j(y)})}{h_K^kh_H\phi_x(h_K)} - \mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}(t_{j(y)})}{h_K^kh_H\phi_x(h_K)}\right]$$

and by taken $p_{\mathbf{n}} = C\left(\frac{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}{\log\widehat{\mathbf{n}}}\right)^{1/2N}$.

Notice that, the main step in this calculus is the computation of the variance term of $\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_n}\Delta_{\mathbf{i}}'^k$.

Moreover, both results (3.14) and (3.15) is based on the evaluation of :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}\right)$$

for $(k,k') \in \{0,1\}\times\{1,2\}$. Then, all it remains to evaluate :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n} Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}H_{\mathbf{j}}^{l'}(t_j)\right)$$

for $(k,k')\in\{0,1\}\times\{1,2\}$ and $l,l'\in\{0,1\}$.
Notice that, this latter is given by using the fact that :

$$\mathbb{E}[H_{\mathbf{i}}/X_{\mathbf{i}}]=o(h_H) \text{ and } \mathbb{E}[H_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{j}}/(X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}})]=o(h_H^2), \text{ for all } \mathbf{i}\neq\mathbf{j}.$$

So, by same arguments as those used in the proof of Lemma 3.4 we obtain that :

$$\sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},1)}\left|Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}H_{\mathbf{i}}^{l'}(t_j)\right)\right|=o(p_{\mathbf{n}}^Nh_H\phi_x(h_K))$$

and for some sequence $c_{\mathbf{n}}$ which diverges to $+\infty$, we obtain that :

$$\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},1)}\left|Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}H_{\mathbf{j}}^{l'}(t_j)\right)\right|$$
$$\leq Cp_{\mathbf{n}}^N\left(c_{\mathbf{n}}^Nh_H^2\phi_x(h_K)^{1/a}\phi_x(h_K)+c_{\mathbf{n}}^{-Na}\sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}}\|\mathbf{i}\|^{Na}\varphi(\|\mathbf{i}\|)\right)$$

Now, if we choose $c_{\mathbf{n}}=(h_H\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, then we can write :

$$\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},1)}\left|Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}H_{\mathbf{j}}^{l'}(t_j)\right)\right|\leq Cp_{\mathbf{n}}^Nh_H\phi_x(h_K)$$

Finally, we obtain, for $(k,k')\in\{0,1\}\times\{1,2\}$ and $l,l'\in\{0,1\}$, that :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n}Cov\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^kH_{\mathbf{i}}^l(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}H_{\mathbf{j}}^{l'}(t_j)\right)=o(p_{\mathbf{n}}^Nh_H\phi_x(h_K))$$

The rest of this proof follows the same steps as in the proof of Lemma 3.4. Therefore, we can write :

$$\sup_{y\in S}\left|\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right|=o_{a.co}\left(\sqrt{\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}}\right) \tag{3.16}$$

Finally, the result of Lemma 3.7 is a consequence of (3.16) together with (3.11).

Proof of Lemma 3.9. It suffices to note that

$$\inf_{y\in S_{\mathbb{R}}}|1-\hat{F}^x(y)| \leq (1-\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2 \Rightarrow \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}^x(y)-F^x(y)| \geq (1-\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2.$$

In terms of probability, we obtain

$$\mathbb{P}\left\{\inf_{y\in S_{\mathbb{R}}}|1-\hat{F}^x(y)| \leq (1-\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2\right\} \leq$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}}|\hat{F}^x(y)-F^x(y)| \geq (1-\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2\right\} < \infty.$$

Then, just take that $\eta = (1-\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} F^x(y))/2$ and apply the results of lemma 3.2-3.4 to complete the proof of Lemma 3.9.

Bibliographie

[1] Baìllo, A. and Grané, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response. J. Multivariate Anal., 100, 102-111.

[2] Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. and Vieu, P. (2010). Locally Modelled Regression and Functional Data. J. Nonparametric Stat., **22**, 617-632.

[3] Biau, G. (2003). Spatial Kernel Density Estimation, Math. Methods Statist., 12, 371-390.

[4] Biau, G. and Cadre, B. (2004). Nonparametric spatial prediction. Stat. Inference Stoch. Process., 7, 327-349.

[5] Carbon, M., Hallin, M. and Tran, L.T. (1996). Kernel density estimation for random fields : the L1 theory. J. Nonparametric Stat., 6, 157-170.

[6] Carbon, M., Francq, C., Tran, L.T. (2007). Kernel regression estimation for random fields. J. Statist. Plann. Inference. 137, 778-798.

[7] Chouaf, A. and Laksaci, A. (2012). On the functional local linear estimate for spatial regression. Stat. Risk. Model., 29, (3), 189-214.

[8] Cressie, N.A.C. (1991). Statistics for spatial Data. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

[9] Dabo-Niang, S., Yao, A.-F. (2007). Kernel regression estimation for continuous spatial processes. Math. Methods Statist., 16, 298-317.

[10] Dabo-Niang, S. and Thiam, B. (2010). Robust quantile estimation and prediction for spatial processes. Stat. Probab. Lett., 80 (17-18), 1447-1458.

[11] Dabo-Niang, S., Rachdi, M. and Yao, A.-F. (2010). Spatial kernel regression estimation and prediction for functional random fields. Far East J. Theor. Stat., 37, (2), 77-113.

[12] Dabo-Niang, S., Kaid, Z. and Laksaci A. (2011). Spatial conditional quantile regression : Weak consistency of a kernel estimate. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 349, 1287-1291.

[13] Dabo-Niang, S., Rachdi, M. and Yao, A-F. (2011). Spatial kernel regression estimation and prediction for functional random fields. Far. East. J. Statist. 37, 77-113.

[14] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2010). Estimation locale linéaire de la densité conditionnelle pour des données fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 348 (15-16), 931-934.

[15] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2011a). Functional data : Local linear estimation of the conditional density and its application. Statistics, 47 (1), 26-44.

[16] El Methni, M. and Rachdi, M. (2010). Local weighted average estimation of the regression operator for functional data. Commun. Stat., Theory and Methods, 40 (17), 3141-3153.

[17] Fan, J. and Gijbels, I. (1996). Local Polynomial Modelling and its Applications. London, Chapman and Hall.

[18] F. Ferraty, A. Tadj, A. Laksaci and Ph. Vieu, (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. J. Statist. Plann. Inference. 140, 335-352.

[19] F. Ferraty and Ph. Vieu. (2006). Nonparametric functional data analysis. Springer Series in Statistics, Springer New York.

[20] Haining, R. (2004). Spatial Data Analysis Theory and Practice, Cambridge University Press.

[21] Hallin, M., Lu, Z. and Tran, L.T. (2004). Local linear spatial regression. Ann. Stat., 32, 2469-2500.

[22] Hallin, M., Lu, Z. and Yu, K. (2009). Local linear spatial quantile regression. Bernoulli, 15, 659-686.

[23] Laksaci, A. and Maref, F. (2009). Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 347, 1075-1080.

[24] Li, J. and Tran, L.T. (2007). Hazard rate estimation on random fields. Journal of Multivariate analysis. 98, 1337-1355.

[25] Lu, Z. and Chen, X. (2004). Spatial kernel regression estimation : weak concistency. Stat. Probab. Lett. 68, 125-136.

[26] Masry, E. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes . IEEE Trans. Inform. Theory 32 , 254-267.

[27] Quintela-del-Río. (2006). Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. Statist. Probab. Lett.76 , 1117-1124.

[28] Quintela-del-Río. (2008). Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. J. Nonparametr. Stat. 20. 413 - 430.

[29] Ripley, B. (1981). Spatial Statistics. Wiley. New York.

[30] Tran, L.T. (1990). Kernel density estimation on random fields. J. Multivariate Anal., 34, 37-53.

[31] Watson, G. S. and Leadbetter, M. R. (1964). Hazard analysis. I. Biometrika. 51, 175-184.

[32] Xu, R. and Wang, J.(2008). L1-estimation for spatial nonparametric regression. J. Nonparametric Stat., 20, 523-537.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

4.1 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons proposé une estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire, dans le cas où la variable explicative est fonctionnelle. Nous avons abordé aussi l'estimation par polynômes locaux du point à haut risque, de la fonction de répartition conditionnelle, et de la densité conditionnelle.

Sous certaines conditions, nous établissons la convergence presque complète, et nous donnons ègalement les vitesses de convergence correspondantes. L'estimateur proposé est une généralisation au cas fonctionnel de l'estimateur par local linéaire introduit par Fan et Gijbels (1996). De plus l'estimation par la méthode de noyau est un cas particulier de notre approche. Plus précisément, la supériorité du modèle local linéaire sur la méthode à noyau, dans la partie biais, est toujours conservée même en statistique fonctionnelle.
En ce qui concerne la dépendance spatiale, nous avons opté dans ce travail pour une présentation permettant de trouver les mêmes propriétés asymptotiques que le cas indépendant en mettant des conditions supplémentaires sur la dépendance spatiale. Ainsi, on peut dire que la considération spatiale est exploitée à travers les hypothèses utilisées. Mentionnons également que nos vitesses de convergence gardent toujours la même structure de la convergence en statistique fonctionnelle.

4.2 Perspectives

Il est à noter que l'originalité de ce sujet offre de nombreuses perspectives, nous exposons dans ce qui suit, quelques développements futurs possibles qui se situent dans la continuité de ce travail effectué dans le cadre de cette thèse.

- La première perspective est la question associée à la normalité asymptotique de nos estimateurs et les cas dépendante. Cette propritée asymptotique nous permet de construire des intervalles de confiance et de faire des testes statistique.
- la sélection des paramètres de lissage est un sujet de recherche important pour améliorer les vitesses de convergence.
- D'autre thèmes méritent d'être abordés, tels l'estimation de la régression robuste, de la regression relative,...

Bibliographie

Aneiros-Perez, G., Cardot, H., Estevez-Perez, G. and Vieu, P. Maximum ozone concentration forecasting by functional nonparametric approaches. *Environmetrics*, 15, (2004), 675-685.

Baìllo, A. and Grané, A. Local linear regression for functional predictor and scalar response, *J. of Multivariate Anal.*, 100, (2009), 102-111.

Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. and Vieu, P. Locally Modelled Regression and Functional Data. *J. of Nonparametric Stat.*, 22, (2010), 617-632.

Benko, M., Härdle, W. and Kneip, A. Common functional principal components. SFB 649 Economic Risk Discussion Paper, (2005), 2006-010.

Berlinet, A., Biau, G. and Rouvière, L. Functional classification with wavelets. Preprint. (2005).

Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. Local linear regression for functional data. Inst. Statist. Math., 63, (2011), 1047-1075.

Besse, P., Cardot, H. and Stephenson, D. Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27, (2000), 673-687.

Biau, G. (2003). Spatial Kernel Density Estimation, Math. Methods Statist., 12, 371-390.

Biau, G. and Cadre, B. (2004). Nonparametric spatial prediction. Stat. Inference Stoch. Process., 7, 327-349.

Boj, E., Delicado, P. and Fortiana, J. Distance-based local linear regression for functional predictors. Computational Statistics and Data Analysis, 54, (2010), 429-437.

Bosq, D. Linear processes in function spaces. Lecture Notes in Statistics, 149, (2000), Springer.

Carbon, M., Hallin, M. and Tran, L.T. (1996). Kernel density estimation for random fields : the L1 theory. J. Nonparametric Stat., 6, 157-170.

Carbon, M., Francq, C., Tran, L.T. (2007). Kernel regression estimation for random fields. J. Statist. Plann. Inference. 137, 778-798.

Chiou, J-M., Müller, H.-G., Wang, J-L and Carey, J.R. A functional multiplicative effects model for longitudinal data, with application to reproductive histories of female med ies. *Statistica Sinica*, 13, (2003), 1119- 1133.

Chiou, J-M., Müller, H.-G. and Wang, J-L. Functional quasilikelihood regression models with smooth random effects. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 65, (2003), 405-423.

Chouaf, A. and Laksaci, A. On the functional local linear estimate for spatial regression. Statistics and Risk Modeling, 29, (2011), 189-214.

Chouaf, A. and Laksaci, A. (2012). On the functional local linear estimate for spatial regression. Stat. Risk. Model., 29, (3), 189-214.

Chu,C.-K and Marron,J.-S, Choosing a kernel regression estimator, With comments and a rejoinder by the authors, Statist. Sci, 6, (1991), 404-436.

Cleveland, W.S. and Devlin, S.J. Locally-weighted regression : an approach to regression analysis by local fitting. J. Amer. Statist. Assoc., 83, (1988), 597-610.

Cressie, N.A.C. (1991). Statistics for spatial Data. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

Dabo-Niang, S., Yao, A.-F. (2007). Kernel regression estimation for continuous spatial processes. Math. Methods Statist., 16, 298-317.

Dabo-Niang, S. and Thiam, B. (2010). Robust quantile estimation and prediction for spatial processes. Stat. Probab. Lett., 80 (17-18), 1447-1458.

Dabo-Niang, S., Rachdi, M. and Yao, A.-F. (2010). Spatial kernel regression estimation and prediction for functional random fields. Far East J. Theor. Stat., 37, (2), 77-113.

Dabo-Niang, S., Kaid, Z. and Laksaci A. (2011). Spatial conditional quantile regression : Weak consistency of a kernel estimate. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 349, 1287-1291.

Dabo-Niang, S., Rachdi, M. and Yao, A-F. (2011). Spatial kernel regression estimation and prediction for functional random fields. Far. East. J. Statist. 37, 77-113.

Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. et Rachdi, M. Estimation locale linéaire de la densité conditionnelle pour des données fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris, I 348, (2010), (15-16), 931-934.

Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. A fast functional locally modeled conditional density and mode for functional time-series. In : Recent Advances in Functional Data Analysis and Related Topics. In : Contributions to Statistics, Physica-Verlag/Springer, pp. 85- 90.
http ://dx.doi.org/10.1007/978-3-7908-2736-1-13. (2011b).

Demongeot, J. Laksaci, A. Madani, F. and Rachdi, M, Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application, *Statistics*, 00, 0, (2011), 1-19.

El Methni, M. and Rachdi, M. Local weighted average estimation of the regression operator for functional data, *Communications in Statistics-Theory and Methods.* 40. (2010), 3141-3153.

Estévez-Pérez, G. and Quintela-del-Rio, A. and Vieu, Ph., Convergence rate for crossvalidatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples, *J. Statist. Plann. Inference*, 104, (2002), 1–30.

Ezzahrioui, M. Prévision dans les modèles conditionnels en dimension infinie. PhD Thesis. Univ. du Littoral Côte d'Opale. (2007).

Fan,J, Design-adaptive nonparametric regression, J. *Amer. Statist. Assoc.*, 87, (1992), 998-1004.

Fan, J. and Gijbels, I. Variable bandwidth and local linear regression smoothers. Ann. of Statist., 20, (1992), 2008-2036.

Fan, J. Local linear regression smoothers and their minimax efficiency. *Ann. of Statist.*, 20, (1993), 196-216.

Fan, J. and Gijbels, I. Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting : variable bandwidth and spatial adaptation. J. Royal Statist. Soc. B., 57, (1995a), 371-394.

Fan, J. and Gijbels, I. Adaptive order polynomial fitting : bandwidth robustification and bias reduction. J. *Comput. Graph. Statist.*, 4, (1995b), 213-227.

Fan, J and Gijbels,I., Local Polynomial Modelling and Its Applications, *Chapman and Hall*, London, (1996).

Ferraty, F. and Vieu, P. The functional nonparametric model and application to spectrometric data. Computational Statistics, 17, (2002), 545-564.

Ferraty, F. and Vieu, P. Curves discrimination : a nonparametric functional approach. Special issue in honour of Stan Azen : a birthday celebration. *Computational Statistics and Data Analysis*, 44, (2003), 161-173.

Ferraty,F and Laksaci,A and Vieu,Ph, Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, Stat. Inference Stoch. Process, 9, (2006), 47-76.

Ferraty, F. and Vieu, P. Nonparametric functional data analysis : theory and practice. Springer, New York. (2006).

Ferraty, F., Rabhi, A., Vieu, P. Estimation non paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. Rom. J. Pure and Applied Math. 52, (2008), 1-18.

Ferraty,F and Laksaci,A and Tadj,A and Vieu,Ph, Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables, J. statist. plann. inference, 140, (2010), 335-352.

Ferraty,F and Tadj,A. and Laksaci,A and Vieu,Ph, Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables, J. Statist. Plann. Inference (accepté).

Frank, I.E. and Friedman, J.H. A statistical view of some chemometrics regression tools. *Technometrics*, 35, (1993), 109-135.

Haining, R. (2004). Spatial Data Analysis Theory and Practice, Cambridge University Press.

Hallin, M., Lu, Z. and Tran, L.T. Local linear spatial regression, *Ann. of Statist.*, 32, (2004), 2469-2500.

Hallin, M., Lu, Z. and Yu, K. (2009). Local linear spatial quantile regression. Bernoulli, 15, 659-686.

Hastie, T., Buja, A. and Tibshirani, R. Penalized discriminant analysis. *Annals of Statistics*, 23, (1995), 73-102.

Hastie, T. and Mallows, C. Discussion of "A statistical view of some chemometrics regression tools." by Frank, I.E. and Friedman, J.H. Technometrics, 35, (1993), 140-143.

Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. Ridge regression : advances, algorithms and applications. *American Journal of Mathematical Management Sciences*, 1, (1980), 5-83.

Helland, I.S. Partial least squares regression and statistical models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 17, (1990), 97-114.

Ioffe,M. D. and Katkovnik, V. Ya. Pointwise and uniform convergence with probability 1 of nonparametric regression estimators. *Automat. and Remote Control*, 12, (1989), 1659-1667.

Ioffe, M. D. and Katkovnik, V. Ya. Rate of pointwise and uniform convergence with probability 1 of nonparametric estimates of a regression function. *Automat. and Remote Control*, 51, (1990), 23-30.

Kneip, A. and Utikal, K.J. Inference for density families using functional principal component analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 96, (2001), 519-542.

Laksaci,A, Contribution aux modèles non paramétriques conditionnels pour variables explicatives fonctionnelles, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse (France), (2005).

Laksaci,A, Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, 3, (2007), 69-80.

Laksaci,A et Mechab,B, Estimation non-paramétrique de la fonction de Hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales, Pures Appl, 53, (2008), 1-18.

Laksaci, A. and Maref, F. (2009). Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 347, 1075-1080.

Laksaci, A., Mechab, B. Estimation non parametrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle cas des donnees spatiales. Rev : Roumaine, Math Pures Appl. 55, (2010), 35-51.

Lecoutre, J.P and Ould-Said, E, Estimation de la densité et de la fonction de hasard conditionnelle pour un processus fortement mélangeant avec censure, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 314, (1992), 295-300.

Lejeune, M. Estimation non-parametrique par noyaux : regression polynomiale mobile. *Revue de Statist. Appliq.*, 33, (1985), 43-68.

Li, J. and Tran, L.T. (2007). Hazard rate estimation on random fields. Journal of Multivariate analysis. 98, 1337-1355.

Liebscher. E, Central limit theorem for α-mixing triangular arrays with applications to nonparemetric statistics, Mathematical

Methods of Statistics, 10, (2001), 194-214.

Lu, Z. and Chen, X. (2004). Spatial kernel regression estimation : weak concistency. Stat. Probab. Lett. 68, 125-136.

Masry, E. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes . IEEE Trans. Inform. Theory 32 , 254-267.

Masry, E. and Fan, J. Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, (1997), 165-179.

Müller, H.G. Weighted local regression and kernel methods for nonparametric curve fitting. J. Amer. Statist. Assoc., 82, (1987), 231-238.

Müller,H.-G and Stadtmuller,U, Generalized functional linear models, Ann. Statist, 33, (2005), 774-805.

Quintela-del-Rio, A., Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions, *Statist. Probab. Lett*, 76, (2006), 1117-1124.

Quintela-del-Rio, A., Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions, J. Nonparametr. Stat., 20, (2008), 413-430.

Quintela-del-Rio, A. On non-parametric techniques for areacharacteristic seismic hazard parameters. Geophys. J. Int. 180, (2010), 339-346.

Rachdi,M and Vieu,Ph, Nonparametric regression for functional data : Automatic smoothing parameter selection, J. Statist. Plann. Inference, 137, (2007), 2784-2801.

Rachdi, M., Laksaci, A., Demongeot, J., Abdali, A. and Madani, F. Theoretical and practical aspects on the quadratic error in the local linear estimation of the conditional density for functional data. *Computational Statistics and Data Analysis*, accepted. (2014).

Ramsay, J.O. When the data are functions. Psychometrika, 47, (1982), 379-396.

Ramsay, J.-O and Silverman,B.-W, Functional Data Analysis, Springer Series in Statistics, New York, 1997.

Ramsay, J.O. Functional components of variation in handwriting. *Journal of the American Statistical Association*, 95, (2000), 9-15.

Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. Applied functional data analysis. Springer, New York. (2002).

Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. Functional data analysis (Second Edition). Springer, New York. (2005).

Rao, C.R. Some statistical methods for comparison of growth curves. *Biometrics*, 14, (1958), 1-17.

Ripley, B. (1981). Spatial Statistics. Wiley. New York.

Roussas, G, Hazard rate estimation under dependence conditions, *J. Statist. Plann. Inference*, 22, (1989), 81-93.

Ruppert, D. and Wand, M.P. Multivariate weighted least squares regression. *Ann. Statist.*, 22, (1994), 1346-1370.

Stone, G.J. Consistent nonparametric regression. Ann. Statist., 5, (1977), 595-645.

Stone, G.J. Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. Ann. Statist.,8, (1980), 1348-1360.

Stone, G.J. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. Ann. Statist., 10, (1982), 1040-1053.

Tibshirani, R. and Hastie, T.J. Local likelihood estimation. J. Amer. Statist. Assoc., 82, (1987), 559-567.

Tran, L.T. (1990). Kernel density estimation on random fields. J. Multivariate Anal., 34, 37-53.

Tsybakov, A.B. Robust reconstruction of functions by the local approximation method. Problems of Information Transmission, 22, (1986), 133- 146.

Tucker, L.R. Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. *Psychometrika*, 23, (1958), 19-23.

Watson, G.S and Leadbetter, M.R, Hazard analysis, *Sankhyia*, 26, (1964), 101-116.

Xu, R. and Wang, J.(2008). L1-estimation for spatial nonparametric regression. J. Nonparametric Stat., 20, 523-537.