République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

THÈSE

En vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès (S.B.A.), Algérie

Option : Calcul Stochastique - Statistiques et Applications

Spécialité : Mathématiques

---

présentée et soutenue par

Mankour Khadidja

03 juillet 2018

---

sous le titre :

La décomposition spectrale d'un élément aléatoire banachique : cas séries périodiquement corrélées

---

Devant le jury composé de :

ATTOUCH Mohammed Kadi	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Président
GHERIBALLAH Abdelkader	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Rapporteur
GUENDOUZI Toufik	Univ. Saida (Algérie)	Rapporteur
BENCHIKH Tawfik	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Directeur de thèse

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Statistique fonctionnelle : Motivation

Les progrès techniques réalisés en matière de recueil et de stockage des données permettent de disposer de plus en plus de données statistiques fonctionnelles. Cette évolution est due aux récentes innovations réalisées sur les appareils de mesure. En effet, les méthodes d'acquisition ainsi que l'utilisation intensive de moyens informatiques, permettent de collecter des données discrétisées de plus en plus finement, les rendant intrinsèquement fonctionnelles. Les enregistrements sonores, les images satellitaires, les séries chronologiques, la pollution, la climatologie ne sont que quelques exemples de la diversité des données à caractère fonctionnel auxquelles le statisticien peut être confronté.

Ces données sont modélisées comme étant des réalisations d'une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un espace abstrait de dimension infinie, et la communauté scientifique s'est naturellement intéressée depuis les années quatre-vingt au développement d'outils statistiques capables de traiter ce type d'échantillon avec l'apport notamment de la théorie des opérateurs dans les travaux de Grenander (1981). On pourra se reporter aux monographies de Ramsay et Silvermann (2002, 2005), Bosq (2000) et Ferraty et Vieu (2006) pour avoir un aperçu complet de la statistique fonctionnelle et opératorielle.

L'interprétation d'un processus comme élément aléatoire à valeurs dans un espace fonctionnel s'est avérée être une approche fructueuse pour aborder certains problèmes d'estimation, d'interpolation, ou de prévision. Il s'agit de construire des représentations de processus à temps continu par des processus à temps discret dans un espace fonctionnel ou un espace des suites. Par exemple, la théorie de l'estimation dans les processus de diffusion, utilise ce

genre de technique.
Bien que le cadre hilbertien soit assez riche pour étudier certaines caractéristiques fines des données hilbertiennes telles la régularité des données, l'appartenance des données à des sous-espaces spécifiques, étude asymptotique, les données banachiques ont des particularités qui ne sont pas obtenues naturellement par une hilbertisation systématique des structures qui leurs sont liées. C'est le cas ou on considère la contrainte d'intégrabilité et on travaille dans $L_H^{1+\epsilon}$, $\epsilon \in [0,1[$ où $\epsilon \in]-1,0[$, soit on considère des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach E et analyser les éléments qui sont dans L_E^2 (nous retrouvons cette approche chez Bosq (2000)).
Plus précisement, à tout processus réel continu X, nous associons le processus $X(.)$, appelé processus fenêtre, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0;r])$, des fonctions continues sur l'intervalle $[-r,0]$, ou encore l'espace de Banach $C_k[0,\delta]$ des fonctions continues dérivables de classe C^k, ou tout simplement l'espace $L^p[0,\delta]$, qui à l'instant t, garde en mémoire le passe jusqu'à $t-r$:

$$X(.) = (X_t(.))_{t\in[0,T]} = \{X_t(u) := X_{t+u}\,;\ u \in [-r,0]\,, t \in [0,T]\}\,.$$

En particulier, les processus autorégressif à valeurs dans un espace de Banach est devenu un des outils utiles dans l'analyse des données de séries chronologiques fonctionnelles (cf. Bosq (2000)). En effet, une vaste classe des processus réels continus possède une représentation autorégressive banachique (ARB) tels les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les processus stationnaires gaussiens solution d'une équation stochastique différentielle, les processus avec saisonnalité, les processus quasi-markoviens, les processus admettant une décomposition de Wold.
D'autre part, le domaine fréquentiel permettent l'analyse des processus stochastiques stationnaire au sens faible, il est très utile dans l'étude descriptive, l'interpolation, l'estimation et les problèmes de prédiction de tels processus. Cette approche implique l'utilisation essentielle de sinusoïdes et de bandes de fréquence avec la transformée de Fourier ou le transformation inverse qui joue un rôle important, elle se révèle être plus simple dans les calculs mathématiques et statistiques (cf Rozanov 67). Tandis que les processus faiblement stationnaires possèdent une belle théorie mathématique, il existe dans la pratique plusieurs situations pour lesquelles la notion de stationnarité est une restriction inacceptable (cf Rao 82,87). Notons par exemple qu'en économétrie ou dans des problèmes de détection des signaux, le fait que la covariance ne dépend que d'une seule variable est peu admis (voir par exemple Priestley 82). Cela a donc rendu nécessaire une relaxation de la condition de sta-

tionnarité faible. Pour s'adapter à de tels problèmes tout en maintenant les méthodes d'analyse harmonique, on peut présenter, une notion moins restrictive de la stationnarité, il s'agit de la notion des processus périodiquement corrélés (cf. Hurd et Miamee (2007)). Dans ce contexte, il semble utile d'étudier les outils spectraux associés aux processus aléatoires périodiquements corrélés à valeurs dans un espace de Banach en exploitant leur structure par le biais des mesures aléatoires banachiques.

1.2 Décomposition canonique d'un élément aléatoire banachique : Notes historiques et bibliographiques

Le cadre hilbertien (et a fortiori euclidien en dimension finie) est satisfaisant pour une grande part des applications en statistique descriptive multidimensionnelle. Sa géométrie admet des outils incontournables, notamment la projection orthogonale. La plupart des travaux considèrent un formalisme stochastique de $v.a.$ hilbertiennes de carré intégrable. Ainsi, pour un espace de Hilbert H, le cadre fonctionnel "naturel" qui est souvent utilisé est celui du travail dans L^2_H, l'espace des variables à valeurs dans H et de carré intégrable muni de son produit scalaire usuel.
Afin de considérer des cas plus généraux, c'est-à-dire sous des hypothèses plus faibles, on peut considérer des variables de carrés intégrable à valeurs dans un espace de Banach.
Pour décomposer un élément aléatoire banachique canoniquement, d'autres méthodes ont été étudiées, on en cite par exemple : les mesures gaussiennes dans les espaces de Banach traitées par Chevet et al. (1977), Chobanyan et al. (1977), Tarieladze (1980). Ces techniques ont été développées, à l'origine, dans un cadre de modèles probabilistes pour être appliquées en statistique inférentielle. Leurs résultats sur le sujet affirme que toute probabilité de Radon d'ordre 2 (fort) dans un espace de Banach réel E admet un opérateur de covariance nucléaire, par conséquent tout opérateur de covariance gaussien de E', le dual topologique de E, dans E est nucléaire et admet la décomposition suivante :

$$Rx' = \sum_{k=1}^{\infty}(x', x_k)_{E',E}x_k, \quad avec\ (x_k) \subset E\ et\ \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2 < \infty. \tag{1.1}$$

où $(.,.)_{E',E}$ désigne le crochet de dualité entre E et son dual topologique E'. On note que les $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants si la mesure gaussienne est symétrique (cf. Weron, 1975). Tarieladze (1980) démontre que tout opérateur positif symétrique nucléaire admet la repré-

sentation (1.1) et les (x_k) sont indépendants.
D'autre travaux sur les mesures gaussienne banachiques et leur décomposition on fait objet d'étude, en cite le travail de Bay et Croix (2017).
Baker et al (1981) se sont intéressé à la décomposition d'un élément aléatoire banachique en passant par la décomposition de son opérateur de covariance, Dans le même context, Vakhania (1993) donne une décomposition canonique d'un opérateur de covariance gaussien et il propose quelques applications sur le sujet.

En étudiant les processus du second ordre plusieurs auteurs se sont intéressés à l'extension de certains résultats des éléments aléatoires gaussiens à valeurs dans des espaces de Fréchet (en utilisant une pseudonorme) ; en particulier, les espaces $\ell_(p_n)$, $0 < p < 1$; nous en citons Tarieladze et al. (1974), Weron (1975), chobanyan et al. (1981).
En 1983, El Maâche introduit une présentation de l'$A.C.P.$ banachique en utilisant des hypothèses d'existence de moment fort d'ordre 2 et il donne une généralisation du théorème de Hilbert-Schmidt (dans le cas de Banach). Ces résultats démontre la nuclearité de l'opérateur de covariance d'un e.a.b.. Il propose enfin un développement canonique d'un e.a.b. dans le cas de nucléarité de l'opérateur de covariance.

1.3 Représentation spectrale : un outil statistique d'analyse des processus stochastiques

L'analyse spectrale constitue un élément clef d'analyse et l'outil parmi les plus puissants en traitement statistique des processus stochastiques. Elle a pour objectif d'améliorer la connaissance d'un processus stochastique en s'intéressant au domaine fréquentiel. Ses points forts résident dans le fait qu'elle se focalise sur le caractère répétitif ou cyclique à travers le temps ou sur les fréquences de ces processus : cela veut dire, que contrairement au traitement temporel qui suppose un comportement indépendant sur la période, qu'elle permet de révéler le mélange d'informations se répétant à des fréquences données mais cachées dans les réalisations du processus.
Les bases théoriques de cette technique remontent aux travaux de Fourier qui, dans sa fameuse décomposition ("dite de Fourier"), exprime chaque processus stochastique (ou de manière générale une fonction aléatoire) comme "somme" de processus périodiques non corrélés, c-à-d une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques.
L'idée principale de l'analyse spectrale de certaines classes de variables aléatoires, est de trouver une correspondance reliant cette classe à un espace fonctionnel. Cette idée a été

introduite par Kolmogorov. Ce dernier a trouvé une correspondance isométrique reliant l'espace vectoriel des variables aléatoires généré par des processus gaussiens stationnaires à un certain espace vectoriel des fonctions de carrés intégrables. En effet, il est bien connu qu'à tout processus stationnaire (au sens faible) on peut associer une mesure aléatoire (au sens d'Azencott et Dacunha-Castelle 1984) dont il est la transformée de Fourier et qui le définit d'une façon biunivoque. Cet association biunivoque mesure aléatoire et processus stationnaire nous permet de construire une "boîte à outils" spectraux.

La possibilité d'une telle association, plus connue sous le nom de représentation spectrale, a été, pour la première fois, l'oeuvre, d'une part, de Wiener (1930) qui a donné la définition statistique précise de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance pour les processus aléatoires fortement stationnaires et, d'autre part de Kolmogorov (1940, 1941) où les résultats sont formulés dans un espace de Hilbert et sont déduits de l'utilisation de la théorie spectrale d'opérateurs. Et depuis, une vaste littérature est apparue, qui interprète et justifie cette représentation dans le contexte de la théorie des probabilités et statistiques. On peut citer notamment les travaux de Cramer (1942), Blanc-Lapierre et Fortet (1947), Doob (1953), Grenander et Rosenblatt (1957), Rozanov (1967) ou encore Yalgom (1962), Rosenberg (1974) et Brillinger (1982,2001).

Ainsi, les problèmes liés à la représentation spectrale des processus stochastiques peuvent être résolus en passant par la structure de corrélation des séries. Il devient alors possible d'exploiter la relation de Fourier qui existe entre la fonction d'autocovariance et la fonctions de densité spectrale dans le cas de données discrètes. Cette relation existe en vertu de la forme inverse des séries de Fourier classiques qu'on retrouve entre toute fonction périodique continue et sa transformée qui est une séquence de coéfficients de Fourier. Dans cette forme inverse de la relation de Fourier, qu'on peut décrire comme la tranformée des séries de Fourier discrètes, la séquence constitue la fonction primaire et la fonction périodique continue représente la transformée.

Pour rendre la théorie spectrale accessible aux chercheurs dans des domaines appliqués, il a été nécessaire d'introduire des outils statistiques qui s'adaptent à leurs besoins notamment en matière d'estimation spectrale. Tuckey (1947-1962) est le fondateur de l'analyse spectrale empirique moderne. Parmi les outils les plus utilisés dans les techniques d'estimation spectrale, on trouve le périodogramme qui représente un ingrédient important pour l'estimation de la densité spectrale : c'est une estimation spectrale des coefficients de Fourier à partir des observations d'un processus. Le périodogramme a été introduit à la fin du 19ème siècle et a été utilisé pour détecter les périodicités cachées dans les observations

des fameuses taches solaires. Parmi les travaux les plus influents en matière d'estimation spectrale des processus du second ordre stationnaires, nous trouvons Parzen (1957, 1958), Rosenblatt (1956), Anderson , Masry (1978, 1980,1984), Priestley (1981), Rachedi(1998). Cette grande quantité de travaux sur les processus du second ordre, a été concevable grâce à la structure euclidienne ou hilbertienne des variables aléatoires de second ordre et notamment grâce à la fonction de covariance qui possède plusieurs belles propriétés algébriques. Dans plusieurs situations pratiques et théoriques, les chercheurs ont été amenés à traiter des processus stochastiques qui ne sont pas forcément du second ordre . Cela implique nécessairement que les résultats ainsi obtenus ne sont pas utilisables dans ce cas. Pour tenter de résoudre même partiellement ce problème, plusieurs probabilistes et statisticiens se sont penchés sur la classe des processus stochastiques à valeurs dans un espace de Banach, soit par soit on diminue l'ordre de la contrainte d'intégrabilité et on travaille dans $L_H^{1+\epsilon}$, $\epsilon \in [0, 1[$, soit on s'intéresse à des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach E, élément de L_E^2. Nous retrouvons cette approche chez Bosq (2000) par exemple.
Les processus stationnaires à valeurs dans un espace de Banach sont étudiés en les considérant à valeurs opératoriels. En effet, les fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Banach E sont considérés comme un courbe dans l'espace de tous les opérateurs de E dans l'espace de Hilbert $H = L_{\mathbb{C}}^2$ (appelé fonction aléatoire généralisée ou cylindrique). La théorie spectrale des séries stationnaires généralisés, à valeurs dans un espace de Banach (indexé par $\mathbb{Z}$) est bien développé (cf. Chobanyan et Weron (1975)) et sont également intensivement étudiée par différents auteurs. Cette représentation est liée aux mesures aléatoires à valeurs dans l'espace des opérateurs. En effet, les processus stationnaires banachiques sont la transformée de Fourier d'une mesure aléatoire à valeurs dans l'espace des opérateurs (à valeur opératorielles) $\mathcal{L}(E', H)$, où E' est le dual de E. Lorsque E est un espace de Hilbert ces fonctions aléatoires ont été considérer en détaillées par Payen (1967), Masani (1968), Kallianpur et Mandrekar (1971), entre autres. Ainsi, les mesures envisagées sont soit aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Hilbert ou à valeur opératorielles (à valeurs dans l'espace de Banach des opérateurs). L'extension au cas de Banach sont a été dans Benchikh et al.(2006), Benchikh (2014) le cas des champs aléatoires et Benchikh (2015) dans le cas des séries strictements stationnaires.

1.4 Processus périodiquement corrélés : Etat de l'art

La classe des processus périodiquement corrélés (PC), appelés également processus cyclostationnaires, est intéressante aussi bien sur le plan pratique que théorique. Ces processus ont reçu ces derniers années une énorme attention de différents auteurs. Cela est dû à une variété d'applications dans différents domaines des sciences et de l'ingénierie. En effet, ce sont des processus non stationnaires dont la non-stationnarité se produit d'une manière qui rend possible une théorie spectrale compréhensible et gérable. Ces processus se produisent, par exemple, lorsque les systèmes physiques qui génèrent des processus aléatoires sont perturbés ou influencés périodiquement par rapport au temps. Des exemples physiques sont fournis par des phénomènes météorologiques, ou encore la mécanique, cas des processus de bruit produits par les machines tournantes, dans la communication, le traitement de la parole ou du des signaux, ect. Le livre de Gardner (1994) présente une variété importante des applications des processus P.C. dans différentes branches de l'ingénierie et de la physique. Mathématiquement, un processus est dit périodiquement corrélé (ou cyclostationnaire au sens faible) si l'on retrouve des périodicités dans certains de ses paramètres statistiques, plus présiement, si ses statistiques jusqu'à l'ordre 2 dépendent de façon périodique du temps (cf. notamment Gardner 1988, 1994). Autrement dit, un processus périodiquement corrélé a sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation périodiques. Ainsi, les processus périodiquement corrélés sont des processus aléatoires dans lesquels il existe un rythme périodique dans la structure qui est généralement plus compliquée que la périodicité dans la fonction moyenne.

Historiquement, le terme périodiquement corrélé a été introduit par Gladyshev (1961, 63), dont il a publié les premières analyses des séries périodiquement corrélés et la représentation spectrale basées sur la relation entre les séries périodiquement corrélées et les séries stationnaires multidimensionnelle. Mais la même propriété a été introduite par W.R.Bennet (1958), qui les observes leurs présences dans un contexte théorique de communication, et qui les appelés cyclostationnaires. Depuis, cette notion de cyclostationnarité a suscité un intérêt croissant à partir surtout des années 1980 avec l'explosion du domaine des télécommunications. A titre d'exemples, on peut citer, entre autres, les travaux de Gardner (1985, 1987, 1991) qui a développé plusieurs représentations des processus cyclostationnaires à temps continu et les a utilisées dans la resolution des problèmes d'estimation (voir Gardner, 1988), Yaglom (1987), Makagon et al. (1994) et de nombreux travaux publies en russe. Notons aussi que des problèmes relatifs à l'analyse et à l'estimation spectrale de processus cyclostationnaires sont traites dans Dehay (1992), Dehay et Hurd (2002) et Dehay et

Monsan (1996, 2007). Herbst (1963-1969) a exploré des séries et des processus dont les variances peuvent être périodique où presque périodique par rapport au temps. Les œuvres de Hurd, Miamee et Salehi, entre autres (voir les références), ont élaboré la théorie des processus périodiquement corrélés. Pour une étude détaillée sur les processus univariés P.C. et presque P.C., on peut consulté Dehay et Hurd (1993). Dans le cas de processus PC en temps continu, l'espace des variables à besoin d'être de dimension infinie, ce qui nécessite la théorie pour les processus aléatoires staionnaires à valuers dans un espace de Hilbert (cf. Hurd et Mandrekar 1991). Les processus PC hilbertiens sont étudiés par Soltani, Shishebor (2007) et Shishebor, Soltani (1998), où les structures spectrales de base de tels processus sont fournies. Les périodogrammes sont des outils utiles dans les séries temporelles pour estimer les densités spectrales et mettre en évidence les fréquences actives. Le premier travail sur les périodogrammes de processus PC en dimension infinie est réalisé par Soltani et Azimmohseni (2007), Soltani et al (2010), Hurd (1989) sur les périodogrammes de processus PC univariés ; et aussi Pourahmadi et Salehi (1983). L'oeuvre de Makagon, Miamee, Salehi et Soltani (2007) donne un aperçu de la dominance spectrale des processus PC.
L'interêt d'une telle étude réside également dans la possibilité notamment d'effectuer l'analyse, dans le domaine des fréquences, des processus cyclostationnaires.

1.5 Problématique et plan de thèse

L'objectif de cette thèse est de proposer une démarche originale de décomposition (canonique) d'un éléments aléatoire banachique de norme carrée intégrable via son opérateur de covariance, on généralisons la décomposition du type Kharhunen-Loève ou d'analyse en composantes principales d'une variable hilbertienne.
Pour mener à bien notre travail, on utilise un nombre important d'outils utilisés dans les espaces de Banach : processus de second ordre (au sens faible), processus de second ordre (au sens fort), topologie faible, topologie forte, opérateurs dans des espaces de Banach, bases topologiques dans un espace de Banach.
Dans deuxième temps, on développe une approche originale sur la décomposition spectrale d'une série périodiquement corrélées à valeurs dans un espace de Banach. En s'appuyant sur un travail réalisé par Benchikh et al (2006), Benchikh (2014 , 2016), Soltani et Shishebor (2007), on présente une manière de transformer des données non stationnaires en données stationnaires et d'obtenir, sous certains conditions, la représentation de séries périodiquement corrélées banachique comme intégrale stochastique par rapport a une mesure

aléatoire banachique (à travers une transformée de Fourier d'une mesure aléatoire banachique). Ces résultats sont utilisés pour avoir une décomposition de l'opérateur de covariance et une boite d'outils spectraux associés à de telles séries.

Ce travail est présenté essentiellement en quatres chapitres et ils sont organisées comme suit :

Le premier chapitre est introductif, sur lequel la candidate présente une étude bibliographique des problèmes liés à la décomposition d'un élément aléatoire banachique et la décomposition spectrale des séries stationnaire et périodiquement corrélées.

Dans le deuxième chapitre, on propose un algorithme de décomposition d'un élément aléatoire banachique. Á partir de la décomposition spectrale d'un opérateur compact symétrique positif de $\mathcal{L}(E', E)$, où E est un espace de Banach réel séparable et E' son dual topologique, le développement canonique est donnée pour un éléments aléatoires du second-ordre à valeurs dans l'espace de Banach E. Comme un cas particulier nous améliorer certains résultats bien connus et d'autre part on donne une forme explicite d'un éléments aléatoires à valeurs dans l'espace de Banach E, de son opérateur de covariance et son norme nucléaire.

Dans le troisième chapitre, nous faisons un rappel sur les séries stationnaires et leurs représentation spectrale. Nous considérons les différents cas d'études : le cas unidimensionnel, le cas multidimensionnel, le cas hilbertien et nous présentons les bases théoriques des outils spectraux qui sont classiquement associés à une série stationnaire, d'une façon plus précise, la mesure aléatoire, la mesure spectrale (à valeurs projecteurs) et la famille des opérateurs unitaires. On mettra l'accent, sur les résultats récents obtenus pour les séries et les fonctions aléatoires staionnaires banachique.

L'objet du chapitre 4 est l'étude des séries périodiquement corrélées. Nous commençons dans la première section, par une synthèse sur résulats existants et récents sur la décomposition spectrales des séries périodiquement corrélées dans le cas multimensionel et le cas hilbertien. Dans la deuxième section, on donne une extension d'étude de tels séries aux cas banachique (dont nous proposons une définition). Par le biais d'une méthode de stationnarisation, nous étudions cette classe de processus sous un nouvel angle et étudions les outils spectraux que nous pouvons lui associer. En particulier, nous étudierons la représentation spectrale d'une séries périodiquement corrélées banachique.

Le dernier chapitre de cette contribution est consacré à quelques commentaires et discussions sur les nombreuses questions ouvertes qui en découlent.

Chapitre 2

Canonical Development of second order Banach-valued random element

L'objectif de ce chapitre est de présenter un algorithme de décomposition d'un élément aléatoire banachique de norme carrée intégrable (variable aléatoire, opérateur de covariance) du type Kharhunen-Loève. En effet, à partir de la décomposition spectrale d'un opérateur compact symétrique positif de L(E' ;E), où E est un espace de Banach réel séparable et E' son dual topologique, le développement canonique est donnée pour un éléments aléatoires du second-ordre à valeurs dans l'espace de Banach E. Comme un cas particulier nous améliorer certains résultats bien connus (([108], [104],[106], [4])) et d'autre part on donne une forme explicite d'un éléments aléatoires à valeurs dans l'espace de Banach E, de son opérateur de covariance et son norme nucléaire.
Les résultats de ce chapitre font l'objet d'une publication dans la revue "International Journal of Statistics and Economics".

Benchikh Tawfik[1] and Mankour Khadidja[2]

[1]Djillali Liabes University
Laboratoire de Processus Stochastiques BP 89, Sidi Bel Abbès, 22000, Algérie
benchikh.tawfik@gmail.com

[2]Djillali Liabes University
Laboratoire de Processus Stochastiques BP 89, Sidi Bel Abbès, 22000, Algérie
khadidjamankour@yahoo.fr

– Abstract –

From the spectral decomposition of the covariance operator of Banach-valued random element, the canonical development is given for second order E-valued random elements. As a particular case we improve some well known results ([108], [104],[106], [4]). The spectral decomposition yields us to propose an algorithm of orthogonal weak expansion of Banach-valued random elements.

Keywords : Banach space, random element, Covariance operators, Nuclear operators, Gaussian Banach-valued random elements, Spectral decomposition.

2000 Mathematics Subject Classification : 62M15, 60G15, 47B10.

2.1 Notation and Preliminairies

We will first precise notation and writing conventions used throughout this paper and examine some mathematical tools necessary for its understanding.

Throughout this paper $(E, \|.\|)$ stands for separable real Banach space endowed with its Borel σ-field $\mathcal{B}_E$ and E' for the topological dual space of E endowed with tha canonical supremum norm ; i.e., for all $e' \in E'$, $\|e'\| = \sup\{(e', e)_{E',E}, \|e\| \leq 1\}$, where $(., .)_{E',E}$ denote the duality between E and E'. By an operator we always mean a bounded linear operator. For any two Banach spaces E_1 and E_2, $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ denotes the Banach space of all linear bounded operators defined from E_1 into E_2 with the usual norm $\|.\|_{\mathcal{L}}$ of linear bounded operators. The tensor product $u \otimes v : E' \to E$ is defined by $(., u)_{E',E}v$, when $u, v \in E$. The canonical norm of the Banach space $\mathcal{N}_1(E', E)$ of nuclear operator mapping E' into E is given by $\|A\|_1 = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|\|y_n\|; A = \sum_{i=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, x_n, y_n \in E\}$ (for a background on operator theory see [23]).

By H we denote a separable real Hilbert space with scalar product $< .,. >$ which, in a perspective of development of statistical tools, is of $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = L^2(\mathcal{A})$ type, where $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ is a probability space ; this restriction is not necessary from a mathematical point of view. The linear hull or linear span of A is denoted $span(A)$.

A random element X defined on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ with values in $(E, \mathcal{B}_E)$ is a mesurable applications with respect to the σ-field $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}_E$. For the sake of simplicity, we shall only consider zero mean random element having second order, i.e., $\mathbb{E}(X) = 0$ and $\int \|X(.)\|^2 d\mathbb{P} < +\infty$.

Let X be a E-valued random element given in probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. In a naturel way we can define an operator $U : E' \to L^2(\mathcal{A})$ by $U(e') = e' \circ X = (e', X)_{E',E}$. We say that the operator U is generated by a random element X. It is noticed that U is a compact operator of $\mathcal{L}(E', L^2(\mathcal{A}))$. However, for each $Y \in L^2(\mathcal{A})$, then $YX \in L^1_E(\mathcal{A})$ (Banach space of equivalence classes of integrable E-random variables with respect to the norm $\|.\|_{1,E} = \mathbb{E}\|X\|$) ; thus, we can consider the adjoint operator of U, $U^* : L^2(\mathcal{A}) \to E$, defined as

$$U^*(Y) = \int YX d\mathbb{P}\,,$$

and we have

$$(e', U^*Y)_{E',E} =< Y, Ue' >_{L^2(\mathbb{P})}\,, \text{ for each } (Y, e') \in L^2\mathcal{A} \times E'.$$

If we note by ${}^tU$ the transpose operator of U, and $\mathcal{I}_E$ a canonical injection from E into E'', then : $\mathcal{I}_E \circ U^* = {}^tU$.

In general case, we have the following result :

Proposition 2.1.1. *Let U an element of $\mathcal{L}(E', H)$ such that $range\,{}^tU \subset range\,\mathcal{I}_E$, then there exists an unique element U^* of $\mathcal{L}(H, E)$, such that $\mathcal{I}_E \circ U^* = {}^tU$ with $\|U\|_{\mathcal{L}} = \|U^*\|_{\mathcal{L}}$, and for all (h, e') of $H \times E'$ we have : $(e', U^*h)_{E',E} =< h, Ue' >_H$.*

It is easy to see that when U is a compact operator, then U^* is compact.

In particular, for all (e, h) of $E \times H$, the operator $e \otimes h : e' \in E' \mapsto (e', e)_{E',E}\ h \in H$, is an element of $\mathcal{L}(E', H)$ where ${}^t(e \otimes h) = h \otimes (\mathcal{I}_E\ e) \in \mathcal{L}(H, E'')$. Moreover $range\,{}^t(e \otimes h) \subset range\,\mathcal{I}_E$ and $(e \otimes h)^* = h \otimes e$.
We show then

Propriété 2.1.1. *For all (u, v, x, h) of $E \times E \times H \times H$ and for all T of $\mathcal{L}(E', H)$ such that $range\,{}^tT \subset range\,\mathcal{I}_E$, we have*

1. *$T^* \circ (u \otimes h) = u \otimes (T^*h)$.*

2. $(h \otimes u) \circ T = (T^* h) \otimes u$.
3. $(h \otimes u) \circ (v \otimes x) =< h, x > v \otimes u$.

The covariance operator R of X is the bounded linear operator from E' to E, defined by :

$$Re' = \int (e', X(\omega))_{E',E} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(e'(X)X) = U^* \circ U(e'),\ e' \in E' .$$

The covariance operator can be written as $\mathbb{E}(X \otimes X)$. It is well know (see [4], [64] and [105]) that R is a nonnegative symmetric nuclear compact operator of $\mathcal{L}(E', E)$ and $trace(R) = \mathbb{E}(\|X\|^2)$.
From the foregoing, it follows that :

Proposition 2.1.2. *If an element U of $\mathcal{L}(E', H)$ is compact such that $range\,{}^tU \subset range\,\mathcal{I}_E$, then $R = U^* \circ U$ is a nonnegative symmetric nuclear compact operator from E' into E.*

Let us remind finally some results for a symmetric compact operator of $\mathcal{L}(E', E)$. First, let us recall the following simple property

Lemme 2.1.1. *Let R be a symmetric compact element of $\mathcal{L}(E', E)$. When $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of elements of E' converging to e', in the $\sigma(E', E)$ topology, then $\lim_n (e'_n, Re'_n)_{E',E} = (e', Re')_{E',E}$.*

According to the above lemma, we can prove that there exists e'_0 of E' of norm 1 such that

$$|(e'_0, Re'_0)| = \sup_{\|e'\| \leq 1} |(e', Re')_{E',E}|.$$

We are now able to state and prove the following proposition

Proposition 2.1.3. *[30] If E is a separable real Banach space and R is a symmetric nonnegative compact operator from E' into E, different from 0, then there exists an element e'_0 of E' of norm 1 such that*

$$\mu_0 = \sup_{\|e'\| \leq 1} |(e', Re')_{E',E}| = (e'_0, Re'_0)_{E',E} = \|Re'_0\| = \|R\|_{\mathcal{L}}.$$

Moreover, if we set $u = \dfrac{Re'_0}{\|e'_0\|}$, then $R - \mu_0 u \otimes u$ is a nonnegative compact operator.

Démonstration. Since the operator R is nonnegative, then, for all (e', f') of $E' \times E'$, we have

$$|(f', Re')_{E',E}|^2 \leq (e', Re')_{E',E}(f', Rf')_{E',E}.$$

Thus, for all (e', f') of $E' \times E'$ such that $\|e'\| \leq 1$ and $\|f'\| \leq 1$, we have $|(f', Re')_{E',E}| \leq \mu_0$.

Let y' an element of E' such that $\|y'\| \leq 1$. As, for all f' of E' such that $\|f'\| < 1$, we have : $|(f', Ry')| \leq \mu_0$. We deduce from it that $\sup\limits_{\|f'\| \leq 1} |(f', Ry')| \leq \mu_0$, and thus, for all y' of E' such that $\|y'\| \leq 1$, we have $\|Ry'\| \leq \mu_0$. As $\|R\|_{\mathcal{L}} = \sup\limits_{\|y'\| \leq 1} \|Ry'\|$, we deduce that $\|R\|_{\mathcal{L}} \leq \mu_0$.

On the other hand, we have $\mu_0 = |(e_0^{'}, Re_0^{'})_{E',E}| \leq \|Re_0^{'}\|\|e_0^{'}\| \leq \|R\|$. Thus $\mu_0 \leq \|Re_0^{'}\| \leq \|R\|_{\mathcal{L}} \leq \mu_0$, from which we obtain $\mu_0 = \|Re_0^{'}\| = \|R\|_{\mathcal{L}}$.

Moreover, since $Re_0^{'} \neq 0$ (otherwise $\mu_0 = 0$), we can set $u = \dfrac{Re_0^{'}}{\|e_0^{'}\|}$.

As, for all y' of E', we have

$$(y', Re_0^{'})^2_{E',E} \leq (e_0^{'}, Re_0^{'})_{E',E}(y', Ry')_{E',E} = \|Re_0^{'}\|(y', Ry')_{E',E},$$

therefore, by multiplying the last inequality by $\dfrac{\mu_0}{\|Re_0^{'}\|^2} = \dfrac{1}{\|Re_0^{'}\|}$, we obtain

$$\frac{\mu_0}{\|Re_0^{'}\|^2}(y', Re_0^{'})^2_{E',E} \leq (y', Ry')_{E',E},$$

which imply that $\mu_0(y', \frac{Re_0^{'}}{\|e_0^{'}\|})_{E',E} \leq (y', Ry')_{E',E}$, thus $\mu_0(y', u)^2_{E',E} \leq (y', Ry')_{E',E}$.
That is to say $\mu_0(y', (u \otimes u)y')_{E',E} \leq (y', Ry')_{E',E}$. Hence, we have

$$0 \leq (y', Ry')_{E',E} - (y', \mu_0(u \otimes u)y')_{E',E} = (y', (R - \mu_0 u \otimes u)y'))_{E',E},$$

which achieves the proof. $\square$

2.2 Spectral Decomposition of symmetric nonnegative compact operator of $\mathcal{L}(E', E)$.

In this section we will state some know results on the theory of symmetric nonnegative compact operator of $\mathcal{L}(E', E)$ which are used in later section.

Let U a compact element of $\mathcal{L}(E', H)$ different from zero such that $range\, {}^tU \subset range\, \mathcal{I}_E$. Then, $R = U^* \circ U$ is symmetric nonnegative compact operator different from 0.

In order to give the spectral decomposition of symmetric nonnegative compact operator elements $\mathcal{L}(E', E)$, we propose an algorithm for that.

2.2.1 Algorithme.

We consider the sequences $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of operators defined by :

- $R_0 = R$
- For all $n \geq 1$:

  a) If R_{n-1} is a symmetric nonnegative and compact operator different from zero, then we set

  $$R_n = R_{n-1} - \mu_{n-1} u_{n-1} \otimes u_{n-1}$$

  where $\mu_{n-1} = \sup\{(e', R_{n-1}e')_{E',E}, \|e'\| \leq 1\}$ and $u_{n-1} = \dfrac{1}{\mu_{n-1}} R_{n-1} e'_{n-1}$, with e'_{n-1} is an element of E' of the norm 1 such that

  $$\mu_{n-1} = \sup_{\|e'\|\leq 1} (e', R_{n-1}e')_{E',E} = (e'_{n-1}, R_{n-1}e'_{n-1})_{E',E} = \|R_{n-1}e'_{n-1}\| = \|R_{n-1}\|_{\mathcal{L}}.$$

  b) Otherwise $R_n = 0$.

By using a recurrence proof, it is easily checked that, for all n of $\mathbb{N}$, the operator R_n is symmetric nonnegative and compact. It is noticed that when $R_{n-1} \neq 0$, the existence of e'_{n-1} and u_{n-1} comes from the proposition 2.1.3.

Let us suppose now that, for all n of $\mathbb{N}$, R_n is different from zero. We show then

Proposition 2.2.1.

1. *$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a decreasing sequence*
2. *For all n of $\mathbb{N}^*$: $R_n = R - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i u_i \otimes u_i$ and $R_n e'_i = 0$.*
3. *For $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $(e'_i, u_n)_{E',E} = 0$, and, for all n of $\mathbb{N}$, $(e'_n, u_n)_{E',E} = 1$.*
4. *For all $i \in \mathbb{N}$, $u_i \notin span\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots\}$ and $e'_i \notin span\{e'_1, \ldots, e'_{i-1}, e'_{i+1}, \ldots\}$.*

Démonstration. Indeed,

$$\begin{aligned}
\mu_n &= (e_n^{'}, R_n e_n^{'})_{E',E} = (e_n^{'}, R_{n-1}e_{n-1}^{'} - \mu_{n-1}(e_n^{'}, u_{n-1})_{E',E}u_{n-1})_{E',E} \\
&= (e_n^{'}, R_{n-1}e_{n-1}^{'})_{E',E} - \mu_{n-1}(e_n^{'}, u_{n-1})_{E',E}^2 \\
&\leq (e_n^{'}, R_{n-1}e_{n-1}^{'})_{E',E} \\
&\leq \sup_{\|e'\|\leq 1} (e', R_{n-1}e')_{E',E} = \mu_{n-1}.
\end{aligned}$$

By reccurence, we can easy show the property *2* and *3*. The property *4* rise from the property *3*. □

It follows that a family $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a minimal system and the family $\{u_n, e_n^{'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a biorthogonal system in $E \times E'$

Let us now consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined as :
- $U_0 = U$,
- $U_n = U_{n-1} - u_{n-1} \otimes (U_{n-1}e_{n-1}^{'})$, for all n of $\mathbb{N}^*$.

It follows that $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a family of elements of $\mathcal{L}(E', H)$ and we can affirm by reccurence that, for all n of $\mathbb{N}^*$, $range\,{}^tU_n \subset range\,\mathcal{I}_E$, and $U_n^* = U_{n-1}^* - (U_{n-1}e_{n-1}^{'}) \otimes u_{n-1}$. This allows us to verify, by recurrence, the following property :

Propriété 2.2.1.

1. *For all n of $\mathbb{N}^*$: $R_n = U_n^* \circ U_n$, hence for all n of $\mathbb{N}$: $\mu_n = \|U_n e_n^{'}\|^2$.*
2. *For all (n, m) of $\mathbb{N}^2$, we have $U_n^* \circ U_{n+m} = R_{n+m}$.*

From which, and according to the proposition 2.2.1, we have

Proposition 2.2.2. *The family $\{\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}U_n e_n^{'}; n \in \mathbb{N}\}$ is an orthonormal system of H.*

From which, we can decompose the space E' in a direct sum. for this, let us set :
- $M_0 = (span\{u_0\})^\perp$, $F_0 = span\{e_0^{'}\}$,
- for all n of $\mathbb{N}^*$, $M_n = M_{n-1} \cap (span\{u_n\})^\perp$ and $F_n = span\{e_0^{'}, \dots, e_n^{'}\} \cap M_{n-1}$.

It is clear that, for all n of $\mathbb{N}$, M_n is a close subspace of E', like F_n. Moreover it is easy to check by recurrence that

Proposition 2.2.3. *For all n of $\mathbb{N}$, $M_n = \bigcap_{k=0}^{n}(\text{span}\{u_k\})^\perp = (\text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\})^\perp$, and thus, for all n of $\mathbb{N}^*$, $F_n = (\text{span}\{e_0^{'}, \dots, e_n^{'}\}) \cap (\text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\})^\perp$.*

Consequently, we show that, for all n of $\mathbb{N}$, $F_n + M_n = F_n \oplus M_n$. What precedes enables us to state

Proposition 2.2.4. *$E' = F_0 \oplus M_0$, and, for all n of $\mathbb{N}$, $E' = F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_n \oplus M_n$.*

Finally, we can summarize all this by the following results.
We define the sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by : $f_0 = e_0^{'}$, and, for all n of $\mathbb{N}^*$, we note f_n the parrallet projection to $F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_{n-1}$ of $e_n^{'}$ on M_{n-1}. We show then

Propriété 2.2.2.

1. *For all n of $\mathbb{N}^*$, $f_n \in M_{n-1}$ and $e_n^{'} - f_n \in \text{span}\{e_0^{'}, \ldots, e_{n-1}^{'}\}$.*
2. *For all $k < n$, we have $(f_n, u_k)_{E',E} = 0$.*
3. *For all n of $\mathbb{N}$, we have : $Rf_n = \mu_n u_n$, $\mu_n = (f_n, Rf_n)_{E',E}$ et $(f_n, u_n)_{E',E} = 1$.*
4. *For all (n, m) of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, we have $R_{n+m} f_n = 0$ and $(f_n, u_{n+m})_{E',E} = 0$.*
5. *For all (n, m) of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, we have : $(f_n, u_m)_{E',E} = \delta_{n,m}$; i.e., biorthogonal system.*
6. *For all n of $\mathbb{N}$: $F_n = \text{span}\{f_n\} = \text{span}\{e_0^{'}, \ldots, e_n^{'}\} \cap (\text{span}\{u_0, \ldots, u_{n-1}\})^{\perp}$*

2.2.2 Spectral decomposition

According to proposition 2.2.2, the sequence $(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} U_n e_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge weakly to 0. As U^* is compact, it came that the sequence $(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} U^* U_n e_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge to 0. Thus :

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} U^* U_n e_n^{'} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} R_n e_n^{'} = \lim_n \sqrt{\mu_n} u_n = 0,$$

therefore $\lim_n \|\sqrt{\mu_n} u_n\| = 0$, that is to say $\lim_n \sqrt{\mu_n} = 0$, from which $\lim_n \mu_n = 0$.

Furtheremore, as $\mu_n = \|R_n\|_{\mathcal{L}}$, for all n of $\mathbb{N}$: we have $\lim_n R_n = 0$, thus

$$\lim_n R - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i u_i \otimes u_i = 0\,,$$

we deduce that $R = \lim_n \sum_{i=0}^{n} \mu_i u_i \otimes u_i$ in norm of $\mathcal{L}$.

Hence we have proved the following

Proposition 2.2.5. $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i u_i \otimes u_i$ *in the norme* $\mathcal{L}$.

The previous results lead to the spectral decomposition of U

Proposition 2.2.6. $U = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sqrt{\mu_i} u_i \otimes \phi_i$ *in norm of* $\mathcal{L}$.

Thus $U^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sqrt{\mu_i} \phi_i \otimes u_i$ *in the norm of* $\mathcal{L}$.

In consequence, we have (by the proposition 2.2.1 and propriety 2.2.1), for all n of $\mathbb{N}$:
$R_n = \sum_{i=n}^{\infty} \mu_i u_i \otimes u_i$, $U_n = \sum_{i=n}^{\infty} \sqrt{\mu_i} u_i \otimes \phi_i$ and $U_n^* = \sum_{i=n}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \phi_i \otimes u_i$

Moreover, we show

Propriété 2.2.3.

1. *For all* n *of* $\mathbb{N}$ *:* $\|U_n\|_{\mathcal{L}} = \|U_n^*\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\mu_n}$.
2. *for all* n *of* $\mathbb{N}$ *:* $\sqrt{\mu_n} = (e_n^{'}, U_n^* \phi_n)_{E',E} =< U_n e_n^{'}, \phi_n >_H$.

That which one deduces

Proposition 2.2.7. *For all* n *of* $\mathbb{N}^*$ *:*

$$\sqrt{\mu_n} = \|U^* \phi_n\| = \|U_n^* \phi_n\| = \sup\{\|U^* \phi\|; \|\phi\| \leq 1, \phi \perp \text{span}\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}\}.$$

Démonstration. Firt, we have :

$$U_n^* \phi_n = \sum_{i=n}^{\infty} \sqrt{\mu_i} < \phi_n, \phi_i >_H u_i = \sqrt{\mu_n} u_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} < \phi_n, \phi_i >_H u_i = U^* \phi_n \,,$$

it follows that $\sqrt{\mu_n} = \|U_n^* \phi_n\| = \|U^* \phi_n\| \qquad (1)$.

If ϕ is orthogonal to *span*$\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$ and if $\|\phi\| \leq 1$, then

$$U\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} < \phi, \phi_i >_H u_i = \sum_{i=n}^{\infty} \sqrt{\mu_i} < \phi, \phi_i >_H u_i = U^* \phi \,,$$

thus $\|U\phi\| = \|U^* \phi\| \leq \|U_n^*\|_{\mathcal{L}} \|\phi\| \leq \|U_n^*\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\mu_n}$, from which the result taking into account (1) and owing to the fact that ϕ_n is orthogonal with *span*$\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$. □

Remarque 2.2.1. *The previous spectral decomposition of the operator* $R = U^* \circ U$ *is valid for all symmetric nonnegative operator of* $\mathcal{L}(E', E)$*. Indeed, according to the lemma* *on Factorization (see [106]), every symmetric nonnegative operator R of $\mathcal{L}(E', E)$ can be represented in the form $R = T^* \circ T$, where $T \in \mathcal{L}(E, H)$ and H is an auxiliary Hilbert space.*

In addition, we show the following

Proposition 2.2.8. *The operator U is 2-summing and R is nuclear such that $trace(R) = \sum_i \mu_i$.*

2.3 Canonical decomposition of second order Banach-valued random element

Let X a zero-mean random element of the second order with values in E and let U the *cylindrical random element* $(c.r.e.)$ generated by X. Then, U is a compact operator of $\mathcal{L}(E', L^2(\mathbb{P}))$ and its transposed ${}^tU$ is defined of $L^2(\mathcal{A})$ in E'' by the relation :

$$\forall f \in L^2(\mathcal{A}), \forall e' \in E' : \, ({}^tUf \, , \, e')_{E'',E'} =< Ue' \, , \, f >_{L^2(\mathcal{A})}$$

As ${}^tU(L^2(\mathcal{A})) \subset E$ (see [108]), i.e., $range^tU \subset range\mathcal{I}_E$, then there is an element U^* de $\mathcal{L}(, E)$,and only one, such that $\mathcal{I}_E \circ U^* = {}^tU$.

But, the operator of covariance V_X of X is completely determined by the covariance function of X :

$$\forall e', f' \in E', \, (f', Ve')_{E',E} = \int ((e', X)_{E',E}(f', X)_{E',E}) d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left(< Ue' \, , \, Uf' >_{L^2(\mathbb{P})}\right) \, ,$$

then $V = U^* \circ U \in \mathcal{L}(E', E)$. It is nonnegative symmetric compact operator.

According to the proposition 2.2.5 and proposition 2.2.6, there exists an orthonormal sequence $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\mathcal{A})$ and minimal sequence of vectors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and a decreasing sequence $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (real positive) tends towards zero associate with this saquence such that :

$$\forall e' \in E' \, , \, V_X e' = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i (e', u_i)_{E',E} \, u_i$$

$$\forall e' \in E' \, , \, Ue' = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sqrt{\mu_i} (e', u_i)_{E',E} \, \phi_i.$$

As $Ue' = (e', X)_{E',E}$, we deduce the following theorem

Théorème 2.3.1. *Let E be a real separable Banach space and X E-valued random element with second order. Then X has an orthogonal weak expansion :*

$$X = \sum_{n\in \mathbb{N}} \sqrt{\mu_n} u_n \phi_n \,,$$

where the series is a.s. convergent in the weak sens, i.e.,

$$\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\mu_i} (e', u_i)_{E',E} \phi_i \longrightarrow (e', X)_{E',E} = Ue' \quad \textit{in } L^2(\mathcal{A}) \,, \ \ \forall\, e' \ \in \ E'$$

We deduce the decomposition (generalization of the theorem Kahrhunen Loève) in orthogonal series which on the one hand summarizes the well known results in the (see [108], [104],[106]) and on the other hand gives an explicit form of X, and of V_X while specifying the nuclear norm of V

In fact,

$$\forall e' \in E' \,, (e', X)_{E',E} \leq \|e'\|^2 \|X\|^2 \,,$$

and

$$(e', X)^2_{E',E} = \sum_{i,j} \sqrt{\mu_i \mu_j} \phi_i \phi_j (e', u_i)_{E',E} (e', u_j)_{E',E}.$$

It follows that

$$\mathbb{E}((e', X)^2_{E',E}) = \sum_i \mu_i (e', u_i)^2_{E',E} \leq \|e'\|^2 \mathbb{E}(\|X\|^2)$$

from which we deduce that

$$\sup_{\|e'\|\leq 1} \mathbb{E}((e', X)^2_{E',E}) = \sup_{\|e'\|\leq 1} (\sum_i \mu_i (e', u_i)^2_{E',E}) = \sum_i \mu_i \leq \mathbb{E}(\|X\|^2) < +\infty.$$

Then, V is nuclear and $trace(V) = \sum_i \mu_i$

In particular, for an Gaussian E-valued random element X (then $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$) ; we have :

$$X = \sum_i \sqrt{\mu_i}\, u_i \phi_i \,,$$

where the series is a.s. convergent in the norm of the Banach space E. The $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of independent scalar-valued standard Gaussian variables, and the system $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is linearly independent. This theorem is already known in the case of Gaussian Banach-valued random elements with symmetric distibution (see [108]).

Conclusion

The main result of this paper state that every Banach-valued random element X can be represented as a sum of the form $\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\mu_i}(e', u_i)_{E',E}\phi_i$, where $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal sequence in $L^2(\mathcal{A})$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a minimal sequence of vectors and $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a decreasing sequence (real positive) tends towards zero associate with this sequence. This serie representation, so-called canonical decomposition, is a generalisation of the Karhunen-Loève expansion based on the corresponding decomposition of the covariance operator V_X. In some sense, this can also be seen as a generalization of the spectral theorem for covariance operators. For this, we give iterative decomposition (algorithme) of a Banach-valued random element. The resuls we be important role in the analysis of functional data, in particular, to studie the autoregressive model and Banach-values linear processes (see. [12]). Further study on the Gaussian measures on Banach spaces has been extensively studied in a very similar and constructive manner (see [5]).

Chapitre 3

Théorie spectrale des processus stationnaires

L'analyse spectrale est l'une des composantes fondamentales de l'analyse des séries chronologiques. Ce chapitre sert à spécifier les notations et à rappeler un certain nombre de résultats connus sur la décomposition spectrale des séries stationnaires au sens faible, en particulier les notions de mesure aléatoire, intégrale stochatique, mesure spectrale, densité spectrale (boîte à outils spectraux) et leurs estimateurs, ainsi que la représentation spectrale des séries stationnaires multidimensionnels, hilbertiennes et banachique. Ces associations se trouvent largement développées dans Azencott et Dacunha-Castelle (1984), et Boudou et Romain (2001,2002), Benchikh et al. (2007), Benchikh (2014).

3.1 Représentation spectrale des séries stationnaires multidimensionnelles

3.1.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathbb{C}$ le corps complexe.
On considère une série aléatoire $X_n = \{X_n^j, j = 1, ...p\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^p$, noté p-dimentionnelle

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ \vdots \\ X_n^p \end{pmatrix} .$$

Définition 3.1.1. *Une série $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ est dite de second ordre si*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$$

ou bien

$$\int_\Omega \langle X_n(\omega), X_n(\omega)\rangle_{\mathbb{C}^p} d\mathbb{P}(\omega) < +\infty ,$$

où $< .,. >_{\mathbb{C}^p}$ est le produit scalaire dans $\mathbb{C}^p$.

La série $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dit centré si

$$\mathbb{E}(X_n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} .$$

L'espace $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, noté $L^2_{\mathbb{C}^p}$, des classes d'équivalences des variables aléatoires du second ordre q̀ valeurs dans $\mathbb{C}^p$, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$\langle X, Y\rangle_{L^2_{\mathbb{C}^p}} = \int_\Omega \langle X(\omega), Y(\omega)\rangle_{\mathbb{C}^p} d\mathbb{P}(\omega) .$$

Définition 3.1.2. *La fonction de covariance $\gamma_X(.,.)$ de la série X est définie par*

$$\mathbf{R}(n,m) = \gamma_X(n,m) = Cov(X_n, X_m) = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}(X_n)) \otimes ({}^t\overline{X_m} - \mathbb{E}({}^t\overline{X_m}))] .$$

Sa fonction d'autocorrelation est définie par :

$$\rho_X(m) = \frac{\gamma_X(m)}{\gamma_X(0)} = \frac{Cov(X_{n+m}, X_n)}{Var(X_n)}$$

Définition 3.1.3. *Une série p-dimensionelle de second ordre $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite stationnaire (au sens faible) si*

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_n) = \mu = \mu_n = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}, (constante\, independante\, de\, n)\,,$$

et

$$\mathbf{R}(n,m) = Cov(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) = Cov(X_m, X_0) = Cov(X_n^j, X_m^k) = R_{j,k}(n-m)\,,$$

pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}$ *et* $j,k \in \{1,...,p\}$.
Dans ce cas, on note $\mathbf{R}(n) = (R_{jk}(n))_{j,k=1}^{p}$.

Donc, une série multidimensionnelle stationnaire est un vecteur composé des séries stationnaire et stationnairement corrélés unidimensionnelle.
Dans la suite, on considère que les séries sont centrées et on désigne par la stationnarité, la stationnarité au sens large.
Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série stationnaire d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, A, P)$.

Corollaire 3.1.1.

1. *Si* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une série stationnaire, alors*

$$\forall n,m,s \in \mathbb{Z}\,,\;\; \mathbf{R}(n,m) = \gamma_X(n,m) = \gamma_X(n+s, m+s)\,.$$

2. *En particulier, on peut définir sa fonction de covariance par une seule variable comme suit*

$$\gamma_X(n+m,n) = Cov(X_{n+m}, X_n) = Cov(X_m, X_0) = \gamma_X(m,0) = \gamma_X(m)\,.$$

qui possède les propriétés suivantes :

Propriété 3.1.1.

1. $\gamma(0)$ *est réelle et positive,*
2. $|\gamma_X(n)| \leq \gamma_X(0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
3. *La fonction* γ_X *est une fonction matricielle (hermitienne) sur* $\mathbb{Z}$ *telle que*

$$\gamma_X(n) =^t \gamma_X(-n)\,,$$

où ${}^t\gamma_X$ est la tansposée conjuguée d'un vecteur ou matrice à éléments complexes.

4. *γ_X est semi-définie positive ; $\forall t_1, ..., t_k \in \mathbb{Z}; \forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}^p$*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i^t \gamma_X(t_i - t_j)\alpha_j \geq 0 .$$

Et on a la propriété suivante

Proposition 3.1.1. *La fonction γ est la fonction de covariance d'une série stationnaire si et seulement si elle est semi-définie positive.*

On désigne par I l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et $\mathcal{B}(I)$ la tribu de borélienne associée. Le théorème d'Herglotz ci dessous établit l'équivalence entre la fonction d'autocovariance et une mesure finie définie sur l'espace $(I; \mathcal{B}(I))$. Cette mesure, appelée mesure spectrale du processus, joue un rôle analogue é celui de la représentation de Fourier pour les signaux déterministes.

Théorème 3.1.1 (Théorème de Herglotz)**.** *Une fonction γ définie sur $\mathbb{Z}$ est une fonction de covariance d'une série de sedond ordre scalaire (à valeur dans $\mathbb{C}$) si seulement si il existe une mesure bornée positive μ sur $[-\pi, \pi]$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z} , \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi] , \quad \gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda) .$$

C'est à dire que

Propriété 3.1.2.

1. *Si $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, A, P)$ alors sa fonction de covariance C_{XX} est une tansformée de Fourier d'une mesure définie sur $[-\pi, \pi]$.*
2. *Si $\gamma = \gamma_X$ pour une série stationnaire, la mesure μ sera note μ_X appellée mesure spectrale de X.*
3. *Si μ_X a une densite f_X par rapport à la mesure de Lebesgue, elle est appelée la densité spectrale de X et le support de μ_X s'appelle le spectre de X.*

Dans le cas multidimensionnel, on a le résultat suivant.

Propriété 3.1.3. *Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une série d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}^p}$. La fonction matricielle γ_X est définit comme suit*

$$\forall n \in \mathbb{Z} , \quad \forall \lambda \in [0, 2\pi] , \quad \gamma_X(n) = \int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda n} dF_{XX}(\lambda) .$$

F_{XX} est une mesure positive sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans le cône des matrices hermitiennes positives uniquement déterminéée par γ_X

Corollaire 3.1.2. *Soit X une série stationnaire qui admet une densité spectrale f_{XX} alors sa fonction de covariance γ_X a pour valeurs les coefficients de Fourier de f_{XX} et on a*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall \lambda \in [0, 2\pi], \quad \gamma_X(n) = \int_0^{2\pi} f_{XX}(\lambda) e^{i\lambda n} d\lambda .$$

Le problème de trouver les mesures spectrales d'une covariance donnée qui est un problème d'inversion de Fourier et nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.1.2.

1. *La mesure spectrale d'une covariance d'une série de $L^2_{\mathbb{C}^p}$ admet une densité $f \in L^2(\lambda)$ si seulement si on a :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(n)|^2 < +\infty$$

   et dans ce cas

$$f(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_X(n) e^{-in\lambda} .$$

2. *C'est la fonction de covariance γ_X d'une série X d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}^p}$ est absolument sommable, c'est à dire,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(n)| < +\infty \quad (\textit{condition forte}) ,$$

   alors la série X admet une densité spectrale continue qui est la série de Fourier uniformement convergente suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi] \quad f_{XX}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_X(n) e^{-i\lambda n} .$$

Donnons ci-dessous quelques exemples importants des série stationnaires et de mesures spectrales.

Définition 3.1.4. *(Série à spectre fini ou dénombrable) Une série X est dit à spectre fini si μ_X est porte par un ensemble fini $\{t_1 .....t_k\}$ de $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, donc si $\mu_X = \sum_{j=1}^k a_j \delta_{t_j}$ pour des constantes $a_j > 0$.*

Proposition 3.1.3. *Soient (A_j) pour $j = 1, \dots, k$ des variables aléatoires de L^2 centrée non correlées. Alors la série définit par*

$$X_n = \sum_{j=1}^{k} A_j e^{int_j} \, ,$$

est une série stationnaire ayant pour mesure spectrale

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(A_j^2)\delta_{ij} \, .$$

Ces séries sont utilisées en physique pour représenter des signaux optiques d'amplitudes aléatoires et de période suivante : $\frac{2\pi}{t_j}$. La variance suivante $\delta_j^2 = \mathbb{E}(A_j^2)$ est l'inergie associée à la fréquence t_j.

On peut étendre au cas dénombrabrable, en effet, si (A_j) est une suite de variables réelles centrées non correlées et de variance δ_j^2 telle que $\sum \delta_j < \infty$, alors pour toute suite $(t_j) \subset \mathbb{T}$ la série définit par

$$X_n = \sum_{j} A_j e^{int_j}$$

où la série est convergente dans L^2, est une série stationnaire dont le spectre est contenu dans (t_j).

Proposition 3.1.4. *Si X est une série stationnaire centrée et $a \in l^1(\mathbb{Z})$ alors la série Y définit dans L^2 de la façon suivante*

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X_{n-k}$$

est stationnaire et on a

$$\mu_Y = |\sum_{k} a_k e_{-k}|^2 \mu_X$$

Remarque 3.1.1.

1. *Si X est à spectre fini ou dénombrable alors Y l'est aussi et si X est à densité spectrale Y l'est également.*
2. *L'opération du passage de X à Y sera faite par les filtres linéaires.*

3.1.2 Estimation de la moyenne et de l'autocovariance

L'étude des séries stationnaires du second ordre repose entièrement sur l'analyse de la moyenne et surtout de la covariance. Dans les problèmes de modélisation et de prédiction il est donc crucial de savoir estimer ces paramètres à partir d'une série $X_1, ..., X_T$ d'observations. Cette section va être consacrée à cette question.
Soient $X_1, ..., X_T$ une suite de T observations produites par une série stationnaire X_n de moyenne μ et de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$. Estimons les deux quantités inconnues μ et $\gamma(h)$. Pour estimer la moyenne (théorique) μ, un estimateur naturel est la moyenne empirique :

$$\hat{\mu} = \overline{X}_T = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i$$

Remarque 3.1.2. *Si la série X_n est simplement un bruit blanc, alors la loi forte des grands nombres assure la convergence de $\hat{\mu}$ vers μ presque sûrement, en probabilité et en moyenne quadratique, la loi forte des grands nombres n'est généralement pas valable si les réalisations de X_n ne sont plus i.i.d.. Cependant, un résultat analogue existe pour les variables corrélées, à condition de supposer une dépendance faible entre les variables (c'est-à-dire en imposant une condition du type $\sum_h |\gamma_h| < \infty$).*

Proposition 3.1.5. *Si X_t est une série stationnaire et que $\overline{X}_T$ désigne la moyenne empirique pour T observations de la série, alors*

(a) $\mathbb{E}(\overline{X}_T) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\mathbb{E}(X_i) = \mu$, *(estimateur sans biais).*

(b) $Var(\overline{X}_T) = \frac{1}{T}\sum_{|h|<T-1}(1 - \frac{|h|}{T})\gamma(h)$,

(c) *si $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to \infty$, alors $Var(\overline{X}_T - \mu) \to 0$ quand $T \to \infty$ (convergence en moyenne quadratique),*

(d) *si de plus $v = \sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < +\infty$, alors $Var(\overline{X}_T) \sim \frac{v}{T}$.*

(e) *Si les X_i sont i.i.d., alors $Var(X_T) \to 0$ lorsque $T \to \infty$.*

Cette propriété est particulièrement utile pour construire des intervalles de confiance exacts si on connaît la loi de X_n et des intervalles de confiance asymptotiques si on ignore la loi de X_n.
Pour construire un estimateur de la fonction d'autocovariance théorique $\gamma(h)$, rappelons que si $(X_1, Y_1), ..., (X_T, Y_T)$ sont des observations bivariées i.i.d. de variance finie, un es-

timateur de la covariance entre X et Y est donné par :

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(X_i - \overline{X_T})(Y_i - \overline{Y_T})$$

Dés lors, on estime $\gamma(h)$ par la fonction d'autocovariance empirique

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T-h}(X_i - \overline{X_T})(Y_i - \overline{Y_T})$$

défini pour $0 \leq h \leq T-1$; (Pour les valeurs négatives de h on utilise la symétrie de l'autocovariance théorique $\gamma_X(h)$, et on définie $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(k)$ pour $k = -h > 0$).
Le même type d'estimateur peut être utilisé pour estimer la fonction d'autocorrélation. Dans ce cas, on utilisera

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Remarque 3.1.3. *Au lieu de normaliser par T, il peut arriver que l'on normalise par $(T-h)$. Cet estimateur a l'avantage d'être un estimateur sans biais de l'autocovariance $\gamma(h)$ théorique, c'est-à-dire son espérance est exactement égal à $\gamma(h)$. Cependant, il a le désavantage de ne pas vérifier la propriété de la suite des autocovariances théoriques $(\gamma(h))$ d'être définie non négative ce qui est génant.*

Propriété 3.1.4. *Soient $\hat{\gamma}(h)$ et $\hat{\rho}(h)$, pour $-T < h < T$, les fonction d'autocovariance (acvf) et fonction d'autocorrélation (acf) empirique de (X_n) calculées à partir de l'observation $X(T)$. Alors :*

1. *ces estimateurs sont approximativement sans biais si n est grand.*
2. *Une régle est d'avoir au moins $n > 40$ observations et de se limiter aux $h < \frac{n}{4}$.*
3. *Les matrices de covariances (de corrélations) associées aux $\hat{\gamma}(h)$ sont s.d.p.. Elles sont d.p. dés que la loi de X_1 est à densité.*

3.1.3 Théorème de représentation spectrale d'une série stationnaire scalaire

Définition 3.1.5. *Si $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace mesure σ-fini, on appelle mesure aléatoire de base μ définie sur l'espace de probabilité (Ω, A, P) toute isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(P)$.*

Ce terme de mesure aléatoire ce justifie de la façon suivante. Soit l'ensemble $\mathcal{E}_\mu = \{A \in \mathcal{E}, \mu(A) < +\infty\}$ et Z une telle isométrie, à tout $A \in \mathcal{E}_\mu$, il correspond donc (une classe) de variable aléatoire $Z(1_A)$ de $L^2_{\mathbb{C}}(P)$ qu'on notera pour simplifier $Z(A)$.
Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer :

i) $Z(\emptyset) = 0$

ii) Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{E}_\mu$ on a

$$E(Z(A)\overline{Z(B)} = \mu(A \cap B)\,;$$

en particulier si $A \cap B = \emptyset$, alors $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)\, p.s.$ et $\mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)} = 0$. Ce dernier point se traduit en disant que les *accroissements de Z sont orthogonaux*.

ii) Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{E}_\mu$ deux à deux disjoints et telle que $\sum \mu(A_n) < +\infty$, alors, la série

$$\sum 1_{A_n}$$

est convergente dans $L^2(\mu)$ et on a donc

$$Z(\cup A_n) = \sum Z(A_n)\,,$$

où la sérié du second membre est convergente dans $L^2(\mu)$.

Inversement par le lemme de prolongement des isométries, une application Z qui vérifie i) et ii) se prolonge en une mesure aléatoire car les fonctions étagées sur $\mathcal{E}_\mu$ sont denses dans $L^2(\mu)$.
Si toutes les variables $Z(f)$ sont centrées on dira que la mesure aléatoire Z est *centrée* et dans ce cas la propriete ii) ci dessus s'énnonce

$$Cov(Z(A), Z(B)) = \mu(A \cap B)\,.$$

Remarque 3.1.4. *Il n'est en général pas possible de définir une application $\widetilde{Z}$ de $\Omega \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout ω, $\widetilde{Z}(\omega, .)$ soit une mesure sur $\mathcal{E}$ et que $\widetilde{Z}(., A) = Z(A)$ $\mathbb{P}$.p.s. pour chaque A. Les conditions $ii)$ et $iii)$ ci-dessus font en effet intervenir trop d'ensembles de mesure nulle. C'est pourquoi beaucoup d'auteurs préfèrent utiliser les termes de* processus spatiaux à accroissements orthogonaux ou de champ spectral. *Le terme de processus spatial privilégie les v.a. $Z(A)$, les ensembles A étant considérés comme parties de l'espace.*

Exemple 3.1.1. *L'application* $(A, B) \longrightarrow \mu(A \cap B)$ *est une application semi-définie positive sur* $\mathcal{E}_\mu$. *En effet,* $\forall a_i \in \mathbb{C}$ *et* $\forall A_i \in \mathcal{E}_\mu$ *on a*

$$\sum a_i \overline{a_j} \mu(A_i \cap A_j) = \int |\sum a_i 1_{A_j}|^2 d\mu \geq 0 \,.$$

Donc, comme toute fonction semi-définie positive et symétrique est la covariance d'un processus gaussien, il existe alors un processus gaussien centré Z *indexe par* $\mathcal{E}_\mu$ *telle que*

$$Cov(Z(A), Z(B)) = \mu(A \cap B) \,.$$

La mesure Z *se prolonge en une mesure aléatoire de base* μ. *On remarque que toutes les variables* $Z(f)$ *sont des limites dans* $L^2(P)$ *de gaussiennes complexes est sont donc aussi gaussiennes complexes.*
Si μ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}_+$, *et si pour la mesure gaussienne correspondante on pose* $X_n = Z([0, 1])$ *on obtient un processus indexé par* $\mathbb{R}_+$ *à qui il ne manque que la continuité des trajectoires pour être un mouvement browien. C'est un exemple d'une mesure aléatoire qui ne peut être écrit comme une application de* Ω *dans l'espace des mesures.*

Nous allons maintenant passer au résultat qui justifie l'introduction de la notion.
Si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, la (classe de) v.a. $Z(f)$ sera aussi notée indifférement

$$\int_E f dZ \,, \int f(u) dZ(u) \,, \int f(u) dZ(\omega, u) \, ect \,.$$

Théorème 3.1.2 (Théorème de Karhunen)**.**
Soit $(X_n)_{n \in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ *une série de second ordre, centrée, définie sur l'espace* $(\Omega, A, \mathbb{P})$. *On suppose que sa covariance peut s'écrire sous la forme suivante*

$$\Gamma(s, t) = \int_E a(s, u) \overline{a(t, u)} d\mu(u) \,,$$

où $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *est un espace mesuré et* σ*-fini, et pour tout t, la fonction* $a(t, .)$ *est dans* $L^2(\mu)$. *Il existe alors une mesure aléatoire Z centrée, de base* μ, *telle que* $\forall t \in T$, *on a :*

$$X_t = \int a(t, .) dZ(u)$$

Remarque 3.1.5. *La mesure aléatoire peut donc avoir à être définie sur un espace de* *probabilité plus grand que celui sur lequel X est défini. Les espace $H^X = \overline{vect}\{X_n\, n \in T\}$ et H^Z (où H^Z est l'image de $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ par Z) coïncide si et seulement si $\{a(t;.); t \in T\}$ est totale dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ et dans ce cas il n'y a pas besoin d'étendre l'espace de probabilité.*

Exemple 3.1.2. *La covariance d'un MB (un processus gaussien) est donnée par*

$$\Gamma(s,t) = inf(s,t) = \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,s]} 1_{[0,t]} d\lambda\,.$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On est bien dans les conditions du théorème et il existe donc une mesure aléatoire de base λ soit Z telle que

$$B_t = \int 1_{[0,t]} dZ\ .$$

Dans le cas des séries stationnaires le Théorème de Karlman devient

Théorème 3.1.3 (Théorème de représentation spectrale). *Si X est une série stationnaire centrée de mesure spectrale μ_X alors il existe une mesure aléatoire centrée Z_X de base μ_X sur $[-\pi, \pi[$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad X_n = \int e^{in\lambda} dZ_X(\lambda)\,.$$

De plus les espaces H^X, H^Z coıincident et le processus Z_X est appelé le champ spectral de X.

Voici un exemple d'application du théorème spectral.

Proposition 3.1.6. *Une série stationnaire au sens large X est à spectre fini si et seulement si il s'écrit*

$$X_n = \sum_{j=1}^{k} A_j e^{in\lambda_j}\ ,$$

où les A_j sont centrées ; de carrée intégrable et deux à deux non corrélées.

3.2 Éléments spetraux associés aux séries stationnaires hilbertiennes

Par H on désigne un$\mathbb{C}$-espace de Hilbert séparable muni de produit de sclaire $< .,. >$., par $\mathcal{T}$ une tribu de parties d'un ensemble T et par $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H.

3.2.1 Mesure aléatoire, intégrale Stochastique.

Définition 3.2.1. *Une mesure aléatoire* $(m.a.)$ Z *définie sur* $\mathcal{T}$ *à valeur dans* H *de type* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{P})$ *où* $L^2_{\mathbb{C}^p}(\mathbb{P})$ *est une application de* $\mathcal{T}$ *dans* H *telle que :*

1) *pour tout couple* (A, B) *d'éléments disjoints dans* $\mathcal{T}$ *:*

$$Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B) \text{ et } < Z(A), Z(B) >= 0;$$

2) *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *qui converge en décroissant vers* $\emptyset$*, alors* $\underset{n}{lim}\, Z(A_n) = 0$.

On montre alors que

Théorème 3.2.1. *L'application* $\mu_z : A \in \mathcal{T} \longrightarrow \|Z(A)\|^2 \in \mathbb{R}^+$ *est une mesure positive bornée. L'intégrale stochastique ; par rapport à* Z*, peut se définir comme l'unique isométrie de* $L^2_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{T}, \mu_Z)$ *sur le sous-espace* $H_Z = \overline{vect}\{Z(A); A \in \mathcal{T}\}$ *qui, pour tout* A *de* $\mathcal{T}$*, associe* $Z(A)$ *à* $\mathbb{1}_A$*.*

L'image d'un élément ϕ de $L^2(\mu_Z)$ par cette isométrie est notée $\int \phi\, dZ$.
De plus, nous dirons que

Définition 3.2.2. *Deux* $m.a.$ Z_1 *et* Z_2*, définie sur* $\mathcal{T}$ *à valeur dans* H*, sont dites stationnairement corrélées lorsque, pour tous couple d'éléments disjoints* A *et* B *de* $\mathcal{T}$ *:*

$$< Z_1(A), Z_2(B) >= 0$$

3.2.2 Mesure spectrale, opérateur unitaire

Définition 3.2.3. *Une mesure spectrale* $(m.s.)$ *à valeurs projecteurs* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{T}$ *pour* H *est une application de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{P}(H)$*, ensemble des projecteurs orthogonaux de* H*, telle que :*

1) $\mathcal{E}(A \cup B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B)$ *pour tout couple* (A, B) *d'éléments disjoints dans* $\mathcal{T}$*.*

2) *lorsque* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$ *qui converge en décroissant vers* $\emptyset$*, alors* $\underset{n}{lim}\, \mathcal{E}(A_n)X = 0$ *pour tout* X *de* H *;*

3) $\mathcal{E}(T) = I_H$.

Il est facile de vérifie que :

Proposition 3.2.1. *Pour tout couple* (A, B) *de* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *:*

$$\mathcal{E}(A) \circ \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(A \cap B).$$

Le théorème suivant (cf. Halmos, 1957) donne le lien utile qui existe entre les mesures spectrales et les mesures scalaires.

Théorème 3.2.2. *Soit* $(T, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. Une fonction à valeurs projections* ε *sur* $\mathcal{T}$ *est une mesure spectrale si et seulement si* $\varepsilon(X) = I$ *et pour chaque paire de vecteurs* x *et* y *dans* H *la fonction d'ensemble de valeurs scalaire* $\mu_{x,y}(M) = \langle \varepsilon(M)x, y\rangle$ *est une mesure additive.*

En introduisant par la suite le concept de famille de $m.a.$, il est possible d'associer une m.s. (à valeurs projecteurs) à un ensemble de $m.a.$ possédant certaines propriétes.

Définition 3.2.4. *Une famille de* $m.a.$ $\{Z^X; X \in H\}$ *; définie sur* $\mathcal{T}$ *à valeurs dans* H*, est une famille de mesures aléatoires stationnairement corrélées* $(f.m.a.s.c.)$ *lorsque :*

1) *pour tout couple* (X, X') *d'éléments de* $H \times H$*, les* $m.a.$ Z^X *et* $Z^{X'}$ *sont stationnairement corrélées ;*
2) *pour tout* X *de* H *:* $Z^X(T) = X$*.*

On a alors

Théorème 3.2.3. *Si* $\{Z^X; X \in H\}$ *est une* $f.m.a.s.c.$*, définie sur* $\mathcal{T}$ *à valeurs dans* H*, alors :*

1) *pour tout* A *de* $\mathcal{T}$*, l'opérateur* $\mathcal{E}(A) : X \in H \longrightarrow Z^X(A)$ *est un projecteur orthogonal ;*
2) *l'application* $\mathcal{E} : A \in \mathcal{T} \to \mathcal{E}(A) \in \mathcal{P}$ *est une* $m.s.$ *sur* $\mathcal{T}$ *pour* H *dite mesure spectrale associée à la* $f.m.a.s.c.$ $\{Z^X; X \in H\}$

Inversement, pour chaque mesure spectrale on peut associe une mesure aléatoire.

Propriété 3.2.1. *Si* $\mathcal{E}$ *est une* $m.s.$ *sur* $\mathcal{T}$ *pour* H*, alors*

1. *pour tout* X *de* H*, l'application* $Z^X : A \in \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}(A)X \in H$ *est une* $m.a.$
2. *l'ensemble* $\{Z^X; X \in H\}$ *est une* $f.m.a.s.c.$
3. *la* $m.s.$ *associée à la* $f.m.a.s.c.$ $\{Z^X; X \in H\}$ *est* $\mathcal{E}$*.*

De même, nous rappellerons qu'un opérateur unitaire peut s'exprimer (cf. notamment Riesz et Nagy, 1968) comme intégrale stochastique d'une m.s. (à valeurs projecteurs) et que le Shift-operator (opérateur de décalage) est un opérateur unitaire qui joue un grand rôle dans l'étude d'une série stationnaire. Grâce à l'association famille de $m.a.$ et $m.s.$ énoncée ci-dessous, nous pourrons expliciter la correspondance entre $m.s.$ et opérateur unitaire en associant à un opérateur unitaire U la famille de $m.a.$ qui correspondent aux séries $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On désigne par $\mathcal{B}$ la tribu de Borel de $\Pi = [-\pi, +\pi[$. Étant donné l'opérateur unitaire U de H (c'est à dire une application linéaire bornée telle que $U \circ U^* = U^* \circ U = I_H$), on a, pour tout (X, Y) de $H \times H$, les séries $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(U^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaire et stationnairement corrélées. Si l'on désigne par Z^X la $m.a.$ associée à la série stationnaires $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$, il est clair que $\{Z^X; X \in H\}$ est une $f.m.a.s.c.$; on appelle alors $m.s.$ associée à l'opérateur unitaire U la $m.s.$ associée à $\{Z^X; X \in H\}$.

D'une façon réciproque en quelque sorte, lorsque $\mathcal{E}$ est une $m.s.$ sur $\mathcal{B}$ pour H, on peut montrer que :

1) pour tout X de H, l'application $Z^X : A \in \mathcal{B} \to \mathcal{E}(A)X \in H$ est une $m.a.$
2) l'opérateur $U : X \in H \to \int e^{i.1} dZ \in H$ est unitaire, il est appelé opérateur unitaire déduit de $\mathcal{E}$ et a pour $m.s.$ associée $\mathcal{E}$.

Proposition 3.2.2. *Deux opérateurs unitaire ayant même $m.s.$ associée sont égaux.*

Propriété 3.2.2. *Deux $m.s.$ $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, sur $\mathcal{T}$ pour H, commutent lorsque, pour tout couple (A, B) d'éléments dans $\mathcal{T}$, les projecteurs $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(B)$ commutent.*

De cette dernière propriété, on déduit que deux opérateurs unitaires commutent si et seulement si les $m.s.$ qui leurs sont associées commutent.

On constate que toute série stationnaire peut générer à travers sa mesure spectrale une famille de projecteurs qui commutent entre eux. Cela rappelle la décomposition spectrale de l'opérateur de covariance dans le cas de l'ACP.
L'un des résultats classiques de la théorie de l'opérateur est le théorème spectral des opérateurs normaux. Dans la suite, on présente ce résultat pour le cas de l'opérateurs unitaire afin que nous puissions l'utiliser dans cette thèse. Pour plus de détails, on peut se référer à (Akheizer et Glazman, 1993).
Si nous identifions T avec $[-\pi, \pi[$, on peut énoncer le théorème suivant

Théorème 3.2.4. *(Théorème spesctrales des epérateurs unitaires.)*

Pour tout opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert H il existe une mesure spectrale unique ε sur les sous-ensembles de Borel de $[-\pi,\pi[$ tels que

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\varepsilon(d\lambda).$$

De même, pour une série d'opérateurs $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a :

Théorème 3.2.5. *Pour tout opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert H il existe une mesure spectrale unique ε sur des sous-ensembles de Borel de $[-\pi,\pi[$ tels que*

$$U^n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\varepsilon(d\lambda). \quad \textit{pour tout entier } n$$

3.2.3 Série Stationnaires hibertiennes

Définition 3.2.5. *Une série stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de H telle que,pour tout couple (n,m) d'éléments dans $\mathbb{Z}$, on a :*

$$< X_n\,, X_m >=< X_{n-m}\,, X_0 > \ .$$

Il est bien connu (cf. notamment Azencott et Dacunha-Castelle (1984) et Boudou et Romain (2001),(2002)) qu'une série stationnaire peut être considérée comme la transformée de Fourier d'une m.a. Nous présentons alors cette correspondance biunivoque à partir du résultat suivant :

Théorème 3.2.6. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire il existe une $m.a.$ Z, et une seule, dite $m.a.$ associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie sur $\mathcal{B}_{[-\pi,\pi[}$ à valeurs dans H telle que :*

1. *$\int e^{i.n} dZ$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$*
2. *$H_Z = \overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$.*
3. *l'opérateur de caraiance admet la décomposition spetrale suivante :*

$$\gamma_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda)\,.$$

F_{XX} est une mesure positive sur $[-\pi,\pi]$ définie par :

$$F(A) =< Z(A), Z(A) >\,, A \in \mathcal{B}_{[-\pi,\pi[}\,.$$

Le Théorème (3.2.6) possède une réciproque :

Propriété 3.2.3. *Si Z est une $m.a.$ définie sur $\mathcal{B}_{[-\pi,\pi[}$ à valeurs dans H alors $(\int e^{i.n}dZ)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire.*

Terminons le paragraphe par la

Définition 3.2.6. *Deux série stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées lorsque, pour tout (n,m) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:*

$$< X_n, Y_m >=< X_{n-m}, Y_0 > .$$

3.3 Décomposition spectrale d'une série stationnaire banachique

Dans cette section, nous rappellons la notion et les propriétés des mesures aléatoires à valeurs dans un espace de type $L^2_E(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$, E étant un espace de Banach séparable complexe (voir Benchikh et al. (2006), Benchikh (2014)). On présente ensuite des cas de figure où la représentation d'une série stationnaire banachique sous la forme d'un intégrale par rapport à une telles mesures est possible.

3.3.1 Notations et rappels

Soit E un espace de Banach complexe séparable avec le dual topologique E', on désigons par H un espace de Hilbert séparable équipé d'un produit scalaire $< .,. >$, et $\mathcal{L}(H,E)$ (resp. $\mathcal{K}(H,E)$) l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés (resp. compacts) de H dans E. L'application $h\in H \to< ., h >\in H'$ est notée $\mathcal{I}$, où H' est le dual topologique de H.

Définition 3.3.1. *Soit K un opérateur de $\mathcal{L}(H,E)$, on appelle* opérateur quasi-transposé *de K, que l'on note ${}^qK$, l'opérateur antilinéaire $\mathcal{I}^{-1}\circ {}^tK$.*

À partir de cette définition, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes

Proposition 3.3.1. *1. Pour tout (e',h) de $E'\times H$, on a : $< h, {}^qKe' >= (e',Kh)_{E',E}$.*

2. *Pour tout couple d'éléments* $(K_1, K_2$ *de* $\mathcal{L}(H, E)$ *et tout couple* (λ_1, λ_2) *de* $\mathbb{C}$ *:*

$$^q(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \overline{\lambda_1}(^q K_1) + \overline{\lambda_2}(^q K_2).$$

3. *Si deux éléments* K_1 *et* K_2 *de* $\mathcal{L}(H, E)$ *sont tels que* $^q K_1 =^q K_2$ *alors* $K_1 = K_2$.
4. *Pour tout opérateur* D *de* $\mathcal{L}(H)$*, on a :* $^q(K \circ D) = D^* \circ^q K$.
5. *Pour tout opérateur* T *de* $\mathcal{L}(E)$*, on a :* $^q(T \circ K) =^q K \circ^t T$.

Lorsque X est un élément de $L^2_E(\mathcal{A})(= L^2_E(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}))$, l'application qui, à y de $L^2(\mathcal{A})$, associe $\int yX d\mathbb{P}$ de E, est notée $\widetilde{X}$ et appelée "*opérateur canoniquement associé (o.c.a.) à* X" ; c'est un opérateur compact. En [**?**], l'application $e' \in E' \mapsto e' \circ X \in L^2_E(\mathcal{A})$ est appelée *opérateur cylindrique associé* à X ; à une conjugaison complexe prés, il s'agit du quasi-transposé de $\widetilde{X}$.
Et on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.2. *L'application qui, à* X *de* $L^2_E(\mathcal{A})$*, associe* $\widetilde{X}$ *de* $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}), E)$ *est linéaire et bornée.*

Le quasi transosé de de $\widetilde{X}$, noté $^q\widetilde{X}$ est défini par : $^q\widetilde{X}e' = \overline{e' \circ X}$, pour tout (e', X) de $E' \times L^2_E(\mathcal{A})$.
Un exemple d'un o.c.a. pour un type particulier d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ est donné par

Proposition 3.3.3. *Pour tout* (u, e) *de* $L^2(\mathcal{A}) \times E$*, on peut affirmer que l'application* ue *qui, à* ω *de* Ω *associe* $u(x)e$ *de* E*, appartient à* $L^2_E(\mathcal{A})$ *et que* $\widetilde{ue} = \overline{u} \otimes e$*.*

Notons que si E est un espace de dimonsion infinie, il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(L^2, E)$ qui n'est associe à un élément aléatoire X à valeurs dans l'espace de Banach E, c-à-d, il n'existe pas un élément aléatoire $X \in L^2_E$ tel que $K = \widetilde{X}$.
Une condition suffisante sur $K \in \mathcal{L}(L^2, E)$ pour l'existence d'un élément $X \in L^2_E$ tel que $K = \widetilde{X}$ est donné par la proposition suivante (cf. Vakhaniya et Chobanyan(1982))

Proposition 3.3.4. *Si* $K \in \mathcal{L}(L^2, E)$ *admet la factorisation (ou se factorisé par un opérateur de Hilbert-Schmidt)* $K = K_2 \circ K_1$*, où* H_1 *est un aspace de Hilbert complexe ,* $K_1 \in \mathcal{L}(L^2, H_1)$ *un opérateur de Hilbert-Schmidt, et* $K_2 \in \mathcal{L}(H_1, E)$*, alors il existe un élément aléatoire* $X \in L^2_E$ *tel que* $K = \widetilde{X}$

La proposition suivante donne un condition suffisante pour que l'opérateur $K \in \mathcal{K}(H, E)$ soit factorisé par un opérateur de Hilbert-Schmidt (cf. Benchikh (2014)).

Proposition 3.3.5. *Soit* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une base orthonormée de* L^2 *et* $K \in \mathcal{K}(L^2, E)$ *soit tel que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ky_n\| < \infty$*. Alors* K *est factorisé par un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

3.3.2 Mesures aléatoires banachiques

Définition 3.3.2. *Une mesure aléatoire opératorielle (m.a.o.) Z est une application de $\mathcal{B}$, tribu de Borel de $\Pi = [-\pi, \pi[$, dans $\mathcal{K}(H, E)$, telle que :*

i) pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$, $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$ et $Z(A) \circ {}^q(Z(B)) = 0$;

ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ convergeant en décroissant vers $\varnothing$; $\lim_n Z(A_n) = 0$.

Dans la suite, on note indifféremment $Z(A)$ et ZA. Il vient alors :

Proposition 3.3.6. *([**?**]) Si Z est une m.a.o., alors, pour tout e' de E', l'application $Z^{e'}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe ${}^q(ZA)e'$ de H est une m.a. (Hilbertienne) ; de plus, pour tout couple (e', f') d'éléments de E', les mesures aléatoires $Z^{e'}$ et $Z^{f'}$ sont stationnairement corrélées.*

En (Benchikh et al. (2006)), on démontre le résultat de décomposition suivant :

Proposition 3.3.7. *Si Z est une m.a.o., il existe une et une seule mesure spectrale ε sur $\mathcal{B}$ pour $H_Z = \overline{vect}\{{}^q(ZA)e';\ (e', A) \in E' \times \mathcal{B}\}$ telle que, si l'on note j l'injection canonique de H_Z dans H, on ait : $ZA = Z\Pi \circ j \circ \varepsilon A \circ j^*$, pour tout A de $\mathcal{B}$.*

Étant donné une $m.s.\ \varepsilon$ sur $\mathcal{B}$ pour l'espace de Hilbert H_1 et f un élément de l'ensemble $\mathcal{M}$ des applications bornées et mesurables de Π dans $\mathbb{C}$, on montre que (Benchikh (2006)) :
- pour tout X de H_1, l'application $Z_\varepsilon^X : A \in \mathcal{B} \mapsto \varepsilon AX \in H_1$ est une m.a. (hilbertienne),
- l'application $\varepsilon_f : X \in H_1 \mapsto \int f dZ_\varepsilon^X \in H_1$ est linéaire et bornée.

Ces résultats permettent d'introduire la

Définition 3.3.3. *On appelle intégrale de f, élément de $\mathcal{M}$, par rapport à la m.a.o. Z, l'opérateur $Z\Pi \circ j \circ \varepsilon_f \circ j^*$, que l'on note $\int f dZ$.*

Il est facile de vérifier la linéarité de cette intégrale et que $\int 1_A dZ = ZA$, pour tout A de $\mathcal{B}$.

Remarquent que l'intégrale par rapport à une m.a.o. est liée à l'intégrale par rapport à une m.a. (hilbertienne) ; en effet, lorsque Z est une m.a.o., pour tout (f, e') de $\mathcal{M} \times E'$, on a : ${}^q(\int f dZ)e' = \int \overline{f} dZ^{e'}$.

En utilisant la notion d'opérateur canoniquement associé (o.c.a.) à un élément banachique et la définition de mesure aléatoire opératorielle, on peut donner la définition d'une mesure aléatoire banachique suivante.

Définition 3.3.4. *Une application Z de $\mathcal{B}$ dans $L^2_E(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une mesure aléatoire banachique $(m.a.b.)$ lorsque*

i) pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$: $Z(A \cup B) = ZA + ZB$ et $\widetilde{ZA} \circ {}^q\widetilde{ZB} = 0$;

ii) pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ convergeant en décroissant vers $\varnothing$: $\lim\limits_{n\mapsto\infty} ZA_n = 0$.

Il est alors facile de vérifier que l'application $\widetilde{Z}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe $\widetilde{ZA}$ de $\mathcal{K}(L^2, E)$ est une m.a.o. appelée *m.a.o. associée à la m.a.b. Z.*
Ainsi que la définition d'intégral stochastique par rapport à une telle mesure.

Définition 3.3.5. *On dit qu'un élément f de $\mathcal{M}$ est intégrable par rapport à la m.a.b. Z, appelé intégrale de f par rapport à Z et noté $\int f dZ$, lorsqu'il existe un élément de $L^2_E(\mathcal{A})$ dont l'o.c.a. est égal à $\int f d\widetilde{Z}$.*

Du ce fait, si f de $\mathcal{M}$ est intégrable par rapport à Z, on a : $\widetilde{\int f dZ} = \int f d\widetilde{Z}$. Cette intégrale est bien sûr linéaire et l'on montre que, pour tout A de $\mathcal{B}$, 1_A est intégrable par rapport à Z et que $\int 1_A dZ = ZA$.

3.3.3 Série Stationnaire Banachique

Définition 3.3.6. *On dit qu'une série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{K}(H, E)$ est stationnaire lorsque, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$, $K_n \circ^q (K_m) = K_{n-m} \circ^q K_0$.*

Comme pour tout (e', f') de $E' \times E'$ et pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$ nous avons $<^q K_n e', ^q K_m f' >= (f', K_m \circ^q K_n e')_{E',E}$. Il vient alors :

Lemme 3.3.1. *Une série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de $\mathcal{K}(H, E)$ est stationnaire si et seulement si :*

- *pour tout e' de E', la série $({}^qK_n e')_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de H est stationnaire ;*
- *pour tout (e', f') de $E' \times E'$, les séries stationnaires $({}^qK_n e')_{n\in\mathbb{Z}}$ et $({}^qK_n f')_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées.*

On a alors (Chobanjan et Weron (1975)) le résultat suivant

Proposition 3.3.8. *Si $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire d'éléments de de $\mathcal{K}(H, E)$, il existe une et une seule m.a.o. Z telle que $\int e^{i.n} dZ = K_n$.*

Étant donné $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$, D. Bosq (2000) la définit comme stationnaire lorsque, pour tout e' de E', $(e' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et lorsque, pour tout couple (e', f') d'éléments de E', les séries $(e' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(f' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées.

Comme, pour tout (e', f', n, m) de $E' \times E' \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a $< e' \circ X_n, f' \circ X_m >=< {}^q\widetilde{X_m} f', {}^q\widetilde{X_n} e' >= (e', \widetilde{X_n} \circ {}^q\widetilde{X_m} f')$,

On peut donner la définition

Définition 3.3.7. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_E(\Omega, \mathcal{A}\mathbb{P})$ est stationnaire lorsque, pour tout couple (n, m) d'élément de $\mathbb{Z}$, on a $\widetilde{X_n} \circ {}^q\widetilde{X_m} = \widetilde{X_{n-m}} \circ {}^q\widetilde{X_0}$.*

Ainsi, une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire lorsque la série $(\widetilde{X_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$ est stationnaire.

Il vient alors qu'on a (voir.Benchikh (2007))

Proposition 3.3.9. *Lorsque, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $e^{i.n}$ est intégrable par rapport à une m.a.b. Z, alors la série $(\int e^{i.n} dZ)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.*

Enfin, on a la condition suffisante suivante de décomposition de type "transformée de Fourier banachique".

Proposition 3.3.10. *([8]) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ telle que $\widetilde{X_0}$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors il existe une m.a.b. Z telle que $X_n = \int e^{i.n} dZ$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.*

Propriété 3.3.1. *Deux série stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées si et seulement si les $m.a.$ qui leurs sont associées Z^X et Z^Y le sont.*

Chapitre 4

Série périodiquements corrélés

4.1 Série périodiquement corrélée multidimensionnelle

L'objet de ce paragraphe est de définir la notion de cyclostationnarité (à l'ordre 2) et de rappeler quelques méthodes de stationnarisation. Pour plus de détails, on peut consulter les travaux de Hurd (1974) par exemple. Ensuite, étant donné une série stationnaire nous rappelons aussi les différentes associations qui existent avec sa boite à outils spectraux. Ces associations se trouvent largement développées dans Azencott et Dacunha-Castelle (1984), Boudou et Romain (2001,2002) et chapitre 3.

4.1.1 Rappels et Notations.

Définition 4.1.1. *Une série stochastique (scalaire) est dite périodiquement stationnaire au sens strict,avec période $T > 0$ si, pour tout j, tout collection de temps $n_1, n_2, ..., n_j$ dans $\mathbb{Z}$, et les ensembles de Borels $A_1, A_2, ..., A_j$ de $\mathbb{C}$.*

$$P_{n_1+T, n_2+T, ..., n_j+T}(A_1, A_2, ..., A_j) = P_{n_1, n_2, ..., n_n}(A_1, A_2, ..., A_j)$$

Si $T = 1$ alors la série est stationnaire et il est clair que si X_n est périodiquement stationnaire avec la période T, alors c'est aussi pour période $kT, k \in \mathbb{Z}$, donc nous disons qu'une série est périodiquement stationnaire si le T est supérieur à 1.
Dans la suite, nous allons considérer des séries aléatoire de second ordre. La notion de " Cyclo-stationnarité ou périodiquement corrélé" du second ordre est exprimée en termes de deux premiers moments.

Définition 4.1.2. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite périodiquement* *corrélé au sens faible avec période T, notée T-P.C si pour un $T > 0$ et pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,on a :*

$$\mathbb{E}(n) = \mathbb{E}(n+T)$$

et

$$Cov(X_n, X_m) = Cov(X_{n+T}, X_{m+T})\,. \tag{4.1}$$

Considérons par la suite une série périodiquement corrélée de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On défini la série T-dimentionnelle $(\mathbf{X}_n)$ par ces composantes :

$$\mathbf{X}_n = X_n^j = X_{nT+j} \;\; n \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, ..., T-1 \tag{4.2}$$

Alors, on a le résultat suivant obtenu par Gladyshev (1961).

Proposition 4.1.1. *La série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélée avec période T si et seulement si le T est le plus petit entier pour lequel la série T-dimensionnelle $(\mathbf{X}_n)$ est stationnaire.*

Preuve

Considérons la covariance $Cov(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) = Cov(X_{nT+j}, X_{mT+k})$, alors la stationnaritée de $(\mathbf{X}_n)$ implique

$$Cov(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) = Cov(X_{nT+j,mT+k}) = R_{j,k}(n-m),$$

se qui implique (4.1) vaut pour X_n, et inversement. Le même argument s'applique à la moyenne.

Donc, les série périodiquement corrélées sont généralement non stationnaire mais elle sont non stationnaire d'une manière trés simple tel que, lorsque la période T est connue, les rend équivalents aux séries staionnaires multidimensionnelles.

Nous supposons par la suite que $\mathbb{E}(X_n) = 0$.

Citons maintenant quelques exemples de telles séries.

Exemple 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série d'élément de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X_n = X_{n+T}, \;\; pour\ tout\ n \in \mathbb{Z}.$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélée de période T. En effet, la périodicitée implique que

$$\|X_n - X_{n+T}\|_{L^2} = 0.$$

pour chaque n.
Donc il est clair que, pour chaque n, m, on a

$$\mu(n) = \int_\Omega X_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega X_{n+T}(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mu(n+T)$$

et

$$R(n,m) = \int_\Omega X_n(\omega)\overline{X_m(\omega)}\mathbb{P}(d\omega) = \mu(n)\overline{\mu(m)} = R(n+T, m+T)$$

donc $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-P.C.
Un cas particulier d'une série périodique est donné par

$$X_n = X.f_n$$

où X est une variable aléatoire de second ordre et f_n est une série périodique scalaire , $f_{n+T} = f_n$. Ce cas particulier donne $\mathbb{E}(X_n) = f_n\mathbb{E}(X)$ et $Var(X_n) = Var(X)f_n^2$.En prenant X peut être une variable constante , disons, $X = 1$, nous voyons qu'une série périodique "scalaire" est périodiquement corrélée.

Notant qu'une série périodique a une périodicitée dans la covariance qui est plus fort que la condition (4.1) donnée ci-dessus. C'est,

Proposition 4.1.2. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodique si et seulement si $\mu(n)$ est périodique et $R(n,m)$ est doublement périodique, en symbole,*

$$\mu(n) = \mu(n+T),$$

$$R(n,m) = R(n+sT, m+tT)$$

pour tout $s, t, n, m \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.

Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des séries aléatoires et stationnairement corrées. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-périodique et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large, alors

$$Z_n = X_n + Y_n$$

est P.C. avec période T.
En effet, il est facile de voir

$$\mu_Z(n) = \mu_X(n) + \mu_Y = \mu_X(n+T) + \mu_Y = \mu_Z(n+T)$$

et

$$R_Z(n,m) = R_X(n,m) + R_Y(n-m)$$
$$= R_X(n+T, m+T) + R_Y(n+T-m-T) = R_Z(n+T, m+T).$$

Les sommes des séries périodiques et stationnaires sont parmis les plus simples des séries périodiquement corrélées.
Exemple 3.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large avec $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et f_n est une série périodique scalaire $f_n = f_{n+T}$, alors

$$Y_n = f_n.X_n$$

est P.C. de période T.

Les calcules requis donnent

$$\mu_Y(n) = f_n\mathbb{E}(X_n) = 0. \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

et

$$R_Y(n+T, m+T) = f_{n+T}\overline{f_{m+T}}.R_X(n+T-m-T)$$
$$= f_n\overline{f_m}.R_X(n-m) = R_Y(n,m).$$

En ingénierie, on dit parfois que Y_n est un produit par modulation l'amplitude d'un processus stationnaire par une fonction périodique scalaire. La variance de Y_n est périodique avec la période T chaque fois que $|f_n|$ est périodique puisque

$$R_Y(n,n) = |f_n|^2 r_X(0) = |f_{n+T}|^2 r_X(0) = R_Y(n+T, n+T).$$

Exemple.4 Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large avec $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série périodique scalaire $f_n = f_{n+T}$, alors

$$Y_n = X_{n+f_n}$$

est P.C. avec période T. Pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_Y(n) = \mathbb{E}(X_{n+f_n}) = 0$$

et

$$R_Y(n+T, m+T) = \mathbb{E}(X_{n+T+f_{n+T}}\overline{X_{m+T+f_{m+T}}})$$

$$= R_X(n+T+f_{n+T} - m - T - f_{m+T})$$

$$= R_X(n + f_n - m - f_m) = R_Y(n,m).$$

Montrant ainsi que $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-P.C. En ingenierie, la modulation d'échelle de temps est liée à modulation de phase ou de fréquence. Contrairement au cas de modulation d'amplitude, la variance de $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est jamais proprement périodique, c'est toujours constant :

$$R_Y(n,n) = R_X(n + f_n - n - f_n) = R_X(0).$$

Il existe donc des séries P.C. dont la fonction de covariance est constante dans le temps.

Définition 4.1.3. *Les série du second ordre $\{X_n^j, j = 1, 2, ..., \mathbf{m},\ n \in \mathbb{Z}\}$ sont appelées stationnaires corrélés si*

$$\mu_j(n) = \mathbb{E}(X_n^j) = \mu_j(0)$$

est constant par rapport à n et

$$R_{j,k}(n,m) = \mathbb{E}(X_n^j \overline{X_m^k})$$

ne dépend que de $s - t$ pour tout $j, k = 1, 2, ..., \mathbf{n}$ et $n, m \in \mathbb{Z}$.

Exemple 5.
Supposons que les série $\{X_n^j, j = 1, 2, ..., N,\ t \in \mathbb{Z}\}$ sont stationnairement corrélées et les fonctions scalaires $f_n^j, j = 1, 2, ..., N$ sont périodique avec période T. Alors la série

$$Y_n = \sum_{j=1}^{N} f_n^j X_n^j$$

est P.C. avec période T.

En effet, soit $\mu_j = \mathbb{E}(X_n^j)$ alors on a

$$\mu_Y(n) = \sum_{j=1}^{N} f_n^j \mu_j = \mu_Y(n+T)$$

et

$$R_Y(n+T, m+T) = Cov(\sum_{j=1}^{N} f_{n+T}^j X_{n+T}^j, \sum_{k=1}^{N} f_{m+T}^k X_{m+T}^k)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} f_{n+T}^j \overline{f_{m+T}^k} R_{jk}(n+T-m-T)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} f_n^j \overline{f_m^k} R_{j,k}(n-m) = R_Y(n, m)$$

Exemple 6.(Modèles Autorégressifs Périodiques)

L'une des classes les plus importante des séries périodiquement corrélées est celle donnée par des modèles paramétriques périodiques. Nous allons commencer par examiner les modèles autorégressives périodiques d'ordre 1(PAR)

Définition 4.1.4. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de moyenne nulle est appelée autorégression périodique d'ordre 1 (PAR(1)) si*

$$X_n = \phi(n) X_{n-1} + \sigma(n)\xi_n,$$

où $\phi(n) = \phi(n+T)$ et $\sigma(n) = \sigma(n+T)$ sont réels et $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une série aléatoire orthonormale.

Définissant $(\sigma(n)\xi_n)$ comme la série de choc, ici nous définissons $\sigma(n) = \sigma$ et dénotons le modèle résultant comme le PAR(1) avec des chocs de variance constante, où PAR(1)-CVC. En supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est causal par rapport aux chocs dans le sens $\mathbb{E}(X_n\overline{\xi_m}) = 0$ à chaque fois que $m > n$, nous pouvons obtenir le résultat principal suivante :

Théorème 4.1.1. *Une série PAR(1)-CVC $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-P.C si et seulement si $|A| < 1$, où*

$$A = \prod_{n=0}^{T-1} \phi(n).$$

Preuve.

Rappelons d'abord que lorsque $\phi(n)$ est constant, $\phi(n) \equiv \phi$, la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est autorégression homogène d'ordre 1 (AR(1)) : $X_n = \phi X_{n-1} + \sigma\xi_n$. Alors les chocs d'entrée sont toujours de variance constante et la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire avec autocorrélation

$$\mathbb{E}(X_n\overline{X_m}) = \phi^{|n-m|}\sigma^2$$

si et seulement si $|\phi| < 1$.

En prenant $n > m$ pour être spécifique, calculons maintenant $\mathbb{E}(X_nX_m)$ pour une série PAR(1)-CVC . Par récurrence, on a

$$\mathbb{E}(X_n\overline{X_m}) = \mathbb{E}([\phi(n)X_{n-1} + \xi_n]\overline{X_m})$$

$$= \mathbb{E}(\phi(n)X_{n-1}\overline{X_m}) + \mathbb{E}(\xi_n\overline{X_m})$$

$$= \mathbb{E}(\phi(n)X_{n-1}\overline{X_m}) + 0 \quad \textit{pour } n > m$$

$$\vdots$$

$$= \phi(n)\phi(n-1)...\phi(m+1)\mathbb{E}(X_m\overline{X_m})$$

et nous remarquons à partir de la périodicité de $\phi(m)$ que nous obtiendrons

$$\mathbb{E}(X_n\overline{X_m}) = \mathbb{E}(X_{n+T}\overline{X_{m+T}})$$

Si

$$R_X(n,n) \equiv \mathbb{E}(X_n\overline{X_n}) = \mathbb{E}(X_{n+T}\overline{X_{n+T}}) < \infty \ \textit{pour chaque } n.$$

Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sera T-P.C si et seulement si la fonction de variance $R_X(n,n)$ est périodique. La périodicité et la limite de la variance sont toujours nécessaires pour une série P.C car $R(n,n) = R(n+T, n+T) < \infty$ pour tout n.

Exemple 8.(Modèles moyens mobiles périodiques)

Une série aléatoire de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une moyenne mobile d'ordre q périodique (PMA(q) avec la période T si elle satisfait

$$X_n = \sum_{j=0}^{q} \theta_j(n)\xi_{n-j}$$

où $\theta_j(n) = \theta_j(n+T)$ pour tout j, n et où les ξ_n sont des variable aléatoires orthonormales de moyenne nulle . Alors (X_n) a une moyenne nulle pour tout n, et sa covariance est facilement calculée

$$R(n,m) = \mathbb{E}(X_n\overline{X_m}) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{q} \theta_j(n)\overline{\theta}_k(m)\mathbb{E}(\xi_{n-j}\overline{\xi_{m-k}})$$

$$= \sum_{j\in I_{n,m}} \theta_j(n)\overline{\theta}_{m-n+j}(m)$$

$$= \sum_{j\in I_{n+T,m+T}} \theta_j(n+T)\overline{\theta}_{m+T-n-T+j}(m+T),$$

où $I_{n,m} = \{j : 0 \le j \le q$ et $j = n - m + k$ pour certains $0 \le k \le q\}$. Puisque $I_{n,m} = I_{n+T,m+T}$, nous concluons que (X_n) est T-P.C et sa variance est

$$R(n,n) = \sum_{j=0}^{q} |\theta_j|^2(n).$$

4.1.2 Repésentation spectrale d'une série périodiquement corrélée.

Comme nous avons montionné, les séries P.C. proviennent de mélonge de la stationnarité et la périodicité. Ceci est trés claire à travers l'opérateur unitaire associé au série P.C. et les représentations qui suivent.
L'explicite d'utilisation de l'opérateur unitaire a été introduite par H.L.Hurd et Kallianpur (1992) pour les séries périodiquement corrélés à temps continue, son rôle dans les séries presque péiodiquement corr(elées. a été exploré dans H.L. Hurd (1992). Dans cette partie nous rappellons l'existence de cet opérateur et les représentations qui en découlent. Nous utilisons ensuite la théorie spectrale pour prouver le théorème de représentation de Gladyshev. La représentation spectrale permet également la construction explicite de la mesure aléatoire spectrale ε apparaissant dans la représentation harmonizable. Nous verrons également que le rôle de l'opérateur unitaire pour les séries P.C est une extension directe de son rôle dans le cas stationnaire.

L'opérateur unitaire associé à une série périodiquement corrélée(P.C).

Soit U un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(H).U$ peut être écrit comme un integrale par rapport à une mesure spectrale

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\varepsilon(d\lambda) \tag{4.3}$$

où ε est une mesure spectrale à valeurs dans $\mathcal{P}(H)$ (ensemble des projecteurs orthogonaux). Le premier résultat sur l'opérateur unitaire associé aux séries P.C. est donné par Harry L.Hurd(1969).

Proposition 4.1.3. *Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélée (P.C) de période T si et seulement si il existe un opérateur unitaire U sur son domaine temporel $\mathcal{H}_X = \overline{vect}\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ tel que*

$$X_{n+T} = UX_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Preuve.
Nous supposons $1 \in \mathcal{H}_X$. S'il existe un opérateur unitaire U pour laquel (4.4) est vrai, alors la moyenne et la fonction de corrélation de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait $\mu(n) = \mu(n+T)$ et $R(n,m) = R(n+T, m+T)$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T, alors pour $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k} a_j X_{nj}$ dans $\mathcal{L}_X = vect\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, on définit l'opérateur U par $U\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k} a_j X_{nj+T}$. Il est facile de vérifier que l'extention de U sur $\mathcal{L}_X$ est linéaire et bien définie et qu'elle conserve le produit scalaire. C'est aussi facile de montrer que U comme une application surjective de $\mathcal{L}_X$ sur $\mathcal{L}_X$. qu'on peut le prolonger défini sur $\overline{\mathcal{L}_X}$. On peut enfin vérifie que cette extension est unitaire.

Ainsi pour les séries P.C de période T, les opérateurs de "décalages d'ordre T" sont unitaire.

Remarque 4.1.1. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série P.C et U est un opérateur de décalage pour $T = 1$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.*

Les séries stationnaires vectorielles (multidimonsionnelle) ont la propriété qu'il y a un seul opérateur unitaire $U_{\mathbf{X}}$ qui agit comme l'opérateur de décalage pour chaque composante de $(\mathbf{X}_n)$ (Kallianpur et Mandrekar (1971)). Donc il est clair que si $(\mathbf{X}_n)$ est une série T-dimentionnelle stationnaire provenant de T placage d'une série T-P.C (chaque composante est P.C stationnaire de période T), alors $U = U_{\mathbf{X}}$.

L'existence de U conduit à une autre caractérisation des séries P.C trés utile pour obtenir la représentation spéctrale

Proposition 4.1.4. *Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T si et seulement s'il existe un groupe des opérateurs unitaires $\{U^n, n \in \mathbb{Z}\}$ et une fonction périodique P_n de périodec T à valeurs dans $L^2(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$X_n = \mathbf{U}^n P_n \tag{4.5}$$

Preuve.
Si X_n est donné par 4.5 alors

$$\langle X_n, X_m\rangle = \langle \mathbf{U}^n P_n, \mathbf{U}^m P_m\rangle = \langle \mathbf{U}^T\mathbf{U}^n P_{n+T}, \mathbf{U}^T\mathbf{U}^m P_{m+T}\rangle$$

et

$$\begin{aligned}
\langle X_{n+T}, X_{m+T}\rangle &= \langle \mathbf{U}^{n+T} P_{n+T}, \mathbf{U}^{m+T} P_{m+T}\rangle \\
&= \langle \mathbf{U}^T(\mathbf{U}^n P_{n+T}), \mathbf{U}^T(\mathbf{U}^m P_{m+T})\rangle \\
&= \langle \mathbf{U}^n P_{n+T}, \mathbf{U}^m P_{m+T}\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \mathbf{U}^n P_n, \mathbf{U}^m P_m \rangle$$
$$= \langle X_n, X_m \rangle$$

Inversement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-P.C, la représentation spectrale de U fournit un moyen de construire un groupe des opérateurs unitaires définie par :

$$\mathbf{U} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{i\lambda}{T}} \varepsilon(d\lambda), \tag{4.6}$$

où $\mathbf{U}^T = U$. En autres termes, $\mathbf{U}$ est T^{ime} racine de U.
Si on prend $P_n = \mathbf{U}^{-n} X_n$ on peut facilement vérifier (4.5) et que P_n est périodique. En effet

$$\|P_{n+T} - P_n\| = \|\mathbf{U}^{-n-T}[X_{n+T}] - \mathbf{U}^{-n}[X_n]\|$$
$$= \|\mathbf{U}^{-T}[X_{n+T}] - X_n\|$$
$$= 0,$$

par l'équation (4.4) .

L'expression (4.5) coinside avec le cas stationnaire, si $P_n \equiv X_0$, n'est pas unique. Il suffit de prendre par exemple cette représentation $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}e^{\frac{i2\pi}{T}}$ et $\widetilde{P}(n) = P(n)e^{-\frac{i2\pi n}{T}}$

Représentation spectrale basée sur l'opérateur unitaire.

Les représentations spectrale de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ découle naturellement de (4.5), en employant similtanément diverses représentations pour $\mathbf{U}$ et P.
Nous commençons par démontrer la représentations de Gladyshev (1963).

Proposition 4.1.5. *Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T si et seulement s'il existe une série T-dimmentionnelle stationnaire $\mathbf{Z}_n = (Z_n^j)_{j=0,\ldots,T-1}$ tel que*

$$X_n = \sum_{j=0}^{T-1} Z_n^j e^{\frac{i2\pi jn}{T}} \tag{4.7}$$

Preuve.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet la représentation (4.7),il est clairement P.C avec période T.

Inversement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T, alors (4.7) découle de la proposition (4.1.4) et la représentation de la fonction périodique P_n par la séries de Fourier (finie)

$$P_n = \sum_{j=0}^{T-1} \widetilde{P}_j e^{\frac{i\pi jn}{T}},$$

où $\widetilde{P}_k \in \mathcal{H}_X$, et en faisant l'identification $Z_n^j = \mathbf{U}^n \widetilde{P}_j$.

De plus Z_n^j sont stationnairement corrélés.

Remarque 4.1.2. *La proposition 4.1.1 affirme que chaque série P.C de période T $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ peut être vu comme une série stationnaire T-dimensionnelle $\mathbf{X}_n = X_n^j$, où $X_n^j = X_{nT+j}, n \in \mathbb{Z}$ pour $j = 0, 1, ..., T-1$. La proposition 4.1.5, également par Gladyshev démontre le fait important que chaque série P.C de période T peut être représentée, via (4.7) par une série T-dimentionnelle stationnaire $\mathbf{Z}_n$ dont les composants sont de bande passante $\frac{2\pi}{T}$.*

La proposition suivante donne une autre représentation de type Gladyshev

Proposition 4.1.6. *Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T si et seulement si il existe une série q-dimentionnelle $\mathbf{Z}_n = (Z_n^j)_{j=1,...,q}$ et q suite de fonction périodique de période T $\{f_n^j = f_{n+T}^j, j = 1, 2, ..., q\}$ avec $q \leq T$, tel que*

$$X_n = \sum_{j=1}^{q} Z_n^j f_n^j \tag{4.8}$$

Preuve. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a la représentation indiquée, elle est clairement P.C avec période T. Inversement, Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C avec période T, alors nous notons d'abord que $\mathcal{L}_p = vect\{P_n, t = 0, 1, ..., T-1\}$ a une dimention $q = \dim \mathcal{L}^p \leq T$. Soit $\{\xi_j : j = 1, 2, ..., q\}$ est une base orthonormale pour $\mathcal{L}^p$, et ainsi

$$P_n = \sum_{j=1}^{q} \langle P_n, \xi_j \rangle \xi_j. \tag{4.9}$$

Maintenant, l'affirmation (4.8) découle de la proposition (4.1.4) et fait ensuite les identifications

$$Z_n^j = \mathbf{U}^n \xi_j$$

et

$$f_n^j = \langle P_n, \xi_k \rangle = \langle P_{n+T}, \xi_k \rangle = f_{n+T}^j.$$

Enfin, on considère la représentation spectrale des séries P.C. La première est une application directe de la représentation spectrale (4.3) pour l'opérateur unitaire et la représentation (4.9) pour P_n

Proposition 4.1.7. *Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T si et seulement si il existe une mesure aléatoire spectrale définie sur $\mathcal{B}_\Pi$ tribu de Borel sur $[-\pi, \pi[$,$Z(\lambda, n) = Z([a, b[, n) = \varepsilon([a, b[)[P(n)]$ et tel que*

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z(d\lambda, n) \ \textit{pour tout}\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

Preuve.

Si X_n a la forme (4.10) avec $Z(., n) = Z(., n + T)$ et $\langle Z(A, n), Z(B, m)\rangle = 0$ quand $A \cap B = \emptyset$, et puisque $\langle Z(A, n), Z(B, m)\rangle = \langle Z(A\cap B, n), Z(A\cap B, m)\rangle$, on peut poser

$$F_{n,m}(A \cap B) = \langle Z(A, n), Z(B, m)\rangle$$

$$= \langle Z(A, n + T), Z(B, m + T)\rangle$$

$$= F_{n+T,m+T}(A \cap B)$$

pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, et les ensembles de Borel A, B de $[-\pi, \pi[$.

Pour n, m fixés

$$|F_{n,m}(A)| = |\langle Z(A, n), Z(A, m)\rangle|$$

$$\leq \|Z(A, n)\|\|Z(A, m)\|$$

$$= \sqrt{F_{n,n}(A)F_{m,m}(A)}.$$

De plus, $F_{n,n}(.) \geq 0$ et $F_{n,m}(.)$ provient de l'addivité de $Z(., n)$.

Ainsi $F_{n,m}(.)$ est une mesure complexe (finie) et

$$\langle X_n, X_m\rangle = \langle \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_1 n} Z(d\lambda_1, n), \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_2 m} Z(d\lambda_2, m)\rangle$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\lambda_1 n-\lambda_2 m)}\langle Z(d\lambda_1, n), Z(d\lambda_2, m)\rangle$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)} F_{n,m}(d\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n+T-m-T)} F_{n+T,m+T}(d\lambda) = \langle X_{n+T}, X_{m+T}\rangle \qquad (4.11)$$

Noter qu'une représentation (4.11) pour la corrélation d'une série P.C de période T est obtenu comme sous-produit.

Inversement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est P.C de période T, on utilise la représentation spectrale (4.6) pour l'opérateur unitaire U^n pour obtenir

$$X_n = U^n[P_n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i\lambda n}{T}}\varepsilon(d\lambda)[P(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i\lambda n}{T}} Z(d\lambda, t), \qquad (4.12)$$

où la mesure spectrale dépendant du temps $Z(., n)$ est définie par l'application de la mesure spectrale apparaissant en (4.3) au vecteur P_n. Plus précisement, pour tout ensemble de Borel A,

$$Z(A, n) = \varepsilon(A)[P_n],$$

d'où il résulte directement que $Z(A, n) = Z(A, n+T)$.
Il est aussi facile de voir que $Z(., n)$ et $Z(., m)$ sont stationnairement corrélées.

4.1.3 Série Périodiquement Corrélée Hilbertienne .

Soit H un espace de Hilbert séparable muni la produit scalaire $< ., . >$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé tel que $L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est séparable, on considère $\mathcal{B}$ un tribu de Borel de $\Pi = [-\pi, \pi[$ et $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H.
Soit X est un élément de $L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par $\widetilde{X}$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{P})$ dans H qui à f associe $\mathbb{E}(fX) = \int fXd\mathbb{P}$ et l'application $X \in L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longmapsto \widetilde{X} \in \sigma_2(L^2(\mathbb{P}), H)$ est une isométrie.

On considère une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, pour qui

$$\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty \;\; et \;\; \mathbb{E}(X_n) = 0 \;\; n \in \mathbb{Z}$$

Définition 4.1.5. *La série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite périodiquement corrélée s'il existe un $T > 0$ et pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$*

$$\mathbb{E}X_n\overline{X_m} = \mathbb{E}X_{n+T}\overline{X_{m+T}}$$

et alors, pour un $T > 0$ et tout $n, m \in \mathbb{Z}$ l'égalité

$$< X_n, X_m >_{L_2^H} = < X_{n+T}, X_{m+T} >_{L_2^H}$$

assure que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série périodiquement corrélée.
Si $T = 1$ alors la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Remarque 4.1.3. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série périodiquement corrélée, alors la dimention de $\mathcal{H}(n) = vect\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est périodique en n avec la période T, et la dimention du processus est spécifie par les dimentions de $\mathcal{H}(n), n = 0, ..., T - 1$.*

Proposition 4.1.8. *(Gladyshev)*
Une série de second ordre $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est périodiquement corrélée avec la période T si et seulement si la série multivariée $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_{\prod_{i=1}^T H_i}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définit par

$$Y_n = X_{nT+p}(0, ..., x, ...0)$$

est stationnaire, où $p = 0, 1, ..., T - 1$ et $(0, \ldots, x, \ldots, 0) \in \prod_{i=1}^T H_i$ avec tout les coordonnées sont nulles sauf que le $(P + 1)^{ime}$ qui est x

Ainsi nous pouvons établir la définition suivante

Définition 4.1.6. *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_{\prod_{i=1}^T H_i}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une série de second ordre stationnaire alors elle admet la représentation spectrale suivante*

$$Y_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z(d\lambda)$$

où Z est une mesure aléatoire Hilbertienne tel que $Z_p(d\lambda) = Z(d\lambda)(0, ...x, ..., o)$ et $p = 0, 1, ..., T - 1$

Lorsque Z est une mesure aléatoire Hilbertienne de $\mathcal{B}$ sur $\prod_{i=1}^{T} H_i$ alors pour tout (A, B) de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ on a $\widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(A)}^* = 0$, alors on peut exprimer

Corollaire 4.1.1. *Si Z est une mesure aléatoire Hilbertienne sur $\prod_{i=1}^{T} H_i$ tel que $Z_p(d\lambda) = Z(d\lambda)(0, ..., x, ..., 0)$,$p = 0, ..., T-1$ alors pour chaque $Z_p(.)$ est une mesure aléatoire Hilbertienne et $Z_p(.)$ est une famille de mesures aléatoires stationnairement corrélées.*

Théorème 4.1.2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une série périodiquement corrélée alors*

$$X_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} A_n^p \tag{4.13}$$

Oùn pour chaque p, $A_n^p \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une série stationnaire qui est déduit d'une série stationnaire A_n par : $A_n^p x = A_n(0, ..., x, ..., 0)$

alors on peut introduire la définition suivante :

Définition 4.1.7. *La série stationnaire $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2_{\prod_{i=1}^{T} H_i}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admet la représentation spectrale suivante : $A_n = \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-in\lambda} W(d\lambda)$ avec W est liée a Z par*

$$\mathbf{W}(\frac{1}{T}d\lambda) = D^{-1}\Gamma(\frac{-\lambda}{T})\mathbf{Z}(d\lambda) \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ . \\ . \\ . \\ W_{T-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ . \\ Z_{T-1} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . \ . \ . & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{T}} & e^{-i(2)\frac{2\pi}{T}} & . \ . \ . & e^{-i(T-1)\frac{2\pi}{T}} \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ 1 & e^{-i(T-1)\frac{2\pi}{T}} & e^{-i(2)(T-1)\frac{2\pi}{T}} & . \ . \ . & e^{-i(T-1)^2\frac{2\pi}{T}} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\frac{\lambda}{T}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & e_{-i\frac{\lambda}{T}} & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & e^{-i(T-1)\frac{\lambda}{T}} \end{pmatrix}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série périodiquement corrélée alors

$$X_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} A_n^p = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-in\lambda} W_p(d\lambda)$$

$$= \sum_{p=0}^{T-1} \int_{\frac{-\pi+2\pi p}{T}}^{\frac{2\pi p+\pi}{T}} e^{-in\lambda} W_p(d\lambda - \frac{2\pi p}{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z(d\lambda)$$

alors on peut exprimer

Théorème 4.1.3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une série périodiquement corrélée . alors il existe une unique mesure aléatoire Hilbertienne Z tel que*

$$X_n = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{e}^{in\lambda}} Z(d\lambda)$$

tel que Z est donnée par

$$Z(d\lambda) = W_p(d\lambda - \frac{2\pi p}{T}), \lambda \in [\frac{\pi}{T}(2p-1), \frac{\pi}{T}(2p+1))$$

On outre, la distribution spectrale $F(.,.)$, introduite par

$$\mathbb{E}Z(ds)x\overline{Z(dt)y} = (x, F(ds,dt)y),$$

est une mesure sur $[-\pi,\pi)\times[-\pi,\pi)$ *qui est supportée par des lignes* $d_k=\{(s,t)\in[-\pi,\pi)^2, s-t=\frac{(2\pi k)}{T}\}, k=1-T,...,T-1.$

4.1.4 L'opérateur de covariance.

Dans cette section nous caractérison l'opérateur de covariance d'un processus P.C, introduit précédemment.

Soit $F_k(s)$ est la restriction de $F(s,t)$ a la ligne $d_k, k=1-T,...,T-1$. Maintenant, pour le point (s,t) sur la diagonale du carré, $[\frac{\pi}{T}(2p-1),\frac{\pi}{T}(2p+1))\times[\frac{\pi}{T}(2l-1),\frac{\pi}{T}(2l+1)), p,l=0,...,T-1$, c-à-d, $s-t=(\frac{2\pi}{T}(p-l), s\in[\frac{\pi}{T}(2p-1),\frac{\pi}{T}(2p+1)), t\in[\frac{\pi}{T}(2l-1),\frac{\pi}{T}(2l+1))$, nous avons

$$(x,F(s,t)y)=(x,F_{p-l}(s)y). \tag{4.14}$$

Ainsi, en particulier pour $u\in[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T})$ on obtient

$$\mathbb{E}W_p(du)x\overline{W_l(du)y}=(x,F_{p-l}(du+\frac{2\pi p}{T})y). \tag{4.15}$$

Maintanant on définit une matrice carrée $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{F}(ds)=[F_{p-l}(ds+\frac{2\pi p}{T})]_{p,l=0,...,T-1},\ \ s\in[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}), \tag{4.16}$$

Lemme 4.1.1. *La matrice définie par* (4.16) *est définie positive.*

Preuve. Rappelons qu'un opérateur-matrice $T=[T_{i,j}], i,j=0,...,T-1$, est appellé définie positive si et seulement si pour chaque $x_{k_0},...,x_{k_{T-1}}$, la matrice

$$[(x_{k_j},T_{j,l}x_{k_l})]_{j,l=0,...,T-1}, \tag{4.17}$$

est définie positive, il result de (4.15) que pour $\mathcal{F}(ds)$, la matrice donnée par (4.17) est la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(W_0(du)x_{k_0},...,W_{T-1}(du)x_{k_{T-1}})$ et est donc définie positive.

La preuve est complete.

Notez que $\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n}, n,\tau\in\mathbb{Z}$, est une fonction bilinéaire sur $H\times H$ et bornée , comme

$$|\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n}| \leq \mathbb{E}|X_{n+\tau}\overline{X_n}| \leq (\mathbb{E}|X_{n+\tau}|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}|X_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_{n+\tau}C_n.$$

Par conséquant il découle de [W.Rudin 1976, Théorème 12.8] que

$$\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n} = R(n,\tau), \tag{4.18}$$

où $R(n,\tau) \in L(X)$ pour tout $n,\tau \in \mathbb{Z}$ nous nous référons à la collection $\gamma(.) = \{R(n,.), n \in \mathbb{Z}\}$, où $R(.,.)$ s'il n' y a pas d'ambiguité, comme la covariance du processus.

Lemme 4.1.2. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série P.C, alors*

$$\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n} = R(n,\tau), n,\tau \in \mathbb{Z}, \tag{4.19}$$

où l'opérateur $R(n,\tau)$ est donné par

$$R(n,\tau) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{-i(2\pi kn)}{T}}\mathcal{R}_k(\tau), \tag{4.20}$$

et $\mathcal{R}_k(\tau), k = 0,...,T-1$ certains opérateurs sont-ils dans $L(H)$.

Preuve.

L'equation (4.19) découle du fait que $\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n}$ est une fonction bilinéaire et bornée dans $H \times H$, voir [W.Rudin (1976), Théorème 12.8]. $\mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n}$ est périodique en n avec la période T et est donc $R(n,\tau)$.

Ainsi,

$$R(n,\tau) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{i(2\pi kn)}{T}}B_{k,\tau}, \tag{4.21}$$

où

$$B_{k,\tau} = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{T-1} R(n,\tau)e^{\frac{-i(2\pi kn)}{T}}. \tag{4.22}$$

Il est facile de voir que $B_{k,\tau}$ est une fonction bilinéaire et bornée dans $H \times H$. Par conséquent, il existe une fonction évalué par l'opérateur $\mathcal{R}_k(\tau) \in L(H)$ pour lequel

$$B_{k,\tau} = \mathcal{R}_k(\tau). \tag{4.23}$$

Il resulte de (4.21) et (4.23) que

$$R(n,\tau) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{i(2\pi kn)}{T}} \mathcal{R}_k(\tau)$$

$$= \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{i(2\pi kn)}{T}} \mathcal{R}_k(\tau).$$

Théorème 4.1.4. *Pour que l'opérateur $R(n,\tau)$ dans (4.20) être l'opérateur de covariance du processus P.C, il est nécessaire et suffisant que les fonctions valorisés par l'opérateur $\mathcal{R}_k(\tau), k = 0, ..., T-1$ peut être représenté comme*

$$\mathcal{R}_k(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tau s} dG_k(s), \tag{4.24}$$

où chaque $G_k(s)$ est définie en termes de $F_k(s)$ par

$$G_k(s) = \begin{cases} F_k(s) & \frac{2\pi k}{T} < s \\ F_{-T+k}(s) & \qquad s \leq \frac{2\pi k}{T}, k = 0, ..., T-1 \end{cases}$$

Preuve.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série P.C et $R(n,\tau)$ sa covariance, il resulte de théorème (4.1.2) que

$$R(n,\tau) = \mathbb{E}X_{n+\tau}\overline{X_n}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+\tau)s+int}\mathbb{E}Z(ds)\overline{Z(dt)}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+\tau)s+int}F(ds,dt)$$

$$= \sum_{p=0}^{T-1}\sum_{l=0}^{T-1} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} \int_{\frac{(2\pi l)}{T}}^{\frac{(2\pi(l+1))}{T}} e^{-i(n+\tau)s+int}F(ds,dt)$$

$$= \sum_{p=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} e^{-i\tau s - \frac{i(2\pi(p-l)n)}{T}} F_{p-l}(ds)$$

$$= \sum_{k=-T+1}^{-1} \sum_{p=0}^{T+k-1} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} e^{-i\tau s - \frac{i(2\pi kn)}{T}} F_k(ds)$$

$$+ \sum_{p=0}^{T-1} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} e^{-i\tau s} F_0(ds)$$

$$+ \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{p=k}^{T-l} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} e^{-i\tau s - \frac{(i2\pi kn)}{T}} F_k(ds)$$

$$= \sum_{k=-T+1}^{-1} e^{\frac{-i(2\pi nk)}{T}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{(\pi(T+k))}{T}} e^{-i\tau s} F_k(ds)$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tau s} F_0(ds)$$

$$+ \sum_{k=1}^{T-1} e^{\frac{-i(2\pi nk)}{T}} \int_{\frac{\pi k}{T}}^{\pi} e^{-i\tau s} F_k(ds)$$

$$= \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{-i(2\pi nk)}{T}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tau s} G_k(ds).$$

Ainsi (4.24) découle de (4.20) et l'observation donnée ci-dessus, inversement, soit

$$R(n, \tau) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{-i(2\pi nk)}{T}} \mathcal{R}_k(\tau),$$

où $\mathcal{R}_k(\tau)$ sont définit par (4.24). Depuis $\mathcal{F}(ds)$ est une matrice définit positive, il existe une mesure aléatoire unique Z tel que (4.15) tient.

Ainsi, si nous produisons le processus stationnaire $(A_n^p)_{p=0,\ldots,T-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$A_n^p = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} W_p(d\lambda)$$

et X_n par (4.13), alors il est facile de voir que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série P.C avec la covariance $\gamma(.)$.

4.2 Représentation Spectrale D'une Série Périodiquement Corrélée Banachique.

Soit E un espace de Banach complexe séparable et E' son dual topologique , H est un espace de Hilbert complexe séparable muni de produit scalaire $< .,. >$, le dual topologique de H est notée H',$\mathcal{I} : h \in H \longmapsto < ., h > \in H'$ l'isomorphisme antilinéaire.

4.2.1 Série d'opérateurs périodiquement corrélée

Soit $\mathcal{K}(H, E)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaire compacts de H à E, si $K \in \mathcal{K}(H, E)$ alors ${}^tK$ son opérateur transposé ,et ${}^qK = \mathcal{I}^{-1} \circ^t K$ son quasi transposé, et pour tout $(e', h) \in E' \times H$, on a $< h,^q Ke' >= (e', Kh)_{E'E}$; Où $(.,.)$ désigne la dualitée entre E et E'.

Définition 4.2.1. *La série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite périodiquement corrélée de période T (au sens faible) si :*

$$(K_n \circ^q K_m e', f')_{E',E} = (K_{n+T} \circ^q K_{m+T} e', f')_{E',E}\; m, n \in \mathbb{Z}\, , e', f' \in E' \,.$$

Remarque 4.2.1. *Il vient alors que la série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélée de période T si et seulement si $({}^qK_n e')_n$ est une série d'éléments de H périodiquement corrélée de période T, et $({}^qK_n e')$ et $({}^qK_n f')$ sont périodiquement corrélées.*

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série périodiquement corrélée de la période T dans $\mathcal{K}(H, E)$. On définit la série $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{K}(H, \prod_{i=0}^{T-1} E_i)$ par :

$${}^qS_n\tilde{e'} = {}^qK_{nT+p}e'$$

où $E_i = E$, $\tilde{e'} \in \prod_{i=0}^{T-1} E'_i$ avec $(\tilde{e'})^{(p)} = (0, \dots, 0, e', 0, \dots, 0)$, c-à-d toutes les coordonnées sont nulles sauf la $(p + 1)$ ième qui est égal à e'. Alors on a

Proposition 4.2.1. *La série ${}^qS_n\tilde{e'}$ d'éléments de H est stationnaire. D'où la série $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{K}(H, \prod_{i=0}^{T-1} E_i)$ est stationnaire.*

Preuve
Soit $K_n \in \mathcal{K}(H, E)$ et soit ${}^qS_n$ le quasi transposé de (S_n) qui est définit par :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=0}^{T-1} E'_i & \longrightarrow & H \\ (0, ..., e', ...0) & \longrightarrow & {}^qK_{nT+p}e' \end{array} .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} ((0, ..., f', ..., 0), S_m \circ^q S_n(0, ..., e', ..., 0))_{E',E} &= <^q S_n(0, ..., e', ..., 0),^q S_m(0, ..., f', ..., 0) > \\ &= <^q K_{nT+p}e',^q K_{mT+p}f' > \\ &= (f', K_{mT+p} \circ^q K_{nT+p}e') \\ &= (f', K_{(m-1)T+p} \circ^q K_{(n-1)T+p}e') = (f', K_{(m-n)T+p} \circ^q K_p \\ &= <^q K_pe',^q K_{(m-n)T+p}f' > \\ &= < {}^qS_0(0, ..., e', ..., 0),^q S_{m-n}(0, ..., f', ..., 0) > \end{aligned}$$

qui implique que

$$<^q S_n(0, ..., e', ..., 0),^q S_m(0, ..., f', ..., 0) >=< {}^qS_0(0, ..., e', ..., 0),^q S_{m-n}(0, ..., f', ..., 0) >$$

et donc

$$S_n \circ^q S_m = S_{m-n} \circ^q S_0$$

ce qui confirme que (S_n) est une série stationnaire d'éléments de $\mathcal{K}(H, \prod_{i=0}^{T-1} E_i)$.

$\square$

Ainsi nous pouvons établir la proposition suivante :

Proposition 4.2.2. *La série ${}^qS_n\tilde{e'}$ admet une représentation spectrale de la forme :*

$${}^qS_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\,n\lambda q}Z(d\lambda)(\tilde{e'})\,,$$

où ${}^qZ(\tilde{e'}) \in \mathcal{K}(\prod_{i=0}^{T-1} E'_i, H)$ est une mesure aléatoire opératorielle (hilbertienne) tel que ${}^qZ_p(d\lambda)e' =^q Z(d\lambda)(0, ..., e', ...0)$, $e' \in E'$, $p = 0, ..., T-1$.

D'où la série (S_n) admet la représentation spectrale suivante :

$$S_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\;n\lambda}Z(d\lambda)\,,$$

où $Z \in \mathcal{K}(H, \prod_{i=1}^{T} E_i)$ *est une mesure aléatoire opératorielle.*

Comme, pour tout mesure aléatoire opératorielle Z, on a $<^q Z(A)e',^q Z(B)f' >= 0$, $\forall(e', f', A, B)$ de $E' \times E' \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, alors on peut démontrer que

Corollaire 4.2.1. *Si* $^qZ \in \mathcal{K}(\prod_{i=1}^{T} E_i', H)$ *est une mesure aléatoire tel que* $^qZ_p(d\lambda)e' =^q Z(d\lambda)(0, ..., e', ...0), e' \in E', p = 0, ..., T-1$ *alors pour chaque* $^qZ_p(.) \in \mathcal{K}(E', H)$ *est une mesure aléatoire et* $Z_p(.)$ *est une famille de mesures aléatoires stationnairement corrélées.*

Preuve :
On a $Z \in \mathcal{K}(H, \prod_{i=0}^{T-1} E_i)$ alors $^qZ \in \mathcal{K}(\prod_{i=1}^{T} E_i', H)$ et $^qZ_p(.) \in \mathcal{K}(E', H)$,$^qZ_p(A)e' =^q Z(A)(0, ..., e', ...0)$.
Etant donnée que Z est une mesure aléatoire opératorielle alors pour tout (e', f', A, B) de $E' \times E' \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned} ((0, ..., f', ..., 0), Z(A) \circ^q Z(B)) &= <^q Z(B)(0, ...e', ...0),^q Z(A)(0, ..., f', ..., 0) > \\ &= <^q Z_p(B)e',^q Z_p(A)f' > \\ (f', Z_p(A) \circ^q Z_p(B)e') = 0 & \end{aligned}$$

alors $Z_p(.)$ mesure aléatoire et $^qZ_p(.)$ est stationnairement corrélées.

Théorème 4.2.1. *Soit* $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{K}(H, E)$ *une série périodiquement corrélée alors pour* $^qK_n \in \mathcal{K}(E', H)$ *on a*

$$^qK_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} {}^qA_{n,p}$$

et

$$K_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} A_{n,p}$$

où pour chaque p, $A_{n,p} \in \mathcal{K}(H, E)$ *est une série stationnaire.*

Preuve :
Soit la série stationnaire $A_n \in \mathcal{K}(H, \prod_{i=1}^{T} E_i)$ alors $^qA_n \in \mathcal{K}(\prod_{i=1}^{T} E_i', H)$
Soit la série $(A_{n,p}) \in \mathcal{K}(H, E)$ alors $^qA_{n,p} \in \mathcal{K}(E', H)$ définit par :

$$^qA_{n,p}(e') =^q A_n(0, ..., e', ..., 0)$$

On a

$$\begin{aligned}
(f', A_{n,p} \circ^q A_{m,p} e')_{E',E} &= <^q A_{m,p} e',^q A_{n,p} f' > \\
&= <^q A_m(0, ..., e', ...0),^q A_n(0, ..., f', ...0) > \\
&= ((0, ..., f', ...0), A_n \circ^q A_m(0, ..., e', ...0))_{E',E} \\
&= ((0, ..., f', ...0), A_{(n-m)} \circ^q A_0(0, ..., e', ...0))_{E',E} \\
&= <^q A_0(0, ..., e', ...0),^q A_{(n-m)}(0, ..., f', ...0) > \\
&= <^q A_{0,p} e',^q A_{(n-m),p} f' >= (f', A_{(n-m),p} \circ^q A_{0,p} e')_{E',E}
\end{aligned} .$$

Alors $A_{n,p}$ est une série stationnaire et on peut introduire la définition suivante :

Définition 4.2.2. *La série stationnaire $A_n \in \mathcal{K}(H, \prod_{i=1}^T E_i)$ admet la représentation spectrale suivante : $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} W(d\lambda)$ avec*

$$\mathbf{W}(\frac{1}{T} d\lambda) = D^{-1} \Gamma(\frac{-\lambda}{T}) \mathbf{Z}(d\lambda) \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ . \\ . \\ . \\ W_{T-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ . \\ Z_{T-1} \end{pmatrix}$$

Preuve :
Comme $(K_n)_n$ une série périodiquement corrélée dans $\mathcal{K}(H, E)$, alors

$$K_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} A_{n,p}$$

$A_{n,p}$ une série stationnaire

$$K_{nT+p} = \sum_{j=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi j(nT+p)}{T}} A_{nT+p,j} = \sum_{j=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi j(nT+p)}{T}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-i(nT+p)\lambda} W_j(d\lambda)$$

$$= \sum_{j=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi jp}{T}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-inT\lambda - i\lambda p} W_j(d\lambda) = \sum_{j=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi jp}{T}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda - i\frac{\lambda p}{T}} W_j(\frac{1}{T}d\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} \sum_{j=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi jp}{T} - ip\frac{\lambda}{T}} W_j(\frac{1}{T}d\lambda)..........(1)$$

D'autre part on a pour tout $e' \in E'$ ${}^qK_{nT+p}(e') = S_n(0, ..., e', ..., 0)$ alors

$${}^qK_{nT+p} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda q} Z_p(d\lambda)$$

de plus $K_{nT+p} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z_p(d\lambda) \quad (2)$
De (1) et (2) :

$$Z_p(d\lambda) = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi jp}{T} - ip\frac{\lambda}{T}} W_p(\frac{1}{T}d\lambda)$$

alors $\mathbf{Z}(d\lambda) = D\Gamma(\frac{\lambda}{T})\mathbf{W}(\frac{1}{T}d\lambda)$ et alors $\mathbf{W}(\frac{1}{T}d\lambda) = D^{-1}\Gamma(\frac{-\lambda}{T})\mathbf{Z}(d\lambda)$ tel que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . \; . \; . & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{T}} & e^{-i(2)\frac{2\pi}{T}} & . \; . \; . & e^{-i(T-1)\frac{2\pi}{T}} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ 1 & e^{-i(T-1)\frac{2\pi}{T}} & e^{-i(2)(T-1)\frac{2\pi}{T}} & . \; . \; . & e^{-i(T-1)^2\frac{2\pi}{T}} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\frac{\lambda}{T}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & e_{-i\frac{\lambda}{T}} & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & e^{-i(T-1)\frac{\lambda}{T}} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.2.2. *Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série périodiquement corrélée dans $\mathcal{K}(H,E)$. alors il* *existe une unique mesure aléatoire opératorielle Z tel que*

$$K_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z(d\lambda)$$

preuve :
Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{K}(H, E)$ une série périodiquement corrélée alors

$$K_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} A_{n,p} = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} \int_0^{\frac{2\pi}{T}} e^{-in\lambda} W_p(d\lambda)$$

$$= \sum_{p=0}^{T-1} \int_{\frac{\pi}{T}(2p-1)}^{\frac{\pi}{T}(2p+1)} e^{-in\lambda} W_p(d\lambda - \frac{2\pi p}{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z(d\lambda)$$

avec $W_p(d\lambda - \frac{2\pi p}{T}) = E_p(d\lambda)$ et $Z(A) = \sum_{p=0}^{T-1} E(A \cap [\frac{\pi}{T}(2p-1), \frac{\pi}{T}(2p+1)]$.

4.2.2 Série périodiquement corrélée d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$

Soit maintenant une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$.

Définition 4.2.3. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ est dite périodiquement corrélée de période T lorsque, pour tout e' de E' , $(e' \circ X_n)$ est une série périodiquement corrélée de période T.*

On peut donner la définition suivante

Définition 4.2.4. *Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_E(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est périodiquement corrélée de période T lorsque, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$, on a $\widetilde{X}_n \circ^q \widetilde{X}_m = \widetilde{X}_{n+T} \circ^q \widetilde{X}_{m+T}$ pour un $T > 0$.*

Ainsi, une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de $L^2_E(\mathcal{A})$ est périodiquement corrélée de période T lorsque la série $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'élément de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}, E)$ est périodiquement corrélée de période T.

Théorème 4.2.3. *Soit $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série périodiquement corrélée dans $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$. alors il existe une unique mesure aléatoire $\widetilde{Z}$ tel que*

$$\widetilde{X}_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} \widetilde{Z}(d\lambda)\,.$$

En particulier

Théorème 4.2.4. *Soit* $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$ *une série périodiquement corrélée alors on a*

$$^q\widetilde{X}_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} {}^q\widetilde{A}_{n,p}$$

de plus

$$\widetilde{X}_n = \sum_{p=0}^{T-1} e^{-i\frac{2\pi pn}{T}} \widetilde{A}_{n,p}$$

Où pour chaque p, $\widetilde{A}_{n,p} \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$ *est une série stationnaire*

Alors on peut enoncer le théorème suivant

Théorème 4.2.5. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une série périodiquement corrélée de périod* T *d'éléments de* $L^2(\mathcal{A})$ *telle que* $\widetilde{X_0}$ *se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors il existe une unique mesure aléatoire banachique* Z *tel que*

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} Z(d\lambda)\,.$$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Dans cette thèse, on a développé une approche originale sur la décomposition canonique d'un élément aléatoire à valeurs dans un espace de Banach et la décomposition spectrale d'une série périodiquement corrélée à valeurs dans un espace de Banach. On arrive à construire un algorithme de décomposition d'un élément aléatoire banachique de norme carrée intégrable du type Kharhunen-Loève. et d'exploiter la structure des séries périodiquement corrélés (P.C.) banachique par le biais des mesures aléatoires banachiques. L'extension à des espaces d'opérateurs permet de considérer la richesse de cette approche. On montre ainsi que cette classe des processus induit l'existence d'une famille de projecteurs qui commutent entre eux au même titre que la décomposition spectrale des séries stationnaire hilbertiennes et d'avoir la représentation d'une série périodiquement corrélées commetranforméde Fourier d'une mesure aléatoire par stationnarisation et sous certains conditions.

5.2 Perspectives

Il est à noter que l'originalité de ce sujet offre de nombreuses perspectives, nous exposons dans ce qui suit, quelques développements futurs possibles qui se situent dans la continuité de ce travail effectué dans le cadre de cette thèse. D'un point de vue théorique, l'analyse spectrale des processus stationnaires banachique permet d'envisager les points suivants :

– La première perspective est d'envisager d'étudier les processus périodiquement corrélés banachique à temps continu (Makagon et al (2007)), et les champs aléatoires périodiquements corrélés (cf Hurd et al (2004))

- On peut également étudier le problème d'interpolation et d'extrapolation des processus continus presque sûrement à trajectoires continus, en utilisant la mesure aléatoire banachique associe à la série périodiquement corrélés banachique $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (cf. Boudou (2003)).
- Le problème de prévision d'un processus continu presque sûrement à trajectoires continus peut être étudier en utilisant la méthode de prévision d'un $e.a.b.$, étudier dans Chobanyan et al (1975).
- D'autre thèmes méritent d'être abordés, tels les problèmes relatifs à l'analyse et à l'estimation spectrale de processus cyclostationnaires banachique (Brillinger, 1991 ; Rachdi, 1998 ; Rachdi et Monsan, 1998, 1999, Nematollahi et Rao (2005), Dehay (1992,1993), Dehay et Hurd (1994)).

Bibliographie

[1] T. W. Anderson, it The Statistical Analyis of Time Series, Wiley and Sons, (1971).

[2] N. I. Akheizer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Fredrick Unger, (1961) and Dover, New York, (1993).

[3] R. Azencott, D. Dacunha-Castelle, *Séries d'observations irrégulières. Modélisation et prévision*. (Techniques stochastiques, Masson, Paris, 1984).

[4] C.R. Baker and IW. McKeague, *Compact covariance operators*, Proceeding of the American Mathematical Society, **83** (3), (1981), 590-593.

[5] X. Bay, JC. Croix, *Karhunen-Loève decomposition of Gaussian measures on Banach spaces*, https ://hal-emse.ccsd.cnrs.fr/emse-01501998, (2017).

[6] T. Benchikh, K. Mankour. *Canonical development of second order Banach-valued random elemen*, International Journal of Statistics and Economics ; IJSE, Year 2018, Vol.19, Issue1.

[7] Benchikh T. *Spectral representation of Banach-valued stationary random function on locally compact Abelian group*, Georgian Math. J., doi 10.1515/gmj-2014-0023, 21 (2), p. 139-145.

[8] T. Benchikh, A. Boudou, Y. Romain, *Mesures aléatoires opératorielles et banachique. Application aux séries stationnaires*. C.R.A.Sc. Paris, Ser. I, 345, (2007), 345-348.

[9] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des Fonctions aléatoires*, Masson et Cie., Paris, (1980).

[10] D. Brillinger, *Time Series Analysis and Theory*. (Society for Industrial Applied mathematics, Philadelphia, 2001).

[11] D.R. Brillinger, *Asymptotic normality of finite Fourier transforms of stationary generalized processes*. J. Mult. Analysis 12 64-71, (1982).

[12] D. Bosq, *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications*. Lecture Notes in Statistics, 149, Springer-Verlag, New York, 2000.

[13] A. Boudou , J. Dauxois , *Principal component analysis for a stationary random function defined on a locally compact abelian group*. J. Multivar. Anal., **51**, (1994), 1-16.

[14] A. Boudou, *Interpolation de processus stationnaire*, C.R.A.Sc. Paris, Ser. I, **336**, Issue 12, (2003), p. 1021-1024.

[15] A. Boudou, Y. Romain, *On the integral with respect to the tensor product of two random measures*. J. Multivar. Anal., **101**, no. 2, (2010), p. 385-394.

[16] A. Boudou, Y. Romain, *On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes*. Statistics and Probability Letters, **59**, (2002), p. 145-157.

[17] S. Chevet, S.A. Chobanyan, L. Werner, Tarieladze V.I., *Caractéristiques de certaines classes d'espaces de Banach par des mesures gaussiennes*. C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 285, 793-796, (1979).

[18] S.A. Chobanyan, V.I., *Gaussian characterizations of certain Banach spaces*. J. Multivar. Ana., 7, 183-203, (1977).

[19] S.A. Chobanjan, A. Weron, *Existence of the linear prediction for Banach space-valued gaussian processes*. J. Multivar. Anal., 11, 69-80, (1981).

[20] S.A. Chobanjan, A. Weron, *Banach space-valued stationary processes and their linear prediction. Dissertationes Math. 125, 1-45, (1975).*

[21] H. Cramér, On harmonic analysis in certain functional spaces. Ark. Mat. Astr. Fys, 28B (12), (1942).

[22] J.L. Doob, Stochastic Processes John Wiley and Sons, Inc., New York, (1953).

[23] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear operator I, Wiley, New York, (1991).

[24] D. Dehay, Estimation de paramètres fonctionnels spectraux de certains processus non-nécessairement stationnaires. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (4) 313-316, (1992).

[25] D. Dehay, Spectral analysis of the covariance of the almost periodically correlated processes. Stochastic Process. Appl. 50 (2), 315-330, (1994).

[26] D. Dehay, H.L. Hurd, Representation and estimation for periodically and almost periodically corrlaled random processes, in : Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, W.A. Gardner (Ed.). IEEE Press, New York, (1993).

[27] *D. Dehay, H.L. Hurd Spectral estimation for strongly periodically correlated random fields defined on R^2. Math. Methods Statist. 11 (2) 135-151, (2002).*

[28] *D. Dehay, V. Monsan, V. Random sampling estimation for almost periodically correlated processes. J. Time Ser. Anal. 17 (5) 425-445, (1996).*

[29] *D. Dehay, V. Monsan, Discrete periodic sampling with jitter and almost periodically correlated processes . Stat. Inference Stoch. Process. 10 (3) 223-253, (2007).*

[30] *H. El-Mâache, Introduction à l'analyse en composantes principales d'un élément aléatoire dans un espace de Banach. Application à l'étude d'un processus aléatoire., Thèse de doctorat 3^e cycle. Paris VI. (1983), France.*

[31] *F. Ferraty, P. Vieu, Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice. Springer-Verlag, (2006).*

[32] *W. A. Gardner and L. E. Franks, Characterization of cyclostationary random signal processes, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-21, pp. 4-14, (1975).*

[33] *W. A. Gardner, Introduction to Random Processes with Application to Signals and Systems, Macmillan, New York, (1985).*

[34] *W. A. Gardner, Statistical Spectral Analysis : A Nonprobabilistic Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1987).*

[35] *W.A. Gardner, Correlation estimation and time-series modeling for nonstationary processes. Signal Processing 15 (1) 31-41, (1988).*

[36] *W.A. Gardner, Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. IEEE Signal Processing Magazine, 8, 14-36, (1991).*

[37] *W. A. Gardner, An introduction to cyclostationary signals, in Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, W. A. Gardner, Ed., IEEE Press, New York, (1994).*

[38] *U. Grenander, Abstract inference. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York. ix+526 pp, (1981).*

[39] *U. Grenander, M. Rosenblatt, (1957) Statistical Analysis of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1957).*

[40] *E.G Gladyshev, Periodically correlated random sequences. Sov. Math.,* **2***, 385-388, (1961).*

[41] *L. J. Herbst, Almost periodic variances. Ann. Math. Stat., 34, 1549-1557 ; (1963).*

[42] *L. J. Herbst ; A test for variance heterogeneity in the residuals of a Gaussian moving average, J . R . Stat. Soc. B, 25, 451-454, 1(963).*

[43] *L. J . Herbst ; Spectral analysis in the presence of variance fluctuations. J . R . Stat. Soc. B, 26, 354-360, (1964).*

[44] *L. J. Herbst, Fourier methods in the study of variance fluctuations in time series analysis, Technometrics, 11, 103-113, (1969).*

[45] *H.L. Hurd, An investigation of periodically correlated stochastic processes, Ph.D. Dissertation, Duke University, Durham, North Carolina, (1969).*

[46] *H.L. Hurd, Representation of strongly harmonizable periodically corrolated processes and their covariance, J. Multivariate Anal. 29, 53-67, (1989).*

[47] *H. L. Hurd. Nonparametric time series analysis for periodically correlated processes. IEEE Trans. Inf. Theory, IT-35, 350-359. (1989).*

[48] *H. L. Hurd. Correlation theory of almost periodically correlated processes. J . Multivariate Anal., 37, 24-45. (1991).*

[49] *H. L. Hurd and J. Leskow. Estimation of the Fourier coefficient functions and their spectral densities for mixing almost periodically correlated processes, Stat. Prob. Lett., 14, 299-306, (1992).*

[50] *H. L. Hurd and J. Leskow. Strongly consistent and asymptotically normal estimation of the covariance for almost periodically correlated processes. Stat. Decisions. 10, 201-225, (1992).*

[51] *H. L. Hurd, Almost periodically unitary stochastic processes. Stoch. Proc.*

[52] *H. L. Hurd and A. Russek, Almost periodically correlated and almost periodically unitary processes in the sense of Stepanov. Theory Probab. Appl., 41, (1996).*

[53] *H. L. Hurd and A. Russek. Almost periodically correlated processes in LCA groups. Technical Report No. 369, Center for Stochastic Processes, Department of Statistics. UNC at Chapel Hill, (1992).*

[54] *H. L. Hurd and T. Koski, The Wold isomorphism for cyclostationary sequences, Signal Processing, 84, No. 5 : pp. 813-824, 2004.*

[55] *H.L. Hurd, G. Kallianpur, Periodically Correlated and Periodically Unitary Processes and their relationship to $L^2[0,T]$-valued stationary sequences, in : Nonstationary Stochastic Processes and their Application, J.C. Hardin, A.G. Miamee (Eds.). Word Scientific Publishing Co., Singapore, (1992).*

[56] H.L. Hurd, G. Kallianpur and J. Farshidi, Correlation and spectral theory for periodically correlated random fields indexed on Z^2, J . Multivariate Anal. 90, 2, 359-383, (2004)

[57] H.L. Hurd, Periodically correlated sequences of less than full rank, J .Stat. Planning Inference, 129, 279-303, (2005).

[58] H.L. Hurd, A. Miamee, Periodically Correlated Random Sequences. Wiley, (2007).

[59] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert space, Chelsea Publishing Company. New York, (1957).

[60] G. Kallianpur , V. Mandrekar , Spectral Theory of Stationary H-valued Processes. J. of Multivariate Anal., 1 (1), (1971), p. 1-16.

[61] A.N. Kolmogorov, Curves in Hilbert space which are invariant with respect to a one-parameter group of motions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 26 (6), (1940).

[62] A. Kolmogorov, Stationary sequences in hilbert space, (in Russian), Bull. Math. Univ. Moscow, 2, 1941.

[63] A. Kolmogorov and Y. Rozanov, On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes, Theory Probab. Appl., 5 , pp. 204-208, (1960).

[64] M. Ledoux, M. Talagrand, Probability in Banach spaces, Springer-Verlag, (1991).

[65] M. Loève, Procesus Stochastiques et Mouvement Brownien, Herman : Paris, France, (1948).

[66] A. Makagon and H. Salehi, Structure of periodically distributed stochastic sequences, in Stochastic Processes, A Festschmft in Honour of Gopinath Kallianpur. Springer-Verlag, 245-251, (1993).

[67] A. Makagon, A. G. Miamee and H. Salehi, Continuous time periodically correlated processes : spectrum and prediction, Stoch. Proc. Appl., 49, 277-295, (1994).

[68] A. Makagon, Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes, Studia Math., 136, 71-85, (1999).

[69] A. Makagon, A. G. Miamee and H. L. Hurd, On AR(1) models with periodic and almost periodic coefficients, Stoch. Proc. Appl., 100, 167-185, (2002).

[70] A. Makagon, A.G. Miamee, H. Salehi, A.R. Soltani, On spectral domain of periodically correlated processes, Theory Probab. Appl. 52, 1-12, (2007).

[71] P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes II,Acta. Math., 104,141-162, (1960).

[72] P. Masani, Orthogonally scattered measures, advances in Math, 2, 61-117, (1968).

[73] E. Masry, Alias-free sampling : An alternative conceptualization and its applications, IEEE Transactions on Information Theory, 124, (1978).

[74] E. Masry and S. Cambanis, On the reconstruction of the covariance of stationary gaussian processes observed through zero-memory nonlinearities-part ii (corresp.), Information Theory, IEEE Transactions on, 26, 503-507, (1980).

[75] E. Masry and S. Cambanis, Spectral density estimation for stationary stable processes, Stochastic processes and their applications, 18, 1-31, (1984).

[76] A. G. Miamee and H. Salehi, On the prediction of periodically correlated stochastic processes, Multivariate Analysis. P.R. Krishnaiah, Ed., 167-179, North-Holland. Amsterdam, (l980).

[77] A. G. Miamee, Periodically correlated processes and their stationary dilations, SIAM J . Appl. Math.. 50, 1194-1199. (1990).

[78] A.G. Miamee, A.R. Soltani, On spectral analysis of periodically correlated stochastic processes, Tech. Report, Hampton University, Virginia, (1995).

[79] A.R. Nematollahi, A.R. Soltani, Discrete time periodically correlated Markov processes, Probab. Math. Statist, 20, 1-14, (2000).

[80] A. R. Nematollahi and T. Subba Rao. On The spectral density estimation of periodically correlated (cyclostationary) time series, Sankhya, 67. Part 3, 568-589, (2005).

[81] R. Payen, Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert, Ann. Inst H. Poincaré. section B, **3**, **No 4**, *(1967), p. 323-396.*

[82] E. Parzen, On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series, The Annals of Mathematical Statistics, 28, 329-348, (1957).

[83] E. Parzen, On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 20, No. 2 303-322, (1958).

[84] M. Pourahmadi, H. Salehi, On subordination and linear transformation of harmonizable and periodically correlated processes, Probability Theory on Vector Spaces III, Springer-Verlag, Berlin, 195-213, (1983).

[85] M. B. Priestley, Spectral analysis and time series, Academic Press New York, (1981).

[86] M. Rachdi, Estimation de la densité de la mesure spectrale mixte pour un processus p-adique stationnaire. Ann. I.S.U.P., 42 (2-3) 75-91, (1998).

[87] J. Ramsay, B. Silverman, Applied functional data analysis : Methods and case studies, Spinger-Verlag, New York, (2002).

[88] J. Ramsay, B. Silverman, Functional Data Analysis, (Second Edition), Spinger-Verlag, New York,(2005).

[89] M. M. Rao, Harmonizable processes : Structure theory, L'enseignement Mathématiques (Essays in Honor of prof. S. Bochner), 28, 295-351, (1982).

[90] M. M. Rao, Measure Theory and Integration, John Wiley and Sons, (1987).

[91] Riesz F., Nagy B. Sz., Functional Analysis, New York ,Dover Publications, 1990.

[92] M. Rosenberg, Operators as spectral integrals of operator-valued functions from the study of multivariate stationary stochastic processes, J. Multivariate Anal. 4 166-209, (1975).

[93] M. Rosenblatt, Remarks on some nonparametric estimates of a density function, The Annals of Mathematical Statistics, 27, 832-837, (1956).

[94] Y.A. Rozanov, Spectral theory of multi-dimensional stationary random processes with discrete time, Usp. Mat. Nauk, 13, No. 2, pp. 93-142, (1958).

[95] Y.A. Rozanov, Spectral analysis of abstract functions, Theory Probab.Appl., 4, 271-287, (1959).

[96] Y. A. Rozanov, Stationary Random Processes, Holden Day, San Francisco, (1967).

[97] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Wiley, Hoboken, NJ, (1990).

[98] A.R. Soltani, Z. Shishebor, On infinite dimensional discrete time dependent periodically correlated processes, Rocky Mountain. J. Math. 37, 1043-1058, (2007)

[99] A.R. Soltani, Z.A. Shishebor, A spectral representation for weakly periodic sequences of bounded linear transformations. Acta Math Hungari, 80, 265-70, (1998).

[100] Z. Shishebor Z, A.R. Soltani, A. Zamani, Asymptotic distribution for periodograms of infinite dimensional discrete time periodically correlated processes. J Multivariate Anal ; 102, 1118-25, (2011).

[101] A.R. Soltani, Z. Shishebor, A. Zamani. Inference on periodograms of infinite dimensional discrete time periodically correlated processes. J Multivariate Anal ; 101, 368-73, (2010).

[102] Z. Shishebor Z, A.R. Soltani, Weakly periodic sequences of bounded linear transformations : A spectral characterization, Georgian Math. J. 6, 91-95, (1999).

[103] I. Singer, Bases in Banach Spaces I, (Springer-Verlag, Berlin, 1970).

[104] V.I. Tarieladze, On nuclear covariance operators, Lecture Notes in Mathematics : Probability Theory on Vector Spaces II, **828** *(1980), 283-285.*

[105] N.N. Vakhania, V.I. Tarieladze, A. Chobanyan, Probability distributions on Banach spaces, Reidel, Dordrecht, (1987).

[106] N.N. Vakhania, Canonical factorization of gaussian covariance operators and some of its applications, Theory Probab. Appl., **38***(3), (1993), 498-505.*

[107] Vakhaniya, N.N. ; Chobanyan, S.A., On the problem of best approximation in a space of vector-valued functions. Math., Dokl. 25, (1982), 565-568.

[108] A. Weron, On weak second order Gaussian Random elements, Lecture Notes in Mathematics : Probability in Banach Spaces, **526***, (1976), 263-272.*

[109] N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta Math., 55, 117-258, (1930).

[110] A.M. Yaglom , An introduction to the theory of stationary random function, (Dover edition, 1987).