République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

THÈSE

En vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès (S.B.A.), Algérie

Spécialité : Mathématiques

Option : Calcul Stochastique - Statistiques et Applications

---

présentée et soutenue par

TAHRAOUI Fatima Zohra

15 mai 2018

sous le titre :

Problème de consommation optimale avec investissement

Devant le jury composé de :

Abdelkader GHERIBALLAH	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Président
Mohamed Kadi ATTOUCH	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Rapporteur
Toufik GUENDOUZI	Univ. Saida	Rapporteur
Abdeljabar KANDOUCI	Univ. Saida	Rapporteur
Feth Allah TEBOUNE	Univ. Saida	Rapporteur
Faiza LIMAM-BELARBI	Univ. Djillali Liabès, S.B.A. (Algérie)	Directeur de thèse

Remerciements

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à ma directrice de thèse **Prof. LIMAM-BELARBI Faiza** pour l'intérêt soutenu qu'elle a manifesté à l'égard de ce travail. Ce travail n'aurait pu aboutir sans inconditionnelle disponibilité.

Je tiens également à remercier le Professeur **GHERIBALLAH Abdelkader** pour l'honneur qu'il ma fait en présidant le jury de cette thèse.
Mes remerciements vont aussi aux professeurs **ATTOUCH Mohammed Kadi**, **GUENDOUZI Toufik**, **KANDOUCI Abdeljabar** et **TEBOUNE Feth Allah** qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury.

Je remercie aussi les membres du Laboratoire de Statistique et Processus Stochastique de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès où j'ai toujours trouvé soutien et encouragements.

Merci à tous ceux qui, à Sidi Bel-Abbès ou ailleurs, ont bien voulu m'écouter et m'aider à progresser.

Dédicaces

A **mes très chers parents** pour leur soutien, leurs encouragements et leurs sacrés sacrifices.

A mes chères soeurs **Asma** et **Zineb** et mon cher frère **Abdelrahmene** pour leurs encouragements permanents, et leur soutien continu.

Aux familles **TAHRAOUI** et **BENYAKOUB**.

A ceux avec qui j'ai passé les meilleurs moments de ma vie.

Table des matières

Introduction

En 1973, Fischer Black et Myron Scholes publient un article révolutionnaire intitulé "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"[9]. De nos jours, il reste l'un des articles scientifiques le plus largement cité dans le monde. En effet, en établissant la première formule universelle permettant de calculer le prix d'une option, Black et Scholes donnent naissance à une nouvelle théorie : le pricing de produits financiers.
Même s'il est souvent oublié dans la littérature, la formule de Black et Scholes doit beaucoup au mathématicien Merton qui développa par la suite une théorie parallèle dont l'importance et l'intérêt et ne cessent de croitre : la théorie du portefeuille. Celle-ci vise à définir, pour un agent s'étant donné une fonction d'utilité, la stratégie optimale d'investissement dans un ou plusieurs actifs risqués et dans un actif non risqué.

L'une des principales questions des mathématiques financières est le problème optimal consommation/investissement pour les modèles d'un marché en temps continu.
En appliquant les résultats de la théorie du controle stochastique, des solutions explicites ont été obtenues pour certains cas particuliers comme dans Karatzas [16] et Korn [18].

Dans ce travail, nous étudions un problème de consommation et d'investissement optimal pour le marché financier de type Black-Scholes sur l'intervalle d'investissement total $[0, T]$. En choisissant une fonction d'utilité particulière et en utilisant la méthode de dual convexe, nous formulons un problème de maximisation de l'utilité, qui peut être résolu explicitement. Nous étudions également le dual convexe de la fonction de valeur pour notre problème.
Notre thése comporte trois chapitres et est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, on introduit les principales notions de calcul stochastique qui sont utilisées le long de ce travail, en particulier, le Mouvement Brownien, les martingales et le calcul d'Itô par la construction de l'intégrale stochastique. Les équations différentielles stochastiques sont aussi évoquées dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des marchés financiers.

Dans le chapitre trois, nous étudions le problème optimal consommation / investissement pour les fonctions d'utilité exponentielles sur $[0, T]$.
En utilisant la méthode dite martingale de dualité, nous trouvons les solutions optimales sous forme explicite.

Chapitre 1

Calcul stochastique

1.1 Processus stochastiques

1.1.1 Filtration et processus

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.
Processus stochastique, fonction aléatoire ou signal aléatoire en sont des synonymes.
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par $\mathbb{T}$ l'ensemble des temps. On appelle processus aléatoire toute application de $\mathbb{T} \times \Omega$ dans E

$$(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in E$$

En général, on note X ou $(X_t, t \in \mathbb{T})$ cette application.
$\mathbb{T}$ sera $\mathbb{R}^+$ ou un intervalle borné $[0, T]$ ou $[t_1, t_2]$.
E est l'espace des états du processus égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ et muni de la tribu ξ égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), d > 1$.
On supposera toujours que la fonction $\omega \longrightarrow X_t(\omega)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ de sorte que X_t soit une variable aléatoire à valeurs $\mathbb{R}^d$.
Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante (au sens large) de sous-tribus de $\mathcal{F}(i.e. s < t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t)$. On appelle espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. La tribu $\mathcal{F}_t$ est appelée tribu des événements antérieurs au temps t.

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dite continue à droite si $\forall t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

A toute filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, on peut associer la filtration continue à droite notée $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est complète (pour $\mathbb{P}$) si $\mathcal{F}$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ (pour $\mathbb{P}$). Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on lui associe sa filtration complétée (pour $\mathbb{P}$) : $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en ajoutant à chaque $\mathcal{F}_t$ les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. On suppose en général que $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est complète sinon on lui associe sa complétée $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ pour $\mathbb{P}$.

Définition 1.1.1 *on appelle processus stochastique à temps continu une collection de variables aléatoires* $(X_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
L'observation d'un processus stochastique revient à fixer un ω *dans* Ω.
On appelle trajectoire la fonction de $\mathbb{T}$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *obtenue en fixant* ω *dans* Ω

$$t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d.$$

La valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}$ *d'un processus* X *est la fonction de* Ω *dans* $\mathbb{R}^d$ *obtenue en fixant* t *dans* $\mathbb{T}$

$$\omega \in \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d.$$

On notera X_t la valeur du processus à l'instant t, qui pour des raisons techniques évidentes sera toujours supposée être une v.a., c.à.d une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
Toujours pour des raisons techniques, il est commode de supposer une mesurabilité jointe quand on considère un processus comme fonction des deux variables (t, ω).

Définition 1.1.2 *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans* (E, ξ). *La filtration naturelle* $(\mathcal{F}_0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *associée à* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est définie par :*

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Définition 1.1.3 *Un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est dit mesurable si l'application*

$$(t, \omega) \in (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}) \to X_t(\omega) \in (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

est mesurable.

Définition 1.1.4 *La loi temporelle d'un processus aléatoire X est définie par la donnée de ses distributions fini-dimensionnelles, c'est à dire la donnée des lois de probabilités de tous les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ pour tout $k \geq 1$ et $t_1 < ... < t_k$ dans $\mathbb{T}$.*

Définition 1.1.5 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Tout processus stochastique est trivialement adaptée à sa filtration naturelle.*
Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptée si pour tout $t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$. Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est complète pour $\mathbb{P}$, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté et si $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une modification de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, alors $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi adapté.

1.1.2 Mouvement Brownien

Historique :

- 1828 : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.

- 1877 : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction).

- 1900 : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens. (Problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif).

- 1905 : Einstein détermine la densité du Mouvement Brownien et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.

- 1923 : Etude rigoureuse du Mouvement Brownien par Wiener, entre autre, démonstration de l'existence.

Un Mouvement Brownien est généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition 1.1.6 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un $\mathcal{F}$-Mouvement Brownien (standard) est un processus W vérifiant :*

(i) W est $\mathcal{F}$-adapté,
(ii) $W_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s$,
(iii) W est continu, i.e. $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,
(iv) W est à accroissements indépendants : $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$,
(v) W est à accroissements stationnaires et gaussiens : $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Définition 1.1.7 *(Mouvement Brownien par rapport à une filtration)*
Un Mouvement Brownien vectoriel (d-dimensionnel) sur $\mathbb{T} = [0, T]$ ou $\mathbb{R}_+$ par rapport à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus continu $\mathbb{F}$-adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(W_t)_{t\in\mathbb{T}} = (W_t^1, ..., W_t^d)_{t\in\mathbb{T}}$ tel que
(i) $W_0 = 0$,
(ii) Pour tous $0 \leq s < t$ dans $\mathbb{T}$, l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et suit une loi gaussienne cenrée de matrice de variance-covariance $(t - s)I_d$ où I_d est la matrice identité $d \times d$.

Bien entendu, un Mouvement Brownien standard est un Mouvement Brownien par rapport à sa filtration naturelle.
Un problème majeur est celui de l'existence et de la construction et la simulation d'un Mouvement Brownien, pour ce problème nous renvoyons aux nombreux livres traitant du sujet (par exemple Hida [14], Karatzas et Shreve [15], Le Gall [21] ou

Revuz et Yor [28]).

Nous énonçons seulement une propriété classique du Mouvement Brownien.

Proposition 1.1.1 *Soit* $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est un Mouvement Brownien par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$

(1) Symétrie : $(-W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est aussi un Mouvement Brownien.*

(2) Echelle : Pour tout $\lambda > 0$*, le processus* $((1/\lambda)W_{\lambda^2 t})_{t\in\mathbb{T}}$ *est aussi un Mouvement Brownien.*

(3) Invariance par translation : Pour tout $s > 0$*, le processus* $(W_{t+s} - W_s)_{t\in\mathbb{T}}$ *est un Mouvement Brownien standard indépendant de* $\mathcal{F}_s$*.*

1.1.3 Martingale, semimartingales

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si

(i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptée,

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable,

(iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s \geq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(-X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale c'est à dire si

(i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptée,

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable,

(iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale et une sous-martingale c'est à dire si

(i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptée,

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable,

(iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque 1.1.1 *(a) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale, la fonction $t \to \mathbb{E}(X_t)$ est décroissante (au sens large).*

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale, la fonction $t \to \mathbb{E}(X_t)$ est croissante (au sens large).

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale, la fonction $t \to \mathbb{E}(X_t)$ est constante :

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale (resp : une sous-martingale) et si la fonction $t \to \mathbb{E}(X_t)$ est constante alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale.

Un processus stochastique d-dimensionnel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-processus à accroissements indépendants (P.A.I)si

(i) X_0, $\mathbb{P}$-p.s.,

(ii) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$- adapté,

(iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Un processus stochastique d-dimensionnel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-processus à accroissements indépendants stationnaires(P.A.I.S). si c'est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I. et si

$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, la v.a. $X_t - X_s$ a même loi que X_{t-s}.

Théorème 1.1.1 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I. réel et si, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable et centrée, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-martingale.*

Démonstration :

Si $s \leq t$ avec $s, t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) = \mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_s) = 0, \mathbb{P} - p.s.$$

Or

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s, \mathbb{P} - p.s.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \mathbb{P} - p.s.$$

On déduit facilement de ce théorème le résultat suivant :

Corollaire 1.1.1 *Si $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mais aussi pour la filtration naturelle complétée $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$*

Proposition 1.1.2 *Si $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors $(W_t^2-1)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale pour la filtration naturelle complétée de $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*
Pour tout $\alpha \neq 0$, $(\exp(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi une martingale pour la filtration naturelle complétée $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Théorème 1.1.2 (Inégalités de Doob) *(a) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale continue à droite relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, alors pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$,*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|)}{c}.$$

(b) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X_t \in \mathrm{L}^p$, avec $p > 1$ fixé, alors pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|^p)}{c^p}.$$

(c) Sous les hypothèses du b), on obtient que : $\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \in \mathrm{L}^p$ et

$$\| \sup_{s\in[0,t]} |X_s| \|_p \leq C \|X_t\|_p,$$

où $C = p/(p-1)$, exposant conjugué de p.

1.1.4 Temps d'arrêt

Ayant à l'ésprit l'interprétation de $\mathcal{F}_t$ comme l'information connue jusqu'à la date t, on s'intéresse à savoir si un évènement donné, caractérisé par sa première date $\tau(\omega)$ d'apparition, a eu lieu ou non avant la date t sachant l'observation de l'information $\mathcal{F}_t$. Ceci conduit à la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.8 *1) Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$, i.e. un temps aléatoire, est appelée temps d'arrêt (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$) si pour* *tout* $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2) Un temps d'arrêt τ *est dit prévisible s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *telle que l'on ait p.s. :*
(i) $\lim_n \tau_n = \tau$,
(ii) $\tau_n < \tau$ *pour tout* n *sur* $\{\tau > 0\}$.
On dit alors que $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *annonce* τ .

On vérifie aisément avec la définition que tout temps aléatoire égal à une constante positive t est un temps d'arrêt. On note aussi que si τ et σ sont deux temps d'arrêt alors $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma$ et $\tau + \sigma$ sont des temps d'arrêt. Etant donné un temps d'arrêt τ , on mesure l'information accumulée jusqu'en τ par

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F}_{t\in \mathbb{R}^+} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}^+\},$$

qui est une tribu de $\mathcal{F}$.
Il est clair que τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. On a aussi immédiatement que si $\tau = t$, alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.
On énonce maintenant quelques autres propriétés élémentaires et utiles pour la suite sur les temps d'arrêt (voir par exemple les preuves dans le chap I, sec. 1.2 de Karatzas et Shreve [15]).

Proposition 1.1.3 *Soient* σ *et* τ *des temps d'arrêt et* ξ *une variable aléatoire.*
(1) Pour tout $B \in \mathcal{F}_\sigma$, *on a* $B \cap \{\sigma \leq \tau\}$. *En particulier, si* $\sigma \leq \tau$ *alors*

$$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau.$$

(2) Les évènements suivants

$$\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma = \tau\}$$

appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.
(3) ξ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable si et seulement si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+, \xi 1_{\tau\leq t}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
Etant donné un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *et un temps d'arrêt* τ, *on définit la variable*

aléatoire X_τ *sur* $\{\tau \in \mathbb{R}^+\}$ *par :*

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

On vérifie que si X *est mesurable, alors* X_τ *est une variable aléatoire sur* $\{\tau \in \mathbb{R}^+\}$*. On introduit alors le processus arrété (en* τ*)* X^τ *défini par :*

$$X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Proposition 1.1.4 *Soit* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ *un processus progressif et* τ *un temps d'arrêt. Alors* $X_\tau 1_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable et le processus arrété* X^τ *est progressif.*

Proposition 1.1.5 *Soit* X *une processus càdlàg adapté et* Γ *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^d$*.*

(1) Si la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ *satisfait les conditions habituelles, alors le temps d'atteinte de* Γ *défini par :*

$$\sigma_\Gamma = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$*) est un temps d'arrêt.*

(2) Si X *est continu, alors le temps de sortie de* Γ *défini par :*

$$\tau_\Gamma = \inf\{t \geq 0 : X_t \nsubseteq \Gamma\}$$

est un temps d'arrêt prévisible.

1.2 Intégrale stochastique

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été géné par la non différentiabilité du MB. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au MB, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique et il a fallu donner un sens à $\int_0^t H_s B_s$.

1.2.1 Rappel :Intégrale de Stieljes

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a,b]$. Supposons que f soit à variation finie sur $[a,b]$. Alors f se décompose en $f = g - h$ avec g et h croissantes sur $[a,b]$. Rappelons que si g est croissante, alors g est à variation bornée et pour toute fonction ϕ définie et continue sur $[a,b]$, on peut définir l'intégrale au sens de Stieljes de ϕ par rapport à g de la façon suivante :

$$\int_a^b \phi dg = \lim_{\prod \to 0} \sum_{k=1}^{m} \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

où $\prod$ est la subdivision $x_0, x_1, ..., x_m$ de l'intervalle $[a,b]$ et $|\prod|$ est le pas de $\prod$, i.e.

$$\left|\prod\right| = \max_{k=1,\ldots,m} (x_k - x_{k-1}).$$

On pose alors

$$\int_a^b \phi df = \int_a^b \phi dg - \int_a^b \phi dh.$$

La réciproque est vraie : si pour toute fonction continue ϕ, la limite suivante :

$$\lim_{\prod \to 0} \sum_{k=1}^{m} \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

existe et est finie, alors g est à variation bornée.
Donc, il est impossible de définir l'intégrale stochastique trajectoire par trajectoire pour tout processus continu : si H est un processus stochastique continu, à ω fixé, on ne peut pas donner un sens à l'expression

$$\int_0^t H_s(\omega) dW_s(\omega).$$

Une telle construction a été développée par T. Lyons [33] dans la théorie des rough paths. Mais elle impose des condtions supplémentaires de régularité sur H.

1.2.2 Intégrale par rapport au MB

La construction est dûe à K. Itô (1942-1944) dans le cas du M.B. et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe [19].
On suppose donné un mouvement brownien W avec sa filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définit deux classes de processus :

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ H = (H_t)0 \leq t, \text{ processus adapté, tel que} \, \forall t, \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds < +\infty \right\},$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

Théorème 1.2.1 *(Intégrale d'Itô)*
Il existe une unique application linéaire, notée I, de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{M}_c^2$ telle que pour tout $H \in \mathbb{H}^2$ et tout t,

$$\mathbb{E}\left(I(H)_t^2\right) = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds.$$

On note

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s.$$

Tel que le théorème est énoncé, on peut se demander où intervient vraiment le M.B. dans l'intégrale. Pour comprendre son role, il faut se pencher un peu plus sur la construction. Si le processus H est de la forme :

$$H_t = \Phi_0 1_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t), \tag{1.1}$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < +\infty, \Phi_0$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable et bornée et pour $i = 1, ..., p$, les Φ_i sont $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurables et bornées, on pose

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale stochastique I vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment sur les processus élémentaires. Ensuite on montre la densité des processus de la forme (1.1) dans $\mathbb{H}^2$ et on va prolonger I définie sur les processus élémentaires à la classe $\mathbb{H}^2$. L'unicité signifie que si I et I' sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes, alors $I(H)$ et $I'(H)$ sont indistinguables.

Proposition 1.2.1 *(Propriétés de l'intégrale d'Itô)*
Pour $H \in \mathbb{H}^2$ et $T \in \mathbb{R}^+$,

(1) $I(H)$ est à variation quadratique finie et cette variation sur $[0, T]$ est égale $\int_0^T H_s^2 ds$.

(2)
$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_2 \right|^2\right) \leq 4\mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

Une dernière extension consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H en introduisant

$$\widetilde{\mathbb{H}}^2 = \left\{ H = (H_t)0 \leq t, \text{ processus adapté, tel que} \, \forall t \geq 0, \int_0^t H_s^2 ds < +\infty, \mathbb{P} - p.s \right\}.$$

On peut encore prolonger I sur cet ensemble, mais on n'a plus une martingale mais seulement une martingale locale.

1.2.3 Représentation des martingales

Un intérét particulier de l'intégrale stochastique est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 *(Martingales browniennes)*
Soit $W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty$ un Mouvement Brownien. Soit $M = M_t; 0 \leq t < +\infty$ une martingale brownienne, i.e. une martingale par rapport à la filtration du Mouvement Brownien, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$. Alors il existe un processus $H \in \mathbb{H}^2$ tel que pour tout $t \geq 0$,
$$M_t = \int_0^t H_s dW_s.$$
De plus si $\widetilde{H}$ est un autre représentant de M, presque sûrement,

$$\int_0^{+\infty} \left| \widetilde{H_t} - H_t \right|^2 dt = 0.$$

D'une certaine manière, toute martingale de carré intégrable est une intégrale stochastique par rapport à un Mouvement Brownien (cf. Karatzas-Shreve [15], chapitre 3.4) :

Théorème 1.2.3 *(Représentation des martingales, Doob, 1955)*
Supposons que

$$\left\{M_t = \left(M_t^{(1)}, ..., M_t^{(d)}\right), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\right\}$$

est définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et que* $M^{(i)}$ *est une martingale continue, de carré intégrable pour* $1 \leq i \leq d$.
Supposons aussi que pour $1 \leq i, j \leq d$, *les crochets* $< M^{(i)}, M^{(j)} >$ *sont tous des fonctions absolument continues en* t, $\mathbb{P}$*-p.s. Alors il existe une extension* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sur laquelle est défini un M.B. d-dimensionnel.*

$$W = \left\{W_t = \left(W_t^{(1)}, ..., W_t^{(d)}\right), \widetilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\right\}$$

est une matrice

$$X = \left\{\left(X_t^{(i,k)}\right)_{1 \leq i,k \leq d}, \widetilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\right\}$$

de processus mesurables et adaptés avec

$$\widetilde{\mathbb{P}}\left[\int_0^t (X_s^{(i,k)})^2 ds < \infty\right] = 1; 1 \leq i, k \leq d, 0 \leq t < \infty;$$

tels que l'on a, $\widetilde{\mathbb{P}}$*-p.s., les représentations suivantes :*

$$M_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} dW_s^{(k)}; 1 \leq i \leq d, 0 \leq t < \infty;$$

$$< M_t^{(i)}, M^{(j)} >= \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} X_s^{(j,k)}; 1 \leq i, j \leq d, 0 \leq t < \infty.$$

1.2.4 Formule d'Itô

La formule d'Itô (ou formule de changement de variables) est un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques. On a un M.B. d-dimensionnel.

Définition 1.2.1 *(Processus d'Itô ou semi-martingales) Un processu X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est appelé semi-martingale s'il se décompose de la manière suivante : pour tout t, presque sûrement,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

avec X_0 et K à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, H à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}, H \in \mathbb{H}^2$ et

$$\mathbb{E}\int_0^t |K_s| ds < \infty, \forall t.$$

Cette décomposition, si elle existe, est unique.

Théorème 1.2.4 *(Formule d'Itô)*
Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, une fois continument dérivable en temps et deux fois en espace (i.e. toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues). Soit X une semi-martingale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

Alors $\{f(t,X_t); 0 \le t < +\infty\}$ est encore une semi-martingale et admet la décomposition suivante :
$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s).K_s ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s).H_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t Trace(H_s^* D^2 f(s,X_s) H_s) ds$
où ∇f désigne le gradient de f par rapport aux variables d'espace et $D^2 f$ désigne la matrice hessienne de f. Sans l'hypothèse de régularité sur f, ceci est faux. Sans celle-ci, on tombe dans une autre classe de processus, dit de Dirichlet.

1.3 Théorème de Girsanov

Dans cette partie, nous supposons que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est à la fois complète et continue à droite. Notre objectif est d'étudier comment se transforment les notions de semi-martingales et de martingales lorsqu'on remplace la probabilité $\mathbb{P}$ par une probabilité $\mathbb{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Lorsqu'il y aura risque de confusion, nous noterons $\mathbb{E}_P$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$, et $\mathbb{E}_Q$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.3.1 *Supposons que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Pour tout $t \in [0, \infty]$, soit*

$$D_t = \frac{dQ}{dP|\mathcal{F}_t},$$

la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_t$. Le processus D est une $\mathcal{F}_t$-martingale uniformément intégrable.
On peut donc remplacer D par une modification càdlàg. Aprés ce remplacement, on a aussi, pour tout temps d'arrêt T,

$$D_t = \frac{dQ}{dP|\mathcal{F}_T}.$$

Enfin, si on suppose que $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$, on a

$$\inf_{t \geq 0} D_t > 0, p.s.$$

Démonstration :
Pour $A \in \mathcal{F}_t$, on a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A D_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A \mathbb{E}[D_\infty|\mathcal{F}_t]]$$

et par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym sur $\mathcal{F}_t$, il en découle que

$$D_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_\infty|\mathcal{F}_t], \quad p.s.$$

Donc D est une martingale uniformément intégrable (fermée par D_∞), et quitte à remplacer D par une modéfication on peut supposer que ses trajectoires sont càdlàg. Ensuite, si T est un temps d'arrêt, on a pour $A \in \mathcal{F}$, d'aprés le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A D_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A D_T],$$

d'où, puisque D_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable,

$$D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_T}.$$

Montrons la dernière assertion. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le temps d'arrêt

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : D_t < \varepsilon\}$$

(T_ε est un temps d'arrêt comme temps d'entrée dans un ouvert par un processus càdlàg). Alors,

$$\mathbb{Q}(T_\varepsilon < \infty) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_{\{T_\varepsilon<\infty\}} D_{T_\varepsilon}] \leq \varepsilon$$

puisque $D_{T_\varepsilon} \leq \varepsilon$ sur $\{T_\varepsilon < \infty\}$ par un argument de continuité à droite. Il en découle aussitôt que

$$\mathbb{Q}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_{1/n} < \infty\}\right) = 0$$

et puisque $\mathbb{P}$ est équivalente à $\mathbb{Q}$ on a aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_{1/n} < \infty\}\right) = 0$$

Mais cela veut exactement dire que p.s. il existe n tel que $T_{1/n} = \infty$, d'où la dernière assertion de la proposition.

Proposition 1.3.2 *Soit D une martingale locale strictement positive. Il existe alors une unique martingale locale, à trajectoire continues, L, appelé logarithme stochastique de D, telle que*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t\right) = \varepsilon(L)_t$$

De plus L est donnée par la formule

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t + D_s^{-1} dD_s.$$

Démonstration :

L'unicité est une conséquence immédiate du Théorème :(D une martingale locale. Alors si D est un processus à variation finie, D est indistinguable de 0). Ensuite, puisque D est strictement positive, on peut appliquer la formule d'Itô à $\log D_t$, et il vient

$$\log D_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d < D, D >_s}{D_s^2} = L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t,$$

où L est donnée par la formule de la proposition.

Théorème 1.3.1 *(Girsanov) Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_\infty$. Soit D la martingale associée à $\mathbb{Q}$ par la (1.3.1). On suppose que les trajectoires de D sont continues. Soit L la martingale locale associée à D par la (1.3.2). Alors, si M est une $(\mathcal{F}_t; \mathbb{P})$-martingale locale, le processus*

$$\widetilde{M} = M - < M, L >$$

est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale.

Remarque 1.3.1 *D'aprés les conséquences du théorème de représentation des martingales, l'hypothèse de continuité des trajectoires de D sera toujours satisfaite lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration canonique complétée d'un mouvement brownien.*

Démonstration :

Montrons d'abord que, si T est un temps d'arrêt et si X est un processus adapté à trajectoires continues tel que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Puisque, d'aprés la Proposition (1.3.1), $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|X_{T\wedge t}|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}|] < \infty$, on a d'abord $X^T \in L^1(\mathbb{Q})$.
Ensuite, soient $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$. Puisque $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_s$, on a, en utilisant le fait que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[1_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge s} D_{T\wedge s}].$$

D'aprés la Proposition (1.3.1),

$$D_{T\wedge t} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_{T\wedge t}}\ , \quad D_{T\wedge s} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_{T\wedge s}},$$

et donc, puisque $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s} \subset \mathcal{F}_{T\wedge t}$, il vient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}].$$

D'autre part, il est immédiat que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}].$$

En combinant avec ce qui précède, on obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A X_{T\wedge s}]$, d'où le résultat annoncé. En conséquence immédiate de ce résultat, on voit que si XD est une $\mathbb{P}$-martingale locale, alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.
Soit maintenant M une $\mathbb{P}$-martingale locale. On applique ce qui précède à $X = \widetilde{M}$, en remarquant que d'aprés la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_t D_t &= M_0 D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s - \int_0^t D_s d < M, L >_s + < M, D >_t \\
&= M_0 D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s.
\end{aligned}$$

puisque $d < M, L >_s = D_s^{-1} d < M, D >_s$ d'aprés la Proposition (1.3.2). On voit ainsi que $\widetilde{M}D$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale, et donc $\widetilde{M}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

1.3.1 Utilisation de Girsanov

Dans les applications pratiques du Théorème de Girsanov, on ne dispose pas en général de la probabilité $\mathbb{Q}$ mais de ce qui joue le rôle du logarithme stochastique L de sa dérivée de Radon-Nikodym $D = d\mathbb{Q} = d\mathbb{P}$.
On reconstruit alors la probabilité $\mathbb{Q}$ comme suit :

- on part d'une martingale locale continue L telle que $L_0 = 0$;
- alors $\varepsilon(L)_t$ est une martingale locale continue à valeurs strictement positives, c'est donc une surmartingale ;
- la résolution de système linéaire,
- cela assure l'existence ps de la limite $\varepsilon(L)_\infty$; en plus, d'aprés le lemme de Fatou,

on a

$$\mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty] \leq 1 \tag{1.2}$$

puisque

$$\mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty] = \mathbb{E}\left[\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(L)_t\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty} \varepsilon(L)_t\right] \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\varepsilon(L)_t] \leq 1 \tag{1.3}$$

car, si $0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[\varepsilon(L)_t] \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_s] \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_0] = 1$.

- Mais si on a égalité dans (1.2), on a bien mieux :

Proposition 1.3.3 *Si la condition suivante est satisfaite*

$$\mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty] = 1, \tag{1.4}$$

alors $\mathbb{E}(L)$ *est une vraie martingale uniformément intégrable.*

Démonstration :
On montre d'abord sous (1.4) que $\mathbb{E}(L)$ est une vraie martingale :
sous (1.4), il y a égalité dans les inégalités (1.3), soit nécessairement $\mathbb{E}[\varepsilon(L)_t] = \mathbb{E}[\varepsilon(L)_s]$ pour tout $s \leq t$, ce qui combiné avec $\mathbb{E}[\varepsilon(L)_t|\mathcal{F}_s] \leq \varepsilon(L)_s$ exige $\mathbb{E}[\varepsilon(L)_t|\mathcal{F}_s] = \varepsilon(L)_s$, c'est à dire $\varepsilon(L)$ est une vraie martingale.
Puis comme $\varepsilon(L)_t \to \varepsilon(L)_\infty$ ps avec $\mathbb{E}[|\varepsilon(L)_t|] = \mathbb{E}[|\varepsilon(L)_\infty|] = 1$
alors le résultat suivant (lemme de Scheffé) garantit que $\varepsilon(L)_t \to \varepsilon(L)_\infty$ dans L^1.
La convergence des martingales, c'est équivalent à avoir $\varepsilon(L)$ uniformément intégrable (ou fermée).
En posant $\mathbb{Q} = \varepsilon(L)_\infty.\mathbb{P}$, on est finalement dans le cadre du théorème de Girsanov.

Lemme 1.3.1 *(Scheffé) Soient* $X_n \to X$ *ps. Alors*

$$\mathbb{E}[|X_n|] \to \mathbb{E}[|X|]$$

si et seulement si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0\, ie.\, X_n \to X,\ dans L^1.$$

En pratique, si M est une $\mathbb{P}$-martingale locale, si on change sa partie à variation finie en retranchant $< M, L >$, on a toujours une martingale locale en changeant $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$,

probabilité équivalente de densité donnée par l'exponentielle stochastique $\varepsilon(L)$.
Il faut cependant que la condition (1.4) soit satisfaite. Il est donc important de pouvoir donner des conditions qui assurent (1.4). C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 1.3.2 *(Condition de Novikov) Soit L une martingale locale continue telle que $L_0 = 0$. Considérons les conditions suivantes :*

1) $\mathbb{E}\left[\exp \frac{1}{2} < L, L >_\infty\right] < +\infty$ *;*

2) L est une martingale uniformément intégrable et $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2} L_\infty)\right] < +\infty$ *;*

3) $\varepsilon(L)$ est une martingale uniformément intégrable.

Alors on a les implications $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Démonstration :

- (1) $\Rightarrow$ (2). Comme d'aprés (1) $\mathbb{E}[< L, L >_\infty] < +\infty$, L est une vraie martingale bornée dans L^2.
Elle est donc uniformément intégrable.
Puis, par définition de $\varepsilon(L)_\infty$:

$$\exp\left(\frac{1}{2} L_\infty\right) = \varepsilon(L)_\infty^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} < L, L >_\infty\right)^{1/2}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme on a toujours l'inégalité (1.2) , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} L_\infty\right)\right] &\leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty]^{1/2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} < L, L >_\infty\right)\right]^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} < L, L >_\infty\right)\right]^{1/2} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3). Puisque L est une martingale uniformément intégrable, on a $L_t = \mathbb{E}[L_\infty | \mathcal{F}_t]$.
Par l'inégalité de Jensen avec exp, on a alors

$$\exp\left(\frac{1}{2} L_t\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[L_\infty | \mathcal{F}_t]\right) \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} L_\infty\right) | \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui assure, par (2), que $\exp(\frac{1}{2} L_t) \in L^1$.

Par convexité de exp, $\exp(\frac{1}{2}L_t)$ est une sousmartingale qui, par l'inégalité précédente, est fermée par $\exp(\frac{1}{2}L_\infty)$ (en tant que sousmartingale).
En appliquant le théorème d'arrêt pour les (sur)sous-martingales fermées, pour tout temps d'arrêt T, on a $\exp(\frac{1}{2}L_T) \leq \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)|\mathcal{F}_T]$.
Cela montre que la famille $\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable.
Puis pour $0 < a < 1$, on pose $Z_t^{(a)} = \exp(\frac{aL_t}{1+a})$. Un calcul direct donne

$$\varepsilon(aL)_t = (\varepsilon(L)_t)^{a^2} \left(Z_t^{(a)}\right)^{1-a^2}.$$

Si $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$ et T est un temps d'arrêt, l'inégalité de Holder avec $p = 1/a^2$ et $q = 1/(1-a^2)$ donne

$$\mathbb{E}[1_\Gamma \varepsilon(aL)_T] \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_T]^{a^2} \mathbb{E}\left[1_\Gamma Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[1_\Gamma Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[1_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right]^{2a(1-a)} \tag{1.5}$$

où, pour la deuxième inégalité, on a utilisé que $\varepsilon(L)$ est une surmartingale positive, ie.

$$\mathbb{E}[\varepsilon(L)_T] \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_0] = 1$$

puis pour la troisième l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$ (convexe pour $0 < a < 1$), ie.

$$\left(\mathbb{E}\left[1_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right)^{(1+a)/(2a)} = \varphi\left(\mathbb{E}\left[1_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(1_\Gamma Z_t^{(a)}\right)\right] = \mathbb{E}\left[1_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right].$$

Comme la famille $\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable, l'inégalité (1.5) montre que la famille $\{\varepsilon(aL)_T : T \text{ temps d'arrêt}\}$ l'est aussi.
D'aprés la Proposition (1.3.3) cela entraîne alors que $\varepsilon(aL)$ est une vraie martingale uniformément intégrable. Il suit alors

$$1 = \mathbb{E}[\varepsilon(aL)_0] = \mathbb{E}[\varepsilon(aL)_\infty] \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty]^{a^2} \mathbb{E}\left[Z_\infty^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty]^{a^2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right]^{2a(1-a)}$$

avec, à nouveau pour la dernière égalité, l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$.
En faisant $a \to 1$, la dernière borne implique $\mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty] \geq 1$ et donc avec (1.2) toujours valable on a obtenu $\mathbb{E}[\varepsilon(L)_\infty] = 1$.

On déduit de la Proposition (1.3.3) que $\varepsilon(L)$ est une vraie martingale uniformément intégrable.

1.4 Equations différentielles stochastiques

Le but de cette section est de donner un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t).$$

Ces équations décrivent en général l'évolution dans le temps d'un système physique, par exemple X_t peut être la position et le mouvement d'un satellite à l'instant t. L'équation décrivant l'évolution du satellite ne peut pas être déterministe à cause des nombreux paramètres inconnus. On ajoute donc un terme de bruit (aléatoire) de la forme $\sigma(X_t)dW_t$ où W_t est un mouvement Brownien et $\sigma(.)$ représente l'intensité du bruit dépendant de l'état du système physique à l'instant t.

On arrive donc à une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

L'intégrale d'Itô introduite dans les sections précédentes permet de donner un sens mathématique à cette équation sous la forme intégrale suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s. \tag{1.6}$$

Remarquons qu'on a déjà rencontré une équation différentielle stochastique (linéaire) :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s dW_s$$

dont la solution est

$$X_t = \exp\left(W_t - \frac{1}{2}\right).$$

Plus généralement, l'équation

$$X_t = x_0 + a\int_0^t X_s dW_s + b\int_0^t X_s ds. \ (x_0, a, b \in \mathbb{R})$$

a pour solution le processus stochastique

$$X_t = x_0 \exp\left(aW_t + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)t\right).$$

La solution d'une E.D.S. n'est pas en général aussi simple à déterminer. C'est pourquoi il existe des conditions sur les fonctions b et σ qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de l'E.D.S (1.6).
On autorise b et σ à dépendre du temps t. On étudie donc l'E.D.S. suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \tag{1.7}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien. On se donne un intervalle $[0, T]$ et $s \in [0, T]$. On pose

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(W_u - W_s; s \leq u \leq t).$$

Alors $(X_t^x)_{t\in[s,T]}$ est solution de l'E.D.S.

$$X_t^x = x + \int_0^t b(r, X_r^x)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r^x)dW_r \tag{1.8}$$

si X_t^x est $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable pour tout $t \in [s, T]$ et satisfait (1.8).
Introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) Condition de Lipschitz :
Il existe $L > 0$ telle que

$$|b(t, y) - b(t, x)| \leq L|x - y|,$$

$$|\sigma(t, y) - \sigma(t, x)| \leq L|x - y|$$

pour tout $t \in [0, T]$.

(H2) Les fonctions $t \to b(t,x)$ et $t \to \sigma(t,x)$ sont continues pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,T]$,

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq A(1 + |x|).$$

Théorème 1.4.1 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), l'équation différentielle stochastique (1.7) admet une unique solution pour toute condition initiale x appartenant à L^p pour tout $p \geq 2$.*

Démonstration :

(i) **Existence d'une solution de (1.7) :**

On utilise la méthode des aproximations successives :

$$X_t^{(0)} = x, X_t^{(1)} = x + \int_s^t b(r,x)dr + \int_s^t \sigma(r,x)dW_r,$$

$$X_t^{(n)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(n-1)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(n-1)})dW_r.$$

On a donc

$$X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = x + \int_s^t [b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)})]dr + \int_s^t [\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})]dW_r.$$

Posons

$$\alpha_t^{(n)} = \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq u\leq t} \left|X_u^{(n+1)} - X_u^{(n)}\right|^p\right).$$

Alors

$$\alpha_t^{(n)} \leq 2^p[\mathbb{E}(\sup_{s\leq u\leq t} |\int_s^u (b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)}))dr|^p) + \mathbb{E}(\sup_{s\leq u\leq t} |\int_s^u (\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)}))dW_r|^p)].$$

Notons

$$\Sigma_1(n) = \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq u\leq t} \left|\int_s^u (b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)}))dr\right|^p\right)$$

et

$$\Sigma_2(n) = \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq u\leq t} \left|\int_s^u (\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)}))dW_r\right|^p\right)$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder, on peut majorer $\Sigma_2(n)$ par

$$\Sigma_2(n) \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)}))^2 dr\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Nous allons maintenant utiliser le résultat suivant :
Soit f une fonction positive, alors

$$\left(\int_s^t f(r)dr\right)^{p/2} \leq (t-s)^{p/2-1} \int_s^t f(r)^{p/2} dr.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Sigma_2(n) &\leq C_p (t-s)^{p/2-1} \int_s^t \mathbb{E}\left[|\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})|^p\right] dr \\ &\leq C_p L^p (t-s)^{p/2-1} \int_s^t \mathbb{E}\left[|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^p\right] dr \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (H1). Par conséquent, il existe une constante k_2 telle que

$$\Sigma_2(n) \leq k_2 \int_s^t \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq u \leq r} \left|X_u^{(n)} - X_u^{(n-1)}\right|^p\right] dr.$$

En utilisant les mêmes types d'argument, on montre qu'il existe une constante k_1 telle que

$$\Sigma_1(n) \leq k_1 \int_s^t \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq u \leq r} \left|X_u^{(n)} - X_u^{(n-1)}\right|^p\right] dr.$$

On en déduit donc qu'il existe une constante K telle que

$$\alpha_t^{(n)} \leq K \int_s^t \alpha_r^{(n-1)} dr.$$

Par récurrence descendante,

$$\begin{aligned} \alpha_t^{(n)} &\leq K^n \alpha_t^{(0)} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 ... \int_s^{t_{n-1}} dt_r \\ &\leq \frac{K^n}{n!} \alpha_t^{(0)} (t-s)^n \leq \frac{K^n}{n!} \alpha_t^{(0)} T^n. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{(0)} &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\le u\le t}\left|\int_s^u b(r,x)dr + \int_s^u \sigma(r,x)dW_r\right|^p\right] \\
&\le 2^p\left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\le u\le t}\left|\int_s^u b(r,x)dr\right|^p\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s\le u\le t}\left|\int_s^u \sigma(r,x)dW_r\right|^p\right]\right) \\
&\le 2^p\left((t-s)^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_s^u |b(r,x)|^p dr\right) + (t-s)^{p/2-1}\mathbb{E}\left(\int_s^u |\sigma(r,x)|^p dr\right)\right) \\
&\le KA^p\mathbb{E}\left((1+|x|)^p\right) = C < \infty
\end{aligned}$$

par hypothèse.

Donc

$$\alpha_t^{(n)} \le C\frac{(KT)^n}{n!}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\le u\le t}\left|X_u^{(n+1)} - X_u^{(n)}\right|^p\right]\right)^{1/p} \le C^{1/p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(KT)^n}{n!}\right)^{1/p} < \infty$$

Donc, $(X_u^{(n)})$ est une suite uniformément de Cauchy dans L^p. Par conséquent, la limite existe et appartient à L^p.

(ii) **Unicité de la solution :**

Soientt X et X' deux solutions de l'E.D.S. (1.7) définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ Alors, on montre que X et X' sont indistinguables au sens où

$$\mathbb{P}[\exists u \in]s,t]; X_u \ne X_u^{'}] = 0.$$

En utilisant le lemme de Gronwall :

soit g une fonction borélienne définie sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\sup_{t\le T} g(t) < \infty.$$

Si

$$g(t) \le A + B\int_0^t g(s)ds,$$

alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$g(t) \leq A\exp(Wt).$$

En particulier, si $A=0$, alors $g(t)=0$.
Considérons $T_n = \inf\{t; |X_t| = n \, ou \, |X_t^{'}| = n\}$.
Alors, il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $t \in [0,T_n]$,

$$\mathbb{E}(|X_t - X_t^{'}|^2) \leq K\mathbb{E}\left(\int_s^t |X_r - X_r^{'}|^2 dr\right).$$

Le processus X est donc une modification sur $[0,T_n]$ de $X^{'}$ donc sur $\mathbb{R}^+ (T_n \uparrow +\infty \mathbb{P} - p.s.)$, ce qui entraîne l'indistinguabilité de X et de $X^{'}$ par continuité.

Démonstration du lemme de Gronwall :
En itérant la condition sur la fonction g, on a pour tout $n \geq 1$,

$$g(t) \leq A + A(Wt) + A\frac{(Wt)^2}{2} + ... + A\frac{(Wt)^n}{n!} + W^{n+1}\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_n} ds_{n+1} g(s_{n+1}).$$

Si g est majorée par une constante C, le dernier terme ci-dessus est majoré par $C(Wt)^{n+1}/(n+1)!$, donc tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le lemme en découle.

1.4.1 Utilisation de Girsanov pour les EDS

Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence de solution faible d'EDS quand elle n'admet pas nécessairement de solution forte.

Proposition 1.4.1 *Soit W un Mouvement Brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ et $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.*
On considère l'EDS

$$dX_t = a(t, X_t)dt + dW_t. \tag{1.9}$$

1. *Il y a existence faible lorsque a est une fonction bornée.*
2. *Il y a unicité faible sur $[0,T]$ lorsque a est presque sûrement carré intégrable sur $[0,T]$:*

Soit pour $i = 1, 2$, X^i une solution sur $(\Omega, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}^i_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^i)$ associée au Mouvement Brownien W^i et de condition initiale μ (indépendante de $i = 1, 2$). Alors(X^1, B^1) et (X^2, B^2) ont la même loi sous $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ resp. (unicité faible)si

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|a(t, X^i_t)\|^2 dt < +\infty\right) = 1.$$

Remarque 1.4.1 *Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence faible d'une solution.*

- *On peut affaiblir l'hypothèse a bornée en croissance sous-linéaire :*

$$\|a(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|),\ 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d.$$

- *On met ainsi en évidence l'effet régularisant du Mouvement Brownien W (en fait $\widetilde{W}$. ci-dessous) dans (1.9) puisque sans $\widetilde{W}$, l'équation différentielle ordinaire $x_t = \int_0^t a(s, x_s)ds$ n'admet pas de solution en général lorsque a est seulement borné.*

Démonstration :

Pour simplifier, on suppose $d = 1$.

1) **Existence faible.** En partant de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}^W_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et W un Mouvement Brownien, on construit une solution faible par le théorème de Girsanov.
Pour cela, on considère $L_t = \int_0^t a(s, W_s)dW_s$ (bien défini parce que a est bornée) et on pose

$$Z_t = \varepsilon(L)_t = \exp\left(\int_0^t a(s, W_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a(s, W_s)^2 ds\right).$$

Comme $\exp(\frac{1}{2}\int_0^t a(s, W_s)^2 ds) \leq \exp(t\|a\|_\infty/2)$, le critère de Novikov (Théorème 2.7.1) est satisfait sur tout intervalle $[0, t]$ et Z est une $\mathcal{F}^W$-martingale sur $\mathbb{R}_+$. On définit alors une probabilité sur chaque $\mathcal{F}^W_t$ en posant $d\mathbb{Q}^a_{|\mathcal{F}^W_t} = Z_t d\mathbb{P}$. Le théorème de Girsanov assure que

$$\widetilde{W}_t = W_t \int_0^t a(s, W_s)ds$$

est un $\mathbb{Q}^a$-Mouvement Brownien. Sous $\mathbb{Q}^a$, le processus W est solution de

$$X_t = \widetilde{W}_t + \int_0^t a(s, X_s)ds,$$

c'est à dire de l'EDS (1.9) dirigée par $\widetilde{W}$.
On a donc construit une probabilité $\mathbb{Q}^a$ et des processus $(W, \widetilde{W})$ tels que $\widetilde{W}$ est un Mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}^a$ et W est solution faible de (1.9).

2) **Unicité faible.** Soient T une date déterministe fixée et μ une loi initiale. Pour $k \geq 1$ et $i = 1, 2$, on considère

$$\tau_k^i = T \wedge \inf\left(0 \leq t \leq T : \int_0^t \|a(s, X_s^i)\|^2 ds \geq k\right).$$

Comme précédemment, le critère de Novikov assure que

$$Z_t^{k,i} = \exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_k^i} a(s, X_s^i)dW_s^i - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k^i} \|a(s, X_s^i)\|^2 ds\right)$$

est une martingale. On définit alors des probabilités par $d\mathbb{Q}^{k,i} = Z_T^{k,i} d\mathbb{P}^i$.
Le théorème de Girsanov assure alors que sous $\mathbb{Q}^{k,i}$

$$X_{t\wedge\tau_k^i}^i = X_0^i + \int_0^{t\wedge\tau_k^i} a(s, X_s^i)ds + W_{t\wedge\tau_k^i}^i, \, , \;\; 0 \leq t \leq T$$

est un Mouvement Brownien standard de loi initiale μ, arrêté à τ_k^i
De plus, on montre que τ_k^i, $(W_t^i : t \leq \tau_k^i)$ et $Z_T^{k,i}$ s'expriment en termes de $X_{t\wedge\tau_k^i}^i$ indépendamment de $i = 1, 2$.
Pour $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2(n+1)})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1\left((X_{t_0}^1, W_{t_0}^1, ..., X_{t_n}^1, W_{t_n}^1) \in A, \tau_k^1 = T\right) &= \int_{\Omega^1} \frac{1}{Z_T^{k,1}} 1_{\{(X_{t_0}^1, W_{t_0}^1, ..., X_{t_n}^1, W_{t_n}^1) \in A, \tau_k^1 = T\}} d\mathbb{Q}^{k,1} \\
&= \int_{\Omega^2} \frac{1}{Z_T^{k,2}} 1_{\{(X_{t_0}^2, W_{t_0}^2, ..., X_{t_n}^2, W_{t_n}^2) \in A, \tau_k^2 = T\}} d\mathbb{Q}^{k,2} \\
&= \mathbb{P}^2\left((X_{t_0}^2, W_{t_0}^2, ..., X_{t_n}^2, W_{t_n}^2) \in A, \tau_k^2 = T\right)
\end{aligned}$$

où la deuxième ligne vient de l'observation précédente et du fait que sous

$\mathbb{Q}^{k,i}$, X^{i,τ_k^i} est un Mouvement Brownien (arrêté, de loi initiale μ).
L'hypothèse sur a implique $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^i(\tau_k^i = T) = 1, i = 1, 2$.
On peut donc passer à la limite $k \to +\infty$ pour conclure.

Chapitre 2

Marchés financiers et Mouvement Brownien

2.1 Introduction aux marchés financiers

Un marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers appelés aussi actifs financiers qui sont des actions, obligations, et des produits dérivées (option, contrat à terme...).
En plus des matières premières (or, pétrole, produits agro-alimentaires...) et des devises, on distingue trois grands types de produits :

- Actions (représentent une part du capital de l'entreprise)
- Obligations (représentent une part de la dette de l'entreprise)
- Produits dérivés (option, cotntrat à terme,...)

Les actions :

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital d'une entreprise. Sur un plan financier elle présente principalement deux sources espérées de revenus pour son détenteur :
i) les dividendes à venir,
ii) une éventuelle plus-value lors de la revente du titre.

Les obligations :

Une obligation est un titre de créance correspondant à un prêt effectué par le propriétaire de l'obligation à l'institution qui a émis et vendu l'obligation. Pendant la durée de vie de l'obligation, l'emprunteur paie des intérêts fixés contractuellement lors de l'émission ; à l'échéance, l'emprunteur rembourse le capital emprunté au détenteur de l'obligation.
Trés généralement, les obligations peuvent être vendues par leur propriétaire avant leur échéance.

Les produits dérivés :

Un produit dérivé (derivative) ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre appelé actif sous-jacent. On en distingue deux grands types.

Contrat à terme :

De manière générale, un contrat à terme est un engagement à acheter ou à vendre à un certain prix, à une date future, une certaine quantité d'une marchandise. Tout engagement à vendre (ou acheter) a fait l'objet, de la part d'une contrepartie, d'un engagement réciproque et irrévocable à acheter (ou vendre). Nous verrons ultérieurement que l'on distingue contrats "forward" et contrats "futures".
L'intérêt des contrats à terme pour les intervenants est de figer des cours dans le futur : il s'agit dans ce cas d'une opération de couverture.

Option :

Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance. La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- La nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne, de call pour une option d'achat et de put pour une option de vente.
- L'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, etc...

- Le montant, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre. L'échéance ou la date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'option américaine, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option européenne.
- Le prix d'exercice, qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

Les devises :

Une devise est une monnaie considérée depuis un territoire autre que son territoire d'émission.
Les marchés financiers sont les marchés sur lesquels sont négociés les titres énumérés ci-dessus ; on y adjoint également les marchés de matières premières, agricoles et minérales, ainsi que les swaps. Un swap est un contrat par lequel on échange deux ensembles de valeurs financières ; les swaps ne sont pas au sens strict des instruments financiers mais on les considère souvent comme tels.
Une première distinction trés importante est à opérer :

- les marchés "sous-jacents" : marchés de matières premières, d'actions, obligataires, monétaires et enfin marchés des changes ;
- les marchés "dérivés" comportent deux catégories fondamentales : marchés à terme et marchés d'options. On parle de produits dérivés pour qualifier les contrats à terme et les options car leur valeur dérive de la valeur d'un autre actif, qualifié de sous-jacent.

Il est important de retenir que l'on peut créer un produit dérivé à partir d'un autre produit dérivé ; sachant qu'un instrument financier est couramment construit comme un ensemble d'instrument financier, il apparait que l'on peut créer une quasi infinité de produits dérivés.

Arbitrage statique :

La notion d'arbitrage est la base de la théorie et la couverture d'options. Cette notion économique qui signifie essentiellement qu'on ne peut gagner de l'argent sûrement sans

prendre de risques.
Sur les marchés financiers, il existe des arbitragistes dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte tenu des autres prix de marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans risque. Leur intervention est statique au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future. Ils contraignent les prix à vérifier certaines relations.
Nous supposerons aussi que les marchés sont sans frictions, i.e. il n'y a pas de coûts de transactions ni de contraintes sur les ventes à découvert. Nous supposons aussi l'existence sur le marché de zéro-coupons. Un zéro-coupon de maturité T est un produit financier qui assure un nominal fixe en T. Nous notons par $B(t,T)$ son prix à la date $t \leq T$ pour un nominal de 1 euro. Notons qu'il est strictement positif par absence d'arbitrage. Par exemple s'il est possible d'emprunter et de placer de l'argent à un taux constant r, on a $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$.

Prix à terme :

Soit un contrat à terme sur un titre S. Notons par $F^S(t,T)$ le prix fixé à la date t auquel sera négocié le titre S en T : c'est le prix à terme ou le prix forward de S en T. Notons que l'acheteur du contrat a l'obligation (et non le droit comme pour une option d'achat) d'acheter le titre au prix $F^S(t,T)$ convenu à l'avance.
Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix forward au prix du titre sous-jacent, on dit aussi prix spot, S. Il y a en effet deux stratégies possibles pour obtenir le titre S en T :

- la première consiste à acheter le titre en t, au prix S_t, et le garder jusqu'en T.
- la deuxième consiste à acheter le contrat forward en t, ce qui garantit de recevoir le titre S en payant $F^S(t,T)$ en T. Pour pouvoir payer cette somme en T, il suffit d'acheter $F^S(t,T)$ zéro-coupons de maturité T, ce qui coûte en t : $F^S(t,T)B(t,T)$.

Par absence d'arbitrage, on a donc :

$$F^S(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)}.$$

Parité call-put :

Les options call et put, apparemment différentes, peuvent être en réalité combinées de façon à être parfaitement corrélées.
Notons par C_t et P_t les prix respectifs en t du call et du put européen de strike K et de maturité T sur un sous-jacent S. En achetant le call et en vendant le put en t, au prix $C_t - P_t$, on est garantit d'obtenir à l'échéance le flux $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$.
D'autre part, ce flux en T peut aussi être obtenu en achetant le titre S et en vendant K zéro-coupons en t, au prix $S_t - KB(t,T)$.
L'absence d'arbitrage montre donc la relation dite de parite call-put :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t,T).$$

2.2 Modèles utilisés en mathématiques financières

Le but de cette partie est de définir des outils de mathématiques financières : les actifs, le prix des actifs, la notion de stratégie d'arbitrage. Ces notions seront utilisées pour énoncer le premier théoréme fondamental de la finance, dont nous étudierons plusieurs démonstrations se trouvant dans [20], [30], [31].

2.2.1 Quelques définitions sur les actifs

Dans cette partie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fini, i.e. $Card(\Omega) < \infty$, et soit $(\mathcal{F}_n)_{(0 \leq n \leq N)}$ une filtration.
La tribu $\mathcal{F}_n$ peut être interpréter comme l'information dont nous disposons au temps n.
Dans cette partie nous supposerons que $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et que pour tout $\omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$.
Le vecteur des prix $S_n = (S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d)$ est tel que S_n^i est une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_n$-mesurable, représente le prix de l'actif financier de type i dans le marché. Nous définissons les prix actualisés par $\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{S_n^0}$.
La variable aléatoire S_n^0 représente l'actif sans risque, et est tel que $S_0^0 = 1$.
Si le taux d'interêt pendant une période est égal à r, alors $S_n^0 = (1+r)^n$, le coefficient $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ est appelé le taux d'actualisation.

En fait, si un montant égal à β_n a été investi au temps 0, celui-ci va rapporter un montant de 1 franc au temps n.
L'actif sans risque peut être comparé à un compte à la banque à un taux d'interêt r.

2.2.2 Quelques définitions sur les stratégies

Définition 2.2.1 *Une stratégie est définie par une suite* $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0 \le n \le N}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d+1}$, *où* ϕ_n^i *représente le nombre de parts de l'actif* i *dans le portefeuille au temps* n.
Nous allons définir la valeur du portefeuille.

Définition 2.2.2 *(i) la valeur du portefeuille au temps* n *est définie par*

$$V_n(\phi) = \phi_n.S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i;$$

(i) sa valeur actualisée est

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n.S_n) = \phi_n.\widetilde{S}_n.$$

Stratégie prévisible

Définition 2.2.3 *La stratégie* ϕ *est prévisible, si pour tout* $i \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$\begin{cases} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0 - mesurable \\ et, \text{ pour } n \ge 1, \ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} - mesurable. \end{cases}$$

Cela veut dire que $(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)$ *est complètement déterminé par rapport à l'information disponible au temps* $(n-1)$ *et garde ces valeurs jusqu'au temps* n.

Stratégie auto-financée

Définition 2.2.4 *Une stratégie est dite auto-financée si l'équation suivante est vérifiée pour tout* $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n.$$

L'interprétation est la suivante : une fois que les nouveaux prix $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$ sont connus, nous calculons ϕ_{n+1} sans consommer et sans apporter de richesses extérieures.

Remarque 2.2.1 *Si ϕ est une stratégie auto-financée l'égalité suivante est évidente*

$$\phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n;$$

ce qui revient à écrire

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n).$$

Au temps $n+1$, la valeur du portefeuille est égale à $\phi_{n+1}.S_{n+1}$.
Alors $\phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_{n+1}.S_n$ est le gain net causé par les changements de prix du temps n au temps $n+1$. Le profit ou la perte sont dûs uniquement à un changement de prix.

Proposition 2.2.1 *Les points suivants sont équivalents.*

(i) La stratégie ϕ est auto-financée ;

(ii) pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\triangle S_j$$

avec $\triangle S_j = S_j - S_{j-1}, j \in \{1, ..., N\}$;

(iii) pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\triangle \widetilde{S}_j$$

avec $\triangle \widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Démonstration :
L'équivalence entre (i) et (ii) s'obtient par la remarque précédente et en sommant de 0 à $N-1$.
L'équivalence entre (i) et (iii) découle du fait que $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}S_n$ si et seulement si $\phi_n.\widetilde{S}_n = \phi_{n+1}\widetilde{S}_n$.

Proposition 2.2.2 *Pour toute suite prévisible* $(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ *et pour toute variable aléatoire* V_0 $\mathcal{F}_0$*-mesurable, il existe une unique suite prévisible* $(\phi_n^0) 0 \leq n \leq N$ *telle que la stratégie* $\phi = (\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)$ *s'autofinance et ait pour valeur initiale* V_0*.*

Démonstration :
La condition d'auto-financement et la proposition 2.2.1 impliquent

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \triangle \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \triangle \widetilde{S}_j^d \right).$$

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1 \widetilde{S}_n^1 + ... + \phi_n^d \widetilde{S}_n^d \text{car par définition et, } \widetilde{S}_n^0 = 1.$$

Ces deux égalités définissent ϕ_n^0 par

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \triangle \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \triangle \widetilde{S}_j^d \right) + \left(\phi_n^1 (-\widetilde{S}_n^1) + ... + \phi_n^d (-\widetilde{S}_n^d) \right)$$

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\phi_j^1 \triangle \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \triangle \widetilde{S}_j^d \right) + \left(\phi_n^1 (-\widetilde{S}_{n-1}^1) + ... + \phi_n^d (-\widetilde{S}_{n-1}^d) \right).$$

La variable aléatoire est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable en tant que somme et produit de fonctions au plus $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables.

Stratégie admissible

Définition 2.2.5 *Une stratégie* ϕ *est dite admissible si elle s'auto-finance et si* $V_n(\phi) \geq 0$ *pour tout* $n \in \{0, ..., N\}$*.*

Remarque 2.2.2 *Nous n'obligerons pas* ϕ_n^i *à être positif. Si* $\phi_n^0 < 0$*, nous emprunterons la somme* $|\phi_n^0|$ *dans l'actif sans risque et si* $\phi_n^i < 0$ *pour* $i \geq 1$*, nous dirons que nous sommes à court d'actifs de type* i*.*
Le fait d'être à court d'actif ou d'emprunter est autorisé mais la valeur du portefeuille doit être positive en tout temps : l'investisseur doit être capable de payer ses dettes en tout temps.
La valeur du portefeuille doit être positive en tout temps.

Stratégie d'arbitrage

Définition 2.2.6 *Une stratégie d'arbitrage est une stratégie telle que*

(i) ϕ *est une stratégie admissible ;*

(ii) $V_0(\phi) = 0$ *p.s. et* $\mathbb{P}(V_N > 0) > 0$.

L'interprétation de cette notion est que lorsqu'il n'y a pas de stratégies d'arbitrage nous ne pouvons pas faire de profit sans prendre de risque.

2.2.3 Marché viable

Définition 2.2.7 *Un marché est viable s'il n'y a de stratégie d'arbitrage.*

Lemme 2.2.1 *Si le marché est viable, alors toute suite prévisible,* $(\phi^1, ..., \phi^d)$ *vérifie*

$$\widetilde{G}_N(\phi) \neq \Gamma$$

où Γ *est le cône convexe des variables aléatoires strictement positives et*

$$\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \triangle \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \triangle \widetilde{S}_j^d \right).$$

Démonstration :
Par l'absurde, supposons que $\widetilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$. D'abord si $\widetilde{G}_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, ..., N\}$ alors le marché n'est pas viable.
En effet en prenant la suite $(\phi^1, ..., \phi^d)$ et $V_0 = 0$, d'aprés la proposition 2.2.2, il existe une stratégie $(\phi^0, ..., \phi^d)$ telle que

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \triangle \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \triangle \widetilde{S}_j^d \right).$$

La variable aléatoire $\widetilde{V}_n(\phi) = \widetilde{G}_n(\phi)$ est positive donc ϕ est admissible. Par l'hypothèse $\widetilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$, nous avons $\widetilde{V}_N(\phi) \in \Gamma$ ce qui entraîne que ϕ est une stratégie d'arbitrage.
D'autre part si les $\widetilde{G}_n(\phi)$ ne sont pas tous positifs, alors nous pouvons définir
$n = \sup\{k \in \{0, ..., N\} : \mathbb{P}(\widetilde{G}_k(\phi) < 0) > 0\}$.

D'aprés la définition de n, il s'ensuit que pour $n \leq N-1$, nous avons

$$\textit{pour tout } m > n, \widetilde{G}_m(\phi) \geq 0 \textit{ et } \widetilde{G}_N(\phi) \in \Gamma.$$

Nous pouvons définir une nouvelle suite

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \leq n \\ 1_A(\omega)\phi_j(\omega), & \text{si } \; j > n \end{cases}$$

où A est l'évènement $\{\widetilde{G}_n(\phi) < 0\} \in \mathcal{F}_n$.
Si $j > n$, ψ est prévisible car ϕ_j s'écrit comme un produit de deux variables aléatoires $\mathcal{F}_{j-1}$-mesurables. Par suite,

$$\widetilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 \textit{ car } \psi_j = 0, & \text{si } j \leq n \\ 1_A(\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_n(\phi)), & \text{si } \; j > n \end{cases}$$

parce que si $j > n$, nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_j(\psi) &= \sum_{k=n}^{j} \left(\phi_k^1 \triangle \widetilde{S}_k^1 + ... + \phi_k^d \triangle \widetilde{S}_k^d\right) \\ &= \sum_{k=1}^{j} \left(\phi_k^1 \triangle \widetilde{S}_k^1 + ... + \phi_k^d \triangle \widetilde{S}_k^d\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\phi_k^1 \triangle \widetilde{S}_k^1 + ... + \phi_k^d \triangle \widetilde{S}_k^d\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\widetilde{G}_j(\psi) \geq 0$ pour $j \in \{0, 1, ..., N\}$ car $\widetilde{G}_j(\phi) \geq 0$ si $j > n$ et $-\widetilde{G}_n(\phi)$ est positive sur A, ce qui implique que ψ_j est une stratégie admissible car $\widetilde{V}_n(\psi) = \widetilde{G}_n(\psi)$. Puisque $\widetilde{V}_0(\psi) = 0$ (parce que $V_0(\psi) = 0$) et $\widetilde{G}_N(\psi) > 0$, alors ψ est une stratégie d'arbitrage ce qui contredit la viabilité du marché.
Connaissant les prix jusqu'au temps n, nous aimerions bien prédire ou trouver une relation entre ces prix connus et les prix du futur.
C'est avec cette ambition que nous allons donner plusieurs démonstrations du théorème suivant appelé le théorème fondamental de la finance.

Théorème 2.2.1 *Le marché est viable si et seulement si il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.*

Démonstration :

Commençons par supposer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. Pour toute stratégie auto-financée $(\phi_n)_n$ la proposition 2.2.1 implique

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\triangle\widetilde{S}_j.$$

$\widetilde{V}_n(\phi)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale. Donc $\widetilde{V}_N(\phi)$ et $\widetilde{V}_0(\phi)$ ont la même espérance sous $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{E}^*\left(\widetilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbb{E}^*\left(\widetilde{V}_0(\phi)\right),$$

où $\mathbb{E}^*$ représente l'espérance sous $\mathbb{P}^*$. Si ϕ est admissible et a pour valeur initiale $\widetilde{V}_0(\phi) = 0$, alors $\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$.
Ainsi $\widetilde{V}_N(\phi) = 0$ car $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.
Il n'existe donc pas de stratégies d'arbitrage, le marché est viable.
Réciproquement supposons que le marché est viable. Soit L l'ensemble des variables aléatoires $\widetilde{G}_N(\phi)$ avec ϕ une suite prévisible dans $\mathbb{R}^d$.

$$L = \{\sum_{j=1}^{N} \phi_j.\triangle S_j,\ \phi \,\text{est une suite prévisible}\,\}.$$

L est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur Ω. D'aprés le lemme 2.2.1, L n'intersecte pas Γ.
Rappelons que $Card(\Omega) < \infty$. Posons $K = \{X \in \Gamma / \sum_\omega X(\omega) = 1\}$.
Montrons que K est un convexe compact inclus dans Γ.
En effet si $X, Y \in K$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $\sum_\omega (tX + (1-t)Y)(\omega) = t + 1 - t = 1$ donc K est convexe.
Il est évident que l'ensemble K est borné. De plus K est fermé car si $(X_n)_n \subset K$ et $X = \lim_{n\to+\infty} X_n$ alors

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 1$$

(puisque $Card(\Omega)$ est fini, on peut permuter somme et limite).
Dans la suite nous allons utiliser le théoréme suivant, appelé le théorème de la sépa-

ration des convexes. Ce théorème se trouve dans [3].

Théorème 2.2.2 *Soit K un convexe compact et L un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si L et K sont disjoints, il existe une fonctionnelle linéaire T définie sur $\mathbb{R}^n$, satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) pour tout $x \in K, T(x) > 0$;

(ii) pour tout $x \in L, T(x) = 0$.

Autrement dit L est inclus dans un hyperplan qui n'intersecte pas K.

Puisque K et L définis précédemment vérifient les hypothèses du théorème de la séparation des convexes, alors pour tout ω, il existe $\lambda(\omega) \in \mathbb{R}^d$ telle que $T(x) = \lambda(\omega).x$. Ainsi nous avons

(1) pour tout $X \in K, \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$;

(2) pour tout ϕ prévisible.

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

Pour que la probabilité $\mathbb{P}^*$ définie ci-dessous soit équivalente à $\mathbb{P}$ i.e. $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ si et seulement si $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$, il faut que $\lambda(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, car $\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega') > 0$.

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}.$$

De plus pour toute suite prévisible $(\phi_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j \triangle \widetilde{S}_j \right) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} \widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$$

car $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$.

Donc puisque $(\phi_n)_n$ est une suite prévisible et $\mathbb{E}^*(\sum_{j=1}^{N} \phi_j \triangle \widetilde{S}_j) = 0$ $(\widetilde{S}_n^1, ..., \widetilde{S}_n^d)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.

Remarque 2.2.3 *Si nous ne supposons pas que $V_n(\phi)$ ne sont pas positives, nous n'avons pas de stratégies admissibles, mais la preuve du théorème reste vraie.*

2.2.4 Marché complet

Nous définirons une option européenne de maturité N par son profit $h \geq 0$ $\mathcal{F}_N$-mesurable.
Un call est une option où nous pouvons acheter un actif dans le marché, par exemple au prix S^1 à l'échéance N. Si le prix d'accord de l'actif est K, alors le profit sera $h = (S^1_N - K)_+$, où $x_+ = max(x, 0)$.
Tandis que pour un put, nous pouvons vendre un actif de prix S^1 dans le marché à l'échéance N. Si le prix d'accord est K, alors le profit est $h = (K - S^1_N)_+$.

L'option européenne ne peut être exercée qu'à l'échéance, nous définissons aussi l'option américaine par son profit $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-mesurable mais elle peut être exercée à tout temps à la différence de l'option européenne.

Définition 2.2.8 *Un actif conditionnel h est atteignable s'il existe une stratégie admissible valant h au temps N.*

Remarque 2.2.4 *Dans un marché financier viable, nous n'aurons qu'à trouver une stratégie auto-financée valant h à la maturité pour dire que h est atteignable.*
Puisque le marché est viable alors il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. ϕ est une stratégie auto-financée, alors $\widetilde{V}_n(\phi)$ est une martingale. Ainsi, pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}, \widetilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n)$.
Si $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$ (ici $\widetilde{V}_N(\phi) = h \geq 0$), alors d'aprés la positivité de l'espérance conditionnelle, $\widetilde{V}_n(\phi) \geq 0$ et la stratégie ϕ est admissible.

Définition 2.2.9 *Un marché est complet si tout actif conditionnel est atteignable.*

Cette définition permet de construire une théorie simple sur l'évaluation du prix et la couverture des options. Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés complets.

Théorème 2.2.3 *Un marché viable est complet si et seulement si il existe une unique probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.*

Démonstration :
Supposons que le marché est viable et complet. Toute variable aléatoire non- négative

h peut s'écrire sous la forme $h = V_N(\phi)$, avec ϕ qui est une stratégie admissible. Puisque ϕ s'auto-finance alors

$$\frac{h}{S_N^0} = \widetilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \phi_j . \triangle \widetilde{S}_j .$$

Si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont des mesures de probabilité équivalentes sous laquelle les prix actualisés sont des martingales, alors $(\widetilde{V}_n(\phi))_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. Il s'ensuit que pour $i = 1$ *ou* 2

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbb{E}_i\left(\widetilde{V}_0(\phi)\right) = V_{0(\phi)}$$

avec $\mathbb{E}_i$ l'espérance sous $\mathbb{P}_i$. La dernière égalité provient du fait que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ce qui entraîne que $V_0(\phi)$ est une constante. Alors

$$\mathbb{E}_1\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = \mathbb{E}_2\left(\frac{h}{S_N^0}\right).$$

Puisque h est quelconque, il s'ensuit que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ sur $\mathcal{F}_N$.
Réciproquement supposons que le marché est viable et incomplet. Montrons que $\mathbb{P}^*$ n'est pas unique, puisque le marché est complet il existe une variable aléatoire h qui n'est pas atteignable. Posons $\overline{L}$ l'ensemble des variables aléatoires de la forme suivante

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n . \triangle \widetilde{S}_n ,$$

ou U_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et $(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ est une suite prévisible dans $\mathbb{R}^d$ qui s'auto-finance.

D'aprés la proposition 2.2.1, il existe une stratégie qui s'auto-finance et qui a pour valeur initiale U_0. En posant $l = U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n . \triangle \widetilde{S}_n$, l est atteignable d'aprés la remarque précédente. Puisque h/S_N^0 n'est pas atteignable alors il n'est pas dans $\overline{L}$.
Définissons le produit scalaire $(.,.)$ suivant sur l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω par $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}^*(XY)$.
Puisque $\overline{L}$ est différent de $\mathbb{R}^\Omega$, il existe une variable aléatoire Z orthogonale à $\overline{L}$.

Posons

$$\mathbb{P}^{**} = \left(1 + \frac{Z}{2\|Z\|_\infty}\right)\mathbb{P}^*,$$

où $\|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|$. Il est évident que $\mathbb{P}^{**}$ et $\mathbb{P}^*$ sont différentes et équivalentes. De plus

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{j=1}^{N}\phi_j\triangle\widetilde{S}_j\right) = \sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{G}_N(\omega)\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \mathbb{E}^*\left(\widetilde{G}_N(\phi)\right) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty}\mathbb{E}^*\left(Z\widetilde{G}_N(\phi)\right)$$

car $\mathbb{E}^*(\widetilde{G}_N(\phi))$ est nulle et $\frac{1}{2\|Z\|_\infty}\mathbb{E}^*(Z\widetilde{G}_N(\phi)) = 0$ par orthogonalité, pour toute suite prévisible $(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)$.

Il s'ensuit que $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une $\mathbb{P}^{**}$-martingale d'où la preuve de la contraposée.

2.3 Stock et marché monétaire

Nous traitons un marché financier composé de $N+1$ actifs financiers. Un de ces actifs est sans risque, et sera appelé marché monétaire. Les actifs 1 à N sont risqués et seront appelés stocks (bien que dans les applications de ce modèle, ils sont souvent des matières premières ou des devises plutôt que des actions ordinaires). Ces actifs financiers ont des prix continus évoluant continuellement dans le temps et entraînés par un mouvement brownien D-dimensionnel. La continuité du paramètre de temps et la capacité d'accompagnement pour la négociation continue permettent une élégance de formulation et d'analyse non différente de celle obtenue lors du passage de la différence aux équations différentielles. Si les prix des actifs ne varient pas de facon continue , au moins ils varient fréquemment, et le modèle que nous proposons d'étudier a prouvé son utilité comme une approximation de la réalité. Notre hypothèse selon laquelle les prix des actifs n'ont pas de sauts est significative. Cela équivaut à l'affirmation qu'il n'y a pas de "surprises" sur le marché : le prix d'un stock à l'instant t peut être parfaitement prédit à partir de la connaissance de son prix à des moments strictement avant t. Nous adoptons cette hypothèse pour simplifier les mathématiques ; L'hypothèse supplémentaire selon laquelle les prix des actifs sont motivés par une motion brownienne n'est guère plus qu'un moyen commode de formuler cette condition.

Afin de décrire la structure aléatoire et informationnelle du marché financier, nous

supposons qu'il existe N sources de risques définies par un mouvement brownien de dimension D sur $[0,T]$ noté $W(t) = (W^1(t)......W^D(t))$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{F}$ et $W(0) = 0$ presque surement.
On suppose de plus que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$ définie comme étant la filtration naturelle engendrée par $W(t) = (W^1......W^D)$.

L'indépendance des accroissements est par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{F}^W(t) = \sigma(W\sigma(s); 0 \leq s \leq t)$ $\forall t \in [0,T]$ de W. La filtration naturelle de W est parfois appelée filtration brownienne.

Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^W)_t$ d'un Mouvement Brownien W est $(\sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}))_t$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des évènements négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.
De plus, W reste un Mouvement Brownien par rapport à sa filtration augmentée. L'augmentation de la filtration naturelle de W est encore appelée filtration naturelle de W ou filtration brownienne.

Le marché est constitué de $N+1$ actifs : L'actif dit Actif Sans Risque ; localement sans risque, il s'interprète comme un roll over d'un instrument du marché monétaire, et a pour rendement instantané

$$dS_0(t) = S_0(t)[r(t)dt + dA(t)], \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.1}$$

où $r(t)$ est un processus qui représente le taux court instantané en vigueur sur le marché monétaire avec

$$r(t) = \frac{\frac{d}{dt}S_0^{ac}}{S_0(t)}, \quad A(t) = \int_0^t \frac{dS_0^{st}(u)}{S_0(u)}. \tag{2.2}$$

(S_0^{ac} : absolument continues et S_0^{st} : singulièrement continues) De manière équivalente,

$$S_0(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du + A(t)\right), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Cas particulier : Si $S_0(t)$ est absoulement continu et si $A(.) = 0$, alors

$$S_0(t) = \exp \int_0^t r(u)du, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Ensuite ; les N autres actifs sont risqués avec des prix par action $S_1(t), ..., S_N(t)$ à l'instant t et avec $S_1(0), ..., S_N(0)$ des constantes positives. Les processus $S_1(.), ..., S_N(.)$ sont continues, strictement positifs, et satisfont aux équations différentielles stochastiques

$$dS_n(t) = S_n(t)\left[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}(t)dW^{(d)}(t)\right], \quad \forall t \in [0, T], n = 1, ..., N \tag{2.4}$$

La solution de l'équation est

$$S_n(t) = \exp\left(\int_0^t \sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}(S)dW^{(d)} + \int_0^t \left[b_n(S) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}^2(S)\right]dS + A(t)\right), \quad \forall t \in [0, T], n = 1, ..., N \tag{2.5}$$

$b(t) = (b_n(t); n = 1, ..., N)$ représente le vecteur des rendements moyens instantanés (taux court plus prime de risque) et où $\sigma(t) = (\sigma_{nd}(t); n, d = 1, ..., N)$ représente la matrice de co-volatilité des processus de rendements instantanés. Ainsi $\sigma\sigma'$ représente la matrice de variance-covariance des rendements instantanés. Les processus r, b, σ sont supposés adaptés à la filtration $\mathcal{F}_t$ et satisfont aux conditions d'intégrabilité classiques . De plus, $\sigma(t)$, est supposée inversible ; ce qui implique que le marché est complet (puisque le nombre d'actifs risqués est égal au nombre de mouvements browniens considérés).

Définition 2.3.1 *Un marché financier se compose de*

(i) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *;*

(ii) Une constante positive T*, dite temps terminal ;*

(iii) Un Mouvement Brownien D-dimensionnel $W(t), \mathcal{F}(t); 0 \leq t \leq T$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, où* $\mathcal{F}(t)_{0\leq t\leq T}$ *est l'augmentation (par les ensembles nuls dans* $\mathcal{F}^w(t)$*) de la filtration* $\mathcal{F}^w(t)_{0\leq t\leq T}$ *générée par* $W(.)$ *;*

(iv) Un processus de taux progressivement mesurable sans risque $r(.)$ *satisfaisant* $\int_0^T |r(t)| < \infty$ *presque sûrment (p.s) ;*

(v) Un processus de taux de retour moyen $b(.)$ *progressivement mesurable, à* N *dimensions, satisfaisant* $\int_0^T \|b(t)\| < \infty$ *p.s ;*

(vi) Un processus de taux de devidende N-dimensionnel progressivement mesurable $\delta(.)$ *satisfaisant* $\int_0^T \|\delta(t)\| < \infty$ *p.s ;*

(vii) Un processus de volatilité à valeurs matricielles $(N \times D)$ *progressivement mesurable* $\sigma(.)$ *satisfaisant* $\Sigma_{n=1}^{N} \sum_{d=1}^{P} \int_0^T \sigma_{nd}^2(t)dt < \infty$ *p.s ;*

(viii) Un vecteur de prix d'actions initiaux positifs et constants $S(0) = (S_1(0), ..., S_N(0))'$ *;*

(ix) Un processus progressivement mesurable, singulièrement continu, de variation finie $A(.)$ *dont la variation totale sur* $[0, t]$ *est notée par* $A(t)$.

2.4 Probabilité risque neutre

L'absence d'opportunité d'arbitrage est une hypothèse clé du modèle de Black et Scholes. Au début des années 80, Harrison et Kreps [12] et Harrison et Pliska [13] proposent une élégante interprétation des résultats de Black et Scholes.
Ces auteurs montrent en effet qu'à chaque date, le prix d'un actif est égal à l'espérance actualisée du payoff terminal, sous une mesure de probabilité appelée probabilité risque neutre, dont la définition est donnée par :

Définition 2.4.1 *Une probabilité* $\mathbb{Q}$ *est appelée probabilité risque-neutre ou probabilité martingale si* $\mathbb{Q}$ *est équivalente à* $\mathbb{P}$ *et si le prix actualisé* $\widetilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ *est une martingale sous* $\mathbb{Q}$.

La condition d'équivalence entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ signifie que pour tout évènement $A \subset \Omega$, si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors $\mathbb{Q}(A) > 0$ et vice versa. Autrement dit, ce que $\mathbb{P}$ prédit avec une probabilité strictement positive, $\mathbb{Q}$ le prédit aussi et la réciproque est vraie. Le nom martingale vient naturellement de la propriété martingale du prix actualisé. Le mot risque-neutre vient du fait que le rendement des actifs est égal au taux d'intérêt r sous $\mathbb{Q}$.
L'existence d'une probabilité risque neutre est acquise, mais pas son unicité. Le fait qu'il puisse exister plusieurs probabilités risques neutres nous conduit à la possibilité d'avoir plusieurs prix différents pour une même option.
Dans ce cas, on dit que le marché est incomplet. Mais lorsqu'il n'existe qu'une unique probabilité risque neutre, le marché est dit complet. Dans le modèle de Black et Scholes, le marché est complet en raison de l'utilisation du Mouvement Brownien et du théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *(Théorèmé de Girsanov) Soit* $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ *un Mouvement Brownien sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *et soit* $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, *la filtration engendrée par* *ce Mouvement Brownien. Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$, un processus adapté. Pour tout $0 \leq t \leq T$, posons*

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du\right)$$

et

$$\widehat{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u)du.$$

Supposons que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta^2(u)Z^2(u)\right] < \infty.$$

Soit $Z = Z(T)$. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité admettant Z comme densité par rapport à la mesure de probabilté $\mathbb{P}$. Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus $(\widehat{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ est un Mouvement Brownien.

2.5 Portefeuille autofinançant

Nous modélisons le concept de gestion dynamique de portefeuille. Considérons un agent qui peut investir dans les actifs de base du marché. Une stratégie de portefeuille est la donnée d'un processus adapté $\phi = (\phi_0, \varphi)$ où ϕ^0 et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ représente le nombre de parts investies dans l'actif S_0 et les actifs $S = (S_1, ..., S_N)$ à la date t, et dont la valeur est déterminée sur la base des informations disponibles juste avant t.

$\phi_0(t)$ et $\varphi_n(t)$ peuvent prendre des valeurs positives ou négatives correspondant à un achat ou une vente et puisqu'on a supposé que les actifs sont indéfiniment fractionnables. La valeur (ou richesse) de ce portefeuille à la date t est définie par

$$V(t, \phi) = \phi(t).X(t) = \phi_0(t)S_0(t) + \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t)S_n(t).$$

Dans les modèles discrets où l'investisseur ne peut négocier les titres qu'aux dates $t_0 = 0, ..., t_k$, la condition d'autofinancement s'écrit

$$\phi(t_k).X(t_k) = \phi(t_{k+1}).X(t_k)$$

ou encore de manière équivalente en mettant en évidence la variation des actifs entre deux dates

$$\phi(t_{k+1}).X(t_{k+1}) = \phi(t_k).X(t_k) + \phi(t_{k+1}).(X(t_{k+1}) - X(t_k))$$

$$= V(t_k, \phi) + \phi(t_{k+1}.(X(t_{k+1}) - X(t_k)). \tag{2.6}$$

Ceci traduit l'idée suivante : à l'instant t_k, aprés avoir pris connaissance des cours $X(t_k)$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition $\phi(t_k)$ à $\phi(t_{k+1})$, le réajustement se faisant au cours de la date t_k sans apport ni retrait de fonds extérieur. Autrement dit, les variations de la valeur d'un portefeuille autofinançant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. En notant $\Delta X(t_{k+1}) = (X(t_{k+1}) - X(t_k)$, on remarque d'aprés (2.6) que la valeur d'un portefeuille autofinançant s'écrit :

$$V(t_k, \phi) = V(0, \phi) + \Sigma_{i=1}^{k} \phi(t_i).\Delta X(t_i).$$

Dans un modèle en temps continu, une stratégie de portefeuille autofinançante (dans les actifs $X = (S_0, ..., S_N)$ est la donnée d'un processus adapté $\phi = (\phi_0, \varphi)$ tel que l'intégrale stochastique $\int \phi.dX$ existe et dont la valeur de portefeuille est caractérisée par

$$V(t, \phi) := \phi(t).X_t = V(0, \phi) + \int_0^t \phi(u) dX(u).$$

On écrit aussi la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinançant sous forme différentielle :

$$dV(t, \phi) = \phi_0(t) dS_0(t) + \varphi(t).dS(t) = (V(t, \phi) - \varphi(t).S(t)) r dt + \varphi(t).dS(t)$$

$$= rV(t, \phi) dt + \varphi(t).(-rS(t) dt + dS(t)). \tag{2.7}$$

Actualisation par le cash

Nous examinons la condition d'autofinancement lorsqu'on actualise par le cash.
On note $\widetilde{S}_n(t) = S_n(t)/S_0(t) = e^{-rt} S_n(t), n = 1, ..., N$, le prix actualisé (par rapport au cash) des actifs risqués, et $\widetilde{V}(t, \phi) = V(t, \phi)/S_0(t) = e^{-rt} V(t, \phi)$ la richesse actualisée. Alors par la formule d'Itô et (2.7), la dynamique de la valeur d'un portefeuille

autofinançant est

$$\widetilde{V}(t,\phi) = -re^{-rt}V(t,\phi)dt + e^{-rt}V(t,\phi) = e^{-rt}[-rV(t,\phi)dt + dV(t,\phi)]$$

$$e^{-rt}\varphi(t).(-rS(t)dt + dS(t))$$

$$\varphi(t).d\widetilde{S}(t),$$

ce qui s'écrit encore

$$\widetilde{V}(t,\phi) = \widetilde{V}(0,\phi) + \int_0^t \varphi(u)d\widetilde{S}(u) \tag{2.8}$$

Remarque 2.5.1 *Cette dernière relation montre donc qu'une stratégie de portefeuille autofinançant est complètement déterminée par la valeur initiale de sa richesse* υ *et les composantes* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ *dans les actifs risqués* $S_1, ..., S_N$*. En effet, en posant*

$$V(t) = S_0(t)\left(\upsilon + \int_0^t \varphi(u)d\widetilde{S}(u)\right),$$

$$\phi_0(t) = \frac{V(t) - \varphi(t).S(t)}{S_0(t)},$$

alors V *est la valeur de richesse du portefeuille autofinançant correspondant à un investissement* ϕ_0 *dans le cash* S_0, φ*, dans les actifs risqués* S*, et de richesse initiale* $V(0) = \upsilon$*. Autrement dit, une stratégie de portefeuille autofinançante est caractérisée par la donnée d'un couple* (V, φ) *de processus adaptés à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ *solution de l'équation*

$$dV(t) = rV_t + \varphi(t).(-rS(t)dt + dS(t)).$$

V *est la valeur de portefeuille,* φ *est le nombre de parts investies dans les actifs risqués* S*, et en conséquence* $\phi_0 = (V - \varphi.S)/S_0$ *est le nombre de parts investies dans l'actif sans risque* S_0*. Il sera parfois commode, pour alléger les notations, de supposer* $S_0 = 1$*, i.e.* $r = 0$*, ce qui revient à raisonner directement sur les quantités actualisées.*

Exemple 2.5.1 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la dynamique de la ri-*

chesse V d'un portefeuille autofinançant de stratégie φ dans l'actif S est :

$$dV(t) = rV(t)dt + \varphi(t)S(t)[(b-r)dt + \sigma dW(t)],$$

et celle de la richesse actualisée est donc :

$$d\widetilde{V}(t) = \varphi(t)\widetilde{S}(t)[(b-r)dt + \sigma dW(t)].$$

Il est parfois commode de travailler sur les montants au lieu des nombres d'unités investies en posant $\theta(t) = \varphi(t)S(t)$. Bien entendu les deux formulations sont équivalentes lorsque le prix est strictement positif. La dynamique de la richesse autofinançante associée à un montant θ dans l'actif risqué S s'écrit :

$$\begin{aligned} dV(t) &= (V(t) - \theta(t))rdt + \theta(t)\frac{dS(t)}{S(t)} \\ &= rV(t)dt + \theta(t)[(b-r)dt + \sigma dW(t)]. \end{aligned}$$

2.6 Arbitrage et probabilité risque-neutre

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est une condition cruciale dans la théorie de la valorisation de produits dérivés. Nous formalisons ce concept avec la définition suivante.

Définition 2.6.1 *Une opportunité d'arbitrage sur $[0,T]$ est une stratégie de portefeuille autofinançant ϕ dont la valeur $V(\phi)$ vérifie :*

(i) $V(0,\phi) = 0$

(ii) $V(T,\phi) \geq 0$ *et* $\mathbb{P}[V(T,\phi] > 0$.

Ainsi, un arbitrage représente la gestion dynamique d'un portefeuille autofinançant permettant à partir d'un capital nul, de créer sans risque un profit sûr.

Dans les modèles en temps continu, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sur les stratégies de portefeuille pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Nous préciserons ultérieurement les conditions d'intégrabilité sur les stratégies pour

exclure ce genre de pathologies. Nous appelerons stratégies admissibles de telles stratégies. Cet ensemble de stratégies admissibles doit être assez riche pour permettre l'évaluation et la couverture de nombreux produits dérivés et pas trop gros pour éviter les opportunités d'arbitrage.
Par exemple, des hypothèses de type carré intégrable ou encore des stratégies qui assurent une valeur de richesse toujours bornée inférieurement, i.e. ne conduidant pas à une banqueroute, sont suffisantes. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :
(AOA) Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage parmi les stratégies de portefeuille admissibles. On dit que le marché est viable. Nous énonçons une propriété simple mais importante de la condition d'AOA.

Proposition 2.6.1 *Sous l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles admissibles ayant la même valeur p.s. en T ont la même valeur p.s. à toute date intermédiaire t.*

Démonstration :
Pour simplifier les notations, on raisonne pour $t = 0$. Soit ϕ et ψ deux stratégies de portefeuille admissibles telles que $V(T, \phi) = V(T, \psi)$ p.s. et supposons par l'absurde que $V(0, \phi) > V(0, \psi)$.
Considérons alors la stratégie de portefeuille autofinançant qui consiste à $t = 0$ en une position $\psi - \phi$ dans les actifs, de valeur initiale $V(0, \psi) - V(0, \phi)$, et à investir le reste de gain positif V(0, ϕ)$-V(0, \psi)$ dans le cash. La valeur initiale de ce portefeuille est donc nulle et vaut à la date T :

$$V(T, \psi) - V(T, \phi) + (V(0, \phi) - V(0, \psi))S_n(T) = (V(0, \phi) - V(0, \psi))S_n(T) > 0$$

C'est une opportunité d'arbitrage.
La condition d'AOA impose aussi des conditions sur les prix. Dans un modèle en temps discret, par exemple le modèle binomial, on sait que la condition d'AOA implique l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$, appelée risque-neutre, équivalente à la probabilité objective telle que le prix des actifs actualisés soit une martingale. Ceci traduit l'idée que plus un titre est risqué, plus son rendement doit être élevé sous peine d'être exclu dans les stratégies de portefeuille.
Ce résultat fondamental de la finance a une version analogue en temps continu mais il est beaucoup plus délicat à montrer. Pour expliquer et justifier ce résultat en temps

continu, nous commençons par examiner le cas simple d'un modèle de Black-Scholes avec deux actifs de même volatilité σ et gouvernés par le même Mouvement Brownien :

$$dS_1(t) = S_1(t)(b_1 dt + \sigma dW(t)$$

$$dS_2(t) = S_2(t)(b_2 dt + \sigma dW(t).$$

Montrons alors que $b_1 = b_2$. Supposons le contraire, par exemple que $b_1 > b_2$. Considérons alors la stratégie où l'on achète 1 part de l'actif S_1, on vend $S_1(0)/S_2(0)$ parts de l'actif S_2, et on garde cette position jusqu'en T. La valeur initiale $V(0)$ de cette stratégie est nulle et conduit en T à un profit strictement positif :

$$V(T) = S_1(T) - \frac{S_1(0)}{S_2(0)} S_2(T) = S_1(0) \exp\left(\sigma W(T) - \frac{\sigma^2}{2} T\right) \left(e^{b_1 T} - e^{b_2 T}\right) > 0.$$

C'est donc un arbitrage. Notons aussi que si $\sigma = 0$, i.e. si S_1 et S_2 sont des actifs sans risque, alors ils doivent avoir le même rendement que S_0, i.e. $b_1 = b_2 = r$, sinon il serait facile de construire un arbitrage. On a donc l'existence d'un processus θ (constant ici dans le modèle de Black-Scholes) tel que :

$$b_1 = b_2 = r + \sigma\theta.$$

θ est appelé prix du marché du risque ou prime de risque. L'interprétation est la suivante : dans un marché financier, le rendement des titres risqués doit être supérieur à celui des titres sans risque pour qu'ils soient conservés, ceci traduit le fait que les investisseurs ont une aversion pour le risque. La prime de risque mesure donc l'écart entre le rendement instantané des actifs risqués et celui du cash.

En utilisant la prime de risque $\theta = (b - r)/\sigma$ dans le modèle de Black-Scholes , on voit que la dynamique du prix de l'actif risqué s'écrit :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)(\theta dt + dW(t)).$$

On observe ainsi qu'on peut annuler l'effet de la prime de risque en faisant un changement de probabilité sous lequel $dW(t) + \theta dt$ sera un Mouvement Brownien. Ceci est possible justement grâce au théorème de Girsanov : il existe une probabilité $\mathbb{Q}$

équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle :

$$\widehat{W}(t) = W(t) + \theta t,\ 0 \leq t \leq T$$

est un $\mathbb{Q}$ - Mouvement Brownien.
Cette probabilité a pour densité de Radon-Nikodym par rapport à $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\theta W(T) - \frac{\theta^2}{2}T\right). \tag{2.9}$$

La dynamique du prix de l'actif sous $\mathbb{Q}$ satisfait :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\widehat{W}(t),$$

ce qui se formule de manière équivalente en écrivant que la dynamique du prix actualisé $\widetilde{S}$ sous $\mathbb{Q}$ est :

$$d\widetilde{S}(t) = \sigma\widetilde{S}(t)d\widehat{W}(t).$$

Ceci signifie que le prix actualisé $\widetilde{S}$ est une intégrale stochastique par rapport au $\mathbb{Q}$-Mouvement Brownien, $\widehat{W}$ est donc une $\mathbb{Q}$-martingale. On dit que $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre ou probabilité martingale.

Remarque 2.6.1 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on se convainque aisément et on peut montrer qu'il n'y a qu'une manière de rendre le processus de prix actualisé martingale en faisant de $\widehat{W}(t) = W(t) + \theta t$ un Mouvement Brownien. Ceci implique l'unicité d'une probabilité risque-neutre, à savoir la probabilité $\mathbb{Q}$ définie en (2.9).*
On a ainsi deux univers de probabilité parallèles. L'espace de probabilité original $(\Omega, \mathbb{P})$ où le processus de prix est originallement défini et en parallèle un monde risque neutre défini par l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{Q})$ où le rendement de l'actif est r, le taux sans risque. Alors que le premier espace sert à modéliser les prix, nous verrons dans la section suivante que le second espace servira pour la valorisation d'options.
Nous terminons cette section en précisant les conditions d'admissibilité sur les stratégies de portefeuille. Fixons une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ et notons que d'aprés l'expression (2.8), la richesse actualisée d'une stratégie de portefeuille autofinançant est une intégrale stochastique par rapport à une martingale sous $\mathbb{Q}$. Sous des conditions

d'intégrabilité sur l'intégrand φ c'est une martingale sous $\mathbb{Q}$. On dira donc qu'une stratégie de portefeuille est $\mathbb{Q}$-admissible si sa richesse actualisée est une martingale sous $\mathbb{Q}$.
Dans le modèle de Black-Scholes, la dynamique de la richesse actualisée $\widetilde{V}$ d'un portefeuille autofinançant de stratégie φ dans l'actif S est sous $\mathbb{Q}$:

$$d\widetilde{V}(t) = \varphi(t)\sigma\widetilde{S}(t)d\widehat{W}(t).$$

Une condition suffisante garantissant que $\widetilde{V}$ est une martingale sous $\widetilde{Q}$ est la condition de carré intégrabilité sur l'intégrand φ :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T |\varphi(t)\sigma\widetilde{S}(t)|^2 dt\right] < +\infty.$$

Ceci implique en effet que l'intégrale stochastique caractérisant $\widetilde{V}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale de carré intégrable.

2.7 Evaluation et couverture par arbitrage

Considérons un produit dérivé (on dit aussi actif contingent) représenté par son flux (ou payoff) terminal, $H(T)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable : les cas typiques étant représentés par les options européennes $H(T) = h(S(T))$ où h est une fonction mesurable.
Par exemple $h(s) = (s - K)_+$ pour un call, $h(s) = (K - s)_+$ pour un put. La question cruciale est de donner un "juste" prix à ce produit dérivé. Pour répondre à cette question, plaçons nous pour fixer les idées du côté du vendeur. A la vente de ce produit dérivé, il reçoit en contrepartie une prime (prix de l'option) de la part de l'acheteur. Il peut alors investir la prime dans un portefeuille d'actifs de manière à avoir une valeur de portefeuille qui va dans le même sens des flux qu'il risque de payer.
La gestion d'un produit dérivé obéit donc aux opérations suivantes :

- suivre régulièrement le prix du produit dérivé dans le marché.
- gérer un portefeuille autofinançant, de valeur $V(t)$ en t, dont la valeur initiale est la prime de l'option.
- surveiller le P et L (profit et perte) final, i.e. la différence entre la valeur du

portefeuille et le montant du flux à payer (pour le vendeur), soit $V(T) - H(T)$. On parle aussi de "tracking error".

L'objectif du gestionnaire d'options est de réduire le P et L final afin d'avoir la variance la plus faible possible. Le meilleur portefeuille est appelé portefeuille de couverture. En particulier, s'il est possible de trouver un P et L final de risque nul, i.e. un portefeuille autofinançant de valeur terminale, le payoff de l'option, alors par la condition d'AOA, on pourra définir à toute date le prix de l'option comme la valeur du portefeuille autofinançant. On dit encore que l'option est (parfaitement) réplicable par une stratégie de portefeuille autofinançant, appelée portefeuille de couverture (parfaite) et le prix est appelé prix d'arbitrage.
Les questions qui se posent ensuite sont comment construire un tel portefeuille de couverture et comment avoir une formule pour le prix ? Nous allons répondre à ces problèmes de valorisation et de couverture par le principe d'évaluation risque-neutre.
Etant donnée la modélisation décrite aux sections précédentes, le problème de la valorisation et couverture d'une option de flux $H(T)$ se formule mathématiquement en la recherche d'une stratégie de portefeuille autofinançant ϕ tel que $V(T, \phi) = H(T)$. Si cela est possible, on dit que l'actif contingent $H(T)$ est attaignable ou réplicable (par la stratégie ϕ). Dans la suite, on considère des modèles où tous les actifs contingents (avec une condition d'intégrabilité appropriée) sont attaignables. On dit que le marché est complet.
On admettra la caractérisation suivante de la complétude de marché, énoncé comme second théorème fondamental de la finance :
Marché complet = unicité d'une probabilité risque-neutre
On se fixe désormais l'unique probabilité $\mathbb{Q}$ risque-neutre et on s'intéresse aux options de flux $H(T)$ satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}|H(T)| < +\infty$, i.e.$H(T) \in L^1(\mathbb{Q}, \mathcal{F})$. En marché complet, le flux $H(T)$ est attaignable (réplicable), i.e. il existe une stratégie de portefeuille ϕ $\mathbb{Q}$-admissible telle que $V(T, \phi) = H(T)$.
D'aprés la Proposition (2.6.1), on peut définir de mainère unique le prix d'arbitrage $\Pi(t) = \Pi(t)(H(T))$ en t de $H(T)$ comme la valeur $V(t, \phi)$ de ce portefeuille. ϕ est le portefeuille de couverture. On obtient la règle suivante d'évaluation risque-neutre :

Théorème 2.7.1 *En marché complet, le prix d'arbitrage d'une option de flux $H(T)$*

est donné à la date t par :

$$\Pi(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}H(T)|\mathcal{F}_t\right]. \tag{2.10}$$

Son prix à la date $t = 0$ *est*

$$\Pi(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H(T)\right].$$

Démonstration :

On a vu au paragraphe précédent que la richesse actualisée $\widetilde{V}(t,\phi) = e^{-rt}V(t,\phi)$ d'une stratégie ϕ $\mathbb{Q}$-admissible est une martingale sous $\mathbb{Q}$. Si le portefeuille ϕ réplique le flux $H(T)$, i.e. $V(T,\phi) = H(T)$, on a donc :

$$e^{-rt}V(t,\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}V(T,\phi)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H(T)|\mathcal{F}_t\right].$$

D'où l'on déduit immédiatement que

$$\Pi(t) = V(t,\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{T-t}H(T)|\mathcal{F}_t\right].$$

La régle d'évaluation risque-neutre est formellement trés simple : elle conduit à un calcul d'espérance sous la probabilité risque-neutre du payoff de l'option.

Nous discutons maintenant la couverture de l'actif contingent $H(T)$. Il s'agit donc de déterminer une stratégie de portefeuille $\phi = (\phi_0, \varphi)$ telle que $V(T,\phi) = H(T)$. Puisque $e^{-rt}\Pi(t) = \widetilde{V}(t,\phi)$ et par la condition d'autofinancement (2.8), on a avec le théorème 2.7.1 :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H(T)|\mathcal{F}_t\right] = \Pi(0) + \int_0^t \varphi(u)d\widetilde{S}(u) \tag{2.11}$$

C'est une équation intégrale d'inconnue le processus φ, avec un terme connu dans le membre de gauche et une intégrale stochastique d'intégrand inconnu dans le terme de droite. Par exemple, dans le cas d'un modèle de Black-Scholes, cette équation intégrale s'écrit encore :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H(T)|\mathcal{F}_t\right] = \Pi(0) + \int_0^t \varphi(u)\sigma\widetilde{S}(u)d\widehat{W}(u).$$

Comment résoudre une telle équation ? Si dans le terme de droite, à la place de l'inté-

grale d'Itô, on avait une intégrale standard dt par rapport au temps, on identifierait l'intégrand avec φ par différentiation par rapport au temps des termes de droite et gauche comme dans le cas d'une équation intégrale ordinaire.
Dans notre cas, nous avons une intégrale d'Itô et une telle dérivation n'est bien sûr pas autorisée. En fait, il existe un calcul différentiel approprié pour ces intégrales d'Itô utilisant les dérivées de Malliavin. Ces dérivées font appel à des notions avancées d'analyse stochastique que nous n'aborderons pas. En fait, dans le cas d'un modèle de diffusion avec des payoff européens $H(T) = h(S(T))$, on peut résoudre simplement cette équation par application de la formule d'Itô.

Remarque 2.7.1 *L'évaluation et la couverture d'un actif contingent* $H(T)$ *par arbitrage peut se formuler aussi de la manière suivante : trouver un couple de processus* $(\Pi(t), \varphi(t))$ *tel que* $\Pi(t)$ *soit la valeur d'un portefeuille autofinançant de composition* $\varphi(t)$ *dans l'actif risqué, répliquant* $H(T)$ *. D'aprés l'équation d'évolution (2.7) de la valeur d'un portefeuille autofinançant, on cherche donc un couple de processus adaptés* $(\Pi(t), \varphi(t))$ *tel que*

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt + \varphi(t)(-rS(t)dt + dS(t)) \tag{2.12}$$

$$\Pi(T) = H(T). \tag{2.13}$$

$\Pi(t)$ *est alors le prix de* $H(T)$ *et* $\varphi(t)$ *est la stratégie de portefeuille en actif* S *à la date* t*. Un tel système (2.12)- (2.13) est appelé équation rétrograde (backward en anglais) car on se donne la condition terminale et on cherche un couple de solutions dont la première composante doit atteindre l'objectif final* $H(T)$ *. Ceci contraste avec les équations différentielles stochastiques usuelles où l'on se donne la condition initiale. Notons que dans cette approche, il n'est pas nécessaire de travailler sous la probabilité risque neutre. On peut se placer sous la probabilité objective. Par exemple, dans le modèle de Black-Scholes, l'équation rétrograde (2.12)- (2.13) s'écrit encore :*

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt + \varphi(t)S(t)((b-r)dt + \sigma dW(t))$$

$$\Pi(T) = H(T).$$

C'est d'ailleurs formellement selon cette méthode et en utilisant les équations aux dérivées partielles (EDP) que Black et Scholes ont originalement découvert leur formule de prix et couverture. Bien entendu, les deux approches risque-neutre et backward sont équivalentes : Le couple $(\Pi(t), \varphi(t))$ *donné par (2.10), (2.11) est solution de l'équation (2.12)- (2.13).*

Chapitre 3

Optimal consumption and investment for exponential utility function

3.1 Introduction

One of the principal questions in mathematical finance is the optimal investment consumption problem for continuous time market models. By applying results from stochastic control theory, explicit solutions have been obtained for some special cases (see e.g. Karatzas and Shreve [15], Korn [18] and references therein). Kluppelberg and Pergamenshchikov [17] considered the optimal investment/consumption problem with uniform risk limits throughout the investment horizon for power utility functions. In this paper, we investigate the optimal investment/consumption problem for exponential utility functions over the whole investment horizon $[0, T]$. Using a new approach, called martingale method of convex duality, we find all optimal solutions in explicit form.

Our paper is organized as follows. Section 3.2 and 3.3 describe the market model and the set of consumption and portfolio processes from which the investor in this market is free to choose. Section 3.4 introduces the notion of utility function. We allow these functions to take the value $-\infty$ on a half-line extending to $-\infty$, which effectively places a lower constraint on consumption and/or wealth. Section 3.5 solves the problem of an agent who seeks to maximize expected utility from consumption and terminal wealth. The method of solution uses the convex dual function (Legendre transform) of the utility function. Related to this concept, we introduce and study the convex dual of the value function for the problem of Section 3.6. In Section 3.7, we present our main results.

3.2 The model

We consider a Black-Scholes type financial market consisting of one riskless bond and several risky stocks on the interval $[0,T]$. Their respective prices $(S_0(t))_{t\geq 0}$ and $(S_i(t))_{t\geq 0}$ for $i=1,...,d$ evolve according to the equation :

$$\begin{cases} dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, & S_0(0)=1, \\ dS_i(t) = S_i(t)\mu_i(t)dt + S_i(t)\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j(t), & S_i(0)=s_i>0. \end{cases}$$

Here $W(t) = (W_1(t),...,W_d(t))'$ is a standard d-dimensional Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ on a probability space $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$; $r(t)\in\mathbb{R}$ is the risk-free rate process satisfying $\int_0^T |r(t)|dt<\infty$ almost surely, $\mu(t)=(\mu_1(t),...,\mu_d(t))'\in\mathbb{R}^d$ is the vector of stock-appreciation rates and $\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq d}$ is the matrix of stock-volatilities satisfying $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D}\int_0^T \sigma_{nd}^2(t)dt<\infty$ a.s. We also assume that the matrix $\sigma(t)$ is non-singular for Lebesgue-almost all $t\geq 0$.

We denote by $\mathcal{F}_t=\sigma\{W_s, s\leq t\}, t\geq 0$, the filtration generated by the Brownian motion (augmented by the null sets). Furthermore, $|.|$ denotes the Euclidean norm for vectors and the corresponding matrix norm for matrices and prime denotes the transposed. We then introduce the martingale

$$\theta(t) := \sigma(t)^{-1}(\mu(t)-r(t)1) \quad \text{with} \quad 1=(1,...,1)'\in\mathbb{R}^d,$$

$$Z_0(t) := \exp\left\{-\int_0^t \theta'(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \theta(s) \parallel^2 ds\right\}.$$

For a standard market, we define the standard martingale measure $\mathbb{P}_0$ on $\mathcal{F}_T$ by

$$\mathbb{P}_0(A) := \mathbb{E}\left[Z_0(T)\mathbb{I}_A\right], \ \forall A\in\mathcal{F}_T,$$

We say that $\mathbb{P}_0$ and $\mathbb{P}$ are equivalent on $\mathcal{F}_T$ and the drifted Brownian motion

$$W_0(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \quad 0 \le t \le T.$$

According to Girsanov theorem, W_0 is a standard Brownian motion under $\mathbb{P}_0$ and

$$H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}.$$

For this model, the following condition will be imposed.

Assumption 3.2.1 *The state price density process H_0 satisfies*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right] < +\infty.$$

A sufficient condition for these assumption is that $S_0(\cdot)$ be bounded away from zero on $[0, T]$, so that $H_0(\cdot)$ is bounded from above by a constant times the nonnegative supermartingale $Z_0(\cdot)$.

3.3 Portfolio and consumption processes

Definition 3.3.1 *A portfolio process $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), ..., \pi_d(\cdot))^T$ is a measurable, $\{\mathcal{F}(t)\}$-adapted, $\mathbb{R}^d$-valued process satisfying $\int_0^T \|\pi(t)\|^2 dt < \infty$ a.s.*
A consumption process is an $\{\mathcal{F}(t)\}$ progressively measurable, nonnegative process $c(\cdot)$ satisfying $\int_0^T c(\cdot)dt < \infty$, almost surely.

The set of all consumption/portfolio process pairs which are admissible for x will be denoted by $\mathcal{A}$.

Definition 3.3.2 *Given $x \ge 0$, we say that a consumption and portfolio process pair (c, π) is admissible at x, and write $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x)$, if the wealth process $X^{x,c,\pi}(\cdot)$ corresponding to x, c, π satisfies*

$$X^{x,c,\pi}(t) \ge 0, \ 0 \le t \le T, \ a.s.$$

For $x < 0$, we set $\mathcal{A}(x) = \emptyset$.

Theorem 3.3.1 *[15] Let $x \geq 0$ be given, let $c(\cdot)$ be a consumption process, and let ξ be a nonnegative, $\mathcal{F}(T)$-measurable random variable such that*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(u)c(u)du + H_0(T)\xi\right] = x. \tag{3.3.1}$$

Then there exists a portfolio process $\pi(\cdot)$ such that the pair (c, π) is admissible at x and $\xi = X^{x,c,\pi}(T)$.

3.4 Utility functions

We desire to maximize our utility. In this section, we develop the properties of the utility functions that we consider. We also introduce the *convex dual* of an utility function.

Definition 3.4.1 *An utility function is a concave, nondecreasing, upper semicontinuous function $U : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ satisfying :*

i) the half-line $dom(U) := \{x \in \mathbb{R};\ U(x) > -\infty\}$ is a nonempty subset of $[0, \infty)$;

ii) U' is continuous, positive, and strictly decreasing on the interior of $dom(U)$, and

$$U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

We set

$$\bar{x} := \inf\{x \in \mathbb{R}; U(x) > -\infty\}$$

so that $\bar{x} \in [0, \infty)$ and either $dom(U) = [\bar{x}, \infty)$ or $dom(U) = (\bar{x}, \infty)$.
We define

$$U'(\bar{x}+) := \lim_{x\to\bar{x}} U'(x),$$

so that $U'(\bar{x}+) \in (0, \infty]$.
In this work, we choose $U_1(t, x) = U_2(x) = 1 - \exp(-x)$ and set

$$U(x) := \begin{cases} 1 - \exp(-x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$$

The Arrow-Pratt index of risk aversion, $-\dfrac{U''(x)}{U'(x)} = 1$.
We denote by $U'(t,x)$ the derivative of U with respect to its second variable, and we denote by $I(t,\cdot)$ the inverse of $U'(t,\cdot)$.

3.4.1 Formulation of the dual problem.

Definition 3.4.2 *Let U be an utility function. The convex dual of U is the convex function*

$$\tilde{U}(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \{U(x) - xy\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.4.1}$$

Except for the presence of some minus signs, $\tilde{U}(y)$ is the Legendre-Fenchel transform of U (Rockafellar [29], Ekeland and Temam [7]). Indeed, if we define the convex function

$$f(x) := -U(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

then the Legendre-Fenchel transform of f is

$$f^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \{xy - f(x)\} = \tilde{U}(-y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.4.1 *[15] Let $\tilde{U}$ be the convex dual of U. Then $\tilde{U} : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ is convex, nonincreasing, lower semicontinuous, and satisfies*

i)

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y), & y > 0, \\ U(\infty) := \lim_{x\to\infty} U(x), & y = 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases}$$

ii) The derivative $\tilde{U}'$ is defined, continuous, and nondecreasing on $(0,\infty)$, and

$$\tilde{U}'(y) = -I(y), \quad 0 < y < \infty.$$

iii) For all $x \in \mathbb{R}$,

$$U(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\{\tilde{U}(y) + xy\right\}.$$

iv) For fixed $x \in (\bar{x}, \infty)$, the function $y \mapsto \tilde{U}(y) + xy$ is uniquely minimized over

$\mathbb{R}$ *by* $y = U'(x)$ *; i.e.,*

$$U(x) = \tilde{U}(U'(x)) + xU'(x).$$

3.5 The optimization problem

Definition 3.5.1 *(time-separable, von Neumann-Morgenstern) A preference structure is a pair of functions* $U_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *and* $U_2 : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *as described below :*

(i) For each $t \in [0,T]$*,* $U_1(t, \cdot)$ *is a utility function, and the subsistence consumption*

$$\bar{c}(t) := \inf\left\{c \in \mathbb{R}; U_1(t,c) > -\infty\right\}, \quad 0 \le t \le T,$$

is a continuouse function of t*, with values in* $[0, \infty)$ *;*

(ii) U_1 *and* U_1' *(where the prime denotes differentiation with respect to the second argument) are continuous on the set*

$$D_1 := \left\{(t,c) \in [0,T] \times (0,\infty);\ c > \bar{c}(t)\right\};$$

(iii) U_2 *is an utility function, with subsistence terminal wealth defined by*

$$\bar{x} := \inf\left\{x \in \mathbb{R};\ U_2(x) > -\infty\right\}.$$

Let an agent have an initial endowment $x \in \mathbb{R}$ and a preference structure (U_1, U_2). The agent can consider the problem whose elements of control are the admissible consumption and portfolio processes in $\mathcal{A}(x)$ of Definition 3.3.2.
Problem : Find an optimal pair $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x)$ for the problem

$$V(x) := \sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X^{x,c,\pi}(T))\right] \tag{3.5.1}$$

of maximizing expected total utility from both consumption and terminal wealth.
In this work we choose $U_1(t,x) = U_2(x) = 1 - \exp(-x)$.
Because of the strict concavity of $U_1(t, \cdot)$ and U_2, if such a pair exists, the consumption process component $c(\cdot)$ and the corresponding terminal wealth $X^{x,c,\pi}(T)$ are uniquely

determined (see Xu [34], theorem 2.4.5). Our goal is to compute the value function V of this problem and to characterize optimal pair (c, π) that attain the suprema in (3.5.1).

Remark 3.5.1 *(i) Because $\bar{c}(\cdot)$ is continuous, there exists a finite number $\hat{c}$ such that $\hat{c} > (\bar{x} \vee \max_{0 \le t \le T} \bar{c}(t))$. From the continuity of U_1 on $D_1 \supset [0, T] \times [\hat{c}, \infty)$, we have*

$$\int_0^T \mid 1 - \exp(-\hat{c}(t)) \mid dt + \mid 1 - \exp(-\hat{c}(T)) \mid < \infty$$

Furthermore, under the Assumption 3.2.1, the quantity

$$\mathcal{X}(\infty) := \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)\bar{c}(t)dt + H_0(T)\bar{x}\right], \tag{3.5.2}$$

is finite.

(ii) For our Problem, we must have initial wealth at least $\mathcal{X}(\infty)$ in order to avoid expected utility of $-\infty$. Indeed, for this problem, the preference structure forces the constraints

$$c(t) \geq \bar{c}(t), \quad a.e.t \in [0, T], \tag{3.5.3}$$

$$X^{x,c,\pi}(T) \geq \bar{x}, \quad a.e. \tag{3.5.4}$$

For otherwise $\mathbb{E}\left[\int_0^T 1 - \exp(-c(t))dt + 1 - \exp(-X^{x,c,\pi}(T))\right]$ would be $-\infty$. But (3.5.3), (3.5.4), and (3.5.2) imply

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)c(t)dt + H_0(T)X^{x,c,\pi}(T)\right] \geq \mathcal{X}(\infty) \tag{3.5.5}$$

For $x = \mathcal{X}(\infty)$, any $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x)$ satisfying (3.5.3), (3.5.4) must actually satisfy $c(t) = \bar{c}(t)$, $X^{x,c,\pi}(T) = \bar{x}$. According to Theorem 3.3.1 there is in fact a portfolio process $\bar{\pi}$ for which $X^{\mathcal{X}(\infty),\bar{c},\bar{\pi}}(T) = \bar{x}$, and we conclude that

$$V(x) = \begin{cases} \int_0^T 1 - \exp(-\bar{c}(t))dt + 1 - \exp(-\bar{x}), & x = \mathcal{X}(\infty) \\ -\infty, & x < \mathcal{X}(\infty). \end{cases} \tag{3.5.6}$$

3.6 Utility from consumption and terminal wealth

We define the function

$$\mathcal{X}(y) := \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)I(t, yH_0(t))dt + H_0(T)I(yH_0(T))\right], \ 0 < y < \infty. \qquad (3.6.1)$$

Assumption 3.6.1 $\mathcal{X}(y) < \infty, \ \forall y \in (0, \infty)$.

Lemma 3.6.1 *[15] Under Assumption 3.6.1, the function $\mathcal{X}$ is nonincreasing and continuous on $(0,\infty)$, and strictly decreasing on $(0, r)$, where $\mathcal{X}(0+) := \lim_{y\to 0} \ \mathcal{X}(y) = \infty$ and $\mathcal{X}(\infty) := \lim_{y\to\infty} \mathcal{X}(y)$ is given by (3.5.2), and*

$$r := \sup\{y > 0; \ \mathcal{X}(y) > \mathcal{X}(\infty)\} > 0. \qquad (3.6.2)$$

In particular, the function $\mathcal{X}$ restricted to $(0, r)$ has a strictly decreasing inverse function $\mathcal{Y} : (\mathcal{X}(\infty), \infty) \to (0, r)$, so that

$$\mathcal{X}(\mathcal{Y}(x)) = x, \quad \forall x \in (\mathcal{X}(\infty), \infty) \qquad (3.6.3)$$

We only need to consider initial wealth x in the domain $(\mathcal{X}(\infty), \infty)$ of $\mathcal{Y}(\cdot)$. For such an x, we know from budget constraint and Theorem 3.3.1 that our problem amounts to maximizing $\mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - \exp(-c(t)))dt + (1 - \exp(-\xi))\right]$ over pairs (c, ξ), consisting of a consumption process $c(.)$ and a nonnegative $\mathcal{F}(T)$-measurable random variable ξ, that satisfy the budget constraint, namely, $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)c(t)dt + H_0(T)\xi\right] \leq x$. Now, if $y > 0$ is a "Lagrange multiplier" that enforces this constraint, the problem reduces to the unconstrained maximization of
$\mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - \exp(-c(t)))dt + (1 - \exp(-\xi))\right] + y\left(x - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)c(t)dt + H_0(T)\xi\right]\right)$.
But this expression is

$$\begin{aligned} xy + \mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - \exp(-c(t))) - yH_0(t)c(t)\right] dt + \mathbb{E}\left[(1 - \exp(-\xi)) - yH_0(T)\xi\right] \\ \leq xy + \mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t, yH_0(t))dt + \tilde{U}_2(yH_0(T))\right], \end{aligned}$$

(where $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1 - \exp(-x)) - xy\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.)
with equality if and only if

$$c(t) = I(t, yH_0(t)), \quad 0 \le t \le T \quad \text{and} \quad \xi = I(yH_0(T)).$$

(recall (3.4.1) and Lemma (3.4.1i)). Quite clearly, $y = \mathcal{Y}(x)$ is the only value of $y > 0$ for which the above pair (c, ξ) satisfies the budget constraint with equality. Thus, for every $x \in (\mathcal{X}(\infty), \infty)$, we are led to the **candidate optimal terminal wealth**

$$\xi := I(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \tag{3.6.4}$$

and the **candidate optimal consumption process**

$$c(t) := I(t, \mathcal{Y}(x)H_0(t)), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.6.5}$$

From (3.6.1), (3.6.3), we have

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(u)c(u)du + H_0(T)\xi\right] = \mathcal{X}(\mathcal{Y}(x)) = x, \tag{3.6.6}$$

Theorem 3.6.2 *[15] Suppose that both Assumptions 3.2.1 and 3.6.1 hold, let $x \in (\mathcal{X}(\infty), \infty)$ be given, let ξ and $c(\cdot)$ be given by (3.6.4), (3.6.5), and let $\pi(\cdot)$ be such that $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x), \quad \xi = X^{x,c,\pi}(T)$. Then $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x)$, and (c, π) is optimal for our problem*

$$V(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - \exp(-c(t))dt + (1 - \exp(-X^{x,c,\pi}(T)))\right]. \tag{3.6.7}$$

Corollary 3.6.1 *[15] Under the assumptions of Theorem 3.6.2, the optimal wealth process $X(t) = X^{x,c,\pi}(t)$ is*

$$X(t) = \frac{1}{H_0(t)}\mathbb{E}\left[\int_t^T H_0(u)c(u)du + H_0(T)\xi \mid \mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \le t \le T. \tag{3.6.8}$$

Furthermore, the optimal portfolio π is given by

$$\sigma'(t)\pi(t) = \frac{\psi(t)}{H_0(t)} + X(t)\theta(t), \tag{3.6.9}$$

in terms of integrand $\psi(\cdot)$ in the stochastic integral representation $M(t) = x + \int_0^t \psi'(u)dW(u)$ of the martingale

$$M(t) := \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(u)c(u)du + H_0(T)\xi \mid \mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.6.10}$$

The value function V is then given as

$$V(x) = G(\mathcal{Y}(x)), \quad \mathcal{X}(\infty) < x < \infty, \tag{3.6.11}$$

where

$$G(y) := \mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - (yH_0(t)))dt + (1 - (yH_0(T)))\right], \quad 0 < y < \infty \tag{3.6.12}$$

3.7 Main result

Theorem 3.7.1 *Suppose that both Assumptions 3.2.1 and 3.6.1 hold, the optimal value of $V(x)$ for Problem 3.5.1 is given by*

$$V(x) = (T+1) - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right] \exp\left(\frac{\mathcal{X}(1) - x}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]}\right), \quad 0 < x < \infty$$

The optimal terminal wealth is given by

$$X^{x,c,\pi}(T) = \xi = \frac{x - \mathcal{X}(1)}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]} - \ln(H_0(T)).$$

The optimal consumption is given by

$$c(t) = \frac{x - \mathcal{X}(1)}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]} - \ln(H_0(t)).$$

where

$$\mathcal{X}(1) = -\left(\mathbb{E}\int_0^T H_0(t)\ln H_0(t)dt + H_0(T)\ln H_0(T)\right).$$

Proof. $U_1(t,x) = U_2(x) = 1 - \exp(-x),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times (0,\infty)$.
We have $I_1(t,y) = I_2(y) = -\ln y$ for $0 < y < \infty$, and

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(y) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)I_1(t, yH_0(t))dt + H_0(T)I_2(yH_0(T))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)(-\ln(yH_0(t))dt + H_0(T)(-\ln(yH_0(t))\right] \\
&= -\ln y\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right] + \mathcal{X}(1),\ 0 < y < \infty
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}(x) = \exp\left(\frac{\mathcal{X}(1) - x}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]}\right), \quad 0 < x < \infty.$$

The optimal terminal wealth and the optimal consumption process are given as

$$\begin{aligned}
\xi &= I(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \\
&= -\ln(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \\
&= -\ln\left(H_0(T)\exp\left(\frac{x - \mathcal{X}(1)}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]}\right)\right) \\
&= \frac{x - \mathcal{X}(1)}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]} - \ln(H_0(T))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(t) &= I(t, \mathcal{Y}(x)H_0(t)) \\
&= \frac{x - \mathcal{X}(1)}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]} - \ln(H_0(t))
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{1}{H_0(t)}\mathbb{E}\left[\int_t^T H_0(u)c(u)du + H_0(T)\xi \mid \mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \leq t \leq T. \\
&= \frac{x + 2\mathcal{X}(1)}{H_0(t)}\mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{H_0(u)}{\int_0^T H_0(u)du + H_0(T)}du + \frac{H_0(T)}{\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)} \mid \mathcal{F}(t)\right].
\end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (1 - (yH_0(t)))dt + (1 - (yH_0(T)))\right], \quad 0 < y < \infty \\
&= (T+1) - y\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right].
\end{aligned}$$

$$G(\mathcal{Y}(x)) = (T+1) - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]\exp\left(\frac{\mathcal{X}(1) - x}{\mathbb{E}\left[\int_0^T H_0(t)dt + H_0(T)\right]}\right).$$

■

Conclusion

Nous étudions un problème de consommation et d'investissement optimal pour le marché financier de type Black-Scholes sur l'ensemble de l'intervalle d'investissement $[0, T]$.
En choisissant une fonction d'utilité particulière et en utilisant la méthode de dual convexe de la fonction, nous formulons divers problèmes de maximisation d'utilité, qui peuvent être résolus explicitement. Nous étudions également le dual convexe de la valeur de fonction pour notre problème.

Bibliographie

[1] F. E. Benth,*Option Theory with Stochastic Analysis, An Introduction to Mathematical Finance*Springer-Verlag, 2004.

[2] N. Bingham et R. Kiesel,*Risk-neutral valuation, 2nde édition.*Springer, Verlag, 2004.

[3] P. Brézis,*Analyse Fonctionelle, théorie et applications.*Masson, 1990.

[4] K. L. Chung and R. J. Williams,*Introduction to Stochastic Intégration* Birkhauser, 1990.

[5] F. Comets et T. Meyre,*Calcul Stochatique et Modèles de Diffusions*Dunod, Paris, 2006.

[6] R. A. Dana et M. Jean blanc,*Marché Financiers en Temps Continu, 2nd édition*Economica, 2002.

[7] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*North Holland, Amsterdam and American Elsevier, New York, 1976.

[8] F.Limam-Belarbi and F. Z. Tahraoui,*Optimal Consumption and Investment for Exponential Utility Function* MATHEMATICAL SCIENCES AND APPLICATIONS E-NOTES, 5(1)19-26, 2017.

[9] F. Black and M. Scholes,*The Pricing of Options and Corporate Liablities, The Journal of Political Economy* The University of Chicago Press, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654, 1973.

[10] Guillaume Tergny,*Allocation dynamique de portefeuille avec profil de gain asymétrique : risk management, incitations financières et benchmarking. Economies et finances.*Thèse, 2011.

[11] N. El Karoui,*Couverture de Risques Financiers, notes de Cours DEA*Paris, 2003.

[12] J. M. Harrison and D. M. Kreps,*Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets* Journal of Economic Theory, 20, 381-408, 1979.

[13] J. M. Harrison and S. R. Pliska,*Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continuous Trading* 11, 215-260, 1980.

[14] T. Hida,*Brownien Motion*Springer-Verlag, 1980.

[15] I. Karatzas et S. E. Shreve,*Brownian Motion Stochastic Calculus*Springer-Verlag, New-York, 1988.

[16] I. Karatzas and S. E. Shreve,*Méthods of mathématical Finance, Appl. Math* ; vol. 39, Springer-Verlag, New York, 1998.

[17] C. Kluppelberg and S. Pergamenchtchikov,*Optimal Consumption and Investment with Bounded Downside Risk for Power Utility Functions* Optimality and Risk - Modern Trends in Mathematical Finance, 133-170, 2010.

[18] R. Korn, *Optimal Portfolios. World Scientific* Singapore, 1997.

[19] H. Kunita and S. Watanabe,*On Square Integrable Martingales* Nagoya Math.J, 30, 209-245, 1967.

[20] D. Lamberton et B. Lapeyre,*Introductions au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance* Ellipses Édition Marketing, Paris, 1991.

[21] J. F. Le Gall,*Introduction au Mouvement Brownien, Gazette des Mathématiciens* 40, 43 - 64, Soc.Math, France, 1973.

[22] J. F. Le Gall,*Mouvement Brownien, Martingales et Calcul stochastique* Spinger, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013.

[23] R. C. Merton,Optimum Consumption and Portofio Rules in a Continuous Model.Journal of Economic Theory, 3 :373-413, 1971.

[24] M. Musiela and M. Rutkowski,*Martingale Methods and Financial Modelling, 2nd édition*Springer-Verlag, 2005.

[25] E. Pardoux and S. Pengs,*Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Eqaution, Sytems Control Lett*14, No 1, 55-61, 1990.

[26] H. Pham,*Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à Finance (Matihématiques et Applications)*Springer, 2007.

[27] J. Priolon,*Les marchés financiers(cours), AgroParisTech.*Paris, novembre 2007.

[28] D. Revuz and M. Yor,*Continuous Martingales and Brownien Motion*Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[29] R.T. Rockafellar,Convex Analysis. Princeton University Press Princeton, NJ 1970.

[30] L. C. G.Rogers,Equivalent martingale measures and no-arbitrage.Stoch. Stoch. Rep., 51 :41-49, 1994.

[31] C. Stricker, Y. Kabanov,*A teacher's note on no-arbitrage.*Séminaire de probabilités, 149-152, 1991.

[32] D. W. Stroock and S.R.S Varadhan,*Multidimensional Diffusion Processus*Springer, Berlin, 1979.

[33] Terry. J. Lyons,*Differential Driven by Rough Singnals, Rev.Mat*14, No 2, 215-310, 1998.

[34] G.L. Xu,*A Duality Method for Optimal Consumption and Investment Under Short-Selling Prohibition* Doctoral Dissertation, Department of Mathematics, Carnegie-Mellon University, 1990.