

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes
Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



THÈSE de Doctorat

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures & Matériaux
Par Mr SADOUNE MOHAMED

Intitulée

**AMELIORATION DE LA THEORIE DE PREMIER ORDRE DES
PLAQUES POUR L'ETUDE DE LA VIBRATION LIBRES DES
PLAQUES EN FGM**

Soutenue publiquement Le 04/12/2014 devant le jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Professeur		Président de jury
ADDA BEDIA.EIAbbés	Professeur	U.D.L – SBA	Directeur de thèse
AIT ATMANE Hassen	MCA	U. DE CHLEF	Examineur
AMEUR Mohammed	MCA	E.N.P ORAN	Examineur
BACHIR.BOUDIJR.M	MCA	U.D.L – SBA	Examineur
BERRABAH.Hamza.M	MCA	C.U. RELIZANE	Examineur
SAMIR RIFAL.M	Professeur	U.Djeddah	Invité

Année universitaire 2014/2015

Remerciement

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je remercie profondément monsieur le professeur A.ADDA Bedia qui a su me diriger tout au long de cette thèse avec patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa patience et ses approches toujours à la fois scientifique et pratique ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Je remercie monsieur le professeur A. Tounsi pour ces conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés et j'exprime également toute ma reconnaissance au soutien scientifique important qui m'a apporté à mon travail de recherche. Je tiens à lui rendre hommage à ses qualités humaines et pédagogiques et accepte de présider mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : maîtres de conférences M. Ameer à l'ENP Oran, AIT ATMAINE Hassen maître de conférences l'université de Chlef, M.B. Boudjra maître de conférences l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés et Monsieur H.M. Berrabah maître de conférences au centre universitaire de Relizane qui ont voulu examiner ce travail.

Je désire aussi exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues et amis du laboratoire des matériaux et hydrologie (L.M.H) de l'université Djilali Liabess de Sidi Belabess et en particulier Messieurs Nedri Kada, Moussa Abonour et Messieurs Youzera hadj , Touati Mahmod et Houari Mohammed Sid Ahmed des maîtres de conférences auprès de l'université de Mascara, qui sont Contribués par leurs conseils et leurs réflexions à l'élaboration du présent mémoire.

A toute ma famille et à tous mes collègues du département de Génie Civil de l'Université de Mascara, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

DEDICACES

À mon très cher père.

À ma mère,

À mes frères Miloud, Dahmen, Habib, Hamid et Hanifi,

À Mes soeurs Halima, Yamina, Khayra et Houwaria,

À ma femme Salima et mon fils mehdi,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

ملخص

ملخص

في هذه الدراسة، قدمت نظرية جديدة بسيطة من الدرجة الأولى لتشوه القص للصفائح المركبة المغلفة، علاوة على ذلك، عدد المجاهيل من هذه النظرية هو أقل واحد مقارنة مع النظرية التقليدية الأولى و النظريات العليا لتشوه القص. تستمد معادلات الحركة وشروط الحدود من مبدأ هاملتون. ويتم الحصول على الحلول التحليلية المعتمدة ببساطة عبر رقائق الشرائح وتتم مقارنة النتائج مع حلول ثلاثي الأبعاد الدقيقة وتلك التي تنبأت بها النظريات القائمة .

كلمات مفاتيح: صفيحة مركبة مغلفة ؛ نظرية صفيحة ؛ الانحناء؛ الاهتزازات.

-

Résumé

Résumé :

Dans la présente étude, une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement du premier ordre est présentée pour l'étude du comportement statique et vibration libre des plaques composites stratifiées et FGM. Le nombre d'inconnues de cette théorie est le moins par rapport à la théorie du premier-ordre traditionnel et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont dérivées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de structure stratifiées antisymétriques à plis croisés et équilibrés sont obtenus, et les résultats sont comparés avec les solutions exactes (3D) en trois dimensions et celles prédites par les théories existantes.

Mots-clés: plaque composite stratifiée; théorie de la plaque; flexion; vibrations

Abstract

Abstract

In the present study, a new simple first-order shear deformation theory is presented for laminated composite and FGM plates. Moreover, the number of unknowns of this theory is the least one comparing with the traditional first-order and the other higher-order shear deformation theories. Equations of motion and boundary conditions are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions of simply supported antisymmetric cross-ply and angle-ply laminates are obtained and the results are compared with the exact three-dimensional (3D) solutions and those predicted by existing theories. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the static bending and free vibration behaviors of laminated composite plates.

Keywords : Laminated composite plate; plate theory; bending; vibration

Table des matières

TABLE DES MATIERES

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale.....	1
chapitre I «Généralités sur les matériaux composites»	
I.1. Introduction.....	5
I.2. Les constituants des matériaux composites	5
la matrice	5
I.2.2. les fibres.....	7
I.3. Classification des matériaux composites.....	9
I.3.1. Classification suivant la forme des constituants	9
I.3.2. Classification suivant la nature des constituants	10
I.4. Architecture des matériaux composites.....	11
I.4.1. stratifié.....	11
I.4.2. composites Hybrides.....	14
I.4.3. Sandwichs.....	14
I.5. Endommagement des matériaux composites.....	16
I.5.1. Composites unidirectionnels.....	16
a. comportement en traction.....	16
b. comportement en compression longitudinale	17
I.6. Loi de comportement.....	19
I.6.1. Matrice de flexibilité ou souplesse	19
I.6.2. Matériau anisotrope	20
I.6.3. Matériau monoclinique.....	20
I.6.4. Matériau orthotrope	21
I.6.5. Matériau transversalement isotrope	22

I.6.6. Matériau isotrope	22
1.7. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM)	23
I.7.1. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	23
I.8. Conclusion	25

CHPITRE II « Evolution des théories des structures composites stratifiée »

II.1. Introduction	27
II.2. Facteur de correction de cisaillement transversal	29
II.3. synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur	30
II.4 conclusion.....	33

CHPITRE III « une étude d'analytique des plaques composites stratifiée en statique et en vibration»

III.1. Introduction	35
III.2. Formulation théorique.....	35
III.2.1. Hypothèse de base.....	36
III.2.2. Cinématique	36
III.2.3. Equation du mouvement	38
III.3. Solution exacte pour une structure stratifiés antisymétriques à plis équilibrés et croisés simplement appuyés.	41
III.4. Conclusion.....	45

CHPITRE IV « Validation et comparaison des résultats« plaques stratifiées»

IV.1. introduction	47
IV.2. Analyse en flexion	48
IV.3. Analyse en vibration libre.....	54
IV.4. Conclusion	59

CHPITRE V « Validation et comparaison des résultats« plaques FGM»

V.1. introduction	61
V.2. Relations constitutives.....	61
V.3. Etude de comparaison	64
V.4. Etudes de paramètres	68
V.5. Conclusion	75
Conclusion Générale	77
Références bibliographiques	79
ANNEX	90

Liste des tableaux

CHAPITRE IV

Tableau IV.1: Modèles de déplacement 47

Tableau IV.2: la flèche adimensionnelle \bar{w} de deux couche d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90)_n sous chargements sinusoïdales (Matériel 1) 48

Tableau IV.3: la flèche adimensionnelle \bar{w} d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90)_n sous chargements sinusoïdales (Matériel 1) 48

Tableau IV.4: la flèche adimensionnelle \bar{w} d'un stratifiée antisymétrique a plis équilibrés carrée (45/-45)_n (Matériel 1)..... 52

Tableau IV.5: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90)_n (Matériel 2, $a/h = 5$) 54

Tableau IV.6: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique de dix couche a plis équilibrés carrée (Matériel 3). 55

Tableau IV.7: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique équilibrés carrée (Matériel 2)..... 56

CHAPITRE V

Tableau V.1: propriétés des matériaux utilisées 62

Tableau V.2: Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ du plaque carré Al/ZrO₂ 63

Tableau V.3: Comparaison de paramètre de fréquence Natural $\hat{\beta}$ du plaque carré Al/AL₂O₃ 65

Tableau V.4: Comparaison de paramètre de fréquence $\bar{\omega}$ du plaque rectangulaire AL/AL₂O₃ (b=2a) 70

Tableau V.5: neuf premier Paramètre de fréquences $\bar{\omega}$ de plaque carrée AL/AL₂ 74

Liste des figures

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure. I.1 : Types de matrice	07
Figure. I.2: types de renforts	08
Figure. I.3. constitution d'un stratifié.....	12
Figure. I.4.1 : Désignations du stratifié.....	14
Figure. I.4.2 : Désignations du stratifié.....	14
Figure. I.5: Matériau composite sandwich.	15
Figure. I.6: Mode de rupture en compression par cisaillement.....	18
Figure. I.7: Domaines d'application des FGM.....	24

CHAPITRE II

Figure. II.1 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon 3 théories.....	28
Figure. II.4 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal	29

CHAPITRE III

Figure. III.1 : Géométrie d'une plaque stratifiée rectangulaire en coordonnées cartésiennes	35
--	----

CHAPITRE IV

Figure. IV.1: Variation of dimensionless deflection of antisymmetric cross-ply (0/90) _n square laminates under sinusoidal loads versus thickness ratio (Material 1)	48
Figure. IV.2: Variation of dimensionless deflection of antisymmetric cross-ply (0/90) _n square laminates under sinusoidal loads versus material anisotropy (Material 1).....	49
Figure. IV.3: Distributions du déplacement plane et des contraintes d'un stratifiée antisémitique a plis croisés carrées (0/90) sous chargements sinusoidales (Matériel 1, $a/h = 10$).....	50
Figure. IV.4: La variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifiée antisémitique a plis équilibrées carrées ($\theta/-\theta$) ₄ sous chargements sinusoidales en fonction de l'angle θ pour (Matériel 1, $a/h = 10$).....	52
Figure. IV.5: Variation of dimensionless fundamental frequency of antisymmetric cross-ply (0/90) _n square laminates versus thickness ratio (Material 2, $E_1/E_2 = 40$).....	53

Figure. IV.6: Variation of dimensionless fundamental frequency of antisymmetric angle-ply (45/-45) _n square laminates versus material anisotropy (Material 2).....	56
--	----

CHAPITRE V

Figure.V.1: Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes	61
Figure.V.2 : l'effet de la puissance sur le paramètre de fréquence fondamentale du plaque carré de FGM	71
Figure.V.3 : L'effet du rapport d'épaisseur sur le paramètre de fréquence fondamentale du plat carré	72
Figure.V.4 : L'effet de l'allongement sur le paramètre de fréquence fondamentale du plaque rectangulaire a= 10 h).....	72

Liste des notations

Liste des notations

G Module de cisaillement dans le plan (x, z)

E_l Module de Young longitudinal

E_2 Module de Young transversal

E_c Module de Young de la céramique

E_m Module de Young du métal

ν Coefficient de Poisson

$G(z)$ Module de cisaillement en fonction de « z »

$E(z)$ Module de Young en fonction de « z »

$\nu(z)$ Coefficient de Poisson en fonction de « z »

$V(z)$ Fraction volumique

\bar{Q}_{ij} sont les constantes de rigidités

a Longueur de la plaque

b Largeur de la plaque

h Epaisseur de la plaque

u_0, v_0 , Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

u, v, w Les déplacements dans les directions x, y, z .

Φ est la fonction des coordonnées x, y et t .

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Contraintes normales

τ_{xz}, τ_{yz} Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ Déformation dans la direction x, y et z

γ_{xz}, γ_{yz} Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$ Champ virtuel de déplacement

δU la variation de l'énergie de déformation

δV la variation de l'énergie potentielle

δK est la variation de l'énergie cinétique

κ_s facteur de correction de cisaillement

$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$ Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$ Champ de déformation transversal virtuel

N_x, N_y, N_{xy} Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy} Moments de flexion

Q_{xz}, Q_{yz} Effort de cisaillement

∂ Dérivée partielle

ρ est la densité de masse de la plaque

i et j Sont des nombres naturels.

A_{ij} Termes de rigidité en membrane de la plaque

B_{ij} Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij} Termes de rigidité de flexion de la plaque

$\{\Delta\}$ Le vecteur des déplacements généralisés

$\{p\}$ Le vecteur des efforts généralisés

Introduction générale

1.1 Introduction

Les matériaux composites sont largement applicables dans l'aéronautique, les domaines civil, mécanique et autres de la technologie moderne en raison de leurs caractéristiques favorables de grande rigidité et résistance par rapport au poids.

Les Plaques composites sont des éléments structurels les plus importants qui ont été étudiées par de nombreux chercheurs dans les 6 ou 7 dernières années par une variété de théories stratifiées ont été introduites.

La théorie classique des plaques (CPT), qui néglige la normale transversale et la déformation de cisaillement transversales, donne des résultats raisonnables pour les stratifiés minces, sous-estime les flexions et surestime les fréquences ainsi que les charges de flambage avec des stratifiés modérément épais (Reddy, 1997).

Cependant, dans des plaques épaisses et moyennement épaisses, la Déformation de cisaillement ne peut pas être négligés, et la théorie montre des résultats inexacts pour eux. Il existe de nombreuses théories qui incluent les contraintes de cisaillement transversales. Une des théories bien connues est le modèle de Reissner (Reissner, 1945), qui est appelé la théorie de cisaillement de déformation du premier ordre (FSDT) et considère le champ de déplacement comme variations linéaires des déplacements au plan moyen. Considérant FSDT, Moradi et Mansouri (2012) a étudié le flambement thermique de plaques stratifiées minces et épaisses en utilisant cette méthode. D'autres théories de la plaque, à savoir les théories de cisaillement de déformation d'ordre supérieur (HSDT), qui comprennent l'effet de cisaillement de déformation transverse, sont les théories, Levy (1977), Hencky (1947)], Lo (1977), Nelson et Lorch (1977), et Reddy (1984).

Cette dernière est une théorie d'ordre supérieur simple qui prend en compte non seulement des déformations de cisaillement transversales, mais aussi de leur variation parabolique à travers l'épaisseur de la plaque et ne nécessite pas de coefficients de correction de cisaillement dans le calcul des contraintes de cisaillement. Reddy (1984, 2000) a développé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) avec des variations cubes pour les déplacements dans le plan. Xiang et al. (2011, 2013) a proposé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre n dans laquelle la théorie de Reddy peut être considéré comme un cas particulier.

Fares et al. (2009) ont proposé un HSDT avec des variations linéaires et paraboliques pour les déplacements planes et transversaux, respectivement. Bodaghi et Saidi (2011) ont présenté une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour le comportement de flambement thermo-élastique de la plaque rectangulaire épaisse en matériaux à gradient fonctionnel « FGM ». Matsunaga (2000) a développé une théorie d'ordre supérieur en fonction d'un développement en série de puissance complète du champ de déplacement dans les coordonnées de l'épaisseur. Boudarba et al. (2013) ont développé une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique simple à étudier le comportement thermomécanique des plaques simplement appuyées en matériaux à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. Bakhti et al (2013) a proposé une théorie raffinée efficace et simple pour comportement non linéaire de courbure cylindrique de plaques de nano composites à gradient fonctionnel.

Bien que certains HSDTs bien connus ont cinq inconnues comme dans le cas de FSDT (par exemple, la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (Reddy, 1984, 2000; Bodaghi et Saidi, 2011)), leurs équations du mouvement sont beaucoup plus compliquées que celles de FSDT. Ainsi, les besoins existent pour le développement de la théorie de la déformation de cisaillement qui est simple à utiliser.

Dans le présent travail, une nouvelle FSDT simple est développé pour la flexion et l'analyse des vibrations des plaques composites stratifiées.

Les solutions analytiques de structure stratifiée antisymétriques à plis croisés et équilibrés sont obtenues, les équations du mouvement sont dérivées par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques de structure stratifiée antisymétriques à plis croisés et équilibrés sont obtenues. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle.

1.2. Objectif de la thèse

Le objectif de cette thèse est de développer, une nouvelle FSDT simple et précis pour l'analyse en flexion et en vibrations des plaques composites stratifiées, et FGM avec des nombre d'inconnues moins qu'on comparant avec le premier ordre traditionnel et les autres théories de cisaillement de déformation d'ordre supérieur.

Ainsi, de minimisé le nombre d'équations régissant dans les autres théories, ce qui facilite considérablement l'analyse technique.

Cette théorie est appliquée aux structures composites stratifiée, épaisses et minces, sous sollicitations statiques et dynamiques (vibrations libres).

1.3. Plan de la thèse

En premier lieu(chapitre 1), nous nous attachons à donner un aperçu bibliographique sur les matériaux composites.

Le chapitre 2 est consacré à l'évolution de la formulation théorique du modèle de plaque composite stratifiée en flexion.

Au troisième chapitre : une analyse de flexion et de vibration libre des plaques stratifiée simplement appuyées à été présentée en détail avec la nouvelle théorie de premier ordre de déformation de cisaillement des plaques.

Le chapitre 4 est consacré à la validation numérique de résolution exacte pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques a plis croisés et équilibrés avec différent matériaux utilisé.

Le chapitre 5 est consacré à la validation numérique de résolution exacte pour l'analyse en vibration libre des plaques FGM

Le présent travail se termine par une conclusion générale ou on souligne l'efficacité de la méthode utilisée dans les calculs des matériaux composites et des perspectives envisagées à l'avenir.

CHAPITRE I

Généralité sur Les matériaux composites

1. Les matériaux composites

I.1 Introduction

Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie [Berthelot J-M,1996] .

On appelle maintenant du façon courante « matériaux composites » des arrangements de fibre-continues ou non- d'un matériaux résistant (le renfort)qui sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible [Daniel Gay.1997].

Nous présentons les différents types de matrices et renforts classiquement employés dans l'industrie. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

I.2 .Les constituants des matériaux composites

Un matériaux composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres.

I.2.1. la matrice.

la matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charge dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le cout de production. l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort.

Le renfort apporte au matériau compsite ses performances mécaniques élevées ,alors que la matrice a pour role de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

Le type d'association matrice –renfort dépend des contraintes imposées au concepteur: caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, coût, résistance à la corrosion, etc.

Divers types de résines :

les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

les résines utilisées sont des polymères, deux grandes familles de résines existent : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables.

Les résines thermoplastiques dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées.

Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après polymérisation par rapport de chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. ainsi, les résines thermodurcissables possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques.

Du fait de ces caractéristiques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites.

Cependant, l'amélioration des caractéristiques des résines thermoplastiques conduit à une utilisation qui ne cesse de croître.

Deux autres classes de résines à usages spécifiques sont également utilisées. Ce sont :

- Les résines thermoplastiques qui peuvent résister en service continu à des températures de l'ordre de 200 °C et plus.

-les élastomères dont le renforcement par différentes fibres conduit à diverses applications dans le domaine de l'automobile [Berthelot J-M,1996] .

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.1.

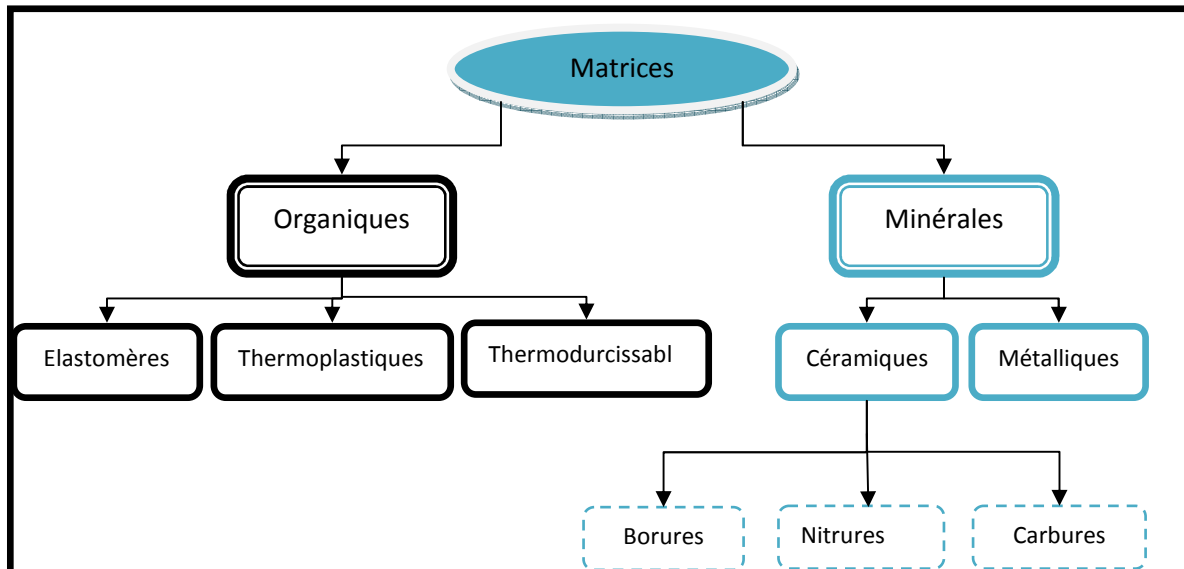


Figure 1.1 : Types de matrice.

I.2.2.les fibres :

Elles sont constituées par plusieurs centaines ou milliers de filaments de diamètre compris entre 5 et 15 microns.

on les commercialise essentiellement sous forme de :

fibre courtes :quelques centimètres ou fraction de millimètre :ce sont les feutres, les mats et les fibres courts injectées utilisés en moulage.

fibre longues: coupées au moment de la fabrication du matériau composite, utilisées telles quelles, ou bien tissées.

Verre

On s'applique à réaliser des fibres que possible car :

Leur résistance à la rupture diminue si leur diamètre est trop important ;

Des diamètres très faibles de fibres autorisent des rayons de courbure effectifs de l'ordre du demi-millimètre. Exception doit être faite, cependant, des fibres de

bord(diamètre de l'ordre de 100 microns)constituées autour d'un filament de tungstène (diamètre =12 microns).leur rayon de courbure minimum est de 4 mm.

Aramide(ou « kevlar »),plus légère

Carbone(module élasticité élevé)

Bord

Carbure de silicium (tenue en température)

On y remarque immédiatement l'importance industrielle de la fibre de verre (produit de grande diffusion).le carbone et le kevlar réservés aux pièces performantes[Daniel Gay.1997].

les différents types de renforts [R.Talreja.1981]sont cités dans l'organigramme ci-dessous figure.1.2

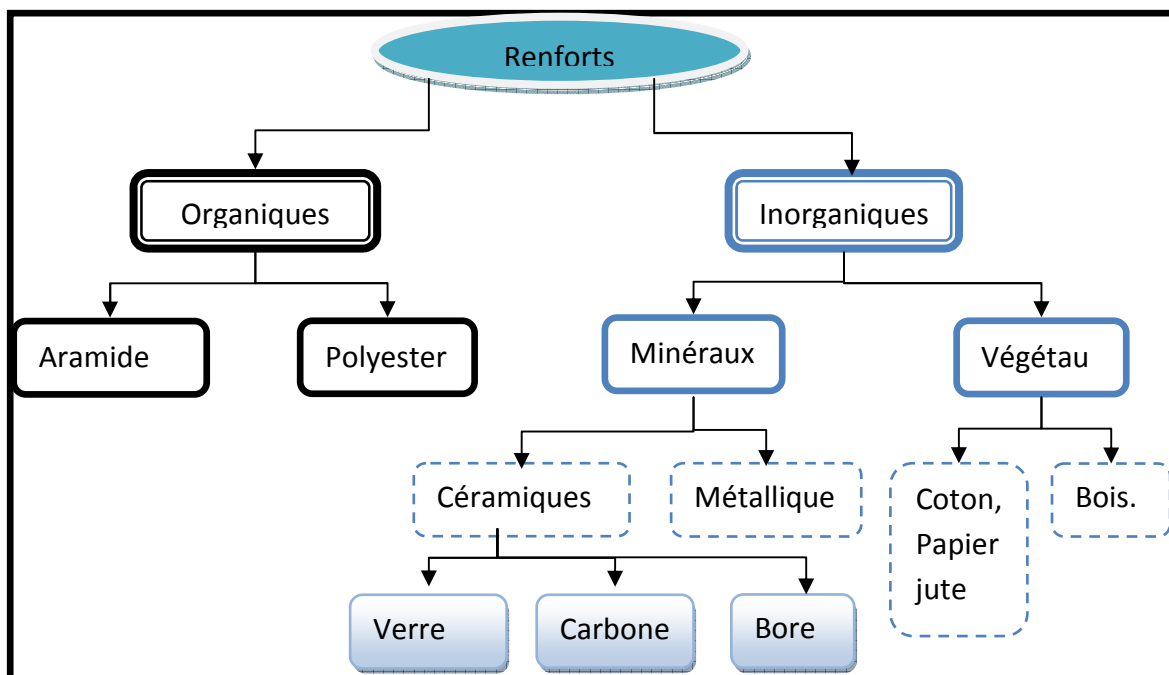


Figure 1.2: types de renforts

I.3. Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants [Daniel Gay. 3^{ème} édition.1991].

I.3.1 Classification suivant la forme des constituants

en fonction de la forme des constituants, les composites peuvent être classés selon plusieurs manières (BERTHELOT, 1992) :

I.3.1.1 composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, Etc. l'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- l'orientation des fibres,
- la nature des constituants,
- la proportion des constituants,

l'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques.

I.3.1.2 composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimensions privilégiées. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées.

par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage.

les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse.

I.3.2 Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale, divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

Composite à matrice organique (résine, charge), avec :

Des fibres minérales : verre, carbone...

Des fibres organiques : Kevlar, polyamides...

Des fibres métalliques : bore, aluminium...

a. composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

b. composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (sic),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (borsic).

c. composites a matrice minérale (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets, (métal-céramique)
- des particules minérales : carburent, nitrures, etc.

Les matériaux composites a matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites a matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique [Maurice Reyne.1990].

I.4.Architecture des matériaux composites

I.4.1 Stratifiés :

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles.

Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux

efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels [Berthelot J-M,1996] .

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. ces stratifiés sont constitués (fig 1.3) de couche de fils ou de tissus unidirectionnels. dont la direction est décalée dans chaque couche.

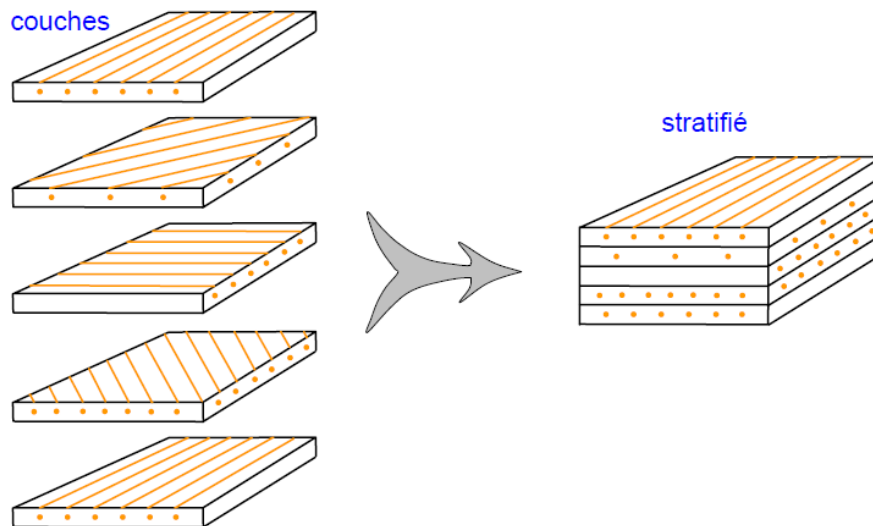


Fig1.3.:constitution d'un stratifié

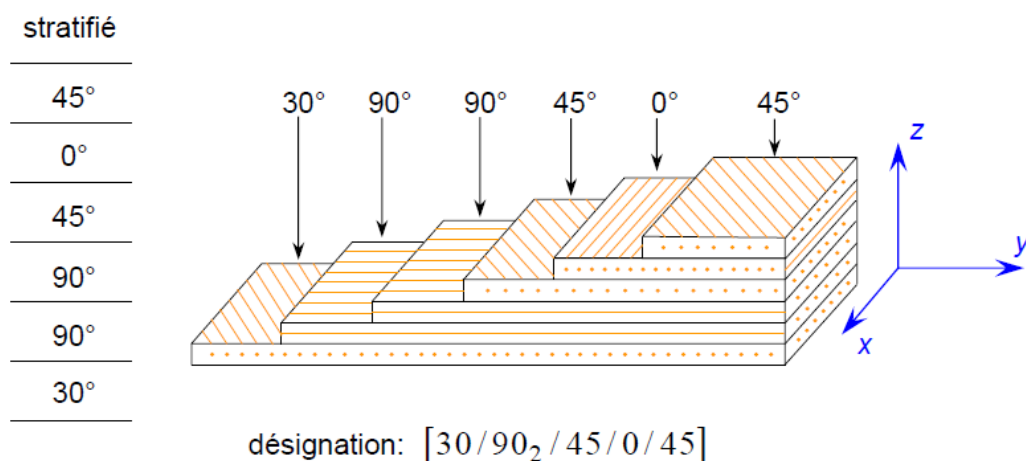


Figure 1.4.1 désignation d'un stratifié

On pourra avoir des stratifiés de type :

Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientée suivant la direction $+\theta^0$ que de couches orientée suivant la direction $-\theta^0$

Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par un rapport à un plan moyen.

Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0^0 que de couches à 90^0

I.4.3 Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau carbone époxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence.

Un stratifié est codifié de la façon suivante :

– chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur les figures 1.4(a) et 1.4(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;

– les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la figure 1.4(a) : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$;

– les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure 1.4(b) : $[0/45_2/90/-45_2/0]$;

– en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;

– en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole s indique la symétrie : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ devient $[-45/45/-45]_s$ et $[0/45/45/90/-45/-$

45/0] devient [0/45₂/90/-45₂/0].

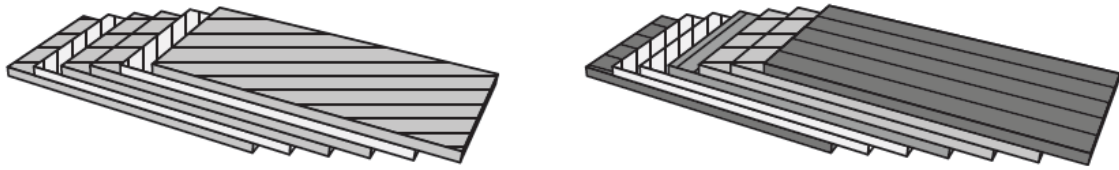


Figure 1.4.2 . Désignations du stratifié

I.4.2 composites Hybrides

Les composite hybrides pourrait être défini comme des matériaux contenant au moins deux types distincts de renfort ou de matrice ces éléments se différencient par leurs propriétés mécanique. Leurs propriétés physiques. Leurs formes de présentation ou par leurs composition chimique .

Les matériaux hybrides sont réalisés pour diverses raisons :
Obtenir un matériaux composite ayant de meilleurs propriétés que celles de chacun des composants séparés, pour obtenir un matériau composite répondant aux caractéristiques mécaniques attendues à un prix raisonnable, pour obtenir des effets esthétiques agréables résultant du mélange des fibres utilisées [O.allix,1995] .

I.4.3.Sandwichs

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure 1.5. Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

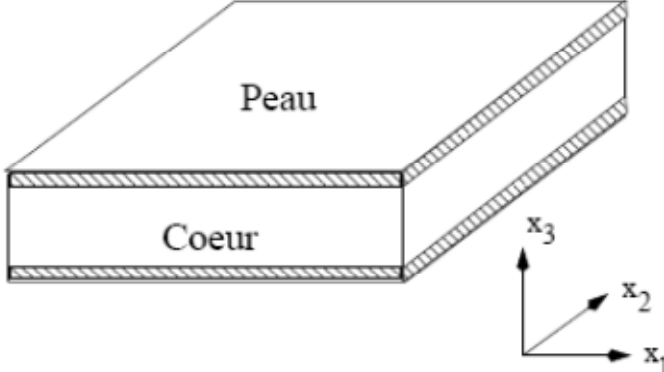


Figure.I.5: Matériau composite sandwich.

I.5. Endommagement des matériaux composites

Le phénomène d'endommagement et de rupture dans les matériaux composites est caractérisé par une rupture non brutale précédé d'une dégradation progressive. Ces dégradations peuvent résulter de plusieurs mécanismes élémentaires

- la rupture des fibres,

- la rupture transverse de la matrice,

la rupture longitudinale de la matrice,

- la rupture de l'interface "fibre - matrice",

auxquels s'ajoute, dans le cas de stratifiés, un mécanisme de rupture entre couches, appelé rupture par délaminage.

Ces divers mécanismes coexistent et se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

I. 5.1. Composites unidirectionnels

a- Comportement en traction

Dans le cas d'un composite unidirectionnel à matrice polymère, sollicité en traction longitudinale, l'initiation de la rupture est contrôlée par la résistance à la rupture des fibres. Il faut noter que pour certains types de fibres (tels que le verre et le carbone) les contraintes et les déformations des fibres ne sont pas uniques et varient d'une fibre à l'autre. MAEKAWA Z. et al. (1991) ont montré que les propriétés mécaniques de la matrice et la qualité de l'interface jouent un rôle important sur le contrôle du caractère aléatoire de la résistance en traction de ces composites.

Après l'initiation, il se produit une concentration de contraintes au voisinage de la fissure. La redistribution de ces contraintes et par la suite le processus de dégradation qu'en résulte dépendent essentiellement de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée et des propriétés de l'interface fibre - matrice.

Si la rupture s'amorce au niveau des fibres, différents mécanismes de rupture peuvent être observés:

- Dans le cas d'une forte résistance en cisaillement de l'interface, il se produit une concentration de contraintes conduisant à une propagation de la fissure successivement dans les fibres et dans la matrice, la rupture est de type fragile. On peut avoir également une fissuration longitudinale de la matrice ou une décohésion.

- Dans le cas d'une faible résistance en cisaillement de l'interface, la longueur de décohésion est plus importante et la fissuration de la matrice traverse les fibres avec décohésion de l'interface fibre - matrice. Les concentrations de contraintes induites provoquent la rupture des fibres et conduisent à un endommagement progressif du composite.

La prédiction du mécanisme de rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale reste de loin peu évidente.

En effet la rupture peut être causée soit par la fissuration de la matrice, soit par la décohésion de l'interface "fibre matrice", et ceci dépend de plusieurs paramètres, incluant les propriétés de la matrice et des fibres, la porosité, la répartition des fibres dans le volume et de la qualité de l'interface fibre matrice [HULL 1981 et NAOYUKI et al. 1997].

b- Comportement en compression longitudinale

La caractérisation du comportement en compression longitudinale des composites unidirectionnels s'avère plus difficile. En effet la résistance en compression dépend de plusieurs paramètres tel que la fibre, la matrice et la résistance de l'interface. [ROSEN (1965)], est parmi les premiers qui ont essayé de prédire la résistance en compression d'un composite unidirectionnel. Il explique la perte de résistance observée dans l'essai de compression pure par l'apparition d'un phénomène d'instabilité local : micro - flambage des fibres.

Il considère que le flambage des fibres est limité par la matrice environnante, ce qui se traduit par une contrainte à la rupture en compression directement proportionnelle aux propriétés élastiques de la matrice.

Pour les composites structuraux à fraction volumique de fibre $V_f > 40\%$, la ruine du matériau est obtenue par micro-flambage généralisé des fibres. Dans ce cas, la résistance en compression, σ_c , proposée par ROSEN, s'exprime en fonction du module de cisaillement de la matrice, G_m et du taux volumique des fibres, V_f , comme suit :

$$\sigma_c = \frac{G_m}{1 - V_f}$$

Cette valeur théorique est beaucoup plus grande que la résistance en compression expérimentale. Plusieurs auteurs ont essayé de diminuer la charge critique en tenant compte du désalignement initial des fibres, non-linéarité de la matrice et/ou rupture de l'interface, (EFFENDI R. et al. (1992), GUYNN E.G. et al (1992) et WISNOM M.R. (1993)).

La rupture en compression du composite peut être engendrée par les contraintes de cisaillement générées par la charge de compression appliquée (EWING, STEIF (1989)).

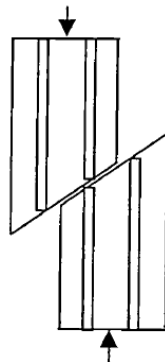


Figure 1.6. Mode de rupture en compression par cisaillement

Dans tous les cas le mécanisme de rupture du composite unidirectionnel en compression sera caractérisé par la rupture des fibres en flexion ou en cisaillement et par la rupture en cisaillement de la matrice [Imen KILLEL-KAMOUN.1999].

I.6. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Ou sous la forme condensée: $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$

$$\sigma = C * \varepsilon \quad (\text{I.2})$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C, symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité Cij.

I.6.1. Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité (I.2) peut être écrite sous forme inverse, suivant :

$$\varepsilon = S * \sigma \quad (\text{I.3})$$

en introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. la matrice S est appelée matrice de souplesse. et s'écrit dans le cas général :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

Avec

$$S = C^{-1} \quad (I.5)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés constantes de flexibilité ou constantes de souplesse

I.6.2. Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

I.6.3. Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne

change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan.

Supposons le

plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau, la loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

La matrice de souplesse a la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

I.6.4. Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

I.6.5. Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'ingénieur.

I.6.6. Matériau isotrope

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{I.8})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

I.7. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [Z. Zhong.(2007)].

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [C. Baron., S.(2008)].

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [K. Kokini., Y(1990)].

les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [P. Boch., T.1986].

I.7.1. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.1. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs[thèse howari ,2012].

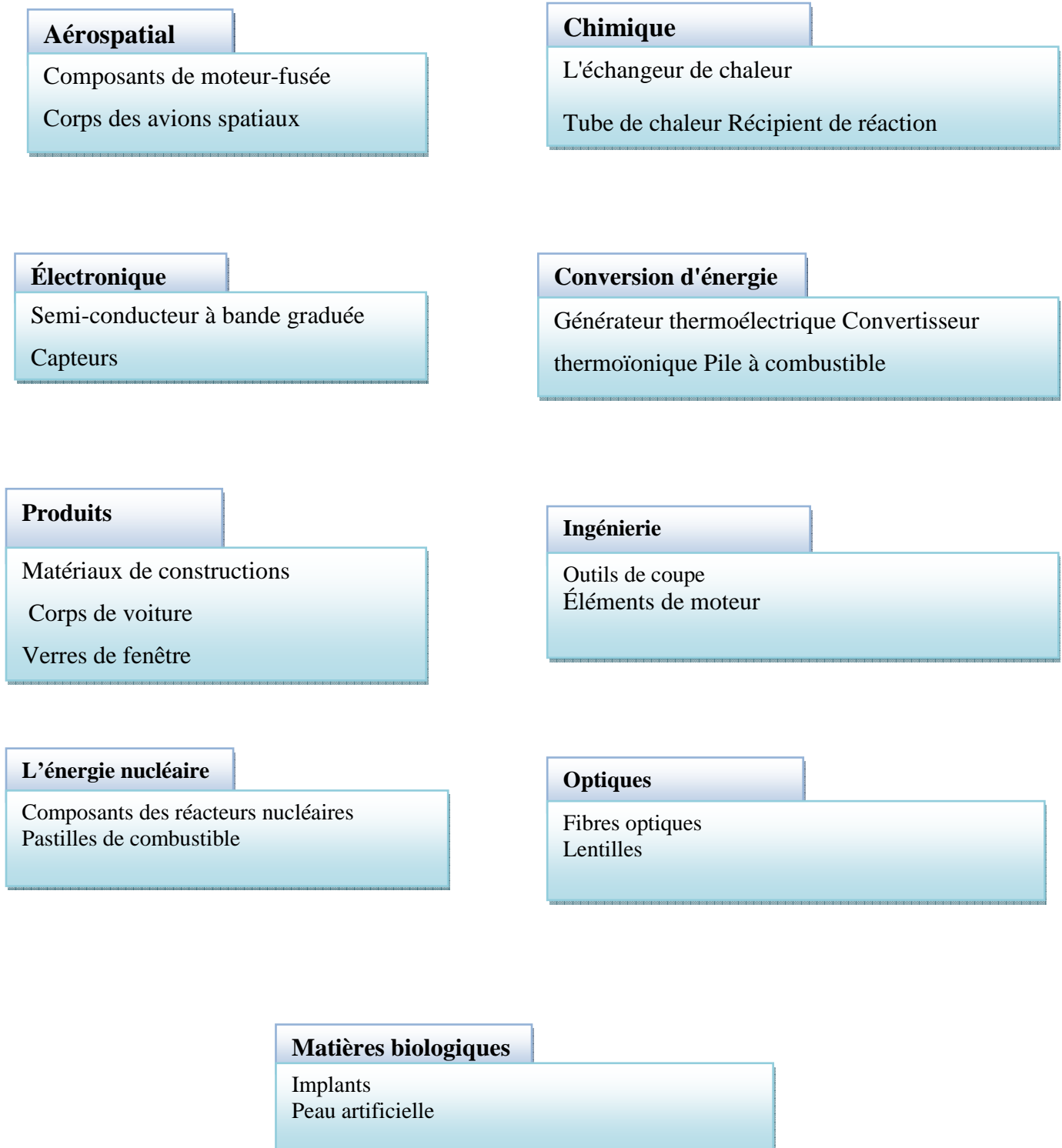


Figure I.7 : Domaines d'application des FGM.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Dans la fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle, les zones de concentration des contraintes apparaissent dans les interfaces auxquelles le matériau est continu mais changent rapidement. Par conséquent, Chung et Chi (2001) ont proposé un F.G.M sigmoïde (S.F.G.M) qui se compose de deux fonctions d'une loi de puissance pour définir une nouvelle fraction de volume.[sallai].

Beaucoup de chercheurs ont consacré des années à comprendre le mécanisme des FGMs pour offrir un profil optimal aux concepteurs.

I.8. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les notions des matériaux composites. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures stratifiée ainsi que les différents modes d'endommagements. Le chapitre suivant va porter sur l' Evolution des théories des structures composites stratifiée.

CHPITRE II

**« Evolution des théories des structures composites
stratifiée »**

II.1. Introduction

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff [Dhatt G.1969] qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [Reissner.E.1945] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

Elle conduit, de part l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/ cisaillement transversal. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transversal γ sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes.

Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre, au quel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces [P.TOPDAR,2003] (fig. II.1). Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluations dépend malheureusement du nombre de stratifications.

Pour écarter à jamais ce type de problème, des théorie d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par

Whitney [Whitney J.M.1969], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres.

D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Une synthèse sur l'aspect des théories du premier ordre et d'ordre supérieur est développée dans la section suivante.

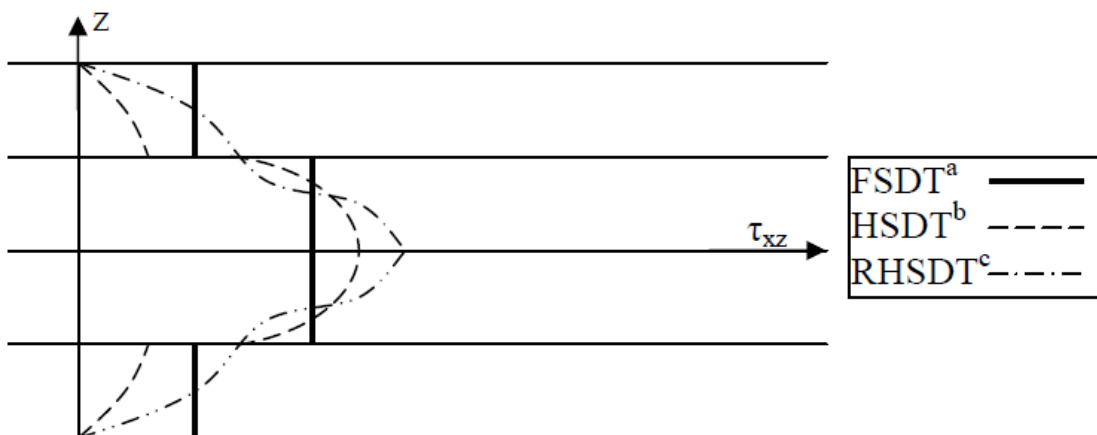


Figure II.1. Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon 3 théories [Achraf TAFLA.2007].

a : FSDT, First order shear deformation theory

b : HSDT, High order shear deformation theory

c : RHSDT, Refined high order shear deformation theory

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre

[Cohen G.A.1978-Ayad R.1993]. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite.

Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figures II.1 et II.2). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théories du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits [Achraf TAFLA.2007].

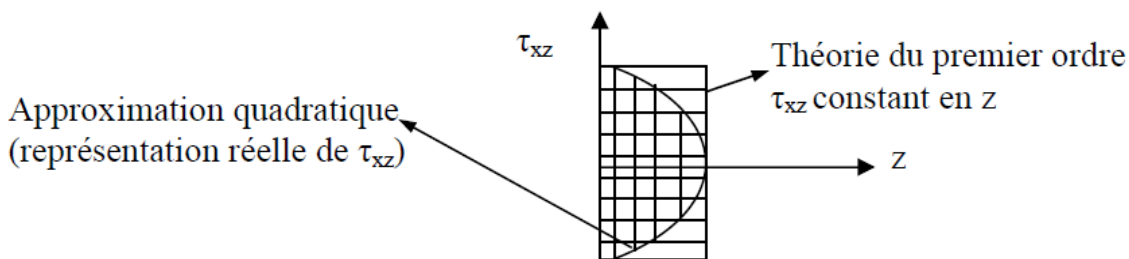


Figure.II.2. Approximations de la contrainte du cisaillement transversal.

II.1 Facteurs de correction du cisaillement transversal

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse, associée à la théorie du 1er ordre, et celle due aux contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre. [Cohen G.A.1978, Lardeur P.1990, BOUABDALLAH M.S.1992. Auricchio and Sacco1999], Un calcul plus exact [Auricchio and Sacco.1999, Goyal.2002, Madabhusi P. and J.F.Davalos.1996] des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du 1^{er} ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur.

Bouabdallah [BOUABDALLAH M.S.1992] a développé une méthode de calcul des facteurs de correction du cisaillement transversal pour les coques cylindriques courbes. Il les identifie par une comparaison entre l'énergie de cisaillement résultante des équations d'équilibre et celle provenant de la déformation de cisaillement de premier ordre (énergie effective). Bouabdallah a aussi étudié l'influence du rapport épaisseur/rayon (h/R) sur les facteurs de correction k_{xz} et k_{yz} on note que R est le

rayon courbure de la coque. Il a conclu que plus h/R augmente, plus l'écart entre $k=5/6$ (plaque isotrope) et k_{xz} augmente.

Choa et al [Choa, Kimb,2000] ont proposé une autre méthode de calcul des facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite des équations d'équilibre de façon à obtenir des facteurs de correction initiale entre FSDT(First Shear Deformation Theory) et EHOST(Efficient High Order Theory) (Pour corriger les déformations de cisaillement transversal qui réduisent l'effet de rotation de l'angle de cisaillement γ) [Achraf TAFLA.2007].

II.3. Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4) [L. Liberscu. 1967, M. Whitney 1973,M. Touratier 1991]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme[Viet.Tung. Nguyen, 2004] :

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) = & u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z_3^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) \\ & + x^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + x^4 \phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \end{aligned} \quad \text{II.1}$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur ϕ_i^0 détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :

$$\phi_i^{0(j)} = 0 \quad \text{pour } j= 2, 3, 4 \dots$$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur

les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (II.1) est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \alpha = \{1,2\}$.

Le champ de déplacement (II.1) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{II.2}$$

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

-L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan S.A.1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

-L'approche de Reissner [Reissner.E.1945], Panc [Panc V.1975] et Kaczkowski [Kaczkowski S.A.1980] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

-L'approche de Levinson [Levinson M.1980], Murthy [Murthy M.1981] et Reddy [Reddy J.N.] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

-L'approche de Touratier [M. Touratier.1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$$

Théorie de zig-zag

Plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Murakami [Murakami H.1986], Cho [Cho M. & R R. Parmerter.1993], Averill [Averill R.C.1994], He [L.H. He.1994], Icardi 01a[] Icardi U.2001], Icardi 01b[] Icardi U.), Carrera [Carrera E.2004]) à la base de modèle zig zag Di Sciuva [M. Di Sciuva.1984], L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zigzag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

II.4.Conclusion

Toutes ces théories sont très intéressantes, pour estimer le cisaillement transversal, Dans le chapitre suivant , une étude analytique en statique et en vibration des plaques composites stratifiée avec une nouvelle FSDT simple est développé pour la flexion des plaques composites stratifiées.

CHPITREIII

**« Etude analytique des plaques composites stratifiée
en statique et en vibration »**

III.1. Introduction

L'objet de toute théories est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à l'analyse du comportement en flexion et en vibration des plaques stratifiées antisémitiques en utilisant cette théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (FSDT), Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement, La formulation repose sur le principe de Hamilton.

III.2. Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire composite d'épaisseur h , la longueur a et la largeur b , référence aux coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) .

Le plan $x - y$ est prise égale à la mi-plane non déformée de la plaque, et l'axe z est perpendiculaire au plan $x - y$.

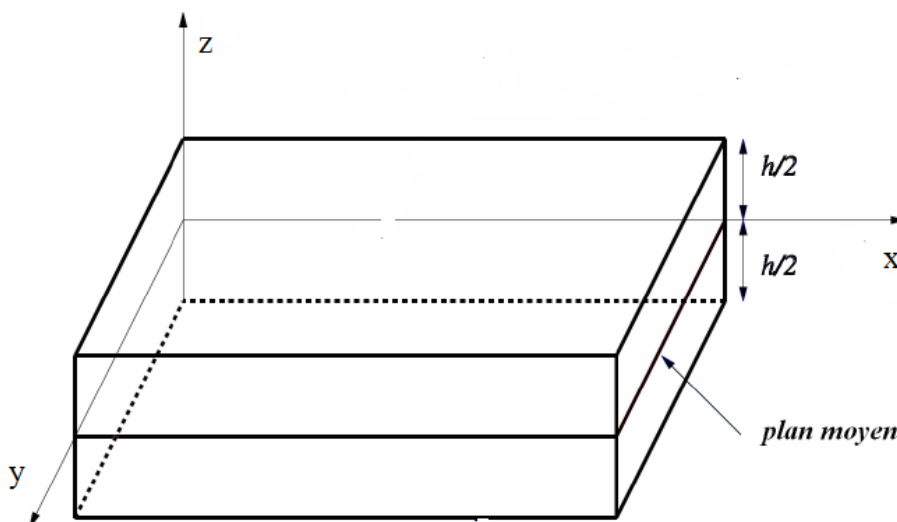


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque stratifiée rectangulaire en coordonnées cartésiennes.

III.2.1 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Cette théorie suppose la contrainte de cisaillement transversal constant et il a besoin d'un facteur de correction de cisaillement, afin de satisfaire aux conditions aux limites de la plaque sur la surface inférieure et supérieure.

III.2.2. Cinématique

En se basant sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (4a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (4c)$$

où u , v , w sont les déplacements dans les directions x , y , z , u_0 et v_0 sont les déplacements de surface au plan moyen. Φ est la fonction des coordonnées x , y et t .

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation. (4) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Les relations constitutives linéaires pour une couche peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Q_{ij} sont les Coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (8)$$

Les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié de la couche k-ième sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Où \bar{Q}_{ij} sont les constantes de rigidités fournies par Reddy (2004).

III.2.3.Équations du mouvement

Les équations de mouvement de la plaque peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie de Hamilton [Reddy, 2002; Jones, 1999], Le principe sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (10)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle ; et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation du plaque est calculée comme suite :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dAdz \\ &= \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial x \partial y} + Q_{yz} \frac{\partial \delta (w - \Phi)}{\partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta (w - \Phi)}{\partial x} \right\} dA \end{aligned} \quad (11)$$

Où N , M , et Q sont les efforts résultants définies comme :

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz. \quad (12)$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \quad (13)$$

Où q est la charge transversale appliquée.

La variation de l'énergie cinétique du plaque peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho dA dz \\
 &= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w} \delta \dot{w}] \\
 &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial y} \right) \} dA
 \end{aligned} \tag{14}$$

Où ρ est la densité de masse de la plaque et I_i ($i = 0,2$) sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho dz \tag{15}$$

Substituant les expressions δU , δV , et δK de Eqs. (11), (13), et (14) dans l'équation (10) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients of δu_0 , δv_0 , $\delta \Phi$, et δw , les équations du mouvement pour la plaque résultantes sont :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 \tag{16a}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 \tag{16b}$$

$$\delta \Phi : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = -I_2 \nabla^2 \ddot{\Phi} \tag{16c}$$

$$\delta w : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = I_0 \ddot{w} \tag{16d}$$

Substituant l'équation (5) et l'équation (7) dans l'équation (11), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix}, \quad Q = k_s A^s \gamma, \quad (17)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, \quad (18a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^t, \quad (18b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (18c)$$

$$Q = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix}, \quad (18d)$$

Où: A_{ij} , B_{ij} , et D_{ij} , représentent les coefficients de rigidité de la plaque et sont donnés par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz, \quad (19)$$

k_s : est un facteur de correction de cisaillement qui est analogue le facteur de correction de cisaillement proposé par Mindlin (1951).

Par substitution de l'équation (17) dans l'équation (16), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, Φ, w) :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 &= I_0 \ddot{u} \\ A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 &= I_0 \ddot{v} \end{aligned} \quad (20b)$$

$$-D_{11}d_{1111}\Phi - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}\Phi - D_{22}d_{2222}\Phi - A_{55}^s d_{11}(w - \Phi) - A_{44}^s d_{22}(w - \Phi) = -I_2 \nabla^2 \ddot{\Phi} \quad (20c)$$

$$A_{55}^s d_{11}(w - \Phi) + A_{44}^s d_{22}(w - \Phi) + q = I_0 \ddot{w} \quad (20d)$$

Où d_{ij} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (21)$$

Clairement, quand l'effet de la déformation transversale de cisaillement est négligé ($w = \Phi$), Equation. (20) rapporte les équations du plaque stratifié.

III.3.Solution exacte pour une structure stratifiés antisymétriques à plis équilibrés et croisés simplement appuyés.

Les Plaques rectangulaires sont généralement classés en fonction du type d'appuis utilisé.

Nous traitons ici avec la solution exacte des équations. (20a-d) pour un stratifié antisymétrique à plis équilibrés et croisés simplement appuyés.

Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les bords latéraux de la présente plaque:

- bords simplement appuyés (stratifié à plis croisés)

$$u_0 = w = \Phi = N_y = M_y = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (22a)$$

$$u_0 = w = \Phi = N_y = M_y = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (22b)$$

- bords simplement appuyés (stratifié à plis équilibrés)

$$u_0 = w = \Phi = N_{xy} = M_x = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (23a)$$

$$v_0 = w = \Phi = N_{xy} = M_y = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (23b)$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement des plaques stratifiées en statique et en vibration. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements u_0 , v_0 , Φ et w ainsi que le chargement q sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} \Phi \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \Psi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (24a)$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{stratifié à plis croisés antisymétriques}) \quad (24b)$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{stratifié à plis équilibrés antisymétriques}) \quad (24c)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , Ψ_{mn} , et W_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer,

ω est la fréquence propre associée au (m, n) ième mode propre, et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et $i = \sqrt{-1}$.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (25)$$

Les coefficients Q_{mn} sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\lambda x) \sin(\mu y) dx dy = \begin{cases} q_0 & \text{Pour une charge sinusoïdale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{Pour une charge sinusoïdale} \end{cases} \quad (26)$$

En substituant les équations (III.24) et (III.25) dans l'équations de mouvement (III.20), nous obtenons les équations, ci-dessous, des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre :

$$([C] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{P\}, \quad (27)$$

Où $\{\Delta\} = \{U, V, \Psi, W\}^t$, représente le vecteur de colonne des inconnus, $[C]$ et $[M]$

sont des matrices symétriques données par :

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Les composantes a_{ij} de la matrice symétrique $[C]$, et les composantes m_{ij} de la matrice symétrique $[M]$ sont données comme suit:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda^3 B_{11} \\ a_{14} &= 0 \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu^3 B_{22} \\ a_{24} &= 0 \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + A_{55}\lambda^2 + A_{44}\mu^2) \\ a_{34} &= A_{55}\lambda^2 + A_{44}\mu^2 \\ a_{44} &= -A_{55}\lambda^2 - A_{44}\mu^2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}m_{11} &= m_{22} = -I_0 \\m_{33} &= -I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\m_{44} &= m_{34} = -I_0\end{aligned}$$

les composantes du vecteur des forces $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^T$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}P_1 &= 0 \\P_2 &= 0 \\P_3 &= 0 \\P_4 &= -q_0\end{aligned}\tag{27}$$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse statique et vibration libre des plaques stratifiées simplement appuyées sont examinées par une nouvelle théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (FSDT) à quatre variables. Cette théorie besoin d'un facteur de correction de cisaillement, afin de satisfaire aux conditions aux limites de la plaque sur la surface inférieure et supérieure.

L'équation du mouvement pour la plaque stratifiées est obtenue par le principe de Hamilton, Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

CHAPITRE IV

Partie I« Validation et comparaison des résultats pour les plaques Stratifiées »

IV.I.1. introduction

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle de prédire la flexion et la réponses libre de vibration de plaques composites laminé simplement appuyée. à des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D et celles prédites par d'autres modèles de plaques. La description de divers modèles de plaques et leur nombre correspondant d'inconnues sont répertoriés dans le tableau 1. Pour tous les calculs, la valeur de facteur de correction de cisaillement est prise en tant que 5/6. Les propriétés de matériaux suivants sont utilisés:

- Matériau 1 (Reddy, 2004)

$$E_1 = 25E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \quad G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

(28a)

- Matériau 2 (Noor, 1973)

$$E_1 / E_2 = \text{open}, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

(28b)

- Matériau 3 (Noor and Burton, 1990)

$$E_1 = 15E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \quad G_{23} = 0.35E_2, \quad \nu_{12} = 0.3$$

(28c)

Les formules adimensionnels utilisé sont :

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{u}(z) = 100 \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{w} = 100 \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_{x,y}(z) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{x,y}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right),$$

$$\bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}(0, 0, z),$$

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{yz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

Modèles	Théories	Inconnus
CPT	Classical plate theory	3
ZSDT	Zeroth-order shear deformation theory (Ray, 2003)	5
FSDT	First-order shear deformation theory	5
TSDT	Third-order shear deformation theory (Reddy, 1984)	5
HSDT	Higher-order shear deformation theory (Swaminathan and Patil, 2008)	12
Present	Simple first-order shear deformation theory	4

Tableau IV.1: Modèles de déplacement.

IV.I.2. Analyse en flexion

Exemple 1: Dans le premier exemple, un stratifiés carrés deux couches antisymétrique à plis croisés mince et épais (0/90) en Matériau 1 et soumis à des charges sinusoïdales sont considérés.

Les rapports d'épaisseur sont prises à 2 (plaques correspondant très épaisses), 5 (correspondant à plaques épaisses), 10, 20 (correspondant à plaques modérément épaisses), et 100 (ce qui correspond à des plaques minces).

Dans le tableau (2), les résultats obtenus à l'aide de la nouvelle théorie du premier ordre sont comparées avec les solutions exactes 3D données par Pagano (1970) et ceux calculés en utilisant TSDT, FSDT et CPT.

En règle générale, la théorie actuelle et FSDT classique existant donnent des résultats quasi identiques pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

Pour le cas de stratifiés très épais, il ya de petites erreurs dans les valeurs prédites par la théorie actuelle, FSDT classique et TSDT. Cependant, ces erreurs ne deviennent négligeables lorsque le rapport d'épaisseur est supérieur à 5. En raison de tenir compte des effets de déformation de cisaillement, le CPT fournit des résultats acceptables pour les plaques composites stratifiées avec $a/h \geq 20$.

Theory	a/h			
	2	5	10	100
Exact (Pagano, 1970)	4.9362	1.7287	1.2318	1.0742
TSDT	4.5619	1.6670	1.2161	1.0651
FSDT	5.4059	1.7584	1.2373	1.0653
Present	5.4059	1.7584	1.2373	1.0653
CPT	1.0636	1.0636	1.0636	1.0636

Tableau. IV.2: la flèche adimensionnelle \bar{w} de deux couche d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90) n sous chargements sinusoidales (Matériel 1).

Exemple 2: Dans cet exemple, un stratifié carré anti symétrique (0/90) n sous les charges sinusoidales est étudiée, en utilisant Matériau 1.

Dans le tableau 3, la flèche a dimensionnelle de la plaque stratifiés pour des différentes valeurs du rapport d'épaisseur et le nombre de plis sont représentés. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par Ray (2003) en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement **d'ordre zéro (ZSDT)** et ceux rapportés par Reddy (2004) en utilisant TSDT, FSDT et CPT. On peut voir que la présente FSDT et FSDT classique existant donnent des solutions identiques les uns aux autres, et de leurs solutions sont également en bon accord avec ceux générés par Ray (2003) pour toutes les valeurs du rapport de l'épaisseur et le nombre de plis.

n	Theory	a/h			
		4	10	20	100
1	ZSDT (Ray, 2003)	2.0010	1.2160	1.1020	1.0650
	TSDT	1.9985	1.2161	1.1018	1.0651
	FSDT	2.1492	1.2373	1.1070	1.0653
	CPT	1.0636	1.0636	1.0636	1.0636
	Present	2.1492	1.2373	1.1070	1.0653
3	ZSDT (Ray, 2003)	1.5410	0.6380	0.5060	0.4630
	TSDT	1.5411	0.6382	0.5060	0.4635
	FSDT	1.5473	0.6354	0.5053	0.4635
	CPT	0.4617	0.4617	0.4617	0.4617
	Present	1.5473	0.6354	0.5053	0.4635

Tableau. IV.I.3: la flèche adimensionnelle \bar{w} d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90) n sous chargements sinusoidales (Matériau 1).

Les variations de la flèche adimensionnelle en ce qui concerne le rapport d'épaisseur a/h et le matériau anisotropie sont montrées dans les figures. 1 et 2, respectivement.

Les variations de flèche adimensionnelle du rapport d'épaisseur a/h et anisotropie du matériau E_1/E_2 montré sur les Figures.1et 2 respectivement.

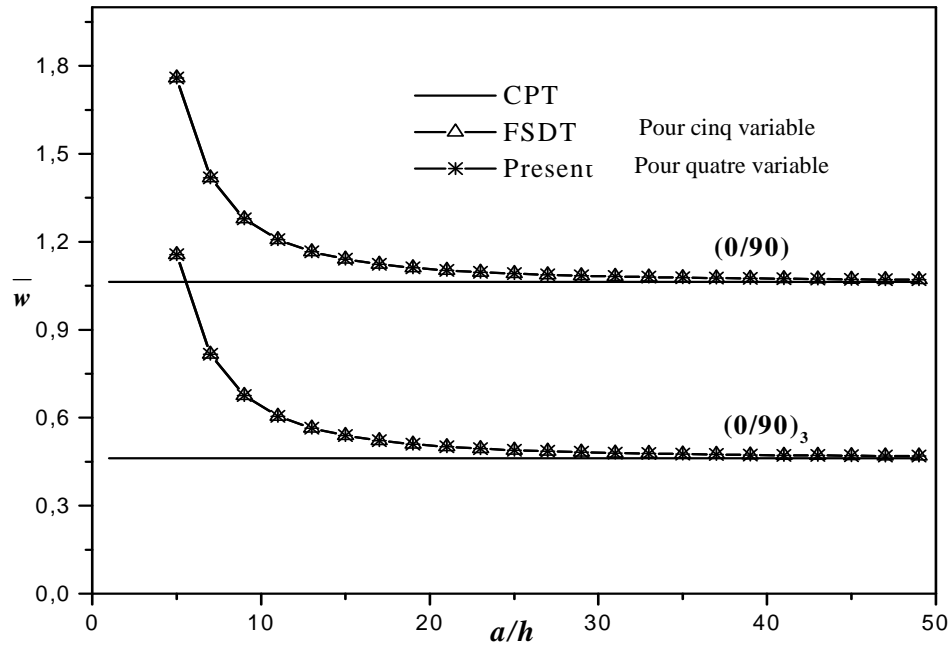


Figure. IV.1:variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifiées antisémétiques a plis croisées carrées(0/90) n sous chargement sinusoïdales en fonction du rapport épaisseur (Matériau 1).

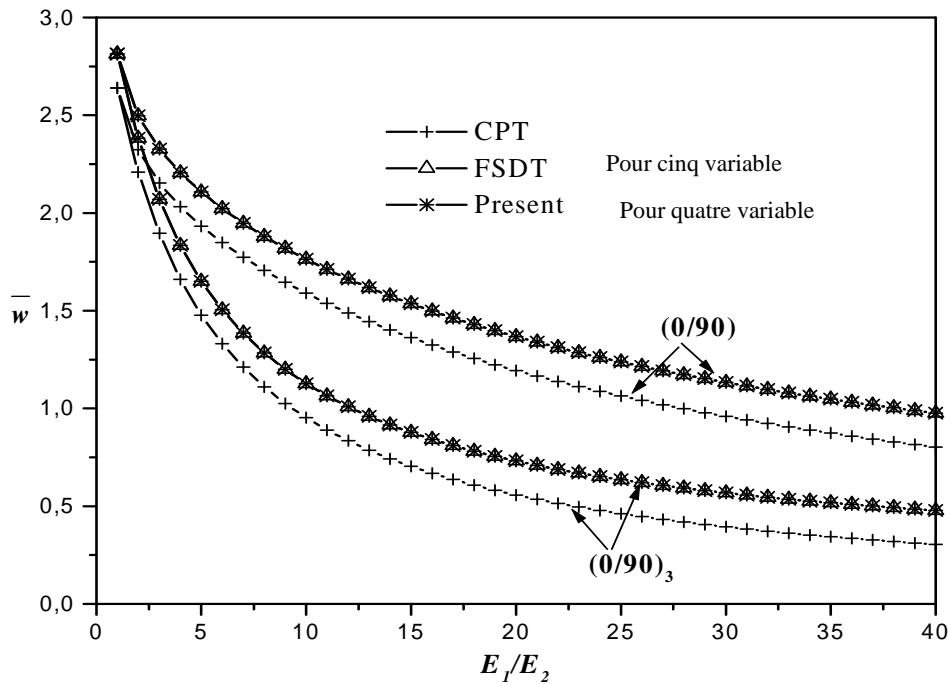


Figure. IV.2: variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifiées antisémiques a plis croisées carrées(0/90) n sous chargement sinusoïdales en fonction de l'anisotropie matérielle (matériau 1 $a/h = 10$).

Ces figures illustrent également l'exactitude de la théorie actuelle pour une vaste gamme de rapport d'épaisseur a/h et anisotropie du matériau E_1/E_2 . Les résultats obtenus par la présente théorie avec seulement quatre inconnues sont comparés à celles prédites par la CPT et FSDT classique à cinq inconnues. Encore une fois, la présente FSDT et la FSDT classique donnent des résultats identiques, alors que CPT sous-estime les détournements de stratifiés épais avec $a/h < 20$ du fait de tenir compte des effets de déformation de cisaillement (voir Fig.1). A travers des variations d'épaisseur et les valeurs correspondantes de déplacement en plan \bar{u} , les contraintes normales $(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y)$, et les contraintes de cisaillement $(\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz})$ sont également donnés dans la figure. 3 pour un stratifié d'épaisseur moyenne avec $a/h = 10$.

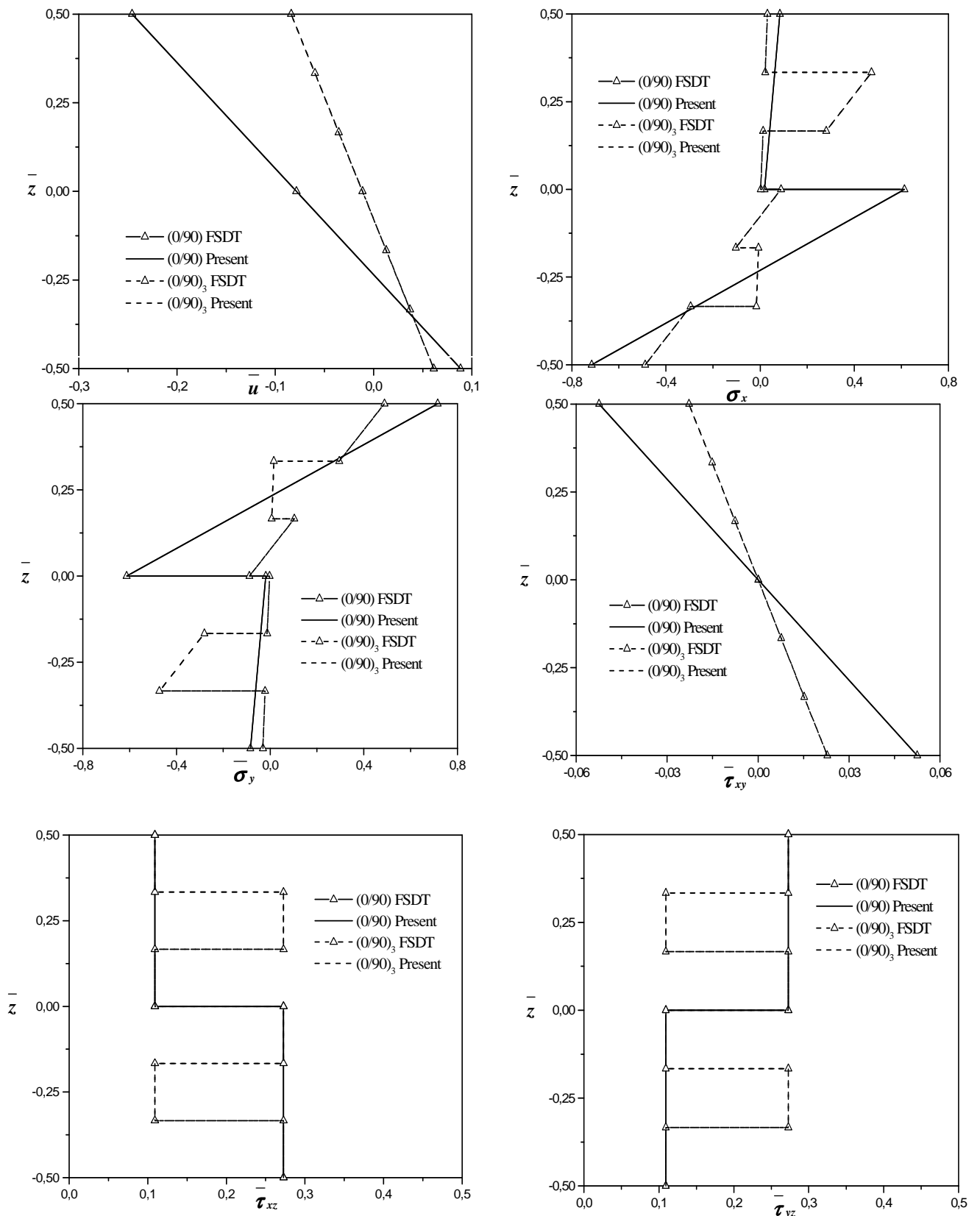


Figure. IV. 3:Distributions du déplacement plane et des contraintes d'un stratifiée antisémétrique a plis croisés carrés (0/90) sous chargements sinusoïdales (Matériau 1, $a/h = 10$).

En peut voir à partir de la figure 3 que les résultats prédits par la théorie actuelle avec seulement quatre inconnues sont identiques à ceux obtenus à l'aide du FSDT avec cinq inconnues.

Exemple 3

Dans cet exemple, un stratifié antisymétrique à plis équilibré carré (45/-45)_n sous charge sinusoïdale est étudiée en utilisant le Matériel 1. Dans le tableau 4, la flèche adimensionnelle de la plaque sont présentés pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur et le nombre de plis. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés en utilisant la CPT et FSDT classique. On peut voir que la présente FSDT et la FSDT classique donnent des solutions proches les uns des autres. Il convient de noter que la présente FSDT est plus simple que celle qui existe à cause de moins de nombre d'inconnues et des équations de mouvement (voir le tableau 1).

n	Theory	a/h		
		10	20	100
1	FSDT	0.8284	0.6981	0.6564
	CPT	0.6547	0.6547	0.6547
	Present	0.8284	0.6981	0.6564
4	FSDT	0.4198	0.2896	0.2479
	CPT	0.2462	0.2462	0.2462
	Present	0.4198	0.2896	0.2479

Tableau IV.4: la flèche adimensionnelle \bar{w} d'un stratifiée antisymétrique a plis équilibrés carrée (45/-45)_n (Matériau1).

Pour illustrer encore la précision de la présente théorie pour une large gamme pour un laminé équilibré, figure 4 illustrée la flèche adimensionnelle pour un laminé antisymétrique à plis équilibré carré ($\theta/-\theta$)_n sous charge sinusoïdale ($a/h=10$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés en utilisant la CPT et FSDT classique.

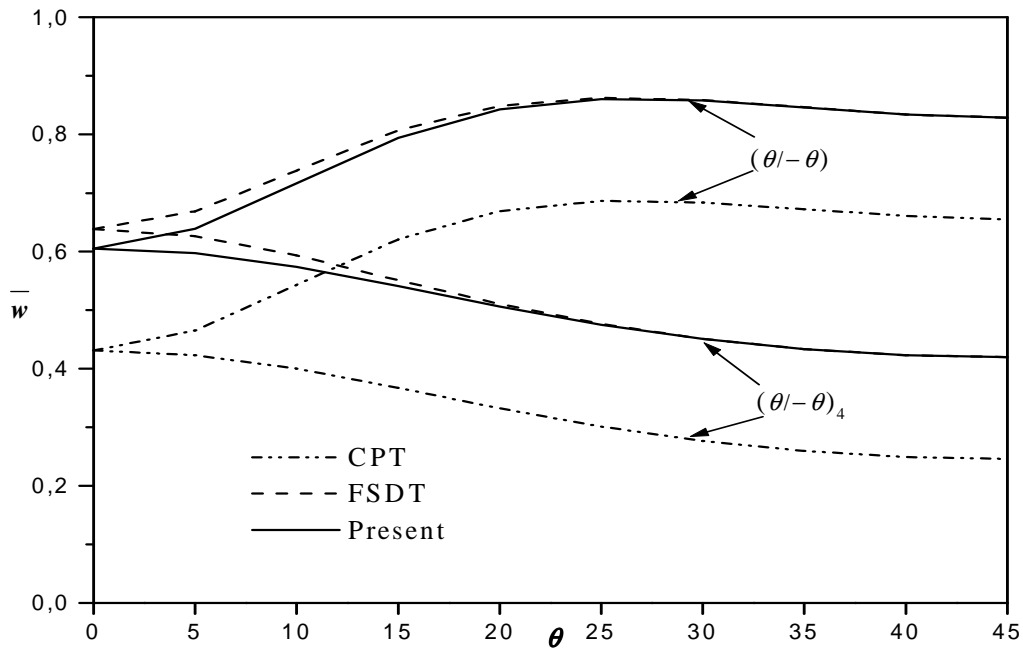


Figure. IV. 4: La variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifiée antisymétrique à plis équilibrés carrés $(\theta/\theta)_4$ sous chargements sinusoïdales en fonction de l'angle θ pour (Matériau 1, $a/h=10$).

En général, les résultats de la présente théorie et FSDT conventionnel sont pratiquement identiques, sauf dans le cas de faibles valeurs de l'angle de laminé ($\theta < 20^\circ$) où une petite différence entre la présente et la théorie de la FSDT classique est vu.

IV.3. Analyse en vibrations libre

Dans cette vérification, un stratifié antisymétrique à plis croisés épais carré (0/90) n est analysé en utilisant le matériau 2. La dimension fondamentale de fréquence b est présenté dans le tableau 5 pour différentes valeurs du rapport des modules et le nombre de plis. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions 3D exactes rapportés par Noor (1973) et ceux calculés en utilisant TSDT et la FSDT classique. Encore une fois, on peut voir que les résultats obtenus sont identiques à celles prédites par la FSDT classique. Ceci peut être observé également à partir de la Fig. 5 où les solutions actuelles sont comparées à celles prédites par le FSDT classique pour une large gamme de rapport d'épaisseur a/h .

E_1/E_2	Theory	n			
		1	2	3	5
3	Exact (Noor, 1973)	6.2578	6.5455	6.6100	6.6458
	TSDT	6.2169	6.5008	6.5558	6.5842
	FSDT	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
	Present	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
10	Exact (Noor, 1973)	6.9845	8.1445	8.4143	8.5625
	TSDT	6.9887	8.1954	8.4052	8.5126
	FSDT	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
	Present	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
40	Exact (Noor, 1973)	8.5625	10.6789	11.2728	11.6245
	TSDT	9.0871	11.1716	11.5012	11.6730
	FSDT	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444
	Present	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444

Tableau. IV.5: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique a plis croisés carrée (0/90)_n (Matériau2, $a/h=5$).

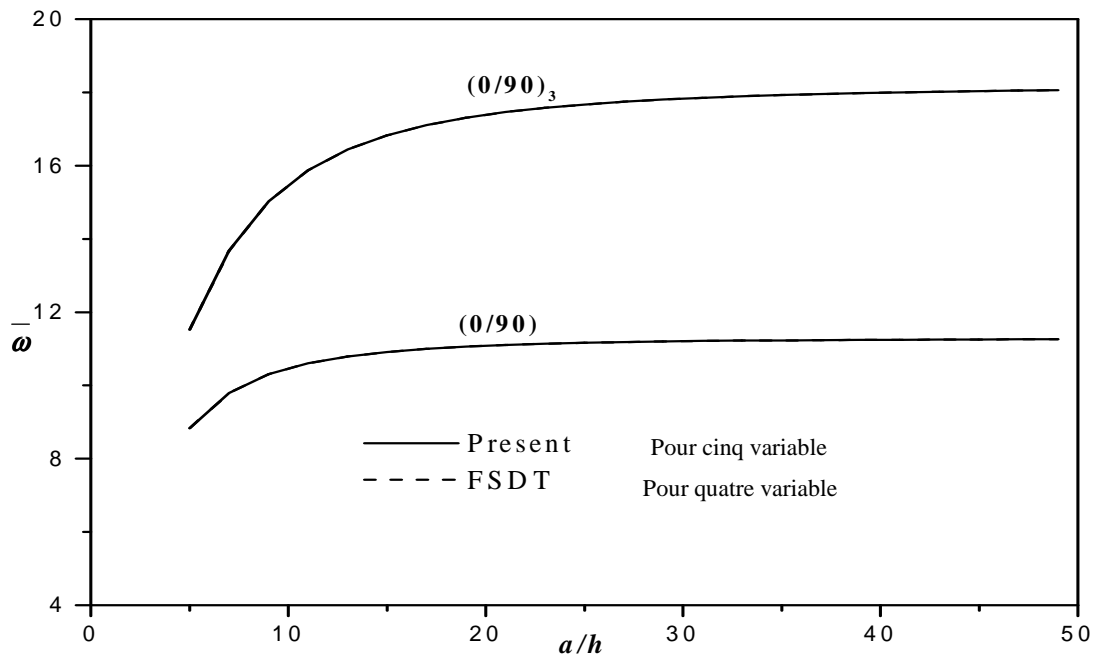


Figure. IV.5: La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle d' un stratifiées antisymétrique a plis croisé $(0/90)_n$ en fonction du rapport d'épaisseur (matériau 2 $E_1/E_2 = 40$)

Exemple 5

L'exemple suivant est effectué pour un 10-couche d'un stratifié antisymétrique a plis équilibrés épais et minces carré $(\theta/-\theta)_5$ en utilisant matériel 3. Cet exemple a pour but de vérifier l'exactitude de la théorie actuelle **pour des plaques très épaisse**. Le tableau 6 montre la fréquence adimensionnelle pour différentes valeurs du rapport entre l'épaisseur et l'angle de stratification. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions 3D exactes données par Noor et Burton (1990) où un très bon accord entre les résultats est obtenu.

E_1/E_2	Theory	n			
		1	2	3	5
3	Exact (Noor, 1973)	6.2578	6.5455	6.6100	6.6458
	TSDT	6.2169	6.5008	6.5558	6.5842
	FSDT	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
	Present	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
10	Exact (Noor, 1973)	6.9845	8.1445	8.4143	8.5625
	TSDT	6.9887	8.1954	8.4052	8.5126
	FSDT	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
	Present	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
40	Exact (Noor, 1973)	8.5625	10.6789	11.2728	11.6245
	TSDT	9.0871	11.1716	11.5012	11.6730
	FSDT	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444
	Present	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444

Tableau. IV.6: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique de dix couche a plis équilibrés carrée (Matériau 3).

Exemple 6

Le dernier exemple est effectuée pour un stratifiés antisymétrique a plis équilibrés carrés $(45/-45)_n$ avec un rapport d'épaisseur varie de 2 à 100. Matériel 2 est considérée. le tableau 7 montre fréquences fondamentales adimensionnelle.

n	E ₁ /E ₂	Theory	a/h						
			2	4	10	20	50	100	
1	3	HSDT(Swaminathan K,2008)	4.5312	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666	
		Present	4.4556	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378	
	10	HSDT(Swaminathan K,2008)	4.9742	7.2647	8.9893	9.3753	9.4943	9.5123	
		Present	4.9316	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537	
	20	HSDT(Swaminathan K,2008)	5.1817	8.0490	10.6412	11.2975	10.5074	11.5385	
		Present	5.2387	8.1185	10.6265	11.2517	11.4511	11.4806	
	30	HSDT(Swaminathan K,2008)	5.2771	8.5212	11.8926	12.8422	13.1566	13.2035	
		Present	5.4104	8.7213	11.9456	12.8208	13.1077	13.1505	
	40	HSDT(Swaminathan K,2008)	5.3325	8.8426	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668	
		Present	5.5205	9.1609	13.0439	14.1790	14.5608	14.6183	
	2	3	HSDT(Swaminathan K,2008)	4.6498	6.4597	7.6339	7.8724	7.9442	7.9545
			Present	4.6519	6.4626	7.6293	7.8657	7.9368	7.9472
10		HSDT(Swaminathan K,2008)	5.2061	8.3447	11.4116	12.2294	12.4952	12.5351	
		Present	5.3765	8.5634	11.4939	12.2463	12.4881	12.5239	
20		HSDT(Swaminathan K,2008)	5.4140	9.3306	14.4735	16.2570	16.8949	16.9927	
		Present	5.6542	9.7575	14.7292	16.3394	16.9008	16.9862	
30		HSDT(Swaminathan K,2008)	5.5079	9.7966	16.4543	19.2323	20.3134	20.4839	
		Present	5.7641	10.3391	16.8825	19.3944	20.3361	20.4827	
40		HSDT(Swaminathan K,2008)	5.5674	10.0731	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499	
		Present	5.8228	10.6839	18.4633	21.8722	23.2368	23.4541	

Tableau IV.7: fréquence fondamentale d'un stratifiée antisymétrique équilibrés carrée (Matériau 2).

Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Swaminathan et Patil (2008) sur la base de HSDT. Un bon accord entre les résultats est considérée pour diverses valeurs du rapport épaisseur et le matériau anisotropie. En outre, es

fréquences fondamentales a dimensionnelle obtenues à partir de la théorie actuelle sont en excellent accord avec celles prédites par la FSDT conventionnelle comme représenté sur la Fig. 6.

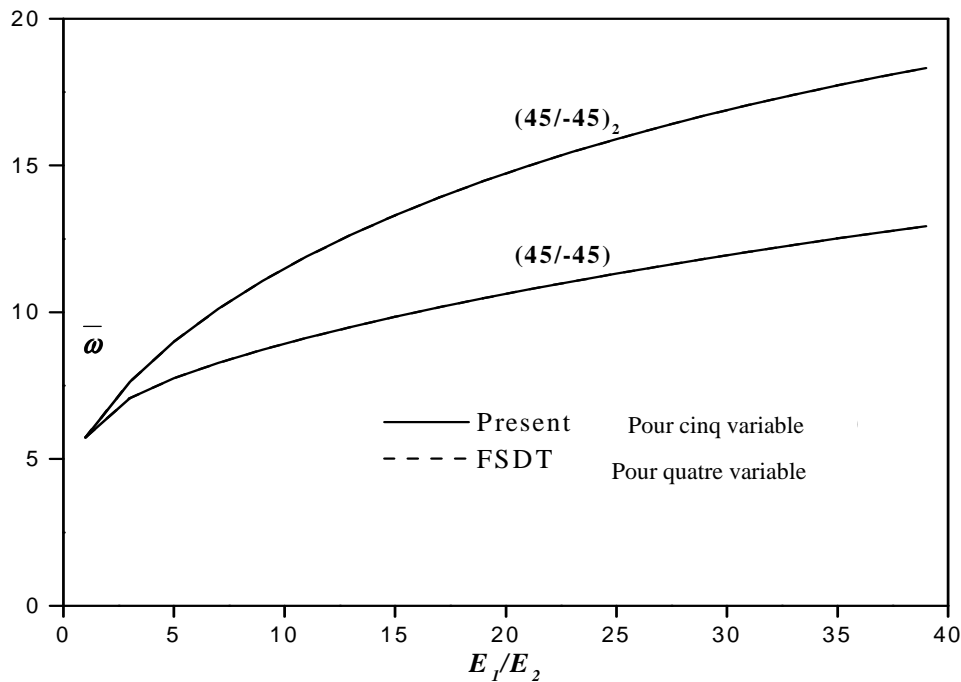


Figure. IV.6: La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle d' un stratifiées antisymétrique a plis équilibré $(45/-45)_n$ en fonction du rapport d'anisotropie (matériau 2, $a/h = 10$).

Il convient de noter que le nombre d'inconnues de la présente théorie est que quatre contre cinq dans le cas de la FSDT classique et douze dans le cas de HSDT (Swaminathan et Patil, 2008) (voir le tableau 1). Ainsi, on peut conclure que la présente théorie est non seulement précis mais également simple dans la prédiction de la réponse de plaques stratifiées.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de l'analyse du comportement en flexion et en vibration des plaques stratifiées avec une variation du rapport d'épaisseur et rapport d'anisotropie en utilisant les différentes théories. Deux types de plaques stratifiées sont utilisés, à savoir, les plaques stratifiées a plis croisées et les plaques stratifiées a plis équilibrées.

La théorie FSDT proposés à quatre variables est développée pour l'analyse des plaques stratifiée carrées. Le nombre de variables dans cette théorie est inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier ordre et d'ordre élevé. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal avec un facteur de correction de cisaillement. Ainsi, contrairement à toute autres théorie, la théorie présentée donne lieu à seulement quatre équations régissant résultant de l'effort de calcul nettement inférieur par rapport aux autres théories d'ordre élevé rapportées dans la littérature ayant plus de nombre d'équations gouvernantes. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour les comportements de flexion et de vibration de plaques stratifiée simplement appuyées. Les équations gouvernantes ont une forte similarité avec la théorie classique des plaques CPT en plusieurs aspects. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de flexion et de vibration des plaques stratifiées .

CHAPITRE V

Partie II« Validation et comparaison des résultats pour les plaques FGM »

V.1. Introduction

Dans cette étude, l'analyse des vibrations libres des plaques FGM par la présente théorie des plaques est effectuée pour discussion.

Deux types de plaque en FGM sont employés dans cette étude Al / Al_2O_3 et Al / ZrO_2 , dans laquelle leurs propriétés matérielles sont présentées dans le tableau 1. Pour tous les calculs, le facteur de correction de cisaillement et le rapport de Poisson sont pris en tant que 5/6 et 0.3, respectivement.

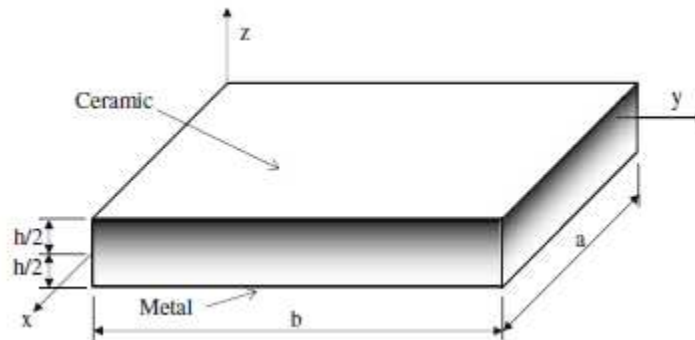


Figure. V.1: Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes

V.2. Relations constitutives :

Les propriétés du matériau de la plaque de FG sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque en fonction d'une distribution en loi de

puissance telle que :

$$P(z) = p_m + (p_c - p_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque.

Où P_m et P_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, indices m et c représentent le constituants métalliques et céramiques, respectivement.

lorsque la valeur p prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique, alors que p infinie indique une plaque entièrement métallique.

Puisque les effets de la variation du rapport de Poisson ν sur la réponse de vibration des plaques de FGM sont très petits [Kitipornchai, S.,2006, Allahverdizadeh, A.,2008] on assume qu'habituellement ν le rapport du Poisson est constant.

Les relations constitutifs d'une plaque de FG M peut trouver dans l'annexe.

Les résultats de comparaison sont donné pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur, d'allongement, et de l'index de loi de puissance.

Suivant le paramètre normal de fréquence est employé en présentant les résultats numériques sous les formes tabulaires et graphiques.

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad , \quad \hat{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad , \quad \bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} / h$$

Les propriétés matérielles utilisées pour la présente étude :

propriétés	Métal (Aluminium)	Céramique	
		Al ₂ O ₃	ZrO ₂
$E_c (GPa)$	70	380	200
$\rho_c = (kg / m^3)$	2702	3800	5700

Tableau V.1 propriétés des matériaux utilisées

Théorie	P=0		p=1			a/h=5		
	a/h =√10	a/h=10	a/h=5	a/h=10	a/h=20	p=2	p=3	p=5
3-D [Vel, S.S, Batra,2004]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
HSDT [Matsunaga, H.2008.]	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.227	0.2281
HSDT [Pradyumna, S.2008]	0.4658	0.0578	0.2257	0.0613	0.0157	0.2237	0.2243	0.2253

HSDT [Hosseini-Hashemi, S.2011.(2)]	0.4623	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
FSDT [Hosseini-Hashemi, S, 2011.(1)]	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291
CPT	0.5535	0.0592	0.2479	0.0634	0.0159	0.2473	0.2497	0.2526
présente	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291

Tableau V.2 Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ du plaque carré Al/ZrO₂.

a/h	mode (n,m)	théorie	indice de loi de puissance (p)				
			0	0.5	1	4	10
5	(1,1)	HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		CPT	0.2314	0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
	(2,2)	présent	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856

		CPT	0.5535	0.4681	0.4198	0.3603	0.3481
		présent	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		CPT	0.8504	0.7184	0.6425	0.5478	0.5306
		présent	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
10	(1,1)	HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	(1,2)	CPT	0.0592	0.0502	0.0452	0.0392	0.0377
		présent	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
	(2,2)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		CPT	0.1464	0.1239	0.1115	0.0966	0.0930
		présent	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		HSDT [Hosseini-Hashemi,	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301

		S,2011.(2)]					
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		CPT	0.2314	0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
		présent	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
20	(1,1)	HSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(2)]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S,2011.(1)]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		CPT	0.0149	0.0126	0.0114	0.0099	0.0095
		présent	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

Tableau V.3 Comparaison de paramètre de fréquence Natural $\hat{\beta}$ du plaque carré Al/AL₂O₃

V.3. Etudes de comparaison

Exemple 1

4.1 Études de comparaison

Le premier exemple est réalisé pour des plaques carrés de Al/ZrO₂ avec différentes valeurs de rapport d'épaisseur a/h et l'indice de loi de puissance p .

Les paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ sont obtenus en utilisant la théorie actuelle et le CPT.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des solutions exactes en 3-D et de Vel Batra [Vel, S.S., Batra, R.C.:2004], le 2-D solutions théoriques d'ordre supérieur de Matsunaga [Matsunaga, H.:2008], HSDT avec les solutions de la

méthode des éléments finis de Pradyumna et Bandyopadhyay [Pradyumna, S.,2008], la théorie de Reddy des solutions de la méthode d'analyse de Hosseini-Hashemi et al. [Hosseini-Hashemi, S.2011.(2)], et FSDT des solutions de la méthode d'analyse de Hosseini-Hashemi et al. [Hosseini-Hashemi, S.2011.(1)] dans le tableau V.2.

On peut voir que, pour la plaque avec $p = 0$, c'est-à-dire plaque isotrope entièrement en céramique, présente les résultats de la théorie sont bien en accord avec ceux de la 3-D, HSDT, et les solutions FSDT.

Cependant, pour une plaque FGM avec des valeurs non nulles de p , les résultats de présents théorie et les d'autres théories de déformations de cisaillement sont plus élevés que ceux obtenus par des solutions exactes 3-D de Vel et Batra [Vel, S.S., Batra, R.C.:2004].

La raison de cette caractéristique peut être dû à la façon d'estimer les propriétés du matériau de Plaques de FGM. En Ref. [Vel, S.S., Batra2004], les propriétés des matériaux à un point ont été estimées à partir des fractions volumiques locales à l'aide Mori-Tanaka [Mori, T., Tanaka, K.,1973] , alors que dans la présente étude et Réf. [Hosseini-Hashemi, S.2011.(1), Hosseini-Hashemi, S.2011.(2), Matsunaga, H(2008), Pradyumna, S.(2008)], les propriétés des matériaux sont supposé varier à travers l'épaisseur de la plaque avec une distribution en loi de puissance des fractions volumiques des deux matériaux.

Les solutions de CPT obtenus dans cette étude sont plus élevés que ceux prévus par les théories de déformation de cisaillement et des solutions exactes 3-D.

La différence entre CPT et les théories de déformation de cisaillement et la solution exacte 3-D est plus considérable pour les plaques épaisses.

Par exemple, la différence entre le CPT et les résultats en 3-D, pour la plaque entièrement en céramique, augmente de 2,42 à 18,82% lorsque le rapport a / h

est diminuée de 10 à $\sqrt{10}$.

Il peut s'agir d'observées dans le tableau V.2 que les résultats de la théorie actuelle et la théorie de Reddy [Hosseini-Hashemi, S.2001] sont identiques. Il convient de noter que la présente théorie implique quatre inconnues contre cinq inconnues à la fois FSDT et la théorie de Reddy.

Exemple 2

Une plaque de Al/Al₂O₃ carré avec un rapport épaisseur varie de 5 à 20 et indice de loi de puissance P varie de 0 à 10 est analysé, en utilisant différentes théories des plaques, les Fréquences fondamentales $\hat{\beta}$ est présenté dans le tableau 3.

On peut constater que les résultats obtenus par la théorie actuelle sont en bon accord avec ceux rapportés par Hosseini-Hashemi et al. [Hosseini-Hashemi, S.20011.(2)] sur la base de la théorie de Reddy, et Hosseini-Hashemi et al. [Hosseini-Hashemi, S.20011.(1)] sur la base de FSDT.

Les résultats indiquent également que le CPT surestime la fréquence naturelle des Plaques de FGM, en particulier les plaques épaisses à des modes de vibration plus élevés.

Par conséquent, afin d'obtenir les fréquences naturelles précises pour les plaques épaisses, il est nécessaire d'employant les différents théories de déformation de cisaillement.

a/h	Mode (m,n)	théorie	l'indice de loi de puissance (p)						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1(1,1)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		HSDT	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
	2(1,2)	présent	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	3(1,3)	HSDT	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		présent	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	4(2,1)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		HSDT	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		présent	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		HSDT	10.1164	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954
		présent	10.1089	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	6.3708	6.2683
10	1(1,1)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
	2(1,2)	HSDT	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		présent	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197

	3(1,3)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580	
		HSDT	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368	
		présent	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7071	3.6580	
	4(2,1)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086	
			HSDT	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7576
			présent	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		FSDT[Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639	
			HSDT	11.8315	10.0810	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
			présent	11.8307	10.0737	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
20	1(1,1)	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642	
		HSDT	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619	
	2(1,2)	présent	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642	
		FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681	
			HSDT	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
	4(2,1)	présent	5.9199	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681	
		FSDT [Hosseini-Hashemi,	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843	

	S.,2011(1)]							
	HSDT	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
	présent	9.5669	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
	FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011(1)]	12.4560	10.5660	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
	HSDT	12.4562	10.5677	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909
	présent	12.4562	10.5657	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166

Tableau.04 Comparaison de paramètre de fréquence $\bar{\omega}$ du plaque rectangulaire Al/Al_2O_3 ($b=2a$).

Exemple 3

Le dernier exemple est effectué pour plaque de Al/Al_2O_3 rectangulaire ($b = 2a$) avec un rapport épaisseur varie de 5 à 20 et un indice de loi de puissance varie de 0 à 10.

Les fréquences $\bar{\omega}$ obtenues à partir de la présente théorie et la théorie de Reddy ,comparés avec ceux rapportés par Hosseini-Hashemi et al [Hosseini-Hashemi, s.,2001.(1)] sur la base de FSDT dans le tableau 4.

Encore une fois, la théorie actuelle et la théorie de FSDT donnent des résultats identiques.

Pendant ce temps, le FSDT [Hosseini-Hashemi, S.,2011.(1)] donne des résultats précis pour plaque d'épaisseur moyenne à des modes de vibration inférieurs. Pour les modes de vibration plus élevés, Cependant, il ya une légère différence entre les résultats de FSDT et la théorie de Reddy.

V.4 études de paramètres

Après avoir vérifié l'exactitude et l'efficacité de la solution actuelle, des études paramètres sont effectuées afin d'examiner les effets des variations de l'indice de loi de puissance, rapport d'épaisseur, et allongement sur la fréquence naturelle de plaques de FGM. Les paramètres de fréquence naturelle $\bar{\omega}$ de plaques Al/Al₂O₃ sont obtenus à l'aide du CPT, HSDT de Reddy, et la présente théorie. La figure 02 illustre la variation des paramètres de fréquence fondamentale de plaque carrée par rapport à l'indice de loi de puissance. Les rapports d'épaisseur a/h est 5 (correspondant à la plaque d'épaisseur) et 100 (correspondant à plaque mince). On peut voir que le paramètre de fréquence fondamentale diminue à mesure que l'indice de loi de puissance augmente.

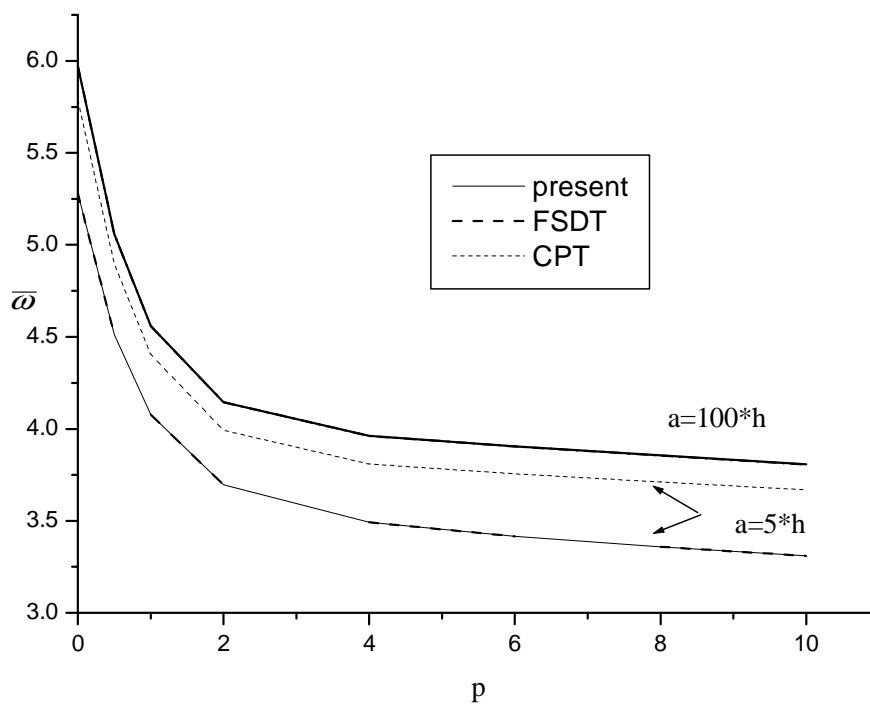


Figure V.02. l'effet de la puissance sur le paramètre de fréquence fondamentale de la plaque carrée de FGM

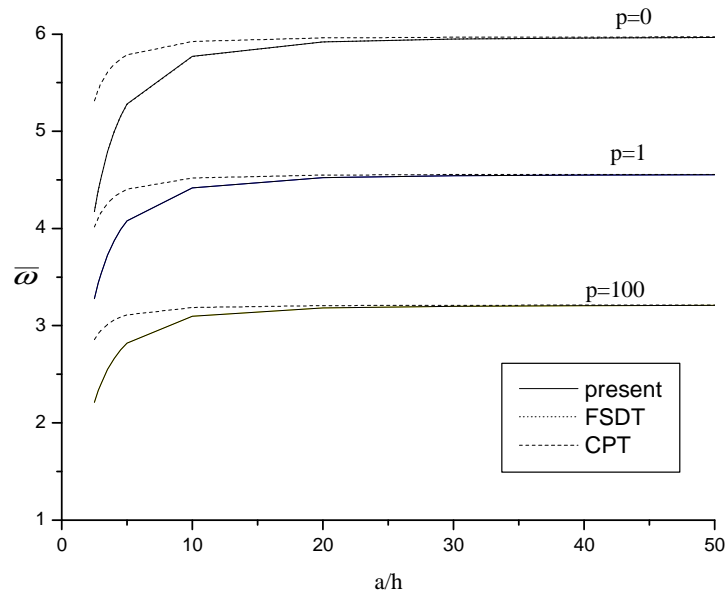


Figure. V.03.L'effet du rapport d'épaisseur sur le paramètre de fréquence

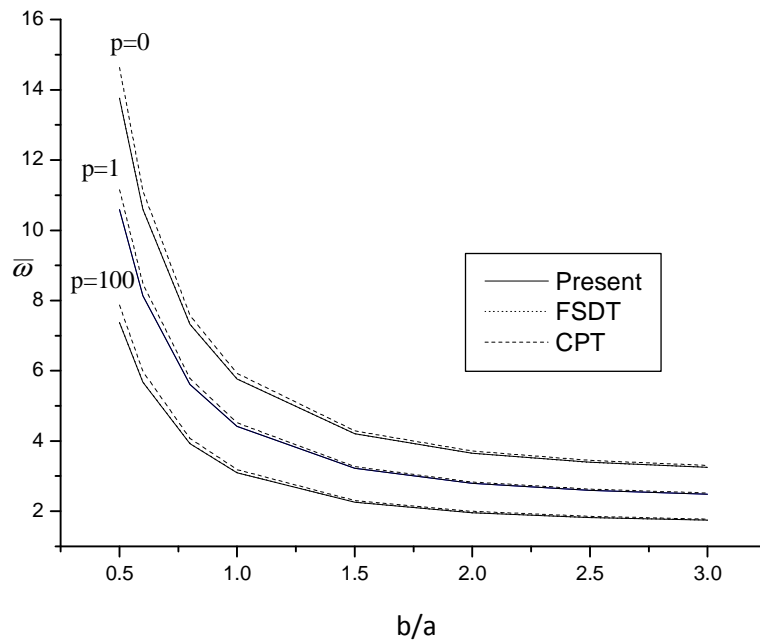


Figure.04 L'effet de l'allongement sur le paramètre de fréquence fondamentale de plaque rectangulaire $a= 10 h$).

a/h	Mode (m,n)	l'indice de loi de puissance (p)						
		0	0.5	1	2	5	10	100
5	1(1,1)	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3094	2.8217
	2(2,1)	11.5454	9.9438	9.0091	8.1443	7.5018	7.1404	6.1362
	3(1,2)	11.5454	9.9438	9.0091	8.1443	7.5018	7.1404	6.1362
	4(2,2)	16.6892	14.4469	13.1135	11.8385	10.815	10.242	8.8400
	5(3,1)	19.7139	17.1089	15.5456	14.0259	12.7618	12.0535	10.4246
	6(1,3)	19.7139	17.1089	15.5456	14.0259	12.7618	12.0535	10.4246
	7(3,2)	23.8148	20.7319	18.8618	17.0076	15.4005	14.4999	12.5681
	8(2,3)	23.8148	20.7319	18.8618	17.0076	15.4005	14.4999	12.5681
	9(4,1)	28.6774	25.0448	22.8179	20.5644	18.5305	17.3898	15.1041
10	1(1,1)	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.6580	3.0969
	2(2,1)	13.7637	11.7288	10.5893	9.6067	9.0110	8.6707	7.3700
	3(1,2)	13.7637	11.7288	10.5893	9.6067	9.0110	8.6707	7.3700
	4(2,2)	21.1207	18.0487	16.3093	14.7812	13.7970	13.2376	11.2869
	5(3,1)	25.7337	22.0264	19.9141	18.0380	16.7899	16.0824	13.7362
	6(1,3)	25.7337	22.0264	19.9141	18.0380	16.7899	16.0824	13.7362
	7(3,2)	32.2839	27.6925	25.0545	22.6780	21.0315	20.1012	17.2067
	8(2,3)	32.2839	27.6925	25.0545	22.6780	21.0315	20.1012	17.2067
	9(4,1)	40.4356	34.7703	31.4844	28.4758	26.2995	25.0733	21.5147
20	1(1,1)	5.9199	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.7681	3.1824
	2(2,1)	14.6070	12.3932	11.1746	10.1544	9.5991	9.2789	7.8464
	3(1,2)	14.6070	12.3932	11.1746	10.1544	9.5991	9.2789	7.8464
	4(2,2)	23.0773	19.5987	17.6767	16.0568	15.1523	14.6319	12.3876

	5(3,1)	28.6107	24.3131	21.9327	19.9182	18.7754	18.1188	15.3510
	6(1,3)	28.6107	24.3131	21.9327	19.9182	18.7754	18.1188	15.3510
	7(3,2)	36.7506	31.2579	28.2049	25.6058	24.0986	23.2343	19.7057
	8(2,3)	36.7506	31.2579	28.2049	25.6058	24.0986	23.2343	19.7057
	9(4,1)	47.3227	40.2946	36.3711	33.0059	31.0021	29.8556	25.3541
100	1(1,1)	5.9712	5.05747	4.55792	4.14456	3.93017	3.8061	3.2116
	2(2,1)	14.9198	12.6373	11.3892	10.3562	9.8197	9.5091	8.0244
	3(1,2)	14.9198	12.6373	11.3892	10.3562	9.8197	9.5091	8.0244
	4(2,2)	23.8587	20.2096	18.2139	16.5615	15.7023	15.2050	12.8316
	5(3,1)	29.8126	25.2536	22.7600	20.6949	19.6202	18.9982	16.0333
	6(1,3)	29.8126	25.2536	22.7600	20.6949	19.6202	18.9982	16.0333
	7(3,2)	38.7353	32.8133	29.5736	26.8898	25.4914	24.6821	20.8313
	8(2,3)	38.7353	32.8133	29.5736	26.8898	25.4914	24.6821	20.8313
	9(4,1)	50.6172	42.8812	38.6480	35.1400	33.3090	32.2495	27.2201

Tableau.5. neuf premier Paramètre de fréquences $\bar{\omega}$ de plaque carrée AL/AL₂O₃

Ceci est dû au fait que l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente la fraction en volume de métal. En outre, les paramètres de fréquence de plaques entièrement en céramique sont considérablement plus élevés que ceux des plaques FGM. En outre, les résultats prévus par la présente théorie et FSDT sont identiques, et le CPT surestime du paramètre de fréquence des plaques de FGM. La différence entre CPT et la théorie actuelle est considérable pour tôles épaisses, mais il peut être négligé pour les plaques minces.

La variation du paramètre de fréquence fondamentale de la plaque carrée par rapport à un rapport épaisseur a/h est représenté sur la Fig. 3. On observe que les paramètres de fréquence fondamentale augmente de l'augmentation du

rapport d'épaisseur, et la variation du paramètre de fréquence fondamentale est remarquable lorsque le rapport d'épaisseur est inférieur à 5. Aussi, le CPT surestime le paramètre de fréquence de plaques FGM, et la divergence entre les courbes de CPT et la présente théorie est négligeable lorsque le rapport d'épaisseur est supérieur à 10.

L'effet d'allongement (b/a) sur le paramètre de fréquence de la plaque ($a/h = 10$) est présentée à la Fig. 4. Il peut être constaté que le paramètre de fréquence diminue par l'augmentation du rapport (b/a).

Les neuf premiers paramètres de fréquence $\bar{\omega}$ ont été totalisées dans le tableau 5 pour les plaques carrées et rectangulaires, respectivement. Les plaques de FGM sont faites de Al/Al₂O₃. Dans chaque tableau, quatre valeurs différentes de rapport d'épaisseur 5, 10 (correspondant à la plaque d'épaisseur moyenne) et 20, 100 (correspondant à la plaque mince) sont examinés. En outre, sept valeurs arbitraires de l'indice de loi de puissance ($p = 0, 0.5, 1, 2, 5, 10, 100$) sont considérés. Les points suivants peuvent être visibles dans le tableau 5 :

- les paramètres de fréquence augmente par augmentation du rapport épaisseur.
- L'effet du rapport épaisseur de paroi devient plus important pour le mode plus élevé de fréquences naturelles.
- paramètre de fréquence augmente en diminuant l'indice de la loi de puissance.

V.5 .Conclusion

Une théorie de déformation de cisaillement efficace est présentée pour l'analyse des vibrations des plaques FGM. La précision de la présente théorie a été démontrée pour l'analyse des vibrations des plaques FGM dans le cas d'appuis simple.

Les conclusions de la théorie actuelle sont les suivants:

- les fréquences propres prédites par la théorie actuelle sont identiques à ceux obtenus par la théorie FSDT ;

-La théorie actuelle ne comporte que quatre inconnues contre cinq inconnues dans le cas de la théorie de FSDT et Reddy :

-La théorie actuelle a une forte similitude avec le CPT dans de nombreux aspects tels que les équations du mouvement, conditions aux limites, et des expressions de contraintes qui en résultent.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie est non seulement précise mais également efficace dans la prédiction de la fréquence naturelle des plaques FGM.

conclusion générale

Conclusion Générale

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur l'évaluation des caractéristiques statiques et vibratoires des structures composites « stratifiées et matériaux à gradient évalué (FGM) ».

Pour illustrer la précision de la présente théorie on a été 'étudier Trois cas de vérification.

1. L'influence du chargement sur le comportement de la plaque vis a vis à la flexion, en études l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentiels.

- Variation de La flèche adimensionnelle « diminution » en fonction d'augmentation du rapport d'épaisseur « a/h » et d'augmentation du rapport de l'anisotropie E_1/E_2 .

-Variation de La flèche adimensionnelle des stratifiées « diminution » en fonction de l'angle θ et d'augmentation de nombre de couche « $(\theta/-\theta)_n$ ».

- Distributions des contraintes et du déplacement plan d'un stratifiée antisémétique a plis croisés .

2. Analyse en vibration Libre « plaque stratifiée » : dans cette vérification un stratifiées croisé épais est analysé, l'influence des paramètres « a/h , θ , n , E_1/E_2 » sur la fréquence fondamentale a été étudié.

3. Analyse en vibration Libre « plaque FGM » : dans cette partie on a examiner les effets des variations de l'indice de puissance, rapport d'épaisseur et l'allongement sur la fréquence naturelle des plaques FGM, les paramètres de fréquence naturelle sont obtenus à l'aide du CPT, HSDT de Reddy et la présente Théorie.

-La CPT surestime la fréquence naturelle ;

-le paramètre de fréquence augmente par augmentation de rapport d'épaisseur ;

- le paramètre de fréquence fondamentale diminue à mesure que l'indice de loi de puissance augmente ;
- le paramètre de fréquence diminue par l'augmentation du rapport d'allongement (b/a) ;
- la divergence entre les courbes de CPT et la présente théorie est négligeable lorsque le rapport d'épaisseur est supérieur à 10.

La théorie proposé « FSDT » a été développé pour la flexion et l'analyse des vibrations des plaques stratifiés et FGM .

Contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement, seulement quatre fonctions de déplacement inconnus sont utilisés dans la présente théorie contre cinq fonctions de déplacement inconnus utilisés dans celles correspondantes.

Par conséquent, on peut conclure que la nouvelle FSDT est non seulement précis mais également simple dans la prédiction des réponses en flexion et en vibration des stratifiés.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de cisaillement, et d'utiliser la nouvelle FSDT pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- Utilisation de la théorie FSDT pour résoudre les problèmes de flambement ;
- Utilisation de la théorie FSDT pour d'autres types d'appuis ;

La formulation se prête particulièrement bien à l'étude du comportement mécanique, qui sera examiné dans un avenir proche.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux composites, précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.

Annexe

ANNEXE

La théorie du premier ordre pour les plaques en FGM

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}$$

Relation déformations-déplacements:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}$$

La relation contraintes-déformations est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kQ_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kQ_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$k = 5/6$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

Equation d'équilibre

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient les équations d'équilibre :

$$W_{\text{int}} = \iiint \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

$$W_{\text{int}} = \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV$$

$$W_{\text{int}} = \iiint \left(\sigma_x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dV$$

$$W_{\text{int}} = \iiint \left(\sigma_x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

On pose:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

$$W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy$$

Intégrons par partie ;

$$\int_0^a \int_0^b N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} dx dy = \int_0^a N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} dx dy = \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} dx dy = \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} dx dy = \int_0^a N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} dx dy = \int_0^a M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy - \int_0^a \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} dx dy = \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx - \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_0^a M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy - \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy = \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx dy = \int_0^a Q_y \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy = \int_0^a Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dx dy = \int_0^a Q_x \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy \\ & + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \left(\int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy - \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy \right) - \left(\int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx - \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy \right) \\ & - 2 \left(\int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy - \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy \right) \\ & + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy - \left(\int_0^a Q_y \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \right) \\ & + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \left(\int_0^b Q_x \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy \right) \end{aligned} \right) dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy \\ & + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy + \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy - \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx + \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy \\ & - 2 \int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy + 2 \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy \\ & + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy - \int_0^a Q_y \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \\ & + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \int_0^b Q_x \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy \end{aligned} \right)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy + \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy - \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx + \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx \\ & - 2 \int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy + 2 \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a Q_y \delta \phi dx + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^b Q_x \delta \phi dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy \end{aligned} \right)$$

$$\delta W_{ext} = \iint q \cdot \delta w \cdot dx \cdot dy$$

Les équations d'équilibre

$$\delta u_0 : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\delta v_0 : A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

$$\delta \phi : B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 2B_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\delta w : A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A_{44} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = q$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ \Phi \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

Les composantes a_{ij} de la matrice symétrique [k] et [M] sont données comme suit:

$$a_{11} = -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2)$$

$$a_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = \lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2]$$

$$a_{14} = 0$$

$$a_{22} = -(A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2)$$

$$a_{23} = \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22} \mu^2]$$

$$a_{24} = 0$$

$$a_{33} = -(D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4)$$

$$a_{34} = 0$$

$$a_{44} = -A_{55} \lambda^2 - A_{44} \mu^2$$

$$m_{11} = m_{22} = -I_0$$

$$m_{13} = \lambda I_1$$

$$m_{23} = \mu I_1$$

$$m_{33} = -I_2 (\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{44} = -I_0$$

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Abrate, S.: Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Compos. Part B Eng.* 39(1), 151–158 (2008) .

Achraf tafla « éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches »(2007) p 17.

Allahverdizadeh, A., Naei, M.H., Nikkhah Bahrami, M.: Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *J. Sound Vib.* 310(4–5), 966–984 (2008).

Ambartsumyan S.A. "Theory of anisotropic plate". Technomic Publishing Co, 1969.130.

Auricchio and Sacco. "A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates". *Meth.Engng.* 44, 1481-1504 (1999).

Averill R.C. "Static and dynamic response of moderately thick laminate beams".*Composite Structures*, vol. 52, pages 123-135, 2001.

Ayad R. " Elément finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement ". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne,France, 1993.

Baferani, A.H., Saidi, A.R., Jomehzadeh, E.: An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proc. Inst. of Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 225(3), 526–536 (2011).

Bakhti, K., Kaci, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2013), "Large deformation analysis for functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using an efficient and simple refined theory", *Steel and Composite Structures*, 14(4), 335-347.

Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. -(2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Composites Part B: Engineering*, 42, 1386-1394.

Berthelot J-M, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures", 2ème Edition, Masson, Paris, 1996, ISBN: 2-225-85425-4.

Bhimaraddi, A., Stevens, L.: A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates. *J. Appl. Mech.* 51(1), 195–198 (1984).

Bodaghi, M., Saidi, A.R. (2011), "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates", *Arch Appl Mech*, 81, 1555–1572.

Bouabdallah m.s. " Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites, Thèse de Doctorat ". UTC, 1992.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, 14(1), 85-104.

C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.

Carrera E. "On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells". *Computers and Structures*, vol. 82, pages 541/554, 2004.

Chen, C.S., Chen, T.J., Chien, R.D.: Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates. *Thin-Walled Struct.* 44(8), 844–851 (2006)

Cheng, Z.Q., Batra, R.C.: Exact correspondence between eigen values of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J. Sound Vib.* 229(4), 879–895 (2000).

Cho M. & R R. Parmerter. "efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration". *AIAA J.*, vol. 31, pages 1299-1306, 1993.

Choa, Kimb. "A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element". *Composites: Part B* 31 (2000) 65–74.

Cohen G.A. "transverse shear stiffnes of laminated anisotrope shells" *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol 13, pp 205-220, 1978 .

Daniel Gay. "Matériaux composites". 3ème édition, Hermé Paris 1991, p569.

Daniel Gay. "Matériaux composites". 4ème édition, Hermé Paris 1997, ISSN 1158-3509.

Della Croce, L., Venini, P.: Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput.Methods Appl.Mech.Eng.* 193(9–11), 705–725 (2004).

Dhatt G . " Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis". *Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., P. 255-278 (1969).*

Ebrahimi, F., Rastgo, A.: An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory. *Thin-Walled Struct.* 46(12), 1402–1408 (2008).

Ebrahimi, F., Rastgoo, A.: Nonlinear vibration of smart circular functionally graded plates coupled with piezoelectric layers.*Int. J. Mech. Mater. Des.* 5(2), 157–165 (2009).

Effendi R.et Guedra-Degeorges D.(1992),Etude expérimentale de la dégradation en compression des composites unidirectionnels fibre de Carbone-matrice organique et simulation numérique associée.*proc.8^{èmes} journées nationales sur les composites,Palaiseau,France,pp.29-40.*

Ewinc P.D,HAMA.C(1973) the nature of Compressive failure in UD Carbon Fibre Reinforced plastics .Royal aircraft establiment, Technical report n^o 73057.

Fares, M.E, Elmarghany, M.K, Atta, D. (2009), “An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates”, *Compos Struct*, 91(3), 296–305.

Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Jorge, R.M.N.: Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Compos. Struct.* 75(1–4), 593–600 (2006).

Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Martins, P.A.L.S.: Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos. Struct.* 69(4), 449–457 (2005).

Goyal. "Dynamic Stability of Uncertain Laminated Beams Subjected to general lamination configuration". *AIAA J.*, vol. 31, pages 1299-1306, 1993.

Guynn E.G (1992) A Parametric Study of Variables That Affect Fiber Microbuckling Initiation in Composite Laminates :Part I, Analysis. J. composites Mater.,vol.26,pp.1549-1616.

Hencky, H. (1947), "Über die Berücksichtigung der Schubverzerrungen in ebenen Platen", Ing. Arch., 16, 344-351.

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R.: A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. Int. J. Mech. Sci. 53(1), 11–22 (2011).(1)

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R.: Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. Compos. Struct. 93(2), 722–735 (2011).(2)

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., RokniDamavandi Taher, H.: Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. Appl. Math. Model. 35(2), 708–727 (2011).(3)

Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omid, M.: Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. Appl. Math. Model. 34(5), 1276–1291 (2010).(4).

HOUARI,M.S, ' Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances, thèse de doctorat en sciences page13 .(2011)

Hull.(1981) An Introduction to Composite Matériaux .Cambridge University Press, Cambridge.

Icardi U. "A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams". Composite Structures, vol. 52, pages 123-135, 2001.

Icardi U.. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. Composites : Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.

Imen KLEL-KAMOUN.1999 analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post critique. Thèse de doctorat(1999),Université de Sherbrooke (Canada).

J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.

Jones, R.M. (1999), "Mechanics of Composite Materials", Second Edition, Taylor & Francis.

Kaczkowski S.A."Platy obliczenia statyczne. Arkady". 2 edition, 1980.

Kant, T., Khare, R.K.: A higher-order facet quadrilateral composite shell element. Int. J. Numer. Methods Eng. 40(24),4477–4499 (1997).

Kant, T., Pandya, B.: A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. Compos. Struct. 9(3), 215–246 (1988).

Kitipornchai, S., Yang, J., Liew, K.M.: Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 195(9–12), 1075–1095 (2006).

K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, (1990),

Koizumi, M.: FGM activities in Japan. Compos. Part B Eng. 28(1–2), 1–4 (1997).

L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68, 1967.

L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. Int J Solids Structures, vol. 31, no. 5, pages 613-627, 1994.

Lardeur P. "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de

Leissa, A.W.: The free vibration of rectangular plates. J. Sound Vib. 31(3), 257–293 (1973).

Levinson M. "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic Levy, M. (1977), "Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", J. Math. Pures et Appl., 3, 219.

Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. (1977), "A higher order theory of plate deformation. Pt. I. Homogeneous plate", J. Appl. Mech., 44, 663-668.

Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates. *J. Appl.Mech.* 44, 669 (1977).

M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279-295, 1984.

M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901-916, 1991.

Madabhushi P. and J.F.Davalos. "Static shear correction factor for laminate

Maekawa z, Hamada H,yokoyama a,lee K.and Ishibashi S.(1991) 6th int. conf.on Mechanical behavior of Matérials,p.677.

Matsunaga, H. (2000), "Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory", *Compos Struct*, 48(4), 231–244.

Matsunaga, H.: Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos. Struct.* 82(4), 499–512 (2008).

Maurice Reyne. *Les plastiques*.Edition Hermès,paris1990.p189.

Mindlin, R.D. (1951), "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic. Elastic Plates", *J. Appl. Mech.*, 18, 31–38.

Moradi, S., Mansouri, M.H. (2012), "Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature", *Steel Compos Struct*, 12(2), 129-147.

Mori, T., Tanaka, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21(5), 571–574 (1973)

Murakami H. "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses". *Journal of Applied Mechanics*. vol.53, pages 661-666, 1986.

Murthy M. "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate". *Rapport Technique*, NASA, 1981.

Naoyuki O.and Hiroyuki H.(1997) Mechanical proprieties and Failure Mechanisms of Carbon Fiber Reinforced Thermoplastic Laminates. *composite Part A28 A*,pp.823-832.

Nelson, R.B., Lorch, D.R., (1974), "A refined theory of laminated orthotropic plates", J. Appl. Mech., 41, 177-183.

Nelson, R.B., Lorch, D.R.: A refined theory for laminated orthotropic plates. J. Appl. Mech. 41, 177 (1974).

Noor, A.K, Burton, W.S. (1990), "Three-dimensional solutions for antisymmetrically solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates", J. Appl. Mech., 57(1), 182-188.

Noor, A.K. (1973), "Free vibrations of multilayered composite plates", AIAA Journal, 11(7), 1038-1039.

O.allix,N.Bahlouli,P.Ladeveze,L.perret. Comportement thermomécanique des stratifiés carbone/époxyde :validation d'un modèle du pli élémentaire. proceedings du 12 éme congrès Française de mécanique, édition AUM(strasbourg,Septembre)1995.

P.topdar, a .h. sheikh and n.dhang ."Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model". , J. Sandwich Structures And Materials, Vol. 5_July 2003.

Pagano, N.J. (1970), "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", Journal of Composite Materials, 4(1), 20-34.

Panc V. "Theories of elastic plates". Noordho, Leyden, Netherlands, 1975.

plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal". Thèse de Doctorat, UTC , 1990.

P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192,1986.

plates". Mechanics Research Communication, vol. 7, pages 343-350, 1980.

Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N.: Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. J. Sound Vib. 318(1–2), 176–192 (2008).

R. Talreja. Fatigue of composite matériels :Damage mecanisms and fatigue-life diagrams.Pro.Roy.So.LondonA(378),pp461-475,1981.

Ray, M.C. (2003), "Zeroth-order shear deformation theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., 70(3), 374-380.

rectangular beams". Composites : Part B, vol 27B, pp 285-293, 1996.

Reddy J.N. "A simple higher-order theory for laminated composite plates". Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.

Reddy, J.N. (1984), "A simple higher order theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., 51, 745-752.

Reddy, J.N. (2002), "Energy principles and variational methods in applied mechanics", John Wiley & Sons Inc.

Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", CRC.

Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech. 51(4), 745 (1984).

Reddy, J.N.: Analysis of functionally graded plates. Int. J. Numer. Methods Eng. 47(1-3), 663-684 (2000).

Reddy, J.N.: Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics. Wiley, New York (2002) An efficient shear deformation theory.

Reddy, J.N. (1997), "Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis", New York: CRC Press.

Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", Int J Numer Methods Eng, 47, 663-684.

Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," J. Appl. Mech., 12, 69-77.

Reissner, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.

Reissner.E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates".J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.

Remond y. & Iamon j. "Matériaux composites, Elaboration- conception – with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations". with damage". Composite Eng., vol. 4, pages 381/395, 1994.

SALLAI Ben – oumrane, Etude et Analyse des Structures en FGM: Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM thèse de doctorat en sciences page42.(2011)

Steif .P.S.(1988) A simple model for the compressive failure of Weakly Bonded Fiber Reinforced composites. journal of composite materials,vol.22,p.818.

Struct. 44(8), 844–851 (2006).

Structure - Comportement mécanique". Volume 1, Strasbourg 12,13 et 14 mars 2003.

subtangential Loads". , Polytechnic Institute and State University Blacksburg, VA 24061-0203, 2002.

Swaminathan, K, Patil, S. (2008), "Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates", Composite Structures, 82(2), 209-216.

Talha, M., Singh, B.N.: Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. Appl. Math. Model. 34(12), 3991–4011 (2010).

Vel, S.S., Batra, R.C.: Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. J. Sound Vib. 272(3–5), 703–730 (2004).

Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

Whitney J.M. " the effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates". J.Compos.Mater.Vol.3, p.534-547, 1969.

Winsnom M.R.(1993) Analysis of shear instability in compression due to Fibre Waviness.J.Reinf.Plast.comp,vol.12,pp.1171-1189.

Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., Jiang, S.X., Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos Struct*, 93(11), 2826–2832.

Xiang, S., Kang, G.W. (2013), “A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates”, *Eur J Mech – A/Solids*, 37, 336–343.

Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013a), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 8324-8340.

Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013b), “An analytical approach to large amplitude vibration and post-buckling of functionally graded beams rest on non-linear elastic foundation”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(1), 39-52.

Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013c), “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *J. Therm. Stresses*, 36, 869-894.

Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach”, *Meccanica*, 48, 2019-2035.

Yang, J., Liew, K.M., Kitipornchai, S.: Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory. *Comput. Mech.* 33(4), 305–315 (2004).

Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M.: Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib.* 319(3–5), 918–939 (2009).

Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.