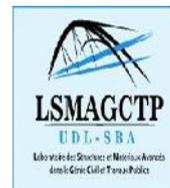


Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès
Faculté de la Technologie

Département de Génie Civil
Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil
et Travaux Publics



THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité Génie Civil

Option Structures & Matériaux

Par

Abdelkader SAOULA

Intitulée

Etude de l'instabilité des poutres métalliques à parois minces

Soutenue publiquement le 07 Décembre 2015 Devant le jury composé de :

▪ Abdelouahed TOUNSI	Pr	U.D.L – SBA	Président du jury
▪ Sid Ahmed MEFTAH	Pr	U.D.L – SBA	Directeur de thèse
▪ Redha YEGHNEM	MCA	U. de SAIDA	Examineur
▪ Taher H. DAOUADJI	MCA	U. de TIARET	Examineur
▪ Samir BENYOUCEF	MCA	U.D.L – SBA	Examineur
▪ Hassene AIT ATMANE	MCA	U. de CHELEF	Examineur

-Année Universitaire 2015/2016-

*A la mémoire de mon père, **KHELIFA**,*

Qui un jour me prit par la main,

Affectueusement mais fermement

Pour m'emmener à l'école

Et vers la modernité....

Dédicace :

À ma très chère mère ;

À ma femme et mes enfants Meriem et Mohamed ;

À mes frères et ma sœur ;

À toute ma famille ;

À mes amis;

Je dédie ce modeste travail

Remerciements :

J'exprime toute ma profonde reconnaissance au Professeur *Sid Ahmed MEFLAH*, mon directeur de thèse, qui m'a fait l'honneur de diriger ce travail. Il a été la personne, qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide et qui, par son expérience et sa compétence, m'a transmis, pas à pas, sa passion pour la recherche scientifique. Il m'a laissé une grande liberté dans la recherche mais a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour.

Je remercie vivement Mr *Fodil MOHRI*, chercheur au Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux à l'université de Lorraine, pour ces conseils et remarques précieuses durant mon cycle de recherche.

Je voudrais également adresser mes vifs remerciements au Président du jury, le Professeur *Abdelouahed TOUNSI*, pour l'honneur qu'il me fait en présidant mon jury de soutenance. Je tiens aussi à remercier les membres du jury : Monsieur Dr. *Taber HASSAINE DAOUADJI*, Monsieur Dr *Hassene AIT ATMANE*, Monsieur Dr *Samir BENYOUCEF* et Monsieur Dr *Redha YEGHNEM*, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury. Je tiens à les remercier pour le temps qu'ils ont consacré à cette tâche ainsi que pour leurs idées précieuses, leurs analyses critiques et avisées afin de contribuer à l'enrichissement de ce travail.

Je voudrais également adresser mes vifs remerciements au Professeur *El abbas ADDA BEDIA* pour son soutien et ses encouragements durant la préparation de Doctorat. Je souhaite exprimer ma sympathie à toutes les personnes que j'ai côtoyées au Laboratoire ainsi qu'à l'université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.

Enfin, je remercie ma mère, ma famille et mes proches pour le soutien et leurs encouragements, sans lesquels je n'aurais jamais pu arriver au bout de mes projets.

Table des matières :

ملخص.....	vii
Résumé	viii
Abstract.....	ix
Principales notations.....	x
Liste de figures.....	xiii
Liste de tableaux.....	xiv
Introduction générale.....	2
1. Introduction.....	2
2. Objectif et cadre de la thèse.....	4
3. Etat de la question.....	5
Chapitre 1 :	
La torsion des éléments à parois minces: Etude bibliographique.....	10
I.1 Introduction.....	10
I.2 La torsion uniforme.....	13
I.2.1 Déformations et contraintes élastiques.....	13
I.2.2 Torsion uniforme des poutres à section pleine de forme quelconque.....	16
I.2.3 Torsion uniforme des sections ouvertes à parois minces.....	18
I.2.4 Torsion uniforme des sections fermées à parois minces.....	19
I.3 La torsion non uniforme.....	23
I.3.1 déformations et contraintes élastiques.....	23
I.3.2 Déplacements et contraintes de gauchissement.....	23
I.3.3 Analyse élastique de la torsion non uniforme.....	26
I.3.3.1 La torsion uniforme.....	26
I.3.3.2 La torsion de gauchissement	26
I.3.3.3 La torsion non uniforme	27
I.4 La distorsion.....	29
I.5 Conclusion.....	32
Chapitre 2 :	
L'instabilité des éléments à parois minces: Aspect analytique & réglementaire.....	34
II.1 Introduction.....	34
II.2 Étude du flambement.....	34

II.2.1 Étude analytique du flambement.....	34
II.2.1.1 Principe de flambement.....	34
II.2.1.2 Théorie linéaire du flambement élastique.....	35
II.2.1.3 Cas particulier du flambement par flexion et torsion (flambement spatial).....	39
II.2.2 La résistance ultime au flambement.....	40
II.2.2.1 Principe du flambement par divergence.....	40
II.2.2.2 Les imperfections des barres industrielles.....	41
II.2.2.3 Les courbes de flambement européennes.....	44
II.3 Etude de déversement.....	46
II.3.1 Principe du déversement.....	46
II.3.2 Théorie linéaire de déversement élastique.....	46
II.3.2.1 Principe de déversement	46
II.3.2.2 Déversement d'une poutre simple en flexion pure	47
II.3.2.3 Moment critique de déversement élastique (Méthode approximative)	49
II.3.2.4 Influence des conditions d'appui.....	50
II.3.2.5 Influence du type de chargement.....	51
II.3.2.6 Influence du point d'application de la charge.....	52
II.3.2.7 Influence des appuis intermédiaires.....	53
II.3.3 Résistance ultime au déversement (Étude Normative)	54
II.3.3.1 Principe linéaire du moment de déversement.....	54
II.3.3.2 Le moment critique de déversement selon L'Eurocode 3.....	54
II.3.3.3 Calcul simplifié du moment critique de déversement élastique (SIA 161).....	54
II.3.3.3.1 Calcul de la composante de la torsion uniforme.....	56
II.3.3.3.2 Calcul de la composante de la torsion non-uniforme	56
II.3.3.4 Calcul du moment critique de déversement.....	58
II.4 Conclusion.....	60
Chapitre 3 :	
L'instabilité non-linéaire des éléments à parois minces en box.....	62
III.1 Introduction.....	62
III.2 Modèle théorique pour l'analyse des éléments en box.....	62
III.2.1 Propriétés géométrique de l'élément en box.....	62
III.2.2 Cinématique.....	63
III.3 les équations d'équilibre.....	67

III.3.1 Condition stationnaire de potentiel total.....	67
III.4. Analyse de déversement.....	73
III.4.1 Équations algébriques d'équilibre pour les poutres sur appuis simples..	73
III.4.2 Solutions analytiques des charges critiques.....	75
III.5. Conclusion.....	78
Chapitre 4 :	
Résultats & discussions.....	80
IV.1 Introduction.....	80
IV.2 La formule de l'Eurocode-3-.....	81
IV.3 Résultats et validations numériques.....	81
IV.3.1 Le moment de déversement élastique.....	82
IV.3.2 La charge axiale critique.....	85
IV.3.3 L'effet de la charge axiale sur le moment de déversement élastique.....	85
IV.4 Conclusion.....	89
Conclusion générale.....	91
Références bibliographiques.....	94
Annexes.....	102

ملخص:

ان تأثير تشوهات الالتواء على الانحراف الجانبي المرن للروافد ذات مقاطع عرضية مغلقة على شكل مستطيل والمكونة من جدران رقيقة والخاضعة لحمولة مشتركة انحناء- قوة محورية، هو موضوع هذه الدراسة، وهذا النموذج الجديد الغير خطي تم اعتماده من اجل دراسة استقرار هذا النوع من الروافد والتي هي حرة جانبيا بالاعتماد على نظرية ذات درجة عالية وكذلك الانتقالات الكبيرة. النموذج الميكانيكي وفرضيات السلوك تم اختزالهم في عملية اختيار حقل الانتقال الملائم.

طريقتا *Ritz* و *Galarkein* تم اعتمادها من أجل استخراج معادلات التوازن ومن ثم حمولات عدم الاستقرار انطلاقا من مصفوفة الصلابة وذلك لعدة أطوال للروافد، سمك الجدران وكذلك للمركزية الحمولة، مختلف الحلول تم مناقشتهم ومقارنتهم مع تلك النتائج العددية بينت أنه من أجل المقاومة الجانبية للانحراف، الحلول المتحصل عليها عن طريق الطرق الكلاسيكية تعتبر مبالغ فيها.

الكلمات المفتاحية:

- الانحراف الجانبي بالالتواء،
- روافد على شكل *BOX*،
- طريقة *RITZ*،
- طريقة *GALARKEIN*،
- تشوهات الالتواء.

Résumé:

L'effet de déformation de distorsion dans le déversement latéral élastique des poutres en box à parois minces sous un chargement combiné flexion-force axiale est examiné dans ce travail. A cet effet, un modèle analytique non linéaire est développé pour contenir la stabilité des poutres en box latéralement libre selon une théorie d'ordre élevé et dans le cadre de grands déplacements. Le modèle mécanique et les hypothèses de comportement sont résumés dans le choix d'un champ de déplacement approprié.

Les méthodes de *Ritz* et *Galarkin* sont utilisées pour discrétiser les équations d'équilibre et puis les charges de déversement seront déduites à partir de la matrice tangente de rigidité en variant la longueur de la poutre, l'épaisseur des parois ainsi que l'excentricité de la charge. Les différentes solutions seront discutées puis comparées avec celles obtenues par la simulation numérique par éléments finis. Les résultats numériques montrent que pour la résistance latérale de déversement les solutions obtenues par les méthodes classiques sont surestimées.

Mots clés:

- Déversement latéral de torsion ;
- Poutre en box ;
- Méthode de *Ritz* ;
- Méthode de *Galarkin* ;
- Déformations de distorsion.

Abstract

The effect of distortional deformation on the elastic lateral buckling of thin-walled box beam elements under combined bending and axial forces is investigated in this paper. For the purpose, an analytical model is developed for the stability of laterally unrestrained box beams according to higher order theory.

Ritz and *Galerkin's* methods are applied in order to discretize the governing equilibrium equations and then the buckling loads are obtained by requiring the singularity of the tangential stiffness matrix. The different solutions are discussed and then compared to the finite element simulation using ABAQUS software where shell elements are used in the mesh process. The numerical results reveal that classical stability solutions as those adopted in Eurocode 3 overestimate the real lateral buckling resistance of thin-walled box beam members, particularly for the ones with high ratios between the height and the thickness of the cross-section. Numerical study of incidence of compressive forces on lateral buckling resistance of thin-walled box beam is investigated.

Keywords:

- Lateral-Torsional buckling;
- Box beam;
- *Galerkin's* method;
- *Ritz's* method;
- Distortion deformation.

Principales notations :

Les principales notations utilisées sont présentées ci-dessous. Les autres symboles précisant des détails ou introduits pour les besoins d'une démonstration sont présentés dans le cours du texte.

- γ : Angle de glissement ;
- γ_{MI} : Coefficient partiel pour la résistance des barres aux instabilités ;
- γ_{M0} : Coefficient partiel pour la résistance des sections transversales ;
- φ : Angle de rotation ;
- τ : Contrainte tangentielle ;
- β : Caractéristique sectorielle de la section ;
- β_W : Facteur dépendant de la classe de la section ;
- θ : Angle de torsion ;
- ω : Fonction de gauchissement ;
- σ_{cr} : Contrainte critique de flambement élastique ;
- σ_D : Contrainte de déversement ;
- σ_w : Contrainte normale de gauchissement ;
- $\chi(x)$: Déformation de distorsion
- σ_{Dv} : La composante de la torsion uniforme ;
- σ_{Dw} : La composante de la torsion non-uniforme ;
- Ψ_H et Ψ_V : Les fonctions de distorsion ;
- δ : La variation virtuelle ;
- λ : Paramètre d'élanement ;
- χ_{LT} : Coefficient de réduction au déversement ;
- A : Surface de la section ;
- b : Largeur de la semelle de la section ;
- bf : Largeur de la semelle ;
- B_ω : Bimoment ;
- C : Centre de cisaillement ;
- C_1 , C_2 et C_3 : Facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appui ;
- C_b : Un facteur d'ajustement tenant compte du chargement ;

- E : Module d'élasticité longitudinale ;
- f_y : Limite d'élasticité ;
- G : Module de cisaillement ou de glissement ;
- G : Centre de gravité ;
- h : Hauteur de l'âme de la section ;
- i : Rayon de giration ;
- I_ω : Moment d'inertie sectoriel de la section ;
- I_0 : Moment d'inertie polaire ;
- I_R : Quatrième moment d'inertie du centre de cisaillement ;
- I_t : Constante de torsion d'ordre supérieur ;
- I_w : Constante de gauchissement ;
- I_y : Moment d'inertie par rapport à l'axe y ;
- I_z : Moment d'inertie par rapport à l'axe z ;
- I_f : Moment d'inertie d'une semelle selon son axe fort
- J : torsion de St-Venant ;
- K : Constante de torsion uniforme ;
- K : Coefficient de flambement ;
- kc : Coefficient pour les parois élancées en console ;
- k_v, k_φ : Coefficients d'encastrement aux appuis ;
- k_y, k_z : Courbures ;
- l : Longueur totale de la poutre ;
- l_D : Longueur de déversement (distance entre deux appuis latéraux) ;
- l_p : Distance entre deux maintiens latéraux pour l'état limite plastique (déversement) ;
- l_r : Distance entre deux maintiens latéraux pour l'état limite inélastique ;
- l_k : Longueur de flambement ;
- M_{crD} : Moment critique de déversement élastique
- M_y et M_z : Moments de flexion par rapport à l'axe y et z ;
- $M_{b,Rd}$: Moment de résistance au déversement ;
- $M_{c,Rd}$: Résistance à la flexion par rapport à un axe principal de la section ;
- M_{el} : Moment de flexion élastique ;
- M_{pl} : Moment de flexion plastique ;
- M_t : Moment de torsion ;
- $M_{\psi}, M_{\psi_y}, M_{\psi_z}, M_{\psi_R}$ et $M_{\psi_{SV}}$: Moments de couplage ;

- M_f : Moment de flexion des semelles
- M_{sv} : Moment de la torsion de St-Venant ;
- M_R : Responsable du gauchissement non linéaire ;
- N : Force axiale ;
- N_{cr} : Charge critique de flambement élastique,
- N_E : Charge critique d'Euler
- tf : Épaisseur de la semelle ;
- tw : Épaisseur de l'âme ;
- v_0, w_0, θ_0 et χ_0 : Amplitudes associées aux déplacements ;
- u^i, v^i et w^i : Les déplacements ou les degrés de liberté;
- W_y : Module de section selon l'axe fort (dépend de la classe de section) ;
- \bar{W}_y : Moment de résistance par rapport à la fibre moyenne des ailes.
- $W_{pl,y}$: Module plastique de la section ;
- $W_{el,y}$: Module élastique de la section ;
- $W_{eff,y}$: Module élastique de la section efficace ;
- z_a : Distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge ;
- z_C : Distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C.

1. Liste de figures :

- Fig. I.1 : Poutre en I soumise à la torsion uniforme et non uniforme. (P.11)
- Fig. I.2 : Comportement des sections vis-à-vis la torsion. (P.12)
- Fig. I.3 : Déformations d'un box sous charge excentrée. (P.13)
- Fig. I.4 : Déplacements de gauchissement dus à la torsion. (P.13)
- Fig. I.5 : Poutre circulaire soumise à la torsion uniforme. (P.14)
- Fig. I.6 : Sections circulaires infiniment voisines après déformation. (P.15)
- Fig. I.7 : Répartition des contraintes tangentielles dans une section circulaire. (P.15)
- Fig. I.8 : Section circulaire de la poutre soumise à la torsion. (P.16)
- Fig. I.9 : Section rectangulaire avant et après torsion. (P.17)
- Fig. I.10 : Contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire. (P.17)
- Fig. I.11 : Les propriétés torsionnelles d'un élément rectangulaire. (P.18)
- Fig. I.12 : Les contraintes de cisaillement dues à la torsion uniforme dans les sections à parois minces. (P.18)
- Fig. I.13 : Le gauchissement dans un tube avec trouée. (P.19)
- Fig. I.14 : Le cisaillement dans des sections à parois minces. (P.20)
- Fig. I.15 : Le gauchissement d'une section fermée à parois minces. (P.21)
- Fig. I.16 : La comparaison de la torsion uniforme: (a) section ouverte et (b) fermée. (P.23)
- Fig. I.17 : La rotation d'une ligne parallèle à l'axe de torsion. (P.24)
- Fig. I.18 : Gauchissement d'un élément sous l'effet de torsion. (P.25)
- Fig. I.19 : Le Bimoment et le contraintes normales de gauchissement (section en I). (P.27)
- Fig. I.20 : Poutre en I en torsion non uniforme. (P.27)
- Fig. I.21 : Déformée de gauchissement d'une poutre en I (Box). (P.29)
- Fig. I.22 : L'analogie de BEF pour un box en distorsion. (P.31)
- Fig. I.23 : Les contraintes de gauchissement dues à la distorsion. (P.31)
- Fig. II.1 : Stabilité de forme d'une barre comprimée. (P.35)
- Fig. II.2 : Flambement plan d'une barre bi-articulée (bifurcation d'équilibre). (P.35)
- Fig. II.3: Longueur de flambement d'une barre comprimée pour différentes conditions d'appuis.(P.37)
- Fig. II.4 : Allure des courbes de flambement selon les hypothèses effectuées. (P.38)
- Fig. II.5 : Différents modes de flambement d'une barre comprimée. (P.39)
- Fig. II.6 : Flambement par flexion et torsion. (P.40)
- Fig. II.7 : Flambement par divergence de l'équilibre. (P.41)
- Fig. II.8 : Effet de second ordre. (P.42)
- Fig. II.9 : Influence de la déformée sur la résistance ultime au flambement. (P.43)
- Fig. II.10: Influence des contraintes résiduelles sur la rigidité d'une section. (P.44)

- Fig. II.11: Courbes de flambement. (P.45)
- Fig. II.12: Phénomène du déversement. (P.46)
- Fig. II.13: Comportement d'un élément fléchi. (P.46)
- Fig. II.14: Translation et rotation d'une section d'un élément de poutre sujet au déversement. (P.47)
- Fig. II.15: Déversement d'une poutre constituée d'une section en I bi-symétrique, sollicitée en flexion pure. (P.48)
- Fig. II.16: Conditions d'appui, charges et types de sections transversales. (P.49)
- Fig. II.17: Influence de la position des charges. (P.53)
- Fig. II.18: Mode de résistance à la torsion de quelques sections. (P.56)
- Fig. II.19: Comparaison des contraintes de déversement σ_D et de déversement élastique σ_{eD} . (P.59)
- Fig. III.1 : Les axes locaux se trouvent au milieu de chaque paroi. (P.63)
- Fig. III.2: Les degrés de liberté et les formes de déformations d'un élément en box. (P.64)
- Fig. III.3: Une poutre en box sous des charges axiales et réparties. (P.70)
- Fig. IV.1 : Vue de maillage en élément Shell de la poutre en box. (P.80)
- Fig. IV.2 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement reparti au niveau de la semelle supérieure (a) Box avec $t=20$ mm, (b) Box avec $t= 25$ mm. (P.86)
- Fig. IV.3 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement reparti au centre du gravité (a) Box avec $t=20$ mm, (b) Box avec $t= 25$ mm.(P.87)
- Fig. IV.4 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement reparti au niveau de la semelle inférieure (a) Box avec $t=20$ mm, (b) Box avec $t= 25$ mm. (P.88)

2. Liste de tableaux :

- Tableau II.1 : Conditions aux limites et valeurs approchées des coefficients d'encastrement d'une poutre dont les deux appuis sont identiques. (P.51)
- Tableau II.2 : Valeurs des facteurs C_1 , C_2 et C_3 pour $k_\varphi = 1.0$. (P.52)
- Tableau IV.1-a: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_x = 0.3 m$) : comparaisons et erreurs relatives. (P.83)
- Tableau IV.1-b: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_x = -0.0 m$) : comparaisons et erreurs relatives. (P.83)
- Tableau IV.1-c: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_x = -0.3 m$) : comparaisons et erreurs relatives. (P.84)
- Tableau IV.2: Charges critiques axiales de flambement d'une poutre simplement appuyée : comparaisons et erreurs relatives. (P.84)

Introduction Générale

Introduction générale.

1. Introduction:

La tendance actuelle, dans le domaine des constructions métalliques est d'aller vers des structures plus élancées, plus légères en utilisant des nuances d'acier de plus en plus performantes. Mais en contrepartie, cela peut d'augmenter le risque de ruine par instabilité. Il devient alors nécessaire de disposer de méthodes de calcul adaptées, performantes, permettant d'analyser de façon précise le comportement des éléments structuraux. Actuellement, les principales méthodes utilisées sont les suivantes :

- Les méthodes expérimentales : sont les plus performantes mais aussi les plus coûteuses, et difficiles à mettre en place ;
- L'utilisation des formules approchées : est la solution la plus employée dans les bureaux d'études et de conception, elles sont souvent intégrées à des codes de dimensionnement. L'avantage principal de ces formules est la rapidité, la facilité d'utilisation et la possibilité d'automatiser les calculs ;
- Les méthodes numériques : sont des méthodes modernes favorisées par le progrès des outils informatiques, elles permettent d'examiner le comportement des structures jusqu'à la ruine, et elles sont les plus à même de représenter la réponse réelle des structures après les méthodes expérimentales. La méthode numérique la plus utilisée à l'heure actuelle est certainement la méthode des éléments finis.

Vu que l'emploi des éléments de poutre dans les structures de Génie Civil est courant, la maîtrise de leur comportement est essentiellement importante, et comme le domaine des Constructions Métalliques est le domaine qui nous intéresse ici, nous nous intéressons aux types de poutres à parois minces qui sont couramment employés. Ces poutres est très sensible aux phénomènes d'instabilité, il s'avère indispensable de tenir compte de comportement non linéaire du matériau acier si on veut vraiment optimiser leur dimensionnement.

On se propose ici d'aborder la stabilité des poutres en box à parois minces, de ce fait le but de cette contribution étant la mise au point de formules approchées performantes pour ce type d'éléments, qui seraient mises à la disposition des concepteurs. La première étape dans une telle démarche consiste à disposer d'un outil de référence, fiable, rapide et simple à utiliser, capable de représenter avec précision le comportement de ces éléments. A cet effet, le moyen de calcul numérique le plus performant à l'heure actuelle pour les poutres à parois minces et d'une section en box réside dans l'utilisation de la méthode des éléments finis. En effet, l'implantation de ces formules dans des codes de calcul numérique devient la solution la plus pratique pour les poutres à parois minces en box.

Dans cette investigation, une équation fondamentale est développée pour l'analyse de déversement latéral des poutres à parois minces en box à section rectangulaire en acier sous un chargement combiné flexion-compression (force axiale). Le modèle proposé prend en considération les effets de plusieurs déformations non classiques à savoir les déformations de distorsion. On se basant sur les méthodes de Ritz et Galarkin les équations principales d'équilibre d'une poutre simplement appuyée sont dérivées. Les équations résultantes sont non linéaires et fortement couplées. Ce modèle peut être utilisé pour prédire la résistance vis-à-vis le déversement latéral en utilisant la condition de singularité de la matrice tangente de rigidité. Plusieurs applications sont considérées pour les poutres en box à parois minces sous des charges réparties combinées avec des forces latérales.

Dans une première démarche, il s'avère nécessaire de donner à ce type d'éléments une base théorique consistante au chapitre I, et de traduire davantage le comportement particulier des poutres à parois minces en box. Cependant, on doit commencer par une étude théorique qui contient un rappel des notions et de concepts de base de la torsion, ainsi que la théorie des surfaces sectorielle fondement de la théorie de Vlassov concernant la torsion des poutres spatiales. On apportera un soin tout particulier au traitement des phénomènes de torsion, et de distorsion dans l'espace.

Le deuxième chapitre sera consacré à une revue générale sur l'instabilité des éléments à parois minces (flambement et déversement), analysée de différents points, théorique et réglementaire avec une comparaison normative montrant comment un phénomène l'instabilité est mené dans la pratique. Nous nous intéressons au cas des poutres métalliques en générale et les poutres à section en box en particulier. Les concepts assez théoriques détaillés ici sont en fait au cœur du problème du développement de formules de dimensionnement.

Le champ de déplacement proposé ainsi que les développements analytiques faisant l'objet de troisième chapitre, des formules analytiques simples qui concernent les charges critiques de déversement sont exposés. Ces formules peuvent être utiles pour la conception des poutres métalliques à section constantes en box.

En fin, nous complétons ce travail par le quatrième chapitre, ce dernier sera consacré à la validation des résultats obtenus par les solutions numériques basées sur la méthode de Ritz ainsi que la méthode Galarkin. Des exemples ont été traités et comparés aux résultats des simulations par éléments finis en utilisant le code commercial 'ABAQUS'.

2. Objectif et cadre de la thèse:

Les objectifs de ce travail de recherche peuvent être résumés en trois aspects:

- Le développement d'un modèle analytique de comportement non linéaire des poutres spatiales à parois minces et d'une section fermée en box, ce modèle doit être capable d'analyser le comportement non linéaire, et de traiter les problèmes de grands déplacements de structures formées de telles poutres;
- la mise au point d'un outil numérique de calcul rapide sur la base des développements théoriques effectuées précédemment;
- la mise au point de formules analytiques de calcul rapide et efficace. Ces formules analytiques, doivent permettre d'étudier un phénomène d'instabilité élastique (déversement) avec une précision raisonnable.

Une autre vision de ce travail recherche consiste à montrer que parmi les travaux qui ont été concentrés sur le déversement des poutres à parois minces, aucun travail qui contient un modèle analytique simplifié qui traite les poutres en box en tenant ne compte les effets de déformations de distorsion. Cependant, les approches classiques de la théorie des poutres à parois minces ne s'appliquent pas dans le cas des sections en box, donc il est nécessaire de recourir à un modèle adapté. Nous verrons en effet que la distorsion joue un rôle très important dans le comportement des sections fermées à parois minces sous un chargement statique.

Cette thèse s'inscrit en conséquence dans le cadre de l'analyse non linéaire des structures spatiales formées de poutres à parois minces en box, par une méthode analytique. Puisque les poutres considérées dans ce travail sont des poutres à parois minces, les développements sont orientés vers le domaine de la Construction Métallique, dont le principal champ d'application des développements proposés ici. Dans cette investigation, un développement pour l'analyse de déversement latéral des poutres à parois minces en box à section rectangulaire en acier sous un chargement combiné flexion-compression (force axiale).

3. Etat de la question:

Les structures à parois minces sont souvent utilisées dans les constructions métalliques, les structures à parois minces en box sont employées dans les structures du bâtiment compte tenu de leurs performances structurelles avec un rapport rigidité / poids très élevé. Cependant les concepteurs de telle structure peuvent tirer avantages de ce type d'élément structural en utilisant des méthodes de conception et d'analyse simples à utiliser avec une précision acceptable.

Cette partie de la thèse se veut être un inventaire non exhaustif des différentes approches relatives au problème de l'instabilité rencontrées dans la littérature. Compte tenu du grand nombre de chercheurs qui se sont penchés sur l'étude des structures formées de poutres depuis des décennies, il paraît impossible de pouvoir présenter une synthèse de tous ces travaux qui serait complète. Même dans le domaine plus restreint des poutres à section variable, cela paraît difficile. Ainsi, l'état de la question présenté ici ne reprend que certains travaux de recherche notamment ceux qui s'intéressent à l'étude des éléments en box.

L'investigation du comportement des structures métalliques en box sous un chargement statique a été présentée par Vlassov [100] et ensuite étendue pour les poutres en courbe par Dabrowski [87], en outre cette théorie de Vlassov a été employée par Fu et Hsu [44]. Chandra et Al [31] pour les structures en box asymétriques soumises à une combinaison de charges axiales/forces latérales et un moment de torsion. La poutre en box soumise à un chargement suivant son plan de symétrie, celle-ci fléchit initialement par rapport à son axe majeur, pendant une certaine valeur de charge extérieure, la structure à parois minces est susceptible à un phénomène d'instabilité appelé « déversement » qui se manifeste par un déplacement latéral (hors plan) de la semelle comprimée engendrant un moment de torsion.

Ainsi, certains auteurs ont d'abord étudié le cas du flambement plan des poutres à section variable. En 1962, Fogel et Ketter [42] étudient le comportement plan sous effort normal et moments d'extrémité d'une poutre à section variable. En faisant des approximations polynomiales sur la variation de l'inertie dans le sens de la flexion, ils proposent de résoudre mathématiquement les équations obtenues, et présentent les résultats sous forme d'abaques.

Braham [25] propose une nouvelle méthode de calcul du moment critique de déversement, basée sur une nouvelle équation différentielle de la torsion des poutres à section variable. Il utilise la méthode de Galerkin pour résoudre cette équation, dans le cas d'une poutre sur appuis à fourche, et propose une nouvelle définition de la hauteur équivalente, sur base des résultats obtenus.

L'approche de type «Ayrton-Perry» a également été reprise par Mendera [71] et Tochacek [97] pour le calcul de la capacité ultime au flambement de poutres à section variable. Ils proposent de conserver le format classique de l'EuroCode 3 [40], et d'adapter le calcul de l'effort normal critique N_{cr} par le biais d'une inertie équivalente, dont ils donnent les valeurs dans des tables de Tochacek, pour différentes sections et plusieurs types de variation, ou grâce à des définitions approchées pour une inertie équivalente (Mendera).

Une autre façon analogue pour calculer un effort normal critique consiste à substituer une longueur équivalente dans le calcul de N_{cr} , comme le proposent Shiomi et Kurata [93]. Ils utilisent pour cela la Méthode des Eléments Finis, et choisissent d'approcher la variation de section au moyen de 30 éléments de poutre prismatiques. Ils proposent ensuite des formules de dimensionnement, qu'ils confrontent à des résultats d'essais.

De même, Olowokere [83] utilise cette technique de segmentation pour étudier le déversement élastique de poutres à sections en I. Son étude englobe le cas de sections mono symétriques (semelles différentes), et repose sur l'utilisation de ratios de surface entre les semelles et la section totale. Les résultats sont présentés sous forme d'abaques, et peuvent être directement utilisés dans des formules de dimensionnement. Nethercot [81] étudie également le déversement élastique des poutres en I à section variable, pour différentes conditions d'appui et types de chargement.

En 1993, Polyzois et Qing [84] proposent des formules de dimensionnement pour poutres à parois minces et section variable, et traitent le déversement de tels éléments en utilisant le format du code américain AISC [4], la section de référence est la section la plus petite, et l'effet bénéfique de la variation de section est pris en compte au travers d'une longueur de déversement différente. Leurs résultats sont présentés dans des tables correspondant à différents cas de chargement et de conditions d'appui, l'originalité de cette approche tient dans la prise en compte des structures à nœuds déplaçables, au moyen de coefficients correcteurs dans le calcul de la contrainte critique.

Dans le même ordre d'idées, Ermopoulos [41] étudie le flambement des poteaux à inertie variable dans le cas de structures à nœuds déplaçables. Dans le but de présenter un travail directement utilisable pour le dimensionnement, il propose des tables donnant les efforts critiques N_{cr} en fonction des rigidités apportées par les éléments adjacents et du type de comportement de la structure, c'est-à-dire à nœuds fixes ou déplaçables.

Le déversement des structures à parois minces en particulier celles en box est prédominé par un effet de couplage flexion-gauchissement. Il est donc important de bien prédire des charges critiques limites au-delà desquelles l'instabilité par déversement aura lieu. Cette démarche est très importante dans la conception des structures métalliques à parois minces en box.

Les études les plus récentes très fortement marquées par l'apparition de méthodes numériques, et en particulier la méthode des éléments finis, l'apport de l'outil informatique a en effet beaucoup changé la manière d'aborder ces problèmes, les méthodes de résolution numériques ayant ouvert de nouveaux horizons. Le phénomène de déversement des poutres à parois minces en acier a été traité par plusieurs auteurs, et des améliorations dans le calcul des charges critiques ont été successivement obtenues pour les poutres de section uniforme.

Laudiero et Zaccaria [58] ont formulé une méthode par éléments finis dans le cas de l'instabilité élastique des poutres à section asymétrique. Yoo [108] a étudié l'effet de gauchissement dans l'étude du flambement des structures à parois minces. En se basant sur l'approche variationnelle, Zhang and Tong [109] ont développé un modèle avec couplage « flexion-torsion » pour étudier le déversement de ce genre de structure. La méthode de Rayleigh-Ritz a été employée par Kitipornchai et Trahair [54,55] pour étudier l'instabilité des poutres en I, sous un gradient moment (chargement progressif).

En se basant sur l'approche Galarkin, Mohri et Al [73,75] ont présenté une solution analytique simplifiée pour étudier le moment critique de déversement des poutres en I sous un chargement latéral (de flexion). Pour les autres travaux des auteurs [76,77], ils ont présenté plusieurs solutions dans le cas de combinaison « charge axiale-moment ». Machado et Cortinez [65] ont étudié l'effet de déformations de cisaillement ainsi que le déplacement de pré-instabilité dans l'évaluation des moments de déversement des poutres simplement appuyée en matériaux composites.

Pour les poutres à section variable Ronagh et Al [87] ont formulé une procédure par éléments finis pour l'étude de déversement des poutres en I doublement symétriques. Récemment, Andrade et al [9] ont employé la méthode de Ritz pour l'analyse de déversement des poutres mono et bi-symétriques à section variable. Dans la même prospection, Benyamina et al [18] ont énoncé une formule analytique simple de déversement latéral des poutres en I à section variable. Très récemment, Mohri et al [78] ont développé une approche non-linéaire par éléments finis pour étudier le comportement des poutres à parois minces et section variable dans le cas de grande torsion. Le modèle est capable de capturer le comportement post-critique des poutres en état de grands déplacements et de torsion.

Bien que quelques travaux étaient concentrés sur le déversement des poutres à parois minces, aucun travail qui contient un modèle analytique simplifié qui traite les poutres en box en tenant compte les effets de déformations de distorsion. Cependant, il est utile de connaître que l'effet de distorsion joue un rôle très important dans le comportement des sections fermées à parois minces sous un chargement statique et même pour l'analyse des vibrations libres. Kim et Kim [51,52] ont

montré l'importance des déformations de distorsion. Généralement, ce type de déformation et négligé dans les théories existantes des poutres en box.

Suivant le règlement Européen des structures en acier « l'Eurocode 3 » [40], et contrairement aux autres sections, le déversement latéral de torsion des poutres dans le cas de sections rectangulaires creuse ne nécessite pas d'être vérifié. Cela est dû au moment d'inertie polaire qui est très grand et donc la section est plus vulnérable au phénomène de l'instabilité locale. Ce constat peut être expliqué par le fait que les règles de l'Eurocode 3 sont limitées à des nuances d'acier dont la limite élastique $f_y \leq 700 \text{ MPa}$. Cependant, et avec les récents développements de l'acier à haute limite élastique ($f_y > 1000 \text{ MPa}$), les règles actuelles de calcul de l'Eurocode 3 peuvent être généralisées aux éléments avec des sections en box.

Il est nécessaire de souligner que les modèles analytiques existants tels que reportés dans l'Eurocode 3 vont éventuellement conduire à des résultats trop optimisés. Par conséquent, il semble que ces modèles ne constituent en aucun cas une extension convenable et efficace pour le traitement et l'analyse des poutres à parois minces en box à cause du rapport élevé entre la hauteur et l'épaisseur de la section. Un aperçu supplémentaire pour les poutres en box où le déversement latéral et le flambement sont décrits dans [88]. Les solutions adoptées sont similaires aux théories des poutres classiques. Ses solutions sont dérivées selon le modèle de stabilité Linéaire. La considération de l'effet de cisaillement n'a pas été discutée sauf dans le cas d'un comportement pur.

Chapitre 1 :

La torsion des éléments à parois minces: Etude bibliographique

La torsion des éléments à parois minces:

Etude bibliographique

I.1 Introduction:

Les éléments à parois minces et à sections ouvertes sont largement utilisés en construction métallique. Ce type de construction est parmi les plus modernes et les plus rationnels, puisqu'il permet d'atteindre le maximum de rigidité avec le minimum de poids.

On les qualifie de minces du fait que l'épaisseur est généralement très inférieure aux dimensions de la section droite (de l'ordre du 1/10), mais leur inconvénient est surtout leur très faible résistance à la torsion. En conséquence, on évite autant que possible de les solliciter et les calculer en torsion, en supposant que le chargement est appliqué au niveau de la ligne moyenne liant les centres de gravités des sections droites de l'élément.

Dans la pratique, les charges extérieures ne sont jamais appliquées au centre de gravité. La torsion est souvent présente et elle est la source des désordres créés dans les structures du fait de l'augmentation importante des déplacements. D'où l'intérêt que nous portons à la torsion.

En Résistance des Matériaux, l'étude de la torsion des poutres constitue un problème particulier, d'une part parce que les sollicitations de torsion ne sont pas les plus fréquentes dans la vue quotidienne de l'ingénieur, et d'autre part parce que c'est un phénomène particulièrement délicat à étudier; en effet, l'expérience a montré qu'il était nécessaire dans la plupart des cas d'abandonner l'hypothèse de la conservation des sections planes au cours de la déformation: on dit qu'elles gauchissent, et on va appeler le phénomène associé «gauchissement ». C'est Saint-Venant qui a montré pour la première fois que cette hypothèse devait être abandonnée [99] Ceci est lourd de conséquences, et contribue à rendre complexe l'étude de pièces soumises à de la torsion. On peut montrer que tous les types de sections ne se comportent pas de la même manière lorsqu'elles sont soumises à un moment de torsion, c'est pourquoi il est nécessaire de différencier: Les sections pleines, les sections fermées à parois minces et les sections ouvertes à parois minces.

Par souci de performance et pour mener une étude générale concernant le comportement des parois minces soumises à la torsion nous nous intéressons aux sections pleines, les sections ouvertes et fermées à parois minces. Au cours du temps, différents auteurs ont proposé des modèles analytiques pour étudier ce phénomène, et c'est pour cela qu'on peut trouver plusieurs théories de la torsion des poutres, de plus en plus complètes au fur et à mesure des années. Nous nous intéresserons d'abord à la torsion uniforme, qui constitue le cas le plus simple, puis à la torsion non uniforme.

La résistance d'un élément structural au chargement de torsion peut être considérée la somme de deux composantes. Quand l'angle de torsion par unité de longueur est constant le long de l'élément (**Fig. I.1a**), on est dans un état de torsion uniforme (ou de St Venant) [99], et les déplacements longitudinaux de gauchissement sont également constants. Dans ce cas, le moment de torsion appliqué est résisté uniquement par des efforts de cisaillement distribués autour de la section. Le rapport du moment de rotation agissant à l'angle de torsion par unité de longueur est défini comme la rigidité de torsion GI_t de l'élément.

La deuxième composante de la résistance au chargement de torsion peut agir quand l'angle de torsion par unité de longueur varie le long de l'élément (voir **Fig. I.1b et c**), donc on est dans un état de la torsion non-uniforme [99]. Dans ce cas les déformations de gauchissement varient, et un ensemble supplémentaire d'efforts de cisaillement peut agir en même temps que ceux dus à la torsion uniforme pour résister à l'action du moment de torsion extérieur. La rigidité de l'élément liée à ces efforts de cisaillement est proportionnelle à la rigidité de gauchissement EI_w .

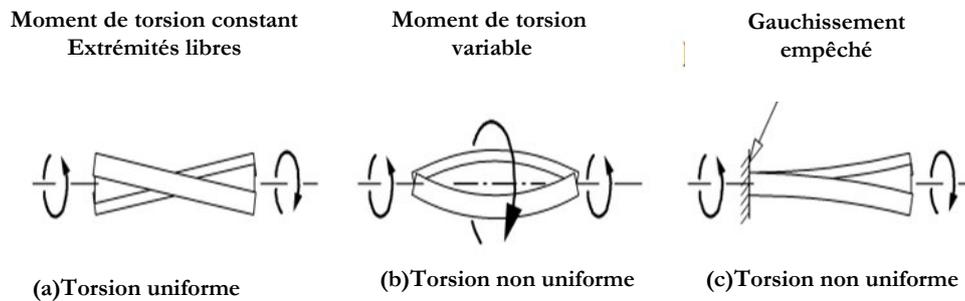


Fig. I.1 : Poutre en I soumise à la torsion uniforme et non uniforme.

Quand la première composante de la résistance domine complètement la deuxième, l'élément est dans un état de torsion uniforme. Ceci se produit quand le paramètre de torsion $K = \sqrt{\pi^2 EI_w / GI_t L^2}$ est très petit, comme indiqué dans la figure (**Fig. I.2**) [1]. Les sections fermées à parois minces dont les rigidités de torsion sont très grandes se comportent de la même façon que font les sections en L, en T ou les sections rectangulaires étroites, dont les rigidités de gauchissement sont négligeables. D'autre part, si la deuxième composante de la résistance domine absolument la première, l'élément est dans un état de torsion non-uniforme désigné sous le nom de la torsion de gauchissement. Ceci peut se produire quand le paramètre K de torsion est très grand, comme indiqué dans (**Fig. I.2**), qui est le cas pour quelques sections ouvertes à parois très minces (telles que les sections en U formées à froid) dont les rigidités de torsion sont très petites. Entre ces deux extrémités, le chargement de torsion est résisté par une combinaison de l'uniforme torsion ainsi que la torsion de gauchissement, et l'élément en général est dans un état de torsion non-uniforme. Ceci se produit pour des valeurs intermédiaires du paramètre K, suivant les indications du schéma (**Fig. I.2**), qui sont appropriées pour les sections en I laminés à chaud [99].

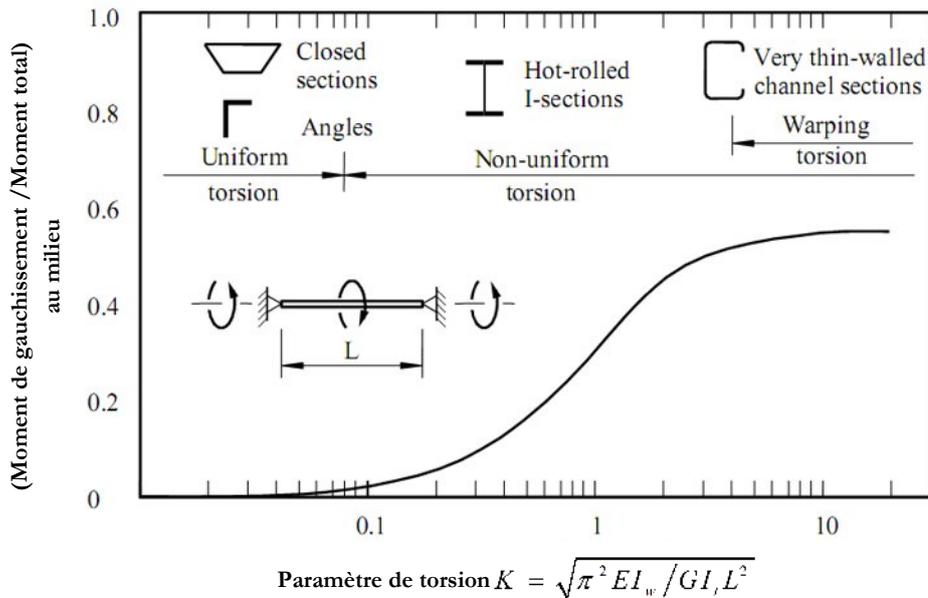


Fig. I.2 : Comportement des sections vis-à-vis la torsion [99].

Un membre est dans un état de torsion uniforme ou non-uniforme dépend également de la disposition de chargement et les conditions pour restreindre le gauchissement. Si le couple de torsion appliqué est constant le long de l'élément et le gauchissement est non restreint comme dans (Fig. I.1a), alors l'élément sera dans la torsion uniforme, même si la rigidité de torsion est très petite. Si, cependant, le couple de torsion varie sur la longueur de l'élément (Fig. I.1b), ou si les déplacements de gauchissement sont restreints (Fig. I.1c), alors l'angle de torsion par unité de longueur variera, et de ce fait on sera dans la torsion non-uniforme. Généralement, ces variations dans certains cas peuvent être ignorées, et l'élément peut être analysé comme s'il est dans la torsion uniforme. Cette méthode d'analyse mène habituellement aux appréciations satisfaisantes des angles de torsion, mais peut produire des sous estimations des contraintes locales.

Cependant, les éléments structuraux de la charpente, sont rarement habitués pour résister seulement à la torsion, et il est beaucoup plus courant que la torsion se produise en même temps avec la flexion et les autres sollicitations. Par exemple, quand la poutre en Box comme montré dans (Fig. I.3a) est soumise à une charge excentrée, ceci provoque la flexion (Fig. I.3b), la torsion (Fig. I.3c), et la distorsion (Fig. I.3d). Il peut également y avoir des interactions entre la flexion et la torsion. Par exemple, les contraintes longitudinales dues à la flexion peuvent causer un changement de la rigidité de torsion efficace. Ce type d'interaction est très important dans l'étude de l'instabilité (déversement) des éléments à parois minces soumis à une combinaison de flexion-torsion. En outre, les rotations significatives de torsion peuvent causer des augmentations des contraintes de flexion dans les éléments à parois minces et à section ouverte. Cependant, ces interactions sont habituellement négligeables quand la rigidité de torsion est très élevée, comme dans le cas des sections fermées à parois minces [99].

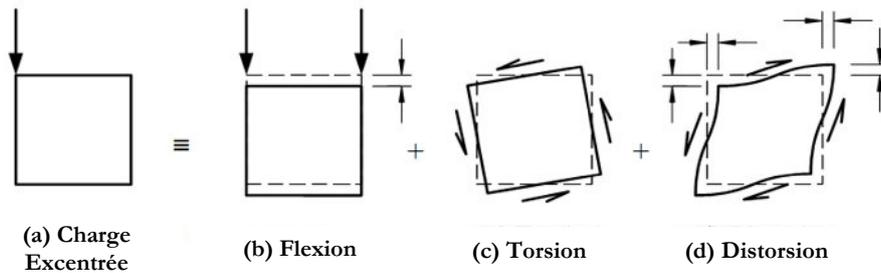


Fig. I.3 : Déformations d'un box sous charge excentrée.

Les effets de la distorsion des sections transversales sont seulement significatifs dans le cas des sections ouvertes à parois très minces, et dans les sections fermées à parois minces avec des chargements de distorsion élevés. Ainsi, pour les poutres en box (Fig. I.3), les parois peuvent se courber hors de leurs plans comme indiqué dans (Fig. I.3d), engendrant la distorsion de la section transversale. Pour cette raison, la distribution des contraintes de flexion et de cisaillement seront changées.

I.2 La torsion uniforme:

I.2.1 Déformations et contraintes élastiques:

La torsion uniforme, on dit aussi torsion de Saint-Venant [90], concerne :

- Les poutres soumises à un moment de torsion constant sur la longueur de la poutre ;
- Poutre dont toutes les sections sont libres de gauchir.

Si l'une de ces deux conditions n'est pas remplie, on parle de torsion non uniforme [96]. Dans le cas de la torsion uniforme, comme indiqué sur la figure (Fig. I.1a), on a :

- Les lignes qui étaient à l'origine parallèles à l'axe de la torsion deviennent spirales après la torsion ;
- Les sections transversales tournent avec un angle φ en tant que corps rigides autour de l'axe de la torsion ;
- Les sections transversales se déforment hors de leurs plans, le gauchissement (u) étant constant sur la longueur de l'élément (voir Fig. I.4)

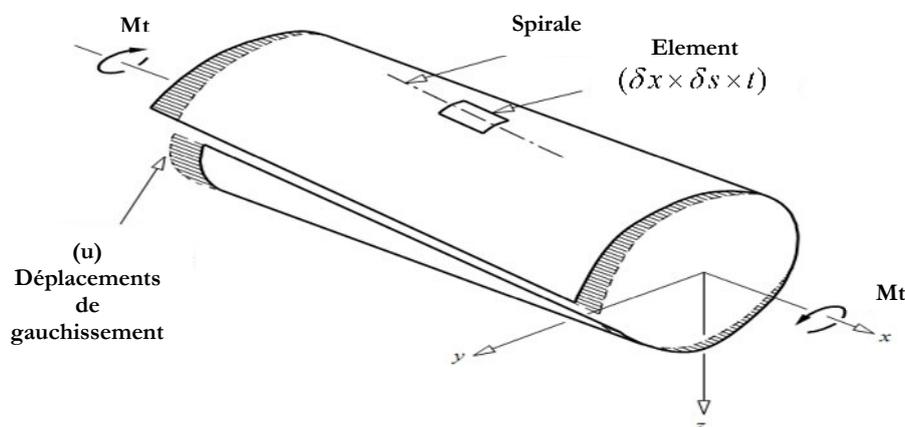


Fig. I.4 : Déplacements de gauchissement dus à la torsion.

La torsion uniforme M_t engendre à n'importe quelle section de la poutre des contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz} , qui agissent dans le plan de la section. La distribution de ces contraintes peut être visualisée en utilisant l'analogie de Prandtl ou l'analogie de la membrane.

On se propose d'étudier une poutre infiniment longue à axe rectiligne et de section circulaire constante, constituée d'un matériau isotrope et soumise à deux moments de torsion M_t , égaux et opposés, supposés appliqués aux sections extrêmes (**Fig. I.5**).

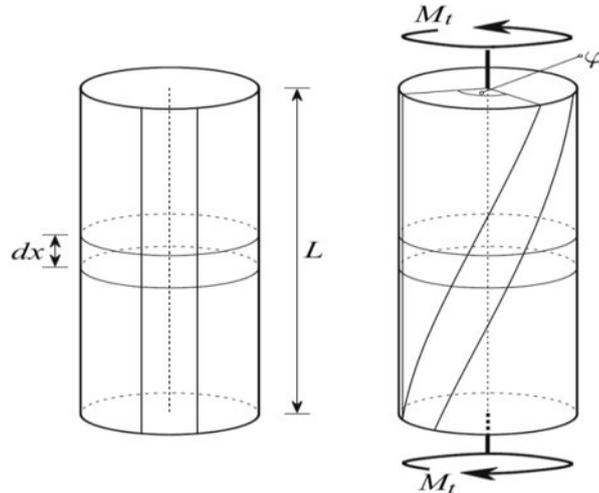


Fig. I.5 : Poutre circulaire soumise à la torsion uniforme.

Le moment de torsion est donc constant dans la poutre le long de la fibre moyenne et vaut M_t . On démontre ici facilement que [69] :

- Toutes les sections droites tournent pendant la torsion autour de leurs centres respectifs,
- Toutes les sections droites restent planes et circulaires après déformation,
- Un rayon quelconque tracé dans une section droite reste rectiligne au cours de la torsion,
- L'angle compris entre deux rayons quelconques d'une même section ne peut varier au cours de la torsion.

La conséquence des résultats précédents est qu'au cours de la torsion, chaque section droite se comporte comme un disque rigide qui tourne autour de la fibre moyenne.

On note $\varphi(x)$ l'angle de rotation de la section d'abscisse x comptée par rapport à la section d'abscisse $x=0$, et $\theta(x) = d\varphi/dx$ l'angle de torsion par unité de longueur, qui est donc constant dans le cas étudié. En étudiant le tronçon de poutre de longueur infinitésimale dx de la figure (**Fig. I.6**), qui trace une ligne « ab », situé sur le rayon ρ et devenu « ab' » après déformation, on montre que l'angle de glissement γ s'écrit, en faisant l'approximation des petits angles ($\cos\gamma = 1$) :

$$\gamma = \frac{\|bb'\|}{\|ab\|} = \frac{\rho d\varphi}{dx} = \rho\theta \quad (\text{II.1})$$

Ce résultat permet d'étudier la répartition des contraintes et déformations dans la section de la poutre.

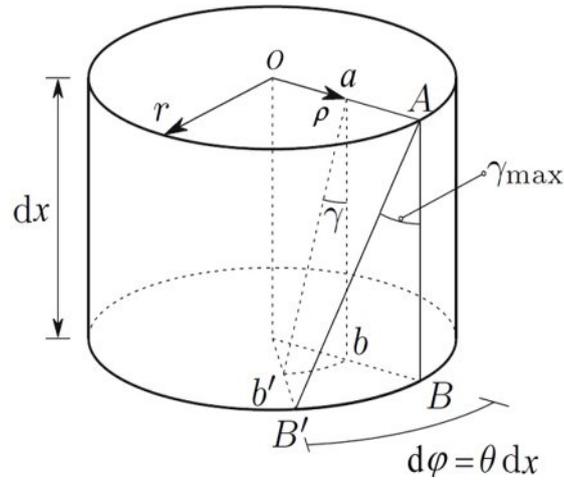


Fig. I.6 : Sections circulaires infiniment voisines après déformation.

En effet, la distribution des contraintes tangentielles τ , équilibrant le moment de torsion externe M_t , s'écrit, grâce à la loi de Hooke:

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta \quad (\text{II.2})$$

La répartition des contraintes dans une section est donc linéaire, comme indiqué sur la figure (Fig. I.7).

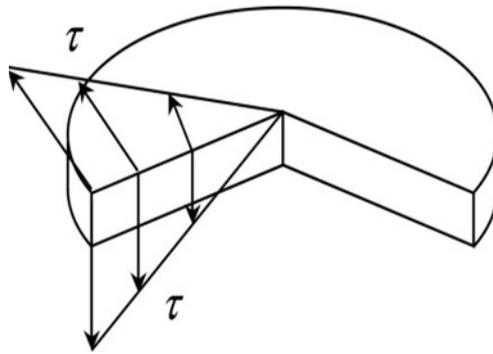


Fig. I.7 : Répartition des contraintes tangentielles dans une section circulaire.

Pour l'élément d'aire dA hachuré sur la figure (Fig. I.8), l'effort de cisaillement repris vaut $\tau.dA$, et donc le moment à une distance ρ vaut : $\tau\rho dA = G\gamma = G\theta\rho^2 dA$. En écrivant l'équilibre en rotation de tout le tronçon, on a:

$$M_t = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = GI_\rho\theta \quad (\text{II.3})$$

D'où I_ρ est l'inertie polaire de la section. On remarque ici que dans le cas particulier des sections circulaires, on a $I_\rho = I_t = J$: désignant l'inertie de torsion (de Saint-Venant) de la section. Dans toute la suite, on appellera rigidité torsionnelle de Saint-Venant la quantité GI_t .

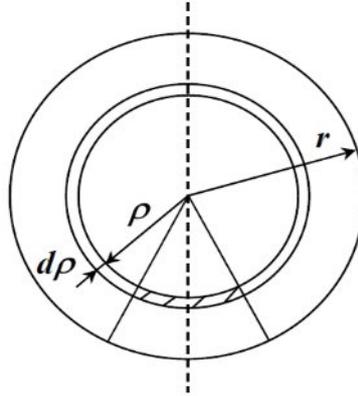


Fig. I.8 : Section circulaire de la poutre soumise à la torsion.

On peut maintenant exprimer l'angle dont a tourné la section d'abscisse x au cours de la torsion en fonction de la rigidité à la torsion comme suit:

$$\theta(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t(x)}{GI_t} \quad (\text{II.4})$$

Si la section et le moment sont faiblement variables, Massonnet [69] propose d'admettre en première approximation que les résultats précédents restent valables, et que cet angle vaut:

$$\phi(x) = \frac{1}{G} \int_0^x \frac{M_t}{I_t} dx \quad (\text{II.5})$$

I.2.2 Torsion uniforme des poutres à section pleine de forme quelconque:

Les équations précédentes, établies pour le cas des sections circulaires, ne sont plus valables pour des sections quelconques, nous allons en effet montrer que l'hypothèse de conservation des sections planes au cours de la déformation doit ici être abandonnée, et que les contraintes tangentielles ne peuvent plus être distribuées comme sur la figure (**Fig. I.7**). Il devient donc nécessaire de modifier l'approche analytique du paragraphe précédent de façon à prendre en compte ces nouveaux phénomènes.

On considère à présent le cas d'une poutre sollicitée dans le même cas de figure qu'au paragraphe (**I.2.1**), mais avec une section rectangulaire (**Fig. I.9**). Lorsqu'on observe la déformée des sections d'un tronçon de cette poutre, on constate qu'elles gauchissent au cours du chargement, et on voit ainsi que l'hypothèse de Bernoulli de conservation des sections planes n'est plus respectée. On remarque également que les petits carrés tracés sur la barre se transforment en losanges: leur distorsion varie le long du côté de la section, depuis une valeur nulle sur les côtés jusqu'à un maximum au milieu. Une section non circulaire soumise à un moment de torsion quelconque présentera donc inévitablement un déplacement axial de chacun de ses points, que nous appellerons déplacement de gauchissement ou plus simplement gauchissement.

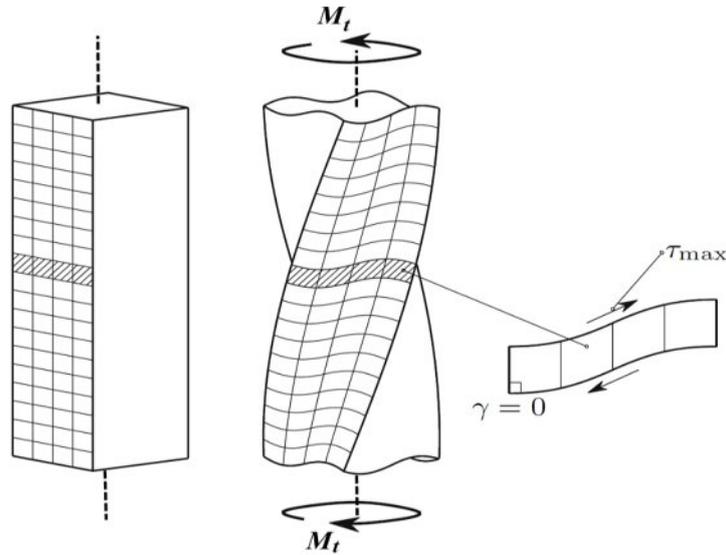


Fig. I.9 : Section rectangulaire avant et après torsion.

Si on s'intéresse à présent à la distribution des contraintes dans une section, il est clair d'après la figure (**Fig. I.10**) que la contrainte de cisaillement en un point du bord de la section ne peut plus être répartie perpendiculairement à un rayon issu du centre de gravité G et passant par ce point, comme dessiné sur la figure (**Fig. I.7**), mais qu'elle doit obligatoirement être tangente au contour de la section; en effet, si ce n'était pas le cas, en vertu du théorème de réciprocité des contraintes tangentielles, celle-ci admettrait une composante normale au bord de la section non nulle, qui ne serait équilibrée par aucun effort extérieur. La contrainte de cisaillement ne peut donc être que tangente au contour, c'était d'ailleurs le cas pour les sections circulaires, mais compte tenu de la symétrie de révolution, la direction de la contrainte était également perpendiculaire au rayon considéré.

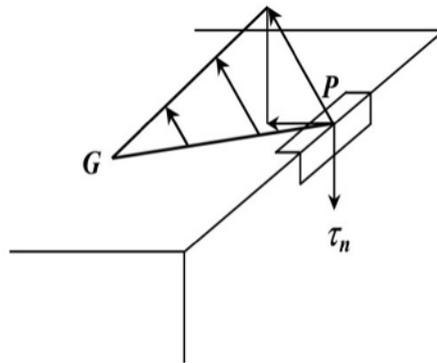


Fig. I.10 : Contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire.

La distribution des contraintes de cisaillement, c'est-à-dire leur direction et leur intensité en un point donné de la section, est donc dans le cas général assez différent du cas des sections circulaires. Cependant, même dans des cas où la section n'est pas circulaire, la relation entre la dérivée de l'angle de torsion et le moment appliqué reste valable puisqu'on reste en élasticité:

$$\theta(x) = \frac{M_t(x)}{GI_t} \quad (\text{II.6})$$

I.2.3 Torsion uniforme des sections ouvertes à parois minces:

La distribution des contraintes dans une section ouverte à parois minces est similaire à celle dans une section rectangulaire, comme indiqué dans la (Fig. I.12a). De même, ces contraintes sont parallèles aux parois de la section, et varient linéairement à travers l'épaisseur (t). Le constant ou l'inertie de torsion (I_t) est égale approximativement à :

$$I_t \approx \sum \frac{bt^3}{3} \tag{II.7}$$

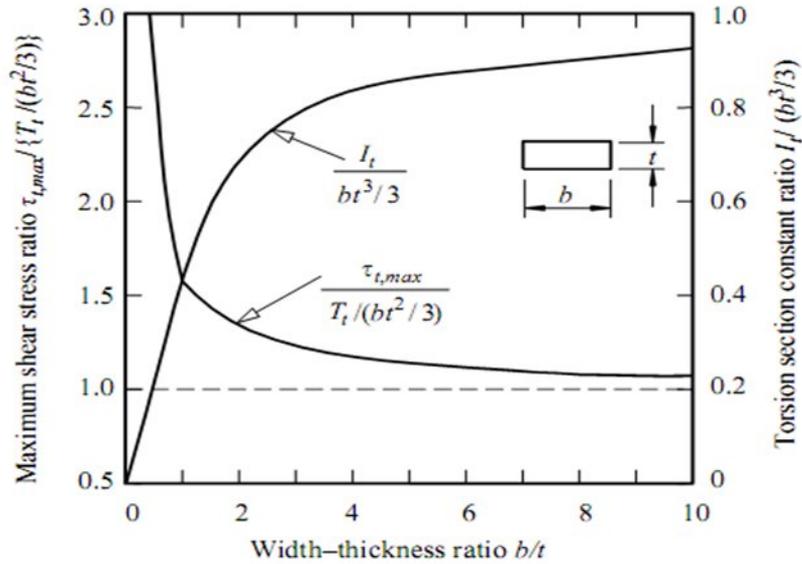


Fig. I.11 : Les propriétés torsionnelles d'un élément rectangulaire [99].

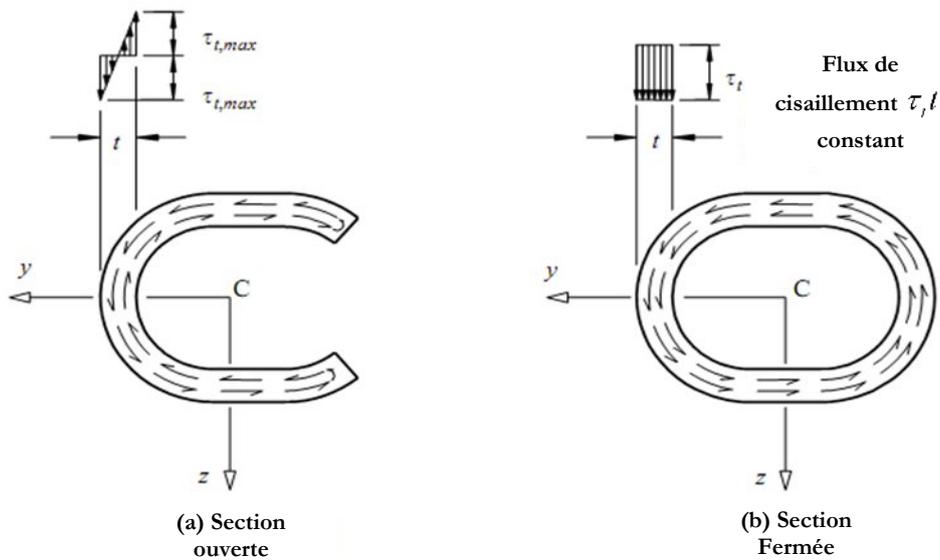


Fig. I.12 : Les contraintes de cisaillement dues à la torsion uniforme dans les sections à parois minces.

Dont (b) et (t) sont respectivement la longueur et l'épaisseur de chaque parois de la section. La

contrainte de cisaillement maximale est donnée par :

$$\tau_{t,\max} \approx \frac{M_t t_{\max}}{I_t} \tag{II.8}$$

Où t_{\max} est l'épaisseur maximale.

I.2.4 Torsion uniforme des sections fermées à parois minces:

Le comportement des sections fermées à parois minces vis-à-vis la torsion uniforme est assez différent à celui des sections ouvertes. Si l'épaisseur de la paroi est faible, il semble raisonnable d'admettre que la contrainte de cisaillement reste à peu près constante dans le sens de l'épaisseur (**Fig. I.12b**), de la même façon comme dans le cas de contraintes de cisaillement provoqué par une force de cisaillement.

On considère un élément à section rectangulaire (tube) de la (**Fig. I.13**), avec la présence d'une trouée (OE) le long de cet élément, le gauchissement de la section est dû entièrement à la torsion du tube. La distribution du gauchissement causé par la torsion est illustrée dans la figure (**Fig. I.13b**). Le déplacement relatif au niveau de trouée est:

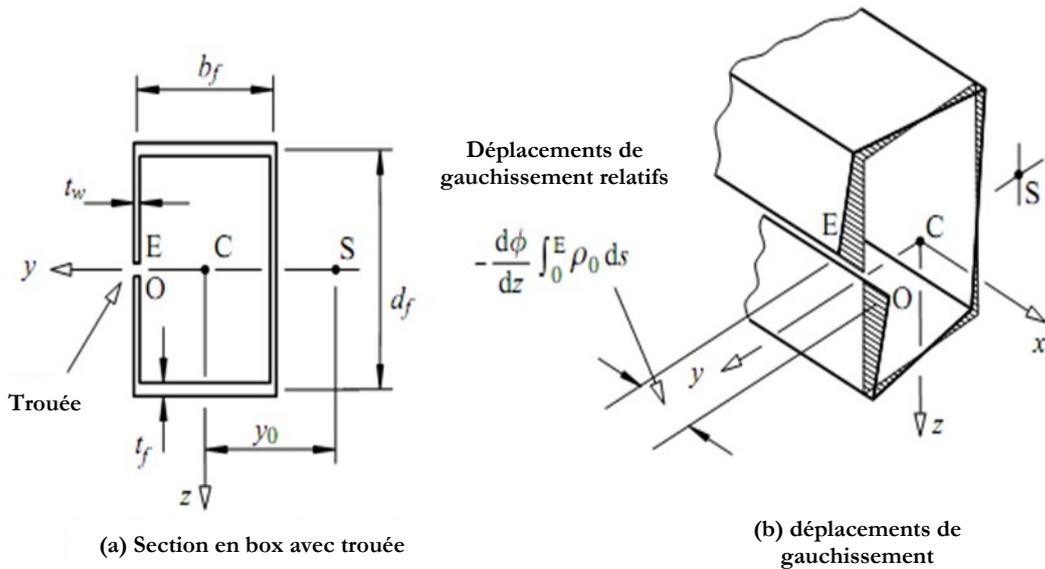


Fig. I.13 : Le gauchissement dans un tube avec trouée.

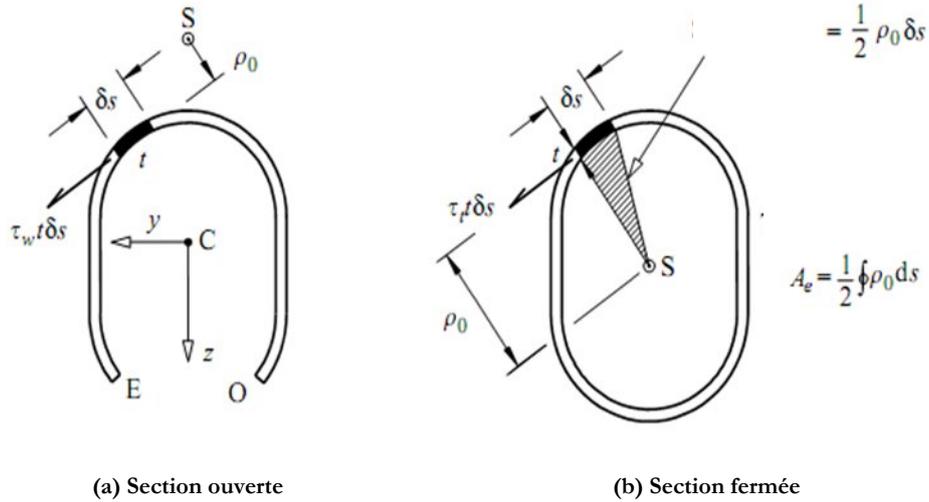


Fig. I.14 : Le cisaillement dans des sections à parois minces.

$$u_E - u_O \approx -\frac{d\varphi}{dx} \int_O^E \rho_0 ds \tag{II.9}$$

dans laquelle ρ_0 est la distance perpendiculaire à partir du tangent de la ligne centrale jusqu'au centre de torsion (Fig. I.14a).

Cependant, si le tube ne présente pas une trouée (enfermé), le déplacement relatif de gauchissement n'aura pas lieu. Dans ce cas, le déplacement dû à la torsion (Fig. I.15a) est parfaitement équilibré par celui dû au flux de cisaillement de la ligne centrale de la section (Fig. I.15b), donc le déplacement relatif total est nul. Le déplacement dû à une rotation φ vaut :

$$-\frac{d\varphi}{dx} \oint \rho_0 ds$$

bien que le déplacement dû au flux de cisaillement égale à (Fig. I. 15b):

$$\oint (\tau_t / G) ds$$

Ainsi:

$$\oint \frac{\tau_t}{G} ds = \frac{d\varphi}{dx} \oint \rho_0 ds \tag{II.10}$$

le flux de cisaillement $(\tau_t t)$ est constant autour de la section, bien que $\oint \rho_0 ds$ égale à deux fois la surface hachurée (A_e), comme indiqué dans la figure (Fig. I.14b). De ce fait :

$$\tau_t t \oint \frac{1}{t} ds = 2GA_e \frac{d\varphi}{dx} \tag{II.11}$$

En effet, le moment résultant dû aux contraintes tangentielles tout autour de la section, équilibre le moment de torsion externe M_t , donc:

$$M_t = \oint \tau_t t \rho_0 ds \tag{II.12}$$

donc:

$$\tau_t t = \frac{M_t}{2A_e} \tag{II.13}$$

La grandeur A_e dans l'équation (I.13) représente l'aire de la surface limitée par la ligne centrale, cependant $1/2 \cdot \rho_0 ds$ est la surface du triangle hachuré verticalement dans la figure (Fig. I.14b). Dans ce cas, l'inertie de torsion est donnée par:

$$I_t = \frac{4A_e^2}{\oint (1/t) ds} \tag{II.14}$$

Substituant la valeur de (I_t) dans l'équation (I.11) on aura :

$$M_t = G \frac{4A_e^2}{\oint (1/t) ds} \frac{d\varphi}{dx} \tag{II.15}$$

Donc l'inertie de torsion est:

$$I_t = \frac{4A_e^2}{\oint (1/t) ds} \tag{II.16}$$

L'équation (I.13) est connue comme *la première formule de Bredt*, et a été développé sans avoir besoin d'aucune référence à des propriétés rhéologiques du matériau (Victor D. S. 2006). Ainsi, elle est valable pour le comportement du matériau linéaire ou non-linéaire, déformation élastique ou plastique, matériaux isotropes ou anisotropes, matériau ou homogène ou hétérogène, ... etc.¹ La contrainte maximale de cisaillement peut être obtenue à partir de l'équation (I.13) :

$$\tau_{t,max} = \frac{M_t}{2A_e t_{min}} \tag{II.17}$$

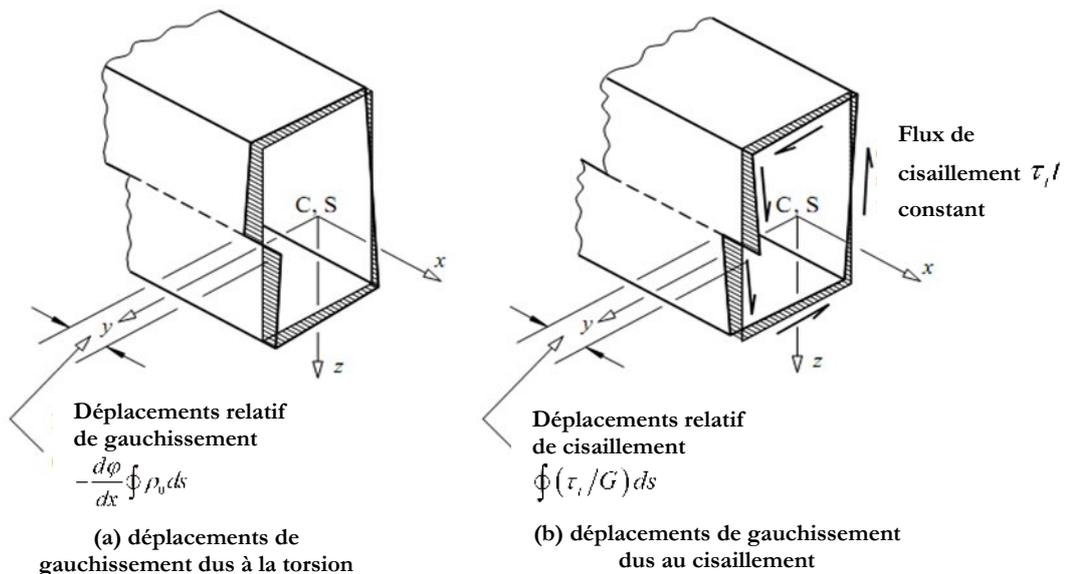


Fig. I.15: Le gauchissement d'une section fermée à parois minces.

¹ Dans le cas d'une paroi mixte (deux matériaux dans l'épaisseur) la première formule de Bredt n'est valable que dans les conditions de l'écoulement de cisaillement $M_t/(2A)$, bien que la contrainte de cisaillement ne peut pas être constante dans l'épaisseur si le module de cisaillement des deux matériaux n'est pas le même.

Pour de déterminer la déformation causée par la torsion, le comportement de matériau doit évidemment être pris en considération. En outre, comme la façon dont la barre se déforme sous torsion n'est pas défini a priori et donc nous ne savons pas quelle partie de la distorsion provoque la barre de tourner autour de son axe (déformation de torsion) et quelle partie provoque le gauchissement de la section transversale, la rotation unitaire de torsion θ ne peut être obtenue au moyen de considérations géométriques. C'est un problème similaire à celui de calculer les déviations causées par la force de cisaillement et peut être résolu de la même manière, c'est à dire par le biais du principe de la conservation de l'énergie. Si le matériau a un comportement élastique, le travail (W) effectué par le couple dans la déformation en torsion, est égal à l'énergie potentielle élastique (U) emmagasinée par les distorsions. Si le comportement du matériau est linéaire, ces deux quantités sont exprimées par unité de longueur de la barre, de la façon suivante:

$$W = \frac{1}{2} M_t \theta \quad (\text{II.18})$$

et

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau \gamma d\Omega \quad (\text{II.19})$$

Avec $\Omega = t.ds$, la surface d'un tronçon ds de la paroi. Ainsi, le principe de conservation de l'énergie conduit à la conclusion :

$$\theta = \frac{1}{GM_t} \oint \tau^2 t ds \quad (\text{II.20})$$

dont : $\gamma = \tau/G$. En substituant la contrainte de cisaillement donné par (I.13) dans cette expression (II.20), on obtient la rotation unitaire en fonction du couple de rotation, le module de cisaillement G et les propriétés géométriques de la section transversale, qui sont représentés par la quantité J (I_t):

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{M_t}{GJ} \quad (\text{II.21})$$

Cette expression est connue comme *la deuxième formule de Bredt*. Le produit GJ représente clairement la rigidité de torsion.

L'analogie de la membrane peut être également employée pour les sections fermées à parois minces dans le but de déterminer la configuration des efforts de cisaillement dans les parois, en imaginant que les frontières internes de la section sont fixées à un plat horizontal et supportées à une distance équivalente à $(\tau_i t)$ au-dessus des frontières d'externes par les pressions transversales, les forces dans la membrane se sont étendues entre les frontières, suivant les indications de (Fig. I. 16b). Ainsi la pente $(\tau_i t)/t$ de la membrane est totalement constante à travers l'épaisseur de la paroi, et elle est équivalente à la contrainte de cisaillement (τ_i) , alors que deux fois le volume $(A_e \tau_i t)$ sous la membrane est équivalent au couple uniforme M_t indiqué par (I.13) [99].

L'analogie de la membrane est utilisée dans (Fig. I. 16) pour montrer la différence en terme de rigidité entre les sections fermées et celles ouvertes à parois minces. On peut distinguer que le moment de torsion (qui est proportionnel au volume sous la membrane) est beaucoup plus grand pour la section fermée que celle ouverte quand les contraintes de cisaillement maximales est identiques.

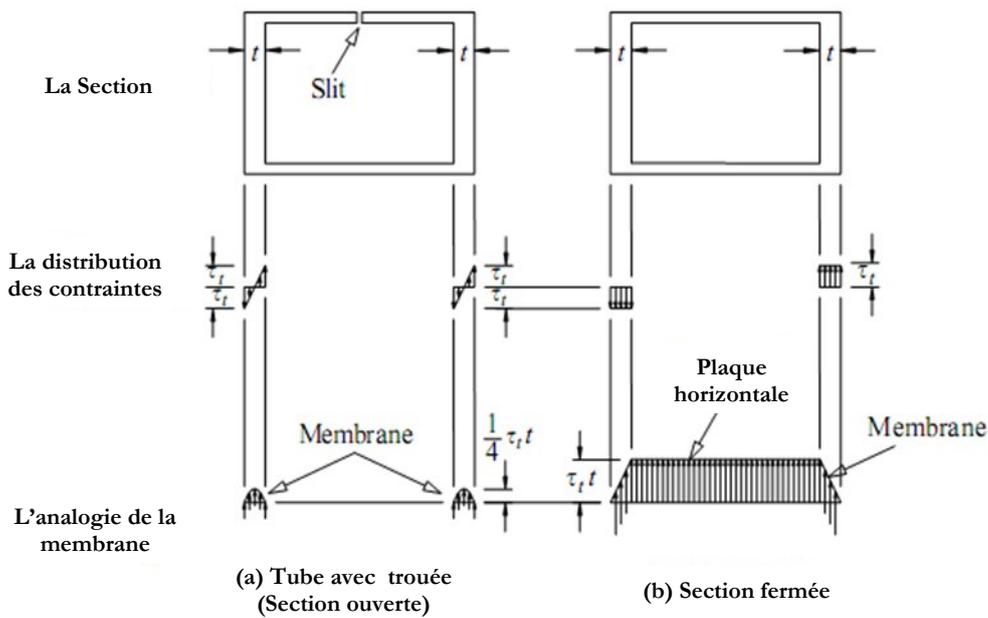


Fig. I.16: La comparaison de la torsion uniforme: (a) section ouverte et (b) fermée.

I.3 La torsion non uniforme:

I.3.1 déformations et contraintes élastiques:

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement d'une poutre (ses déplacements, déformations et contraintes) dans le cas de la torsion non uniforme [100], le phénomène étant relativement complexe, nous avons choisi de l'aborder dans un premier temps sous un aspect plus physique. Ceci permet de mieux saisir ce que les différentes grandeurs utilisées représentent.

Dans le cas de la torsion non uniforme, l'angle de torsion par unité de longueur ($d\phi/dx$) et le gauchissement (u) varient le long de l'élément. Cette variation de gauchissement induit des déformations et des contraintes longitudinales (σ_w). Quand ces contraintes normales varient, on aura des contraintes de cisaillement (τ_w) associées et distribuées autour de la section, et celles-ci agissent conjointement avec les contraintes de cisaillement de la torsion uniforme pour résister le moment de torsion appliqué. Les contraintes de gauchissement toujours dans le cas de la torsion non uniforme, et pour les sections fermées ont été traitées dans [99], alors que quelques exemples de la torsion non uniforme concernant les sections ouvertes et variables sont discutés dans [54,55].

I.3.2 Déplacements et contraintes de gauchissement:

Dans un élément dont la section est ouverte à parois minces, les déplacements dus au gauchissement (u) sont beaucoup plus grands que ceux dus au cisaillement, et ces derniers sont habituellement négligés. Les déplacements dus au gauchissement surgissent parce que les lignes à l'origine parallèles à l'axe de la torsion deviennent hélicoïdales, comme indiqué, dans les figures (Fig. I.17 et Fig. I.18). Dans le cas de la torsion non-uniforme, l'axe de la torsion est le lieu du centre de cisaillement, puisqu'autrement l'axe de centre de cisaillement serait déformé, et l'élément serait courbé aussi bien que tordu. Un élément ($\delta x \times \delta s \times t$) de la paroi tourne ($a_0 d\phi/dx$) autour de

la ligne (a_0) à partir du centre de cisaillement S , suivant les indications de Figures (**Fig. I.4 et Fig. I.17**). La variation du déplacement dû au gauchissement (δu) de l'élément est montrée dans (**Fig. I. 18**), et est égale:

$$\delta u = -\rho_0 \frac{d\phi}{dx} \delta s \quad (\text{II.22})$$

Comme on a indiqué, ρ_0 est la distance perpendiculaire à partir du tangent de la ligne centrale jusqu'au centre de torsion (**Fig. I.18**). Le déplacement dû au gauchissement est donné par:

$$u = (\alpha_n - \alpha) \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{II.23a})$$

$$\alpha = \int_0^S \rho_0 ds \quad (\text{II.23b})$$

$$\alpha_n = \frac{1}{A} \int_0^E \alpha t ds \quad (\text{II.23c})$$

Dans le cas de la torsion non uniforme, les déplacements de gauchissement (u) varient le long de l'élément (**Fig. I.1b**). À cause de celui-ci, des déformations longitudinales auront lieu, et les contraintes normales longitudinales correspondantes valent :

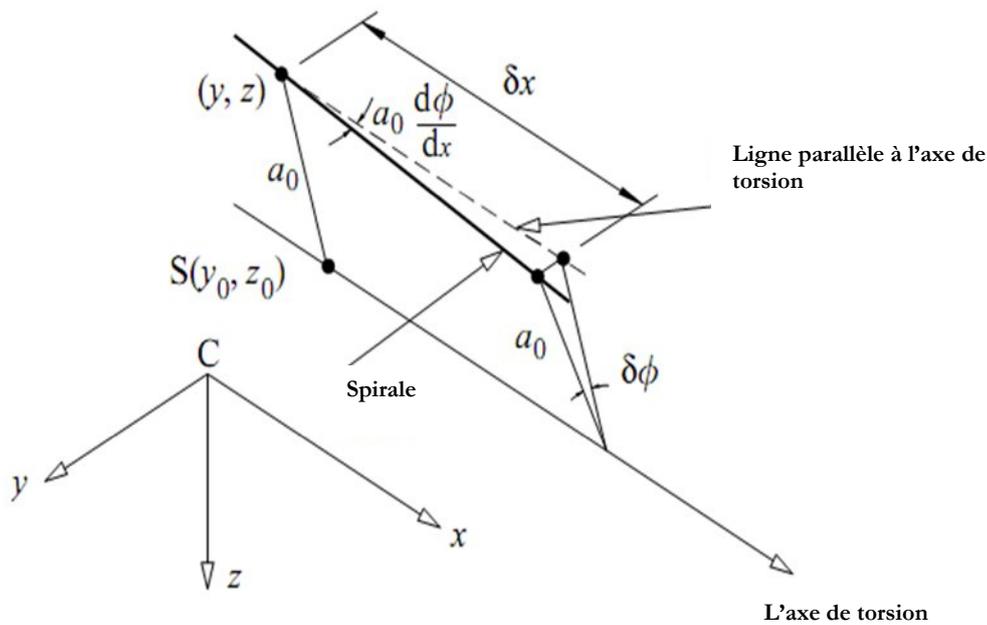


Fig. I.17: La rotation d'une ligne parallèle à l'axe de torsion.

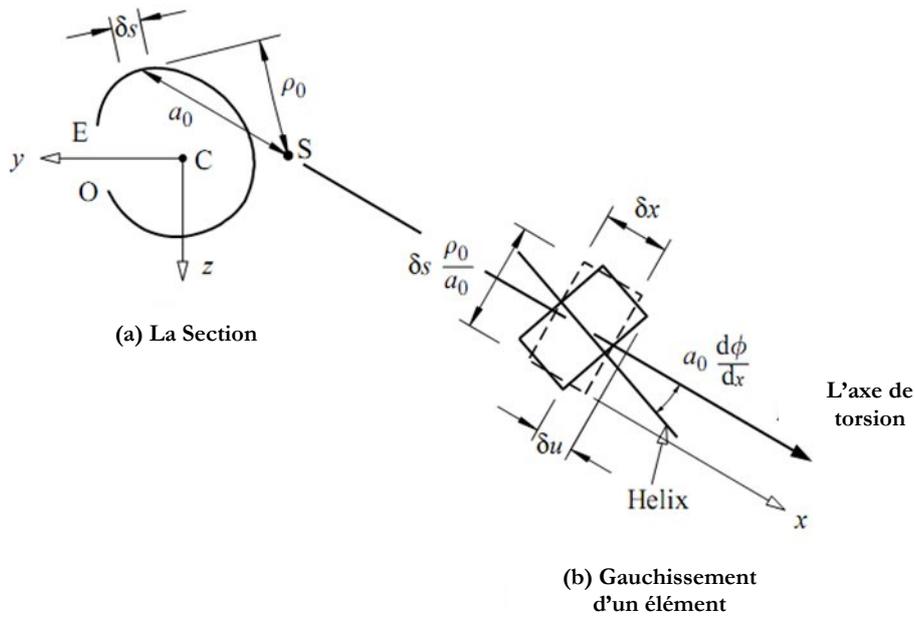


Fig. I.18: Gauchissement d'un élément sous l'effet de torsion.

$$\sigma_w = E(\alpha_n - \alpha) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \tag{II.24}$$

Par conséquent, ces contraintes sont responsables de ce qu'on appelle le bimoment :

$$B = -\int_0^E \sigma_w (\alpha_n - \alpha) t ds \tag{II.25}$$

Substituant la valeur de σ_w dans (I.24) on aura:

$$B = -EI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \tag{II.26}$$

avec :

$$I_w = \int_0^E (\alpha_n - \alpha)^2 t ds \tag{II.27}$$

est l'inertie de gauchissement. Si on remplace (I.26) dans (I.24), on peut exprimer la contrainte normale de gauchissement :

$$\sigma_w = -\frac{B(\alpha_n - \alpha)}{I_w} \tag{II.28}$$

Lorsque les contraintes normales σ_w varient le long de l'élément, des contraintes de cisaillement τ_w auront lieu (même analogie que la flexion). Le flux de cisaillement du au gauchissement dans ce cas vaut :

$$\tau_w t = -E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \int_0^s (\alpha_n - \alpha) t ds \tag{II.29}$$

Les contraintes de cisaillement dues au gauchissement entraînent un moment de torsion dont sa valeur:

$$M_w = \int_0^E \rho_0 \tau_w t ds \quad (\text{II.30})$$

Ce moment peut être exprimé par [100]:

$$M_w = -EI_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (\text{II.31})$$

À partir des équations (I.26) et (I.31), le moment M_w est lié au bimoment par:

$$M_w = \frac{dB}{dx} \quad (\text{II.32})$$

La figure (Fig. I.19) est une illustration du moment M_w et de bimoment et ce dans le cas d'une section en I. Pour la même section, le bimoment égale à :

$$B = d_f M_f \quad (\text{II.33})$$

dont M_f est le moment de flexion des semelles, et d_f la distance entre les centres de gravité des semelles, l'inertie de gauchissement I_w vaut :

$$I_w = \frac{I_z d_f^2}{4} \quad (\text{II.34})$$

I.3.3 Analyse élastique de la torsion non uniforme:

I.3.3.1 La torsion uniforme:

Quelques sections ouvertes à parois minces (cas des sections en L ou T) ont une faible inertie de gauchissement. Dans ce cas-là, on peut négliger le moment de gauchissement M_w , et d'analyser l'élément comme étant dans le cas de la torsion uniforme.

I.3.3.2 La torsion de gauchissement :

Les sections ouvertes à parois très minces possèdent une inertie de torsion I_t faible, bien que quelques-unes telles que les sections en I, ont une inertie de gauchissement I_w importante. Dans ce cas, il est adéquat d'étudier l'élément comme si le moment de torsion appliqué sera résisté par le moment de torsion de gauchissement M_w , de ce fait $M_x = M_w$. Ainsi, l'angle de rotation $\varphi(x)$ peut être obtenu à partir de l'équation suivante :

$$-EI_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = M_x \quad (\text{II.35})$$

Alors :

$$-EI_w \varphi = \int_0^x \int_0^x \int_0^x M_x dx dx dx + \frac{A_1 x^2}{2} + A_2 x + A_3 \quad (\text{II.36})$$

Où A_1, A_2 et A_3 sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions aux limites du problème.

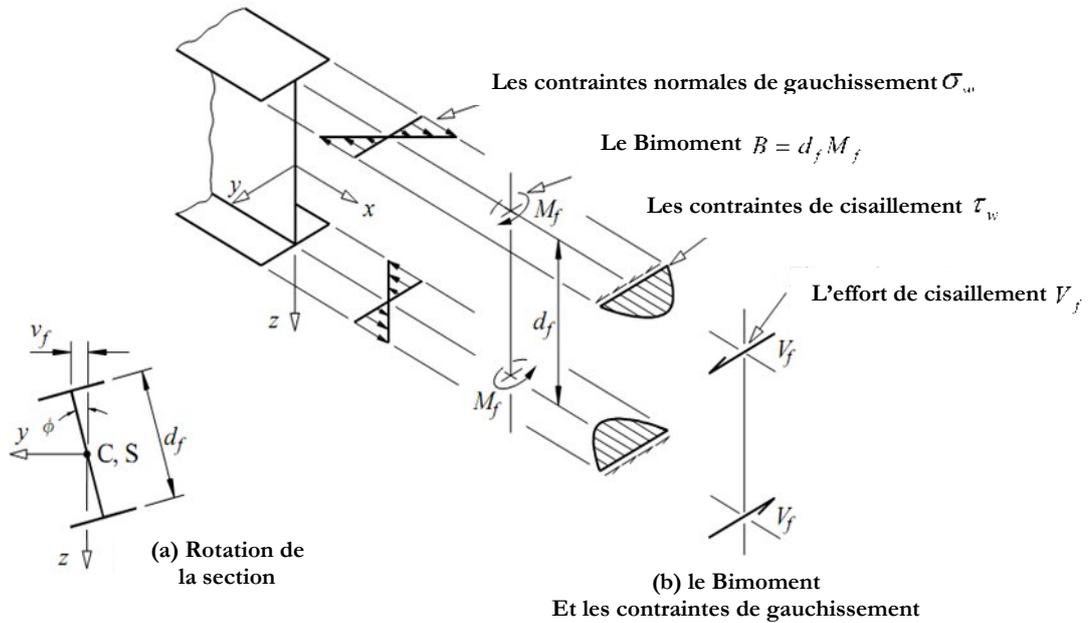


Fig. I.19 : Le Bimoment et les contraintes normales de gauchissement (section en I).

I.3.3.3 La torsion non uniforme :

On considère une poutre console sollicitée par un moment de torsion M_t à son extrémité libre, et empêchée de gauchir à l'encastrement (Fig. I.20), une des deux extrémités étant bloquée au gauchissement, on se trouve dans un cas de torsion non uniforme [67].

En décomposant le moment de torsion M_t en deux efforts tranchants T agissant dans les semelles, on voit que lors de la torsion de la barre, l'empêchement de gauchissement entraîne la flexion de ces semelles, de sorte que le moment de torsion sera équilibré dans chacune des sections par le moment de torsion propre de la barre M_{sv} (de Saint-Venant) et par le couple engendré par les efforts tranchants dans les semelles M_w (moment de torsion de gauchissement).

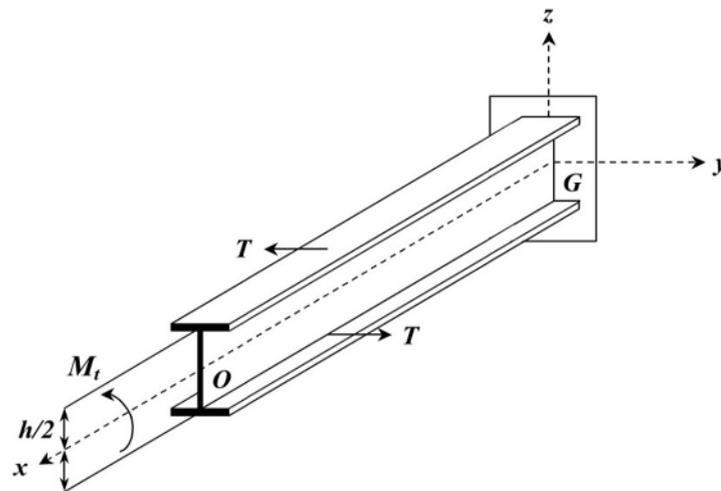


Fig. I.20 : Poutre en I en torsion non uniforme.

Lorsque ni la rigidité torsionnelle ni la rigidité au gauchissement peuvent être négligées (cas des sections en I ou en U), le moment de torsion appliqué est équilibré par une combinaison de moment de torsion uniforme ainsi que le moment de gauchissement, donc :

$$M_x = M_{sv} + M_w \quad (\text{II.37})$$

Nous avons vu au paragraphe (§II.2.2) que le moment de torsion de Saint-Venant s'exprime:

$$M_{sv} = GI_t \frac{d\varphi}{dx} \quad (\text{II.38})$$

Puisqu'on considère ici le cas de la torsion non uniforme, l'angle de torsion par unité de longueur φ' n'est plus constant, et il convient donc d'utiliser φ' et non θ dans les équations. Le moment de torsion de gauchissement s'écrit alors:

$$M_w = V_f d_f = d_f \frac{dM_f}{dx} \quad (\text{II.39})$$

où (M_f) représente le moment de flexion dans les semelles, et (d_f) la distance entre centres de gravité des semelles. En remarquant que le centre de gravité du profil est confondu avec le centre de cisaillement, le déplacement latéral du centre de gravité d'une semelle (v_f) s'écrit :

$$v_f = \frac{d_f}{2} \varphi, \text{ et en tenant compte de l'équation d'équilibre en flexion des semelles :}$$

$M_f(x) = -EI_f v_f''(x)$ où I_f est l'inertie d'une semelle selon son axe fort, on en déduit que :

$$M_w = -\frac{EI_f d_f^2}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (\text{II.40})$$

En remplaçant (I.38) et (I.40) dans (I.37), on arrive à l'équation différentielle de la torsion non uniforme est :

$$M_x = GI_t \frac{d\varphi}{dx} - EI_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (\text{II.41})$$

dans laquelle $EI_w = \frac{EI_f d_f^2}{2}$ est la rigidité au gauchissement, et I_w l'inertie de gauchissement.

L'équation (II.41) a été mise en évidence pour la première fois par Vlassov [100], elle est à rapprocher de (I.3), et lie le moment de torsion appliqué à l'angle de torsion dans la poutre, en fonction des inerties de torsion de Saint Venant et de gauchissement. Elle est d'application pour l'étude de la torsion non uniforme des poutres à parois minces et section ouverte. On constate ici la présence de l'inertie I_w , qui traduit l'influence du phénomène de gauchissement sur la réponse en torsion de telles sections; elle apporte une contribution importante de résistance à la torsion, et les cas de poutres à parois minces résistant à la torsion principalement grâce à l'effet de gauchissement ne sont pas rares.

A titre illustratif, on donne ci-dessous l'allure de la déformée de gauchissement d'une poutre en box soumise à un moment de torsion (Fig. I.21):

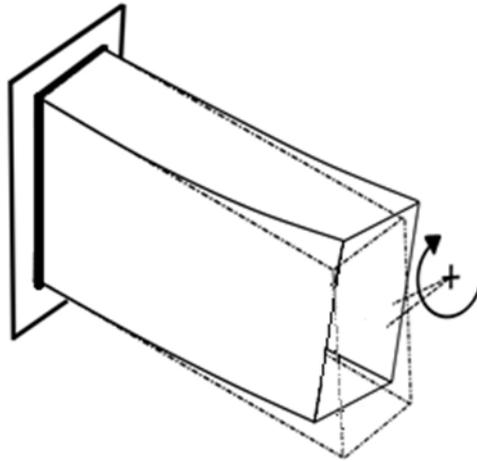


Fig. I.21 : Déformée de gauchissement d'une poutre en box.

La solution générale peut être écrite sous forme de:

$$\varphi(x) = p(x) + A_1 e^{x/a} + A_2 e^{-x/a} + A_3 \quad (\text{II.42})$$

avec :

$$a^2 = \frac{EI_w}{GI_p} = \frac{K^2 L^2}{\pi^2} \quad (\text{II.43})$$

La fonction $p(x)$ dans la solution générale dépend de la variation du moment M_x le long de la poutre.

I.4 La distorsion:

La torsion et la distorsion d'un élément soumis à la flexion peuvent être provoquées par la distribution locale des forces appliquées autour de la section transversale, suivant les indications de (**Fig. I.3**). Si le membre répond de manière significative à l'un ou l'autre de ces actions, la distribution des contraintes de flexion peut être considérablement différente à celle calculée par la méthode habituelle, alors que des efforts supplémentaires de distorsion peuvent être induits à cause de la flexion hors-plan (latérale) des parois (**Fig. I.3d**). Pour éviter une éventuelle faille, le concepteur doit augmenter la rigidité de l'élément ou bien limiter la torsion et la distorsion.

La résistance à la distorsion d'un élément à parois minces dépend de la disposition des parois transversalement. Les éléments avec des cellules fermées triangulaires ont des résistances élevées en raison de l'action comme un bloc de la section qui transfère les charges de distorsion en des contraintes de flexion dans le plan de la section et de cisaillement dans parois. D'autre part, les parois des éléments avec des cellules rectangulaires ou trapézoïdales se courbent hors de leurs plans (flexion latérale des parois) sous un chargement de distorsion et notamment quand la résistance à la distorsion est faible. Des charges concentrées peuvent être distribuées localement en fournissant des diaphragmes rigides (transversalement) qui réduisent ou empêchent la distorsion locale. Cependant, ces diaphragmes ne sont pas entièrement efficaces quand les charges de distorsion sont distribuées ou peuvent se déplacer le long de l'élément. En pareils cas, il est nécessaire d'analyser la distorsion de la section transversale et les efforts induits par les déformations de distorsion [99].

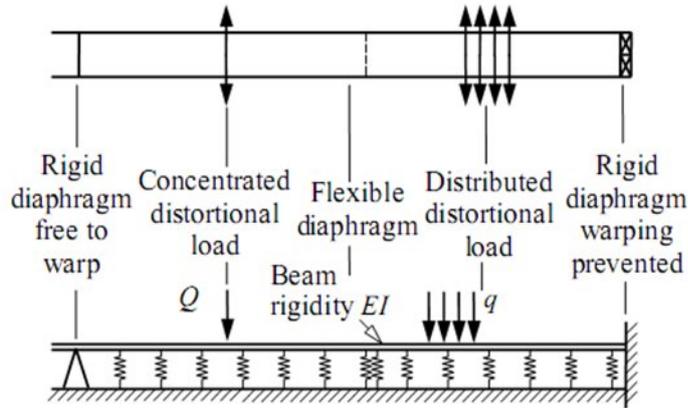
La résistance à la torsion d'une section ouverte à parois minces est comparativement petite, et le mode dominant de la déformation est la rotation de l'élément. Puisque la rotation de l'élément est généralement expliquée, l'importance des déformations de distorsion se situe dans son influence sur le comportement vis-à-vis la torsion. Les déformations de distorsion sont significatives dans les éléments à parois très minces, pour lesquels, la rigidité de distorsion réduit à une vitesse beaucoup plus rapide que la rigidité de gauchissement, qui varie directement avec l'épaisseur. Ces déformations de distorsion peuvent induire des contraintes de flexion significatives dans les parois, et peuvent augmenter les angles de la rotation et changer la distribution des contraintes de gauchissement [99].

Les éléments à sections fermées et à parois minces ont un bon comportement vis-à-vis la torsion, et les déformations dues à la torsion uniforme ne sont pas habituellement de grande importance excepté dans les éléments courbés. D'autre part, les éléments à section rectangulaire et trapézoïdale ne sont pas très résistants aux chargements de distorsion, et les déformations de distorsion peuvent être grandes, alors que les efforts induits par ces chargements peuvent dominer les calculs pendant la conception.

La distorsion des éléments qui ont des sections rectangulaires ou trapézoïdales unicellulaires peut être classée en tant qu'uniforme ou non-uniforme. La distorsion uniforme se produit quand le chargement appliqué est uniformément distribué le long d'un élément d'une section transversale constante sans présence d'un aucun raidisseur qui peut restituer la section comme un diaphragme rigide. Dans ce cas le chargement de distorsion est résisté seulement par la rigidité de flexion des parois de la section. Dans le cas de la distorsion non-uniforme, les déformations varient le long de l'élément, et les parois se plient dans leurs plans, produisant les efforts de cisaillement qui aident à résister au chargement de distorsion.

Peut-être la méthode la plus simple pour analyser la distorsion non-uniforme est à l'aide d'une analogie d'une poutre sur une fondation élastique (analogie de BEF). Dans cette analogie, qui est montrée schématiquement dans (**Fig. I.22**), le chargement de distorsion correspond aux charges appliquées à la poutre dans l'analogie, et la résistance des parois à la flexion latérale correspond à la rigidité (raideur) k de la fondation élastique, alors que la résistance des parois à la flexion dans leurs plans correspond à la rigidité de flexion (EI) de cette poutre. L'analogie de BEF peut expliquer la distorsion dans le cas des charges concentrées ou réparties, pour des diaphragmes rigides qui permettent ou empêchent les déformations de gauchissement, et pour les diaphragmes flexibles ou en présence des raidisseurs, comme indiqué dans (**Fig. I.22**).

(a) Vue en élévation d'un élément en box



(b) Poutre sur une Fondation élastique

Foundation modulus k
 $EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q$

(c) L'analogie BEF

Distorsion	≡	Déflexion w
La rigidité de flexion	≡	Rigidité de la poutre EI
La rigidité latérale	≡	Raideur k de fondation
Charges de distorsion	≡	Charges Q, q
Contrainte normale	≡	Moment
Contrainte de cisaillement	≡	Effort tranchant

Fig. I.22 : L'analogie de BEF pour un box en distorsion [99].

Beaucoup de solutions pour des problèmes des poutres sur des fondations élastiques ont été obtenues, et ceux-ci peuvent être employés pour trouver les contraintes de flexion hors-plan ou latérale des parois d'une section fermée (qui sont liées aux réactions de la fondation), ainsi que les contraintes de gauchissement et les efforts de cisaillement dus à la distorsion non-uniforme (qui sont liés au moment de flexion et à l'effort tranchant dans la poutre sur cette base élastique). La distribution des contraintes de gauchissement dus à la distorsion dans une section rectangulaire ou en box sont montrées dans (Fig. I.23).

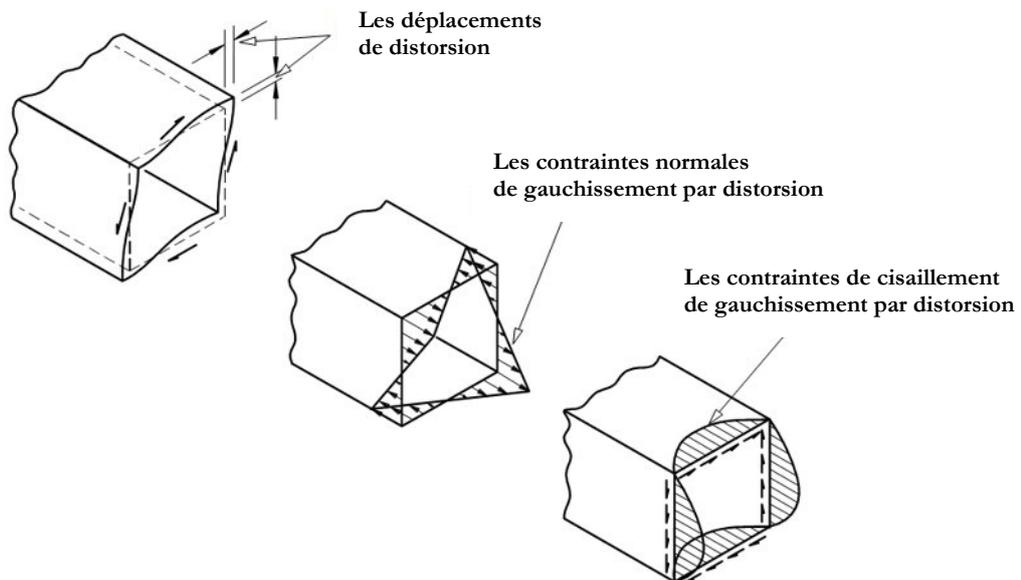


Fig. I.23 : Les contraintes de gauchissement dues à la distorsion

I.5 Conclusion

Dans le calcul des poutres spatiales, la torsion joue un rôle très important et non négligeable. Dans ce chapitre on a présenté les différentes théories de torsion concernant chacune un type particulier de section: sections circulaires, pleines ouvertes et fermées à parois minces.

La théorie de Saint-Venant est exacte pour les sections pleines circulaires, la théorie de Bredt est exacte pour les sections fermées en parois minces tant que l'hypothèse sur l'épaisseur de la paroi est vérifiée. La théorie de *Vlassov* est une bonne approximation du comportement en torsion des sections ouvertes à parois minces.

D'une manière générale, les théories de Saint-Venant et Vlassov sont suffisantes pour caractériser les contraintes et déformations de torsion dans une poutre, à condition qu'elle ne soit pas sollicitée uniquement en torsion, ce qui est un cas assez rare de sollicitation dans une structure courante.

Nous avons donc balayé les théories les plus classiques de la torsion des poutres prismatiques, depuis la torsion uniforme jusqu'à la torsion non uniforme, en nous concentrant plus particulièrement sur les poutres à section fermées et parois minces. Nous avons en particulier montré qu'il était nécessaire d'abandonner l'hypothèse de conservation des sections planes pour les poutres à section non circulaire.

Les notions de gauchissement et de distorsion ont été introduites et détaillées, et seront reprises par la suite. Ces phénomènes, relativement complexes, constituent le point le plus délicat à traiter dans les développements à suivre.

Chapitre2 :

L'instabilité des éléments à parois
minces: Aspect analytique
& réglementaire

L'instabilité des éléments à parois minces: Aspect analytique & réglementaire

II.1 Introduction:

La construction moderne utilisant le matériau acier est caractérisée dans tous les domaines, notamment en génie civil, par l'emploi de structures minces. Ces structures bénéficient des avancées technologiques et des procédés de fabrication très performants. Ainsi, on arrive à fabriquer des éléments de plus en plus minces avec une résistance beaucoup meilleure. Ce qui conduit à des structures très légères.

Cependant, l'emploi des éléments minces et élancés rend les structures très sensibles aux instabilités de forme. Les instabilités peuvent être globales ou locales. L'instabilité est globale quand l'élément est concerné par l'instabilité sur toute sa longueur. C'est le cas du flambement des colonnes (instabilité par effort normal) ou du déversement des poutres (instabilité par flexion).

L'étude des instabilités consiste à trouver les charges maximales qu'une structure peut supporter sans perte d'équilibre. On parle alors de charges critiques. De nombreux travaux s'intéressent au déversement des poutres. Dans ce chapitre, le flambement et le déversement des poutres à parois minces sont étudiés. Après la description des phénomènes, une étude théorique et réglementaire des charges critiques sera donnée.

II.2 Étude du flambement:

II.2.1 Étude analytique du flambement:

II.2.1.1 Principe de flambement :

La résistance ultime des éléments comprimés est très souvent définie non pas par un critère de résistance en section, mais par un critère de stabilité de forme. Afin d'illustrer en quoi consiste un problème de stabilité de forme, on peut faire une analogie entre le flambement d'une barre bi-articulée parfaitement rectiligne et l'équilibre d'une balle parfaitement sphérique sur une surface sans frottement (**Fig. II.1**)

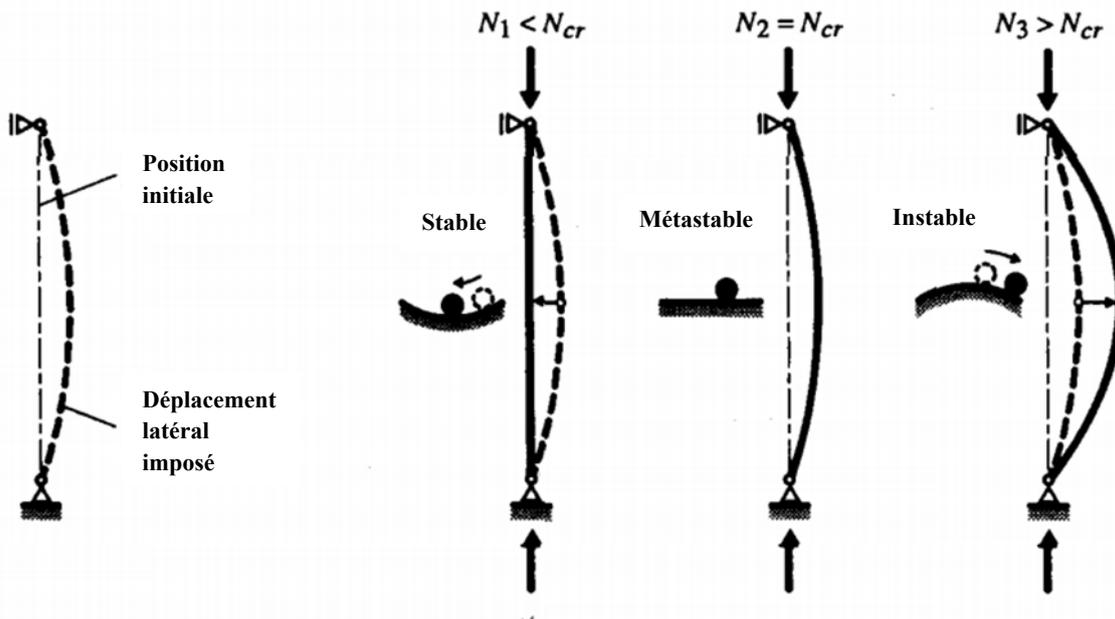


Fig. II.1 : Stabilité de forme d'une barre comprimée.

La barre étant soumise à une charge axiale de compression (N_1), supposons qu'on lui impose un petit déplacement latéral, si la barre revient à sa position initiale lorsque la cause de déplacement est supprimée, on dit qu'elle est en *équilibre stable*. Il existe une charge (N_2), supérieure à (N_1), pour laquelle la barre garde sa position déformée après la suppression de la cause du déplacement latéral, quelle que soit la grandeur de ce dernier, il a alors trouvé un nouvel état d'équilibre et on dit qu'elle est en *équilibre métastable ou indifférent*. La charge (N_2) est appelée **charge critique de flambement élastique** N_{cr} . Pour une charge (N_3) supérieure à (N_{cr}), la barre se déroge si on lui impose un petit déplacement latéral ; la déformation s'accroît et devient inacceptable et le système est alors *instable*.

L'étude de la stabilité d'un système consiste à déterminer la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre métastable. La charge critique dépend de la forme de la barre à l'état métastable, qui est caractérisée par la longueur de flambement (l_k). La théorie développée dans ce chapitre se concentre essentiellement sur la détermination de cette longueur.

II.2.1.2 Théorie linéaire du flambement élastique :

Cette théorie, établie dans ses fondements les plus simples par Euler en 1744 [96], elle ne fait donc ici que l'objet d'un bref rappel pour le flambement plan (ou flambement par flexion) d'une barre droite simplement comprimée. Les principales hypothèses à la base de cette théorie sont :

- Barre prismatique bi articulée parfaitement rectiligne ;
- Barre idéale sans imperfections (déformations initiales, contraintes résiduelles, etc...) ;
- Barre sollicitée en compression pure par une charge parfaitement centrée ;
- Matériau infiniment élastique linéaire ;
- Déformation par torsion empêchée ;

Considérons la barre comprimée de la figure (Fig. II.2). La charge critique N_{cr} est égale à la charge pour laquelle la barre est en équilibre indifférent. Pour obtenir cette valeur, on impose une déformation à la barre chargée et l'on écrit son équation d'équilibre dans la position déformée. Cette position représente donc un état d'équilibre possible. La représentation graphique du phénomène est

caractérisée par une augmentation de la charge N sans aucune déformation w jusqu'à une valeur de charge $N = N_{cr}$ où le déplacement latéral w comporte un point de bifurcation. L'ensemble des points situés sur les deux tronçons horizontaux de la courbe $N-w$ de la figure (Fig. II.2) représentent également un état d'équilibre possible. Ce phénomène est appelé *flambement par bifurcation*.

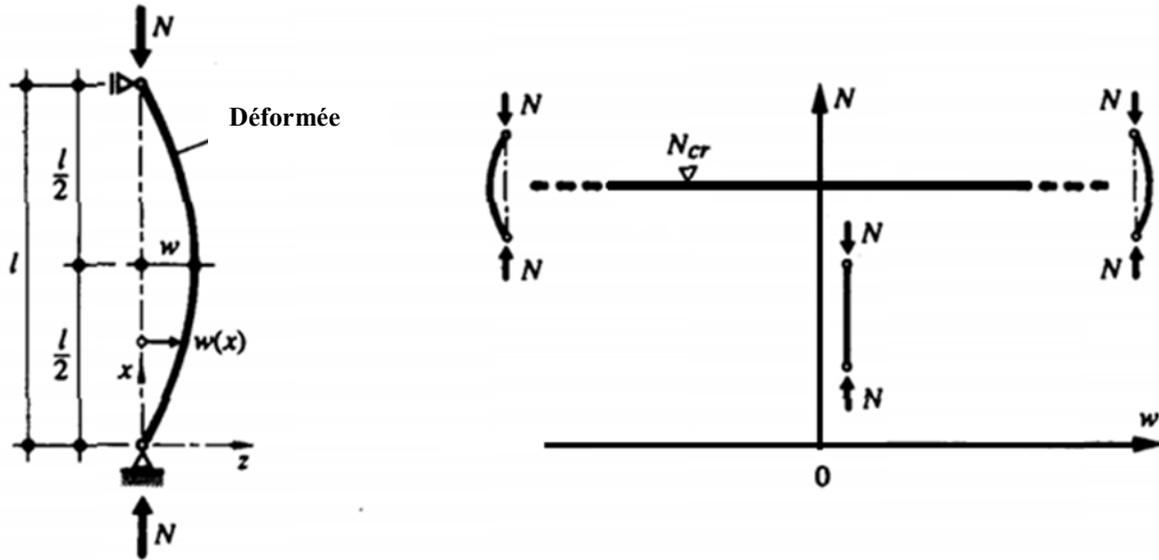


Fig. II.2 : Flambement plan d'une barre bi-articulée (bifurcation d'équilibre).

La condition d'équilibre entre les moments extérieurs et intérieurs permet d'écrire les équations différentielles ci-après, suivant le type de flambement :

- Selon l'axe y :

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N w(x) = 0 \quad (\text{II.1})$$

- Selon l'axe z :

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + N v(x) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Il est nécessaire de préciser la terminologie utilisée pour désigner le type de flambement que nous allons toujours considérer selon un axe. Ainsi, le flambement selon l'axe y dépend de l'inertie I_y , mais correspond à une déformation w dans la direction de l'axe z , donc perpendiculairement à l'axe y . De même, le flambement selon l'axe z dépend de l'inertie I_z , mais correspond à une déformation v dans la direction de l'axe y , donc perpendiculairement à l'axe z .

En admettant une déformée sinusoïdale et une rigidité EI constante, on obtient par intégration, en introduisant les conditions aux limites pour une barre bi-articulée (à savoir $w=w''=0$ pour $x=0$ et l), la valeur de la charge critique de flambement élastique N_{cr} , ou charge critique d'Euler N_E , donnée par :

$$N_{cr} = N_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{II.3})$$

- E : module d'élasticité
- I : moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de déformation
- l : longueur de la barre

Il est important de préciser que la charge critique de flambement correspond en fait à une résistance, et non pas à une sollicitation (même si l'on utilise le terme charge), d'une barre idéale comprimée. Le cas de la barre bi-articulée correspond au cas fondamental de flambement. Il est possible de déduire la charge critique de barres présentant d'autres conditions d'appuis en introduisant la notion de *longueur de flambement* l_k . Celle-ci est égale à la longueur de la barre fictive qui aurait la même charge critique que la barre étudiée ; c'est aussi la distance entre deux points d'inflexion de la déformée (**Fig.II.3**). D'où l'expression généralisée donnant la valeur de la charge critique de flambement élastique :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \quad (\text{II.4})$$

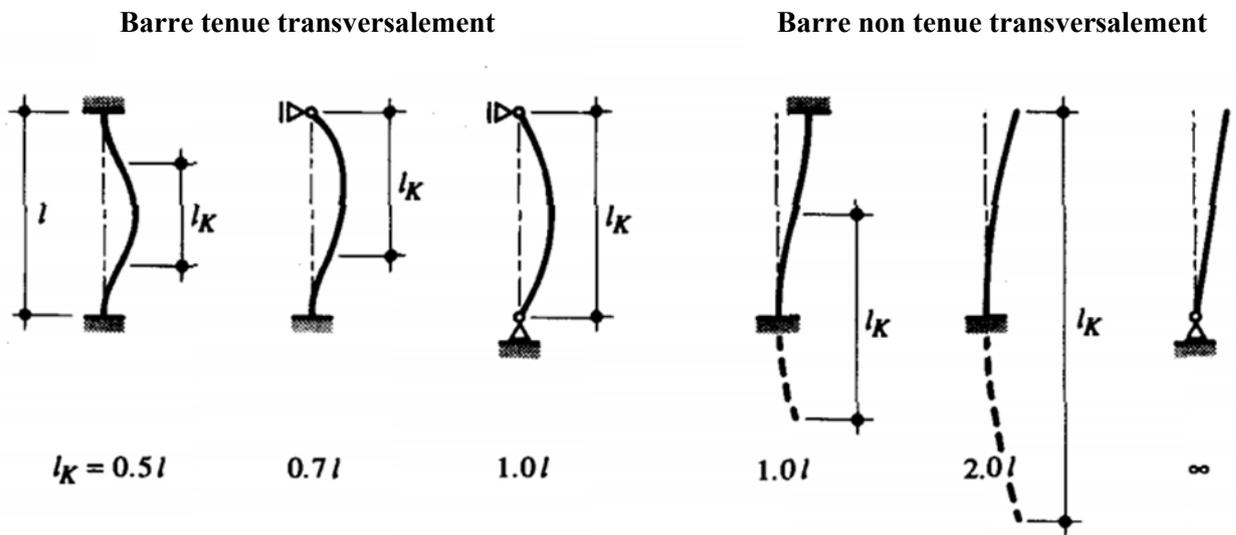


Fig. II.3 : Longueur de flambement l_k d'une barre comprimée pour différentes conditions d'appuis.

La contrainte moyenne de compression, définie comme la *contrainte critique de flambement élastique* vaut alors :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2} \quad (\text{II.5})$$

- A : aire de la section ;
- i : rayon de la giration de la section de la barre par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de déformation ($i = \sqrt{I/A}$)

Avec l'élanement (λ_k) de la barre défini comme étant égale au rapport entre sa longueur de flambement l_k et son rayon de giration i :

$$\lambda_k = \frac{l_k}{i} \quad (\text{II.6})$$

Il faut relever que l'équation (II.5) permet d'exprimer l'élanement (λ_K) en fonction de la charge critique de flambement élastique selon l'expression suivante :

$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{EA}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} \tag{II.7}$$

Si l'on représente (II.5) graphiquement, on obtient la courbe de (σ_{cr}) en fonction de (λ_K) donnée à la figure (Fig. II.4-a), appelée hyperbole d'Euler, qui est la courbe de flambement pour des barres parfaitement rectilignes constituées d'un matériau infiniment élastique linéaire. La courbe de flambement est limitée par la droite horizontale correspondant à la limite d'élasticités f_y (Fig. II.4-b).

Pratiquement, si l'on effectue des essais en employant des barres industrielles, on obtient les courbes de flambement de la figure (Fig. II.4-c). Pour de grands élanements, ces courbes sont très proches de l'hyperbole d'Euler, mais lorsque l'élanement diminue, elles s'en écartent passablement, pour s'approcher de la limite d'élasticité dans le cas de très faibles élanements. On constate que la contrainte de flambement (σ_K) est plus faible que la contrainte critique de flambement élastique (σ_{cr}), obtenue par la théorie élastique. Ceci est dû principalement à l'effet défavorable des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques inhérentes à chaque profilé.

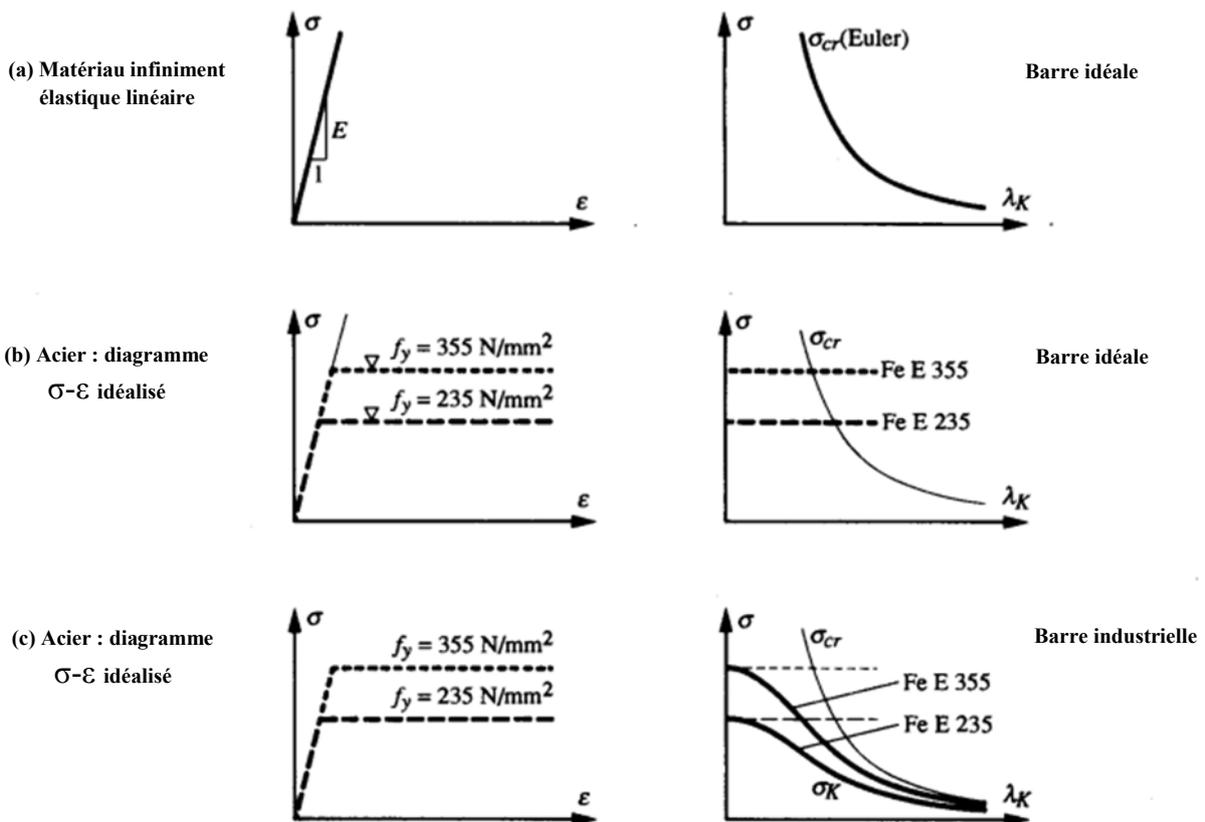


Fig. II.4 : Allure des courbes de flambement selon les hypothèses effectuées.

En conclusion, la théorie linéaire du flambement élastique est insuffisante pour déterminer la résistance ultime d'une barre comprimée. Elle montre cependant l'importance de l'élanement (λ_K) sur la valeur de la charge critique (N_{cr} est inversement proportionnelle au carrée de l'élanement λ_K). Notons enfin que l'emploi d'un acier à haute résistance n'est pas avantageux pour les pièces élancées,

car la charge critique n'est pas directement proportionnelle à la limite d'élasticité de l'acier. En fait, pour les grands élancements, le calcul de la charge critique n'est pas un problème de résistance, mais plutôt de déformation (flèche inacceptable), fortement influencé par le module d'élasticité du matériau

II.2.1.3 Cas particulier du flambement par flexion et torsion (flambement spatial) :

Nous avons étudié le phénomène de flambement par flexion en admettant que la déformation par torsion de la barre étant empêchée. Or, pratiquement, cette condition n'est pas toujours réalisée ; le phénomène d'instabilité qui dicte la ruine d'une barre est alors le flambement par flexion et torsion. Ce dernier représente en fait le mode d'instabilité le plus générale d'une barre droite ; le flambement par flexion seule ou par torsion seule (enroulement hélicoïdal autour de l'axe de la barre) sont des cas particuliers (**Fig. II.5**).

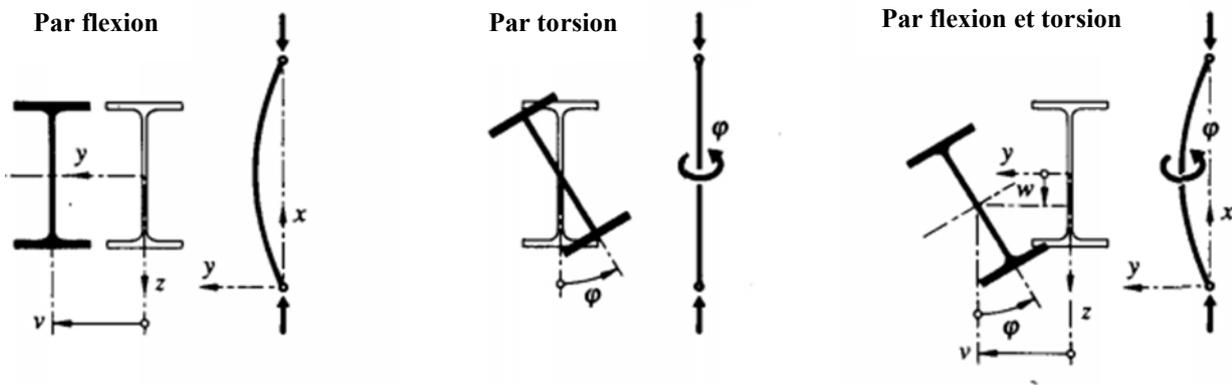


Fig. II.5 : Différents modes de flambement d'une barre comprimée.

Le phénomène du flambement par flexion et torsion (appelé aussi flambement spatial) d'une barre simplement comprimée peut être étudié comme un phénomène d'instabilité par bifurcation d'équilibre. La position de l'équilibre indifférent de la barre est une position dans laquelle les sections ont subi une translation et une rotation par rapport à l'état non déformé de la barre (**Fig. II.5**). Les équations différentielles de la déformée, pour une charge axiale dont le point d'application est au centre de gravité G de la section (**Fig. II.6**), sont très semblables à l'équation différentielle (II.1 et II.2) utilisée pour flambement par flexion ; elles sont les suivantes [96]:

- Flexion selon l'axe y :

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N[w(x) - yc \varphi(x)] = 0 \quad (\text{II.8})$$

- Flexion selon l'axe z :

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + N[v(x) + zc \varphi(x)] = 0 \quad (\text{II.9})$$

- Torsion autour de l'axe x (axe longitudinale) :

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + (N ic^2 - GK) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + N zc \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - N yc \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.10})$$

- y_C : cordonnée y du centre de cisaillement C ;
- z_C : cordonnée z du centre de cisaillement C ;
- v : déplacement du centre de cisaillement C dans la direction de l'axe y ;
- w : déplacement du centre de cisaillement C dans la direction de l'axe z ;
- φ : rotation de la section ;
- $I\omega$: moment d'inertie sectoriel de la section ;
- i_C : rayon de giration pour flambement par flexion ($i_C^2 = y_C^2 + z_C^2 + (I_y + I_z)/A$) ;
- K : constante de torsion uniforme ;
- G : module de cisaillement.

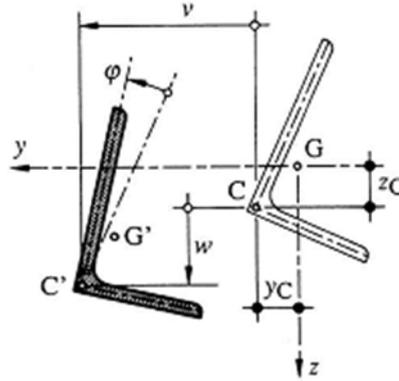


Fig. II.6 : Flambement par flexion et torsion.

En intégrant le système d'équation ci-dessus et en tenant compte des conditions aux limites pour une barre bi-articulée selon ses deux axes d'inertie (à savoir $v=w=\varphi=v''=w''=\varphi''=0$ pour $x=0$ et l), on obtient l'expression suivante :

$$i_C^2 (N_{cr} - N_{cry})(N_{cr} - N_{crz})(N_{cr} - N_{cr\varphi}) - N_{cr}^2 z_C^2 (N_{cr} - N_{cry}) - N_{cr}^2 y_C^2 (N_{cr} - N_{crz}) = 0 \quad (\text{II.11})$$

- N_{cr} : charge critique de flambement élastique de la barre (flambement par flexion et torsion)
- N_{cry} : charge critique de flambement élastique (flambement par flexion seule) selon l'axe y (axe fort) ($N_{cry} = \pi^2 EI_y / l^2$)
- N_{crz} : charge critique de flambement élastique (flambement par flexion seule) selon l'axe z (axe faible) ($N_{crz} = \pi^2 EI_z / l^2$)
- $N_{cr\varphi}$: charge critique de flambement élastique par torsion ($N_{cr\varphi} = [GK + (\pi^2 EI_\omega / l^2)] / i_C^2$)

II.2.2 La résistance ultime au flambement:

II.2.2.1 Principe du flambement par divergence :

L'étude classique du phénomène d'instabilité d'une barre comprimée considère une barre idéale, exécutée en un matériau homogène, ayant un axe parfaitement rectiligne et une application centrée de la charge : il s'agit des hypothèses à la base de la théorie linéaire du flambement élastique traité à la section (§ II.2.1.2). En réalité, l'axe d'une barre industrielle présente une déformée initiale due aux tolérances d'exécution ; elle n'est de ce fait jamais absolument rectiligne et les charges sont appliquées avec une certaine excentricité w_0 par rapport à l'axe x , comme le montre la figure (Fig. II.7). La

section d'une barre industrielle se différencie également de celle d'une barre idéale par la présence de *contraintes résiduelles dues* au laminage et au refroidissement de la section. L'ensemble de ces imperfections conduit à des efforts supplémentaires dans la barre (effets du second ordre) et à chaque valeur de la charge N correspond une déformation w non nulle.

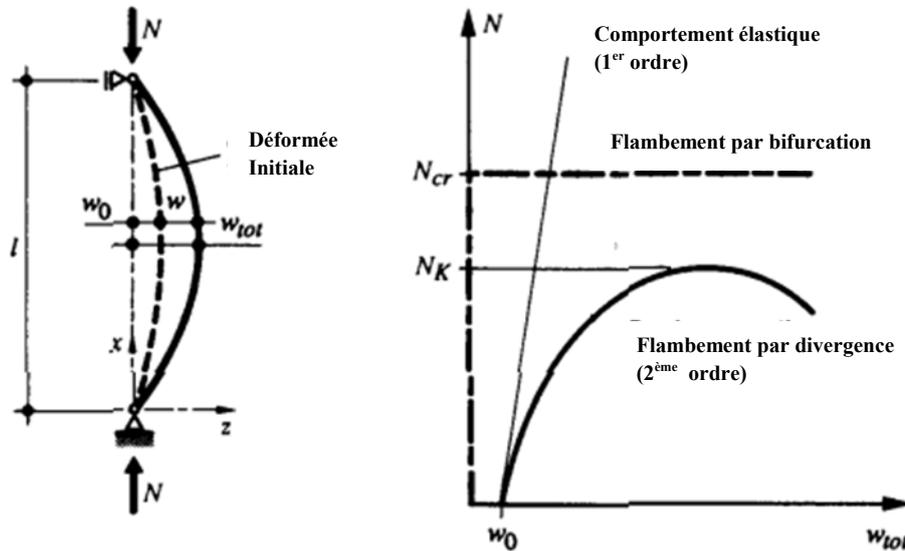


Fig. II.7 : Flambement par divergence de l'équilibre.

Lors de la mise en charge de la barre, la courbe charge-déformation commence déjà avec une déformation w_0 , puis elle va s'éloigner de la droite correspondant au comportement élastique (1^{er} ordre) de la barre (**Fig. II.7**). La déformation w_{tot} devient rapidement excessive, et la résistance ultime au flambement N_K de la barre est alors atteinte lorsque les efforts intérieurs excèdent sa résistance en section. À noter que la résistance ultime au flambement N_K est toujours inférieure à la charge critique de flambement N_{cr} . On parle dans ce cas de *flambement par divergence*, par opposition flambement par bifurcation (§ II.2.1.2).

On peut calculer la valeur de la résistance ultime de flambement N_K à partir des courbes de flambement européenne établies par CECM (Convention Européenne de la Construction Métallique), en tenant compte des différentes imperfections affectant les barres industrielles. Ces imperfections sont de différentes natures comme nous allons voir dans le paragraphe suivant.

II.2.2.2 Les imperfections des barres industrielles :

A. Déformée initiale :

Les barres industrielles (profilés laminés ou composés soudés) comportent des imperfections géométriques. Les imperfections de fabrication font que l'axe des barres n'est pas absolument rectiligne mais qu'il décrit une courbe quelconque dans l'espace. Cette déformée initiale engendre des efforts secondaires qui se traduisent par une réduction de la résistance ultime au flambement. Considérons une barre bi-articulée comprimée comporte une déformée initiale $w_0(x)$ (**Fig. II.8**). Admettons que l'équation de sa déformée initiale soit sinusoïdale :

$$w_0(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{II.12})$$

w_0 : déformation initiale de la barre à mi-portée ($x=l/2$)

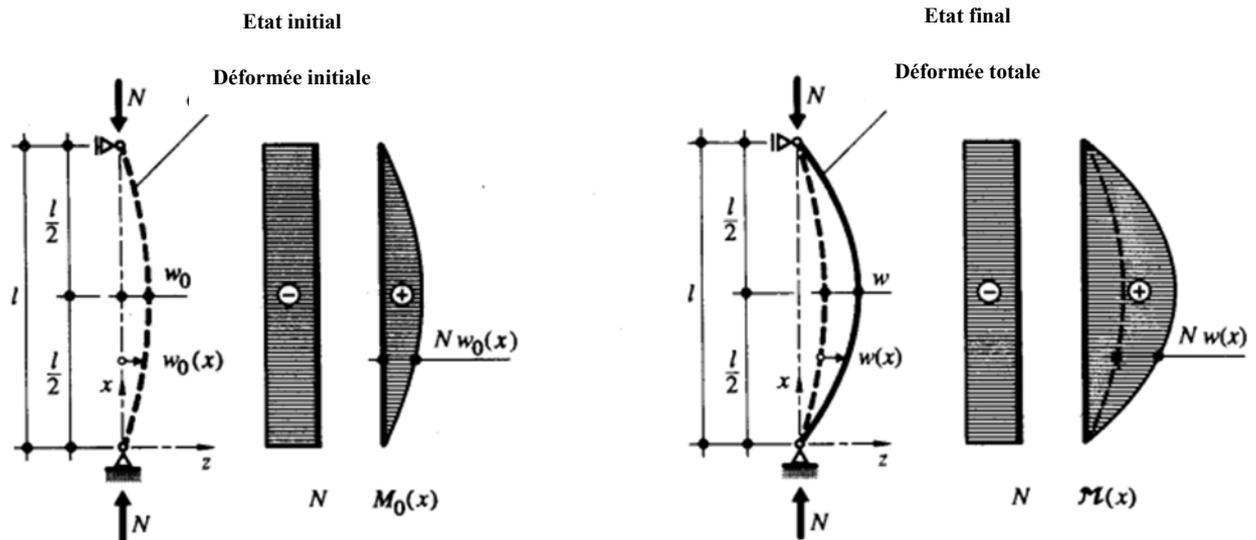


Fig. II.8 : Effet de second ordre.

A cause de la déformée initiale $w_0(x)$, la barre est soumise non seulement à un effet normale de compression, mais aussi à un moment de flexion $M_0(x)$ qui vaut $Nw_0(x)$. Ce moment provoque une déformation supplémentaire $w_1(x)$, qui crée à son tour un moment de flexion supplémentaire $M_1(x)$ égale à $Nw_1(x)$. Ce dernier provoque alors une déformation $w_2(x)$, qui crée à son tour un moment $M_2(x)$, et ainsi de suite. On parle alors d'effet du second ordre (deuxième ordre). La déformée totale due à l'effet de second ordre, qui correspond en fait à la somme des déformations $w_i(x)$, est désignée par $w(x)$, tandis que le moment dû à $w(x)$, sera noté $M(x)$.

En écrivant selon (II.1) l'équation différentielle de la barre :

$$EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N[w_0(x) + w(x)] = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N \left[w_0 \sin \frac{\pi x}{l} + w(x) \right] = 0 \tag{II.13}$$

Et on intégrant celle-ci en tenant compte les conditions aux limites (à savoir $w(x)=0$ pour $x=0$ et l), on peut calculer l'expression de la déformée additionnelle $w(x)$ due à l'effet de second ordre :

$$w(x) = \frac{w_0}{\frac{\pi^2}{\left(\frac{NI^2}{EI}\right)} - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{II.14}$$

Sachant que $(N_{cr} = \pi^2 EI/l^2)$ (charge critique de flambement élastique (II.4)), la déformation additionnelle au milieu de la barre ($x=l/2$) vaut :

$$w(x = \frac{l}{2}) = w = \frac{w_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} \tag{II.15}$$

Et la déformation totale :

$$w_{tot} = w_0 + w = w_0 \frac{1}{1 - \frac{N_{cr}}{N}} \tag{II.16}$$

La relation (II.16) permet de constater que la déformation totale w_{tot} correspond à la déformation initiale w_0 majorée par un facteur d'amplification, qui dépend du rapport entre la charge appliquée N et la charge critique de flambement élastique N_{cr} de la barre.

La figure (Fig. II.9) illustre l'influence de la déformée initiale sur la résistance ultime au flambement pour deux valeurs d'élançement. Les diagrammes charge-déformation représentés sont déduits d'essais effectués sur des barres comprimées bi-articulées de section rectangulaire, auxquelles on a imposé une courbure initiale dans le plan de flexion.

On constate que pour un élançement faible ($\lambda_K=40$), le comportement des barres est quasi linéaire jusqu'à la ruine. Pour de grands élançements ($\lambda_K=120$), les flèches sont beaucoup plus grandes et les courbes ne sont plus linéaires. On remarque également que la diminution de la résistance ultime peut être très importante suivant la valeur de la flèche initiale.

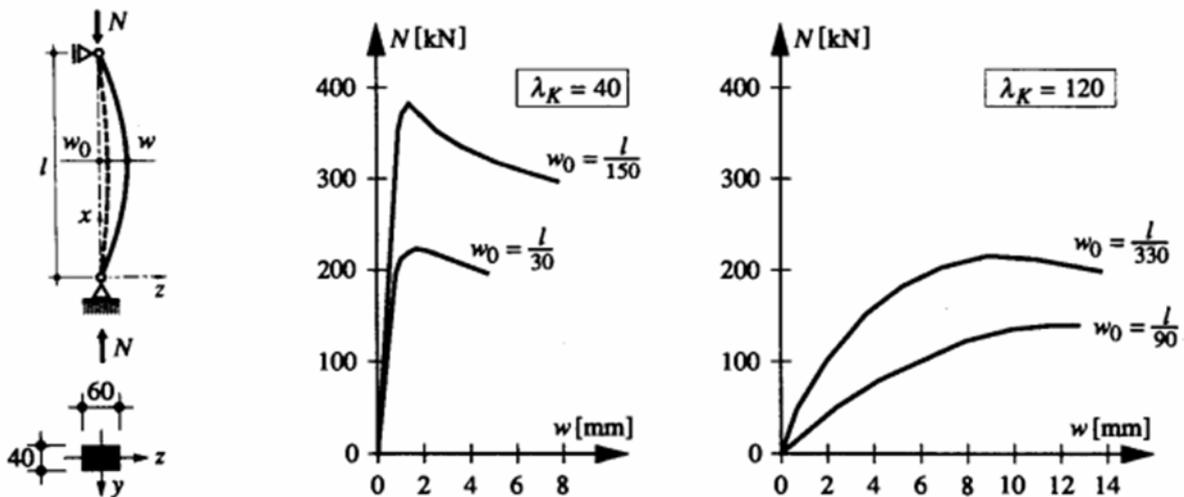


Fig. II.9: Influence de la déformée sur la résistance ultime au flambement.

B. Contraintes résiduelles:

Les contraintes résiduelles, qui forment un état de contraintes auto-équilibré sur une section droite, peuvent être d'origine thermique (laminage, soudage..) ou mécanique (dressage). Les contraintes résiduelles influencent le comportement d'une barre comprimée, car les zones plastifiées prématurément diminuent la rigidité de la section. En effet, lorsque la déformation spécifique ε d'une fibre dépasse l'allongement limite élastique ε_y , le module d'élasticité longitudinal E de cette fibre est nul. Ce phénomène est illustré à la figure (Fig. II.10) qui montre que la rigidité de la section est constante jusqu'à un effort normale N égal à la charge N_{el} , correspondant à la charge maximale que peut supporter la section sans qu'aucune fibre ne soit plastifiée. Dès que la charge dépasse N_{el} , la rigidité de la section baisse alors relativement rapidement, pour finalement être nulle lorsque toutes les fibres de la section sont plastifiées ($N = N_{pl}$)

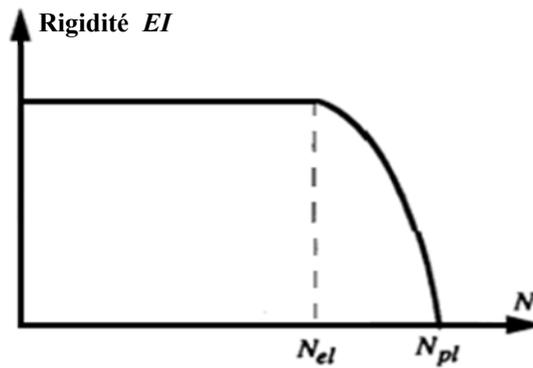


Fig. II.10: Influence des contraintes résiduelles sur la rigidité d'une section.

II.2.2.3 Les courbes de flambement européennes:

La conclusion la plus importante des travaux de CECM est que l'on ne peut pas vérifier toutes les pièces comprimées à partir d'une seule unique courbe de flambement. Il est nécessaire de considérer chaque cas séparément, en tenant compte des caractéristiques relatives à la forme de la section, à son mode d'élaboration et à sa géométrie. Les imperfections influençant la résistance ultime de barres comprimées ont pu être classées, selon leur ordre d'importance, de la manière suivante :

- La déformée initiale ;
- Les contraintes résiduelles ;
- La variation de la limite d'élasticité ;
- La dispersion de la valeur du module d'élasticité E ;
- La forme réelle de la section d'une barre (tolérance de laminage) ;
- L'excentricité des charges axiales.

Les courbes de flambement adoptées pour le dimensionnement découlent des travaux d'une commission de la CECM chargée de l'étude du flambement des barres simplement comprimées. Ces travaux comprennent d'une part des essais (plus de mille), effectués sur des profilés du commerce et sur des sections composées à âme pleine, et d'autre part une simulation sur ordinateur du comportement de telles barres.

Les résultats des études de la CECM ont montré qu'il était possible de considérer trois courbes de flambement fondamentales pour l'ensemble des barres comprimées utilisées couramment dans la pratique. La figure (**Fig. II.11-a**) montre l'allure générale de ces courbes, pour lesquelles la contrainte de flambement σ_K est donnée en fonction de l'élancement λ_K . Une telle représentation a cependant le désavantage d'être dépendante du type d'acier. Pour éviter cela, les deux notions suivantes ont été introduites :

- *Le coefficient de flambement k*: qui correspond au rapport entre la contrainte de flambement σ_K et la limite d'élasticité :

$$k = \frac{\sigma_K}{f_y} \quad (\text{II.17})$$

- Le coefficient d'encastement $\bar{\lambda}_k$: défini par l'expression suivante :

$$\bar{\lambda}_k = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \tag{II.18}$$

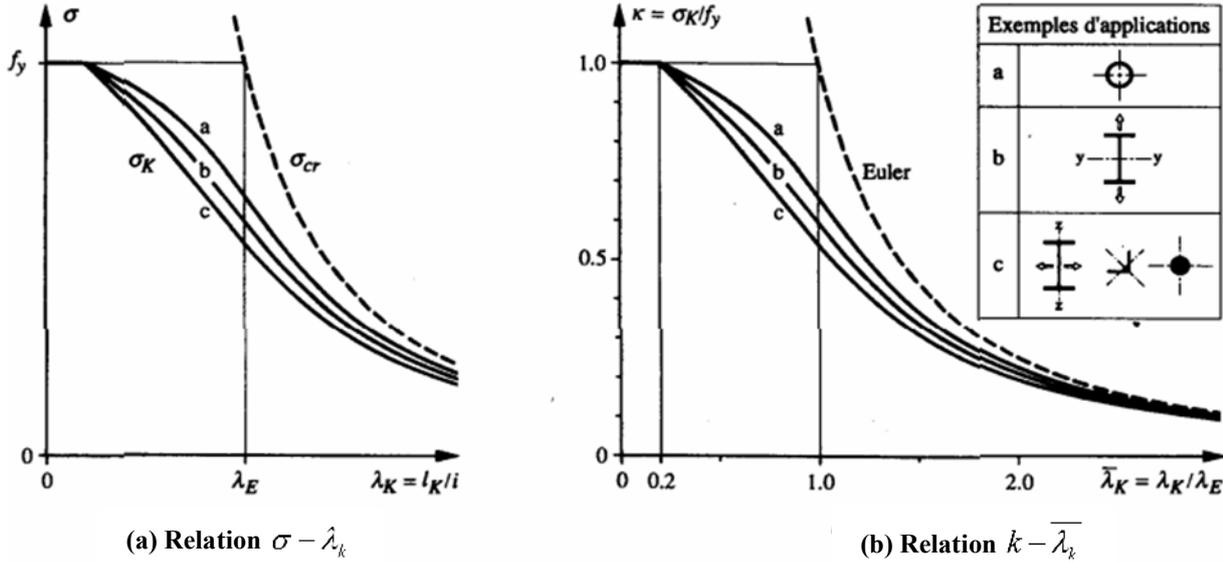


Fig. II.11: Courbes de flambement.

Le domaine d'application de ces courbes est en général le suivant :

- Courbe (a) : applicable aux sections dont les fibres extrêmes sont sollicités dans la direction de flambement considérée, sont sollicités par des contraintes résiduelles de traction ou des sections libres de contraintes résiduelles (profilés tubulaires);
- Courbe (b) : applicable aux profilés en double Té flambant selon l'axe fort, ainsi qu'à tous les cas ne faisant pas partie des courbes a et c.
- Courbe (c) : applicable aux sections dont les fibres extrêmes, dans la direction de flambement considéré, sont soumises à des contraintes résiduelles de compression (profilé en double Té flambant selon l'axe faible, les cornières ou les fers ronds et carrés).

Une représentation analytique des trois courbes de flambement est donnée dans les normes de construction métallique (par exemple SIA161 et Eurocode 3). L'Eurocode 3 (§ 5.5.1) définit une quatrième courbe de flambement qui (Courbe d), qui s'applique aux profilés en double Té et aux sections composées d'âme pleine dont l'épaisseur des ailes dépasse respectivement 100 mm et 40 mm.

La contrainte de flambement (σ_K) pouvant être définie à partir de (II.17) comme étant égale au produit de la limite d'élasticité (f_y) avec le coefficient de flambement k :

$$\sigma_K = k f_y \tag{II.19}$$

La résistance ultime au flambement N_K d'une barre peut finalement être établie de la façon suivante :

$$N_K = \sigma_K A = k f_y A = k N_{pl} \tag{II.20}$$

II.3 Etude de déversement :

II.3.1 Principe du déversement

Les poutres fléchies sont en général constituées de profilés en I. Comme leur inertie par rapport à l'axe faible z est de beaucoup inférieure à celle relative à l'axe y , cela peut être la cause d'un phénomène d'instabilité appelé déversement. Pour illustrer ce phénomène, prenons le cas de la poutre en porte-à-faux sollicitée à son extrémité par une charge concentrée verticale (**Fig. II.12**). Si pour une faible charge, elle ne se déforme que perpendiculairement à son axe de forte inertie (verticalement, dans ce cas), la partie comprimée du profilé va se dérober latéralement pour échapper à la compression si l'on augmente la charge: la poutre déverse, ce qui fait subir à chaque section – en plus de la déformation verticale – un mouvement de translation horizontale accompagné d'une rotation autour de son centre de cisaillement.



Fig. II.12: Phénomène du déversement.

II.3.2 Théorie linéaire de déversement élastique:

II.3.2.1 Principe de déversement :

D'une façon générale, on peut dire que la résistance ultime d'une poutre fléchie qui déverse est atteinte pour une charge Q_D inférieure à la charge Q_{pl} correspondant à la plastification totale de la section (**Fig. II.13**). Une fois que le déversement s'est produit, la poutre montre un comportement instable similaire à celui correspondant au flambement par divergence. (**Fig. II.7**)

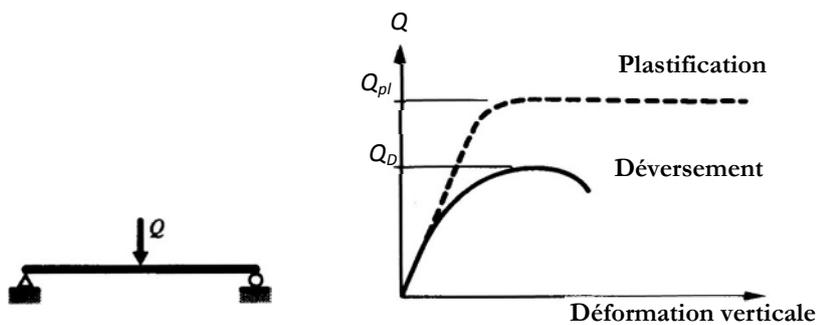


Fig. II.13: Comportement d'un élément fléchi.

On pourrait considérer le déversement comme un flambement latéral de la membrure comprimée de la poutre dans le plan horizontal. Cette conception, justifiée au paragraphe (§ II.3.3.3), est cependant simpliste et conservatrice. En effet, supposons que la moitié comprimée de la poutre montrée à la figure (**Fig. II.14**) flambe latéralement et qu'elle subisse de ce fait un déplacement latéral v , on voit que cette partie ne peut flamber seule. La continuité avec la moitié tendue du profilé exige que les deux parties de la section subissent une rotation d'un même angle φ .

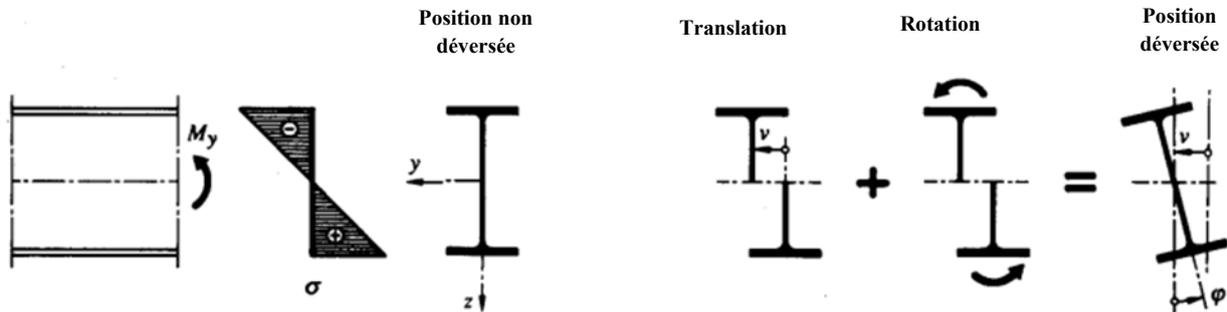


Fig. II.14: Translation et rotation d'une section d'un élément de poutre sujet au déversement.

Ce raisonnement simple montre que l'on doit tenir compte, dans l'étude du déversement, non seulement de la rigidité de flexion latérale, mais aussi de la rigidité torsionnelle de la section.

II.3.2.2 Déversement d'une poutre simple en flexion pure :

Considérons le cas fondamental utilisé pour l'étude du déversement, à savoir la poutre simple de la figure (**Fig. II.15**) sollicitée en flexion pure. En partant de l'état déformé de la barre, on peut calculer la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre métastable. Ce cas fondamental de la poutre simple a été résolu par Timoshenko (1966) [96] en considérant les hypothèses suivantes:

- barre parfaitement rectiligne de section bi-symétrique constante sur toute sa longueur,
- barre idéale sans imperfections (déformation initiale, contraintes résiduelles, etc.),
- section de la barre indéformable,
- appuis de type «appuis à fourche»,
- matériau infiniment élastique linéaire,
- inertie I_z de la section faible vis-à-vis de l'inertie I_y ,
- petites déformations ($\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$).

Il faut préciser ici qu'un appui à fourche correspond à un appui simple à la flexion où la rotation φ de la section autour de l'axe x ainsi que le déplacement latéral v sont empêchés.

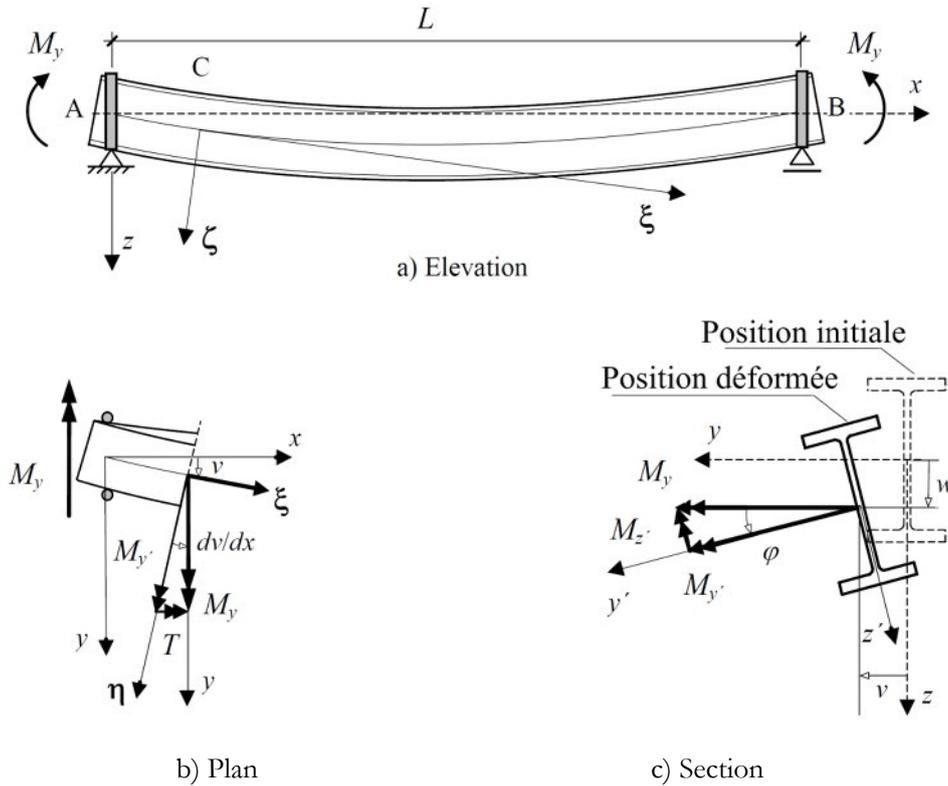


Fig. II.15: Déversement d'une poutre constituée d'une section en I bi-symétrique, sollicitée en flexion pure.

On peut dès lors établir les équations différentielles relatives à cette poutre en écrivant les conditions d'équilibre par rapport au système de coordonnées (ξ, η, ζ) à l'état déformé, ce qui représente un système de trois équations à trois inconnues (v, w et φ) :

- Flexion selon l'axe η , en tenant compte du fait que $M\eta = My \cos\varphi \approx My$:

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + M_y = 0 \tag{II.21}$$

- Flexion selon l'axe ζ , en tenant compte du fait que $M\zeta = My \sin\varphi \approx My$:

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \varphi(x) M_y = 0 \tag{II.22}$$

- Torsion autour de l'axe ξ , en tenant compte du fait que $T = My \sin \frac{dv}{dx} \approx My \frac{dv}{dx}$

$$EI_\omega \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} - GK \frac{d\varphi(x)}{dx} + M_y \frac{dv(x)}{dx} = 0 \tag{II.23}$$

La relation (II.21) est indépendante des deux suivantes: c'est l'équation d'une barre sollicitée en flexion pure. En dérivant une fois (II.23) et en remplaçant $d^2 v(x)/dx^2$ par sa valeur tirée de (II.22), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - GK \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \frac{M_y^2}{EI_z} \varphi(x) = 0 \tag{II.24}$$

Sa solution est du type : $\varphi(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) + C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x)$.

Pour déterminer les quatre constantes d'intégration, on dispose de quatre conditions aux limites, à savoir : $\varphi = \varphi'' = 0$ pour $x = 0$ et l_D . Le *moment critique de déversement élastique* M_{crD} , pour lequel le système est en équilibre métastable, se formule finalement de la façon suivante, on remarquera que cette relation est indépendante de la limite d'élasticité f_y de l'acier, (Hirt et al. [49] et ECCS [39]) :

$$M_{crD} = \frac{\pi}{l_D} \sqrt{GK EI_z \left(1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{l_D^2 GK} \right)} \quad (\text{II.25})$$

- l_D : Longueur de déversement (distance entre deux appuis latéraux empêchant le déversement) ;
- G : Module de cisaillement ;
- K : Constante de torsion uniforme ;
- GK : Rigidité de torsion ;
- E : Module d'élasticité ;
- I_z : Moment d'inertie par rapport à l'axe z ;
- EI_z : Rigidité de flexion latérale ;
- I_ω : Moment d'inertie sectoriel de la section ;
- EI_ω : Rigidité de torsion non uniforme.

Précisons encore que les équations différentielles (II.21) à (II.23) sont valables à condition qu'aucune des déformations v , w ou φ ne soit entravée entre appuis. Si cela était le cas (aile supérieure de la poutre tenue latéralement, par exemple), elles s'exprimeraient différemment et le moment critique de déversement élastique ne pourrait pas être établi avec (II.25).

II.3.2.3 Moment critique de déversement élastique (Méthode approximative)

Le cas particulier de la poutre simple en flexion pure ne se rencontre pratiquement jamais dans une structure. De plus, les appuis d'une poutre sont souvent des encastres élastiques à la flexion et à la torsion, les charges extérieures ne se réduisent pas à un simple moment de flexion et la section de la barre peut être dissymétrique (Fig. II.16).

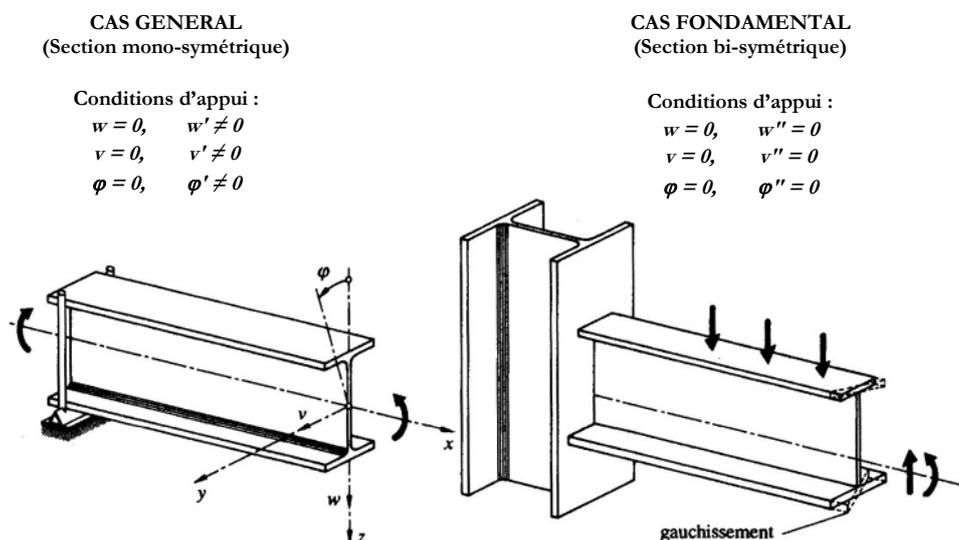


Fig. II.16. Conditions d'appui, charges et types de sections transversales.

Plusieurs chercheurs ont étudié le déversement afin de trouver une méthode de calcul plus générale, applicable à de nombreux cas pratiques. Citons parmi eux Clark et Hill [36] ainsi que Djalaly [38] qui ont proposé sur une base empirique la formule généralisée (II.6), qui tient compte de manière plus détaillée du type de chargement de la barre et de ses conditions d'appui. Les hypothèses de calcul sont identiques à celles énoncées dans la théorie de Timoshenko [96] au paragraphe (§ II.3.2.2), à la différence près que la section peut être mono-symétrique, qu'elle peut être chargée entre les appuis et que les conditions d'appui sont plus générales:

$$M_{crD} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{k_v k_\phi l_D^2} \left[\sqrt{(C_2 z_a + C_3 \beta)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(\frac{GK k_\phi^2 l_D^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right)} + (C_2 z_a + C_3 \beta) \right] \quad (\text{II.26})$$

D'où :

- C_1, C_2, C_3 : facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appuis
- k_v, k_ϕ : coefficients d'encastrement aux appuis
- z_a : distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge (positive si ce dernier est situé entre le centre de cisaillement et la semelle tendue)

avec la caractéristique sectorielle de la section β ($\beta = 0$ pour une section bi-symétrique) définie par :

$$\beta = z_C + \frac{1}{2I_y} \int_A z (y^2 + z^2) dA \quad (\text{II.27})$$

- z_C : distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C (positive si le centre de cisaillement se trouve entre le centre de gravité et la semelle comprimée)

II.3.2.4 Influence des conditions d'appui

La valeur du moment critique de déversement élastique donnée par (II.26) dépend des conditions d'appui de la poutre en flexion latérale (déplacement latéral v du centre de cisaillement) et en rotation (angle φ), de même que de la possibilité de *gauchissement*. Les conditions d'appui en flexion latérale influencent directement le coefficient d'encastrement k_v , tandis que les conditions d'appui en rotation influencent le coefficient d'encastrement k_ϕ . Pour une poutre simple, on a pour les deux cas extrêmes suivants:

- Cas général de la poutre sur deux appuis à fourche (Fig. II.15) :

$$v = v'' = 0 \text{ d'où } k_v = 1.0$$

$$\varphi = \varphi'' = 0 \text{ d'où } k_\phi = 1.0$$

- Cas particulier de la poutre parfaitement bi-encastree, avec gauchissement empêché:

$$v = v'' = 0 \text{ d'où } k_v = 0.5$$

$$\varphi = \varphi'' = 0 \text{ d'où } k_\phi = 0.5$$

Le tableau (**Tableau II.1**) donne pour quelques cas concrets d'appuis les conditions aux limites et les coefficients d'encastrement correspondants. Théoriquement, pour chaque poutre présentant des conditions d'appuis différentes, il faudrait intégrer le système d'équations différentielles en tenant compte de ces conditions aux limites. Pratiquement, on peut toutefois admettre pour le dimensionnement les valeurs suivantes des coefficients d'encastrement:

- $k_v = 1.0$ pour tous les cas où les appuis de la poutre n'empêchent pas sa flexion latérale (par exemple les appuis constitués d'une colonne dont on néglige la résistance à la torsion) ;
- $k_v = 0.5$ pour tous les cas où les appuis de la poutre empêchent sa flexion latérale (par exemple les appuis constitués d'un élément rigide à la torsion) ;
- $k_\varphi = 1.0$ dans tous les cas, pour autant que les appuis de la poutre empêchent une rotation des sections d'extrémité.

Tableau II.1. Conditions aux limites et valeurs approchées des coefficients d'encastrement d'une poutre dont les deux appuis sont identiques.

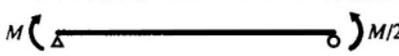
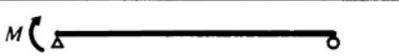
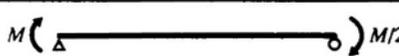
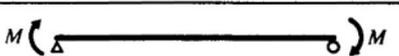
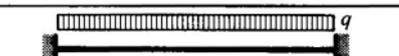
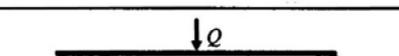
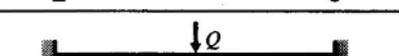
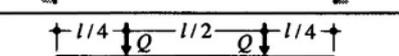
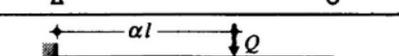
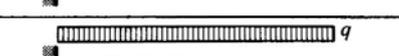
Schémas des appuis	Conditions aux limites	k_v et k_φ	Remarques
	$w = w_0$ $w'' = 0$ $v = 0$ $v'' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$	$k_v = 1.0$ $k_\varphi = 1.0$	Raidisseurs ou appuis latéraux au niveau de la membrure comprimée nécessaires afin d'empêcher la rotation de la poutre aux appuis (w_0 : déplacement vertical de l'appui).
	$w = 0$ $w'' = 0$ $v = 0$ $v'' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$	$k_v = 1.0$ $k_\varphi = 1.0$	Liaison articulée dans laquelle les cornières doivent être suffisantes pour empêcher la rotation de la poutre aux appuis.
	$w = 0$ $w'' = 0$ $v = 0$ $v'' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$	$k_v = 1.0$ $k_\varphi = 1.0$	Liaison semi-rigide avec gauchissement partiellement empêché par la plaque de tête. On néglige la résistance à la torsion de la colonne.
	$w = 0$ $w' = \Phi_0$ $v = 0$ $v'' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$	$k_v = 1.0$ $k_\varphi = 1.0$	Liaison semi-rigide avec flexion partiellement empêchée ($k_\varphi < 1.0$). On néglige la résistance à la torsion de la colonne (Φ_0 : inclinaison de la colonne).
	$w = 0$ $w' = \Phi_0$ $v = 0$ $v'' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi' = 0$	$k_v = 1.0$ $k_\varphi = 0.5$	Encastrement parfait de la poutre à la torsion, gauchissement empêché par les raidisseurs. On néglige la résistance à la torsion de la colonne (Φ_0 : inclinaison de la colonne).
	$w = 0$ $w' = 0$ $v = 0$ $v' = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi' = 0$	$k_v = 0.5$ $k_\varphi = 0.5$	Encastrement parfait de la poutre à la flexion et à la torsion, gauchissement empêché par l'appui que l'on considère comme étant rigide à la torsion.

II.3.2.5 Influence du type de chargement :

Le moment critique de déversement élastique M_{crD} est fonction du type de chargement de la poutre et de son système statique (conditions d'appui); pratiquement, on en tient compte par les facteurs C_1 , C_2 et C_3 dans (II.26). Le cas le plus défavorable est celui de la poutre simple sollicitée par un moment de flexion constant. Dans le cas d'un moment linéairement variable ou de charges appliquées entre les appuis, la compression maximale n'est atteinte sur toute la longueur de la poutre que dans une seule section, ce qui se traduit par des facteurs C_1 , C_2 et C_3 plus élevés afin de tenir compte de cet effet favorable.

Le tableau (Tableau II.2) donne les valeurs (tirées de [38]) de ces trois facteurs pour les cas de charges les plus courants et pour les conditions d'appui suivantes: $k_v = 1.0$ (cas usuel), 0.5 et 2.0 (pour la poutre en porte-à-faux) et $k_\phi = 1.0$ (valeur admise normalement). Pour des systèmes statiques dont les conditions d'appui sont telles que $0.5 < k_v < 1.0$, on peut soit obtenir les facteurs C_1 , C_2 et C_3 par interpolation, soit choisir $k_v = 1.0$ (méthode conservatrice), les facteurs peuvent être trouvés dans (Boissonnade et al. [22]).

Tableau II.2. Valeurs des facteurs C_1 , C_2 et C_3 pour $k_\phi = 1.0$

Mode de chargement	$k_v = 1.0$			$k_v = 0.5$			$k_v = 2.0$		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
	1.00	ⓐ	1.00	1.00	ⓐ	1.14			
	1.32	ⓐ	0.99	1.51	ⓐ	2.27			
	1.88	ⓐ	0.94	2.15	ⓐ	2.15			
	2.70	ⓐ	0.68	3.09	ⓐ	1.55			
	2.75	ⓐ	0.00	3.15	ⓐ	0.00			
	1.13	0.46	0.53	0.97	0.30	0.98			
	1.28	1.56	0.75	0.71	0.65	1.07			
	1.36	0.55	1.73	1.07	0.43	3.06			
	1.56	1.27	2.64	0.94	0.71	4.80			
	1.05	0.43	1.12	1.01	0.41	1.89			
							$\frac{1.28}{\alpha}$	0.43	ⓑ
							2.05	0.83	ⓑ

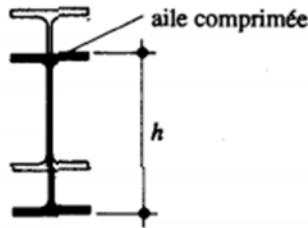
ⓐ Sans influence s'il n'y a pas de charge transversale

ⓑ Sans influence pour une section bi-symétrique

II.3.2.6 Influence du point d'application de la charge

La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de cisaillement de la section de la poutre, peut également influencer la valeur du moment critique de déversement élastique, suivant que les charges créent un moment secondaire stabilisant ou déstabilisant (Fig. II.17). On tient compte de la position des charges en introduisant (avec son signe) dans (II.26) la distance z_a entre le centre de cisaillement et le point d'application de la charge.

POSITION NON DEVERSEE



POSITIONS DEVERSEES

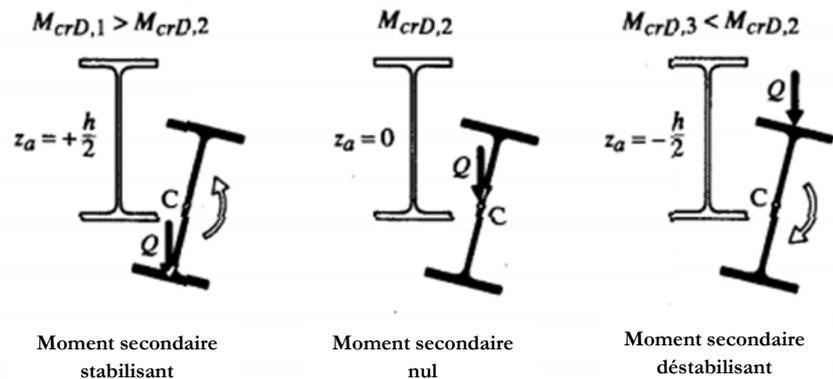


Fig. II.17. Influence de la position des charges.

Selon la position du point d'application des charges extérieures, on peut considérer les trois cas suivants:

- La charge engendre un moment secondaire stabilisant (charge suspendue, par exemple) : l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est conservatrice ;
- La charge agit au centre de cisaillement (attache d'une solive sur l'âme d'un sommier, par exemple) : l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est exacte ;
- La charge engendre un moment secondaire déstabilisant, comme par exemple pour les voies de roulement de ponts roulants ou les poutres maîtresses de ponts mixtes avec dalle ripée (stade de montage) : il est alors nécessaire d'en tenir compte lors de la détermination du moment critique de déversement élastique avec (II.26).

II.3.2.7 Influence des appuis intermédiaires

Pour augmenter la valeur de la charge critique de déversement, on peut soit choisir une section plus importante, soit disposer des appuis latéraux intermédiaires (solution en général plus économique). On cherche à empêcher, au droit de chaque appui, tout déplacement latéral du centre de cisaillement ($v = 0$) et toute rotation de la section ($\varphi = 0$).

En général, on se contente d'appuyer la membrure comprimée de la poutre, ce qui est souvent la solution la plus simple du point de vue constructif. Même si une légère rotation des sections est tout de même possible, on peut généralement la négliger et admettre $\varphi = 0$. Les appuis latéraux doivent être dimensionnés pour reprendre une force de déviation de l'ordre de 1 % de l'effort normal de compression $N = M/b$, où M est le moment de flexion au droit de l'appui.

On voit dans les formules (II.25) et (II.26), que le moment critique M_{cr} peut être déterminé de différentes manières. Une seule solution exacte et simple est disponible pour être utilisée avec des conditions d'appuis parfaites (II.25). Cela conduit à l'utilisation de méthodes d'approximation pour calculer M_{cr} pour tous les autres cas. Chacune des méthodes d'approximation sont connues pour donner de bons résultats [82].

II.3.3 Résistance ultime au déversement (Étude Normative) :

II.3.3.1 Principe linéaire du moment de déversement :

La théorie linéaire permettant de calculer le moment critique de déversement élastique, est basée sur le modèle d'instabilité par bifurcation de l'équilibre. En réalité, le moment de flexion maximale que peut reprendre une section est égal au moment plastique M_{pl} . Or, le moment critique de déversement élastique M_{crD} obtenu avec (II.25) dépasse cette valeur critique pour des faibles élancements. De même que pour le flambement, le modèle d'un comportement élastique n'est plus valable dans le domaine de petits élancements ; cela est dû à la mauvaise corrélation du modèle théorique avec le comportement réel de l'élément. Les hypothèses énoncées au paragraphe (§ II.2.2.2) ne tiennent pas compte, entre autres, de la limite d'élasticité de l'acier et des imperfections des éléments (imperfections géométriques, contraintes résiduelles, etc.). Il est donc nécessaire de définir, de façon analogue au flambement, la résistance ultime au déversement M_D .

II.3.3.2 Le moment critique de déversement selon L'Eurocode 3:

L'Eurocode 3 [40] dispose de plusieurs méthodes afin de tenir compte du cas de déversement:

- un cas général,
- un cas ajusté aux profilés laminés ou sections soudées équivalentes,
- une méthode simplifiée,
- une méthode générale pouvant être utilisée aussi bien pour le déversement que d'autres cas d'instabilités.

L'organisation « Access Steel », d'après un accord avec les principaux instituts techniques en construction métallique en Europe, a publié un document « Non-Conflicting, Complementary Information » (NCCI) afin de déterminer M_{cr} [30], basé sur l'équation (II.26) :

$$M_{cr,EC} = \frac{C_1 \pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{EI_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right] \quad (\text{II.28})$$

D'après cette formule qui a été adoptée par l'Eurocode 3 [40], il est possible de constater que l'EC3 est ouvert à une grande variété de situations par rapport aux autres règlements en vigueur tel que l'AISC (l'Institut Américain de la Construction Métallique). Cependant, l'EC3 est complexe mais essaie de couvrir le plus large éventail de cas possibles, et dispose de bien des manières pour s'ajuster au cas étudié (plusieurs méthodes pour approcher un problème).

II.3.3.3 Calcul simplifié du moment critique de déversement élastique (la norme SIA 161):

Il est possible de recourir à une méthode de calcul simplifiée pour déterminer le moment de déversement (la simplification consiste à ne pas utiliser les coefficients k_v , k_φ , C_1 , C_2 et C_3), à condition que les hypothèses suivantes soient remplies :

- Le système statique est une poutre simple avec appuis à fourche ($v = v'' = 0$ et $\varphi = \varphi'' = 0$) ;
- La section est bi-symétrique et indéformable ;
- Les charges agissent dans le plan de symétrie de la section et leur point d'application au centre de cisaillement ;

Un tel principe de calcul simplifié est d'ailleurs repris dans la norme SIA 161.

Examinons d'abord le moment critique de déversement élastique M_{crD} donné par le cas fondamental de la poutre simple en flexion pure par (II.25), qui peut s'exprimer, en séparant l'influence de la torsion uniforme et non-uniforme, de la façon suivante :

$$M_{cr,EC} = \sqrt{\frac{\pi^2 GK EI_z}{I_D^2} + \frac{\pi^4 EI_\omega EI_z}{I_D^4}} \quad (\text{II.29})$$

Historiquement, on a en général utilisé la contrainte critique de déversement élastique σ_{crD} , qui est liée au moment critique de déversement élastique M_{crD} de la façon suivante :

$$\sigma_{crD} = \frac{M_{crD}}{\bar{W}_y} \quad (\text{II.30})$$

\bar{W}_y : est le moment de résistance par rapport à la fibre moyenne des ailes.

Avec (II.29), la contrainte critique de déversement élastique σ_{crD} peut donc se formuler ainsi :

$$\sigma_{crD} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{I_D \bar{W}_y} \sqrt{GK EI_z} \right]^2 + \left[\frac{\pi^2 E}{I_D^2} \sqrt{\frac{I_\omega I_z}{\bar{W}_y^2}} \right]^2} \quad (\text{II.31})$$

En définissant les termes entre crochets par la composante de torsion uniforme σ_{Dv} et, respectivement, non uniforme σ_{Dw} , la contrainte critique de déversement élastique peut donc s'écrire pour une section bi-symétrique sous la forme d'une somme vectorielle de deux composantes, représentant d'une part la résistance en torsion uniforme (*St-Venant*) de la poutre et d'autre part la résistance en torsion non-uniforme :

$$\sigma_{crD} = \sqrt{\sigma_{Dv}^2 + \sigma_{Dw}^2} \quad (\text{II.32})$$

- σ_{Dv} : la composante de la torsion uniforme ;
- σ_{Dw} : la composante de la torsion non-uniforme ;

En général, une barre sollicitée par un moment de torsion résiste simultanément en torsion uniforme et en torsion non-uniforme ; on dit qu'elle travaille en torsion mixte. Le moment de torsion extérieur est équilibré d'une part par un flux de cisaillement (torsion uniforme), et d'autre part par des contraintes normales associées à des contraintes tangentielles (torsion non-uniforme). La part de ces deux modes de résistance dépend principalement de la géométrie de la section transversale, mais également de la portée et des conditions d'appui.

Lors de calcul de la résistance ultime au déversement d'une poutre, on peut, suivant le cas, négliger l'une des deux résistances à la torsion (**Fig. II.18**). Un profilé tubulaire résiste essentiellement en torsion uniforme, car la composante de torsion non-uniforme σ_{Dw} peut être négligée. Pour une poutre composée d'âme pleine, dont la longueur de déversement est faible, c'est par contre la composante de torsion uniforme σ_{Dv} qui peut être négligée : la section résiste donc essentiellement en torsion non-uniforme. Un profilé laminé résiste quant à lui en torsion mixte, mais la composante de torsion uniforme (*St-Venant*) σ_{Dv} est souvent prépondérante, comme le montre la figure (**Fig. II.18**).

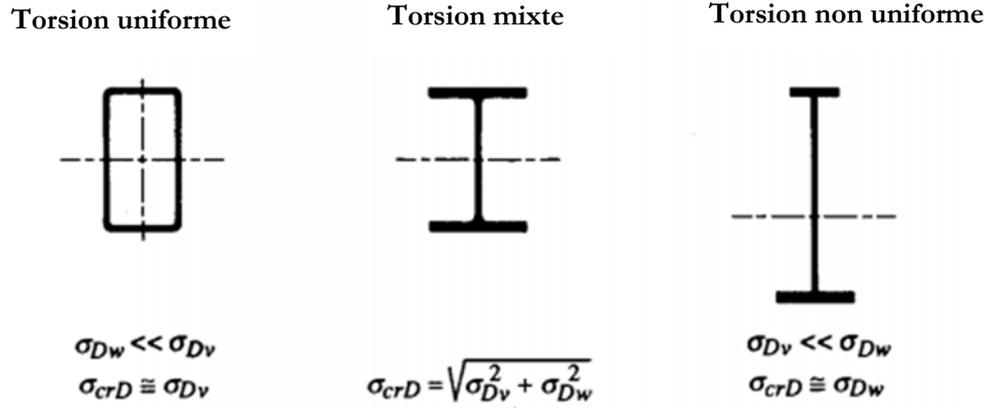


Fig. II.18: Mode de résistance à la torsion de quelques sections.

II.3.3.3.1 Calcul de la composante de la torsion uniforme (σ_{Dv}):

A partir de (II.31) et (II.32), on obtient, en introduisant un coefficient η pour tenir compte du type de chargement, la valeur de la composante de torsion uniforme :

$$\sigma_{Dv} = \eta \frac{\pi}{l_D} \frac{GK}{W_y} \sqrt{EI_z} \quad (\text{II.33})$$

Le coefficient η est analogue au facteur C_l de (II.26). Pour un moment constant le long du tronçon de poutre considérée, on a $\eta = C_l = 1.0$. Pour un tronçon de poutre dont la rotation des sections d'extrémités est empêchée et sur lequel le moment de flexion varie linéairement, la norme SIA 161 définit le coefficient η à l'aide de la relation suivante :

$$\eta = 1.75 - 1.05\psi + 0.3\psi^2 \quad (\text{pour } -0.5 \leq \psi \leq 1.0) \quad (\text{II.34})$$

Avec : $\psi = M_{\min}/M_{\max}$: rapport pour le tronçon examiné, entre le plus petit moment d'extrémité et le plus grand (avec leur signe);

II.3.3.3.2 Calcul de la composante de la torsion non-uniforme (σ_{Dw}):

En considérant le second terme entre crochets de (II.31) on obtient avec (II.32), en introduisant également le coefficient η pour tenir compte de type de chargement, la valeur de la composante de torsion non-uniforme suivante :

$$\sigma_{Dw} = \eta \frac{\pi^2 E}{l_D^2} \sqrt{\frac{I_w I_z}{W_y^2}} \quad (\text{II.35})$$

Si on considère une section en double T, la relation (II.35) devient:

$$\sigma_{Dw} = \eta \frac{\pi^2 E}{l_D^2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} I_z}{\left(A_f + \frac{1}{6} A_w\right)}} \quad (\text{II.36})$$

Avec :

- A_f : est la section d'une aile ;
- A_w : est la section de l'âme ;

On constate alors que le terme entre crochets de (II.36) correspond au carré du rayon de giration i_D de la membrure comprimée de la poutre, composée de la semelle comprimée A_f et du sixième de l'âme ($A_w/6$), qui s'exprime donc ainsi :

$$i_D = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} I_z}{\left(A_f + \frac{1}{6} A_w\right)}} \quad (\text{II.37})$$

Cette définition, valable pour les sections bi-symétriques, permet finalement d'exprimer la composante de torsion non-uniforme de la façon suivante :

$$\sigma_{Dw} = \eta \frac{\pi^2 E}{(l_D/i_D)^2} \quad (\text{II.38})$$

C'est (II.38) qui montre l'analogie entre le déversement d'une poutre et le flambement latéral –dans le plan horizontal- de la membrure comprimée de cette poutre, comme cela a été mentionné au paragraphe (§II.3.2.1). Le rayon de giration i_D fait en effet intervenir les caractéristiques de la membrure comprimée de la poutre. En admettant, selon la norme SIA 161, que sa « longueur de flambement » l_K correspond à la longueur de déversement l_D corrigée par le coefficient η pour tenir compte le type de chargement :

$$l_K = \frac{l_D}{\sqrt{\eta}} \quad (\text{II.39})$$

L'élançement de la membrure comprimée est alors donné par :

$$\lambda_K = \frac{l_K}{i_D} \quad (\text{II.40})$$

La composante de torsion non-uniforme peut alors s'exprimer par la relation suivante (dont la similitude avec (II.5) démontre l'analogie avec le flambement d'une barre):

$$\sigma_{Dw} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_K^2} \quad (\text{II.41})$$

Cette démonstration confirme par conséquent que le déversement peut être assimilé à un flambement latéral de la membrure comprimée d'une poutre, dans tous les cas où la composante de torsion uniforme σ_{Dv} est négligeable.

II.3.3.4 Calcul du moment critique de déversement :

Le moment critique de déversement élastique M_{crD} exprimé par (II.29), est assimilé à l'aide de la théorie de la stabilité élastique. Pour établir le moment de déversement M_D d'une poutre réelle, il faut tout comme pour le flambement, tenir compte de ses imperfections géométriques et structurales, ainsi que de la limite d'élasticité de l'acier. Le moment de déversement M_D , qui ne peut pas être supérieur au moment plastique M_{pl} , s'obtient par la relation suivante :

$$M_D = \frac{M_R}{\sqrt[2.25]{1 + \left(\frac{M_R}{M_{crD}}\right)^{2.25}}} \quad (\text{II.42})$$

- M_R : moment élastique M_{el} ou plastique M_{pl} de la section (selon le type de calcul de la résistance) ;
- M_{crD} : moment critique de déversement élastique (selon II.30).

La norme SIA 161 utilise également (II.41), (II.33) et (II.32) pour définir respectivement les composantes de torsion non-uniforme σ_{Dw} et de torsion uniforme σ_{Dv} , ainsi que la contrainte critique de déversement élastique σ_{crD} . La détermination du moment de déversement se fait par contre en établissant d'abord une contrainte de déversement σ_D :

$$\sigma_D = \left(\frac{1}{1 + \lambda_D^{-4.5}} \right)^{0.45} f_y \quad (\text{II.43})$$

Définie à l'aide du coefficient de déversement $\overline{\lambda}_D$, et dont la formulation est analogue à celle du coefficient de flambement $\overline{\lambda}_k$ défini par (II.18):

- Calcul plastique :

$$\overline{\lambda}_D = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{crD}}} = \sqrt{\frac{f_y Z_y}{\sigma_{crD} \overline{W}_y}} \quad (\text{II.44-a})$$

- Calcul élastique :

$$\overline{\lambda}_D = \sqrt{\frac{M_{el}}{M_{crD}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{crD}}} \quad (\text{II.44-b})$$

L'analogie entre le déversement et le flambement est illustrée à la figure (Fig. II.19), qui compare, en fonction du coefficient de déversement $\overline{\lambda}_D$, la contrainte de déversement σ_D selon (II.43) avec la contrainte de déversement élastique σ_{crD} obtenue avec (II.44-b). Une comparaison avec la figure (Fig. II.11) permet de constater la similitude des démarches permettant d'établir les contraintes de déversement σ_D ou de flambement σ_K sur la base, respectivement, des contraintes critiques de déversement σ_{crD} ou de flambement σ_{cr} élastiques.

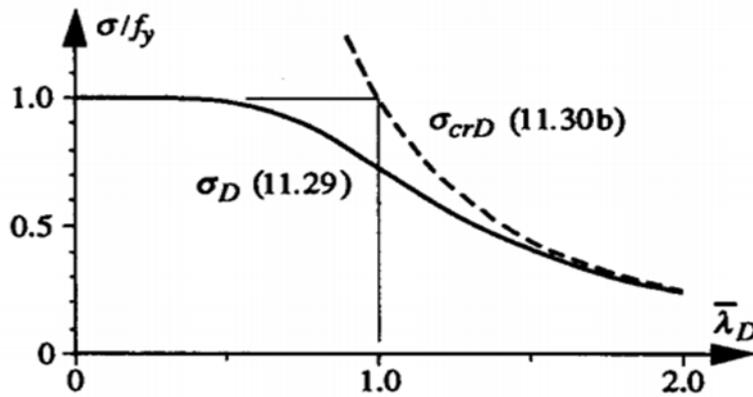


Fig. II.19: Comparaison des contraintes de déversement σ_D et de déversement élastique σ_{crD} .

Le moment de déversement M_D est donné, selon le type de calcul effectué, par les relations suivantes :

- Calcul plastique :

$$M_D = \sigma_D Z_y \quad (\text{II.45 - a})$$

- Calcul élastique :

$$M_D = \sigma_D \bar{W}_y \quad (\text{II.45 - b})$$

L'Eurocode 3 (§ 5.5.2 annexe F) utilise pour le déversement d'un élément fléchi une approche basée sur les mêmes principes que ceux énoncés dans cette section, avec cependant une formulation différente. Ainsi, la résistance de calcul au déversement d'un élément fléchi non maintenu latéralement est définie par :

$$M_{b.Rd} = \frac{\chi_{LT} \beta_W W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M1}} \quad (\text{II.46})$$

- χ_{LT} : Coefficient de réduction pour le déversement ;
- β_W : Facteur dépendant de la classe de la section :

- Classe 1 et 2 : $\beta_W = 1$

- Classe 3 : $\beta_W = W_{el,y} / W_{pl,y}$

- Classe 4 : $\beta_W = W_{eff,y} / W_{pl,y}$

- $W_{pl,y}$: module plastique de la section ;
- $W_{el,y}$: module élastique de la section ;
- $W_{eff,y}$: module élastique de la section efficace ;
- f_y : limite d'élasticité de l'acier ;
- γ_{M1} : facteur de résistance pour les vérifications aux instabilités des barres ($\gamma_{M1} = 1.1$) ;

Le coefficient de réduction pour le déversement χ_{LT} dépend de l'élancement réduit $\bar{\lambda}_{LT}$ et du moment critique élastique de déversement M_{cr} . Ces valeurs sont définies dans l'annexe F en fonction de la répartition des moments et des conditions d'appui.

II.4 Conclusion :

L'étude des phénomènes d'instabilité élastique est particulièrement importante en construction métallique, car ils sont très fréquents du fait de l'utilisation d'éléments minces et de grand élancement. A cet effet, nous avons examiné successivement les deux phénomènes d'instabilité (flambement, déversement) sous leurs aspects théoriques ou analytiques et réglementaires.

Dans cette partie, nous avons présenté une analyse analytique et réglementaire du flambement ainsi que de déversement des poutres à parois minces. Beaucoup de paramètres interviennent dans le calcul des charges critiques (charge axiale normal ou moment critique). Les principaux paramètres intervenant sont la forme de la section transversale (le moment d'inertie par rapport à l'axe faible et les caractéristiques géométriques de torsion. Le point d'application de la charge par rapport au centre de torsion joue un rôle très important dans la résistance au déversement. Les conditions aux limites de la poutre vis à vis de la flexion et du gauchissement interviennent aussi.

Nous avons montré ici qu'à partir des concepts théoriques simples de stabilité et de résistance, il est possible de construire avec succès des formules approchées du comportement réel des éléments de construction métallique. Ces formules ont été dérivées sur la base de la théorie Linéaire.

La théorie linéaire permettant de calculer le moment critique de déversement élastique, est basée sur le modèle d'instabilité par bifurcation de l'équilibre. De même, et pour l'étude d'un tel phénomène d'instabilité (le flambement ou le déversement), le modèle d'un comportement élastique n'est plus valable dans le domaine de petits élancements ; cela est dû à la mauvaise corrélation du modèle théorique avec le comportement réel de l'élément.

Les formules réglementaires, qui se basent sur les hypothèses et les modèles théoriques, tiennent en compte, entre autres, d'autres facteurs qui ont été pas pris en considération dans les formules analytiques, à savoir la limite d'élasticité de l'acier et les imperfections des éléments (imperfections géométriques, contraintes résiduelles, etc..). Il est donc nécessaire de définir la résistance ultime d'un élément vis-vis le phénomène d'instabilité étudié.

Chapitre 3 :

L'instabilité non-linéaire des
éléments à parois minces en box

L'instabilité non-linéaire des éléments à parois minces en box.

III.1 Introduction:

Les études et les investigations analytiques précédentes qui traitent les phénomènes d'instabilité, sont amplement larges dans les poutres prismatiques à parois minces de section ouvertes, mais elles sont très limitées, si ce n'est pas inexistantes dans le cas des poutres à section fermées.

A cet effet, l'objectif de cette thèse est de proposer une formule analytique efficace pour analyser l'instabilité non linéaire des éléments (poutres ou colonnes) à parois minces doublement symétriques en box. Pour atteindre cet objectif, des relations de déplacement sont d'abord exprimées en tenant en compte, et en plus des autres déplacements habituels, un autre degré de liberté qui est la distorsion.

L'effet de déformation de distorsion dans le déversement latéral élastique des poutres en box à parois minces sous un chargement combiné flexion-force axiale est considéré dans ce travail. Cependant, un modèle analytique non linéaire est développé pour contenir la stabilité des poutres en box latéralement libre selon une théorie d'ordre élevé et dans le cadre de grands déplacements. Le modèle mécanique et les hypothèses de comportement sont résumés dans le choix d'un champ de déplacement approprié.

La méthode de *Galarkin* est utilisée pour obtenir les équations d'équilibre des poutres simplement appuyées. La condition de nullité de la matrice de rigidité tangente est utilisée pour déterminer l'expression de la solution analytique. En plus, ces solutions qui concernent les moments de déversement latéral pour une poutre en box et en présence d'une charge axiale, peuvent être dérivées en utilisant la méthode de *Ritz* appliqué dans l'équation de la variation de l'énergie de déformation. L'analyse de la stabilité d'un élément en box est étudiée en tenant compte le déplacement initial qui correspond à l'état précritique ou l'état fondamental.

III.2 Modèle théorique pour l'analyse des éléments en box:

III.2.1 Propriétés géométriques de l'élément en box

Un élément d'une poutre rectiligne à parois minces de section fermée en box est représenté dans la figure (**Fig. III.1**) et un système direct de coordonnées rectangulaire est choisi. On désigne par x l'axe longitudinal et par y et z le premier et le deuxième axes principaux de flexion respectivement. L'origine de ces axes coïncide avec le centre de gravité G de la section. Vu la symétrie que présente la section en box suivant z et y , le centre de gravité G coïncide avec celui de cisaillement.

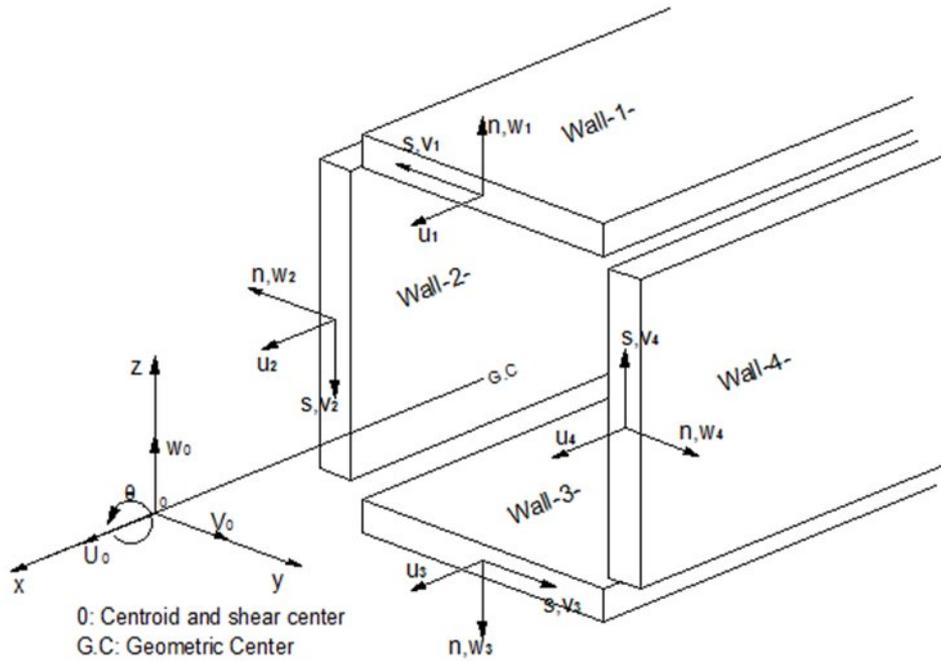


Fig. III.1 : Les axes locaux se trouvent au milieu de chaque paroi.

On note par b et h respectivement la largeur et la hauteur de box, l'épaisseur des parois t est considérée constante et largement petite par rapport aux autres dimensions de l'élément, la longueur de l'élément est L . Un système de coordonnées local (n,s,x) attaché à chaque parois joins le système de coordonnées global (x,y,z) (Fig. III.1).

III.2.2 Cinématique:

Les principales hypothèses adoptées dans notre modèle théoriques sont :

- La poutre avec une section fermée à parois minces montre des déformations de gauchissement et de distorsion importantes;
- Il n'y a pas de déformations de cisaillement dans la surface médiane de la section.
- Les déplacements, l'angle de rotation ainsi que la distorsion peuvent être grands mais les déformations sont petites, ceci permet d'adopter le comportement élastique linéaire;
- La poutre est soumise à des charges uniformes q_x et q_z suivant respectivement les directions x et z ;
- Le contour de la surface médiane des parois qui constituent la section en parois minces de la poutre est considéré rigide.

Suivant ces hypothèses, les composantes des déplacements du contour de la section de la poutre (fig. III.2), sont en fonction de ceux du centre de gravité ou de cisaillement G . les déformations de la poutre en fonction de x sont : le déplacement axial $u_0(x)$ suivant x , le déplacement vertical (flèche) $w(x)$ suivant z , déplacement latéral $v(x)$ suivant y , l'angle de torsion $\theta(x)$. En compagnie de ces déformations illustrées dans les figures (Fig. III.2a à d), il sera convenable d'introduire une nouvelle composante qui décrit la déformation de distorsion noté $\chi(x)$ comme indiqué dans la figure (Fig. III.2e). Il est à noter que les déformations de distorsion n'accompagnent pas le déplacement axial.

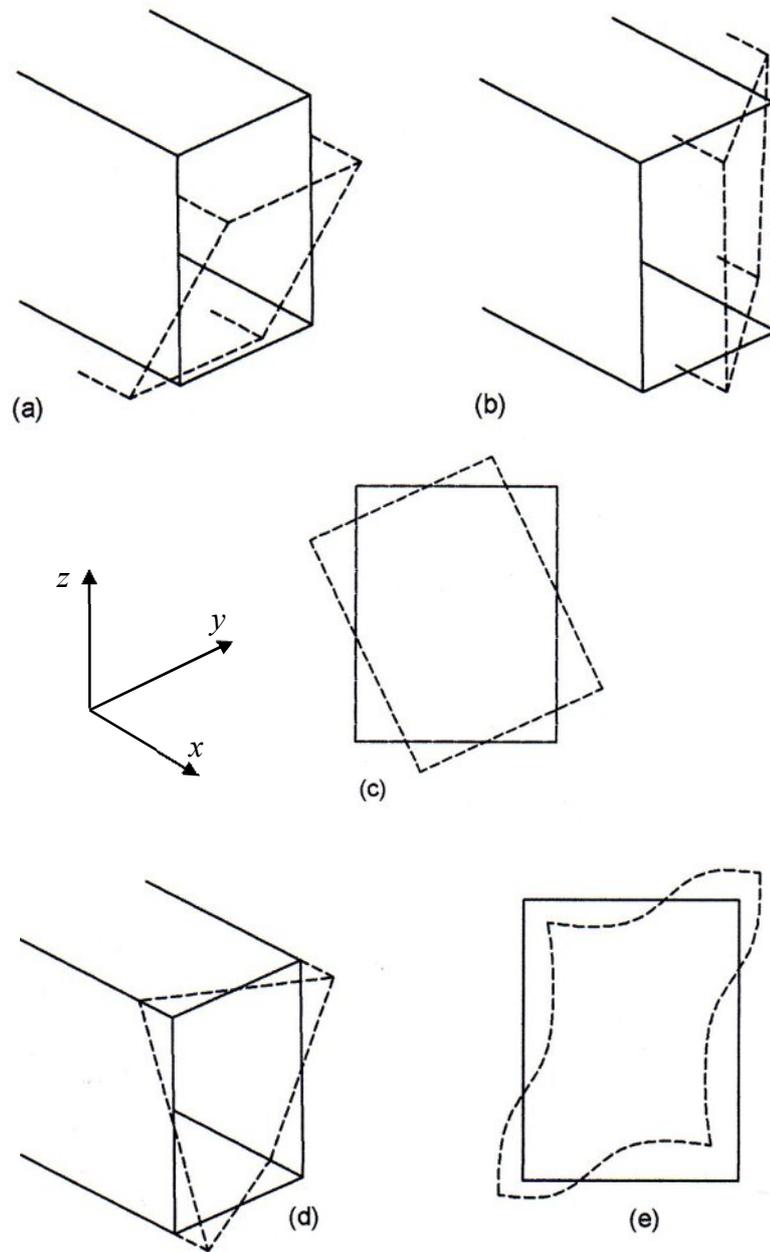


Fig. III.2: Les degrés de liberté et les formes de déformations d'un élément en box :

(a) flexion suivant y , (b) flexion suivant z , (c) torsion, (d) gauchissement, et (e) distorsion

De ce fait, les déplacements des parois de la section peuvent être écrits sous la forme:

$$u^i(s, x, n) = u_0 + Z^i(s) w_0'(x) + Y^i(s) v_0'(x) - \Omega^i(s) \theta'(x) \quad (\text{III.1})$$

$$v^i(s, x, n) = \xi_1^i v_0(x) - \xi_2^i w_0(x) - h^i(s) \theta(x) + \eta^i(s, n) \chi(x) \quad (\text{III.2})$$

$$w^i(s, x, n) = -\xi_1^i w_0(x) - \xi_2^i v_0(x) - s \theta(x) + \overline{\psi}^i(s) \chi(x) \quad (\text{III.3})$$

Dans ces équations: $u^i(x,s,n)$, $v^i(x,s,n)$, $w^i(x,s,n)$ ($i=1..4$) indiquent respectivement les déplacements axiaux, tangentiels et normaux du contour de la section. Dans ces formules, la notation $(\cdot)'$ désigne la dérivation par rapport le variable x .

Les fonctions $Z^i(s)$, $Y^i(s)$, $\Omega^i(s)$, $h^i(s)$, $\eta^i(s,n)$ et $\overline{\psi^i}(s)$ décrivent les déformations de contour de la section de la poutre, qui sont simples à écrire en utilisant la théorie connue des poutres à parois minces de Vlassov. Donc, on peut les définir comme suit :

$$Z^i(s) = (\xi_1 \frac{h}{2} + \xi_2 s) \quad (\text{III.4a})$$

$$Y^i(s) = (\xi_2 \frac{b}{2} + \xi_1 s) \quad (\text{III.4b})$$

$$\Omega^i(s) = (\xi_1^2 \frac{h}{2} - \xi_2^2 \frac{b}{2})s \quad (\text{III.4c})$$

$$h^i(s) = \xi_1^i Z^i(s) + \xi_2^i Y^i(s) \quad (\text{III.4d})$$

$$\eta^i(s,n) = (\xi_1 Z^i(s) + n \frac{\partial \psi^i(s)}{\partial s}) \quad (\text{III.4e})$$

$$\psi^i(s) = -\xi_1^2 \psi_H(s) + \xi_2^2 \psi_V(s) \quad (\text{III.4f})$$

$$\overline{\psi^i}(s) = \xi_1^2 \psi_H(s) + \xi_2^2 \psi_V(s) \quad (\text{III.4g})$$

$$\xi_1 = \frac{(1 + (-1)^{i+1})}{2} (i - 2) \quad (\text{III.4h1})$$

$$\xi_2 = \frac{(1 + (-1)^i)}{2} (3 - i) \quad (\text{III.4h2})$$

À partir des équations plus avant, les déformations de distorsion $\chi(x)$ sont liées aux coefficients $\psi_H(s)$ et $\psi_V(s)$, ces derniers sont aussi en relation directe avec les déformations de la distorsion dans le plan (in-plane distortion) ou l'effet de « Losange » $\chi(x)$ comme indiqué dans le figure (**Fig. III.2e**). Les fonctions $\psi_H(s)$ et $\psi_V(s)$ sont choisies pour satisfaire la condition d'équilibre de moment (in-plane moment) comme a été suggéré par Kim and Kim [19].

Pour la stabilité de la section fermée à parois minces de la poutre, les composants de *tenseur de Green*, incluant les grands déplacements ainsi que les déformations linéaires et non-linéaires sont considérés. Comme il a été affirmé par plusieurs auteurs [18-75], dans le tenseur de déformations, seulement les produits de v^i et w^i ainsi que leurs dérivations seront retenus et les autres termes non-linéaires seront négligés, donc les composants des déformations sont réduits aux suivants:

$$\varepsilon_{xx}^i \approx \frac{\partial u^i(s, x, n)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v^i(s, x, n)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^i(s, x, n)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (\text{III.5a})$$

$$\gamma_{xs}^i \approx \frac{\partial u^i(s, x, n)}{\partial s} + \frac{\partial v^i(s, x, n)}{\partial x} + \frac{\partial v^i(s, x, n)}{\partial x} \frac{\partial v^i(s, x, n)}{\partial s} + \frac{\partial w^i(s, x, n)}{\partial x} \frac{\partial w^i(s, x, n)}{\partial s} \quad (\text{III.5b})$$

L'insertion des relations (III.1.a-b-c) dans les équations (III.5.a-b) conduits à l'expression de déformations axiales suivantes:

$$\varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_l^i + \varepsilon_{nl}^i \quad (\text{III.6a})$$

La partie linéaire est donnée par:

$$\varepsilon_l^i = u_0^i + Z^i(s) w_0^i(x) + Y^i(s) v_0^i(x) - \Omega^i(s) \theta^i(x) \quad (\text{III.6b})$$

Et la partie quadratique non-linéaire est définie comme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nl}^i = & \frac{1}{2} (\xi_1^{i2} (v_0^i(x)^2 + v_0^i(x)^2) + (h^i(s)^2 + s^2) \theta^i(x)^2 + (\eta^i(s)^2 + \overline{\psi^i(s)^2}) \chi^i(x)^2) \\ & - (\xi_1^{i2} Z^i(s) - \xi_2^i s) v^i(x) \theta^i(x) + (\xi_1^i \eta^i(s) - \xi_2^i \overline{\psi^i(s)}) v^i(x) \chi^i(x) + (\xi_1^i s + \xi_2^{i2} Y^i(s)) w^i(x) \theta^i(x) \\ & - (\xi_1^i \psi_H + \xi_2^i \eta^i(s)) w^i(x) \chi^i(x) - (h^i(s) \eta^i(s) + s \overline{\psi^i(s)}) \theta^i(x) \chi^i(x) \end{aligned} \quad (\text{III.6c})$$

Les déformations de cisaillement sont données par :

$$\gamma_{xs}^i = (\xi_1^{i2} Z^i(s) - \xi_2^{i2} Y^i(s) + n \frac{\partial \psi^i(s)}{\partial s}) \chi^i(x) + 2 \xi_2^{i2} Y^i(s) \theta^i(x) \quad (\text{III.6d})$$

Une fois les composants de déformations sont définis, le *tenseur de Piola-Kirchhoff* de contraintes pour un matériau élastique peut être présenté sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \tau_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \gamma_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

E et G dénotent le module de Young (le module d'élasticité longitudinale) et le module de cisaillement.

III.3 Les équations d'équilibre:

III.3.1 Condition stationnaire de potentiel total :

Les équations d'équilibre sont à dériver à partir de *condition stationnaire de potentiel total*. En désignant par U l'énergie de déformation de l'élément et par W le *travail des charges* conservatrices appliquées, la *condition stationnaire de potentiel total*, donné par :

$$\delta(U - W) = 0 \quad (\text{III.8})$$

Où (δ) dénote la variation virtuelle. La variation de l'énergie de déformation d'un élément en box avec une longueur L , et une section F_i ($i=1..4$) pour chaque parois est donnée par:

$$\delta U = \sum_{i=1}^4 \int_L \int_{F_i} (\sigma_{xx}^i \delta \varepsilon_{xx}^i + \tau_{xs}^i \delta \gamma_{xs}^i) dF_i \quad (\text{III.9})$$

La variation de l'énergie (δU) de déformation peut être exprimée en fonction des termes qui présentent l'action des résultantes de contraintes, ces termes appelés aussi les éléments de réduction dans le domaine élastique qui sont définis par les relations suivantes :

$$N = E \left[\begin{array}{l} \left[u_0'(x) + \frac{1}{2} \cdot (v_0'^2(x) + w_0'^2(x)) \right] F + 2(A_{19} + B_{19})\theta'^2(x) + 2(A_{20} + B_{20})\chi'^2(x) \\ + 2(A_{15} + B_{15})\theta'(x)\chi'(x) \end{array} \right] \quad (\text{III.10a})$$

$$M_y = E \left[\left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) w_0''(x) + \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) v_0'(x)\theta'(x) + \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) v_0'(x)\chi'(x) \right] \quad (\text{III.10b})$$

$$M_z = E \left[\left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) v_0''(x) - \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) w_0'(x)\theta'(x) + \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) w_0'(x)\chi'(x) \right] \quad (\text{III.10c})$$

$$B_\omega = E \left[\left(\frac{h^2}{2} A_1 + \frac{b^2}{2} B_1 \right) \theta''(x) \right] \quad (\text{III.10b})$$

$$M_R = 2E \left[\begin{array}{l} \left[\left((A_4 + B_4) - 2(A_3 + B_3) \frac{(A_{19} + B_{19})}{A} \right) \theta'^2(x) \right. \\ + \left. \left((A_5 + B_5) - 2(A_3 + B_3) \frac{(A_{20} + B_{20})}{A} \right) \chi'^2(x) \right. \\ \left. + \left((B_6 + B_6) - 2(A_3 + B_3) \frac{(A_{15} + B_{15})}{A} \right) \theta'(x)\chi'(x) \right] \end{array} \right] \quad (\text{III.10e})$$

$$M_{sv} = 2Gb(bF_2\theta'(x) - B_{23}\chi') \quad (\text{III.10f})$$

$$M_{\psi} = 2E \left[\begin{array}{l} \left((A_8 + B_8) - 2(A_7 + B_7) \frac{(A_{19} + B_{19})}{A} \right) \theta'^2(x) \\ + \left((A_9 + B_9) - 2(A_7 + B_7) \frac{(A_{20} + B_{20})}{A} \right) \chi'^2(x) \\ + \left((B_{11} + B_{11}) - 2(A_7 + B_7) \frac{(A_{15} + B_{15})}{A} \right) \theta'(x) \chi'(x) \end{array} \right] \quad (\text{III.10g})$$

$$M_{\psi y} = E \left[\begin{array}{l} \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) w_0''(x) + \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) v_0'(x) \theta'(x) \\ + \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_{13} + 2A_{21} \right) v_0'(x) \chi'(x) \end{array} \right] \quad (\text{III.10h})$$

$$M_{\psi z} = E \left[\begin{array}{l} \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) v_0''(x) - \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) w_0'(x) \theta'(x) \\ + \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_{13} + 2B_{21} \right) w_0'(x) \chi'(x) \end{array} \right] \quad (\text{III.10i})$$

$$M_{\psi R} = 2E \left[\begin{array}{l} \left((A_{16} + B_{16}) - 2(A_{15} + B_{15}) \frac{(A_{19} + B_{19})}{A} \right) \theta'^2(x) \\ + \left((A_{17} + B_{17}) - 2(A_{15} + B_{15}) \frac{(A_{20} + B_{20})}{A} \right) \chi'^2(x) \\ + \left((B_{18} + B_{18}) - 2(A_{15} + B_{15}) \frac{(A_{15} + B_{15})}{A} \right) \theta'(x) \cdot \chi'(x) \end{array} \right] \quad (\text{III.10j})$$

$$M_{s\psi} = 2G \left[b B_{23} \theta'(x) - (A_{22} + B_{22}) \chi'(x) \right] \quad (\text{III.10k})$$

Dans ces équations, N est la force axiale, M_y et M_z sont les moments de flexion, B_ω est le *bi-moment* [94,100], le paramètre M_R est la résultante des contraintes à ordre supérieur, qui est responsable du gauchissement non linéaire et joue un rôle important dans la stabilité et le comportement non linéaire. M_{sv} est le *moment de torsion de St-Venant*², [95]. Les termes M_ψ , $M_{\psi y}$, $M_{\psi z}$, $M_{\psi R}$ et $M_{\psi sv}$ dans les équations (III.10.a-k) sont déduits du couplage entre les fonctions de gauchissement et les fonctions ψ .

² Apparue pour la première fois dans un mémoire, déposé à l'Académie Française des Sciences par Saint-Venant Barré 1855. *Savant étrangers*, XIV: 233-650.

Avec la prise en compte de déformations de distorsion $\chi(x)$, des éléments de force additionnels sont dérivés dans les équations (III.10.a-k). Toutes ces forces sont dues à la déformation de distorsion, et cela reflète la contribution des variables ψ_H et ψ_V .

Les paramètres A_i ($i = 1, \dots, 22$) et B_j ($j = 1, \dots, 23$) sont en fonction des dimensions de la section (b, h, t). Les termes A_i sont définis dans l'annexe. Pour les coefficients B_j sont définis de la même manière que A_j en remplaçant réciproquement b par h . $F1$ et $F2$ sont respectivement la surface de la semelle et de l'âme, avec F est la surface totale de la section de la poutre.

Substituant les déformations linéaires et non-linéaires obtenus par les équations (III.6.a-d), et l'équation de contrainte (III.7) dans l'équation de l'énergie (III.9), et en utilisant les relations (III.10.a-k), on obtient l'expression de la variation de l'énergie de déformation suivante qui est exprimée en fonction des éléments de réduction agissant sur la section transversale :

$$\delta U = \delta U_u + \delta U_v + \delta U_w + \delta U_\omega + \delta U_R + \delta U_{sv} + \delta U_\psi + \delta U_{\psi_y} + \delta U_{\psi_z} + \delta U_{\psi_R} + \delta U_{sv\psi} \quad (\text{III.11})$$

Dans cette équation, les premiers termes δU_u , δU_v , δU_w , δU_ω , δU_R et δU_{sv} représentent la contribution de résultantes N , M_y , M_z , B_ω , M_R et M_{sv} respectivement. Ces termes sont exprimés par :

$$\begin{aligned} \delta U_u = & \int_L N \delta u'_0(x) dx + \int_L N v'_0(x) \delta v'_0(x) dx + \int_L N w'_0(x) \delta w'_0(x) dx + \int_L \frac{2N}{EF} (A_3 + B_3) \theta'(x) \delta \theta'(x) dx \\ & + \int_L \frac{2N}{EF} (A_{15} + B_{15}) \chi'(x) \delta \theta'(x) dx + \int_L \frac{2N}{EF} (A_{15} + B_{15}) \theta'(x) \delta \chi'(x) dx + \int_L \frac{2N}{EF} (A_7 + B_7) \chi'(x) \delta \chi'(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.12a})$$

$$\delta U_v = \int_L M_z \delta v_0''(x) dx + \int_L M_y \theta'(x) \delta v_0'(x) dx + \int_L M_y v_0'(x) \delta \theta'(x) dx \quad (\text{III.12b})$$

$$\delta U_w = \int_L M_y \delta w_0''(x) dx - \int_L M_z \theta'(x) \delta w_0'(x) dx - \int_L M_z w_0'(x) \delta \theta'(x) dx \quad (\text{III.12c})$$

$$\delta U_\omega = \int_L B_\omega \delta \theta''(x) dx \quad (\text{III.12d})$$

$$\delta U_R = \int_L M_R \theta'(x) \delta \theta'(x) dx \quad (\text{III.12e})$$

$$\delta U_{sv} = \int_L M_{sv} \delta \theta'(x) dx \quad (\text{III.12f})$$

Cependant, les dernières quantités sont δU_ψ , $\delta U_{\psi y}$, $\delta U_{\psi z}$, $\delta U_{\psi R}$, et $\delta U_{sv\psi}$ montrent la contribution de déformations de distorsion $\chi(x)$, et sont définies comme suit :

$$\delta U_\psi = \int_L M_\psi \chi'(x) \delta \chi'(x) dx \tag{III.13a}$$

$$\delta U_{\psi y} = \int_L M_{\psi y} \chi'(x) \delta v_0'(x) dx + \int_L M_{\psi y} v_0'(x) \delta \chi'(x) dx \tag{III.13b}$$

$$\delta U_{\psi z} = \int_L M_{\psi z} \chi'(x) \delta w_0'(x) dx + \int_L M_{\psi z} w_0'(x) \delta \chi'(x) dx \tag{III.13c}$$

$$\delta U_{\psi R} = \int_L M_{\psi R} \chi'(x) \delta \theta'(x) dx + \int_L M_{\psi R} \theta'(x) \delta \chi'(x) dx \tag{III.13d}$$

$$\delta U_{sv\psi} = \int_L M_{sv\psi} \delta \chi'(x) dx \tag{III.13e}$$

Dans cette présente étude, l'instabilité (déversement ou flambement) des éléments poteaux ou poteaux est considérée. Les charges appliquées sont alors réduites à des charges réparties q_x et q_z . Également, les charges q_x sont appliquées sur la ligne centrale sans excentricité, mais les autres charges latérales q_z sont appliquées le long de la ligne (rr') qui se trouve à une hauteur e_z par rapport au centre de cisaillement C (**Fig. III.3**).

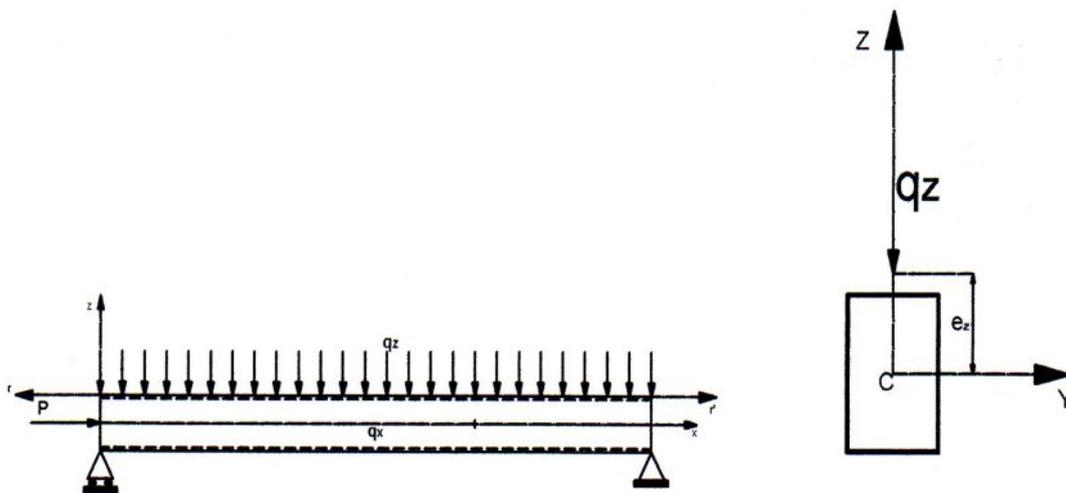


Fig. III.3: Une poutre en box sous des charges axiales et réparties

La variation du travail extérieur est définie par cette relation :

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u_0(x) + q_z \delta w_r(s, x)) dx \quad (\text{III.14})$$

Dans cette équation, $w_r(s, x)$ est le déplacement vertical de la ligne (rr'). Ce déplacement est déterminé à partir de l'équation (III.9) [73,76], si on remplace l'expression de $w_r(s, x)$ dans (III.14) on aura :

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u_0(x)) dx + \int_L (q_z \delta w_0(x)) dx - e_z \int_L (q_z (\theta(x) + \chi(x)) \delta(\theta(x) + \chi(x))) dx \quad (\text{III.15})$$

e_z : dénote l'excentricité des charges latérales q_z à partir du centre G, appelé aussi *paramètre d'hauteur de charge* « load height parameter ».

La variation du potentiel total est alors en fonction des déplacements virtuels $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et $\delta \chi$, et de leurs dérivés. Après l'intégration par parties, les équations d'équilibre sont alors obtenues à partir des conditions stationnaires (III.12), (III.13) et (III.15) en référence aux relations des éléments de réduction (III.10a-k). Les équations d'équilibre sont ordonnées de la façon suivante:

$$N' = -q_x \quad (\text{III.16a})$$

$$M_z'' - (N v_0(x))' - (M_y \theta(x))' - (M_{\psi y} \chi'(x))' = 0 \quad (\text{III.16b})$$

$$M_y'' - (N w_0(x))' - (M_z \theta(x))' - (M_{\psi z} \chi'(x))' = q_z \quad (\text{III.16c})$$

$$B_\omega'' - M_{sv}' - (M_R \theta'(x))' - (M_y v_0'(x))' + (M_z w_0'(x))' - \left[\frac{2N}{EF} ((A_3 + B_3) \theta'(x) + (A_{15} + B_{15}) \chi'(x)) \right]' - (M_{\psi R} \chi'(x))' = q_z (\theta(x) + \chi(x)) \quad (\text{III.16d})$$

$$(M_{\psi} \chi(x))' + M_{sv\psi}' + (M_{\psi y} v_0'(x))' + (M_{\psi z} w_0'(x))' + (M_{\psi R} \theta'(x))' + \left[\frac{2N}{EF} ((A_7 + B_7) \chi'(x) + (A_{15} + B_{15}) \theta'(x)) \right]' - (M_{\psi R} \chi'(x))' = -q_z (\theta(x) + \chi(x)) \quad (\text{III.16e})$$

Ces équations permettent de prédire le moment de déversement élastique d'un élément en box bi-symétrique sous un chargement combiné efforts axiaux ou normaux et moment de flexion. Lorsque les efforts axiaux sont limités à une force axiale P appliquée aux extrémités de la poutre, et une charge répartie q_z avec une excentricité e_z , les équations d'équilibre élastiques de flexion-torsion sont obtenues par la substitution des expressions des résultantes de contraintes, ou les éléments de réduction des équations (III.10) dans l'équation (III.16). Pour plus de simplicité les termes non-linéaires seront conservés jusqu'au deuxième ordre, dans ce cas, les équations d'équilibre deviennent :

$$N = -P \quad (\text{III.17a})$$

$$\begin{aligned} & +E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) v_0^{IV}(x) + P v_0''(x) - E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) (w_0'(x) \theta'(x))'' \\ & +E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) (w_0'(x) \chi'(x))'' - E \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) (w_0''(x) \theta'(x))' \\ & -E \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) (w_0''(x) \chi'(x))' = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17b})$$

$$\begin{aligned} & +E \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) w_0^{IV}(x) + P w_0''(x) + E \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) (v_0'(x) \theta'(x))'' + E \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) (v_0'(x) \chi'(x))'' \\ & +E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) (v_0''(x) \theta'(x))' - E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) (v_0''(x) \chi'(x))' = qz \end{aligned} \quad (\text{III.17c})$$

$$\begin{aligned} & +E \left(\frac{h^2}{2} A_1 + \frac{b^2}{2} B_1 \right) \theta^{IV}(x) + 2 \frac{P}{A} (A_3 + B_3) \theta''(x) + 2 \frac{P}{A} (A_{15} + B_{15}) \chi''(x) \\ & -E \left(F_1 \frac{h^2}{2} + 2B_1 \right) (w_0''(x) v_0'(x))' + E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_1 \right) (v_0''(x) w_0'(x))' \\ & -2Gb^2 F_2 \theta''(x) + 2GbB_{23} \chi''(x) = q_z (\theta(x) + \chi(x)) \end{aligned} \quad (\text{III.17d})$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{P}{A} (A_{15} + B_{15}) \theta''(x) + 2 \frac{P}{A} (A_7 + B_7) \chi''(x) \\ & -E \left(F_1 \frac{h^2}{2} - 2B_2 \right) (w_0''(x) v_0'(x))' - E \left(F_2 \frac{b^2}{2} + 2A_2 \right) (v_0''(x) w_0'(x))' \\ & +2GbB_{23} \theta''(x) - 2G(A_{22} + B_{22}) \chi''(x) = q_z (\theta(x) + \chi(x)) \end{aligned} \quad (\text{III.17c})$$

Dans ces équations, $(\cdot)^{IV}$ dénote la dérivée d'ordre 4 par rapport au variable x . dans les équations différentielles précédentes, le signe positif est considéré dans le cas d'une charge de compression P .

III.4. Analyse de déversement :

III.4.1. Équations algébriques d'équilibre pour les poutres sur appuis simples :

Le déversement d'une poutre en parois minces avec une section en box doublement symétrique est investigué. Dans le cas des poutres simplement appuyées avec gauchissement libre, les modes de déplacements dans le cas de flexion, de torsion et distorsion sont rapprochés par des fonctions sinusoidales. Puisque l'origine de l'axe X est positionnée à l'extrémité de la poutre et que l'étude considère le déversement d'une poutre simplement appuyée, les approximations des composantes de déplacements correspondants au premier mode de déversement sont adoptées:

$$\frac{v(x)}{v_0} = \frac{w(x)}{w_0} = \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\chi(x)}{\chi_0} = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{III.18})$$

Dont v_0, w_0, θ_0 et χ_0 sont des amplitudes associées aux déplacements. Les relations de déplacements (III.18) s'annulent pour ($x = 0$, et $x=L$) et elles sont maximales pour ($x=L/2$) voir la figure (Fig. III.3). Afin de résoudre le système d'équations différentielles non linéaire (III.17a-e), la méthode d'approximation du *Galerkin* est d'abord appliquée.

Après la substitution de $v(x)$, $w(x)$, $\theta(x)$ et $\chi(x)$ (III.18) et en considérant les équations (III.17a-e), et suite aux intégrations et simplifications, les quatre équations couplées d'équilibre peuvent être présentées de la forme suivante :

$$(P_z - P)v_0 - \frac{2}{3\pi} P_1 w_0 \theta_0 + \frac{2}{3\pi} P_2 w_0 \chi_0 = 0 \quad (\text{III.19a})$$

$$(P_y - P)w_0 + \frac{2}{3\pi} P_3 v_0 \theta_0 + \frac{2}{3\pi} P_4 v_0 \chi_0 - \frac{32}{\pi^3} M_0 = 0 \quad (\text{III.19b})$$

$$\frac{2(A_3 + B_3)}{F} (P_5 - P)\theta_0 - \frac{2(A_{15} + B_{15})}{F} (P_6 + P)\chi_0 + \frac{2}{3\pi} P_7 v_0 w_0 - \frac{8e_z}{\pi^2} (\theta_0 + \chi_0) M_0 = 0 \quad (\text{III.19c})$$

$$\frac{2(A_7 + B_7)}{F} (P_8 - P)\chi_0 - \frac{2(A_{15} + B_{15})}{F} (P_6 + P)\theta_0 + \frac{2}{3\pi} P_9 v_0 w_0 - \frac{8e_z}{\pi^2} (\chi_0 + \theta_0) M_0 = 0 \quad (\text{III.19d})$$

Dans les équations algébriques (III.19a-e), P_z et P_y sont les charges critiques de flambement d'Euler, et M_0 est le moment maximal de premier mode en flexion dans la poutre. P_z , P_y et M_0 sont donnés par les relations suivantes :

$$P_z = \frac{\pi^2 E}{2L^2} (b^2 F_2 + 4A_1) \quad (\text{III.20a})$$

$$P_y = \frac{\pi^2 E}{2L^2} (h^2 F_1 + 4B_1) \quad (\text{III.20b})$$

$$M_0 = \frac{q_z l^2}{8} \quad (\text{III.20c})$$

Dans le système algébrique composé d'équations (III.19a-b), les P_i ($i=1..9$) sont définis par les relations suivantes :

$$P_1 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (h^2 F_1 + 2b^2 F_2 + 8A_1 + 4B_1) \quad (\text{III.21a})$$

$$P_2 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (-h^2 F_1 + 2b^2 F_2 + 8A_2 + 4B_2) \quad (\text{III.21b})$$

$$P_3 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (b^2 F_2 + 2h^2 F_1 + 8B_1 + 4A_1) \quad (\text{III.21c})$$

$$P_4 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (2h^2 F_1 - b^2 F_2 - 8B_2 - 4A_2) \quad (\text{III.21d})$$

$$P_5 = \frac{E\pi^2 F}{2L^2 (A_3 + B_3)} \left(\frac{h^2}{2} A_1 + \frac{b^2}{2} B_1 \right) + \frac{Gb^2 FF_2}{(A_3 + B_3)} \quad (\text{III.21e})$$

$$P_6 = \frac{GbFB_{23}}{(A_{15} + B_{15})} \quad (\text{III.21f})$$

$$P_7 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (-h^2 F_1 + b^2 F_2 + 4A_1 - 4B_1) \quad (\text{III.21g})$$

$$P_8 = \frac{GF(A_{22} + B_{22})}{(A_7 + B_7)} \quad (\text{III.21h})$$

$$P_9 = \frac{\pi^2 E}{L^2} (-h^2 F_1 - b^2 F_2 - 4A_2 + 4B_2) \quad (\text{III.21i})$$

A cette étape, il est important de mentionner qu'à partir du système (III.19a-b), les équations d'équilibre algébriques de la structure avec une section bi-symétrique en box sous une charge axiale P peuvent être obtenues facilement en posant $M_0 = 0$. Pareillement, le même système peut être utilisé pour établir le système algébrique qui gère le déversement latéral de la poutre en éliminant la charge axiale P . Encore, on remarque clairement que le système (III.19a-b) inclut les déformations de distorsion.

Quand on atteint un tel système d'équations non linéaires et fortement couplées, les solutions analytiques ne sont pas évidentes et ne sont pas uniques, et deviennent complexes avec la présence des points singuliers. En premier lieu, et si possible, l'estimation des points singuliers peut aider à trouver les solutions. Pour l'étude du comportement des éléments poutre-poteau, un moment critique M_0 peut être obtenu quand la charge axiale P est appliquée. Cela, mène à une interaction entre le moment de déversement latéral M_0 et la charge axiale P . Ce développement sera clarifié par la suite.

III.4.2 Solutions analytiques des charges critiques :

L'interaction de la charge latérale de déversement avec la charge axiale P pour une poutre à parois minces en box est considérée selon le système (III.19a-b), avec ($M_0 \neq 0, P \neq 0$). Ce système est non-linéaire et fortement couplé. Les charges critiques sont calculées par les points singuliers de la matrice tangente $[K_t]$ du système (III.19a-b) dans l'état fondamental. La stabilité d'une poutre en box est analysée en tenant compte le déplacement initial dans l'état précritique, appelé aussi « l'état fondamental ».

Il est raisonnable de considérer que l'état fondamental peut être obtenu par une approximation suffisante au moyen de la théorie de linéarisation. Les composants de déplacements dans l'état fondamental sont sous la forme : $\{v_0, w_0, \theta_0, \chi_0\}_t = \{0, w_0, 0, 0\}$, où la flèche w_0 est liée au moment appliqué par la relation (III.24). Cette procédure mène à l'expression suivante de la matrice tangente de rigidité $[K_t]$ évaluée dans l'état fondamental :

$$[K_t] = \begin{bmatrix} (P_z - P) & 0 & -\frac{2}{3\pi} P_1 w_0 & \frac{2}{3\pi} P_2 w_0 \\ 0 & (P_y - P) & 0 & 0 \\ \frac{2}{3\pi} P_7 w_0 & 0 & \frac{2(A_3 + B_3)}{F} (P_5 - P) - \frac{8e_z}{\pi^2} M_0 & -\frac{2(A_{15} + B_{15})}{F} (P_6 + P) - \frac{8e_z}{\pi^2} M_0 \\ \frac{2}{3\pi} P_9 w_0 & 0 & -\frac{2(A_{15} + B_{15})}{F} (P_6 + P) - \frac{8e_z}{\pi^2} M_0 & \frac{2(A_7 + B_7)}{F} (P_8 - P) - \frac{8e_z}{\pi^2} M_0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Les charges critiques ou le moment critique de déversement M_{cr} sont calculées à partir de la matrice tangente en posant ($\det [K_t] = 0$) dans l'état fondamental. On obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & -\frac{32e_z}{9\pi^4} (P_1 + P_2)(P_7 - P_9) w_0^2 M_0 + \frac{4}{9\pi^2} \left\{ P_1 [C_2 P_7 (P_8 - P) + C_3 P_9 (P_6 + P)] \right. \\ & \left. - P_2 [C_3 P_7 (P_6 + P) + C_1 P_9 (P_5 - P)] \right\} w_0^2 \\ & + (P_z - P) \left[-2C_3 (P_6 + P) - C_1 (P_5 - P) - C_2 (P_8 - P) \right] \frac{8e_z}{\pi^2} M_0 + \\ & (P_z - P) \left\{ C_1 C_2 (P_5 - P)(P_8 - P) - C_3^2 (P_6 + P)(P_6 + P) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Cette équation combine w_0 et M_0 , qui ne sont pas indépendants. Afin d'obtenir le moment de flexion critique, on peut employer l'équation (III.17c) correspondant à l'état fondamental $\{0, w_0, 0, 0\}$, et ce après avoir négligé les termes d'ordres élevés. Ceci mène à une expression approximative pour w_0 en fonction de M_0 :

$$w_0 = \frac{4}{\pi} \frac{M_0}{[P_y - P]} \quad (\text{III.24})$$

L'insertion de l'équation (III.24) dans (III.23) donne une équation de troisième degré (III.25) dont l'inconnu est M_0 . Donc, le moment critique de déversement peut être obtenu à partir de :

$$F(P)M_0^3 + G(P)M_0^2 + H(P)M_0 + I(P) = 0 \quad (\text{III.25})$$

Avec:

$$F(P) = -\frac{512e_z}{9\pi^6}(P_1 + P_2)(P_7 - P_9) \quad (\text{III.26a})$$

$$G(P) = \frac{64}{9\pi^4} \{P_1 [C_2 P_7 (P_8 - P) + C_3 P_9 (P_6 + P)] - P_2 [C_3 P_7 (P_6 + P) + C_1 P_9 (P_5 - P)]\} \quad (\text{III.26b})$$

$$H(P) = \frac{8e_z}{\pi^2} (P_z - P)(P_y - P)^2 [-2C_3 (P_6 + P) - C_1 (P_5 - P) - C_2 (P_8 - P)] \quad (\text{III.26c})$$

$$I(P) = (P_z - P)(P_y - P)^2 \{C_1 C_2 (P_5 - P)(P_8 - P) - C_3^2 (P_6 + P)(P_6 + P)\} \quad (\text{III.26d})$$

$$C_1 = \frac{2(A_3 + B_3)}{F} \quad (\text{III.26e})$$

$$C_2 = \frac{2(A_7 + B_7)}{F} \quad (\text{III.26f})$$

$$C_3 = \frac{2(A_{15} + B_{15})}{F} \quad (\text{III.26g})$$

La solution de l'équation (III.25) aurait déterminé analytiquement la valeur du moment critique M_0 . Il est à noter que la charge axiale de déversement peut être calculée à partir de l'équation (III.25) en posant :

$$I(P) = 0 \quad (\text{III.27})$$

Selon l'équation (III.26d), la charge axiale critique de flambement P_{cr} est la plus petite parmi les quatre charges critiques distinguées P_y , P_z , $P_{(\theta, \chi)1}$ et $P_{(\theta, \chi)2}$, alors :

$$P_{cr} = \min (P_y, P_z, P_{(\theta, \chi)1}, P_{(\theta, \chi)2}) \quad (\text{III.28})$$

Les expressions des charges critiques d'Euler P_y et P_z sont données par les relations (III.20a-b). Alors que les charges critiques de flambement dues à la torsion et à la distorsion $P_{(\theta, \chi)1}$ et $P_{(\theta, \chi)2}$ sont :

$$P_{(\theta, \chi)1} = \frac{(C_1 C_2 P_5 + 2C_3^2 P_6 + C_1 C_2 P_8) - \sqrt{(C_1 C_2 P_5 + 2C_3^2 P_6 + C_1 C_2 P_8)^2 - 4(C_1 C_2 - C_3^2)(C_1 C_2 P_5 P_8 - C_3^2 P_6^2)}}{2(C_1 C_2 - C_3^2)} \quad (\text{III.29a})$$

$$P_{(\theta, \chi)2} = \frac{(C_1 C_2 P_5 + 2C_3^2 P_6 + C_1 C_2 P_8) + \sqrt{(C_1 C_2 P_5 + 2C_3^2 P_6 + C_1 C_2 P_8)^2 - 4(C_1 C_2 - C_3^2)(C_1 C_2 P_5 P_8 - C_3^2 P_6^2)}}{2(C_1 C_2 - C_3^2)} \quad (\text{III.29b})$$

Les solutions analytiques précédentes sont possibles à déterminer à l'aide de la méthode de *Galerkin* appliquée dans les équations d'équilibre de la poutre. En plus, ces solutions qui concernent les moments de déversement latéral pour une poutre en box et en présence d'une charge axiale, peuvent être dérivées en utilisant la méthode de *Ritz* appliqué dans l'équation de la variation de l'énergie de déformation (III.11), selon les relations (III.18) et (III.20-c). Après intégration de l'équation (III.11), quatre équations d'équilibre non-linéaires et fortement couplées sont obtenues.

A ce stade, il est important de mentionner que la matrice tangente $[K_t]$ est définie comme la matrice *Jacobienne* du système d'équations d'équilibre qui concernent l'amplitude des déplacements $(v_0, w_0, \theta_0, \chi_0)$. L'analyse de la stabilité d'un élément en box est étudiée en tenant compte le déplacement initial qui correspond à l'état précritique (l'état fondamental), ce déplacement est obtenu à l'aide de l'équation (III.24). Les charges critiques ou les moments critiques de déversement M_{Ritz} sont calculées par la condition de singularité de la matrice tangente ($\det [K_t] = 0$), dans l'état fondamental $(v_0, w_0, \theta_0, \chi_0) = (0, w_0, 0, 0)$.

III.5 Conclusion :

Le comportement non linéaire des poutres doublement symétrique en box est étudié dans ce chapitre. A cet effet, un modèle non-linéaire est développé selon une nouvelle cinématique de modèle proposé. En premier lieu, les équations qui régissent l'équilibre élastiques sont réalisées à partir de l'état stationnaire. Deuxièmement, les modes de déplacements en flexion, en torsion et en distorsion sont rapprochés par une fonction sinusoidale afin d'en tirer les équations d'équilibre algébriques. Un système d'équations pour les poutres en box et simplement appuyées est obtenu. De ce système, une équation analytique est proposée pour la résistance au déversement et au flambement en fonction des caractéristiques géométriques de la section, de la rigidité classiques, et la hauteur de charge.

A partir de la condition de nullité de la matrice de rigidité tangente, on a déterminé l'expression d'une équation simple à utiliser et qui permet de prévoir les solutions analytiques. En plus, ces solutions qui concernent les moments de déversement latéral ainsi que la charge axiale de flambement pour un élément en box, peuvent être dérivées en utilisant la méthode de *Ritz* appliqué dans l'équation de la variation de l'énergie de déformation.

L'analyse de la stabilité d'un élément en box est étudiée en tenant compte le déplacement initial qui correspond à l'état précritique ou l'état fondamental. Cet état fondamental peut être obtenu par une approximation suffisante au moyen de la théorie de linéarisation. Donc, nous avons proposé une méthode de calcul des charges critiques du déversement ou de flambement des poutres ou des colonnes en box, soumises à des charges transversales et axiales. Le moment ou la charge critique sont calculés à partir d'une équation de troisième degré (III.25).

Chapitre4 :

Résultats & discussions

Résultats & discussions.

IV.1 Introduction:

Dans le but de valider et d'étudier la précision et l'efficacité de la méthode analytique proposée pour l'analyse des éléments à parois minces en box, une comparaison a été faite entre :

- Les résultats de stabilité fournis par l'équation (III.25) qui concernent le déversement et le flambement ;
- La simulation par éléments finis utilisant le logiciel ABAQUS [1,2];
- La formule de l'Eurocode 3 [40];

En plus les résultats obtenus par la méthode de *Galarkein*, ceux qui ont été donnés par la méthode de *Ritz* sont également considérés pour la comparaison. Cette étude comparative implique l'analyse de stabilité au déversement des poutres en variant la section du box (différentes épaisseurs), ainsi que la longueur de la poutre L , avec les mêmes conditions aux limites (simplement appuyées).

L'analyse par éléments finis est effectuée en utilisant le code de commerce ABAQUS (Abaqus 2003) [1,2]. Dans ce code, chaque poutre à parois minces en box étudiées est discrétisée en élément Shell S8R5 comme indiqué dans la figure (Fig. IV.1).

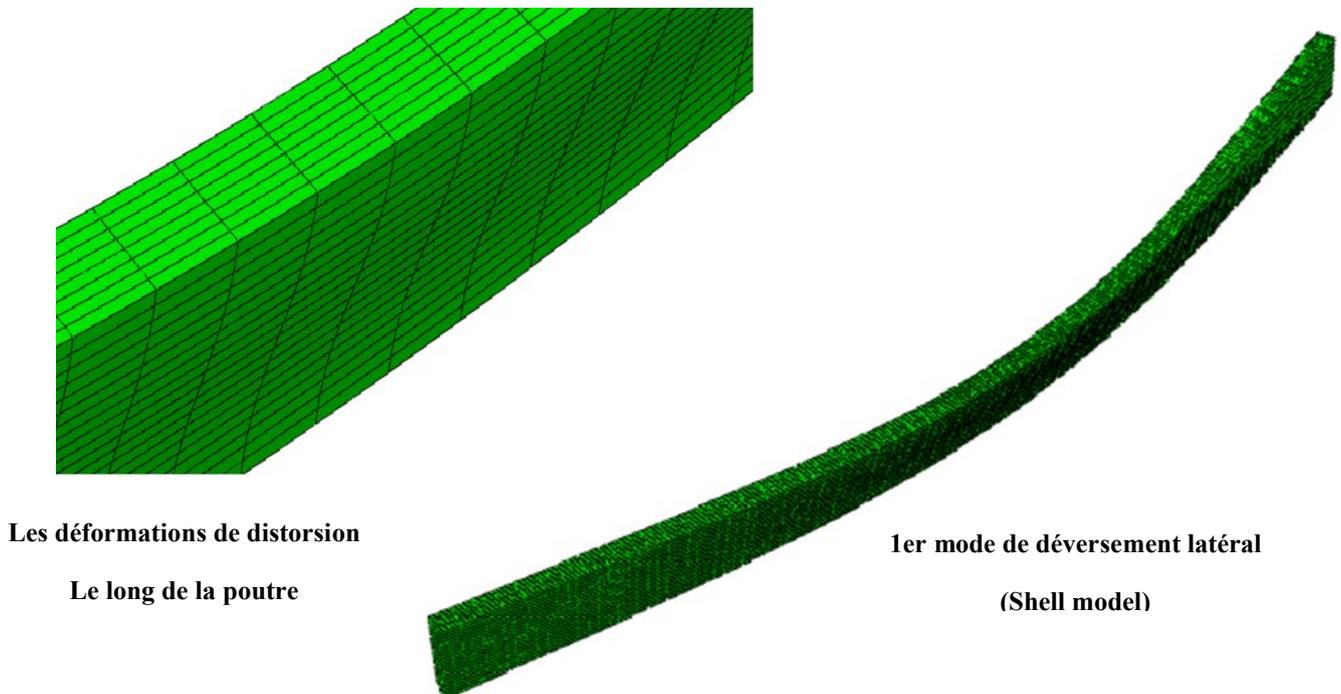


Fig. IV.2. Vue de maillage en élément Shell de la poutre en box.

IV.2 La formule de l'Eurocode-3-:

La formule adoptée par l'Eurocode3 [40] pour calculer le moment critique de déversement est souvent recommandée aux profilés en I ou H. cette formule est donnée par :

$$M_{EC3} = \overline{C}_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left(\sqrt{\frac{I_w}{I_{zz}} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} + (\overline{C}_2 e_z)^2} - \overline{C}_2 e_z \right) \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

- I_z : le moment d'inertie par rapport à l'axe z ;
- I_t : le constant ou l'inertie de torsion ;
- I_w : le moment d'inertie de gauchissement.
- \overline{C}_1 et \overline{C}_2 sont des coefficients qui dépendent de la nature de chargement et les conditions aux limites.

Il paraît que cette restriction est probablement expliquée par le fait que les éléments en box montrent une résistance moins par rapport au déversement latérale de torsion élastique (LTB). De plus, et avec la large utilisation de la qualité de l'acier « *Maraging* », l'équation de calcul du moment de déversement (IV.1) peut être prolongée aux éléments en box.

IV.3 Résultats et validations numériques :

Dans le calcul numérique, les effets de la charge axiale P, de l'épaisseur des parois de la poutre, de la longueur de la poutre, et de l'excentricité des charges verticales sont prises en compte pour analyser le déversement latéral des poutres en box, tout en conservant les mêmes conditions aux limites (appuis simples).

Dans tous les cas structurels envisagés dans les comparaisons, les résultats présentés comprennent : la charge axiale critique et le moment critique (P_{cr} , M_0) donnés au moyen de l'équation (III.25), les solutions numériques obtenues par la méthode de Ritz (P_{Ritz} , M_{Ritz}), l'analyse par éléments finis Shell (P_{FEM} , M_{FEM}), les valeurs de la méthode classique sans l'effet de la distorsion (P_C , M_C), et les valeurs déduites de la formule de l'EC3(IV.1), (M_{EC3}).

Les erreurs relatives associées aux valeurs (P_{cr} , M_0), (P_{Ritz} , M_{Ritz}), (P_C , M_C) et (M_{EC3}) sont données respectivement par les expressions suivantes:

$$\Delta_1 = \frac{|(P_{cr}, M_0) - (P_{FEM}, M_{FEM})|}{(P_{FEM}, M_{FEM})} \quad (\text{IV.2a})$$

$$\Delta_2 = \frac{|(P_{Ritz}, M_{Ritz}) - (P_{FEM}, M_{FEM})|}{(P_{FEM}, M_{FEM})} \quad (\text{IV.2b})$$

$$\Delta_3 = \frac{|(P_c, M_C) - (P_{FEM}, M_{FEM})|}{(P_{FEM}, M_{FEM})} \quad (IV.2c)$$

$$\Delta_4 = \frac{|M_{EC3} - M_{FEM}|}{M_{FEM}} \quad (IV.2d)$$

Dans les exemples traités, il s'agit d'une poutre simplement appuyée sous un chargement uniformément repart, et sous des charges concentrées de compression appliquées aux extrémités libres comme indiqué dans la figure (**Fig.III.3**). Les propriétés géométriques sont : une hauteur $h=0.6m$, et une largeur $b=0.2m$. La longueur de la poutre varie de $8 m$ à $12 m$. le moment de déversement élastique ainsi que la charge axiale critique seront évalués pour différentes épaisseurs des parois de la poutre. Dans tous les exemples, le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement du matériau sont respectivement: $E=210 GPa$ et $G=80.77 GPa$, avec un coefficient de Poisson égal à 0,3.

IV.3.1 Le moment de déversement élastique:

Les résultats de calcul du moment de déversement quand la charge axiale est nulle ($P=0$), pour les différentes positions de hauteur de charge ($ez = 0.3m, 0.0$ et -0.3) sont donnés dans les tableaux (**Tableau IV.1.a-c**), et sont comparés avec les autres résultats. Ces hauteurs de charge correspondent à la semelle supérieure, le centre de cisaillement G et de la semelle inférieure respectivement. Les résultats obtenus par le modèle proposé, en utilisant les deux méthodes : Galerkin et Ritz, sont en bon accord avec ceux obtenus par la simulation numérique en éléments finis. Cependant, les moments de déversement latéral évalués par le modèle proposé atteignent des approximations raisonnables. De ce fait, les erreurs relatives importantes qui ont été observées sont de l'ordre de $\Delta_1=7.48\%$ et $\Delta_2=9\%$.

A partir de ce qui a été obtenu comme résultats, les méthodes classiques qui ignorent l'effet de déformation de distorsion sont loin d'être valable pour prédire la stabilité d'un élément en box, et cette conclusion peut être confirmée par la valeur de l'erreur relative Δ_3 qui est supérieure à 20%. Ce qu'on remarque aussi, à partir des résultats, c'est que les valeurs des moments de déversement de l'Eurocode 3 obtenus par l'équation (**IV.1**), sont pratiquement similaires à ceux obtenus par les méthodes classiques (sans l'effet de distorsion). Les moments de déversement calculés selon la formule de l'Eurocode 3 sont plus élevés que ceux des solutions numériques pour toutes les longueurs considérées, dont l'erreur relative peut atteindre la valeur $\Delta_4=34\%$. En conséquence, la résistance des éléments en box au déversement latéral est alors surestimée.

Tableau IV.1-a: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_z = 0.3 \text{ m}$) : comparaisons et erreurs relatives.

$L(m)$	$t(mm)$	Moment de déversement en (KN.m)					$\Delta_1\%$ (Galarkin/ FEM)	$\Delta_2\%$ (Ritz/FEM)	$\Delta_3\%$ (M_{ob} /FEM)	$\Delta_4\%$ (M_{EC3} /FEM)
		Méthode de Galarkin	Méthode de Ritz	FEM (ABAQUS)	Sans effet de Distortion	Eurocode 3				
8	20	17737.04	17524.22	17909.12	26777.13	24038.78	0.96	2.15	49.52	34.22
	25	24499.07	24141.92	24441.6	33532.54	30096.20	0.23	1.22	37.19	23.13
10	20	16109.14	15855.04	15868.75	21670.38	19429.24	1.51	0.08	36.56	22.43
	25	20145.86	19829.85	21157.5	27138.06	24325.54	4.78	6.27	28.27	14.97
12	20	13675.56	13448.83	14079.78	18198.82	16302.68	2.87	4.48	29.26	15.79
	25	17102.33	16820.31	18484.2	22790.93	20411.31	7.48	9.00	23.30	10.42

Tableau IV.1-b: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_z = 0.0 \text{ m}$) : comparaisons et erreurs relatives.

$L(m)$	$t(mm)$	Moment de déversement en (KN.m)					$\Delta_1\%$ (Galarkin/ FEM)	$\Delta_2\%$ (Ritz/FEM)	$\Delta_3\%$ (M_{ob} /FEM)	$\Delta_4\%$ (M_{EC3} /FEM)
		Méthode de Galarkin	Méthode de Ritz	FEM (ABAQUS)	Sans effet de Distortion	Eurocode 3				
8	20	19589.87	19754.27	19046.4	28404.91	25335.973	2.85	3.72	32.95	33.02
	25	25179.92	24713.46	25902.4	35575.05	31723.05	2.79	4.59	27.19	22.47
10	20	16092.94	15794.6	16622.4	22718.47	20263.91	3.19	4.98	26.83	21.90
	25	22592.56	22104	22130	28453.21	25372.34	2.09	0.12	22.22	14.65
12	20	13675.56	15197.84	14618.88	18929.59	16884.39	6.4	3.9	22.77	15.49
	25	18819.58	18413.98	19177.2	23707.91	21140.863	1.86	3.98	19.11	10.24

Tableau IV.1-c: Moments de déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge répartie ($e_z = -0.3 m$) : comparaisons et erreurs relatives.

$L(m)$	$t(mm)$	Moment de déversement en (KN.m)					$\Delta_1\%$ (Galarkin/ FEM)	$\Delta_2\%$ (Ritz/FEM)	$\Delta_3\%$ (M_{ob} /FEM)	$\Delta_4\%$ (M_{EC3} /FEM)
		Méthode de Galarkin	Méthode de Ritz	FEM (ABAQUS)	Sans effet de Distortion	Eurocode 3				
8	20	20129.85	20147.24	20200.80	30131.64	26703.16	0.35	2.65	49.16	32.19
	25	28601.40	27807.34	27349.60	37741.97	33437.84	4.58	1.67	38	22.26
10	20	17822.27	17364.15	17371.25	23817.26	21134.44	2.60	0.04	37.11	21.66
	25	23742.27	23082.38	23078.75	29832.09	26464.20	2.87	0.01	29.26	14.66
12	20	15530.69	15968.73	15147.36	19689.71	17486.85	2.53	5.42	29.99	15.44
	25	20726.52	20147.24	19848.6	24661.79	21896.49	4.42	1.50	24.25	10.31

Tableau IV.2: Charges critiques axiales de flambement d'une poutre simplement appuyée : comparaisons et erreurs relatives.

$L(m)$	$t(mm)$	Moment de déversement en (KN.m)				$\Delta_1\%$ (Galarkin/ FEM)	$\Delta_2\%$ (Ritz/FEM)	$\Delta_3\%$ (Pcr /FEM)
		Méthode de Galarkin	Méthode de Ritz	FEM (ABAQUS)	Sans effet de Distortion			
8	20	8635.9	8635.9	8531.8	8678.91	1.22	1.22	1.72
	25	10794.87	10794.87	10687	10885.03	1.01	1.01	1.85
10	20	5526.97	5526.97	5495.3	5554.5	0.58	0.58	1.08
	25	6908.72	6908.72	6892.4	6966.42	0.24	0.24	1.07
12	20	3838.17	3838.17	3825.5	3857.29	0.33	0.33	0.83
	25	4797.72	4977.2	4790.6	4837.79	0.15	3.90	0.99

IV.3.2 La charge axiale critique:

A partir du tableau (**Tableau IV.2**), on peut distinguer que les résultats obtenus par les méthodes classiques sont assez proches à ceux offerts par logiciel ABAQUS. Cette série de résultats révèle que l'effet de déformation de distorsion n'a pas d'incidence sur la charge axiale critique.

IV.3.3 L'effet de la charge axiale sur le moment de déversement élastique:

L'objectif de cette section est de montrer l'effet de la charge axiale de compression P sur la diminution du moment latéral de déversement pour une poutre en box à parois minces simplement appuyé sous une charge uniformément répartie. Dans cette étude paramétrique, l'épaisseur des parois t varie de 20 mm à 25 mm. La charge répartie peut être appliquée au niveau : de la semelle supérieure, du centre de cisaillement, et de la semelle inférieure.

Des courbes d'interaction (Moment de déversement-Charge axiale) pour la poutre en box prédéfini sont représentées dans les figures (**Fig.IV.2**), (**Fig.IV.3**) et (**Fig.IV.4**). Les moments de déversement numériques qui résultent de la méthode de *Ritz* sont parfaitement conformes aux solutions analytiques dérivées de la méthode de *Galarkin*. La méthode analytique classique qui ignore l'effet de déformations de distorsion, surévaluent largement la résistance réelle de déversement latéral. Sous une charge axiale de compression, les courbes d'interaction Moment de déversement-Charge axiale, diminuent d'une manière non-linéaire et ce à partir du moment de déversement latéral pur $M_{0,b}(0)$ quand P est nulle ($P=0$ KN), jusqu'à la disparition des moments de déversement qui correspond à la charge axiale critique (P atteint la valeur de P_z).

En ce qui concerne la position de la charge latérale, et lorsque la poutre est chargée au niveau de la semelle supérieure(**Fig.IV.2**), l'erreur relative entre les valeurs de résistance au déversement de la méthode proposée et celles du modèle analytique classique diminue progressivement quand la charge axiale de compression augmente. Par exemple, dans le cas d'une poutre en box avec une épaisseur des parois de $t=20$ mm comme indiqué dans la figure (**Fig.IV.2-a**), l'erreur relative varie constamment entre 51% pour $P=0$ KN à 36 % pour $P=5250$ kN, tandis que cette même erreur varie de 51 % pour $P=0$ KN à 40 % pour $P=6750$ KN quand $t=25$ mm comme montré dans la figure (**Fig.IV.2-b**).

Cependant, ces constatations ne restent plus vrais quand la charge latérale est appliquée au centre ou au niveau de la semelle inférieure comme présenté respectivement les figures (**Fig.IV.3**) et(**Fig.IV.4**). Sous une charge latérale positionnée au centre du box, l'erreur relative varie entre 43% pour $P=0$ KN à 67 % pour $P=5250$ KN (**Fig.IV.3-a**) quand $t=20$ mm. Dans le cas d'une poutre en box dont l'épaisseur des parois est de $t=25$ mm (**Fig.IV.3-b**), cette erreur varie de 44% pour $P=0$ KN à 90% pour $P=6750$ KN.

En conséquence, importantes erreurs relatives ont été observées lorsque la charge est appliquée au niveau de la semelle inférieure. On note que dans le cas d'un box avec une épaisseur des parois $t=20$ mm (**Fig.IV.4-a**), l'erreur varie de 37% pour $P=0$ KN à 100% pour $P=5250$ KN. Concernant le même box mais avec une épaisseur $t=25$ mm (**Fig.IV.4-b**), l'erreur varie de 37% pour $P=0$ KN à 147% pour $P=6750$ KN.

Cette divergence peut être expliquée par l'effet de déformation de distorsion qui doit joindre la torsion de toute la section en box comme indiqué dans la figure(**Fig.IV.1**).

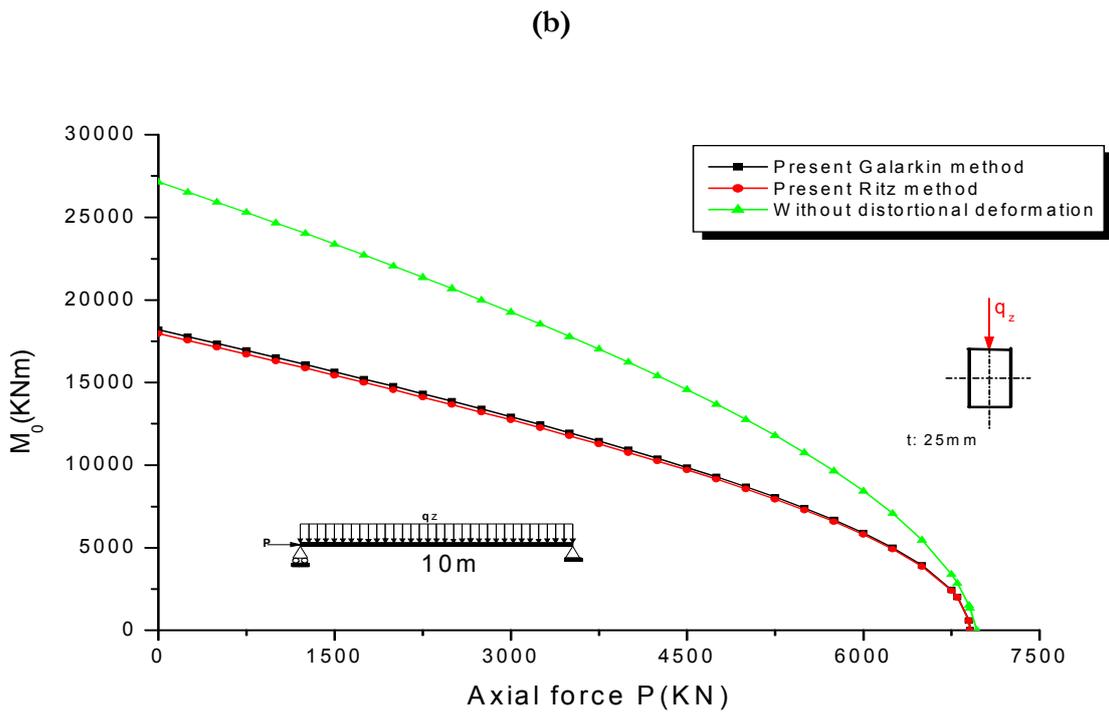
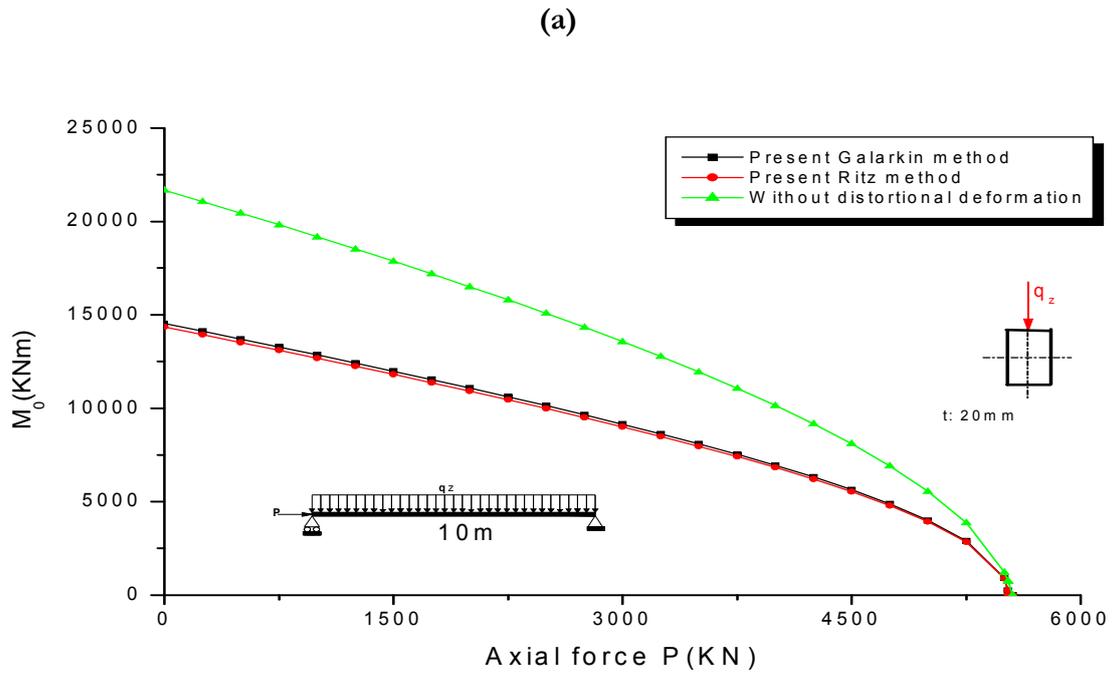


Fig. IV.2 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement repart au niveau de la semelle supérieure (a) Box avec $t=20\text{ mm}$, (b) Box avec $t=25\text{ mm}$.

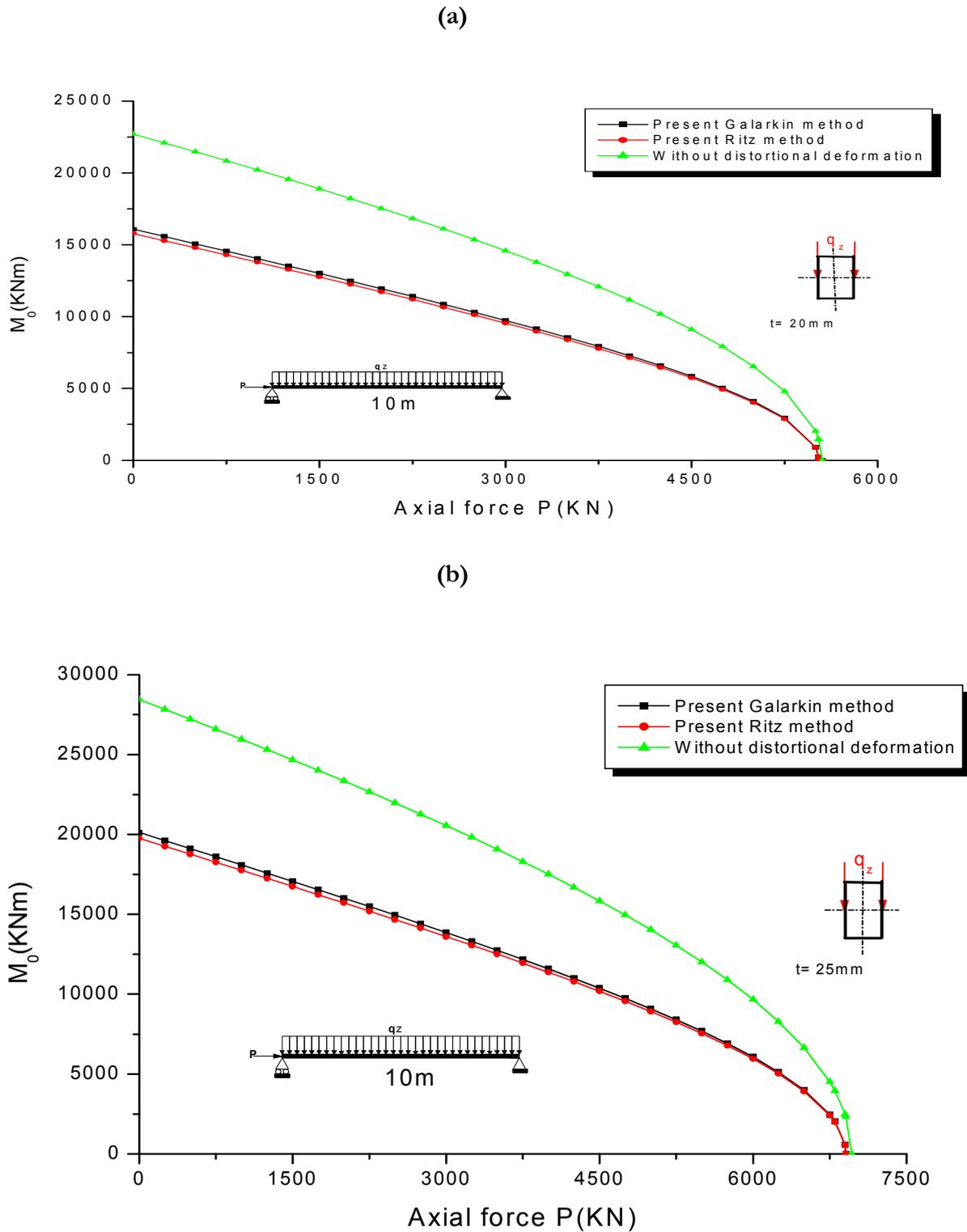


Fig. IV.3 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement réparti au centre du gravité (a) Box avec $t=20\text{ mm}$, (b) Box avec $t=25\text{ mm}$.

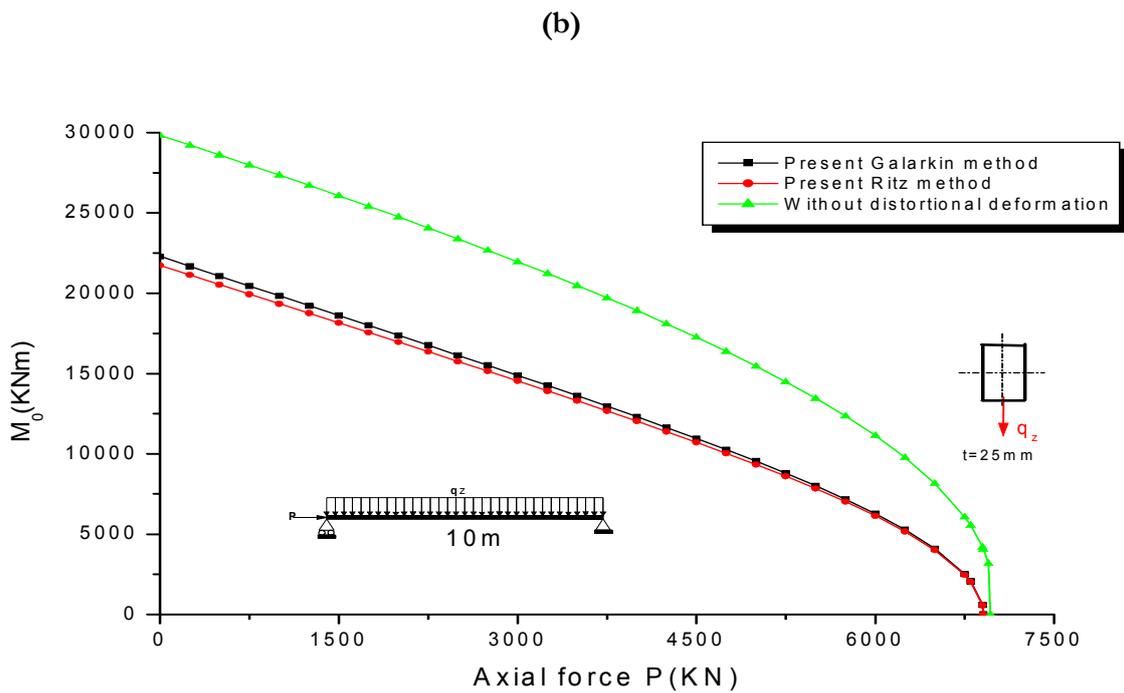
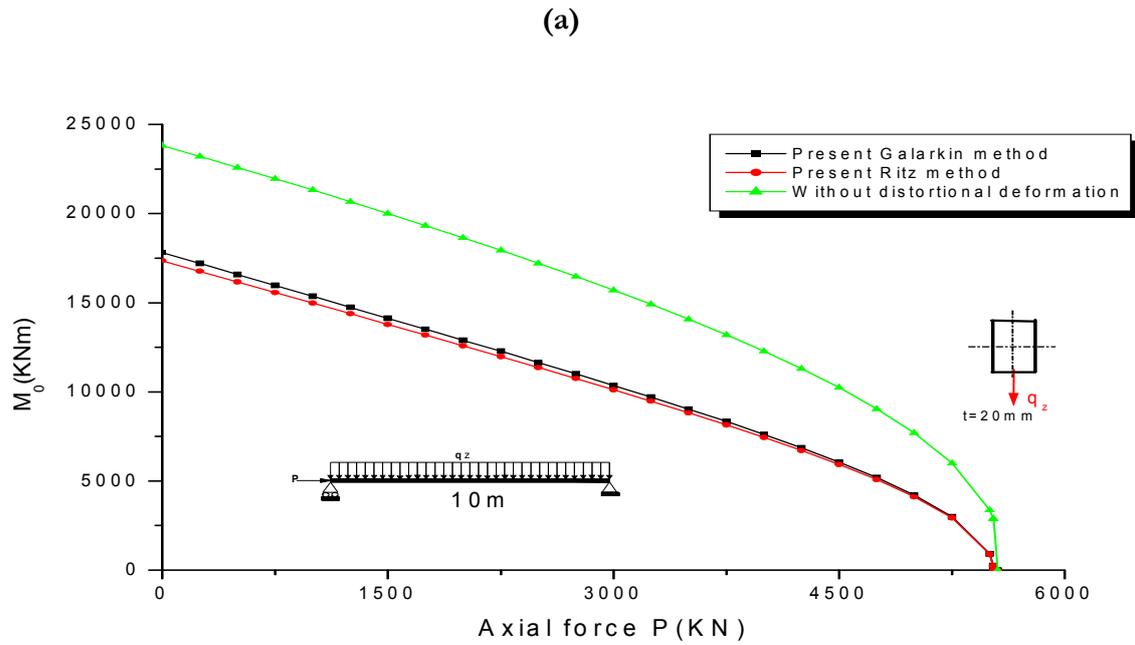


Fig. IV.4 : L'interaction Moment de déversement-Charge axiale pour une poutre en box sous un chargement repart au niveau de la semelle inférieure (a) Box avec $t=20\text{ mm}$, (b) Box avec $t=25\text{ mm}$.

IV.4. Conclusion:

Cette partie présente et discute les résultats de l'étude comparative effectuée afin de valider et d'évaluer la performance de la formule proposée dans l'analyse de déversement élastique des poutres ou des colonnes de section en box.

Cette étude a porté sur une analyse de déversement non linéaire de plusieurs poutres simplement appuyées soumises à des charges latérales réparties appliqués à des différentes positions dans la section ainsi que des charges axiales. Les résultats obtenus à partir de l'analyse du modèle, sont numériquement mis en œuvre au moyen de deux méthodes *Galarkin* et *Ritz*.

Dans les cas envisagés dans la validation et la comparaison, les résultats présentés comprennent : la charge axiale critique et le moment critique donnés au moyen de l'équation (III.25), les solutions numériques obtenues par la méthode de *Galarkin* et *Ritz*, l'analyse par éléments finis Shell, les valeurs de la méthode classique sans l'effet de la distorsion et les valeurs déduites de la formule de l'EC3(IV.1).

Généralement, et au moyen de quelques exemples numériques, les résultats obtenus à l'aide de la formule proposée sont en bon accord avec ceux obtenus par des solutions de simulations par éléments finis. Sur la base de cette étude comparative, il est possible de conclure que la formule proposée donne des estimations raisonnables et mieux que celles obtenues par les autres modèles qui ignorent l'effet de distorsion, ainsi que celles obtenues par les formules normatives.

Conclusion générale

Conclusion générale:

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à donner une solution au problème de déversement des poutres à parois minces et à sections fermées comme celle d'un box. Dans cette étude, un nouvel modèle cinématique non linéaire a été adopté pour analyser la stabilité et le comportement des éléments (colonnes-poutres) en box. En plus des variables cinématiques conventionnels, l'effet de déformation de distorsion (l'effet de Losange) d'une section est introduit.

Les équations d'équilibre pour un chargement axial et de flexion sont déduites en utilisant la procédure de *Galarkin*. Ces équations qui gèrent l'équilibre élastiques sont réalisées à partir de l'état stationnaire. Puis, les modes de déplacements en flexion, en torsion et en distorsion sont rapprochés en utilisant une fonction sinusoïdale afin d'en tirer les équations d'équilibre algébriques, et ce dans le cas d'une poutre simplement appuyée.

L'analyse de la stabilité d'un élément en box est étudiée en tenant compte le déplacement initial qui correspond à l'état précritique ou l'état fondamental. Cet état fondamental peut être obtenu par une approximation suffisante au moyen de la théorie de linéarisation. A partir de la condition de nullité de la matrice de rigidité tangente, on a déterminé l'expression d'une équation simple à utiliser et qui permet de prévoir les solutions analytiques. En plus, ces solutions qui concernent les moments de déversement latéral ainsi que la charge axiale de flambement pour un élément en box, peuvent être dérivées en utilisant la méthode de *Ritz* appliqué dans l'équation de la variation de l'énergie de déformation.

Les solutions analytiques proposées prennent en considération l'effet de déformation de distorsion, la hauteur de charge (excentricité), et l'intensité de la charge axiale de compression pour une poutre à parois minces en box soumise à des charges uniformément réparties.

Une étude comparative des résultats effectuée afin de valider et d'évaluer la performance de la formule proposée dans l'analyse de déversement élastique des poutres ou des colonnes de section en box. Cette étude a porté sur une analyse de déversement non linéaire de plusieurs poutres simplement appuyées soumises à des charges latérales réparties appliqués à des différentes positions dans la section ainsi que des charges axiales. Dans les cas envisagés, les résultats présentés comprennent : la charge axiale critique et le moment critique donnés au moyen de l'équation (III.25), les solutions numériques obtenues par la méthode de *Galarkin* et *Ritz*, l'analyse par éléments finis

Shell, les valeurs de la méthode classique sans l'effet de la distorsion et les valeurs déduites de la formule de l'EC3.

Les résultats de calcul du moment de déversement quand la charge axiale est nulle, dans le cas d'une charge axiale uniquement, et dans le cas d'une interaction : moment-charge axiale pour les différentes positions de hauteur de charge sont comparés avec les autres résultats. Cependant, les charges de déversement latéral ou de flambement évalués par le modèle proposé atteignent des approximations raisonnables.

A partir de ce qui 'a été obtenu comme résultats, les méthodes classiques qui ignorent l'effet de déformation de distorsion sont loin d'être valable pour prédire la stabilité d'un élément en box, et cette conclusion peut être confirmé par les différentes valeurs de l'erreur relative. De ce fait, on peut conclure que:

- les résultats obtenus à l'aide de la formule proposée sont en bon accord avec ceux obtenus par des solutions de simulations par éléments finis utilisant le logiciel ABAQUS;
- l'effet de déformation de distorsion n'a pas d'incidence sur la charge axiale critique.
- Les moments de déversement qui résultent de la méthode de *Ritz* sont parfaitement conformes aux solutions analytiques dérivées de la méthode de *Galarkin* ;
- La méthode analytique classique qui ignore l'effet de déformations de distorsion, surévalue largement la résistance réelle de déversement latéral ;
- Les valeurs des moments de déversement de l'Eurocode 3 obtenus par l'équation (IV.1), sont pratiquement similaires à ceux obtenus par les méthodes classiques (sans l'effet de distorsion) ;
- Les moments de déversement calculés selon la formule de l'Eurocode 3 sont plus élevés que ceux des solutions numériques pour toutes les longueurs considérées. En conséquence, la résistance des éléments en box au déversement latéral est alors surestimée ;
- que la formule proposée donne des estimations raisonnables et mieux que celles obtenues par les autres modèles qui ignorent l'effet de distorsion, ainsi que celles obtenues par les formules normatives.
- l'effet de déformation de distorsion est très important pour prédire la stabilité des éléments en box, et doit joindre la torsion de toute la section.

Finalement, il est très requérant de noter que lorsque l'effet de déformation de distorsion est omis dans les théories classiques de stabilité tel que celles adoptées dans l'Eurocode 3, la résistance d'un élément à parois minces en box au déversement latéral est extrêmement surestimée.

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

- [1] **ABAQUS (2005)**; ABAQUS Standard User's Manual, Version 6.5, ABAQUS Inc. Providence, RI.
- [2] **Abaqus standard user's manual**, version 6.4. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, RI, USA: Abaqus; 2003.
- [3] **Additif 80 (1981)**; Règles de calcul des constructions en acier. Construction Métallique, N°1, 1981.
- [4] **AISC-ASD (1989)**; Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design, Ninth Edition, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
- [5] **AISC-LRFD (1994)**; Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design, American Institute of Steel Construction, Inc., Chicago, IL.
- [6] **AISC (2005)**; Specification for Structural Steel Buildings, 13th Ed. Chicago: American Institute of Steel Construction, 2005.
- [7] **AISC (2010)**; Specification for Structural Steel Buildings, ANSI/AISC 360-10, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
- [8] **Andrade A., Camotim D. (2005)**; Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 131, N° 6, June 1, 2005, pp. 586-579.
- [9] **Andrade A., Camotim D., Dinis P. B. (2007)** Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. Computers & Structures 2007, 85, 1343-1359.
- [10] **Andrad A. (2012)**; One-dimensional models for the spacial behaviour of tapered thin-walled bars with open cross-sections: static, dynamic and buckling analysis, PhD Thesis, Faculty of Sciences and Technology, University of Coimbra 2012.
- [11] **Argyris L.H., Hilbert O., Maljannakis G.A., Scharpf D.W. (1979)**; On Geometrical stiffness of a beam in space – A consistent Virtual Work approach., Computer Meth. Appl. Mech. Engrg., 20, 1979, pp. 105-131.

- [12] **ASCE (1984)**; Structural Plastics Design Manual (No. 63). 1st Ed. New York: American Society of Civil Engineers, 1984, 693-798.
- [13] **Asgarian B., Soltani M., Mohri F. (2013)**; Lateral-Torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 62, 2013, pp. 96-108.
- [14] **Aswandy , Greiner R. (2005)**; Design of members under bending and axial compression with intermediate lateral restraints, *Proceedings Eurosteel 2005 Maastricht*.
- [15] **Ayrton W. E., Perry J., (1886)**; On struts. *The Engineer*, 62, pp. 464.
- [16] **Bazant Z. P. (1968)**; Non uniform torsion of thin-walled bars of variable section. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol.25, 1968, pp. 17-39.
- [17] **Benscoter S. (1954)**; A theory of torsion bending for multicell beams. *Journal of Applied Mechanics*, 25-34.
- [18] **Benyamina A.B., Meftah, S. A., Mohri F and Daya E. M**, Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams. *Engineering Structures*. 2013. 56, 1207-1219.
- [19] **Bijlaard, Steenbergen, (2002)**; "Lateral torsional stability of members with lateral restraints at various locations between the supports", *Proceedings Eurosteel 2002 Coimbra*, pp. 191-200.
- [20] **BIS (2008)**; IS 800- 2007, Indian Standard, code of practice for general construction in steel (second edition), Bureau of Indian Standards, New Delhi, 2008.
- [21] **Boissonnade N. (2002)**; Mise au point d'un élément fini de type poutre a section variable et autres applications à la construction métallique. Université Clermont II – Déc. 2002.
- [22] **Boissonnade N., Greiner R., Jaspard J.P, Lindner J. (2006)** ; Design rules in EN 1993-1-1 for member stability, *ECCS Technical Committee 8: Structural Stability*, P119, European Convention for Constructional Steelwork, Brussels.
- [23] **Boley B.A. and Zimnoch V.P. (1952)**; Lateral Buckling of Non-Uniform Beams, *journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 19, No. 8, 1952, pp 567.
- [24] **Bradford M.A. Cuk P.E. (1988A)**; Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 4, N°5, May 1988, pp. 977-997.
- [25] **Braham M. (1997A)**; Elastic lateral torsional buckling of web tapered I-beams subjected to end moments. *Proceedings of the Steel Structures and Bridges Conference, Brno, May 1997*.
- [26] **Braham M. Maquoi R. (1998)**; Merchant-Rankine's concept brought again into honour for web-tapered I-section steel members. *Festschrift Joachim Lindner, Mars 1998*.
- [27] **Bryan G.H., (1891)**; On the Stability of a Plane Plate Under Thrusts in its Own Plane, with Applications to The Buckling of the Sides of a Ship, *Proceedings of the London Mathematical Society* , Vol. 22, London, United Kingdom, pp. 55-67.
- [28] **Brown T.G. (1981)**; Lateral torsional buckling of tapered I-beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 107, ST 4, April 1981, pp. 689-697.

- [29] **BSI (1985)**; British Standard Institution, Structural Use of Steelwork in Building. BS 5950: Part I, London, BSI, 1985.
- [30] **Bureau A. (2006)**; NCCI: Elastic critical moment for lateral torsional buckling. Paris CTICM, 2006.
- [31] **Chandra R, Stemple A. D, Chopra I.** Thin-walled composite beams under bending torsional and extensional loads, *Journal of aircraft* 1990, 27 (7), 619-636.
- [32] **CEN (1992)**; Design of steel structures, Part 1.1: General rules for buildings. Draft Document ENV 1993-1-1, Brussels, European Committee for Standardisation, 1992.
- [33] **CEN (2005)**; Eurocode 3, Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels, European Committee for Standardization, 2005.
- [34] **Chai H. Y, Sung. C. L (2011)**; Stability of Structures: Principles and Applications, Elsevier Inc.
- [35] **Chan S.L. (1990)**; Buckling analysis of structures composed of tapered members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 7, July 1990, pp. 1893-1906.
- [36] **Clark J. W, Hill H. N. (1960)**; Lateral Buckling of Beams, *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol 86, no. ST7, 1960.
- [37] **De Ville de Goyet V. (1989)**; L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique. Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique de Docteur en Sciences Appliquées, Université de Liège, 1989.
- [38] **Djalaly H. (1974)**; La théorie du second-ordre de la stabilité élastique des barres à parois minces et profil ouvert et son application. *Annales de l'ITBTP*, N° 171, Sept. 1974, pp. 130-162.
- [39] **ECCS (2010)**; Design of steel structures, Eurocode 3: Design of steel structures: Part 1-1 – General rules and rules for buildings 1st Edition, European Convention for Constructional Steelwork, Ernst & Sohn. 2010.
- [40] **Eurocode 3**, Design of steel structures, Part1.1: General rules of buildings European committee for Standardisation, draft Document ENV 1993-1-1, Brussels, 1992.
- [41] **Ermopoulos J.C. (1997)**; Equivalent buckling length of non-uniform members. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 42, N°2, 1997, pp. 141-159.
- [42] **Fogel C.M. Ketter R.L. (1962)**; Elastic strength of tapered columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 88, ST 5, October 1962, pp. 67-106.
- [43] **Fraser D.J. (1983)**; Design of tapered member portal frames. *Journal of Constructional Steel Research*, N°3, 1983, pp. 20-26.
- [44] **Fu. C.C and Hsu Y.T**, The development of an improved curvilinear thin-walled Vlasov element, *Computer and Structures*, 1990, 34(2), 313-318.
- [45] **Galambos T.V. (1998)**; Guide to Stability Design Criteria For Metal Structures, Fifth Edition, John Willey & Sons, Inc., New York, NY.

- [46] **Gardner L, Nethercot D.A. (2004)**; Designers' Guide to EN 1993-1-1 Eurocode 3: Design of steel structures, General rules and rules for buildings. London Thomas Telford Publishing, 2004.
- [47] **Green A.E., Zerna W. (1968)**; Theoretical elasticity, 2nd ed., Oxford University Press, Ely House, London 1968, U.K.
- [48] **Greiner R., Ofner R.G. (1999)**; Lateral torsional buckling of beam-columns, Theoretical background 5. Report, ECCS -Validation Group-, September 1999.
- [49] **Hirt M.A., Bez R., Nussbaumer A.(2006)**; Construction Métallique, Notions Fondamentales et Méthodes de Dimensionnement, Traité de Génie Civil, vol.10, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- [50] **Ioannidis G.I, Kounadis A.N. (1994)**; Lateral post-buckling analysis of mono-symmetric I-beams under uniform bending. Journal Constructional Steel Research, 30, 1994; pp 1–12.
- [51] **Kim J. H and Kim. Y.Y**, Thin walled closed box beam element for static and dynamic analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45, 473-490.
- [52] **Kim J. H and Kim. Y.Y**, One-dimensional analysis of thin walled closed beams having general cross-sections, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49, 653-668.
- [53] **Kim Y.D. (2010)**; Behavior and Design of Metal Building Frames with General Prismatic and Web-Tapered Steel I-Section Members, PhD Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA.
- [54] **Kitipornchai S., Trahair N.S. (1975)**; Elastic behaviour of tapered mono symmetric I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.101, ST 8, August 1975, pp. 1661-1678.
- [55] **Kitipornchai S., Trahair N.S. (1972)**; Elastic stability of tapered I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, ST 3, March 1972, pp. 713-728.
- [56] **Kounadis A.N., Ioannidis G. I. (1994)**; Lateral post-buckling analysis of beam columns. ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 120(4), 1994; pp 695–706.
- [57] **Kurrer K.E. (2002)**; Accueil de la théorie de la torsion de Saint-Venant dans la littérature technique allemande jusqu'en 1950. Construction Métallique, N°1, 2002, pp. 5-16.
- [58] **Laudiero F and Zaccaria D**, Finite element analysis of stability of thin-walled beams of open section. International Journal of Mechanical Sciences 1988, 30 (8), 543-557.
- [59] **Lee G. C., Ketter R. L., and Hsu, T. L. (1981)**; The Design of Single Story Rigid Frames, Metal Building Manufacturers Association, Cleveland, OH.
- [60] **Lee G. C., Morrell M. L., and Ketter R. L. (1972)**; Design of Tapered Members, Welding Research Council, Bulletin No. 173.
- [61] **Lee G.C., Szabo B.A. (1967)**; Torsional response of tapered I-girders. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST 5, October 1967, pp. 233-252.

- [62] **Lee G.C. (1956)**; Non-Uniform Torsion of Tapered I-Beams. Journal of the Franklin institute, Vol. 262, July. 1956, p. 37.
- [63] **Lee Z, Shu TG (2008)**; Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, 2008, pp. 1379-1393.
- [64] **Lopez A., Serna M.A, Puente I., Yong D.J. (2006)**; Equivalent uniform moment factors for Lateral-torsional buckling of steel members, Journal of Constructional Steel Research, vol. 62, 2006, pp. 566-580.
- [65] **Machado S. P and Cortinez V. H**, Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation. Engineering Structures , 2005, 27 ,1185-1196.
- [66] **Maquoi R., Rondal J. (1978)**; Mise en équation des nouvelles courbes Européennes de flambement, Construction Métallique, (1), pp. 17-30.
- [67] **Maquoi R. (1999)**; Statique des constructions : introduction à l'instabilité élastique. Cours dispensé à l'Université de Liège, 1999.
- [68] **Marques L. (2012)**; Tapered steel members: Flexural and lateral-torsional buckling, Doctor Thesis, Faculty of Sciences and Technology, University of Coimbra 2012.
- [69] **Massonnet C. (1992)**; Résistance des matériaux – Tome I. De Boeck-Wesmael, Bruxelles.
- [70] **Massonnet C. (1954)**; Tensions de cisaillement dans les pièces fléchies ; centre de cisaillement. Note B-10.22 CECM. Centre de Recherches Scientifiques et Techniques des Fabrications Métalliques, Bruxelles, Octobre 1954.
- [71] **Mendera Z. (1994)**; Tapered steel columns design rules as an addition to Eurocode 3 recommendations. International Advanced Course and Workshop, Tempus JEP 218493/3, Cracow, June 1994, pp. 91-103.
- [72] **Merchant W. (1954)**; The failure load of rigid jointed frameworks as influenced by stability. The Structural Engineer, Vol. 32, 1954.
- [73] **Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M.**; Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. Thin-Walled Structures 39(11), 2001, pp 907–938.
- [74] **Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M.**; Lateral post-buckling analysis of open section beams. Thin-Walled Structures, 40, 2002, pp. 1013–1036.
- [75] **Mohri F, Brouki A and Roth J. C**, Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained of mono-symmetric thin walled beams. Journal of Constructional steel Research. 2003, 59, 63-90.
- [76] **Mohri F, Bouzerira C and Potier-Ferry M**, Lateral buckling of tin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads -Walled Structures, , 2008, 46, 290–302.
- [77] **Mohri.F, N. Damil, M. Potier-Ferry** Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections. Applied Mathematical Modeling, 2013, 37, 3526-3540.

- [78] **Mohri.F, Sid Ahmed MEFTAH, Nouredine DAMIL:** A large torsion beam finite element model for tapered thin-walled beam with open cross sections. *Engineering Structures*,2015, 99, 132-148.
- [79] **Murphy P.R. (2012);** Interactive behaviour of restrained elements in metal building systems, PhD Thesis, Jawaharlal Nehru Technological University, Faculty of Civil Engineering, Jawaharlal Nehru 2012.
- [80] **Nakane K. (1984);** The design for instability of non-uniform beams. *Proceedings of the 9th Australian Conference on Mechanics of Structures and Materials, Sydney*, pp. 18-22.
- [81] **Nethercot D.A. (1973a);** Lateral buckling of tapered beams. *Publications IABSE*, Vol. 33, N°2, 1973, pp. 173-192.
- [82] **Ofner, R., (2003):** Buckling check of members and frames based on numerical simulations, Prague 2003.
- [83] **Olowokere O. (1994);** On the design of web tapered, unequal flanged structural steel columns. *Journal of Constructional Steel Research*, N°4, 1984, pp. 81-116.
- [84] **Polyzois D. Li Quing (1993);** Stability of web tapered beams. *Proceedings of the Annual Technical Session of the Structural Stability Research Council*, 1993, pp. 179-193.
- [85] **Prandtl, L. (1903);** Membrane Analogy. *Physik. Z.*, Vol. 4.
- [86] **Rajasekaran S. (1994);** Equations for tapered thin-walled beams of generic open section. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 120, N°8, August 1994, pp. 1607-1629.
- [87] **R. Dabrowski,** *Curved Thin walled girders. Cement and concrete association: London 1968*
- [88] **Ronagh H.R., Bradford M.A., Attard M.M. (2000B);** Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application. *Computers & Structures*, Vol. 77, N°3, 2000, pp. 301-313.
- [89] **Rondal J, Wurker K G, Dutta D, Wardenier J and Yeomans N,** *Structural stability of hollow sections, Verlag TUV Rheinland GmbH, Koln, 1992.*
- [90] **SA (1998);** *Standards Australia, AS 4100 Steel structures, 1998 edition and 2012 amendment.*
- [91] **Saint-Venant A. J. C. B. (1847);** Mémoire sur la torsion des prismes et sur la forme affectée par leurs sections transversales primitivement planes. *Comptes rendus*, Vol. 24, 1847, pp. 485-488.
- [92] **Shama M. (2010);** *Torsion and Shear Stresses in Ships, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*
- [93] **Shiomi H, Kurata M. (1984);** Strength formula for tapered beam-columns. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 110, N°7, July 1984, pp. 1630-1643.
- [94] **Slivker V.I.;** *Mechanics of Structural Elements, Theory and Applications. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.*
- [95] **Timoshenko S.P. (1957);** *History of strength of materials. McGraw-Hill, New York 1957.*
- [96] **Timoshenko S.P. (1966);** *Théorie de la stabilité élastique. Dunod, 1966.*

- [97] **Tochacek, M. (1995)**; Design of Struts with a variable cross-section. Instability of steel Structures. 1, 103-109.
- [98] **Trahair N.S. (1993)**; Flexural torsional buckling of structures. London: Chapman and Hall, 1993.
- [99] **Trahair N.S, Bradford M.A, Nethercot D.A, Gardner L (2008)**; The behavior and design of steel structures to EC3; fourth edition.. London: Chapman and Hall, 1993.
- [100] **Vlassov V.Z.**; Thin walled elastic beams. Moscow, 1959. [French translation: Pièces longues en voiles minces, Eyrolles, Paris, 1962.
- [101] **Wang C.M. Thevendran V., Teo K. L. Kitipornchai S. (1986)**; Optimal design of tapered beams for maximum buckling strength. Engineering Structures, Vol. 8, N°4, 1986, pp. 276-284.
- [102] **Wang C.M, Kitipornchai S, Thevendran V.(1990)**; Optimal design of I-beams against lateral buckling. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 116, N°9, September 1990, pp. 1902-1923.
- [103] **Washizu K. (1975)**; Variational methods in elasticity and plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, New York 1975, N.Y.
- [104] **Wekezer J.W. (1985)**; Instability of thin-walled bars. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 111, N°7, July 1985, pp. 923-935.
- [105] **Wilde P. (1968)**; The torsion of thin-walled bars with variable cross-section. Archiwum Mechaniki Stosowanej, N°20, April 1968, pp. 431-443.
- [106] **Winter G. (1946)**; Strength of thin Steel Compression Flanges, Transactions of the American Society of Civil Engineering , Vol. 111, pp. 527-554.
- [107] **Yang Y.B., Yau J.D. (1987)**; Stability of beams with tapered I sections. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, N°9, September 1987, pp. 1337-1357.
- [108] **Yoo Chai Hong**, Bimoment contribution to stability of thin-walled assamblages, Computer and Structures, 1980, 11, 465-471.
- [109] **Zhang L and Tong G. S**, Flexural-torsional buckling of thin-walled beam members based on shell buckling theory. Thin walled Structures, 2004, 42, 1665-1687.

Annexes

Annexe 1 : les constantes d'une section en box (après intégration).

$$A_1 = \frac{1}{12} b^3 t$$

$$A_2 = \frac{1}{5} \frac{b^4 t}{b+h}$$

$$A_3 = \frac{1}{4} h^2 b t + \frac{1}{12} b^3 t$$

$$A_4 = \frac{1}{160} b^5 t + \frac{1}{48} h^2 b^3 t + \frac{1}{32} h^4 b t$$

$$A_5 = \frac{9}{144} \left(\frac{1}{2} \frac{b^2}{(b+h)^2} - \frac{h^2}{(b+h)^2} \right) b^3 t^3 + \frac{9}{480} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{2}{(b+h)^2} \right) b^5 t^3 + \frac{9}{672} \frac{b^5 t^3}{(b+h)^2} + \frac{9}{96} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2} +$$

$$\frac{1}{288} \frac{b^7 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{224} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{6}{(b+h)^2} \right) b^7 t$$

$$+ \frac{1}{96} \left(\frac{9b^2 h^2}{(b+h)^2} + h^2 \right) b^3 t + \frac{3}{80} \left(\frac{3}{2} \frac{b^2}{(b+h)^2} - \frac{h^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t + \frac{1}{32} h^4 b t$$

$$A_6 = \frac{1}{112} \frac{b^6 t}{b+h} + \frac{1}{80} \left(\frac{h^2}{b(b+h)} - \frac{3b}{b+h} \right) b^5 t + \frac{1}{48} \left(h^2 - \frac{3h^2 b}{b+h} \right) b^3 t + \frac{1}{16} h^4 b t$$

$$A_7 = \frac{2}{5} \frac{b^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{35} \frac{b^5 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{4} h^2 b t$$

$$A_8 = \frac{9}{144} \left(\frac{b^2}{2(b+h)^2} - \frac{h^2}{(b+h)^2} \right) b^3 t^3 + \frac{9}{480} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{2}{(b+h)^2} \right) b^5 t^3 + \frac{9}{672} \frac{b^5 t^3}{(b+h)^2} + \frac{9}{96} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2} +$$

$$\frac{1}{288} \frac{b^7 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{224} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{6}{(b+h)^2} \right) b^7 t$$

$$+ \frac{1}{12} \left(\frac{9}{8} \frac{b^2 h^2}{(b+h)^2} + \frac{h^2}{8} \right) b^3 t + \frac{3}{80} \left(\frac{3}{2} \frac{b^2}{(b+h)^2} - \frac{h^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t + \frac{1}{32} h^4 b t$$

$$A_9 = \frac{36}{175} \frac{b^5 t^5}{(b+h)^4} + \frac{1625}{3696} \frac{b^7 t^3}{(b+h)^4} + \frac{27}{144} \left(\frac{3b^4}{(b+h)^4} - \frac{2h^2}{(b+h)^2} \right) b^3 t^3 + \frac{27}{48} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2}$$

$$+ \frac{27}{240} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{8b^2}{(b+h)^4} \right) b^5 t^3 + \frac{713}{4576} \frac{b^9 t}{(b+h)^4} + \frac{3}{16} \frac{b^5 h^2 t}{(b+h)^2}$$

$$+ \frac{1}{32} h^4 b t + \frac{1}{112} \left(\frac{h^2}{b^2 (b+h)^2} - \frac{54b^2}{(b+h)^4} \right) b^7 t + \frac{3}{80} \left(\frac{27}{2} \frac{b^4}{(b+h)^4} - \frac{2h^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t$$

$$A_{10} = \frac{1}{24} b^3 h t + \frac{1}{8} h^3 b t$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\frac{19}{168} \frac{b^6 t^3}{(b+h)^3} + \frac{3}{80} \left(\frac{7b}{(b+h)^3} + \frac{3h^2}{b^2(b+h)^2} \right) b^5 t^3 - \frac{27}{144} \left(\frac{b^3}{(b+h)^3} + \frac{2h^2}{(b+h)^2} \right) b^3 t^3 \\
&+ \frac{27}{48} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2} - \frac{5}{88} \frac{b^8 t}{(b+h)^3} + \frac{1}{16} h^4 b t \\
&+ \frac{1}{112} \left(\frac{h^2}{b^2(b+h)^2} + \frac{27b}{(b+h)^3} \right) b^7 t + \frac{1}{80} \left(\frac{h^2}{b(b+h)} - \frac{27b^3}{(b+h)^3} - \frac{6h^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t + \frac{3}{48} \left(\frac{3b^2 h^2}{(b+h)^2} - \frac{h^2 b}{b+h} \right) b^3 t \\
A_{12} &= \frac{3}{5} \frac{b^3 h t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{70} \frac{b^5 h t}{(b+h)^2} + \frac{1}{8} h^3 b t \\
A_{13} &= \frac{17}{35} \frac{b^5 t}{(b+h)^2} \\
A_{14} &= \frac{1}{5} \frac{b^3 h t^3}{(b+h)^2} - \frac{1}{10} \frac{b^4 h t}{b+h} + \frac{1}{8} h^3 b t \\
A_{15} &= -\frac{1}{5} \frac{b^4 t}{b+h} + \frac{1}{4} h^2 b t \\
A_{16} &= \frac{1}{224} \frac{b^6 t}{b+h} + \frac{1}{160} \left(\frac{h^2}{b(b+h)} - \frac{3b}{b+h} \right) b^5 t + \frac{1}{96} \left(h^2 - \frac{3h^2 b}{(b+h)^2} \right) b^3 t + \frac{1}{32} h^4 b t \\
A_{17} &= -\frac{19}{336} \frac{b^6 t^3}{(b+h)^3} + \frac{9}{480} \left(\frac{7b}{(b+h)^3} + \frac{3h^2}{b^2(b+h)^2} \right) b^5 t^3 - \frac{27}{144} \left(\frac{b^3}{2(b+h)^3} + \frac{h^2}{(b+h)^2} \right) b^3 t^3 + \\
&\frac{27}{96} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2} - \frac{5}{176} \frac{b^8 t}{(b+h)^3} + \frac{1}{32} h^4 b t \\
&+ \frac{1}{224} \left(\frac{h^2}{b^2(b+h)^2} + \frac{27b}{(b+h)^3} \right) b^7 t + \frac{1}{80} \left(\frac{h^2}{2b(b+h)} - \frac{27b^3}{2(b+h)^3} - \frac{3h^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t + \frac{3}{96} \left(\frac{3b^2 h^2}{(b+h)^2} - \frac{h^2 b}{b+h} \right) b^3 t \\
A_{18} &= \frac{1}{10} \frac{b^3 h^2 t^3}{(b+h)^2} - \frac{47}{1008} \frac{b^7 t}{(b+h)^2} - \frac{1}{8} \frac{b^4 h^2 t}{b+h} + \frac{1}{80} \left(\frac{2h^2}{b(b+h)} + \frac{9b^2}{(b+h)^2} \right) b^5 t + \frac{1}{16} h^4 b t \\
A_{19} &= \frac{1}{8} h^2 b t + \frac{1}{24} b^3 t \\
A_{20} &= \frac{1}{5} \frac{b^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{70} \frac{b^5 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{8} h^2 b t \\
A_{21} &= \frac{2}{5} \frac{b^3 t^3}{(b+h)^2} \\
A_{22} &= \frac{2}{5} \frac{b^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{1}{4} h^2 b t
\end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{12} h^3 t$$

$$B_2 = -\frac{1}{5} \frac{h^4 t}{b+h}$$

$$B_3 = \frac{1}{4} b^2 h t + \frac{1}{12} h^3 t$$

$$B_4 = \frac{1}{160} h^5 t + \frac{1}{48} b^2 h^3 t + \frac{1}{32} b^4 h t$$

$$B_5 = \frac{9}{144} \left(\frac{h^2}{2(b+h)^2} - \frac{b^2}{(b+h)^2} \right) h^3 t^3 + \frac{9}{480} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{2}{(b+h)^2} \right) h^5 t^3$$

$$+ \frac{9}{672} \frac{h^5 t^3}{(b+h)^2} + \frac{9}{96} \frac{h^3 b^2 t^3}{(b+h)^2} + \frac{1}{288} \frac{h^7 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{224} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{6}{(b+h)^2} \right) h^7 t$$

$$+ \frac{1}{96} \left(\frac{9b^2 h^2}{(b+h)^2} + b^2 \right) h^3 t + \frac{3}{80} \left(\frac{3}{2} \frac{h^2}{(b+h)^2} - \frac{b^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t + \frac{1}{32} b^4 h t$$

$$B_6 = -\frac{1}{112} \frac{h^6 t}{b+h} - \frac{1}{80} \left(\frac{b^2}{h(b+h)} - \frac{3h}{b+h} \right) h^5 t - \frac{1}{48} \left(b^2 - \frac{3b^2 h}{b+h} \right) h^5 t - \frac{1}{16} b^4 h t$$

$$B_7 = \frac{2}{5} \frac{h^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{35} \frac{h^5 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{4} b^2 h t$$

$$B_8 = \frac{9}{144} \left(\frac{h^2}{2(b+h)^2} - \frac{b^2}{(b+h)^2} \right) h^3 t^3 + \frac{9}{480} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{2}{(b+h)^2} \right) h^5 t^3$$

$$+ \frac{9}{672} \frac{h^5 t^3}{(b+h)^2} + \frac{9}{96} \frac{h^3 b^2 t^3}{(b+h)^2} + \frac{1}{288} \frac{h^7 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{224} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{6}{(b+h)^2} \right) h^7 t$$

$$+ \frac{1}{96} \left(\frac{9b^2 h^2}{(b+h)^2} + b^2 \right) h^3 t + \frac{3}{80} \left(\frac{3}{2} \frac{h^2}{(b+h)^2} - \frac{b^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t + \frac{1}{32} b^4 h t$$

$$B_9 = \frac{36}{175} \frac{h^5 t^5}{(b+h)^4} + \frac{1625}{3696} \frac{h^7 t^3}{(b+h)^4} + \frac{27}{144} \left(\frac{3h^4}{(b+h)^4} - \frac{2b^2}{(b+h)^2} \right) h^3 t^3$$

$$+ \frac{27}{48} \frac{h^3 b^2 t^3}{(b+h)^2} + \frac{27}{240} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{8h^2}{(b+h)^4} \right) h^5 t^3 + \frac{713}{4576} \frac{h^9 t}{(b+h)^4} + \frac{3}{16} \frac{h^5 b^2 t}{(b+h)^2}$$

$$+ \frac{1}{32} b^4 h t + \frac{1}{448} \left(\frac{4b^2}{h^2(b+h)^2} - \frac{216h^2}{(b+h)^4} \right) h^7 t + \frac{3}{80} \left(\frac{27}{2} \frac{h^4}{(b+h)^4} - \frac{2b^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t$$

$$B_{10} = \frac{1}{24} h^3 b t + \frac{1}{8} b^3 h t$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{19}{168} \frac{h^6 t^3}{(b+h)^3} - \frac{3}{80} \left(\frac{7h}{(b+h)^3} + \frac{3b^2}{h^2(b+h)^2} \right) h^5 t^3 + \frac{27}{144} \left(\frac{h^3}{(b+h)^3} + \frac{2b^2}{(b+h)^2} \right) h^3 t^3 \\
&- \frac{27}{48} \frac{h^3 b^2 t^3}{(b+h)^2} + \frac{5}{88} \frac{h^8 t}{(b+h)^3} - \frac{1}{16} b^4 h t \\
&- \frac{1}{112} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} + \frac{27h}{(b+h)^3} \right) h^7 t - \frac{1}{80} \left(\frac{b^2}{h(b+h)} - \frac{27h^3}{(b+h)^3} - \frac{6b^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t \\
&- \frac{3}{48} \left(\frac{3b^2 h^2}{(b+h)^2} - \frac{b^2 h}{b+h} \right) h^3 t \\
B_{12} &= \frac{3}{5} \frac{h^3 b t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{70} \frac{h^5 b t}{(b+h)^2} + \frac{1}{8} b^3 h t \\
B_{13} &= \frac{17}{35} \frac{h^5 t}{(b+h)^2} \\
B_{14} &= -\frac{1}{5} \frac{h^3 b t^3}{(b+h)^2} + \frac{1}{10} \frac{h^4 b t}{b+h} - \frac{1}{8} b^3 h t \\
B_{15} &= \frac{1}{5} \frac{h^4 t}{b+h} - \frac{1}{4} b^2 h t \\
B_{16} &= -\frac{1}{224} \frac{h^6 t}{b+h} - \frac{1}{160} \left(\frac{b^2}{h(b+h)} - \frac{3h}{b+h} \right) h^5 t - \frac{1}{96} \left(b^2 - \frac{3b^2 h}{(b+h)^2} \right) h^3 t - \frac{1}{32} b^4 h t \\
B_{17} &= \frac{19}{336} \frac{h^6 t^3}{(b+h)^3} - \frac{9}{480} \left(\frac{7h}{(b+h)^3} + \frac{3b^2}{h^2(b+h)^2} \right) h^5 t^3 + \frac{27}{144} \left(\frac{h^3}{2(b+h)^3} + \frac{b^2}{(b+h)^2} \right) h^3 t^3 \\
&- \frac{27}{96} \frac{h^3 b^2 t^3}{(b+h)^2} + \frac{5}{176} \frac{h^8 t}{(b+h)^3} - \frac{1}{32} b^4 h t \\
&- \frac{1}{224} \left(\frac{b^2}{h^2(b+h)^2} + \frac{27h}{(b+h)^3} \right) h^7 t - \frac{1}{80} \left(\frac{b^2}{2h(b+h)} - \frac{27h^3}{2(b+h)^3} - \frac{3b^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t \\
&- \frac{1}{4} \left(\frac{3}{8} \frac{h^2 b^2}{(b+h)^2} - \frac{b^2 h}{8(b+h)} \right) h^3 t \\
B_{18} &= \frac{1}{10} \frac{b^2 h^3 t^3}{(b+h)^2} - \frac{47}{1008} \frac{h^7 t}{(b+h)^2} - \frac{1}{8} \frac{b^2 h^4 t}{b+h} + \frac{1}{80} \left(\frac{2b^2}{h(b+h)} + \frac{9h^2}{(b+h)^2} \right) h^5 t + \frac{1}{16} b^4 h t \\
B_{19} &= \frac{1}{8} b^2 h t + \frac{1}{24} h^3 t \\
B_{20} &= \frac{1}{5} \frac{h^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{17}{70} \frac{h^5 t}{(b+h)^2} + \frac{1}{8} b^2 h t \\
B_{21} &= \frac{2}{5} \frac{h^3 t^3}{(b+h)^2}; \quad B_{22} = \frac{2}{5} \frac{h^3 t^3}{(b+h)^2} + \frac{1}{4} b^2 h t; \quad B_{23} = \frac{1}{2} b h t
\end{aligned}$$

Annexe 2 : les constantes d'une section en box (formes mathématiques).

$$\begin{aligned}
A1 &= \int_A s^2 dA; & A2 &= \int_A s\psi_w dA; & A3 &= \int_A \left(\frac{h^2}{4} + s^2\right) dA; \\
A4 &= \int_A \left(\frac{h^2}{8} + \frac{1}{2}s^2\right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} + s^2\right) dA; \\
A5 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_w^2 \right] \left(\frac{h^2}{4} + s^2\right) dA; \\
A6 &= \int_A \left(\frac{h^2}{4} + s^2\right) \left(\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w\right) dA \\
A7 &= \int_A \left[\left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \psi_w^2 \right] dA; \\
A8 &= \int_A \left[\left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \psi_w^2 \right] \left(\frac{h^2}{8} + \frac{1}{2}s^2\right) dA; \\
A9 &= \int_A \left[\left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \psi_w^2 \right] \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_w^2 \right] dA; \\
A10 &= \int_A \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) \left(\frac{h^2}{4} + s^2\right) dA \\
A11 &= \int_A \left[\left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \psi_w^2 \right] \left(\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w\right) dA; \\
A12 &= \int_A \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) \cdot \left[\left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \psi_w^2 \right] dA \\
A13 &= \int_A \psi_w \psi_w dA; & A14 &= \int_A \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) \cdot \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] dA \\
A15 &= \int_A \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] dA; \\
A16 &= \int_A \left(\frac{h^2}{8} + \frac{1}{2}s^2\right) \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] dA; \\
A17 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_w^2 \right] \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] dA; \\
A18 &= \int_A \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] \left[\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) - s\psi_w \right] dA; \\
A19 &= \int_A \left(\frac{h^2}{8} + \frac{1}{2}s^2\right) dA; & A20 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_w^2 \right] dA \\
A21 &= \int_A \left(n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) \cdot \left(n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) dA \\
A22 &= \int_A \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) \left(\frac{h}{2} - n \cdot \frac{\partial \psi_w}{\partial s}\right) dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B1 &= \int_A s^2 dA; & B2 &= \int_A s \psi_v dA; & B3 &= \int_A \left(\frac{b^2}{4} + s^2 \right) dA; & B4 &= \int_A \left(\frac{b^2}{8} + \frac{1}{2} s^2 \right) \cdot \left(\frac{b^2}{4} + s^2 \right) dA; \\
B5 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_v^2 \right] \left(\frac{b^2}{4} + s^2 \right) dA; & B6 &= \int_A \left(\frac{b^2}{4} + s^2 \right) \cdot \left(-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right) dA \\
B7 &= \int_A \left[\left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \psi_v^2 \right] dA; & B8 &= \int_A \left[\left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \psi_v^2 \right] \left(\frac{b^2}{8} + \frac{1}{2} s^2 \right) dA; \\
B9 &= \int_A \left[\left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \psi_v^2 \right] \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_v^2 \right] dA; \\
B10 &= \int_A \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) \left(\frac{b^2}{4} + s^2 \right) dA \\
B11 &= \int_A \left[\left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \psi_v^2 \right] \cdot \left(-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right) dA; \\
B12 &= \int_A \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) \cdot \left[\left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \psi_v^2 \right] dA \\
B13 &= \int_A \psi_v \psi_v dA; & B14 &= \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) \cdot \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] dA \\
B15 &= \int_A \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] dA \\
B16 &= \int_A \left(\frac{b^2}{8} + \frac{1}{2} s^2 \right) \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] dA; \\
B17 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_v^2 \right] \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] dA; \\
B18 &= \int_A \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) - s \psi_v \right] dA; \\
B19 &= \int_A \left(\frac{b^2}{8} + \frac{1}{2} s^2 \right) dA; & B20 &= \int_A \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \psi_v^2 \right] dA \\
B21 &= \int_A \left(n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) \cdot \left(n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) dA \\
B22 &= \int_A \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) dA \\
B23 &= \int_A \left(\frac{b}{2} + n \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial s} \right) dA
\end{aligned}$$