*N° d'ordre :*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

# *THESE DE DOCTORAT*

*Présentée par*

**Ahmed KEDDI**

*Spécialité :* **Mathématiques**
*Option :* **Equations aux dérivées partielles**

*Intitulée*

« ....................................................................... »

# Comportement asymptotique de quelques systèmes thermoélastiques

*Soutenue le 04/03/18.*
*Devant le jury composé de :*

***Président :*** Ali HAKEM, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes.
***Examinateurs:*** Kacem BELGHABA, Professeur à l'Université d'Oran Essenia.
Selma BENDIMERAD, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes.
Aissa GUESMIA, Professeur à l'Université de Lorraine (Metz)
***Directeur de thèse :*** Abbes BENAISSA, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes.
***Co-Encadreur :*** Salim MESSAOUDI, Professeur à l'Université de KFUPM (Arabie Saoudite)

# Table des matières

**Dédicas**

Je dédis le fruit de ce modeste travail :

***À***

La mémoire de mes frères Mohammed et Abdelmadjid.

***À***

Mes très chers parents.

***À***

Toute ma famille.

Spécialement : mes frères, mes sœurs, mon oncle et sa famille, ma grand-mère et mes tantes.

***À***

Tous mes enseignants de l'école Quranique à l'Université.

***À***

Mes camarades et mes amis chacun par son nom.

***KEDDI AHMED***

## Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Mr. Abbess Benaissa, Professeur à l'universié de Sidi Bel Abbes. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je tiens à remercier vivement Mr. Salim A. Messaoudi, Professeur à l'université du Roi Fahd du Pétrole et des Minéraux à Dahran (Arabie Saoudite), pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr Aïssa Guesmia, Maître de Conférences Habilité à l'Université de Lorraine - Metz (France), pour m'avoir acceptée au sein de son équipe, pour tout ce qu'il m'a apporté durant mon séjour à l'institut Elie Carton de Lorraine (IECL), son intérêt et son soutien envers ce travail et surtout la confiance et la gentillesse qu'il m'a manifestées pendant ma formation à l'IECL.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury, qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Enfin, j' exprime mes remerciements à toutes les personnes qui, de prés ou de loin, ont aidé à accomplissement de ce modeste travail.

**Résumé**

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement des solutions de certains systèmes hyperboliques où la dissipation est introduite par la présence d'un terme thermoélastique ou viscoélastique. Nous avons commencé par un système thermoélastique de Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme mémoire infinie. En utilisant la méthode des multiplicateurs, on a montré un résultat de décroissance dans le cas où la fonction de relaxation décroit exponentiellement ou polynomialement ou d'une manière plus générale. Dans second problème, on a étudié l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'un système linéaire unidimensionnel de la thermoélasticité de Timoshenko, où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo, et le couplage se fait par l'équation de déplacement. On a montré que le système est exponentiellement stable si et seulement si le numéro de stabilité $\chi$ est nul. Par ailleurs, lorsque $\chi \neq 0$, on a montré la stabilité polynomiale.

En fin, on a étudié l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'un système unidimensionnel de Bresse, où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo agissant sur l'équation concernant la rotation angulaire. On a établi l'existence et l'unicité des solutions du système et on a prouvé que le système est exponentiellement stable en fonction de certains paramètres du système. En outre, on a montré que, en général, le système n'est pas exponentiellement stable.

**Mots Clés :** Système thermoélastique avec deuxième son, système de Timoshenko, système de Bress, décroissance exponentielle, décroissance polynomiale, décroissance générale, mémoire infinie, loi de Cattaneo.

**Abstract**

The aim of this thesis is to study the long time behavior of solutions of certain hyperbolic systems where the dissipation is induced by the presence of a thermoelastic or viscoelastic term. We start with a system of Timoshenko-thermoelasticity with second sound in the presence of an infinite history term. We prove, using the multiplier method, a general decay result from which the exponential and polynomial decay estimates are only special cases. In the second problem, we study the well-posedness and the asymptotic stability of a one-dimensional linear thermoelastic Timoshenko system, where the heat conduction is given by Cattaneo's law and the coupling is via the displacement equation. We prove that the system is exponentially stable provided the stability number $\chi$ is null. Otherwise, we show that the system lacks exponential stability. Furthermore, in the latter case, we show that the solution decays polynomially.

Finally, we study the well-posedness and the asymptotic stability of a one-dimensional Bresse system, where the heat conduction is given by Cattaneo's law effective in the shear angle displacements. We establish the well-posedness of the system and prove that the system is exponentially stable depending on some parameters of the system. Furthermore, we show that in general, the system is not exponential stable. In this regards, we prove that the solution decays polynomially.

**Keywords :** Thermoelasticity with second sound, Timoshenko system, Bress system,exponential decay, polynomial decay, general decay, infinite history, Cattaneo's law.

## INTRODUCTION

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et si cette limite est nulle, à donner une estimation sur sa vitesse de décroissance vers zéro.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e.

$$E(t) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance la plus rapide de l'énergie, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e.

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $C$ et $\delta$ sont des constantes positives avec $C$ qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, on étudie des situations intermèdiaires dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial, par exemple,

$$E(t) \leq Ct^{-\alpha}, \quad \forall t > 0,$$

où $C$ et $\alpha$ sont des constantes positives avec $C$ qui dépend des données initiales.

Au cours des dernières décennies, beaucoup de travaux sur l'existence locale, l'existence globale, et le comportement asymptotique des solutions à quelques problèmes de conditions initiales et au bord aussi bien qu'à des problèmes de Cauchy dans la thermoélasticité unidimensionnelle et multidimensionnelle ont été effectués.

A cet égard, l'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement des solutions de certains systèmes hyperboliques où la dissipation est introduite par la présence d'un terme thermoélastique ou viscoélastique. A ce sujet, plusieurs résultats concernant la décroissance des solutions en thermoélasticité non classique ont été prouvés. Dans cette étude, on généralise et on améliore divers résultats antérieurs.

**Description et objectif de la thèse**

Dans la suite, on donnera une brève analyse du contenu de la thèse qui est divisiée en deux parties, et chaque partie est divisée en trois chapitres.

La première partie consiste en un support théorique de l'étude, s'intitule "le cadre conceptuel et théorique de la thèse", on trouvera dans cette parties les différents concepts clés sur lesquels notre étude sera fondée. Cette partie comporte deux chapitres, le premiere chapitre présente un bref résumé de la théorie de la thermoélasticité classique et non classique où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse, et nous allons aussi exposer le formalisme mathématique de la théorie de la themoélasticité. Cette dernière constitue la source des problèmes à étudier. Ensuite, nous rappelons quelques résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique des systèmes thermoélastiques, particulièrement les systèmes de Timoshenko et Bresse. Le deuxième et le troisième chapitres sont consacrés à la présentation de quelque rappels sur les espaces de Sobolev et la théorie des semi-groupes, respectivement.

La seconde partie est réservée à l'étude du "comportement asymptotique de quelques systèmes thérmoélastiques", et elle comporte trois chapitres :

Chapitre 1. On considère un système thermoélastique de Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme mémoire infinie. En utilisant la méthode des multiplicateurs, on va montrer un résultat de décroissance dans le cas où la fonction de relaxation décroit exponentiellement ou polynomialement ou d'une manière plus générale.

Chapitre 2. On étudie l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'un système linéaire unidimensionnel de la thermoélasticité de Timoshenko, où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo, et le couplage se fait par l'équation de déplacement. On va montrer que le système est exponentiellement stable si et seulement si le numéro de stabilité $\chi$ est nul. Par ailleurs, lorsque $\chi \neq 0$, on va montrer la stabilité polynomiale.

Chapitre 3. On étudie l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'un système unidimensionnel de Bresse, où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo agissant sur l'équation concernant la rotation angulaire. On va établir l'existence et l'unicité des solutions du système et de prouver que l'énergie est exponentiellement stable en fonction de certains paramètres du système. En outre, on va montrer que, en général, le système n'est pas exponentiellement stable.

**Méthodologie**

Dans ce travail, pour assurer le caractère bien posé de nos problèmes, on utilise la théorie de semi-groupes pour établir l'existence et l'unicité des solutions. En théorie des semi-groupes, le théorème de Hille-Yosida est un outil puissant et fondamental reliant les propriétés de dissipation de l'énergie d'un opérateur non borné $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{A}\Phi(t), & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Pour les résultats de stabilité, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov $\mathcal{L}$ équivalente à l'énergie $E$ de la solution. On désigne par $\mathcal{L} \sim E$ l'équivalence

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t), \ t > 0, \tag{1}$$

pour deux constantes positives $\alpha_1$ et $\alpha_2$. Pour établir la stabilité exponentielle, alors il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \ t > 0, \tag{2}$$

pour un certain $c > 0$. Une intégration simple de (2) sur $[0, t]$ avec (1) mène au résultat souhaité de la stabilité exponentielle. Il vaut la peine de noter que la difficulté dans ce travail est de trouver la fonction de Lyapunov adéquate.

La méthode utilisée pour montrer l'absence de stabilité exponentielle est basée sur le théorème de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang des systèmes dissipatifs :

**Théorème 1** *Soit* $\left\{S(t) = e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable si et seulement si* $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$ *et*

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\longrightarrow+\infty} \left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

En utilisant ce théorème, on peut alors montrer l'absence de stabilité exponentielle grâce au procédé suivant :

On montre qu'il existe une suite de valeurs réelles $\lambda_\mu$ de telle sorte que

$$\left\|(i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \longrightarrow +\infty.$$

Il est équivalent à prouver qu'il existe une suite de vecteurs $F_\mu \in \mathcal{H}$ et une suite de nombres $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, avec $\|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ de tels sorte que

$$\left\|(i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} F_\mu\right\|_{\mathcal{H}} = \|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow +\infty,$$

où

$$i\lambda_\mu\Phi_\mu - \mathcal{A}\Phi_\mu = F_\mu.$$

**Quelques inégalités utiles**

Dans cette partie, on présente les inégalités qu'on utilise tout au long de ce travail :

**Inégalité de Poincaré**

Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $p$ un réel supérieur ou égal à 1. Alors il existe une constante positive $C$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Inégalité de Hölder généralisée**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^q(\Omega)$, avec

$$p, q \geq 1 \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Alors, le produit $fg$ est dans $L^r(\Omega)$ et l'on a

$$\left( \int_\Omega |fg|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_\Omega |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Inégalité de Young**

Soient $p$ et $q$ deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $p, q > 1$. Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \varepsilon > 0, \qquad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^p + \frac{1}{2\varepsilon} b^q.$$

**Une inégalité utile**

Soient $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ des réels strictement positifs et $p \geq 1$. Alors

$$\left( \sum_{i=1}^{i=n} a_i \right)^p \leq 2^{(n-1)(p-1)} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p.$$

**Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soientt $H$ un espace vectoriel et $(.,.)$ son produit scalaire. Alors

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2}\,(v,v)^{1/2}\,.$$

**Publications**

1. Ahmed A.Keddi, Salim A. Messaoudi and Abbes Benaissa, A general decay result for a memory-type Timoshenko-thermoelasticity system with second sound, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 456 (2) (2017), 1261-1289.

2. Ahmed A. Keddi,Tijani A. Apalara and Salim A. Messaoudi, Exponential and polynomial decay in a thermoelastic-Bresse system with second sound, Appl. Math. Optim, Online publication date : 1-Sep-2016.

3. Tijani A. Apalara, Salim A. Messaoudi and Ahmed A. Keddi, On the decay rates of Timoshenko system with second sound, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39 (10) (2016), 2671-2684.

# Première partie

# Le cadre conceptuel et théorique de la thèse

# Chapitre 1

# Théorie de la Thermoélasticité

Ce chapitre présente un bref résumé de la théorie de la thermoélasticité classique et non classique, où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse et nous allons exposer le formalisme mathématique de la théorie de la themoélasticité. Cette dernière constitue la source des problèmes à étudier. Ensuite, nous rappelons quelques résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique des systèmes thermoélastiques, particulièrement, les systèmes de Timoshenko et Bresse.

## 1.1 Thermoélasticité classique et non classique

La thermoélasticité est une branche de la mécanique appliquée. Comme son nom l'indique, elle s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps solides élastiques et vice-versa. Ainsi, c'est une extension de la théorie conventionnelle d'élasticité isotherme. Cette extension prend en compte les processus, où les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques, mais également des variations de la température.

Les processus thermoélastiques ne sont pas totalement réversibles. Si la partie élastique peut être récupérée, attendu que les déformations causées par la chaleur sont réversibles théoriquement (par refroidissement), la partie thermique peut être perdue à jamais. Ce phénomène doit son existence à la dissipation d'énergie durant les transferts thermiques : la chaleur se diffuse spontanément des zones les plus chaudes aux zones les plus froides de sorte qu'il faut une intervention externe pour ramener le système a ses conditions thermiques initiales.

L'effet du champ de température sur le champ de déformation n'est pas un phénomène à sens unique. Il est connu, expérimentalement, que la déformation d'un corps produit un changement de sa température. En d'autres termes, la déformation agit comme une source ou un puits de chaleur.

En toute rigueur, les aspects mécaniques et thermiques sont couplés et inséparables, ce qui peut vite compliquer la résolution des problèmes thermoélastiques. Cependant, en pratique. il est souvent possible de réduire ce couplage et d'évaluer les champs de température et de déformation dans cet ordre, séparément.

Malgré le couplage entre la température et les déformations, le chauffage ou le refroidissement d'un corps n'est pas toujours accompagné de contraintes. Prenons l'exemple d'un corps homogène et libre de s'étendre à ses frontières. Si on élève sa température uniformément, on n'y verra pas apparaître de contraintes. Par contre, dès qu'on confine les extrémités de ce corps entre deux obstacles immobiles (murs,...), des contraintes vont s'y développer.

Si la source des contraintes est la chaleur, on parle de contraintes thermiques. De plus, si le matériaux est élastique, les contraintes sont dites thermoélastiques. Les contraintes thermiques qui apparaissent dans des matériaux non élastiques sont le sujet de disciplines telles que la thermoplasticité et la thermovisco-élasticité [37].

### 1.1.1 Thermoélasticité classique

#### Dérivation des équations

**Problèmes non linéaires** Dans la suit nous donnons un bref résumé de la dérivation des équations non linéaires décrivant le comportement thermoélastique d'un corps $\mathcal{B}$ [38] :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ ou 3, un domaine borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique thermiquement conducteur $\mathcal{B}$. Désignons par $X(x,t)$ la position du point de référence $x$ à l'instant $t$, et par $u(x,t) = X(x,t) - x$ et $\theta = T - T_0$ le déplacement (vecteur) et la différence de température, respectivement, $T$ et $T_0$ étant la température absolue et la température de référence. Alors, l'équation (mécanique) de conservation de la quantité de mouvement qui décrit les déformations du corps et l'équation (thermique) de conservation de l'énergie s'écrivent

$$\rho u_{tt} = \operatorname{div} S + \rho f \tag{1.1}$$

et

$$e_t = tr\,(SF_t) - \operatorname{div} q + g, \tag{1.2}$$

où

| | |
|---|---|
| $\rho$ | la densité, |
| $S$ | le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhof, |
| $e$ | l'énergie interne, |
| $F = I + \nabla u$ | le tenseur de gradient de déformation, |
| $q$ | le flux de chaleur, |
| $f$ | la force externe du corps, |
| $g$ | l'apport de chaleur externe. |

Notons l'entropie par $\eta$ et par

$$\psi = e - (\theta + T_0)\,\eta \tag{1.3}$$

l'énergie libre de Helmholtz.

De la seconde loi de la thermodynamique (l'inégalité de Clausius-Duhem), on peut supposer dans la thermoélasticité classique que $\psi$, $S$, $\eta$ sont des fonctions de $(\nabla u, \theta)$

(voir, par exemple, [13]), i.e.

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla u)} (\nabla u, \theta), \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} (\nabla u, \theta) \tag{1.4}$$

et $q$ dépend de $(\nabla u, \theta, \nabla \theta)$ vérifiant

$$q (\nabla u, \theta, \nabla \theta) . \nabla \theta \leq 0,$$

où l'exemple typique est la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta, \tag{1.5}$$

avec $\kappa = \kappa (\nabla u, \theta)$ est le tenseur de conductivité thermique.

A l'aide des représentations ci-dessus, la loi de conservation de l'énergie (1.2) peut être réécrite comme

$$(\theta + T_0) \eta_t + \operatorname{div} q = g,$$

où

$$(\theta + T_0) \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \theta_t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial (\nabla u) \partial \theta} \nabla u_t \right] + \operatorname{div} q = g. \tag{1.6}$$

Le système d'équations thermoélastiques (1.1), (1.6) avec le flux de chaleur $q$ obéissant à la loi de Fourier (1.5) est un système couplé hyperbolique-parabolique.

Pour que le problème soit mathématiquement bien posé, il faut en général spécifier :

1. Les conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0, \; u_t(t = 0) = u_1, \; \theta(t = 0) = \theta_0, \tag{1.7}$$

2. Les conditions aux limites sur le bord, par exemple : si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$,"un milieu assujetti rigidement avec la température maintenue constante sur les limites",

$$u = 0, \; \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{(condition de Dirichlet)}, \tag{1.8}$$

ou "traction libre isolée",

$$S\nu = 0,\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \ \ \text{(condition de Neumann)}, \tag{1.9}$$

ou d'autres combinaisons des conditions aux limites pour $u$ et $\theta$. Ici, $\nu = \nu\,(x)$ est le vecteur normal unitaire au point $x \in \partial\Omega$.

**Problèmes linéaires** L'investigation des équations linéarisées jouera un rôle important. Supposant que $|\nabla u|\,, |\nabla u_t|\,, |\theta|\,, |\theta_t|$ et $|\nabla\theta|$ sont petits, et en utilisant des expansions de Taylor (par exemple $\frac{\partial^2\psi}{\partial(\nabla u)\partial\theta}\,(\nabla u, \theta, x) = \frac{\partial^2\psi}{\partial(\nabla u)\partial\theta}\,(0,0,x) + \mathcal{O}\left(|\nabla u| + |\theta|\right)$), la linéarisation du système (1.1) et (1.6) conduit alors au système ($T_0 = 1$ sans perte de généralité)

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} - \mathcal{D}^T S \mathcal{D} u + \mathcal{D}^T \Gamma \theta &= \rho f,\\ \delta\theta_t - \nabla^T \kappa \nabla\theta + \Gamma^T \mathcal{D} u_t &= g,\end{aligned}$$

où $\rho\,(x)$ peut être considérée comme une matrice densité symétrique, $S = S\,(x) \in M \times M$ est une matrice symétrique et définie positive contenant la module élastique ($M = 6$ dans $\mathbb{R}^3$), $\Gamma = \Gamma\,(x)$ est un vecteur avec les coefficients de détermination que l'on appelle le tenseur de contrainte thermique, $\delta = \delta\,(x)$ est la chaleur spécifique et $\kappa = \kappa(x)$ est le tenseur de conductivité thermique. Toutes les fonctions sont supposées être lisses. $\mathcal{D}$ est une abréviation pour un gradient généralisé

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0\\ 0 & \partial_2 & 0\\ 0 & 0 & \partial_3\\ 0 & \partial_3 & \partial_2\\ \partial_3 & 0 & \partial_1\\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{dans } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0\\ 0 & \partial_2\\ \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \ \text{dans } \mathbb{R}^2,\ \mathcal{D} := \partial_1 \ \text{dans } \mathbb{R}.$$

De cette manière, le cas général (linéaire) non homogène et anisotrope est décrit. La contrepartie linéaire des conditions aux limites (1.9) s'écrivent

$$\mathcal{N}^T\left(S\mathcal{D}u-\Gamma\theta\right)=0,\quad \nu^T\kappa\nabla\theta=0,$$

où $\mathcal{N}$ provient du vecteur normal $\nu$ de la même façon que $\mathcal{D}$ provient du vecteur gradient $\nabla$. Les modules élastiques $C_{ijkl}$, $i,j,k,l=1,...,n$, qui sont donnés en général par

$$C_{ijkl}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\left(\partial_j u_i\right)\partial\left(\partial_k u_l\right)}\left(0,0,x\right)$$

satisfont dans le cas linéaire

$$C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}.$$

L'hypothèse de positivité de $C_{i,j,k,l}$ dans le sens

$$\exists k_0>0,\ \forall\xi_{ij}=\xi_{ji}\in\mathbb{R},\ \forall x\in\Omega:\xi_{ij}C_{ijkl}\xi_{kl}\geq k_0\sum_{j,k=1}^{n}\left|\xi_{jk}\right|^2,$$

implique que la matrice $S=S\left(x\right)$ est uniformément définie positive car

$$S=\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112}\\ . & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212}\\ . & . & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312}\\ . & . & . & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312}\\ . & . & . & . & C_{3131} & C_{3112}\\ . & . & . & . & . & C_{1212}\end{pmatrix}\text{ dans }\mathbb{R}^3,$$

$$S=\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112}\\ . & C_{2222} & C_{2212}\\ . & . & C_{1212}\end{pmatrix}\text{ dans }\mathbb{R}^2,\ S=C_{1111}\text{ dans }\mathbb{R}.$$

Dans le cas simple d'un milieu homogène isotrope, nous avons

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \mu & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \mu & 0 \\ . & . & . & . & . & \mu \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ . & 2\mu+\lambda & 0 \\ . & . & \mu \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^2,\ S = \tau > 0 \text{ dans } \mathbb{R},$$

et le système réduit dans le cas bidimensional ou tridimensional est donné par :

$$u_{tt} - \left((2\mu+\lambda)\,\nabla\nabla^T - \mu\nabla\times\nabla\times\right)u + \gamma\nabla\theta = f,$$
$$\delta\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma\nabla^T u_t = g,$$

où la densité $\rho = 1$ sans perte de généralité, $\mu$ et $\lambda$ sont les modules de lamé avec $\mu > 0$ et $2\mu + n\lambda > 0$, de plus $\delta, \kappa > 0$ et $\gamma \neq 0$.

**Remarque 2** *Dans l'espace unidimensionnel, sous certaines hypothèses, le système linéaire de base s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} u_{tt} - \tau u_{xx} + \gamma\theta_x = f, \\ \delta\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma u_{tx} = g, \end{cases}$$

*et le système non linéaire peut s'écrire comme le système suivant :*

$$\begin{cases} u_{tt} - a\left(u_x,\theta\right)u_{xx} + b\left(u_x,\theta\right)\theta_x = f, \\ c\left(u_x,\theta\right)\theta_t - d\left(\theta_x,\theta\right)\theta_{xx} + b\left(u_x,\theta\right)u_{tx} = g. \end{cases}$$

### 1.1.2 Thermoélasticité non classique

Dans la théorie classique, on obtient un système couplé hyperbolique-parabolique tel que le système hyperbolique d'élasticité couplé avec le modèle parabolique classique de conduction de la chaleur, typiquement donnée par la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta,$$

qui exprime le flux de chaleur proportionnellement au gradient spatial de températur. Alors dans le cas classique, la température se propage à vitesse infinie. Les expériences ont montré que la conduction de chaleur dans certains cristaux diélectriques à basse température est libre de ce paradoxe (la vitesse de propagation infinie) et les perturbations qui sont presque entièrement thermiques, peuvent se propager à une vitesse finie. Cette propagation de l'ondulatoire de la chaleur est connue sous le nom de deuxième son (second sound). Il a d'abord été détecté dans l'hélium $He$, puis dans des cristaux de diélectriques puretés de floride de sodium $Naf$, et bismath $Bi$. La gamme de température, pour laquelle le deuxième son est détectable, est en fait la propagation tout à fait petite et normale diffusive qui intervient au-dessus de lui.

Dans la théorie non classique, pour pallier à ce paradoxe, Maxwell-Cattaneo a proposé un modèle dans lequel la température se propage à vitesse finie. Cette loi de transfert de la chaleur est appelée loi de Cattaneo [12].

Nous verrons que le signal de la chaleur se propage à une vitesse infinie dans les équations (1.1) et (1.6). Pour remédier à ce paradoxe, dans certains cas, une approche consiste à utiliser la loi de Cattaneo suivante à la place de la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur

$$\tau q_t + q + \kappa (\nabla u, \theta) \nabla \theta = 0, \tag{1.10}$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation, et l'énergie libre de Helmholtz $\psi$ donné dans (1.3) est une fonction de $(\nabla u, \theta, q)$. A partir de (1.3), nous obtenons

$$S(\nabla u, \theta, q) = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla u)}(\nabla u, \theta, q), \quad \eta(\nabla u, \theta, q) = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\nabla u, \theta, q), \tag{1.11}$$

et la loi de conservation de l'énergie (1.2) peut être donc écrit comme suit :

$$(\theta + T_0)\eta_t + \frac{\partial \psi}{\partial q} q_t + \operatorname{div} q = g,$$

ce qui est équivalent à

$$(\theta + T_0)\left[-\psi_{\theta\theta}\theta_t - tr\left(S_\theta \nabla u_t\right)\right] + \left[\psi_q - (\theta + T_0)\psi_{\theta q}\right] q_t + \operatorname{div} q = g. \tag{1.12}$$

Le système d'équations (1.1), (1.10) et (1.12) est purement hyperbolique, dans lequel le signal de chaleur se propage comme le son, donc ce système est appelé thermoélasticité avec deuxième son.

Le système d'équations (1.1), (1.10) et (1.12) peut s'écrire dans le cas unidimensionnel comme

$$\begin{cases} u_{tt} - a(u_x, \theta, q) u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x - \alpha_1(u_x, \theta) q q_x = f, \\ \theta_t - d(u_x, \theta, q) q_x + b(u_x, \theta, q) u_{tx} - \alpha_2(u_x, \theta) q q_t = g, \\ \tau(u_x, \theta) q_t + q + \kappa(u_x, \theta)\theta_x = 0. \end{cases}$$

**Remarque 3** *Dans le cas $1-D$ linéaire, le systéme de base donné par :*

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = f, \\ c_0 \theta_t - \gamma q_x + \beta u_{tx} = g, \\ \tau q_t + q + \kappa \theta_x = 0, \end{cases}$$

*et dans le cas $n-D$ $(n = 2, 3)$ par :*

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = f, \\ c_0 \theta_t - \gamma \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = g, \\ \tau q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0. \end{cases}$$

Un autre modèle de propagation de la chaleur considère que $q$ est aussi dépendant de l'effet de mémoire. Dans les matériaux à mémoire, la loi classique de Fourier du flux de chaleur est remplacée par la formule suivante [66] :

$$q = -\frac{\kappa}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)}\nabla\theta\left(x,s\right)ds, \tag{1.13}$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation,. Il en résulte facilement de (1.13) que l'on obtient l'équation de Maxwell-Cattaneo

$$\tau q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0,$$

en plus, nous tenons à prendre en compte la conductivité de Fourier $\kappa\left(\theta\right)$, où

$$q = -\kappa\left(\theta\right)\nabla\theta - \alpha_0\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)}\nabla\theta\left(x,s\right)ds, \quad \alpha_0 = \text{constant}.$$

A la fin du siècle dernier, Green et Naghdi [[22], [23]] ont introduit trois types de la théorie thermoélastique fondés sur une égalité entropique au lieu de l'inégalité entropique habituelle. Dans chacune de ces théories, le flux thermique est donné par une hypothèse de comportement différent. En conséquence, les trois théories sont obtenues et ont été appelées thermoélastique de type I, type II et de type III, respectivement. Ce développement est effectué d'une manière rationnelle afin d'obtenir une théorie entièrement compatible, qui intégrera la transmission d'impulsion thermique d'une manière très logique et élève le paradoxe de la vitesse infinie de propagation de la chaleur induite par la théorie classique. Lorsque ces théories sont linéarisées, le type I conduit à la conduction de la chaleur habituelle par la loi de Fourier (1.5), le type II conduit à une équation du télégraphe

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\tau}\theta_t = c^2\Delta\theta \tag{1.14}$$

qui est hyperbolique et transmet des ondes à une vitesse finie $c$, et le type III conduit à l'equation de type de Jeffrey

$$\tau q_t + q + \kappa \nabla \theta + \tau \kappa_1 \nabla \theta_t = 0.$$

Les deux théories de types II et III pour le flux de chaleur dans un solide rigide fixe accommodent la vitesse d'onde finie, mais seulement le type II n'implique aucune dissipation d'énergie.

conformément à la classification utilisée dans [22] pour le flux de la chaleur dans un solide rigide fixe, la dérivation de Green et Naghdi [23] est appellé thermoélasticité classique (ou thermoélasticité de type I). Cependant, la procédure qu'ils ont utilisé pour le développement d'équations constitutives est basée sur la procédure proposée dans [21], qui emploie une loi de balnce de l'entropie et exige la satisfaction de l'équation d'énergie réduite avant d'imposer toute autre restriction résultant de la seconde loi de la thermodynamique. En outre, ils ont considéré dans une autre théorie thermoélastique, la partie thermique qui résulte de la transmission de la chaleur sous forme d'ondes et est analogue à celle de la réponse d'un matériau élastique dans une théorie mécanique. Ils se sont référés à lui comme thermoélasticité sans dissipation d'énergie (thermoélasticité de type II), car il ne comporte aucune dissipation d'énergie. Les modèles en $1-D$ et $n-D$ sont

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \theta_{xx} + \beta u_{ttx} = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

et

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \Delta \theta + \beta \operatorname{div} u_{tt} = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

respectivement. Equations $(1.15)-(1.16)$ permettent la propagation des ondes sans amortissement (damping).

Plus tard dans [24], Green et Naghdi dérivent des modèles de thermoélasticité de type III pour les milieux isotrope en utilisant les équations constitutives développées dans [22].

Le système $1-D$ est donnée par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta\theta_x = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \delta\theta_{txx} + \beta u_{ttx} = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

et dans $n-D$ par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa\Delta\theta - \delta\Delta\theta_t + \beta \operatorname{div} u_{tt} = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

## 1.2 Systèmes de Timoshenko

En 1921, dans [71], un modèle simple décrivant la vibration transversale d'une poutre a été développé. Ce modèle est donné en conformité avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho A\varphi_{tt}(x,t) = S_x(x,t), \\ \rho I\psi_{tt}(x,t) = M_x(x,t) - S(x,t), \end{cases} \tag{1.19}$$

où $t$ désigne la variable temporelle, et $x$ est la distance le long de la ligne moyenne de la poutre. La fonction $\varphi$ représente le déplacement transversal de la poutre et $\psi$ l'angle de rotation du filament de la poutre. Nous utilisons $\rho$ pour la densité, $M$ pour le moment de flexion, $S$ pour la force de cisaillement, $A$ pour l'aire de la section transversale et $I$ pour le second moment de la section transversale de la poutre.

Les relations entre déformations et contraintes pour le comportement élastique de la poutre en flexion sont donnés par :

$$M(x,t) = EI\psi_x(x,t), \tag{1.20}$$

$$S(x,t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x,t), \tag{1.21}$$

où $E$ représente le module de Young, $G$ le module de rigidité, et $k$ le facteur de forme. Considérant le couplage des équations $(1.18)-(1.19)$ et $(1.20)-(1.21)$, Timoshenko [71] établit les équations aux dérivées partielles suivantes pour les vibrations mécaniques dans les poutres planes sans la présence de mécanismes dissipatifs :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, \end{cases} \tag{1.22}$$

en posant $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kAG$ et $b = EI$. La stabilité des systèmes de type Timoshenko (dans des domaines bornés) a reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique de l'énergie ont été établies. Fondamentalement, trois types de mécanismes dissipatifs (ou des combinaisons de ceux-ci) ont été envisagés :

1. La dissipation par frottement obtenu en introduisant un amortissement (damping) par frottement qui peut agir soit sur le bort soit au voisinage du bord.
2. La dissipation thermique qui est obtenue par la conduction de la chaleur compte tenu de la loi de Fourier ou de la loi de Cattaneo.
3. La dissipation viscoélastique donnée par les effets de mémoire.

Muñoz Rivera et Racke [55] ont étudié le système de Timoshenko avec dissipation thermoélastique efficace dans l'équation de moment de flexion, ce qui signifie qu'ils ont considéré $M = b\psi_x + \gamma\theta$, produit par la loi de Fourier. Plus précisément, les auteurs ont considéré le système d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - \tilde{\kappa}\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Les auteurs ont montré que le système (1.23) est exponentiellement stable si et seulement si $\chi = 0$ (avec $\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}$).

Le système de Timoshenko avec la loi de Cattaneo est particulièrement intéressant car le comportement du système de Timoshenko en thermoélasticité du second son est différent de celui de thermoélasticité classique. En fait, le premier exemple dans ce sens a été donné dans [19] ; Fernández Sare et Racke ont étudié le système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + \gamma q_x + \delta\psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + \kappa\theta_x = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Ils ont montré que ce système n'est pas exponentiellement stable, même si les vitesses des deux premières équations (1.24) sont égales (i.e. $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$).

Un résultat encore plus surprenant est que le couplage de Cattaneo "détruit" même la stabilité exponentielle. Plus précisément, Muñoz Rivera et Fernández Sare [54] ont considéré un système de type Timoshenko avec un terme mémoire agissant dans une seule équation. Ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^{+\infty} g\left(t\right)\psi_{xx}\left(t-s,.\right)ds + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, \end{cases} \tag{1.25}$$

avec des conditions aux limites homogènes dans un domaine borné, et ils ont montré que la dissipation donnée par le terme mémoire est suffisamment forte pour stabiliser le système (1.25) de façon exponentielle si et seulement si $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ et la fonction de relaxation $g$ décroit exponentiellement. Alors que la loi de Cattaneo "détruit" cette propriété, comme [19]. Pour cette raison, certains termes d'amortissement supplémentaires pourraient être nécessaires pour rétablir la stabilité exponentielle du système (1.24). Cette situation a été étudiée par Messaoudi et autres [48], où une version non linéaire du système (1.24) a été également examiné et un terme d'amortissement de la forme $\mu\varphi_t$ a été introduite. A savoir, ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \sigma\left(\varphi_x, \psi\right)_x + \mu\varphi_t = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + \gamma q_x + \delta\psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

où $(x,t) \in (0,L)\times (0,+\infty)$, $\mu > 0$, et la fonction non linéaire $\sigma$ est supposée être suffisamment lisse et satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}\left(0,0\right) = \sigma_{\psi}\left(0,0\right) = \kappa$$

et

$$\sigma_{\varphi_x\varphi_x}\left(0,0\right) = \sigma_{\varphi_x\psi}\left(0,0\right) = \sigma_{\psi\psi} = 0.$$

Concernant les systèmes de Timoshenko pour les matériaux à mémoire finie, Ammar-Khodja et al. [7] ont étudié le système linéaire de la forme

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) + \int_0^t g\left(t\right)\psi_{xx}\left(x, t-s\right)ds = 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

avec des conditions aux limites homogènes, et ils ont montré, en utilisant la méthode des multiplicateurs, que le système (1.27) est exponentiellement stable si et seulement si $\chi = 0$ et $g$ décroit exponentiellement. Précisément, sous certaines conditions techniques supplémentaires sur $g'$ et $g''$, ils ont établi un résultat de décroissance exponentielle (respectivement polynomial) pour $g$ décroit de façon exponentielle (respectivement polynomiale). Ce dernier résultat a ensuite été obtenu par Guesmia et Messaoudi [29] avec des conditions plus faibles que celles qui sont considérées dans [7]. En outre, Messaoudi et Mustafa [46] ont discuté (1.27), pour la fonctions de relaxation satisfait

$$g'\left(t\right) \leq -\xi\left(t\right)g\left(t\right),\ \forall t \geq 0, \tag{1.28}$$

où $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable non croissante, et ils ont donné un résultat de décroissance plus générale, à partir duquel, les résultats habituels de décroissance exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers.

La stabilité de $(1.27)$, dans le cas où les vitesses des ondes sont différentes, a été étudiée par Guesmia et Messaoudi [31] sous la condition

$$g'(t) \leq -\xi(t)\, g^P(t)\,,\ \forall t \geq 0,$$

où $p > 1$, et une estimation de décroissance générale pour l'énergie de solutions régulières a été prouvée.

Dans [32], Guesmia et Messaoudi ont considéré le système (1.25), où la fonction de relaxation $g$ satisfait la relation $(1.28)$. Sous la même hypothèse sur $g$ et $\xi$ imposée pour le cas de mémoire finie, ils ont établi des résultats de décroissance générale dans les cas où les vitesses de propagation sont égales et différentes. Ces résultats ont permis d'améliorer certains des taux de décroissance connus.

Guesmia [26] a considéré un système de type Timoshenko avec un terme mémoire et un amortissement par frottement agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation. Il a examiné le problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \kappa_2\psi_{xx} + \kappa_1(\varphi_x + \psi) + b(x)\, h(\psi_t) + \int_0^{+\infty} g(t)\left(a(x)\,\psi_x(t-s)\right)_x ds = 0, \end{cases}$$

et il a montré que la dissipation donnée par ces contrôles complémentaires est assez forte pour garantir la stabilité du système en ce qui concerne les vitesses de propagation sont égales, ainsi que dans le cas contraire. Un résultat similaire à celui trouvé par Guesmia et Messaoudi [33] dans le cas où le terme mémoire et l'amortissement par frottement agissant dans l'équation du déplacement transversal.

Dans [27], Guesmia a étudié le système de Timoshenko avec une mémoire infinie et un retard distribué (distributed time delay) à la fois agissant sur l'équation de l'angle de rotation

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa_1 (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \kappa_2 \psi_{xx} + \kappa_1 (\varphi_x + \psi) + \int_0^{+\infty} g(t) \psi_{xx}(t-s)\, ds + \int_0^{+\infty} f(s) \psi_t(t-s)\, ds = 0. \end{cases}$$

Il a donné des estimations de décroissance pour les deux cas de vitesses. Les taux de décroissance obtenus dépendent des noyaux de la mémoire et le retard à l'infini. Dans le cas d'inégalité de vitesse, le taux de décroissance dépend également de la régularité des données initiales.

La constante $\chi$ est un nombre important qui caractérise le comportement asymptotique des solutions au système Timoshenko. Cela a été prouvé pour le comportement viscoélastiques dans [[6], [7], [18], [20], [51], [46]], pour le comportement thermoélastique avec la loi de Fourier et aussi à la dissipation thermoélastique de type III dans [[49], [51], [55]], et le système Timoshenko avec dissipation aux limites dans [[8], [53]].

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaires et non linéaires ont été établies sans l'hypothèse $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Pour le système de Timoshenko pur (c'est-à-dire sans conduction de chaleur) dans le domaine borné, il existe une vaste littérature. Le lecteur intéressé est appelé à regarder [[2], [44], [47], [56], [57], [70]] pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement par frottement, et [[7], [30], [52]] pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement viscoélastique.

## 1.3 Systèmes de Bresse

Le problème de l'arc de cercle est également connu comme le système de Bressse. Les structures élastiques de type arc sont des objets d'étude largement exploités dans l'ingénierie, l'architecture, l'ingénierie marine, l'aéronautique et d'autres. En particulier, les vibrations libres sur les structures élastiques sont un sujet de recherche important dans l'ingénierie et aussi en mathématiques. Dans le domaine de l'analyse mathématique, il est intéressant de connaître les propriétés qui concernent le comportement de l'énergie associée au modèle dynamique respectif. Pour les lois de rétroaction (feedback), par exemple, nous pouvons demander à quelles conditions à propos du modèle dynamique doit être assuré l'obtention de la décroissance de l'énergie des solutions dans le temps $t$. En ce sens, la propriété de stabilisation a été étudiée pour des problèmes dynamiques dans les structures élastiques sont traduits en fonction des équations aux dérivées partielles [64].

Le système de Bresse original est donné par les équations suivantes (voir [9]) :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1, \\ \rho_2\psi_{tt} = M_x - Q + F_2, \\ \rho_3\omega_{tt} = N_x - lQ + F_3, \end{cases} \tag{1.29}$$

où $F_i$ sont les forces extérieures et $N$, $Q$ et $M$ désignent la force axiale, la force de cisaillement et le moment de flexion, respectivement. Ces forces sont les relations contrainte-déformation (stress-strain) pour le comportement élastique et elles sont données par :

$$\begin{aligned} &N = \kappa_0\left(\omega_x - l\varphi\right), \\ &Q = \kappa\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right), \\ &M = b\psi_x. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ici $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kAG$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$ et $l = R^{-1}$ où $\rho$ est la densité du matériau, $E$ est le module d'élasticité, $G$ est le module de cisaillement, $k$ est le facteur de cisaillement, $A$ est la surface en coupe transversale, $I$ est le second moment de la section transversale et $R$ est le rayon de courbure. Les fonctions $\varphi$, $\psi$ et $\omega$ désignent, respectivement, le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre.

Considérant le couplage des équations (1.29) et (1.30), nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right)_x - \kappa_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) = F_1, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) = F_2, \\ \rho_3\omega_{tt} - \kappa_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + \kappa l\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) = F_3. \end{cases}$$

Il y a un bon nombre de publications relatives à la stabilisation du système de Bresse [3], [72], [41] et [16]. En particulier, dans [41], Liu et Rao ont étudié la stabilisation du système de Bresse avec deux lois différentes de dissipation thermique agissant sur les équations concernant le déplacement longitudinal et la rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation des ondes, ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroit polynomialement vers zéro avec des taux $t^{-1/2}$ ou $t^{-1/4}$ pour les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann ou Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet respectivement. Dans [16], Fatori et Rivera ont considéré le système de Bresse avec une loi de dissipation de température globale agissant sur l'équation de rotation angulaire. Ils ont établi le même taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas d'égalité des vitesses de propagation des ondes. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroit polynomialement vers zéro avec des taux $t^{-1/3}$.

**Remarque 4** *Si $R \longrightarrow +\infty$, alors $l \longrightarrow 0$, et ce modèle se réduit aux équations de poutre de Timoshenko.*

# Chapitre 2

# Rappels sur les espaces de Sobolev en dimension un

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentaux (les espaces de Sobolev, le théorème de Lax-Milgram, le théorème de Hille-Yosida...) que nous utiliserons dans la deuxième partie de la thèse.

## 2.1 Définition et propriétés élémentaires des espaces $L^p(I)$

Soit $a < b$ et $I = ]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ (pas forcément borné) et $1 \leq p < +\infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(I)$, l'espace

$$L^p(I) = \left\{ u : I \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et } \int_a^b |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, on pose

$$L^{\infty}(I) = \{u : I \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } |u| < c \text{ p.p sur } I\}.$$

On définit sur $L^{\infty}(I)$ la norme :

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf\left\{c \in \mathbb{R}^{+} \text{ tel que } |u| < c \text{ p.p sur } I\right\}.$$

**Remarque 5** *On dit qu'une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ appartient à $L^{p}_{loc}(I)$ si $1_K u \in L^{p}(I)$ pour tout compact $K \subset I$.*

*L'espace $L^{2}(I)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_a^b uv dx,\ u, v \in L^{2}(I)$$

*est un espace de Hilbert.*

*$L^{p}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

**Théorème 6** *(Inégalité de Hölder) [10]*. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par $q$ l'exposant conjugué de $p$ i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

*Soient $u \in L^{p}(I)$ et $v \in L^{q}(I)$. Alors $uv \in L^{1}(I)$ et*

$$\|uv\|_{L^{1}} \leq \|u\|_{L^{p}} \|v\|_{L^{q}}.$$

### Dérivée faible

Soit $I$ un ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction $u \in L^{1}_{loc}(I)$ a une dérivée faible dans $L^{1}_{loc}(I)$ s'il existe $v \in L^{1}_{loc}(I)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^{\infty}(I)$ on ait

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Cela revient à dire que $v$ est la dérivée de $u$ au sens des distributions, on écrira

$$u' = v$$

## 2.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Soit $I = ]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$.

**Définition 7** *L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(I)$, est constitué des fonctions de $L^p(I)$ dont la dérivées au sens des distributions, s'identifie à une fonction de $L^p(I)$.*

*La définition précédente s'écrit donc comme ceci :*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I),\ \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

*Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,2}(I)$ par $H^1(I)$.*

**Proposition 8** *[1], [14] et [15].*

*1. L'espace $W^{1,p}(I)$ muni de la norme définie par :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

*est un espace de Banach.*

*2. L'espace $H^1(I)$, muni du produit scalaire :*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

*est un espace de Hilbert.*

**Proposition 9** ***(Densité)*** *[14], [1]. Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors il existe une suite $(u_n)$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n|_I \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$ .*

**Corollaire 10** *(Intégration par parties) [10]. Soient* $u, v \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors* $uv \in W^{1,p}(I)$ *et*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

*De plus on a la formule d'intégration par parties*

$$\int_x^y u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_x^y uv', \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

## 2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$

**Définition 11** *Etant donnés un entier* $m \geq 2$ *et un réel* $1 \leq p < +\infty$, *on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I),\ u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

*On pose*

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

*et l'espace* $H^m$ *muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{m} \left(u^{(i)}, v^{(i)}\right)_{L^2}$$

*est un espace de Hilbert.*

## 2.4 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$

**Définition 12** *Etant donnés* $1 \leq p \leq +\infty$ *et* $m \in \mathbb{N}$, *on désigne par* $W_0^{m,p}(I)$ *la fermeture de* $C_c^m(I)$ *dans* $W^{m,p}(I)$. *On note* $H_0^m(I) = W_0^{m,2}(I)$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1,p}(I)$

**Théorème 13** *[10]. Soit* $u \in W^{1,p}(I)$, *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement si* $u = 0$ *sur* $\partial I$.

Le Théorème 13 explique le rôle important joué par l'espace $W_0^{1,p}(I)$. En effet, les équations aux dérivées partielles sont couplées avec des conditions aux limites, c'est-à-dire que la valeur de $u$ est prescrite sur $\partial I$.

**Proposition 14** *(Inégalité de Poincaré) [10]. On suppose que* $I$ *est borné. Alors il existe une constante* $c_p$ *(pendant de* $|I|$*) telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \|u'\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$, la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(I)$.

**Remarque 15** *On a la caracterisation suivante de*$H_0^m(I)$ :

$$H_0^m(I) = \left\{u \in H^m(I),\ u = u' = ... = u^{(m-1)} = 0 \ sur\ \partial I\right\}.$$

*Il convient de bien distinguer*

$$H_0^2(I) = \left\{u \in H^2(I),\ u = u' = 0 \ sur\ \partial I\right\}$$

*et*

$$H^2(I) \cap H_0^1(I) = \left\{u \in H^2(I),\ u = 0 \ sur\ \partial I\right\}.$$

# Chapitre 3

# Rappels sur La théorie des semi-groupes

## 3.1 Quelques définitions

**Définition 16** *Soit $H$ un espace de Hilbert muni de produit scalaire $(.,.)$ et de norme associée $\|.\|$ et soit $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné. O*

**Définition 17** *n dit que $A$ est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A), \ \ (Ax, x) \leq 0.$$

**Définition 18** *Une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus est dite semi-groupe fortement continu (ou $C_0$-semi-groupe) sur $H$ si elle satisfait les propriétés suivantes :*

*i)* $S(0) = Id$,

*ii)* $S(t+s) = S(t)\,S(s)\,,\ \forall t, s \geq 0$,

*iii) Pour chaque $x \in H$, $S(.)\,x$ est continue sur $[0, +\infty[$. i.e.*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|S(t)\,x - x\|_H = 0.$$

**Définition 19** *On appelle générateur infinitésimal du $C_0$-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tout opérateur $A$ défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in H, \ \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

*par*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

*Parfois on note $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ pour $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.*

**Définition 20** *Un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $H$ est dit de contractions si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1$, $\forall t \geq 0$.*

**Exemple 21** *On considère l'espace $L^2\,]0,+\infty[\,$, $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^2\,]0,+\infty[$ muni de la norme*

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

*est un espace de Hilbert. On définit :*

$$(S(t)f)(x) = f(t+x), \forall t \geq 0 \ \textit{et} \ x \in \,]0,+\infty[\,.$$

*Evidemment $S(t)$ est un opérateur linéaire et en plus, on a :*

$$\|S(t)f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f(t+x)|^2 \, dx = \int_t^{+\infty} |f(y)|^2 \, dy \leq \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 \, dy = \|f\|_2^2.$$

*Donc $S(t)$ est un opérateurs linéaires continus. Il est facile de vérifier que $S(0) = Id$ et $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$, et d'autre part, on a*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|S(t)f - f\|_2 = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \left( \int_0^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

*Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur*

$L^2\,]0,+\infty[$. *Soit*

$$A : D(A) \subset L^2\,]0,+\infty[\, \rightarrow L^2\,]0,+\infty[$$

*le générateur infinitésimal du $C_0$-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* $f \in D(A)$, *alors on a*

$$Af(x) = \lim_{t\rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} = f'(x),$$

*uniformément par rapport à* $x$. *Par conséquent*

$$D(A) \subset \left\{ f \in L^2\,]0,+\infty[\, : f' \in L^2\,]0,+\infty[ \right\}.$$

*Si* $f \in L^2\,]0,+\infty[$ *tel que* $f' \in L^2\,]0,+\infty[$, *alors*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t)f - f}{t} - f' \right\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{S(t+x) - S(x)}{t} - f'(x) \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t}\left[f(s)\right]_x^{t+x} - \frac{1}{t}\left[f'(x)\, s\right]_x^{t+x} \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t}\int_x^{t+x} f'(s) - f'(x)\, ds \right|^2 dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

*uniformément par rapport à* $x$ *quand* $t \rightarrow 0^+$. *Donc*

$$\left\{ f \in L^2\,]0,+\infty[\, : f' \in L^2\,]0,+\infty[ \right\} \subset D(A).$$

*Par conséquent*

$$Af = f' \text{ et } D(A) = \left\{ f \in L^2\,]0,+\infty[\, : f' \in L^2\,]0,+\infty[ \right\}.$$

**Définition 22** $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives* $\alpha$ *et* $M$ *telles que*

$$\left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq M e^{-\alpha t}, \ \forall t \geq 0.$$

**Définition 23** $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *est dit analytique si* $e^{At}$ *admet une extension* $T(\lambda)$ *pour* $\lambda \in$

$\triangle_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\arg(\lambda)| < \theta\}$ *pour certain* $\theta > 0$ *telle que* $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ *est analytique et*

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \in \triangle_\theta \longrightarrow 0} \|T(\lambda) z - z\| = 0,\ \forall z \in H, \\ T(\lambda + \mu) = T(\lambda) T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \triangle_\theta, \end{cases}$$

*ou de manière équivalente (voir le Théorème 5.2 dans le livre de Pazy [58], p.61-62), il existe une constante* $K > 0$ *tel que*

$$\left\| A e^{At} \right\| \leq K t^{-1},\ \forall t > 0.$$

## 3.2 $C_0$-Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Supposons que l'opérateur linéaire $A$ génère un $C_0$-semi-groupe $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert $H$. Alors, nous avons

**Théorème 24** *(Hille-Yosida) [58]. Un opérateur linèaire (non borné)* $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ *est le générateur infinitésimal d'un* $C_0$*-semi-groupe de contractions* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *si et seulement si*

*i)* $A$ *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = H$*,*

*ii) L'ensemble résolvant* $\varrho(A)$ *de* $A$ *contient* $\mathbb{R}^+$ *et pour tout* $\lambda > 0$

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Théorème 25** *(Lumer-Phillips) [42]. Soit* $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire et* $D(A)$ *est dense dans* $H$*. Alors* $A$ *est le générateur infinitésimal d'un* $C_0$*-semi-groupe de contractions si et seulement si*

*i)* $A$ *est dissipatif,*

*ii) Il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $Im(\lambda I - A) = H$ *(*$A$ *est maximal).*

## 3.3 Stabilité exponentielle et analytique

Dans cette section, nous recueillons quelques résultats dans la littérature concernant les conditions nécessaires et suffisantes pour que un $C_0$-semi-groupe soit exponentiellement stable ou analytique. Le premier résultat que nous allons mentioner est sur les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité exponentielle d'un $C_0$-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Le résultat a été obtenu par Gearhart (voir [73]) et Huang [36], de manière indépendante (voir aussi Prüss [59]).

**Théorème 26** *[42]. Soit $\left\{S(t) = e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda,\ \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

*et*

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq 0} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| < +\infty.$$

On voit ainsi que ce théorème est équivalent à l'énoncé suivante :

**Théorème 27** *[42]. Soit $\left\{S(t) = e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si*

$$i\mathbb{R} \subseteq \varrho(A)$$

*et*

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\longrightarrow+\infty} \left\| (i\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

**Théorème 28** *[42]. Soit $\left\{S(t) = e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur un espace de Hilbert. On suppose que $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(A)$. Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est analytique si et seulement si*

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\longrightarrow+\infty} \left\| \lambda (i\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

## 3.4 Le Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires.

**Définition 29** *On dit qu'une forme bilinéaire*

$$a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

*est*

1. *Continue s'il existe une constante $C$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H,$$

2. *Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \qquad \forall v \in H.$$

**Théorème 30** ***(Lax-Milgram)*** *[10] Soit $a$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

*De plus, si $a$ est symétrique, alors $u$ est caractérisé par la propriété*

$$u \in H \quad et \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \underset{v \in H}{Min} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

# Deuxième partie

# Comportement asymptotique de quelques systèmes thermoélastiques

# Chapitre 4

# Décroissance générale de l'énergie des solutions d'un système thermoélastique de Timoshenko de type mémoire avec deuxième son

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le système thermoélastique de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x + \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_{xx}(x, t-s)\,ds = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi$ est le déplacement transversal de la poutre, $\psi$ est l'angle de rotation du filament de la poutre, $\theta$ est la différence de température, $q$ est le flux de chaleur, les coefficients

$\varrho_i$, $\beta$, $k$, $\delta$, $b$ sont des constantes positives et $g$ est une fonction positive non croissante qui caractérise le matériau. Ceci est un système thermoélastique de type Timoshenko où le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo. Il modélise la déformation d'une poutre épaisse viscoélastique, en prenant en compte le transfert de chaleur au cours du processus.

Depuis 1921, quand il a été introduit par Timoshenko [71], le système de la forme

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = \left(\kappa\left(\varphi_x - \psi\right)\right)_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ I_\rho\psi_{tt} = \left(EI\psi_x\right)_x + \kappa\left(\varphi_x - \psi\right), & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \end{cases}$$

a été étudié par de nombreux chercheurs et des différents mécanismes d'amortissement ont été utilisés pour stabiliser les vibrations. Ici, $t$ désigne la variable de temps, $x$ est la variable de l'espace le long de la poutre de longueur $L$ dans sa configuration d'équilibre, $\varphi$ est le déplacement transversal de la poutre et $\psi$ est l'angle de rotation du filament de la poutre. Les coefficients $\rho$, $I_\rho$, $E$, $I$ et $\kappa$ sont, respectivement, la masse volumique, le moment polaire d'inertie d'une section transversale, le module d'élasticité de Young, le moment d'inertie d'une section transversale, et module de cisaillement. Les résultats obtenus au cours des trois dernières décennies montrent que la présence de la dissipation pour les deux équations conduit à la stabilité uniforme (exponentielle ou polynomiale) sans aucune condition sur les valeurs des constantes $\rho$, $I_\rho$, $E$, $I$ et $\kappa$. Ceci a été démontré par Feng et al. [17], Kim et Renardy [40], Messaoudi et Mustafa [45], Raposo [60], Santos [63], Shi et Feng [67], [68] et d'autres.

Dans le cas d'un seul amortissement dans la seconde équation, il a été démontré que la stabilité uniforme peut être obtenue pour des solutions faibles si et seulement si $\frac{\kappa}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}$. Dans le cas contraire $\left(\frac{\kappa}{\rho} \neq \frac{EI}{I_\rho}\right)$, un taux plus faible de décroissance est obtenue pour des solutions fortes. cet égard, nous citons, entre autres, le travail de Soufyane et Wehbe [70], Guesmia et Messaoudi [30], [29], Ammar-Khodja et al. [7], Rivera et Racke [56], [57], Fernández Sare et Rivera [54], Messaoudi et Mustafa [46], [47] et Messaoudi et Saïd-Houari [50].

Pour la stabilisation des systèmes de Timoshenko utilisant l'effet de la chaleur, le premier travail était par Rivera et Racke [55], où ils ont considéré, dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\varphi$, $\psi$ et $\theta$ désignent le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation du filament et la différence de température, respectivement. Sous des conditions appropriées sur $\sigma$, $\rho_i$, $b$, $\kappa$ et $\gamma$, ils ont prouvé plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour le système linéarisé et le résultat de non stabilité exponentielle pour le cas des vitesses d'onde différentes. Guesmia et al. [35] ont considéré le cas de vitesses différentes et ont établi plusieurs résultats de décroissance polynomiale. Ils ont également montré que la condition d'égalité des vitesses est nécessaire pour obtenir la décroissance exponentielle.

Pour les systèmes thermoélastiques de Timoshenko de type III, Messaoudi et Saïd-Houari [50] ont discuté le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - \kappa\theta_{txx} = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{4.3}$$

et ont prouvé un résultat de décroissance exponentielle si les vitesses de propogation sont égales. Lorsque les vitesses de propagation sont différentes, un résultat de décroissance polynomiale a été obtenue récemment par Messaoudi et Farah [43].

En ce qui concerne les systèmes thermoélastiques de Timoshenko avec deuxième son, Messaoudi et al. [48] ont étudié dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \end{cases}$$

où $\varphi$ est le déplacement transversal, $\psi$ est l'angle de rotation du filament, $\theta$ est la différence de température, $q$ est le flux de chaleur, $\rho_i$, $b$, $\kappa$, $\gamma$, $\delta$, $k$, $\kappa$ et $\tau$ sont des constantes positives. La fonction non linéaire $\sigma$ est supposée être suffisamment lisse et satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0,0) = \sigma_{\psi}(0,0) = \kappa$$

et

$$\sigma_{\varphi_x \varphi_x}(0,0) = \sigma_{\varphi_x \psi}(0,0) = \sigma_{\psi\psi} = 0.$$

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaire et non linéaire ont été établies en présence d'un amortissement (damping) par frottement fort $\mu \varphi_t$.

Fernández Saree et Racke [19] ont considéré dans $(0, L) \times (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

et ils ont montré que le couplage par la loi de Cattaneo provoque une perte de la décroissance exponentielle obtenue dans le cas du couplage par la loi de Fourier. Cette propriété surprenante tient même pour le système (4.1). Précisément, ils ont montré que les deux systèmes (4.1) et (4.4) ne sont plus stables de façon exponentielle, même pour des vitesses égales $\left(\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$.

Très récemment, Santos et al. [65] ont considéré (4.4) et introduit un nouveau numéro de stabilité

$$\chi = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa}\right)\left(\varrho_2 - \frac{\rho_1 b}{\kappa}\right) - \frac{\rho_1 \beta^2 \tau}{\kappa \rho_3}$$

et ont utilisé la méthode de semigroupe pour obtenir le résultat de décroissance exponentielle pour $\chi = 0$, et de décroissance polynomiale pour $\chi \neq 0$. Dans un travail ultérieur, Said-Houari et Kasimov [62] ont étudié le problème de Cauchy pour le système (4.4) et ont utilisé la méthode des multiplicateurs dans l'espace de Fourier pour montrer, sous la condition $\chi = 0$, que le taux de décroissance induite par la chaleur du deuxième son est le même que le taux de décroissance obtenue pour le problème de Cauchy de (4.2) établie plus tôt par Said-Houari et Kasimov [61].

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à (4.1) associés aux conditions initiales et «histoirique»

$$\begin{array}{ll} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & \text{dans } (0,L), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \ \theta(x,0) = \theta_0(x), \ q(x,0) = q_0(x), & \\ \psi(x,t) = \psi_0(x,t), & \text{dans } (0,L) \times (-\infty, 0] \end{array} \tag{4.5}$$

et les conditions au bord

$$\begin{array}{ll} \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{4.6}$$

Notre objectif est d'établir un résultat de stabilité générale et uniforme pour les noyaux de type de décroissance générale, à partir duquel la décroissance exponentielle et polynomiale habitueles sont des cas particuliers. La méthode de Guesmia et Messaoudi [32] pour traiter le terme histoirique infinie est différente de celle utilisée par Guesmia [25] et ne nécessite pas les conditions de convexité ou l'utilisation de l'inégalité de Young généralisée comme dans [25]. En outre, le résultat de Santos et al. [65] suit directement de notre résultat en prenant $g = 0$. Il faut noter que l'approche de semigroupe utilisée dans [65] ne peut pas traiter notre problème pour les noyaux de type de décroissance générale.

## 4.2 Préliminaires

On commence d'abord par énoncer les hypothèses suivantes sur la fonction de relaxation $g$

$(A1)$ $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) > 0,\ b - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds = l > 0.$$

$(A2)$ Il existe une fonction différentiable $\zeta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq -\zeta(t)\,g(t),\ t \geq 0, \\ \zeta(t) &> 0,\ \zeta'(t) \leq 0,\ \forall t > 0. \end{aligned}$$

Comme $\zeta$ est décroissante, alors $\zeta(t) \leq \zeta(0) = M$.

**Remarque 31** *Nous citons quelques fonctions qui verifient les conditions* $(A1)$ *et* $(A2)$, *pour* $a$ *et* $c$ *bien choisis de telle sorte que* $b - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds = l > 0$ *:*

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{a}{(1+t)^{\nu}},\ \nu > 1, \\ g_2(t) &= ae^{-c(1+t)^p},\ 0 < p \leq 1, \\ g_3(t) &= \frac{a}{(1+t)\left[\ln(1+t)\right]^{\nu}},\ \nu > 1. \end{aligned}$$

**Lemme 32** *Pour tout* $u \in C([0,+\infty), H^1(0,L))$, *on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\left|u_x(t) - u_x(t-s)\right| ds\right)^2 dx \leq (b-l)(g \circ u_x)(t), \\ &\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g'(s)\left|u_x(t) - u_x(t-s)\right| ds\right)^2 dx \leq -g(0)\left(g' \circ u_x\right)(t), \end{aligned}$$

*ou*

$$(g \circ u_x)(t) = \int_0^L \int_0^{+\infty} g(t-s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds dx.$$

**Démonstration.** On a

$$\int_0^L \left( \int_0^{+\infty} g(s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \, ds \right)^2 dx = \int_0^L \left( \int_0^{+\infty} g^{1/2} g^{1/2}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \, ds \right)^2 dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^{+\infty} g(s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \, ds \right)^2 \\
\leq \; & \left( \left[ \int_0^{+\infty} \left( g^{1/2}(s) \right)^2 ds \right]^{1/2} \left[ \int_0^{+\infty} \left( g^{1/2}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \right)^2 ds \right]^{1/2} \right)^2 \\
\leq \; & \left( \int_0^{+\infty} g(s) \, ds \right) \int_0^{+\infty} g(s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds \\
\leq \; & (b-l) \int_0^{+\infty} g(s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds,
\end{aligned}$$

et d'autre part, comme ci-dessus, mais en considérant $g^{'}$ au lieu de $g$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^{+\infty} g^{'}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \, ds \right)^2 \\
\leq \; & \left( \left[ \int_0^{+\infty} \left( g^{'1/2}(s) \right)^2 ds \right]^{1/2} \left[ \int_0^{+\infty} \left( \left( g^{'} \right)^{1/2} (s) |u_x(t) - u_x(t-s)| \right)^2 ds \right]^{1/2} \right)^2 \\
\leq \; & \left( \int_0^{+\infty} g^{'}(s) \, ds \right) \int_0^{+\infty} g^{'}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds \\
\leq \; & [g(s)]_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g^{'}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds \\
\leq \; & -g(0) \int_0^{+\infty} g^{'}(s) |u_x(t) - u_x(t-s)|^2 \, ds.
\end{aligned}$$

■

**Lemme 33** *Pour tout $\psi \in C([0,+\infty), H^1(0,L))$ et pour tout $\eta > 0$, on a l'estimation*

$$\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,ds\right)^2 dx \leq (1+\eta)(b-l)^2 \int_0^L \psi_x^2 dx + \left(1+\frac{1}{\eta}\right)(b-l)(g\circ\psi_x)(t).$$

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\left[|\psi_x(x,t-s)-\psi_x(t)| + |\psi_x(t)|\right] ds\right)^2 dx \\
\leq\ & \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(x,t-s)-\psi_x(t)|\,ds\right)^2 dx \\
& \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(t)|\,ds\right)^2 dx \\
& 2\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(x,t-s)-\psi_x(t)|\,ds\right)\left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(t)|\,ds\right) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & \int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(x,t-s)-\psi_x(t)|\,ds\right)^2 dx \\
& + \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\right)^2 \int_0^L \psi_x^2 dx \\
& +2\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(x,t-s)-\psi_x(t)|\,ds\right)\left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(t)|\,ds\right) dx \\
\leq\ & (1+\eta)\left(\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\right)^2 \int_0^L \psi_x^2 dx \\
& + \left(1+\frac{1}{\eta}\right)\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,|\psi_x(t)-\psi_x(x,t-s)|\,ds\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 32**,** pour tout $\eta > 0$, on trouve

$$\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,ds\right)^2 dx \;\leq\; (1+\eta)(b-l)^2 \int_0^L \psi_x^2 dx + \left(1+\frac{1}{\eta}\right)(b-l)(g\circ\psi_x)(t)\,.$$

■

On vérifie aisément que

$$\begin{array}{l} \rho_2 \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \psi(x,t)\,dx + \kappa \int_0^L \psi(x,t)\,dx = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_0^L q(x,t)\,dx + \frac{\beta}{\tau} \int_0^L q(x,t)\,dx = 0. \end{array} \tag{4.7}$$

En effet, on intégre d'abord les équations $(4.1)_2$ et $(4.1)_4$ sur $(0,L)$, on trouve

$$\begin{array}{c} \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi_{xx} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\,dx + \delta \int_0^L \theta_x dx + \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_{xx}(x,t-s)\,dsdx = 0, \\ \tau \int_0^L q_t dx + \beta \int_0^L q dx + \int_0^L \theta_x dx = 0, \end{array}$$

et les conditions au bord permettent de conclure que

$$\begin{array}{c} \rho_2 \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \psi dx + \kappa \int_0^L \psi dx = b\,[\psi_x]_0^L - \kappa\,[\varphi]_0^L - \delta\,[\theta]_0^L - \int_0^{+\infty} g(s)\,[\psi_x(x,t-s)]_0^L\,ds = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_0^L q dx + \frac{\beta}{\tau} \int_0^L q dx = -\frac{1}{\tau}\,[\theta]_0^L = 0. \end{array}$$

Donc, la solution générale de (4.7) est donnée par

$$\begin{array}{l} \int_0^L \psi(x,t)\,dx = c_0(x)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}t\right) + c_1(x)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}t\right), \\ \int_0^L q(x,t)\,dx = c_2(x)\,e^{-\frac{\beta}{\tau}t}. \end{array}$$

Les conditions initiales $\psi(x,t) = \psi_0(x)\,(t \leq 0)\,,\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x)$ et $q(x,0) = q_0(x)$ donnent

$$c_0(x) = \int_0^L \psi_0(x)\,dx,\ \ c_1(x) = \sqrt{\frac{\rho_2}{\kappa}} \int_0^L \psi_1(x)\,dx \text{ et } c_2(x) = \int_0^L q_0(x)\,dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \psi(x,t)\,dx = \left(\int_0^L \psi_0(x)\,dx\right)\cos\left(\sqrt{\tfrac{\kappa}{\rho_2}}t\right) + \sqrt{\tfrac{\rho_2}{\kappa}}\left(\int_0^L \psi_1(x)\,dx\right)\sin\left(\sqrt{\tfrac{\kappa}{\rho_2}}t\right),\\
&\int_0^L q(x,t)\,dx = \left(\int_0^L q_0(x)\,dx\right)e^{-\frac{\beta}{\tau}t}.
\end{aligned}$$

Enfin, posant

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x,t) - \tfrac{1}{L}\left[\left(\int_0^L \psi_0(x)\,dx\right)\cos\left(\sqrt{\tfrac{\kappa}{\rho_2}}t\right) - \sqrt{\tfrac{\rho_2}{\kappa}}\left(\int_0^L \psi_1(x)\,dx\right)\sin\left(\sqrt{\tfrac{\kappa}{\rho_2}}t\right)\right],\\
&\tilde{q}(x,t) = q(x,t) - q_0(x)\,e^{-\frac{\beta}{\tau}t},
\end{aligned}$$

on vérife facilement que $\left(\varphi, \tilde{\psi}, \theta, \tilde{q}\right)$ satisfait (4.1), (4.5) et (4.6).

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \tilde{\psi}(x,t)\,dx = 0,\\
&\int_0^L \tilde{q}(x,t)\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Par conséquent, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée pour $\tilde{\psi}$ et $\tilde{q}$. Dans la suite, pour simplifier les notations, on écrit $\psi$ et $q$ au lieu de $\tilde{\psi}$ et $\tilde{q}$. On pose

$$\begin{aligned}
L_*^2(0,L) &= \left\{\omega \in L^2(0,L) : \int_0^L \omega(x)\,dx = 0\right\},\\
H_*^1(0,L) &= H^1(0,L) \cap L_*^2(0,L),\\
H_*^2(0,L) &= \left\{\omega \in H^2(0,L) : \omega_x(0) = \omega_x(L) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

On introduit l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L),$$

muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}
\left(\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} &= \kappa\int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})dx + \rho_1\int_0^L u\tilde{u}dx + b\int_0^L \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \rho_2\int_0^L v\tilde{v}dx\\
&\quad + \rho_3\int_0^L \theta\tilde{\theta}dx + \tau\int_0^L q\tilde{q}dx,
\end{aligned}$$

pour $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q)^T$ et $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\varphi}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{q}\right)^T \in \mathcal{H}$. On définit aussi

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in \mathcal{H} \backslash \ \varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \psi \in H_*^2(0,L) \cap H_*^1(0,L), \\ u \in H_*^1(0,L), v \in H_0^1(0,L), \theta \in H_0^1(0,L), q \in H_*^1(0,L) \end{array} \right\}.$$

**Proposition 34** *Soit* $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0(.,0), \psi_1, \theta_0, q_0)^T \in \mathcal{H}$ *donnée et supposons que* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont vérifiée. Alors, le problème* (4.1), (4.5) *et* (4.6) *admet une solution faible unique* $\Phi \in C([0,+\infty), \mathcal{H})$*. De plus, si* $\Phi_0 \in \mathcal{F}$*, alors, le problème a une solution forte unique* $\Phi \in C([0,+\infty), \mathcal{F}) \cap C^1([0,+\infty), \mathcal{H})$.

Ce résultat peut être prouvé en utilisant la méthode de Galerkin.

## 4.3 Décroissance générale

Dans cette section, on considère le système (4.1), (4.5) et (4.6) et on montre la stabilisation de l'énergie associée à la solution.

On commence par dériver la fonctionnelle d'énergie. Pour cela, en multipliant l'équation $(4.1)_1$ par $\varphi_t$, et en intégrant sur $(0, L)$, on trouve

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x dx = 0.$$

En intégrant par parties le terme $\int_0^L \varphi_t (\varphi_x - \psi)_x dx$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx - [\varphi_t (\varphi_x + \psi)]_0^L + \kappa \int_0^L \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

les conditions au bord permet d'écrire la dernière égalité, sous la forme

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi) dx = 0. \tag{4.9}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(4.1)_2$ par $\psi_t$, et en intégrant sur $(0, L)$, on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi_t \psi_{xx} dx + \kappa \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \\
&\quad + \delta \int_0^L \psi_t \theta_x dx + \int_0^L \psi_t \int_0^{+\infty} g(s) \psi_{xx}(x, t-s)\, ds dx,
\end{aligned}$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + b \int_0^L \psi_{xt} \psi_x dx + \kappa \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \\
&\quad + \delta \int_0^L \psi_t \theta_x dx - \int_0^L \psi_{xt} \int_0^{+\infty} g(s) \psi_x(t)(x, t-s)\, ds dx,
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \psi_{xt} \int_0^{+\infty} g(s) \psi_x(x, t-s)\, ds dx \\
= & - \int_0^L \psi_{xt} \int_{-\infty}^t g(t-s) \psi_x(x, s)\, ds dx \\
= & \int_{-\infty}^t g(t-s) \int_0^L \psi_{xt}(t) [\psi_x(t) - \psi_x(s)]\, dx ds - \int_{-\infty}^t g(t-s) \int_0^L \psi_{xt}(t) \psi_x(t)\, dx ds \\
= & \int_{-\infty}^t g(t-s) \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\psi_x(t) - \psi_x(s))^2 dx \right) ds - \int_{-\infty}^t g(t-s) \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2(t)\, dx \right) ds,
\end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^L \psi_{xt} \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t g(t-s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(s))^2\,dxds - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^t g^{'}(t-s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(s))^2\,dxds \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t g(t-s)\int_0^L \psi_x^2(t)\,dxds + \int_{-\infty}^t g^{'}(t-s)\,ds\int_0^L \psi_x^2(t)\,dx + \frac{1}{2}g(0)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^{'}(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^{'}(s)\,ds\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}g(0)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^{'}(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\int_0^L \psi_x^2 dx.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
-\int_0^L \psi_{xt}\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\psi_x)(t) - \frac{1}{2}\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t) \\
& \quad -\frac{1}{2}(b-l)\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2(t)\,dx,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
(g\circ\psi_x)(t) &= \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds, \\
(g'\circ\psi_x)(t) &= \int_0^{+\infty} g'(s)\int_0^L (\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds.
\end{aligned}
$$

Alors, on deduit

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{l}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\psi_x)(t) \\
& \quad +\kappa\int_0^L \psi_t(\varphi_x+\psi)dx + \delta\int_0^L \psi_t\theta_x dx - \frac{1}{2}\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t).
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

En multipliant l'équation $(4.1)_3$ par $\theta$, et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^L \theta\theta_t dx + \int_0^L \theta q_x dx + \delta \int_0^L \theta\psi_{xt} dx = 0,$$

en utilisant encore l'intégrale par parties avec les conditions au bord appliquée cette fois ci au terme $\int_0^L \theta\psi_{xt} dx$, on trouve

$$\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L \theta q_x dx - \delta \int_0^L \theta_x \psi_t dx = 0. \tag{4.11}$$

En multipliant l'équation $(4.1)_4$ par $q$, et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\tau \int_0^L q q_t dx + \beta \int_0^L q^2 dx + \int_0^L q\theta_x dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties le terme $\int_0^L q\theta_x dx$, on obtient

$$\int_0^L q_x \theta dx = \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L q^2 dx + \beta \int_0^L q^2 dx. \tag{4.12}$$

En remplaçant (4.12) dans (4.11), on obtient

$$\delta \int_0^L \theta_x \psi_t dx = \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L q^2 dx + \beta \int_0^L q^2 dx.$$

Ensuite, on remplace cette dérnière égalité dans (4.10), on trouve

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{l}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \circ \psi_x\right)(t) + \kappa \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi) dx \\ & + \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L q^2 dx + \beta \int_0^L q^2 dx - \frac{1}{2}\left(g' \circ \psi_x\right)(t). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalement, en additionnant (4.9) et (4.13), on arrive à

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{l}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \circ \psi_x\right)(t) + \kappa \int_0^L \left(\varphi_x + \psi\right)_t \left(\varphi_x + \psi\right) dx \\
&+ \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L q^2 dx + \beta \int_0^L q^2 dx - \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \psi_x\right)(t),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{l}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx \\
&+ \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \circ \psi_x\right)(t) + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L q^2 dx + \beta \int_0^L q^2 dx - \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \psi_x\right)(t).
\end{aligned}$$

Maintenant, on introduit la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned}
E(t) = E(\varphi, \psi, \theta, q) = \frac{1}{2}\left(\rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + l \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx\right) \\
+ \frac{1}{2}\left(\rho_3 \int_0^L \theta^2 dx + \tau \int_0^L q^2 dx + \left(g \circ \psi_x\right)(t)\right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

On remarque que $E(t)$ est positive, et sa dérivée verifie

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\beta \int_0^L q^2 dx + \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \psi_x\right)(t) \leq 0. \tag{4.15}$$

Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance générale résumée dans l'énoncé suivant

**Théorème 35** *Soit* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0(.,0), \psi_1, \theta_0, q_0) \in \mathcal{H}$. *Supposons que les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites telles que* $\exists m_0 > 0$ :

$$\int_0^L \psi_{0x}^2(x,s)\, dx \leq m_0 \quad \forall s \leq 0 \tag{4.16}$$

*et*

$$\chi_0 = \underbrace{\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)}_{\chi}\left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa}\right) - \frac{\tau\delta^2\rho_1}{\kappa\rho_3} = 0.$$

*Alors il existe deux constantes strictement positives* $\delta_0$ *et* $\sigma_0$ *telles que la solution du problème* $(4.1), (4.5)$ *et* $(4.6)$ *vérifie pour tout* $\sigma \in \left]0, \delta_0\right]$

$$E(t) \leq \sigma_0 \left(1 + \int_0^t g^{1-\sigma}(s)\,dt\right) e^{-\sigma \int_0^t \zeta(s)ds} + \sigma_0 \int_t^{+\infty} g(s)\,ds, \quad \forall t > 0. \tag{4.17}$$

**Exemple 36** *Pour illustrer notre résultat, nous considérons quelques exemples :*

1. *Soit* $g(t) = de^{-(1+t)^q}$, *avec* $0 < q \leq 1$ *et* $d > 0$ *assez petit. Alors* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites, avec* $\zeta(t) = q(1+t)^{-1}$. *Et pa conséquent,* $(4.17)$ *implique pour deux constantes positives* $c_1$ *et* $c_2$,

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2(1+t)^q}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

2. *Soit* $g(t) = \frac{d}{(1+t)^q}$, *avec* $q > 1$ *et* $d > 0$ *assez petit, Alors* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites avec* $\zeta(t) = q(1+t)^{-1}$. *Donc,* $(4.17)$ *donne, pour deux constantes positives* $c_1$ *et* $c_2$,

$$E(t) \leq \frac{c_1}{(1+t)^{c_2}}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

La démonstration du Théorème 35 est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov qui est équivalente à $E(t)$ et une approche de Guesmia et Massaoudi [32]. Pour cela, on utilise la technique de multiplicateurs afin de montrer les lemmes : suivants

**Lemme 37** *Sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$, *la fonctionnelle*

$$I_1 = -\rho_1 \int_0^L \varphi\varphi_t dx - \rho_2 \int_0^L \psi\psi_t dx$$

*vérifie, pour toute solution du problème* $(4.1), (4.5)$ *et* $(4.6)$,

$$\begin{aligned} I_1^{'} &\leq -\rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad +2b \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\delta^2}{2l} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{2l} (b-l) (g \circ \psi_x)(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(4.1)_1$ par $\varphi$ et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^L \varphi\varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^L \varphi(\varphi_x + \psi)_x dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties le terme $\kappa \int_0^L \varphi(\varphi_x + \psi)_x dx$, on trouve

$$\rho_1 \int_0^L \varphi\varphi_{tt} dx - \kappa \left[\varphi(\varphi_x + \psi)\right]_0^L + \kappa \int_0^L \varphi_x(\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

on revient aux conditions au bord qu' impliquent

$$\rho_1 \int_0^L \varphi\varphi_{tt} dx + \kappa \int_0^L \varphi_x(\varphi_x + \psi) dx = 0. \tag{4.19}$$

D'autre part, en multipliant l'équation $(4.1)_2$ par $\psi$, et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^L \psi\psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi\psi_{xx} dx + \kappa \int_0^L \psi(\varphi_x + \psi) dx \\ &\quad +\delta \int_0^L \psi\theta_x dx + \int_0^L \psi \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_{xx}(x, t-s)\, ds dx, \end{aligned}$$

on conclut, à l'aide de la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^L \psi\psi_{tt} dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \psi(\varphi_x + \psi) dx \\ &\quad -\delta \int_0^L \psi_x\theta dx - \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x, t-s)\, ds dx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Grâce à l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx \leq \frac{\gamma}{2}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2\gamma}\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,ds\right)^2 dx.$$

Or d'après le Lemme 33**,** on arrive à

$$\begin{aligned}\int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx &\leq \left[\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2\gamma}(1+\eta)(b-l)^2\right]\int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad +\frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(b-l)(g\circ\psi_x)(t). \quad (4.21)\end{aligned}$$

D'où, en combinant (4.19)-(4.21), on trouve

$$\begin{aligned}I_1' &= -\rho_1\frac{d}{dt}\int_0^L \varphi\varphi_t dx - \rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L \psi\psi_t dx \\ &= -\rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[2b+\gamma+\frac{1}{\gamma}(1+\eta)(b-l)^2\right]\int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad -\delta\int_0^L \psi_x\theta dx + \frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(b-l)(g\circ\psi_x)(t).\end{aligned}$$

En choisissant alors $\eta=\frac{l}{b-l}$, $\gamma=b$ et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient le résultat désiré. ■

**Lemme 38** *Sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$, *la fonctionnelle*

$$I_2 = -\rho_3\int_0^L \theta\int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx$$

*vérifie, pour toute solution du problème* $(4.1), (4.5)$ *et* $(4.6)$ *et pour tous* $\eta_1,\ \varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} I_2' &\leq \tilde{c}\left(1+\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^L \theta^2 dx + \tilde{c}\eta_1 \int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad + \tilde{c}\varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx + \frac{1}{2\delta}\int_0^L q^2 dx \\ &\quad - \frac{\delta}{2}\int_0^L \psi_t^2 dx + \tilde{c}\eta_1 (g \circ \psi_x)(t). \end{aligned} \tag{4.22}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(4.1)_3$ par $\int_0^x \psi_t(y,t)\,dy$ et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx + \int_0^L q_x \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx + \delta \int_0^L \psi_{xt} \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx = 0.$$

Grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx - \int_0^L q\psi_t dx - \delta \int_0^L \psi_t^2 dx = 0.$$

D'après l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} & \rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^L \theta \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx \\ = \ & \rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x \psi_{tt}(y,t)\,dydx + \rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x \psi_t(y,t)\,dydx \\ = \ & \rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x \psi_{tt}(y,t)\,dydx + \int_0^L q\psi_t dx + \delta \int_0^L \psi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dans (4.23), on remplace $\psi_{tt}$ par

$$\frac{1}{\rho_2}\left[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x+\psi) - \delta\theta_x - \int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_{xx}(x,t-s)\,ds\right],$$

il vient

$$
\begin{aligned}
& -\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \int_0^x \psi_t(s,t)\, ds dx \\
= \; & -\frac{\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta \int_0^x \left[ b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x - \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_{xx}(.,t-s)\, ds \right](y,t)\, dy dx \\
& - \int_0^L q\psi_t dx - \delta \int_0^L \psi_t^2 dx \\
= \; & -\frac{b\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta\psi_x dx + \frac{\kappa\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi)(y)\, dy dx + \frac{\delta\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx \\
& - \int_0^L q\psi_t dx - \delta \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x,t-s)\, ds dx.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Young à la dernière égalité et le Lemme 33 ($\eta = 1$), on voit que

$$
\begin{aligned}
& -\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \int_0^x \psi_t(s,t)\, ds dx \\
\leq \; & \frac{b\rho_3}{4\eta_1\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{b\rho_3}{\rho_2}\eta_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa\rho_3}{4\varepsilon_1\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx \\
& + \frac{\kappa L^2 \rho_3}{\rho_2}\varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta\rho_3}{\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx \\
& + \frac{1}{2\delta} \int_0^L q^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx - \delta \int_0^L \psi_t^2 dx \\
& + \frac{\rho_3}{4\eta_1\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{2(b-l)^2 \rho_3}{\rho_2}\eta_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{2(b-l)\rho_3}{\rho_2}\eta_1 (g \circ \psi_x)(t),
\end{aligned}
$$

alors

$$\begin{aligned}
-\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \int_0^x \psi_t\left(s,t\right) dsdx \quad \leq \quad & \left(\frac{b\rho_3}{4\eta_1\rho_2} + \frac{\delta\rho_3}{\rho_2} + \frac{\kappa\rho_3}{4\varepsilon_1\rho_2} + \frac{\rho_3}{4\eta_1\rho_2}\right) \int_0^L \theta^2 dx \\
& + \eta_1 \left(\frac{b\rho_3}{\rho_2} + \frac{2\left(b-l\right)^2\rho_3}{\rho_2}\right) \int_0^L \psi_x^2 dx \\
& + \frac{\kappa L^2 \rho_3}{\rho_2}\varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2\delta} \int_0^L q^2 dx \\
& - \frac{\delta}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{2\left(b-l\right)\rho_3}{\rho_2} \eta_1 \left(g \circ \psi_x\right)(t),
\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité cherchée. ∎

**Lemme 39** *Sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$, *la fonctionnelle*

$$I_3 = \rho_2 \int_0^L \psi\psi_t dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t \int_0^x \psi\left(s,t\right) dsdx$$

*vérifie, pour toute solution du problème* $(4.1), (4.5)$ *et* $(4.6)$ *et pour tout* $\varepsilon_2 > 0$,

$$I_3^{'} \leq \tilde{c}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^L \psi_t^2 dx - \frac{l}{4} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\delta^2}{l} \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{(b-l)}{2l} \left(g \circ \psi_x\right)(t). \tag{4.24}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(4.1)_2$ par $\psi$, et en intégrant sur $(0,L)$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & \rho_2 \int_0^L \psi\psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi\psi_{xx} dx + \kappa \int_0^L \psi(\varphi_x + \psi) dx \\
& + \delta \int_0^L \psi\theta_x dx + \int_0^L \psi \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_{xx}\left(x,t-s\right) dsdx,
\end{aligned}$$

et d'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^L \psi\psi_{tt}dx - b\left[\psi\psi_x\right]_0^L + b\int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L \psi(\varphi_x+\psi)dx + \delta\left[\psi\theta\right]_0^L \\ & -\delta\int_0^L \psi_x\theta dx + \left[\psi\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)ds\right]_0^L - \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx, \end{aligned}$$

alors, sous les conditions au bord, on déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^L \psi\psi_{tt}dx + b\int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L \psi(\varphi_x+\psi)dx \\ & -\delta\int_0^L \psi_x\theta dx - \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi\psi_t dx &= \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx + \rho_2\int_0^L \psi\psi_{tt}dx \\ &= \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - b\int_0^L \psi_x^2 dx \\ & -\kappa\int_0^L \psi(\varphi_x+\psi)dx + \delta\int_0^L \psi_x\theta dx \\ & +\int_0^L \psi_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx. \end{aligned} \tag{4.25}$$

On pose maintenant

$$\omega = \int_0^x \psi\left(s,t\right)ds.$$

En multipliant l'équation $(4.1)_1$ par $\omega$, et en intégrant sur $(0,L)$, on obtient

$$\rho_1\int_0^L \omega\varphi_{tt}dx - \kappa\int_0^L \omega(\varphi_x+\psi)_x dx = 0,$$

on utilise d'abord l'intégration par parties, on trouve

$$\rho_1\int_0^L \omega\varphi_{tt}dx - \kappa\left[\omega(\varphi_x+\psi)\right]_0^L + \kappa\int_0^L \omega_x(\varphi_x+\psi)dx = 0,$$

puis on utilise (4.8), on conclut que

$$\rho_1 \int_0^L \omega\varphi_{tt} dx + \kappa \int_0^L \psi(\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} -\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \omega\varphi_t dx &= -\rho_1 \int_0^L \omega_t\varphi_t dx - \rho_1 \int_0^L \omega\varphi_{tt} dx \\ &= -\rho_1 \int_0^L \omega_t\varphi_t dx + \kappa \int_0^L \psi\left(\varphi_x + \psi\right) dx. \end{aligned} \tag{4.26}$$

En additionnant deux dernières égalités (4.25) et (4.26), on obtient

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi\psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \omega\varphi_t dx &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx + \delta \int_0^L \psi_x \theta dx \\ &\quad -\rho_1 \int_0^L \omega_t\varphi_t dx + \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds dx, \end{aligned}$$

ce qui implique d'après l'inégalité de Young, que

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi\psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \omega\varphi_t dx &\leq \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx + \delta \int_0^L \psi_x \theta dx \\ &\quad + \frac{\rho_1^2}{4\varepsilon_2} \int_0^L \omega_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \gamma \int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4\gamma} \int_0^L \left( \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Au terme $\int_0^L \omega_t^2 dx$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu' on utilise à plusieurs reprises, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^L \omega_t^2 dx &= \int_0^L \left(\int_0^x \psi_t(s,t)\, ds\right)^2 dx \\ &\leq L\int_0^L \int_0^x \psi_t^2(s,t)\, dsdx \\ &\leq L\int_0^L \int_0^L \psi_t^2(s,t)\, dsdx \\ &\leq L^2 \int_0^L \psi_t^2(s,t)\, ds,\end{aligned}$$

on en déduit alors que

$$\begin{aligned} I_3^{'} &= \rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi\psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^L \omega\varphi_t dx \\ &\leq \left(\rho_2 + \frac{L^2\rho_1^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_0^L \psi_t^2 dx - b\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{b}{2}\zeta\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\delta^2}{2b\zeta}\int_0^L \theta^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \gamma\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\gamma}\int_0^L \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\, ds\right)^2 dx.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 33**,** on arrive à

$$\begin{aligned} I_3^{'} &= \rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi\psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^L \omega\varphi_t dx \\ &\leq \left(\rho_2 + \frac{L^2\rho_1^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_0^L \psi_t^2 dx - \left(b - \frac{b}{2}\zeta - \gamma - \frac{1}{4\gamma}(1+\eta)(b-l)^2\right)\int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{\delta^2}{2b\zeta}\int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_2\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{1}{4\gamma}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(b-l)\,(g\circ\psi_x)(t),\end{aligned}$$

avec $\eta$, $\gamma$ et $\zeta$ choisis de façon que $b - \frac{b}{2}\zeta - \gamma - \frac{1}{4\gamma}(1+\eta)(b-l)^2 > 0$.

En prenant, par exemple $\eta = \frac{l}{b-l}$, $\gamma = \frac{b}{2}$ et $\zeta = \frac{l}{2b}$, on obtient (4.24). ■

Le lemme suivant est très important. Sa preuve sera donnée en détails.

**Lemme 40** *On suppose que* $\chi_0 = 0$*, sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$*, la fonctionnelle*

$$I_4 = \chi \left[ \rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \frac{\tau b \rho_1}{\kappa} \left( \tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa} \right) \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \right.$$
$$- \frac{\delta \rho_1}{\kappa} \int_0^L \theta \varphi_t dx + \frac{\delta \rho_1}{\rho_3 \kappa} \int_0^L q \varphi_x dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{\tau \kappa \rho_3} \int_0^L \psi_t \varphi_x dx$$
$$\left. - \frac{\tau \rho_1}{\kappa} \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa \rho_3} \right) \int_0^L \varphi_t \int_0^{+\infty} g(s) \psi_x(x, t-s) ds dx \right]$$

*vérifie, pour toute solution du problème* $(4.1), (4.5)$ *et* $(4.6)$ *et pour tous* $\mu$*,* $\varepsilon_3 > 0$

$$\begin{aligned} I_4^{'} \leq & - \left[ \frac{\delta^2 \rho_1}{\rho_3} - \tilde{c} \varepsilon_3 \right] \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \tilde{c} \int_0^L \psi_x^2 dx + \tilde{c} \int_0^L \psi_t^2 dx \\ & + \tilde{c} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^L q^2 dx + \tilde{c} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^L \psi^2 dx \\ & + \tilde{c} \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\tilde{c}}{\mu} \left( g^{'} \circ \psi_x \right)(t) + \tilde{c} \left( g \circ \psi_x \right)(t). \end{aligned} \tag{4.27}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(4.1)_2$ par $(\varphi_x + \psi)$, et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = & \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi)dx - b \int_0^L \psi_{xx}(\varphi_x + \psi)dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & + \delta \int_0^L \theta_x(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^L (\varphi_x + \psi) \int_0^{+\infty} g(s) \psi_{xx}(x, t-s) ds dx, \end{aligned}$$

sous les conditions au bord, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 0 = & \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi)dx + b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & + \delta \int_0^L \theta_x(\varphi_x + \psi)dx - \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g(s) \psi_x(x, t-s) ds dx, \end{aligned}$$

donc, cette fois encore, on applique l'intégration par parties pour déduire

$$\begin{aligned}
\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi) dx &= \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx \\
&= -b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
&\quad -\delta \int_0^L \theta_x(\varphi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx \\
&\quad + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x, t-s)\, ds dx \\
&= -b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
&\quad -\delta \left( [\theta(\varphi_x + \psi)]_0^L - \int_0^L \theta(\varphi_x + \psi)_x dx \right) \\
&\quad + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x, t-s)\, ds dx \\
&\quad +\rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx.
\end{aligned}$$

D'après les conditions au bord, on trouve

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi) dx \\
&= -b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \delta \int_0^L \theta(\varphi_x + \psi)_x dx \\
&\quad + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x, t-s)\, ds dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx \\
&= -b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta \rho_1}{\kappa} \int_0^L \theta \varphi_{tt} dx \\
&\quad + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_x(x, t-s)\, ds dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(4.1)_1$ par $\psi_x$ et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx &= \rho_1 \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx + \rho_1 \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx \\
&= \rho_1 \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx + \kappa \int_0^L \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx,
\end{aligned}$$

ce que implique

$$\frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx = \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx + b \int_0^L \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx. \tag{4.29}$$

En additionnant les deux égalités (4.28) et (4.29), on obtient

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \\
= \; & \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \int_0^L \theta \varphi_{tt} dx \\
& + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x \left(x, t-s\right) ds dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi)_t dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \\
= \; & \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \int_0^L \theta \varphi_{tt} dx \\
& + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x \left(x, t-s\right) ds dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \varphi_{xt} dx,
\end{aligned}$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx = \left( \frac{b\rho_1}{\kappa} - \rho_2 \right) \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx \\
& - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \varphi_t dx - \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \int_0^L \theta_t \varphi_t dx \\
& + \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x \left(x, t-s\right) ds dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

On déduit de $(4.1)_3$ et l'intégration par parties que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \theta_t\varphi_t dx &= \frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \left[-q_x-\delta\psi_{xt}\right]\varphi_t dx \\
&= -\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q_x\varphi_t dx-\frac{\delta^2\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&= -\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L q_x\varphi dx+\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q_{xt}\varphi dx \\
&\quad -\frac{\delta^2\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \theta_t\varphi_t dx &= -\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L q_x\varphi dx-\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q_t\varphi_x dx \\
&\quad -\frac{\delta^2\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

En utilisant l'équation $(4.1)_4$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q_t\varphi_x dx &= \frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \left(-\beta q-\theta_x\right)\varphi_x dx \\
&= -\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\varphi_x dx-\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx \\
&= -\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\left(\varphi_x+\psi\right)dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\psi dx \\
&\quad -\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

D'autre part, d'après $(4.1)_2$, on voit que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx &= \frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \left[-\rho_2\psi_{tt}+b\psi_{xx}-\kappa(\varphi_x+\psi)-\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds\right]\varphi_x dx \\
&= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{tt}\varphi_x dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xx}\left(\varphi_x+\psi\right)dx \\
&\quad -\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xx}\psi dx-\kappa\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad +\kappa\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx-\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \varphi_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)dsdx,
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t\varphi_x dx+\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_t\varphi_{xt} dx \\
&\quad -\frac{b\rho_1}{\tau\rho_3\kappa}\int_0^L \psi_x\left(\varphi_x+\psi\right)_x dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&\quad -\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx+\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \left(\varphi_x+\psi\right)_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t\varphi_x dx-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&\quad -\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt} dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x^2 dx-\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad +\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \left(\varphi_x+\psi\right)_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x\int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t\varphi_x dx - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&\quad -\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x\varphi_t dx + \frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&\quad +\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad +\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \theta_x\varphi_x dx &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t\varphi_x dx + \left(\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\right)\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&\quad -\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x\varphi_t dx + \frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad +\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx + \frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_x\int_0^{+\infty} g(s)\,\psi_x(x,t-s)\,dsdx. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.33) dans (4.32), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q_t\varphi_x dx &= -\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\left(\varphi_x+\psi\right)dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\psi dx+\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t\varphi_x dx\\ &-\left(\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\right)\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t dx+\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_x\varphi_t dx\\ &-\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\psi_x^2 dx+\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L(\varphi_x+\psi)_t^2 dx\\ &-\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi dx-\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\left(\varphi_x+\psi\right)_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx\\ &+\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\psi_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx. \end{aligned} \tag{4.34}$$

En remplaçant encore (4.34) dans (4.31), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L\theta_t\varphi_t dx &= -\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L q_x\varphi dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\left(\varphi_x+\psi\right)dx-\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L q\psi dx\\ &-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t\varphi_x dx-\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_x\varphi_t dx\\ &+\left(\frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3}-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}-\frac{\delta^2\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\psi_x^2 dx\\ &-\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2 dx+\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi dx\\ &+\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\left(\varphi_x+\psi\right)_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx\\ &-\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L\psi_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Enfin, en remplaçant encore (4.35) dans (4.30), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \\
= \ & \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \varphi_t dx + \frac{\delta\rho_1}{\rho_3\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L q_x \varphi dx - \frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \int_0^L q\left(\varphi_x + \psi\right) dx \\
& + \frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \int_0^L q\psi dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t \varphi_x dx + \frac{b\rho_1^2}{\tau\kappa^2\rho_3} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \\
& - \frac{1}{\tau} \chi_0 \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx - \frac{\kappa}{\tau} \left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
& - \frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \int_0^L (\varphi_x + \psi)\psi dx \\
& + \tau \left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds dx \\
& + \frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds dx.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& \chi \left[ \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_1}{\tau\kappa} \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right) \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \right. \\
& \left. - \frac{\delta\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \varphi_t dx + \frac{\delta\rho_1}{\rho_3\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L q \varphi_x dx - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t \varphi_x dx \right] \\
= \ & - \frac{1}{\tau} \chi\chi_0 \int_0^L \psi_{xt} \varphi_t dx - \frac{\kappa}{\tau} \chi \left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
& - \frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \chi \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_2 \chi \int_0^L \psi_t^2 dx - \frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \chi \int_0^L q\left(\varphi_x + \psi\right) dx \\
& + \frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \chi \int_0^L q\psi dx - \frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \chi \int_0^L (\varphi_x + \psi)\psi dx \\
& + \frac{\tau\rho_1}{\kappa} \chi \left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) \int_0^L \varphi_{tt} \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds dx \\
& + \frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3} \chi \int_0^L \psi_x \int_0^{+\infty} g\left(s\right) \psi_x\left(x, t-s\right) ds dx,
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
& \chi\left[\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t(\varphi_x+\psi)dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left(\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_x\varphi_t dx\right. \\
& \left.-\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L\theta\varphi_t dx+\frac{\delta\rho_1}{\rho_3\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L q\varphi_x dx-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t\varphi_x dx\right] \\
= & -\frac{1}{\tau}\chi\chi_0\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t dx-\frac{\kappa}{\tau}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2 dx \\
& -\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L\psi_x^2 dx+\rho_2\chi\int_0^L\psi_t^2 dx-\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L q\left(\varphi_x+\psi\right)dx \\
& +\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L q\psi dx-\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi dx \\
& +\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\varphi_t\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx \\
& -\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L\varphi_t\left(g\left(0\right)\psi_x\left(x,t\right)+\int_{-\infty}^t g^{'}\left(t-s\right)\psi_x\left(x,s\right)ds\right)dx \\
& +\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L\psi_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \chi\left[\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t(\varphi_x+\psi)dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left(\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_x\varphi_t dx\right. \\
& \left.-\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L\theta\varphi_t dx+\frac{\delta\rho_1}{\rho_3\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L q\varphi_x dx-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t\varphi_x dx\right] \\
= & -\frac{1}{\tau}\chi\chi_0\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t dx-\frac{\kappa}{\tau}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2 dx \\
& -\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L\psi_x^2 dx+\rho_2\chi\int_0^L\psi_t^2 dx-\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L q\left(\varphi_x+\psi\right)dx \\
& +\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L q\psi dx-\frac{\kappa\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi dx \\
& +\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\varphi_t\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx \\
& +\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L\varphi_t\int_0^{+\infty}g^{'}\left(s\right)\left[\psi_x\left(t\right)-\psi_x\left(x,t-s\right)\right]dsdx \\
& +\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L\psi_x\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx.
\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Young et les Lemmes 32 et 33, il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\chi\left[\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t(\varphi_x+\psi)dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left(\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_x\varphi_t dx\right.\\
&-\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L\theta\varphi_t dx+\frac{\delta\rho_1}{\rho_3\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L q\varphi_x dx-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^L\psi_t\varphi_x dx\\
&\left.-\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\frac{d}{dt}\int_0^L\varphi_t\int_0^{+\infty}g\left(s\right)\psi_x\left(x,t-s\right)dsdx\right]\\
\leq\ &-\frac{1}{\tau}\chi\chi_0\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t dx-\frac{\kappa}{\tau}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx\\
&-\frac{b\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\chi\int_0^L\psi_x^2dx+\rho_2\chi\int_0^L\psi_t^2dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\varepsilon_3\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx\\
&+\frac{\delta\beta\rho_1}{4\varepsilon_3\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\int_0^L q^2dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{2\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\int_0^L q^2dx+\frac{\delta\beta\rho_1}{2\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\int_0^L\psi^2dx\\
&+\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\left|\chi\right|\varepsilon_3\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{\rho_1}{4\varepsilon_3\tau\rho_3}\left|\chi\right|\int_0^L\psi^2dx\\
&+\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\mu\int_0^L\varphi_t^2dx\\
&-\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\chi\left(\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right)\frac{1}{4\mu}g\left(0\right)\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t)+\frac{\rho_1}{2\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\int_0^L\psi_x^2dx\\
&+\frac{\rho_1}{\tau\kappa\rho_3}\left|\chi\right|\left[(b-l)^2\int_0^L\psi_x^2dx+(b-l)\left(g\circ\psi_x\right)(t)\right].
\end{aligned}$$

En simplifiant la dérnière inégalité, on obtient alors le résultat souhaité. ■

**Lemme 41** *Sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$*, la fonctionnelle*

$$I_5=\tau\int_0^L\theta\int_0^x qdsdx$$

*vérifie, pour toute solution du problème* $(4.1),(4.5)$ *et* $(4.6)$ *et pour tout* $\eta_4>0$

$$I_5^{'}\leq\tilde{c}\int_0^L q^2dx+\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\int_0^L\psi_t^2\left(x\right)dx-\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx. \tag{4.36}$$

**Démonstration.** En intégrant d'abors l'équation $(4.1)_4$ sur $(0,x)\subset(0,L)$, puis en intégrant sur $(0, L)$ après la multiplication par $\theta$, on trouve

$$\tau \int_0^L \theta \int_0^x q_t ds dx + \beta \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx + \int_0^L \theta \int_0^x \theta_x ds dx = 0,$$

donc

$$\tau \int_0^L \theta \int_0^x q_t ds dx + \beta \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx + \int_0^L \theta^2 dx = 0,$$

en déduit alors que

$$\tau \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx = \tau \int_0^L \theta_t \int_0^x q ds dx - \beta \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx - \int_0^L \theta^2 dx. \tag{4.37}$$

En multipliant l'équation $(4.1)_3$ par $\int_0^x q ds$ et en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x q ds dx + \int_0^L q_x \int_0^x q ds dx + \delta \int_0^L \psi_{xt} \int_0^x q ds dx = 0,$$

à l'aide de l'intégration par parties, il résulte que

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x q ds dx + \left[ q \int_0^x q ds \right]_0^L - \int_0^L q^2 dx + \delta \left[ \psi_t \int_0^x q ds \right]_0^L - \delta \int_0^L \psi_t q dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \int_0^x q ds dx = \int_0^L q^2 dx + \delta \int_0^L \psi_t q dx. \tag{4.38}$$

En remplaçant (4.38) dans (4.37), on obtient

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx &= \frac{\tau}{\rho_3} \int_0^L q^2 dx + \frac{\tau \delta}{\rho_3} \int_0^L \psi_t q dx \\ &\quad - \beta \int_0^L \theta \int_0^x q ds dx - \int_0^L \theta^2 dx. \end{aligned} \tag{4.39}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on conclut que

$$\begin{aligned}
\tau\frac{d}{dt}\int_0^L\theta\int_0^x qdsdx &\leq \frac{\tau}{\rho_3}\int_0^L q^2dx+\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\int_0^L\psi_t^2dx+\frac{\tau\delta}{4\eta_4\rho_3}\int_0^L q^2dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx+\frac{\beta^2}{2}\int_0^L\left(\int_0^x qds\right)^2dx-\int_0^L\theta^2dx \\
&\leq \frac{\tau}{\rho_3}\int_0^L q^2dx+\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\int_0^L\psi_t^2dx+\frac{\tau\delta}{4\eta_4\rho_3}\int_0^L q^2dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx+\frac{\beta^2L^2}{2}\int_0^L q^2ds-\int_0^L\theta^2dx,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
I_5' &= \tau\frac{d}{dt}\int_0^L\theta\int_0^x qdsdx\leq\left(\frac{\beta^2L^2}{2}+\frac{\tau\delta}{4\eta_4\rho_3}+\frac{\tau}{\rho_3}\right)\int_0^L q^2dx \\
&\quad +\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\int_0^L\psi_t^2(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx,
\end{aligned}$$

ce qui achéve la démonstration de $(4.36)$. ■

Maintenant, on introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}=NE+\frac{1}{4}I_1+N_1I_2+N_2I_3+N_3I_4+N_4I_5,$$

où $N, N_1, N_2, N_3$ et $N_4$ sont des constantes strictement positives à déterminer plus tard.

**Lemme 42** *Pour $N>0$ assez grand, il existe deux constantes strictement positives $\alpha_1$ et $\alpha_2$ vérifiant*

$$\alpha_1E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq\alpha_2E(t)\,,\ \ \forall t\geq 0. \tag{4.40}$$

*Autrement dit, les fonctions $E$ et $\mathcal{L}$ sont équivalentes.*

**Démonstration.** A l'aide des inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \leq\; & NE(t)+\frac{\rho_1}{8}\int_0^L \varphi^2 dx+\frac{\rho_2}{8}\int_0^L \psi^2 dx+\frac{\rho_1}{8}\int_0^L \varphi_t^2 dx+\frac{\rho_2}{8}\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& +\frac{1}{2}N_1\rho_3\int_0^L \theta^2 dx+\frac{1}{2}N_1L^2\rho_3\int_0^L \psi_t^2 dx+\frac{1}{2}N_2\rho_2\int_0^L \psi^2 dx+\frac{1}{2}N_2\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& +\frac{1}{2}N_2\rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx+\frac{1}{2}N_2L^2\rho_1\int_0^L \psi^2 dx \\
& +\frac{1}{2}N_3\left|\chi\right|\left[\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx+\rho_2\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx+\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right|\int_0^L \psi_x^2 dx\right. \\
& +\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right|\int_0^L \varphi_t^2 dx+\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \theta^2 dx+\frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& +\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q^2 dx+\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \varphi_x^2 dx+\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_t^2 dx+\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \varphi_x^2 dx \\
& \left.+\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\int_0^L \varphi_t^2 dx+2\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau-\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\left((b-l)^2\int_0^L \psi_x^2 dx+(b-l)\left(g\circ\psi_x\right)(t)\right)\right] \\
& +\frac{1}{2}N_4\left(\tau\int_0^L \theta^2 dx+\tau L^2\int_0^L q^2 dx\right).
\end{aligned}$$

En simplifiant l'inégalité précédente, on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \quad \leq \quad & NE(t) + \frac{\rho_1}{8}\int_0^L \varphi^2 dx \\
& + \left[\frac{\rho_1}{4} + \frac{1}{2}N_2\rho_1 + \frac{1}{2}N_3|\chi|\left(\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right| + \frac{b\rho_1}{\kappa} + \frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\right)\right]\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& + \left[\frac{\rho_2}{8} + \frac{1}{2}N_2L^2\rho_1 + \frac{1}{2}N_2\rho_2\right]\int_0^L \psi^2 dx \\
& + \left[\frac{\rho_2}{4} + \frac{1}{2}N_1L^2\rho_3 + \frac{1}{2}N_2\rho_2 + \frac{1}{2}N_3|\chi|\left(\rho_2 + \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\right)\right]\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& + \frac{1}{2}N_3|\chi|\left(\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right| + \frac{2\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|(b-l)^2\right)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
& + \frac{1}{2}N_3\rho_2|\chi|\int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
& + \left(\frac{1}{2}N_1\rho_3 + \frac{1}{2}\frac{\delta\rho_1}{\kappa}N_3|\chi| + \frac{1}{2}N_4\tau\right)\int_0^L \theta^2 dx \\
& + \left(\frac{1}{2}N_3\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}|\chi| + \frac{1}{2}N_4\tau L^2\right)\int_0^L q^2 dx \\
& + \frac{1}{2}N_3|\chi|\left(\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3} + \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\right)\int_0^L \varphi_x^2 \\
& + N_3|\chi|\left|\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\frac{\tau\rho_1}{\kappa}(b-l)(g\circ\psi_x)(t),
\end{aligned}
$$

à l'aide de l'inégalité de Poincaré, on voit que

$$
\begin{array}{c}
\int_0^L \psi^2 dx \leq \int_0^L \psi_x^2 dx \\
\int_0^L \varphi^2 dx \leq \int_0^L \varphi_x^2 dx,
\end{array} \tag{4.41}
$$

et en tenant compte de

$$
\int_0^L \varphi_x^2 dx \leq 2\int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2\int_0^L \psi_x^2 dx,
$$

on déduit qu' il existe $\alpha_2 > 0$ vérifiant

$$
\mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t).
$$

D'autre part, en utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \geq\; & NE(t) - \frac{\rho_1}{8}\int_0^L \varphi^2 dx - \frac{\rho_2}{8}\int_0^L \psi^2 dx - \frac{\rho_1}{8}\int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{8}\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& -\frac{1}{2}N_1\rho_3\int_0^L \theta^2 dx - \frac{1}{2}N_1 L^2\rho_3\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& -\frac{1}{2}N_2\rho_2\int_0^L \psi^2 dx - \frac{1}{2}N_2\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - \frac{1}{2}N_2\rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2}N_2 L^2\rho_1\int_0^L \psi^2 dx \\
& -\frac{1}{2}N_3|\chi|\left[\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx + \rho_2\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx + \frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right|\int_0^L \psi_x^2 dx\right. \\
& +\frac{b\rho_1}{\tau\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3\kappa}\right|\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa}\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L q^2 dx \\
& +\frac{\delta\rho_1}{\kappa\rho_3}\int_0^L \varphi_x^2 dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\kappa\rho_3}\int_0^L \varphi_x^2 dx + \frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& \left.+2\frac{\tau\rho_1}{\kappa}\left|\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right|\left((b-l)^2\int_0^L \psi_x^2 dx + (b-l)(g\circ\psi_x)(t)\right)\right] \\
& -\frac{1}{2}N_4\left(\tau\int_0^L \theta^2 dx + \tau L^2\int_0^L q^2 dx\right),
\end{aligned}$$

donc, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathcal{L}(t) \geq NE(t) - \alpha E(t),$$

on choisit alors $N$ assez grand et on déduit qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\mathcal{L}(t) \geq \alpha_1 E(t).$$

■

**Démonstration. du Théorème** 35.

En utilisant (4.15), (4.18), (4.22), (4.24), (4.27) et (4.36), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{'}(t) \leq\; & -\beta N\int_0^L q^2dx+\frac{1}{2}N\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t)+\frac{1}{4}\left(-\rho_1\int_0^L\varphi_t^2dx-\rho_2\int_0^L\psi_t^2dx\right.\\
& \left.+\kappa\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx+2b\int_0^L\psi_x^2dx+\frac{\delta^2}{2l}\int_0^L\theta^2dx+\frac{1}{2l}(b-l)(g\circ\psi_x)(t)\right)\\
& +N_1\left(\tilde{c}\left(1+\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^L\theta^2dx+\tilde{c}\eta_1\int_0^L\psi_x^2dx\right.\\
& \left.+\tilde{c}\varepsilon_1\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{1}{2\delta}\int_0^L q^2dx-\frac{\delta}{2}\int_0^L\psi_t^2dx+\tilde{c}\eta_1(g\circ\psi_x)(t)\right)\\
& +N_2\left(\tilde{c}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_0^L\psi_t^2dx-\frac{l}{4}\int_0^L\psi_x^2dx\right)\\
& +N_2\left(\frac{\delta^2}{l}\int_0^L\theta^2dx+\varepsilon_2\int_0^L\varphi_t^2dx+\frac{(b-l)}{2l}(g\circ\psi_x)(t)\right)\\
& -N_3\left[\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3}-\tilde{c}\varepsilon_3\right]\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx+\tilde{c}N_3\int_0^L\psi_x^2dx\\
& +N_3\left(\tilde{c}\int_0^L\psi_t^2dx+\tilde{c}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^L q^2dx+\tilde{c}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^L\psi^2dx\right)\\
& +N_3\left(\tilde{c}\mu\int_0^L\varphi_t^2dx-\frac{\tilde{c}}{\mu}\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t)+\tilde{c}(g\circ\psi_x)(t)\right)\\
& +N_4\left(\tilde{c}\int_0^L q^2dx+\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\int_0^L\psi_t^2(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx\right),
\end{aligned}$$

en simplifiant l'inégalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{'}(t) \quad \leq \quad & -\left[\frac{\rho_1}{4} - N_2\varepsilon_2 - \tilde{c}N_3\mu\right]\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{\delta}{2}N_1 + \frac{\rho_2}{4} - \tilde{c}N_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \tilde{c}N_3 - N_4\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4\right]\int_0^L \psi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{l}{4}N_2 - \frac{b}{2} - \tilde{c}N_1\eta_1 - \tilde{c}N_3 - \tilde{c}N_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)L^2\right]\int_0^L \psi_x^2 dx \\
& -\left[N_3\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3} - N_3\tilde{c}\varepsilon_3 - \frac{\kappa}{4} - \tilde{c}N_1\varepsilon_1\right]\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
& -\left[\frac{1}{2}N_4 - \frac{\delta^2}{8l} - \tilde{c}N_1\left(1+\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - N_2\frac{\delta^2}{l}\right]\int_0^L \theta^2 dx \\
& -\left[N\beta - N_1\frac{1}{2\delta} - \tilde{c}N_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right) - \tilde{c}N_4\right]\int_0^L q^2 dx \\
& +\left(\frac{1}{2}N - \frac{\tilde{c}}{\mu}N_3\right)\left(g^{'}\circ\psi_x\right)(t) \\
& +\left(\frac{1}{8l}(b-l) + \tilde{c}N_1\eta_1 + \frac{(b-l)}{2l}N_2 + \tilde{c}N_3\right)(g\circ\psi_x).
\end{aligned}$$

A ce point, on choisit d'abord $\varepsilon_2 = \frac{\rho_1}{16N_2}$ et $\mu = \frac{\rho_1}{16N_3}$, alors

$$\frac{\rho_1}{4} - N_2\varepsilon_2 - \tilde{c}N_3\mu = \frac{\rho_1}{8} > 0.$$

Maintenant, on choisit $\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}$ et $\varepsilon_3 = \frac{1}{N_3}$, puis on fixe $N_3$ tel que

$$N_3\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3} - \tilde{c}N_3\varepsilon_3 - \frac{\kappa}{4} - \tilde{c}N_1\varepsilon_1 > 0.$$

En choisissant $\eta_1 = \frac{1}{N_1}$ et $N_2$ assez grand, on déduit que

$$\frac{l}{4}N_2 - \frac{b}{2} - \tilde{c}N_1\eta_1 - \tilde{c}N_3 - \tilde{c}N_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)L^2 > 0.$$

En plus, on prend $N_4$ assez grand tel que

$$\frac{1}{2}N_4-\frac{\delta^2}{8l}-N_1\tilde{c}\left(1+\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)-N_2\frac{\delta^2}{l}>0.$$

En choisissant $\eta_4=\frac{1}{N_4}$ et $N_1$ assez grand, on déduit encore que

$$\frac{\delta}{2}N_1+\frac{\rho_2}{4}-\tilde{c}N_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)-\tilde{c}N_3-N_4\frac{\tau\delta}{\rho_3}\eta_4>0.$$

Finalement, on choisit $N$ assez grand pour que

$$\begin{array}{l}N\beta-N_1\frac{1}{2\delta}-\tilde{c}N_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)-\tilde{c}N_4>0,\\ \frac{1}{2}N-\frac{(\delta\tau\rho_1)^2}{\kappa^2\rho_3}\frac{1}{4\mu}g\left(0\right)N_3>0,\end{array}$$

et, en plus, le Lemme 42 reste vrai.

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{'}\left(t\right) &\leq -\lambda_0\int_0^L\varphi_t^2dx-\lambda_1\int_0^L\psi_t^2dx\\ &\quad-\lambda_2\int_0^L\psi_x^2dx-\lambda_3\int_0^L(\varphi_x+\psi)^2dx\\ &\quad-\lambda_4\int_0^L\theta_t^2dx-\lambda_5\int_0^Lq^2dx\\ &\quad+c_0\left(g\circ\psi_x\right)+c_1\left(g^{'}\circ\psi_x\right)\left(t\right),\end{aligned}$$

où $c_0$, $c_1$ et $\lambda_i$ $(i=0,...,5)$ sont des constantes strictement positives.

On conclut alors que, pour un certain $\rho>0$,

$$\mathcal{L}^{'}\left(t\right)\leq-\rho E\left(t\right)+c_0\left(g\circ\psi_x\right),\quad\forall t>0. \tag{4.42}$$

Dans la suite, on applique une approche présenée par Guesmia et Messaoudi [32]. En multiplant (4.42) par $\zeta(t)$ et utilisant $(A2)$ et (4.15), on trouve

$$\begin{aligned}
\zeta(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -\rho\zeta(t)E(t)+c_0\zeta(t)(g\circ\psi_x) \\
&\leq -\rho\zeta(t)E(t)+c_0\int_0^{+\infty}\zeta(t)g(s)\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
&\leq -\rho\zeta(t)E(t)+c_0\int_0^{t}\zeta(s)g(s)\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
&\quad +c_0\int_t^{+\infty}\zeta(t)g(s)\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
&\leq -\rho\zeta(t)E(t)-c_0(g'\circ\psi_x)(t) \\
&\quad +c_0\int_t^{+\infty}\zeta(t)g(s)\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds \\
&\leq -\rho\zeta(t)E(t)-2c_0E'(t) \\
&\quad +c_0\int_t^{+\infty}\zeta(t)g(s)\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dxds.
\end{aligned}$$

D'après la définition de $E(t)$, on a

$$\int_0^L\psi_x^2dx\leq\frac{2}{l}E(t)\leq\frac{2}{l}E(0),\ \forall t>0.$$

En utilisant (4.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^L(\psi_x(t)-\psi_x(t-s))^2\,dx &\leq 2\int_0^L\psi_x^2(t)\,dx+2\int_0^L\psi_x^2(t-s)\,dx \\
&\leq \frac{8}{l}E(0)+2m_0 \qquad \forall s>t>0.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\zeta(t)\mathcal{L}'(t)\ +2c_0E'(t)\leq-\rho\zeta(t)E(t)+\beta_2\zeta(t)\int_t^{+\infty}g(s)\,ds \tag{4.43}$$

avec $\beta_2=c_0\left(\frac{8}{l}E(0)+2m_0\right)$. Maintenant, on pose

$$\begin{aligned}
&F=\zeta\mathcal{L}\ +\beta_1E, \\
&h(t)=\zeta(t)\textstyle\int_t^{+\infty}g(s)\,ds
\end{aligned}$$

avec $\beta_1 = 2c_0$. En employant le fait que $\mathcal{L} \sim E$, on déduit que

$$m_1 E \leq F \leq m_2 E \tag{4.44}$$

pour deux constantes positives $m_1$ et $m_2$. Alors (4.43) devient

$$F^{'}(t) \leq -\delta_0 \zeta(t) F(t) + \beta_2 h(t),$$

avec $\delta_0 = \frac{\rho}{m_1}$. Donc, pour $\sigma \in \left]0, \delta_0\right]$,

$$F^{'}(t) \leq -\sigma \zeta(t) F(t) + \beta_2 h(t), \quad \forall t > 0, \tag{4.45}$$

ce qui donne

$$\left(e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} F(t)\right)' \leq \beta_2 e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} h(t), \quad \forall t > 0. \tag{4.46}$$

En intégrant l'équation (4.46) sur $[0, T]$, on trouve

$$F(T) \leq e^{-\sigma \int_0^T \zeta(s) ds} \left(F(0) + \beta_2 \int_0^T e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} h(t) \, dt\right), \quad \forall t > 0.$$

Et par conséquent, (4.44) implique que

$$E(T) \leq \frac{1}{m_2} e^{-\sigma \int_0^T \zeta(s) ds} \left(F(0) + \beta_2 \int_0^T e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} h(t) \, dt\right), \quad \forall t > 0. \tag{4.47}$$

Comme

$$\begin{aligned} e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} h(t) &= e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds} \zeta(t) \int_t^{+\infty} g(s) \, ds \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(e^{\sigma \int_0^t \zeta(s) ds}\right)' \int_t^{+\infty} g(s) \, ds, \forall t > 0, \end{aligned}$$

alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} h(t)\,dt &= \frac{1}{\sigma}\left(\left[e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds}\int_t^{+\infty} g(s)\,ds\right]_0^T - \int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds}\left(\int_t^{+\infty} g(s)\,ds\right)' dt\right)\\ &= \frac{1}{\sigma}\left(e^{\sigma\int_0^T \zeta(s)ds}\int_T^{+\infty} g(s)\,ds - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds + \int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g(t)\,dt\right),\end{aligned}$$

et on en déduit alors

$$\begin{aligned}E(T) &\leq \frac{1}{m_2}\left(F(0)\,e^{-\sigma\int_0^T \zeta(s)ds} + \frac{\beta_2}{\sigma}\int_T^{+\infty} g(s)\,ds\right)\\ &\quad + \frac{\beta_2}{m_2\sigma} e^{-\sigma\int_0^T \zeta(s)ds}\int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g(t)\,dt.\end{aligned}$$

D'autre part, $(A2)$ implique que

$$\begin{aligned}\left(e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g^{\sigma}(t)\right)' &= \left(e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds}\right)' g^{\sigma}(t) + e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds}\left(g^{\sigma}(t)\right)'\\ &= \sigma\zeta(t)\,e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g^{\sigma}(t) + \sigma e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g'(t)\,g^{\sigma-1}(t)\\ &\leq \sigma\zeta(t)\,e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g^{\sigma}(t) - \sigma e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds}\zeta(t)\,g(t)\,g^{\sigma-1}(t) = 0,\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout $t > 0$,

$$e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g^{\sigma}(t) \leq g^{\sigma}(0).$$

D'après ce qui précède, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g(t)\,dt &= \int_0^T e^{\sigma\int_0^t \zeta(s)ds} g^{\sigma}(t)\,g^{1-\sigma}(t)\,dt\\ &\leq g^{\sigma}(0)\int_0^T g^{1-\sigma}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc on arrive à

$$E(T) \leq \sigma_0\left(1 + \int_0^T g^{1-\sigma}(t)\,dt\right)e^{-\sigma\int_0^T \zeta(s)ds} + \sigma_0\int_T^{+\infty} g(s)\,ds, \quad \forall t > 0, \tag{4.48}$$

avec $\sigma_0 = \frac{1}{m_2} \max \left\{ F(0), \frac{\beta_2}{\sigma} g^\sigma(0), \frac{\beta_2}{\sigma} \right\}$. Ceci termine la démonstration. ■

**Remarque 43** *On remarquera que s'il existe une constante $\sigma \in ]0, \delta_0]$ pour laquelle $\int_0^T g^{1-\sigma}(t)\,dt < +\infty$, alors (4.48) se réduit à*

$$E(T) \leq Ce^{-\sigma \int_0^T \zeta(s)ds} + \sigma_0 \int_T^{+\infty} g(s)\,ds, \quad \forall t > 0,$$

*pour une certaine constante $C > 0$.*

**Remarque 44** *Bien que nous pouvons obtenir la décroissance exponentielle comme un cas particulier de l'estimation générale (4.48), il convient de mentionner que la décroissance exponentielle peut être obtenue sans la condition (4.16). Plus précisément, nous avons le résultat suivant :*

***Théorème 45*** *Soit $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0(.,0), \psi_1, \theta_0, q_0) \in \mathcal{H}$. Alors sous les hypothèses (A1), (A2) et $\chi_0 = 0$ et*

$$\exists a > 0 : g'(t) \leq -ag(t), \ \forall t \geq 0, \tag{4.49}$$

*il existe deux constantes strictement positives $\lambda$ et $M$ telles que la solution du problème (4.1), (4.5) et (4.6) vérifie*

$$E(t) \leq Me^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \tag{4.50}$$

***Démonstration.*** *La preuve est similaire à celle du Théorème 35 jusqu'à l'estimation (4.42). En rappelant (4.15) et (4.49), on voit aisément que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\alpha\mathcal{L}(t) + c_0(g \circ \psi_x) \\ &\leq -\alpha\mathcal{L}(t) + \frac{c_0}{a}(g' \circ \psi_x) \\ &\leq -\alpha\mathcal{L}(t) - \frac{c_0}{a}E'(t). \end{aligned}$$

*En posant $L = \mathcal{L} + \frac{c_0}{a}E'(t) \sim \mathcal{L}$, on obtient*

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda\mathcal{L}(t), \ \forall t > 0.$$

*Une intégration simple donne le résultat souhaité.* ■

**Remarque 46** *Le résultat obtenu récemment par Santos et al. [65], en utilisant la théorie de semigroupes, suit directement ce dernier théorème en prenant* $g \equiv 0$*.*

## 4.4 L'absence de stabilité exponentielle

En utilisant le Théorème 1, on peut alors montrer l'absence de stabilité exponentielle grâce au procédé suivant :

On montre qu'il existe une suite de valeurs $\lambda_\mu$ telle que

$$\left\| (i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \longrightarrow +\infty.$$

Ceci est équivalent à prouver qu'il existe une suite de vecteurs $F_\mu \in \mathcal{H}$ et une suite de nombres $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, avec $\|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, tels que

$$\left\| (i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} F_\mu \right\|_{\mathcal{H}} = \|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow +\infty, \text{ quand } \mu \longrightarrow +\infty,$$

où

$$i\lambda_\mu \Phi_\mu - \mathcal{A}\Phi_\mu = F_\mu.$$

Maintenant, on considère le système résolvant

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u, & = f_1, \\ i\lambda\rho_1 u - \kappa(\varphi_x + \psi)_x, & = \rho_1 f_2, \\ i\lambda\psi - v, & = f_3, \\ i\lambda\rho_2 v - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x + \int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_{xx}(x, t-s)\, ds, & = \rho_2 f_4, \\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta v_x, & = \rho_3 f_5, \\ i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x, & = \tau f_6, \end{cases} \tag{4.51}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$. Pour montrer que la condition $\chi_0 = 0$ est également nécessaire dans la stabilité exponentielle, on suppose qu'il existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \neq 0$, et on prend $f_1 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$, alors

$$\begin{cases} -\lambda^2\rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x+\psi)_x, & = \rho_1 f_2, \\ -\lambda^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x + \int_0^{+\infty} g\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds, & = 0, \\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + i\lambda\delta\psi_x, & = 0, \\ i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x, & = 0, \end{cases} \tag{4.52}$$

et on choisit $f_2 = \sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)/\rho_1$ dans (4.52) de telle sorte que $F = (0, f_2, 0, 0, 0, 0)^T \in \mathcal{H}$. Pour assurer les conditions au bord (4.6), on peut supposer que

$$\varphi = A\sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right),\ \psi = B\cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right),\ \theta = C\sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right),\ q = D\cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right).$$

Par conséquent, le système (4.51) est équivalent à

$$\begin{cases} \left[-\lambda^2\rho_1 + \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2\right]A + \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)B, & = 1, \\ \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)A + \left[-\lambda^2\rho_2 + l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa\right]B + \delta\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)C, & = 0, \\ -i\lambda\delta\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)B + i\lambda\rho_3 C - \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)D, & = 0, \\ \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)C + \left(i\lambda\tau+\beta\right)D, & = 0, \end{cases} \tag{4.53}$$

où $\mu \in \mathbb{N}$. On voit alors que

$$D = -\frac{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)}{\left(i\lambda\tau+\beta\right)}C,$$

ce qui conduit à réécrire le système (4.53) comme suit

$$\begin{pmatrix} p_1 & \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & 0 \\ \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & p_2 & \delta\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) \\ 0 & -i\lambda\delta\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$p_1 = -\lambda^2\rho_1 + \kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2, \quad p_2 = -\lambda^2\rho_2 + l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa, \quad p_3 = i\lambda\rho_3 + \frac{1}{(i\lambda\tau+\beta)}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2.$$

Alors

$$A = \frac{p_2p_3 + i\lambda\delta^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{p_1p_2p_3 - p_3\kappa^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + i\lambda p_1\delta^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2} = \frac{K}{p_1K - \kappa^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}, \tag{4.54}$$

$$C = \frac{-i\lambda\delta\kappa\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{p_1p_2p_3 - p_3\kappa^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + i\lambda p_1\delta^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2} = \frac{-i\lambda\delta K\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{p_1p_3K - \kappa^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}, \tag{4.55}$$

où

$$K = p_2 + \frac{i\lambda\delta^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{p_3}.$$

On obtient ensuite, en remplaçant $p_3$ par sa valeur,

$$K = p_2 + \frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - \frac{\frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^4}{-\lambda^2\rho_3\tau + i\lambda\rho_3\beta + \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}.$$

Maintenant, on prend $\lambda$ tel que $p_1(\lambda) = d$, ce qui donne $\lambda^2 = \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - \frac{d}{\rho_1}$, où $d \in \mathbb{R}$ va être fixé plus tard. Donc on obtient

$$K = p_2 + \frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - \frac{\frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^4}{\left(1 - \frac{\tau\rho_3\kappa}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau}{\rho_1}d + i\lambda\rho_3\beta}. \tag{4.56}$$

On note $\chi_1 = 1 - \frac{\tau\rho_3\kappa}{\rho_1}$. Si $\chi_1 = 0$, on prend $d = 0$ de sorte que $K$ peut être écrit comme

$$K = \left(l - \frac{\rho_2\kappa}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - \frac{\rho_1\delta^2}{i\kappa\rho_3^2\beta}\lambda\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2. \tag{4.57}$$

Par conséquent, puisque $d = 0$, on a

$$A = \frac{1}{-\kappa^2}\left[\left(l - \frac{\rho_2\kappa}{\rho_1}\right) + \kappa + \frac{\delta^2}{\rho_3} - \frac{\rho_1\delta^2}{i\kappa\rho_3^2\beta}\lambda\right] \approx \frac{\rho_1\delta^2}{i\kappa^3\rho_3^2\beta}\lambda$$

pour $\lambda$ assez grand. Donc

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \|u_\mu\|^2 = |A|^2 |\lambda|^2 \rho_1 \int_0^L \left|\sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2 dx \\
&= \rho_1 \frac{L}{2} |A|^2 |\lambda_\mu|^2 \approx \rho_1 \frac{L}{2} \left(\frac{\delta^2}{\kappa^2 \rho_3^2 \beta}\right)^2 \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^4 .
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Ceci implique

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$. Enfin, on suppose que $\chi_1 \neq 0$ et $\chi_0 \neq 0$. Alors, on obtient

$$K = -\int_0^{+\infty} g(s)\, ds \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1} + \frac{\frac{\tau}{\rho_1}d + i\lambda\beta}{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau}{\rho_1}d + i\lambda\rho_3\beta}\frac{\delta^2}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 .$$

Si $-\int_0^{+\infty} g(s)\, ds + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1} \neq 0$, on va prendre $d$ tel que

$$\left(-\int_0^{+\infty} g(s)\, ds\right) d = \kappa^2 \Longrightarrow d = -\frac{\kappa^2}{\int_0^{+\infty} g(s)\, ds}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\kappa^2}{d}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1} + \frac{\frac{\tau}{\rho_1}d + i\lambda\beta}{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau}{\rho_1}d + i\lambda\rho_3\beta}\frac{\delta^2}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 \\
&\approx \frac{\kappa^2}{d}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1} + \frac{i\beta\delta^2}{\chi_1^2}\lambda + \frac{\tau d\delta^2}{\rho_1\chi_1^2},
\end{aligned}$$

pour $\lambda$ assez grand. De (4.54), on a

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K}{p_1 K - \kappa^2 \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2} \\
&\approx \frac{\frac{\kappa^2}{d}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1} + \frac{i\beta\delta^2}{\chi_1^2}\lambda + \frac{\tau d\delta^2}{\rho_1\chi_1^2}}{d\left(\frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1} + \frac{i\beta\delta^2}{\chi_1^2}\lambda + \frac{\tau d\delta^2}{\rho_1\chi_1^2}\right)} \\
&\approx \frac{\frac{\kappa^2}{d} + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}}{d\frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1}} \approx \frac{1}{d} + \frac{\rho_1^2\chi_1}{\rho_3 d^2\chi_0}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \|u_\mu\|^2 = |A|^2 |\lambda|^2 \rho_1 \int_0^L \left|\sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2 dx \\
&= \rho_1 \frac{L}{2} |A|^2 |\lambda_\mu|^2 \approx \kappa\frac{L}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{\rho_1^2\chi_1}{\rho_3 d^2\chi_0}\right)^2 \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty,$$

quand $\mu \to +\infty$. Si $-\int_0^{+\infty} g(s)\,ds + \frac{\rho_3\kappa^2}{\rho_1^2}\frac{\chi_0}{\chi_1} = 0$, alors

$$\begin{aligned}
p_3 K &= \frac{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau}{\rho_1}d + i\lambda\rho_3\beta}{(i\lambda\tau+\beta)}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right) + \frac{\frac{\tau}{\rho_1}d + i\lambda\beta}{(i\lambda\tau+\beta)}\frac{\delta^2}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 \\
&\approx \frac{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{i\lambda\tau}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right) + \frac{\beta\delta^2}{\tau\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 \\
&= \frac{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau}{\rho_1}d + i\lambda\rho_3\beta}{(i\lambda\tau+\beta)}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right) + \frac{\frac{\tau}{\rho_1}d - \frac{\beta^2}{\tau}}{(i\lambda\tau+\beta)}\frac{\delta^2}{\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\beta\delta^2}{\tau\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on prend $d = \frac{\tau\chi_1\kappa^2}{\beta\delta^2}$ de sorte que

$$p_3 K \approx \frac{\kappa^2}{d}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{i\lambda\tau}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right).$$

De (4.55), on voit que

$$C = \frac{-i\lambda\delta K\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{dp_3K - \kappa^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2} \approx \frac{-i\lambda\delta\kappa}{d\frac{\chi_1}{i\lambda\tau}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right)} \approx \frac{\lambda^2\delta\kappa}{\frac{d\chi_1}{\tau}\left(\kappa + \frac{\rho_2 d}{\rho_1}\right)} = \alpha\lambda^2.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_3\|\theta_\mu\|^2 = |C|^2\rho_3\int_0^L \left|\sin\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2 dx \\
&= \rho_3\frac{\alpha^2 L}{2}\lambda^4 \approx \rho_3\frac{\alpha^2\kappa^2 L}{2\rho_1^2}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^4.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty,$$

quand $\mu \to +\infty$. Ce que achève la démonstration.

# Chapitre 5

# Décroissance des solutions d'un système de Timoshenko avec deuxième son

## 5.1 Introduction

En 1921, Timoshenko [71] a développé un modèle décrivant la dynamique d'un faisceau lorsque la déformation de cisaillement transversal est pris en considération. Le modèle est donnée par un système d'équations hyperboliques couplées de la forme

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} - \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, & \text{dans } \ (0, L) \times (0, +\infty)\,, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, & \text{dans } \ (0, L) \times (0, +\infty)\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $t$ désigne la variable de temps, $x$ est la variable de l'espace le long de la poutre de longueur $L$ dans sa configuration d'équilibre, $\varphi$ est le déplacement transversal de la poutre et $\psi$ est l'angle de rotation du filament de la poutre. Les coefficients $\rho_1$, $\rho_2$, $b$ et $\kappa$ sont, respectivement, la densité de masse, le moment d'inertie de masse, le coefficient de rigidité (de la section transversale) et le module de cisaillement d'élasticité.

Le modèle a été étudié par beaucoup de mathématiciens et des différents mécanismes d'amortissement ont été utilisés pour stabiliser les vibrations. Les résultats obtenus dans ces travaux montrent que la présence de termes d'amortissement dans les deux équations conduit à la stabilité uniforme quelles que soient les valeurs des coefficients. Cela a été démontré par Kim et Renardy [40], Mustafa et Messaoudi [45] et d'autres. Dans le cas d'un seul amortissement dans la première ou la seconde équation de (5.1), la stabilité uniforme est obtenue pour des solutions faibles si et seulement si $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Dans le cas contraire $\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$, un taux plus faible de décroissance est obtenu pour des solutions fortes. A cet égard, nous citons, entre autres, le travail de Soufyane et Wehbe [70], Guesmia et Messaoudi [30], [29] et [33], Ammar-Khodja et al. [7], Rivera et Racke [56] et [57], Fernández Sare et Rivera [54], Messaoudi et Mustafa [47] et [46] et Messaoudi et Saïd-Houari [50], Almeida Jùnior et al. [4].

Pour la stabilisation des systèmes de Timoshenko utilisant l'effet de la chaleur, Rivera et Racke [55] ont considéré, dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

avec des constantes positives $\rho_i$ , $\sigma$, $b$, $\kappa$ et $\gamma$. Ils ont obtenu un résultat de décroissance exponentielle lorsque les vitesses de propogation sont égales ; i.e $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Dans le cas de vitesses différentes ; i.e $\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$, ils ont obtenu un résultat de décroissance polynomiale. Diverses estimations de la stabilité générale pour le système (5.2) ont été prouvées par Guesmia et al. [34] en additionant d'une mémoire infinie sur la première ou la deuxième équation. Ces estimations dépendent de la régularité des données initiales et les vitesses de propagation des ondes tout en permettant au noyou de décroître faiblement à l'infini avec un taux qui peut être arbitrairement proche de $t^{-1}$.

Almeida jùnior et al. [5] ont considéré le système thermoélastique unidimensionnel de

Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta = 0, \\ \rho_3\theta_t - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0, \end{cases} \tag{5.3a}$$

dans $(0, L)\times(0, +\infty)$, avec deux types de conditions au bord (Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet ou Dirichlet-Neumann-Neumann) et ils ont établi des résultats de stabilité exponentielle et polynomiale en fonction des vitesses de propagation des ondes et les données initiales. Dans les systèmes (5.2) et ($5.3a$), l'équation de la chaleur est gouvernée par la loi de la conduction thermique de Fourier, ce qui indique que le flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. Par ailleurs, il est bien connu que le modèle utilisant la loi classique de Fourier conduit au paradoxe physique de vitesse infinie de la propagation de la chaleur. En d'autres termes, toute perturbation thermique à un point sera instantanément transféré aux autres parties du corps. Cependant, des expériences ont montré que la conduction thermique dans certains cristaux diélectriques à basse température se propage avec une vitesse finie (voir [39]).

Pour surmonter ce paradoxe physique, mais en gardant l'essentiel d'un processus de conduction de la chaleur, de nombreuses théories ont ensuite vu le jour. L'un d'eux est l'avènement des effets du deuxième son observés expérimentalement dans les matériaux à une température très basse. Les effets du deuxième son surviennent lorsque la chaleur est transportée par un procédé de propagation des ondes à la place de la diffusion habituelle. Cette théorie suggère de remplacer la loi classique de Fourier

$$q + \gamma\theta_x = 0,$$

où $q$ est le flux de chaleur et $\gamma$ est le coefficient de conductivité thermique, par une loi modifiée de conduction thermique appelée la loi de Cattaneo

$$\tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0,$$

où ici, le paramètre $\tau > 0$ représente le temps de relaxation qui décrit le décalage de la réponse du flux de chaleur à un gradient de température. Le système de chaleur obtenue est de type hyperbolique et donc, automatiquement, il élimine le paradoxe de vitesses infinies.

Mettre la théorie ci-dessus en considération, le système (5.2) devient

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \sigma\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \sigma\psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Fernández Sare et Racke [19] ont considéré le système (5.4) dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, avec des conditions initiales et au bord de type Dirichlet-Neumann-Dirichlet et ils ont prouvé que le système n'est pas exponentiellement stable même si les vitesses de propagation sont égales. De plus, ils ont montré que la présence d'un terme d'amortissement viscoélastique de la forme $\int_0^{+\infty} g(s)\, \psi_{xx}(x, t-s)\, ds$ dans la deuxième équation de (5.4) n'est pas suffisante pour obtenir la stabilité exponentielle. Les résultats de [19] ont été généralisées dans [34] au cas où $g$ ne converge pas de façon exponentielle à zéro. D'autre part, il a été prouvé par Guesmia et al. [34] que la stabilité uniforme (exponentielle, polynomiale ou autres en fonction de la croissance de $g$ à l'infini) est valide sans aucune restriction sur les paramètres si la mémoire infinie est considérée dans la première équation. De même, Messaoudi et al. [48] ont montré que la présence d'amortissement par frottement $\mu\varphi_t$ dans la première équation (équation de déplacement transversal) de (5.4) est assez forte pour stabiliser de façon exponentielle le système quelles que soit les vitesses de propagation des ondes.

Récemment, Santos et al. [65] ont considéré (5.4) et introduit un nouveau numéro de la stabilité de la forme

$$\chi = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa}\right)\left(\varrho_2 - \frac{\rho_1 b}{\kappa}\right) - \frac{\rho_1 \sigma^2 \tau}{\kappa \rho_3} = 0,$$

et ils ont utilisé la méthode de semigroupe pour obtenir le résultat de décroissance exponentielle pour $\chi = 0$, et de décroissance polynomiale pour $\chi \neq 0$. En outre, un résultat de stabilité, en utilisant ce nouveau numéro, a été obtenu par Said-Houari et Kasimov dans [62] en considérant le problème de Cauchy pour le système unidimensionnel de Timoshenko couplé à la conduction thermique régie par la loi de Cattaneo ou la loi de Fourier. Ils ont prouvé que la dissipation de la chaleur est suffisante pour stabiliser le système dans les deux cas et ils ont conclu que les systèmes de type Timoshenko-Cattaneo et Timoshenko-Fourier ont le même taux de décroissance, et ce taux dépend d'un certain nombre de stabilité (qui est une fonction des paramètres du système), comme précédemment identifié par Santos et al. dans [65] pour le système de Timoshenko dans un domaine borné.

Dans ce travail, on considère

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \sigma\varphi_{xt} = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\ \tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \end{cases} \tag{5.5}$$

Ici, on considère les conditions au bord suivantes :

$$\varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \text{ dans } (0,+\infty) \tag{5.6}$$

et les conditions initiales suivantes :

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), & \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & \theta(x,0) = \theta_0(x), & q(x,0) = q_0(x), \end{array}\right. \text{dans } (0,1). \tag{5.7}$$

Notre objectif est de prouver l'existence et l'unicité et établir en même temps des résultats de stabilité exponentielle et polynomiale en fonction d'un nombre de stabilité

$\chi_0$ donné par

$$\chi_0 = \left(\frac{\tau b \rho_3}{\rho_2} - \gamma\right)\left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{\tau\sigma^2}{\kappa}.$$

On vérifie aisément que

$$\begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \varphi(x,t)\,dx = 0, \\ \frac{d}{dt}\int_0^1 q(x,t)\,dx + \frac{1}{\tau}\int_0^1 q(x,t)\,dx = 0. \end{array} \tag{5.8}$$

En effet, on intègre d'abord les équations $(5.5)_1$ et $(5.5)_4$ sur $(0,1)$, on trouve

$$\begin{array}{c} \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x dx + \sigma \int_0^1 \theta_x dx = 0, \\ \tau \int_0^1 q_t dx + \int_0^1 q dx + \gamma \int_0^1 \theta_x dx = 0, \end{array}$$

et les conditions au bord permettent de conclure que

$$\begin{array}{c} \rho_1 \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \varphi(x,t)\,dx = \kappa\left[(\varphi_x + \psi)\right]_0^1 - \sigma\left[\theta\right]_0^1 = 0, \\ \frac{d}{dt}\int_0^1 q dx + \frac{1}{\tau}\int_0^1 q dx = -\frac{\gamma}{\tau}\left[\theta\right]_0^1 = 0. \end{array}$$

Donc la solution générale de (5.8) est donnée par

$$\begin{array}{l} \int_0^1 \varphi(x,t)\,dx = c_0 + c_1 t, \\ \int_0^1 q(x,t)\,dx = c_2 e^{-\frac{1}{\tau}t}. \end{array}$$

Les conditions initiales donnent

$$c_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\,dx,\ c_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx \text{ et } c_2 = \int_0^1 q_0(x)\,dx,$$

donc

$$\begin{array}{l} \int_0^1 \varphi(x,t)\,dx = \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx + t\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx, \\ \int_0^1 q(x,t)\,dx = \left(\int_0^1 q_0(x)\,dx\right) e^{-\frac{1}{\tau}t}. \end{array}$$

Enfin, posant

$$\bar{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) - \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx - t\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx,$$
$$\bar{q}(x,t) = q(x,t) - q_0(x)\,e^{-\frac{\beta}{\tau}t},$$

on voit que $(\bar{\varphi}, \psi, \theta, \bar{q})$ satisfait (5.5), (5.6) et (5.7). De plus, on a

$$\int_0^1 \bar{\varphi}(x,t)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 \bar{q}(x,t)\,dx = 0. \tag{5.9}$$

Par conséquent, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée pour $\bar{\varphi}$ et $\bar{q}$. Dans la suite, pour simplifier les notations, on écrit $\varphi$ et $q$ au lieu de $\bar{\varphi}$ et $\bar{q}$, respectivement.

Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous utilisons la méthode de semigroupe pour prouver que le problème (5.5), (5.6) et (5.7) est bien posé. Dans la section 3, nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle de l'énergie quand $\chi_0 = 0$. Dans la section 4, nous montrons que le système n'est pas exponentiellement stable si $\chi_0 \neq 0$. Dans la dernière section, nous prouvons un résultat de stabilité polynomiale lorsque $\chi_0 \neq 0$.

## 5.2 Existence et unicité

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (5.5), (5.6) et (5.7) en utilisant la théorie de semigroupe. En posant $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$, le système (5.5), (5.6) et (5.7) est équivalent à

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \mathcal{A}\Phi(t) = 0, & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases} \tag{5.10}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par :

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -u \\ -\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\theta_x \\ -v \\ -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) \\ \frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\sigma}{\rho_3}u_x \\ \frac{1}{\tau}q + \frac{\gamma}{\tau}\theta_x \end{pmatrix}.$$

On considère les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} L_*^2(0,1) &= \left\{\omega \in L^2(0,1) : \int_0^1 \omega(s)\,ds = 0\right\}, \qquad H_*^1(0,1) = H^1(0,1) \cap L_*^2(0,1), \\ H_*^2(0,1) &= \left\{\omega \in H^2(0,1) : \omega_x(0) = \omega_x(1) = 0\right\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H} = H_*^1(0,1) \times L_*^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L_*^2(0,1).$$

L'espace $\mathcal{H}$ est muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \left(\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} &= \kappa \int_0^1 (\varphi_x+\psi)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})dx + \rho_1 \int_0^1 u\tilde{u}dx + b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \rho_2 \int_0^1 v\tilde{v}dx \\ &\quad + \rho_3 \int_0^1 \theta\tilde{\theta}dx + \frac{\tau}{\gamma}\int_0^1 q\tilde{q}dx. \end{aligned}$$

Alors, le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in \mathcal{H} \backslash\ \varphi \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1), \psi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \\ u \in H_*^1(0,1), v \in H_0^1(0,1), \theta \in H_0^1(0,1), q \in H_*^1(0,1) \end{array} \right\}.$$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 47** *Soit* $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. *Alors il existe une solution unique* $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ *du problème* (5.10)*. De plus, si* $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$*, alors* $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

**Démonstration.** On utilise l'approche de semigroupe. Dans ce qui suit, on montre que $\mathcal{A}$ est monotone (i.e. $-\mathcal{A}$ est dissipatif). Soit $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$. En utilisant le produit Scalaire, on trouve

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} &= -\kappa \int_0^1 (u_x + v)(\varphi_x + \psi)dx + \rho_1 \int_0^1 \left( -\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\theta_x \right) udx \\ &\quad -b \int_0^1 v_x \psi_x dx + \rho_2 \int_0^1 \left( -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \right) vdx \\ &\quad +\rho_3 \int_0^1 \left( \frac{1}{\rho_3} q_x + \frac{\sigma}{\rho_3} u_x \right) \theta dx + \frac{\tau}{\gamma} \int_0^1 \left( \frac{1}{\tau} q + \frac{\gamma}{\tau}\theta_x \right) qdx.\end{aligned}$$

Après la simplification et grâce à la formule d'intégration par parties, on obtient

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q^2 dx \geq 0, \tag{5.11}$$

ce qui prouve que A est monotone. Maintenant, on démontre que $\mathcal{A} + I$ est surjectif ; i.e. $R(\mathcal{A} + I) = \mathcal{H}$. Soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)^T \in \mathcal{H}$, Il faut trouver $\Phi \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(\mathcal{A} + I)\Phi = G. \tag{5.12}$$

L'équation (5.12) est équivalente à

$$\begin{cases} -u + \varphi = g_1, \\ -\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x + \rho_1 u = \rho_1 g_2, \\ -v + \psi = g_3, \\ -b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \rho_2 v = \rho_2 g_4, \\ q_x + \sigma u_x + \rho_3\theta = \rho_3 g_5, \\ (1 + \tau) q + \gamma\theta_x = \tau g_6. \end{cases} \tag{5.13}$$

Supposons que $\varphi$, $\psi$ et $q$ sont trouvés avec la régularité appropriée, alors, $(5.13)_1$,

$(5.13)_3$ et $(5.13)_6$ impliquent

$$\begin{aligned} u &= \varphi - g_1 \in H_*^1(0,1), && (5.14)\\ v &= \psi - g_3 \in H_0^1(0,1), && (5.15)\\ \theta_x &= -\frac{1}{\gamma}(1+\tau)\,q + \frac{\tau}{\gamma} g_6 \in L_*^2(0,1). && (5.16)\end{aligned}$$

A partir de (5.16), on trouve que

$$\theta(x,t) = -\frac{(1+\tau)}{\gamma}\int_0^x q(y)\,dy + \frac{\tau}{\gamma}\int_0^x g_6(y)\,dy \tag{5.17}$$

et

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0.$$

A l'aide de $(5.14)-(5.17)$, il est facile de montrer que $\varphi$, $\psi$ et $q$ satisfont

$$\begin{cases} -\kappa(\varphi_x+\psi)_x + \rho_1\varphi + -\frac{\sigma}{\gamma}(1+\tau)\,q = \rho_1(g_2+g_1) - \frac{\sigma\tau}{\gamma}g_6 \in L_*^2(0,1), \\ -b\psi_{xx} + \rho_2\psi + \kappa(\varphi_x+\psi) = \rho_2(g_4+g_3) \in L^2(0,1), \\ -q_x + \frac{(1+\tau)}{\gamma}\rho_3\int_0^x q(y)\,dy - \sigma\varphi_x = \frac{\tau}{\gamma}\rho_3\int_0^x g_6(y)\,dy - \rho_3 g_5 - \sigma g_{1x} \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{5.18}$$

La formulation variationnelle associée à (5.18) prend la forme

$$B((\varphi,\psi,q),(\varphi_1,\psi_1,q_1)) = F(\varphi_1,\psi_1,q_1), \tag{5.19}$$

où $B$ est une forme bilinéaire de $\left[H_*^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L_*^2(0,1)\right]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}
B\left(\left(\varphi,\psi,q\right),\left(\varphi_1,\psi_1,q_1\right)\right) \;=\;& \kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)\left(\varphi_{1x}+\psi_1\right)dx+\frac{(1+\tau)}{\gamma}\int_0^1 qq_1dx\\
&+b\int_0^1 \psi_x\psi_{1x}dx+\rho_2\int_0^1 \psi\psi_1dx+\rho_1\int_0^1 \varphi\varphi_1dx\\
&-\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\tau\right)\int_0^1 q\varphi_1dx+\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\tau\right)\int_0^1 \varphi q_1dx\\
&+\frac{(1+\tau)^2}{\gamma^2}\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x q\left(y\right)dy\right)\left(\int_0^x q_1\left(y\right)dy\right)dx,
\end{aligned}$$

et $F$ est une application linèaire de $H_*^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L_*^2(0,1)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}
F\left(\varphi_1,\psi_1,q_1\right) \;=\;& \rho_1\int_0^1 \left(g_2+g_1\right)\varphi_1dx-\frac{\sigma\tau}{\gamma}\int_0^1 g_6\varphi_1dx+\rho_2\int_0^1\left(g_4+g_3\right)\psi_1dx\\
&+\frac{(1+\tau)}{\gamma}\rho_3\int_0^1\left(\frac{\tau}{\gamma}\left(\int_0^x g_6\left(y\right)dy\right)-g_5\right)\left(\int_0^x q_1\left(y\right)dy\right)dx\\
&+\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\tau\right)\int_0^1 g_1q_1dx,
\end{aligned}$$

où l'espace $V=H_*^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L_*^2(0,1)$ est muni du produit scalaire

$$\left(\left(\varphi,\psi,q\right),\left(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{q}\right)\right)_V=\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})dx+b\int_0^1\psi_x\tilde{\psi}_xdx+\frac{\tau}{\gamma}\int_0^1 q\tilde{q}dx,$$

et la norme associée est

$$\|(\varphi,\psi,q)\|_V^2=\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{\tau}{\gamma}\int_0^1 q^2dx$$

qui est équivalente à la norme

$$\|(\varphi,\psi,q)\|^2:=\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2+\|\varphi\|_2^2+\|\psi\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2+\|q\|_2^2.$$

Pour résoudre le problème (5.18), il suffit de montrer que $B$ est continue et coercive, et que $F$ est continue. On peut donc facilement voir que $B$ et $F$ sont bornées, et de plus, on a, pour un $c>0$,

$$\begin{aligned} B\left(\left(\varphi,\psi,q\right),\left(\varphi,\psi,q\right)\right) &= \kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{(1+\tau)}{\gamma}\int_0^1 q^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx \\ &\quad +\rho_2\int_0^1\psi^2dx+\rho_1\int_0^1\varphi^2dx \\ &\quad +\frac{(1+\tau)^2}{\gamma^2}\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x q\left(y\right)dy\right)^2dx \\ &\geq c\left\|(\varphi,\psi,q)\right\|_V^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le système (5.18) admet une solution unique

$$\varphi\in H_*^1\left(0,1\right),\ \psi\in H_0^1\left(0,1\right)\ \text{ et } q\in L_*^2\left(0,1\right).$$

En remplaçant $\varphi$ dans (5.14), $\psi$ dans (5.15), et $q$ dans (5.16), on obtient

$$u\in H_*^1\left(0,1\right),\ v\in H_0^1\left(0,1\right)\ \text{ et } \theta\in H_0^1\left(0,1\right).$$

D'autre part, si $(\psi_1,q_1)=(0,0)$, alors

$$\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)\varphi_{1x}dx=-\int_0^1\left[-\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\tau\right)q+\rho_1\varphi-\rho_1\left(g_2+g_1\right)+\frac{\sigma\tau}{\gamma}g_6\right]\varphi_1dx\ ,\ \forall\varphi_1\in H_*^1\left(0,1\right). \tag{5.20}$$

Soit $\bar{\varphi}\in H_0^1\left(0,1\right)$, pour $\varphi_1=\bar{\varphi}-\int_0^1\bar{\varphi}dx\in H_*^1\left(0,1\right)$, (6.18) devient

$$\begin{aligned} \kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)\bar{\varphi}_xdx &= -\int_0^1 h\bar{\varphi}dx+\int_0^1 hdx\int_0^1\bar{\varphi}dx \\ &= -\int_0^1\left(h-\int_0^1 hdx\right)\bar{\varphi}dx, \end{aligned}$$

où $h=-\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\tau\right)q+\rho_1\varphi-\rho_1\left(g_2+g_1\right)+\frac{\sigma\tau}{\gamma}g_6$. En utilisant (5.14), (5.16) et que $h-\int_0^1 hdx\in L_*^2\left(0,1\right)$, on trouve

$$\kappa\varphi_{xx}=-\kappa\psi_x+\sigma\theta_x+\rho_1u-\rho_1g_2\in L_*^2\left(0,1\right).$$

Par la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il en résulte que

$$\varphi \in H^2(0,1) \cap H_*^1(0,1).$$

Par ailleurs, (5.20) est également vrai pour tout $\phi \in C^1([0,1])$ vérifiant $\int_0^1 \phi(s)\,ds = 0$. En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\varphi_x(1)\,\phi(1) - \varphi_x(0)\,\phi(0) = 0, \ \forall \phi \in C^1([0,1]) \text{ vérifiant } \int_0^1 \phi(s)\,ds = 0.$$

D'où

$$\varphi_x(1) = \varphi_x(0) = 0.$$

Donc

$$\varphi \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1).$$

De la même façon, si $(\varphi_1, q_1) = (0,0)$, alors

$$\psi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

De même, si $(\varphi_1, \psi_1) = (0,0)$, alors

$$q \in H_*^1(0,1).$$

Enfin, l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ tel que (5.12) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximale. Ceci termine la preuve du Théorème 47 (voir [11], chapitre 7). ■

## 5.3 Décroissance exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle du système (5.5), (5.6) et (5.7), en utilisant la technique des multiplicateurs. A cet effet, nous avons besoin des lemmes suivants :

**Lemme 48** *Soit $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)^2 + \rho_3\theta^2 + \frac{\tau}{\gamma}q^2\right] dx \tag{5.21}$$

*satisfait, pour toute solution du système* (5.5), (5.6) *et* (5.7),

$$E'(t) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.22}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(5.5)_1$ par $\varphi_t$, et en intégrant sur $(0,1)$,

on trouve

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - \kappa\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x+\psi)_x dx + \sigma\int_0^1 \varphi_t\theta_x dx = 0,$$

en intégrant par parties, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - [\varphi_t(\varphi_x+\psi)]_0^1 + \kappa\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x+\psi)dx + \sigma\int_0^1 \varphi_t\theta_x dx = 0,$$

les conditions au bord permettent d'écrire la dernière égalité sous la forme

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \kappa\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x+\psi)dx + \sigma\int_0^1 \varphi_t\theta_x dx = 0. \tag{5.23}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(5.5)_2$ par $\psi_t$, et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi_{tt}dx - b\int_0^1 \psi_t\psi_{xx}dx + \kappa\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx = 0,$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + b\int_0^1 \psi_{xt}\psi_x dx + \kappa\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx = 0,$$

alors

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \kappa\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx = 0. \tag{5.24}$$

En multipliant l'équation $(5.5)_3$ par $\theta$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_3\int_0^1 \theta\theta_t dx + \int_0^1 \theta q_x dx + \sigma\int_0^1 \theta\varphi_{xt}dx = 0,$$

en utilisant encore l'intégration par parties avec les conditions au bord appliquées cette fois ci au terme $\int_0^1 \theta\varphi_{xt}dx$, on voit que

$$\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta q_x dx - \sigma\int_0^1 \theta_x\varphi_t dx = 0. \tag{5.25}$$

En multipliant l'équation $(5.5)_4$ par $q$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\tau\int_0^1 qq_t dx + \int_0^1 q^2 dx + \gamma\int_0^1 q\theta_x dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties le terme $\int_0^1 q\theta_x dx$, on obtient

$$\int_0^1 \theta q_x dx = \frac{\tau}{2\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx. \tag{5.26}$$

En remplaçant (5.26) dans (5.25), on obtient

$$\sigma\int_0^1 \varphi_t\theta_x dx = \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau}{2\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx,$$

puis, on remplace cette dérnière égalité dans (5.23), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \kappa\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x+\psi)dx + \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx \\ +\frac{\tau}{2\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx = 0.\end{aligned} \tag{5.27}$$

En additionnant (5.27) et (5.24), on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ +\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau}{2\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx = 0,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)^2 + \rho_3\theta^2 + \frac{\tau}{\gamma}q^2\right)dx \\ &= -\frac{1}{\gamma}\int_0^1 q^2 dx,\end{aligned}$$

ce qui donne (5.22). ■

**Lemme 49** *Soit* $(\varphi,\psi,\theta,q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *Alors la fonctionnelle*

$$F_1 = -\rho_3\int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_t(y,t)\, dy dx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_1 > 0$, *l'estimation*

$$F_1' \leq -\frac{\sigma}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + c\int_0^1 q^2 dx. \tag{5.28}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(5.5)_3$ par $\int_0^x \varphi_t(y,t)\,dy$, et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_3\int_0^1 \theta_t\int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx + \int_0^1 q_x\int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx + \sigma\int_0^1 \varphi_{xt}\int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx = 0,$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx - \int_0^1 q\varphi_t dx - \sigma \int_0^1 \varphi_t^2 dx = 0.$$

D'après l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx = \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_{tt}(y,t)\,dydx + \rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx \\
&= \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_{tt}(y,t)\,dydx + \int_0^1 q\varphi_t dx + \sigma \int_0^1 \varphi_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Dans (5.29), on remplace $\varphi_{tt}$ par $\frac{1}{\rho_1}\left[\kappa(\varphi_x+\psi)_x - \sigma\theta_x\right]$, il vient

$$\begin{aligned}
-\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx &= -\frac{\rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta \int_0^x \left[\kappa(\varphi_x+\psi)_x - \sigma\theta_x\right](y,t)\,dydx \\
&\quad - \int_0^1 q\varphi_t dx - \sigma \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&= -\frac{\kappa\rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx + \frac{\sigma\rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta^2 dx \\
&\quad - \int_0^1 q\varphi_t dx - \sigma \int_0^1 \varphi_t^2 dx.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on voit que

$$\begin{aligned}
-\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx &\leq \frac{\kappa\rho_3}{4\varepsilon_1\rho_1} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\kappa\rho_3}{\rho_1}\varepsilon_1 \int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad + \frac{\sigma\rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{1}{2\sigma} \int_0^1 q^2 dx \\
&\quad + \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \sigma \int_0^1 \varphi_t^2 dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
-\rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x \varphi_t(y,t)\,dydx &\leq -\frac{\sigma}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\kappa\rho_3}{\rho_1}\varepsilon_1 \int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{\sigma\rho_3}{\rho_1} + \frac{\kappa\rho_3}{4\varepsilon_1\rho_1}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{1}{2\sigma} \int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de (5.28). ■

**Lemme 50** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *Alors la fonctionnelle*

$$F_2 = \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi\left(s,t\right) ds dx$$

*vérifie l'estimation*

$$F_2^{'} \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx. \tag{5.30}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(5.5)_2$ par $\psi$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx - b \int_0^1 \psi\psi_{xx} dx + \kappa \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

et d'après la formule d'intégration par parties, on remarque que

$$\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx - b \left[\psi\psi_x\right]_0^1 + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

alors, sous les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi\psi_t dx &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - \kappa \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \tag{5.31}$$

On pose maintenant

$$\omega = \int_0^x \psi\left(s,t\right) ds,$$

on multiple l'équation $(5.5)_1$ par $\omega$ et on intègre sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \omega \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^1 \omega (\varphi_x + \psi)_x dx + \sigma \int_0^1 \omega \theta_x dx = 0.$$

En utilisant d'abord l'intégration par parties, on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \omega \varphi_{tt} dx - \kappa \left[\omega(\varphi_x + \psi)\right]_0^1 + \kappa \int_0^1 \omega_x (\varphi_x + \psi) dx + \sigma \left[\omega \theta\right]_0^1 - \sigma \int_0^1 \omega_x \theta dx = 0.$$

Puis, on utilise (5.6), on conclut que

$$\rho_1 \int_0^1 \omega \varphi_{tt} dx + \kappa \int_0^1 \psi (\varphi_x + \psi) dx - \sigma \int_0^1 \psi \theta dx = 0,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} -\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega \varphi_t dx &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \omega \varphi_{tt} dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_t dx + \kappa \int_0^1 \psi \left(\varphi_x + \psi\right) dx - \sigma \int_0^1 \psi \theta dx. \end{aligned} \tag{5.32}$$

En additionnant (5.31) et (5.32), on obtient

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi \psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega \varphi_t dx &= -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad -\sigma \int_0^1 \theta \psi dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_t dx, \end{aligned}$$

il en découle, à l'aide des inégalités de Young et Poincaré

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi \psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega \varphi_t dx &\leq -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c_p \sigma^2}{2b} \int_0^1 \theta^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Au terme $\int_0^1 \omega_t^2 dx$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu' on utilise à plusieurs reprises, on trouve

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 (s,t)\, ds.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} F_2^{'}(t) &= \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi \psi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega \varphi_t dx \\ &\leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{2}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c_p \sigma^2}{2b} \int_0^1 \theta^2 dx, \end{aligned}$$

d'où (5.30) ■

**Lemme 51** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *Alors la fonctionnelle*

$$F_3(t) = -\rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left( \int_0^x \varphi_t(s)\, ds \right) dx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_2 > 0$, *l'estimation*

$$F_3^{'}(t) \leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \quad (5.33)$$

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned} F_3^{'}(t) &= -\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left( \int_0^x \varphi_t(s)\, ds \right) dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_t \left( \int_0^x \varphi_t(s)\, ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left( \int_0^x \varphi_{tt}(s)\, ds \right) dx. \end{aligned}$$

On remplace $-\rho_1 \varphi_{tt}$ par $-\kappa (\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_x$, ça donne

$$\begin{aligned} F_3^{'}(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{xt} \left( \int_0^x \varphi_t(s)\, ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \left( \int_0^x \varphi_t(s)\, ds \right) dx \\ &\quad -\kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left( \int_0^x (\varphi_x + \psi)_x (s)\, ds \right) dx + \sigma \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left( \int_0^x \theta_x(s)\, ds \right) dx. \end{aligned}$$

On revient aux conditions au bord qui impliquent

$$\begin{aligned} F_3^{'}(t) &= -\kappa \int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(s)\, dsdx \\ &\quad +\sigma \int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant alors les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} F_3^{'}(t) &\leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad +\frac{\sigma^2}{2\kappa}\int_0^1 \theta^2 dx + \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Ceci coincide avec (5.33). ■

**Lemme 52** *Soit* $(\varphi,\psi,\theta,q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *Alors la fonctionnelle*

$$F_4(t) = \tau\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s)\, dsdx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_3 > 0$,

$$F_4^{'}(t) \leq -\frac{\gamma\rho_3}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2(x)\, dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1 q^2 dx. \tag{5.34}$$

**Démonstration.** En intégrant d'abors l'équation $(5.5)_4$ sur $(0,x)\subset(0,1)$, puis, en intégrant sur $(0,1)$ après la multiplication par $\theta$, on trouve

$$\tau \int_0^1 \theta \int_0^x q_t dsdx + \int_0^1 \theta \int_0^x q dsdx + \gamma \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x dsdx = 0,$$

donc

$$\tau \int_0^1 \theta \int_0^x q_t dsdx + \int_0^1 \theta \int_0^x q dsdx + \gamma \int_0^1 \theta^2 dx = 0.$$

On déduit que

$$\tau\rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx = \tau\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx - \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx - \gamma\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx. \quad (5.35)$$

En multipliant l'équation $(5.5)_3$ par $\int_0^x q ds$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx + \int_0^1 q_x \int_0^x q ds dx + \sigma \int_0^1 \varphi_{xt} \int_0^x q ds dx = 0,$$

à l'aide de l'intégration par parties, il en résulte que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx + \left[ q \int_0^x q ds \right]_0^1 - \int_0^1 q^2 dx + \sigma \left[ \varphi_t \int_0^x q ds \right]_0^1 - \sigma \int_0^1 \psi_t q dx = 0;$$

c'est-à-dire,

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx = \int_0^1 q^2 dx + \sigma \int_0^1 \varphi_t q dx. \quad (5.36)$$

En remplaçant (5.36) dans (5.35), on arrive à

$$\tau\rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx = -\gamma\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau \int_0^1 q^2 dx + \tau\sigma \int_0^1 q\varphi_t dx - \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx.$$

Les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz donnent

$$\begin{aligned} \tau\rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx \quad \leq \quad & -\gamma\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{(\tau\sigma)^2}{4\varepsilon_3} \int_0^1 q^2 dx \\ & + \frac{\gamma\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\rho_3}{2\gamma} \int_0^1 q^2 dx, \end{aligned}$$

alors

$$F_4' \leq -\frac{\gamma\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + +\varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left( \tau + \frac{\rho_3}{2\gamma} + \frac{(\tau\sigma)^2}{4\varepsilon_3} \right) \int_0^1 q^2 dx,$$

d'où (5.34). ■

Le lemme suivant est très important. Sa preuve sera donné en détails.

**Lemme 53** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *On suppose* *que* $\chi_0 = 0$. *Alors la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_5(t) &= -\frac{\tau\rho_2}{b}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx - \frac{\tau\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_x dx \\ &+\frac{\tau\rho_3}{\sigma}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta\varphi_t dx - \frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\psi_x dx \end{aligned}$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} F_5'(t) \quad \leq \quad & -\frac{\tau\rho_2}{b}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ & +c\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{5.37}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(5.5)_2$ par $(\varphi_x+\psi)$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x+\psi)dx - b\int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x+\psi)dx + \kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx = 0,$$

sous les conditions au bord, une intégration par parties donne

$$\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x+\psi)dx + b\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx + \kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx = 0,$$

donc, en appliquant encore une fois l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} -\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx \quad &= \quad -\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x+\psi)dx - \rho_2\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)_t dx \\ &= \quad b\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx + \kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ & \quad\; -\rho_2\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)_t dx. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(5.5)_1$ par $\psi_x$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \psi_x\varphi_{tt}dx - \kappa\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx + \sigma\int_0^1 \psi_x\theta_x dx = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x \varphi_t dx &= \rho_1 \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \rho_1 \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx \\
&= \rho_1 \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \kappa \int_0^1 \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx - \sigma \int_0^1 \psi_x \theta_x dx,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$-\frac{b\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x \varphi_t dx = -\frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx - b\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx + \frac{b\sigma}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x dx. \quad (5.39)$$

En additionnant (5.38) et (5.39), on obtient

$$\begin{aligned}
-\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx - \frac{b\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx &= -\frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
&\quad -\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx + \frac{b\sigma}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x dx.
\end{aligned}$$

Grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\begin{aligned}
-\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx - \frac{b\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx &= \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx \\
&\quad -\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \frac{b\sigma}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x dx.
\end{aligned} \quad (5.40)$$

On déduit de $(5.5)_3$ et l'intégrale par parties que

$$\begin{aligned}
\rho_3 \int_0^1 \theta_t\psi_t dx &= \int_0^1 \left[-q_x - \sigma\varphi_{xt}\right]\psi_t dx \\
&= -\sigma\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx - \int_0^1 q_x\psi_t dx \\
&= \sigma\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_x dx - \int_0^1 q_t\psi_x dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx=\rho_3\int_0^1 \theta_t\psi_t dx-\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_x dx+\int_0^1 q_t\psi_x dx. \tag{5.41}$$

En utilisant l'équation $(5.5)_4$, on trouve

$$\begin{aligned}\tau\int_0^1 q_t\psi_x dx &= \int_0^1 (-q-\gamma\theta_x)\,\psi_x dx\\ &= -\int_0^1 q\psi_x dx-\gamma\int_0^1 \theta_x\psi_x dx.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Maintenant de $(5.5)_2$, on voit que

$$\rho_2\int_0^1 \theta\psi_{tt}dx-b\int_0^1 \theta\psi_{xx}dx+\kappa\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx=0,$$

alors

$$\rho_2\int_0^1 \theta_t\psi_t dx=\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\psi_t dx+b\int_0^1 \theta_x\psi_x dx+\kappa\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx. \tag{5.43}$$

En remplaçant (5.43) et (5.42) dans (5.41), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= \frac{\rho_3}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\psi_t dx-\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_x dx+\frac{\kappa\rho_3}{\rho_2\sigma}\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx\\ &\quad -\frac{1}{\tau\sigma}\int_0^1 q\psi_x dx+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{b\rho_3}{\rho_2}-\frac{\gamma}{\tau}\right)\int_0^1 \theta_x\psi_x dx.\end{aligned} \tag{5.44}$$

En remplaçant (5.44) dans (5.40), on conclut que

$$\begin{aligned}&-\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx-\frac{b\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx\\ &-\frac{\rho_3}{\sigma}\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\psi_t dx+\frac{1}{\sigma}\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_x dx\\ = &-\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx+\kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx+\frac{\kappa\rho_3}{\rho_2\sigma}\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx\\ &-\frac{1}{\tau\sigma}\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\int_0^1 q\psi_x dx-\frac{b}{\tau}\frac{1}{\sigma}\chi_0\int_0^1 \theta_x\psi_x dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_5'(t) &= -\frac{\tau\rho_2}{b}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\tau\kappa}{b}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\psi_x dx \\ & -\frac{\tau\kappa\rho_3}{\sigma\rho_2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi)dx - \frac{\chi_0}{\sigma}\int_0^1 \theta_x\psi_x dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young, implique que

$$\begin{aligned} F_5'(t) &\leq -\frac{\chi_0}{\sigma}\int_0^1 \theta_x\psi_x dx - \frac{\tau\rho_2}{b}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & +\left(\frac{\tau\kappa}{b} + \frac{\tau\kappa\rho_3}{2\sigma\rho_2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ & +\frac{\tau\kappa\rho_3}{2\sigma\rho_2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\left(\frac{\rho_1}{\kappa}-\frac{\rho_2}{b}\right)^2}{4\sigma^2\varepsilon_1}\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

L'estimation (5.37) est donc démontrée. ■

Maintenant, on introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L} = NE + N_1F_1 + F_2 + N_2F_3 + N_3F_4 + N_4F_5, \tag{5.45}$$

où $N$ et $N_i$ sont des constantes strictement positives à déterminer attentivement.

**Lemme 54** *Pour $N>0$ assez grand, il existe deux réels positifs $\alpha_1$ et $\alpha_2$ vérifiant*

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t), \ \forall t \geq 0. \tag{5.46}$$

*Autrement dit, les fonctions $E$ et $\mathcal{L}$ sont équivalentes.*

**Démonstration.** On pose $\tilde{\mathcal{L}} = N_1F_1 + F_2 + N_2F_3 + N_3F_4 + N_4F_5$. A l'aide des inégalités de Young, Poincaré et de Cauchy-Schwarz, on trouve que

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\mathcal{L}}(t)\right| &\leq \alpha\int_0^1 \left(\varphi_t^2+\psi_t^2+\psi_x^2+(\varphi_x+\psi)^2+\theta^2+q^2\right)dx \\ &\leq \alpha E(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \alpha E(t);$$

c'est-à-dire

$$(N-\alpha) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N+\alpha) E(t).$$

En choisissant $N$ assez grand, on trouve (5.46). ■

Maintenant, nous sommes prêts à prouver le résultat principal de cette section.

**Théorème 55** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *une solution du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *On suppose que* $\chi_0 = 0$. *Alors, il existe* $k_0, k_1 > 0$ *tels que*

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Démonstration.** En utilisant (5.22), (5.28), (5.30), (5.33), (5.34) et (5.37) , on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \quad \leq \quad & -\left[\frac{N}{\gamma} - cN_1 - cN_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right) - \frac{cN_4}{\varepsilon_1}\right]\int_0^1 q^2 dx \\
& -\left[\frac{\sigma N_1}{2} - c - cN_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \varepsilon_3 N_3\right]\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{\tau\rho_2}{b}N_4 - \varepsilon_2 N_2 - c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{b}{2} - \varepsilon_1 N_4\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& -\left[\frac{\gamma\rho_3}{2}N_3 - cN_4 - cN_2 - cN_1\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - c\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\
& -\left[\frac{\kappa N_2}{2} - cN_4 - \varepsilon_1 N_1\right]\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx.
\end{aligned}$$

A ce point, on choisit $N_4$ assez grand tel que

$$\frac{\tau\rho_2}{b}N_4 - c > 0.$$

puis, on fixe $N_2$ tel que

$$\frac{\kappa}{2}N_2 - cN_4 > 0.$$

Maintenant, on choisit $\varepsilon_2$ assez petit pour que

$$\frac{\tau\rho_2}{b}N_4 - \varepsilon_2 N_2 - c > 0,$$

On prend $N_1$ assez grand tel que

$$\frac{\sigma N_1}{2} - c - cN_2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) > 0,$$

puis, on choisit $\varepsilon_1$ assez petit pour que

$$\frac{b}{2} - \varepsilon_1 N_4 > 0, \text{ et } \frac{\kappa N_2}{2} - cN_4 - \varepsilon_1 N_1 > 0.$$

En plus, on prend $N_3$ assez grand tel que

$$\frac{\gamma\rho_3}{2}N_3 - cN_4 - cN_2 - cN_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - c > 0,$$

puis, on choisit $\varepsilon_3$ assez petit pour que

$$\frac{\sigma N_1}{2} - c - cN_2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \varepsilon_3 N_3 > 0.$$

Finalement, on choisit $N$ assez grand pour que

$$\frac{N}{\gamma} - cN_1 - cN_3\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) - \frac{cN_4}{\varepsilon_1} > 0$$

et (5.46) est vrai. Par conséquent, pour un certain $\alpha_0 > 0$

$$\mathcal{L}^{'}(t) \leq -\alpha_0 E(t), \quad \forall t > 0. \tag{5.47}$$

Combinons (5.47) et (5.46) pour obtenir

$$\mathcal{L}^{'}(t) \leq -\alpha_0 E(t) \leq -\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0. \tag{5.48}$$

Une intégration simple de (5.48) mène à

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)\, e^{-k_1 t}, \quad \forall t > 0. \tag{5.49}$$

où $k_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha_2}$. Alors (5.49) et (5.46) impliquent

$$E(t) \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{\alpha_1} e^{-k_1 t} = k_0 e^{-k_1 t}, \quad \forall t > 0,$$

d'où le resultat cherché. ■

## 5.4 L'absence de stabilité exponentielle

En utilisant le Théorème 1, on montre l'absence de stabilité exponentielle grâce au procédé suivant : on montre qu'il existe une suite de valeurs $\lambda_\mu$ vérifiant

$$\left\| (i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \longrightarrow +\infty,$$

ceci est équivalent à prouver qu'il existe une suite de vecteurs $F_\mu \in \mathcal{H}$ et une suite de nombres de $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, avec $\|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ tels que

$$\left\| (i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} F_\mu \right\|_{\mathcal{H}} = \|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow +\infty,$$

où

$$i\lambda_\mu \Phi_\mu - \mathcal{A}\Phi_\mu = F_\mu.$$

Maintenant, on considère le système résolvant

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u & = f_1, \\ i\lambda\rho_1 u - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x & = \rho_1 f_2, \\ i\lambda\psi - v & = f_3, \\ i\lambda\rho_2 v - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) & = \rho_2 f_4, \\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + \sigma u_x & = \rho_3 f_5, \\ i\lambda\tau q + q + \gamma\theta_x & = \tau f_6, \end{cases} \tag{5.50}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$. Pour montrer que la condition $\chi_0 = 0$ est également nécessaire dans le Théorème 55, on suppose qu'il existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \neq 0$. On peut prendre $f_1 = f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = 0$ et $f_4 = \sin(\mu\pi x)/\rho_2$ dans $(5.50)$, ce que implique $F = (0,0,0,f_4,0,0)^T \in \mathcal{H}$. Pour assurer les conditions au bord (5.6), on suppose que

$$\varphi = A\cos(\mu\pi x), \ \psi = B\sin(\mu\pi x), \ \theta = D\sin(\mu\pi x) \ \text{ et } q = E\cos(\mu\pi x).$$

Par conséquent, le système (5.50) est équivalent à

$$\begin{cases} \left[-\rho_1\lambda^2 + \kappa\mu^2\pi^2\right] A - \kappa\mu\pi B + \sigma\mu\pi D = 0, \\ -\kappa\mu\pi A + \left[-\rho_2\lambda^2 + b\mu^2\pi^2 + \kappa\right] B = 1, \\ i\rho_3\lambda D - \mu\pi E - i\sigma\lambda\mu\pi A = 0, \\ (i\tau\lambda + 1) E + \gamma\mu\pi D = 0, \end{cases} \tag{5.51}$$

où $\mu \in \mathbb{N}$. On voit alors que

$$E = -\frac{\gamma\mu\pi}{(i\tau\lambda + 1)} D,$$

ce qui conduit à réécrire le système (5.51) comme suit :

$$\begin{pmatrix} p_1 & -\kappa\mu\pi & \sigma\mu\pi \\ -\kappa\mu\pi & p_2 & 0 \\ -i\sigma\lambda\mu\pi & 0 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$p_1 = -\rho_1\lambda^2 + \kappa\mu^2\pi^2,\ p_2 = -\rho_2\lambda^2 + b\mu^2\pi^2 + \kappa \text{ et } p_3 = i\rho_3\lambda + \frac{\gamma\mu^2\pi^2}{(i\tau\lambda + 1)}.$$

Alors

$$B = \frac{p_1 p_{3+} i\lambda\sigma^2\mu^2\pi^2}{p_1p_2p_3 + i\lambda\sigma^2\mu^2\pi^2 p_2 - \kappa^2\mu^2\pi^2 p_3} = \frac{K}{p_2 K - \kappa^2\mu^2\pi^2}, \tag{5.52}$$

où $K = p_1 + i\lambda\sigma^2\mu^2\pi^2/p_3$. On obtient ensuite, remplaçant $p_3$ par sa valeur,

$$K = p_1 + \sigma^2\mu^2\pi^2 \frac{-\tau\lambda^2 + i\lambda}{-\rho_3\tau\lambda^2 + i\rho_3\lambda + \pi^2\gamma\mu^2}.$$

Maintenant, on prend $\lambda$ tel que $p_2(\lambda) = d$, ce qui donne $\lambda^2 = (b\mu^2\pi^2 + \kappa)/\rho_2 - d/\rho_2$, où $d \in \mathbb{R}$ qu'on fixera plus tard. Donc on obtient

$$K = p_1 + \sigma^2\mu^2\pi^2 \frac{-\tau(b\mu^2\pi^2 + \kappa)/\rho_2 + \tau d/\rho_2 + i\lambda}{(\gamma - \rho_3\tau b/\rho_2)\pi^2\mu^2 - \rho_3\tau\kappa/\rho_2 + \rho_3\tau d/\rho_2 + i\rho_3\lambda}. \tag{5.53}$$

On note $\chi_1 = \gamma - \frac{\rho_3\tau b}{\rho_2}$. Si $\chi_1 = 0$, on choisit $d = \kappa$, et on trouve

$$K = \frac{-\rho_1 b}{\rho_2}\mu^2\pi^2 + \kappa\mu^2\pi^2 - \tau\frac{\sigma^2\mu^2\pi^2}{i\rho_3}\lambda + \frac{\sigma^2\mu^2\pi^2}{\rho_3}. \tag{5.54}$$

Par conséquent, puisque $d = \kappa$, on a

$$B = \frac{K}{\kappa K - \kappa^2\mu^2\pi^2} = \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\frac{-\rho_1 b}{\rho_2} - \tau\frac{\sigma^2}{i\rho_3}\lambda + \frac{\sigma^2}{\rho_3}} \approx \frac{1}{\kappa},$$

pour $\lambda$ assez grand. Donc

$$\begin{aligned}\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_2 \|v_\mu\|^2 = |B|^2 |\lambda|^2 \rho_2 \int_0^1 |\sin(\mu\pi x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}|B|^2 |\lambda_\mu|^2 \rho_2 \approx \frac{1}{2\kappa^2}|\lambda_\mu|^2 \rho_2 = \frac{b\pi^2}{2\kappa^2}\mu^2\rho_2. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Ceci implique

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$. Enfin, on suppose que $\chi_1 \neq 0$ et $\chi_0 \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} K &= p_1 + \sigma^2\mu^2\pi^2 \frac{-\tau(b\mu^2\pi^2+\kappa)/\rho_2 + \tau d/\rho_2 + i\lambda}{\chi_1\pi^2\mu^2 - \rho_3\tau\kappa/\rho_2 + \rho_3\tau d/\rho_2 + i\rho_3\lambda} \\ &= p_1 - \sigma^2\mu^2\pi^2\frac{(\tau b/\rho_2)}{\chi_1} - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2 - i\lambda)}{\chi_1(\chi_1\pi^2\mu^2 - \rho_3\tau\kappa/\rho_2 + \rho_3\tau d/\rho_2 + i\rho_3\lambda)}\sigma^2\mu^2\pi^2 \\ &= \left(-\rho_1\frac{b}{\rho_2} + \kappa - \sigma^2\frac{\tau b/\rho_2}{\chi_1}\right)\mu^2\pi^2 - \rho_1\kappa/\rho_2 + \rho_1 d/\rho_2 \\ &\quad - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2 - i\lambda)}{\chi_1(\chi_1\pi^2\mu^2 - \rho_3\tau\kappa/\rho_2 + \rho_3\tau d/\rho_2 + i\rho_3\lambda)}\sigma^2\mu^2\pi^2. \end{aligned}$$

On va prendre $d$ tel que

$$\begin{aligned} \left(-\rho_1\frac{b}{\rho_2} + \kappa - \sigma^2\frac{\tau b/\rho_2}{\chi_1}\right) d &= \kappa^2 \Longrightarrow d = \frac{\kappa^2}{-\rho_1\frac{b}{\rho_2} + \kappa - \sigma^2\frac{\tau b/\rho_2}{\chi_1}} \\ &= \frac{\kappa\rho_2\chi_1}{b\chi_0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} K &= \frac{\kappa^2}{d}\mu^2\pi^2 - \rho_1\kappa/\rho_2 + \rho_1 d/\rho_2 - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2 - i\lambda)}{\chi_1(\chi_1\pi^2\mu^2 - \rho_3\tau\kappa/\rho_2 + \rho_3\tau d/\rho_2 + i\rho_3\lambda)}\sigma^2\mu^2\pi^2 \\ &\approx \frac{\kappa^2}{d}\mu^2\pi^2 - \rho_1\kappa/\rho_2 + \rho_1 d/\rho_2 + i\frac{\gamma\sigma^2}{\chi_1^2}\lambda - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2)}{\chi_1^2}\sigma^2, \end{aligned}$$

pour $\lambda$ assez grand. De (5.52), on a

$$\begin{aligned} B &= \frac{K}{dK - \kappa^2\mu^2\pi^2} = \\ &\approx \frac{\left(\frac{\kappa^2}{d}\mu^2\pi^2 - \rho_1\kappa/\rho_2 + \rho_1 d/\rho_2 + i\frac{\gamma\sigma^2}{\chi_1^2}\lambda - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2)}{\chi_1^2}\sigma^2\right)}{d\left(-\rho_1\kappa/\rho_2 + \rho_1 d/\rho_2 + i\frac{\gamma\sigma^2}{\chi_1^2}\lambda - \frac{\gamma(\tau\kappa/\rho_2 - \tau d/\rho_2)}{\chi_1^2}\sigma^2\right)} \\ &\approx \frac{\frac{\kappa^2}{d}\frac{\rho_2\lambda^2}{b}}{i\frac{\gamma\sigma^2}{\chi_1^2}\lambda} \approx -i\frac{\rho_2\chi_1^2\kappa^2}{\gamma\sigma^2 bd}\lambda. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_2\|v_\mu\|^2 = |B|^2|\lambda|^2\rho_2\int_0^1|\sin(\mu\pi x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}|B|^2|\lambda_\mu|^2\rho_2 \approx c_0|\lambda_\mu|^4, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$. Ce que termine l'épreuve

## 5.5 Décroissance polynomiale

Dans cette section, nous examinons la situation dans laquelle le nombre de stabilité est différente de zéro (i.e. $\chi_0 \neq 0$). A cet égard, nous établissons un résultat de décroissance polynomiale pour toute solution forte du système (5.5), (5.6) et (5.7).

Pour toute solution forte de (5.5), (5.6) et (5.7), on définit la fonctionnelle d'énergie du second ordre

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho_1\varphi_{tt}^2 + \rho_2\psi_{tt}^2 + b\psi_{xt}^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)_t^2 + \rho_3\theta_t^2 + \frac{\tau}{\gamma}q_t^2\right]dx. \tag{5.56}$$

Comme dans le Lemme 48, il en résulte que la fonctionnelle d'énergie du second ordre définis par (5.56), satisfait

$$\mathcal{E}'(t) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^1 q_t^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.57a}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section

**Théorème 56** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *une solution forte du problème* (5.5), (5.6) *et* (5.7). *On suppose que* $\chi_0 \neq 0$. *Alors, la fonctionnelle d'énergie* $E$ *vérifie*

$$E(t) \leq \frac{\lambda_0}{t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\lambda_0$ est une constante strictement positive.

Comme dans (5.45), on définit la fonctionnelle de Lyapunov $\tilde{\mathcal{L}}$ comme suit

$$\tilde{\mathcal{L}} = N(E + \mathcal{E}) + N_1 F_1 + F_2 + N_2 F_3 + N_3 F_4 + N_4 F_5, \tag{5.58}$$

où $F_i$ , $i = 1$ à 5, et leurs dérivées restent les même comme dans les Lemmes 49$-$49. En outre, en utilisant la quatrième équation de (5.5), on a

$$\int_0^1 \theta_x \psi_x dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 \left(q^2 + q_t^2\right) dx. \tag{5.59a}$$

Par conséquent, la dérivée de $F_5$ devient

$$\begin{aligned} F_5'(t) \quad \leq \quad & -\frac{\tau\rho_2}{b}\int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & + c\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 \left(q^2 + q_t^2\right) dx. \end{aligned} \tag{5.60}$$

**Remarque 57** *Il est important de noter que pour* $\tilde{\mathcal{L}}$, *à laplace de* $\mathcal{L}$, (5.46) *n'est pas valable.*

**Démonstration.** (du Théorème **??**) Pour finaliser la démonstration du Théorème **??**, on dérive la fonctionnelle de Lyapunov $\tilde{\mathcal{L}}$ définie dans (5.58) et on utilise (5.57$a$), (5.28), (5.30), (5.33), (5.34) et (5.60), on obtient

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}'(t) \leq & -\left[\frac{N}{\gamma} - cN_1 - cN_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right) - \frac{cN_4}{\varepsilon_1}\right]\int_0^1 q^2 dx \\
& -\left[\frac{N}{\gamma} - \frac{cN_4}{\varepsilon_1}\right]\int_0^1 q_t^2 dx - \left[\frac{b}{2} - \varepsilon_1 N_4\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& -\left[\frac{\tau\rho_2}{b}N_4 - \varepsilon_2 N_2 - c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{\kappa N_2}{2} - cN_4 - \varepsilon_1 N_1\right]\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\
& -\left[\frac{\gamma\rho_3}{2}N_3 - cN_4 - cN_2 - cN_1\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - c\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\
& -\left[\frac{\sigma N_1}{2} - c - cN_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \varepsilon_3 N_3\right]\int_0^1 \varphi_t^2 dx.
\end{aligned}
$$

En plus, avec les mêmes choix de constantes comme dans la démonstration du Théorème 55, et en choisissant encore $N$ assez grand pour que

$$\frac{N}{\gamma} - \frac{cN_4}{\varepsilon_1} > 0,$$

on trouve

$$\tilde{\mathcal{L}}'(t) \leq -\lambda_1 E(t), \quad \forall t > 0, \tag{5.61}$$

où $\lambda_1$ est une constante positive. Une simple intégration de (5.61) sur $(0,t)$, rappelant que $E$ est décroissante, on obtient

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)\,ds \leq \frac{1}{\lambda_1}\left(\tilde{\mathcal{L}}(0) - \tilde{\mathcal{L}}(t)\right) \leq \frac{\tilde{\mathcal{L}}(0)}{\lambda_1}.$$

Finalement, pour $\lambda_0 = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(0)}{\lambda_1} = \frac{E(0)+\mathcal{E}(0)}{\lambda_1}$, on a

$$E(t) \leq \frac{\lambda_0}{t}, \quad \forall t > 0.$$

■

# Chapitre 6

# Décroissance des solutions d'un système de Bresse avec deuxième son

## 6.1 Introduction

Bresse système tient compte des déformations de arc d'un cercle soumis aux déplacements longitudinal et vertical et l'angle de rotation d'un filament, dénotés par $\omega$, $\varphi$ et $\psi$, respectivement. Le système est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) = F_1, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) = F_2, & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\ \rho_3\omega_{tt} - k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) = F_3. & \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \end{cases} \tag{6.1}$$

où $F_i$ , $i = 1, 2, 3$ désignent les forces extérieures exercées sur l'objet et les coefficients $\rho_i$, $k$, $k_0$, $l$ et $b$ sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Le système de Bresse (6.1) est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes et il a été initialement introduit par Bresse [9]. Lorsque $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, (6.1) est purement conservatif. Autrement dit, en prenant en compte les conditions aux bords, son énergie associée définie par la fonctionnelle

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+\rho_1\omega_t^2+b\psi_x^2+k(\varphi_x+\psi+l\omega)^2+k_0\left(\omega_x-l\varphi\right)^2\right]dx,$$

satisfait $E'(t)=0$. Par conséquent, l'identité donnée par $E(t)=E(0)$ reste vraie pour tout $t\geq 0$. Cette identité est appelée la propriété de conservation de l'énergie. En outre, si $l\equiv 0$, alors les deux premières équations du système de Bresse se réduisent au système de Timoshenko bien connu. Santos et Almeida Júnior [64] ont considéré (6.1) lorsque $F_1=\gamma_1\varphi_t$, $F_2=\gamma_2\psi_t$ et $F_3=\gamma_3\omega_t$ , avec les conditions initiales et les conditions aux bords de type Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, et ils ont montré que le système est exponentiellement stable sans imposer aucune condition sur les coefficients. Le même résultat a été obtenu par Soriano et al [69] lorsque $F_1=a(x)\,g_1(\varphi_t)$, $F_2=g_2(\psi_t)$ et $F_3=\gamma(x)\,g_3(\omega_t)$, où $a,\gamma\in L^\infty(0,L)$ et les fonctions $g_1$, $g_2$ et $g_3$ sont continues et monotones. Un résultat similaire a également été établi par Guesmia et Kafini [28] lorsque $F_1=-\int_0^{+\infty}g_1(s)\,\varphi_{xx}(x,t-s)\,ds$, $F_2=-\int_0^{+\infty}g_2(s)\,\psi_{xx}(x,t-s)\,ds$ et $F_3=-\int_0^{+\infty}g_3(s)\,\omega_{xx}(x,t-s)\,ds$, où $g_i$ sont des fonctions différentiables décroissantes satisfaisant quelques hypothèses. Précisément, ils ont établi l'existence et l'unicité de la solution et la stabilité asymptotique de ce système, mais sans imposer aucune condition sur les coefficients. Lorsque $F_1=F_3=0$ et $F_2=\gamma\psi_t$ avec $\gamma>0$, et dans le cas d'égalité des vitesses de propagation$\left(\frac{\rho_1}{k}=\frac{\rho_2}{b}\text{ et }\ k=k_0\right)$, Alabau Boussouira et al [3] ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie du système. En revanche, quand les vitesses de propagation sont différentes $\left(\frac{\rho_1}{k}\neq\frac{\rho_2}{b}\text{ ou } k\neq k_0\right)$, ils ont montré d'abord que le système n'est pas uniformément stable. Ensuite, sous la condition $k=k_0$ et $\frac{\rho_1}{k}\neq\frac{\rho_2}{b}$, ils ont établi un taux de décroissance polynomial de type $t^{-2/3}$. Puis, dans les autres cas, ils ont montré que l'énergie du système décroit vers zéro comme $t^{-1/3}$.

Concernant le système thermoélastique de Bresse, Liu et Rao [41] ont étudié la stabilisation du système de Bresse avec deux lois différentes de dissipation thermique agissant sur le déplacement longitudinal et la rotation angulaire

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) + l\gamma\theta_1 = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl\left(\varphi_x + l\omega + \psi\right) + \gamma\theta_{1x} = 0, \\ \rho_3\theta_t - \theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \rho_3\theta_{1t} - \theta_{1xx} + \gamma\left(\omega_x - l\varphi\right)_t = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

dans $(0, L) \times (0, +\infty)$ . Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation des ondes, ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroit polynomialement vers zéro avec des taux $t^{-1/2}$ ou $t^{-1/4}$, pour les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann ou Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet respectivement. Dans [16], Fatori et Rivera ont considéré le système de Bresse avec une loi de dissipation de température globale agissant sur la rotation angulaire. Ils ont établi le même taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas d'égalité des vitesses de propagation des ondes. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroit polynomialement vers zéro avec le taux $t^{-1/3}$.

Dans le système (6.2), l'équation de la chaleur est régie par la loi de la conduction thermique de Fourier, ce qui indique que le flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. Par ailleurs, il est bien connu que le modèle en utilisant la loi de Fourier classique conduit au paradoxe physique de vitesse infinie de la propagation de la chaleur. En d'autres termes, toute perturbation thermique à un point sera instantanément transféré aux autres parties du corps. Pour surmonter ce paradoxe physique, mais en gardant l'essentiel d'un processus de conduction de la chaleur, de nombreuses théories ont ensuite vu le jour. L'un d'eux est l'avènement des effets du deuxième son qui se posent lorsque la chaleur est transportée par un processus de propagation des ondes au lieu de la diffusion habituelle. La théorie suggère de remplacer la loi classique de Fourier

$$q + \gamma\theta_x = 0,$$

où $q$ est le flux de chaleur et $\gamma$ est le coefficient de conductivité thermique, par une loi de conduction thermique modifiée dite loi de Cattaneo

$$\tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0,$$

ici, le paramètre $\tau > 0$ représente le temps de relaxation qui décrit le décalage de la réponse du flux de chaleur au gradient de température. Le système de chaleur obtenu est de type hyperbolique et donc, automatiquement, élimine le paradoxe de vitesses infinies. En mettant la théorie ci-dessus en considération, nous obtenons le système de Bresse suivant :

$$\begin{aligned}
&\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) = 0, && \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\
&\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x = 0, && \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\
&\rho_1\omega_{tt} - k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, && \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\
&\rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{xt} = 0, && \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty), \\
&\tau_0 q_t + \beta q + \theta_x = 0. && \text{dans } (0,1)\times(0,+\infty),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Dans ce chapitre, on considère (6.3) avec les conditions au bord suivantes

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,t) = \theta(0,t) = \omega_x(0,t) = \psi_x(0,t) = 0, \\
&\varphi_x(1,t) = q(1,t) = \omega(1,t) = \psi(1,t) = 0,
\end{aligned} \quad \forall t \geq 0, \tag{6.4}$$

et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\
&\omega(x,0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x,0) = \omega_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x),
\end{aligned} \quad \forall x \in (0,1). \tag{6.5}$$

On va prouver l'exestence et l'unicité des solutions et établir la stabilité exponentielle et polynomiale en fonction des paramètres suivants :

$$k \ , \ k_0 \text{ et } \xi = \left(1 - \frac{\tau_0 \rho_3 k}{\rho_1}\right) \underbrace{\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)}_{\chi} - \frac{\gamma^2 \tau_0}{b}. \tag{6.6}$$

De plus, on va prouvé que le système n'est pas exponentiellement stable si $\xi \neq 0$ ou $k \neq k_0$.

Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous utilisons la méthode de semigroupe pour prouver que le problème (6.3), (6.4) et (6.5) est bien posé. Dans la section 3, nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour établir la stabilité exponentielle quand $\xi = 0$ et $k = k_0$. Dans la section 4, nous montrons que le système n'est pas exponentiellement stable si $\xi \neq 0$ ou $k \neq k_0$. Dans la dernière section, nous prouvons un résultat de stabilité polynomiale lorsque $\xi \neq 0$ et $k = k_0$.

## 6.2 Existence et unicité

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (6.3), (6.4) et (6.5) en utilisant la théorie de semigroupe. En posant $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \omega, w, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t$, $v = \psi_t$ et $w = \omega_t$, le système (6.3), (6.4) et (6.5) est équivalent à

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \mathcal{A}\Phi(t) = 0, & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases} \tag{6.7}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -u \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi+l\omega)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ -v \\ -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi+l\omega) + \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ -w \\ -\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x+\psi+l\omega) \\ \frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\gamma}{\rho_3}v_x \\ \frac{\beta}{\tau_0}q + \frac{1}{\tau_0}\theta_x \end{pmatrix}.$$

On considère les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} H^1_*(0,1) &= \left\{ f \in H^1(0,1) : f(0) = 0 \right\}, \\ \tilde{H}^1_\star(0,1) &= \left\{ f \in H^1(0,1) : f(1) = 0 \right\}, \\ H^2_*(0,1) &= H^2(0,1) \cap H^1_*(0,1), \\ \tilde{H}^2_\star(0,1) &= H^2(0,1) \cap H^1_\star(0,1) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H} = H^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \times \tilde{H}^1_\star(0,1) \times L^2(0,1) \times \tilde{H}^1_\star(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$$

muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \left(\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} &= k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{\omega})dx + k_0\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})dx + \rho_1\int_0^1 u\tilde{u}dx \\ &\quad + b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \rho_2\int_0^1 v\tilde{v}dx + \rho_1\int_0^1 w\tilde{w}dx + \rho_3\int_0^1 \theta\tilde{\theta}dx + \tau_0\int_0^1 q\tilde{q}dx. \end{aligned}$$

Alors le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donné par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in \mathcal{H} \backslash \ \varphi \in H_*^2(0,1), \ \psi, \omega \in \tilde{H}_\star^2(0,1), \\ u, \theta \in H_*^1(0,1), v, w, q \in \tilde{H}_\star^1(0,1), \ \varphi_x(1) = \omega_x(0) = \psi_x(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

On montre maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone. A cet effet, on a besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 58** *L'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone et satisfait, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$,*

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx \geq 0. \tag{6.8}$$

**Démonstration.** Dans ce qui suit, on montrons que $\mathcal{A}$ est monote (i.e. $-\mathcal{A}$ est dissipatif). Pour tout $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, et en utilisant le produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^1 (u_x + v + lw)(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k_0 \int_0^1 (w_x - lu)(\omega_x - l\varphi)\, dx \\ &+ \rho_1 \int_0^1 \left( -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \right) u dx - b \int_0^1 v_x \psi_x dx \\ &+ \rho_2 \int_0^1 \left( -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) + \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \right) v dx \\ &+ \rho_1 \int_0^1 \left( -\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \right) w dx \\ &+ \rho_3 \int_0^1 \left( \frac{1}{\rho_3} q_x + \frac{\gamma}{\rho_3} v_x \right) \theta dx + \tau_0 \int_0^1 \left( \frac{\beta}{\tau_0} q + \frac{1}{\tau_0}\theta_x \right) q dx. \end{aligned}$$

Après la simplification et grâce à la formule d'intégration par parties, on obtient

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx \geq 0,$$

d'où (6.8). ■

**Lemme 59** *L'opérateur $\mathcal{A} + I$ est surjectif.*

**Démonstration.** Soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8)^T \in \mathcal{H}$, Il faut trouver $\Phi \in D(\mathcal{A})$ vérifiant

$$(\mathcal{A} + I)\,\Phi = G. \tag{6.9}$$

L'équation (6.9) est équivalente à

$$\begin{cases} -u + \varphi = g_1, \\ -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l\,(\omega_x - l\varphi) + \rho_1 u = \rho_1 g_2, \\ -v + \psi = g_3, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4, \\ -w + \omega = g_5, \\ -k_0\,(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) + \rho_1 w = \rho_1 g_6, \\ q_x + \gamma v_x + \rho_3\theta = \rho_3 g_7, \\ (\beta + \tau_0)\,q + \theta_x = \tau_0 g_8, \end{cases} \tag{6.10}$$

Supposons que $\varphi, \psi, \omega$ et $q$ sont trouvés avec la régularité appropriée, alors, de $(6.10)_1$, $(6.10)_3$, $(6.10)_5$ et $(6.10)_8$, on trouve

$$u = \varphi - g_1 \in H^1_*(0,1), \tag{6.11}$$

$$v = \psi - g_3 \in \tilde{H}^1_\star(0,1), \tag{6.12}$$

$$w = \omega - g_5, \in \tilde{H}^1_\star(0,1), \tag{6.13}$$

$$\theta_x = -(\beta + \tau_0)\,q + \tau_0 g_8 \in L^2(0,1). \tag{6.14}$$

A partir de (6.14), on trouve

$$\theta(x,t) = -(\beta + \tau_0)\int_0^x q(y)\,dy + \tau_0\int_0^x g_8(y)\,dy, \tag{6.15}$$

et $\theta(0,t)=0$. A l'aide de $(6.11)-(6.15)$, il est facile de montrer que $\varphi$, $\psi$, $\omega$ et $q$ satisfont

$$\begin{cases} -k(\varphi_x+\psi+l\omega)_x-k_0l\left(\omega_x-l\varphi\right)+\rho_1\varphi=\rho_1\left(g_2+g_1\right), \\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+l\omega)+\rho_2\psi-\gamma\left(\beta+\tau_0\right)q=\rho_2\left(g_4+g_3\right)-\tau_0\gamma g_8, \\ -k_0\left(\omega_x-l\varphi\right)_x+kl(\varphi_x+\psi+l\omega)+\rho_1\omega=\rho_1\left(g_6+g_5\right), \\ -q_x+\rho_3\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^x q\left(y\right)dy-\gamma\psi_x=-\rho_3\left(g_7-\tau_0\int_0^x g_8\left(y\right)dy\right)-\gamma g_{3x}. \end{cases} \tag{6.16}$$

La formulation variationnelle associée à (6.16) prend la forme

$$B\left(\left(\varphi,\psi,\omega,q\right),\left(\varphi_1,\psi_1,\omega_1,q_1\right)\right)=F\left(\varphi_1,\psi_1,\omega_1,q_1\right), \tag{6.17}$$

où $B$ est une forme bilinéaire de $\left[H^1_*\left(0,1\right)\times\tilde{H}^1_\star\left(0,1\right)\times\tilde{H}^1_\star\left(0,1\right)\times L^2\left(0,1\right)\right]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} B\left(\left(\varphi,\psi,\omega,q\right),\left(\varphi_1,\psi_1,\omega_1,q_1\right)\right) &= k\int_0^1\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)\left(\varphi_{1x}+\psi_1+l\omega_1\right)dx \\ &\quad +k_0\int_0^1\left(\omega_x-l\varphi\right)\left(\omega_{1x}-l\varphi_1\right)dx \\ &\quad +\rho_1\int_0^1\varphi\varphi_1dx+\rho_2\int_0^1\psi\psi_1dx+\rho_1\int_0^1\omega\omega_1dx \\ &\quad +b\int_0^1\psi_x\psi_{1x}dx-\gamma\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1 q\psi_1dx \\ &\quad +\gamma\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1\psi q_1dx+\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1 qq_1dx \\ &\quad +\rho_3\left(\beta+\tau_0\right)^2\int_0^1\left(\int_0^x q\left(y\right)dy\right)\left(\int_0^x q_1\left(y\right)dy\right)dx \end{aligned}$$

et $F$ est une application linèaire de $H^1_*\left(0,1\right)\times\tilde{H}^1_\star\left(0,1\right)\times\tilde{H}^1_\star\left(0,1\right)\times L^2\left(0,1\right)$ dans $\mathbb{R}$

définie par :

$$\begin{aligned} F\left(\varphi_1,\psi_1,\omega_1,q_1\right) &= \rho_1\int_0^1\left(g_2+g_1\right)\varphi_1dx+\rho_2\int_0^1\left(g_4+g_3\right)\psi_1dx \quad -\tau_0\gamma\int_0^1 g_8\psi_1dx \\ &+\rho_1\int_0^1\left(g_6+g_5\right)\omega_1dx+\gamma\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1 g_3q_1dx \\ &-\rho_3\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1\left(g_7-\tau_0\int_0^x g_8\left(y\right)dy\right)\left(\int_0^x q_1\left(y\right)dy\right)dx. \end{aligned}$$

On pose $V=H_*^1\left(0,1\right)\times\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right)\times\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right)\times L^2\left(0,1\right)$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \left(\left(\varphi,\psi,\omega,q\right),\left(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\omega},\tilde{q}\right)\right)_V &= k\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{\omega})dx \\ &+k_0\int_0^1\left(\omega_x-l\varphi\right)\left(\tilde{\omega}_x-l\tilde{\varphi}\right)dx \\ &+b\int_0^1\psi_x\tilde{\psi}_xdx+\tau_0\int_0^1 q\tilde{q}dx, \end{aligned}$$

et la norme associée

$$\|(\varphi,\psi,\omega,q)\|_V^2=k\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)^2dx+k_0\int_0^1\left(\omega_x-l\varphi\right)^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx+\tau_0\int_0^1 q^2dx.$$

Cette norme est équivalente à la norme

$$\|(\varphi,\psi,\omega,q)\|^2=\|(\varphi_x+\psi+l\omega)\|_2^2+\|(\omega_x-l\varphi)\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2+\|q\|_2^2.$$

Pour résoudre le problème (6.17), il suffit de montrer que $B$ est continue et coercive, et que $F$ est continue. En utilisant le fait que

$$\int_0^1(\varphi_x^2+\psi_x^2+\omega_x^2)dx\leq c\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)^2+\left(\omega_x-l\varphi\right)^2+\psi_x^2dx,$$

on voit que les formes $B$ et $F$ sont bornées. De plus, pour certain $c > 0$, on a

$$\begin{aligned} B\left(\left(\varphi,\psi,\omega,q\right),\left(\varphi,\psi,\omega,q\right)\right) &= k\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)^2dx+k_0\int_0^1\left(\omega_x-l\varphi\right)^2dx \\ &\quad +\rho_1\int_0^1\varphi^2dx+\rho_2\int_0^1\psi^2dx+\rho_1\int_0^1\omega^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx \\ &\quad +\left(\beta+\tau_0\right)\int_0^1 q^2dx+\rho_3\left(\beta+\tau_0\right)^2\int_0^1\left(\int_0^x q\left(y\right)dy\right)^2dx \\ &\geq c\left\|\left(\varphi,\psi,\omega,q\right)\right\|_V^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le système (6.16) admet une solution unique

$$\varphi\in H_*^1\left(0,1\right),\ \psi\in\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right),\ \psi\in\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right)\ \text{ et } q\in L^2\left(0,1\right).$$

En remplaçant $\varphi$ dans (6.11), $\psi$ dans (6.12), $\omega$ dans (6.13) et $q$ dans (6.14), on obtient

$$u\in H_*^1\left(0,1\right),\ v\in\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right),\ v\in\tilde{H}_\star^1\left(0,1\right)\ \text{ et } \theta\in H_*^1\left(0,1\right).$$

En outre, si $(\psi_1,\omega_1,q_1)=(0,0,0)$, alors, pour tout $\varphi_1\in H_*^1\left(0,1\right)$,

$$k\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)\varphi_{1x}dx=-\int_0^1\left[-k_0l\left(\omega_x-l\varphi\right)+\rho_1\varphi-\rho_1\left(g_2+g_1\right)\right]\varphi_1dx. \qquad (6.18)$$

Ceci implique que

$$-k\varphi_{xx}=k\psi_x+\left(k+k_0\right)l\omega_x-\left(k_0l^2+\rho_1\right)\varphi+\rho_1\left(g_2+g_1\right)\in L^2\left(0,1\right).$$

Par conséquent, par la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il en résulte que

$$\varphi\in H_*^2\left(0,1\right).$$

Par ailleurs, (6.18) est également vrai pour tout $\phi\in C^1\left([0,1]\right)$ vérifiant $\phi\left(0\right)=0$. En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\varphi_x(1)\,\phi(1) = 0,\ \forall \phi \in C^1([0,1]) \text{ vérifiant } \phi(0) = 0.$$

D'où

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De la même façon, si $(\varphi_1, \omega_1, q_1) = (0,0,0)$, alors

$$\psi \in \tilde{H}^2_\star(0,1) \text{ et } \psi_x(0) = 0.$$

et si $(\varphi_1, \psi_1, q_1) = (0,0,0)$, on obtient

$$\omega \in \tilde{H}^2_\star(0,1) \text{ et } \omega_x(0) = 0.$$

De même, si $(\varphi_1, \psi_1, \omega_1) = (0,0)$, alors

$$q \in \tilde{H}^1_\star(0,1).$$

Enfin, l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ tel que (6.10) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximale. ■

Finalement, en utilisant le Lemme 58 et le Lemme 59, on conclut que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone. Ainsi, par le théorème de Lumer-Phillips, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 60** *Soit $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe une solution unique $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème* (6.7)*. De plus, si $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.*

## 6.3 Décroissance exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle de l'énergie de la solution du système (6.3), (6.4) et (6.5) en utilisant la technique des multiplicateurs. A cet effet, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 61** *Soit $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par :*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + \rho_1\omega_t^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)^2\right] dx. \end{aligned} \tag{6.19}$$

*satisfait, pour toute solution du système* (6.3), (6.4) *et* (6.5),

$$E'(t) = -\beta\int_0^1 q^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.20}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_1$ par $\varphi_t$ et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - k\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t\left(\omega_x - l\varphi\right)dx = 0,$$

en intégrant par parties le terme $\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx$, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - k\left[\varphi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)\right]_0^1 + k\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t\left(\omega_x - l\varphi\right)dx = 0.$$

Les conditions au bord permettent d'écrire la dernière égalité sous la forme

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t\left(\omega_x - l\varphi\right)dx = 0. \tag{6.21}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(6.3)_2$ par $\psi_t$ et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx + k \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0,$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_{xt} \psi_x dx + k \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0;$$

autrement dit

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0. \tag{6.22}$$

En multipliant l'équation $(6.3)_3$ par $\omega_t$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \omega_t \omega_{tt} dx - k_0 \int_0^1 \omega_t \left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx + kl \int_0^1 \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0.$$

En utilisant encore l'intégration par parties avec les conditions au bord appliquées cette fois ci au terme $\int_0^1 \omega_t \left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx$, on remarque que

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + k_0 \int_0^1 \omega_{xt} \left(\omega_x - l\varphi\right) dx + kl \int_0^1 \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0. \tag{6.23}$$

De même, en multipliant l'équation $(6.3)_4$ par $\theta$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^1 \theta \theta_t dx + \int_0^1 \theta q_x dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_{xt} dx = 0,$$

la formule d'intégration par parties et les conditions au bord impliquent

$$\frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta q_x dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0. \tag{6.24}$$

En multipliant l'équation $(6.3)_5$ par $q$ et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\tau_0 \int_0^1 q q_t dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q\theta_x dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties le terme $\int_0^1 q\theta_x dx$, on déduit que

$$\int_0^1 q_x \theta dx = \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx. \tag{6.25}$$

En remplaçant (6.25) dans (6.24), on obtient

$$\gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx,$$

puis, on remplace la dérnière égalité dans (6.22), on trouve

$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ & + \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Finalement, en additionnant (6.21), (6.23) et (6.26), on arrive à

$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_t (\omega_x - l\varphi) dx \\ & + \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+b\psi_x^2+\rho_1\omega_t^2+\rho_3\theta^2+\tau_0 q^2\right]dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left[k(\varphi_x+\psi+l\omega)^2+k_0\left(\omega_x-l\varphi\right)^2\right]dx \\
&= -\beta\int_0^1 q^2dx,
\end{aligned}$$

d'où (6.20). ■

**Lemme 62** *Soit* $(\varphi,\psi,\theta,\omega,q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_1(t)=-\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi+\omega_t\omega dx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_1>0$,

$$\begin{aligned}
F_1'(t) &\le -\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2dx-\rho_1\int_0^1 \omega_t^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)^2dx \\
&\quad +\varepsilon_1\int_0^1 \psi_x^2dx+k_0\int_0^1\left(\omega_x-l\varphi\right)^2dx. \qquad (6.27)
\end{aligned}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_1$ par $\varphi$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \varphi\varphi_{tt}dx-k\int_0^1 \varphi(\varphi_x+\psi+l\omega)_xdx-k_0l\int_0^1\varphi\left(\omega_x-l\varphi\right)dx=0,$$

puis, en intégrant par parties le terme $\int_0^1 \varphi(\varphi_x+\psi+l\omega)_xdx$, on trouve

$$\rho_1\int_0^1 \varphi\varphi_{tt}dx-k\left[\varphi(\varphi_x+\psi+l\omega)\right]_0^1+k\int_0^1 \varphi_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx-k_0l\int_0^1\varphi\left(\omega_x-l\varphi\right)dx=0.$$

On revient aux conditions au bord qui impliquent que

$$\rho_1\int_0^1 \varphi\varphi_{tt}dx+k\int_0^1 \varphi_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx-k_0l\int_0^1\varphi\left(\omega_x-l\varphi\right)dx=0. \qquad (6.28)$$

D'autre part, en multipliant l'équation $(6.3)_3$ par $\omega$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \omega\omega_{tt} dx - k_0 \int_0^1 \omega\left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0,$$

d'où, on conclut, à l'aide de la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord,

$$\rho_1 \int_0^1 \omega\omega_{tt} dx + k_0 \int_0^1 \omega_x\left(\omega_x - l\varphi\right) dx + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0. \tag{6.29}$$

En utilisant les équations (6.28) et (6.29), on a

$$\begin{aligned} F_1^{'}(t) &= -\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi\varphi_t dx - \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega\omega_t dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + l\omega\right)^2 dx \\ &\quad -k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + k_0 \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{6.30}$$

En appliquant alors l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} F_1^{'}(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \left(k + \frac{k^2}{4\varepsilon_1}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad +\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Ceci donne (6.27). ■

**Lemme 63** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_2(t) = -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s,t)\, ds dx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\gamma}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + c\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{6.31}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_4$ par $\int_0^x \psi_t(s,t)\,ds$ et en intégrant sur $(0,1)$, on voit que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx + \int_0^1 q_x \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx + \gamma \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx = 0,$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx - \int_0^1 q\psi_t dx - \gamma \int_0^1 \psi_t^2 dx = 0.$$

D'après l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} & \rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx \\ = & \ \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_{tt}(s,t)\,dsdx + \rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx \\ = & \ \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_{tt}(s,t)\,dsdx + \int_0^1 q\psi_t dx + \gamma \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Dans (6.32), on remplace $\psi_{tt}$ par $\frac{1}{\rho_2}\left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x\right]$, il vient à écrir

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s,t)\,dsdx &= -\frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta \int_0^x \left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x\right](s,t)\,dsdx \\ &\quad -\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &= -\frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\psi_x dx + \frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) dsdx \\ &\quad + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} F_2^{'}(t) \quad \leq \quad & \frac{1}{8\varepsilon_2}\left(\frac{b\rho_3}{\gamma}\right)^2\int_0^1 \theta^2 dx + 2\varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_2}\left(\frac{k\rho_3}{\gamma}\right)^2\int_0^1 \theta^2 dx \\ & +\varepsilon_2\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx + \rho_3\int_0^1 \theta^2 dx \\ & +\frac{\rho_2}{2\gamma^2}\int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} F_2^{'}(t) \quad \leq \quad & -\frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx \\ & +\frac{\rho_2}{2\gamma^2}\int_0^1 q^2 dx + \left[\rho_3 + \left(\frac{b^2\rho_3^2}{8\gamma^2} + \frac{k^2\rho_3^2}{4\gamma^2}\right)\frac{1}{\varepsilon_2}\right]\int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned}$$

Ceci donne (6.31). ■

**Lemme 64** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_3(t) = \rho_2\int_0^1 \psi\psi_t dx$$

*vérifie*

$$\begin{aligned} F_3^{'}(t) \quad \leq \quad & -\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & +\frac{k^2}{b}\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx + c\int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned} \tag{6.33}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_2$ par $\psi$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_2\int_0^1 \psi\psi_{tt} dx - b\int_0^1 \psi\psi_{xx} dx + k\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi+l\omega) dx + \gamma\int_0^1 \psi\theta_x dx = 0,$$

d'après la formule d'intégration par parties et sous les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt}dx + b\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - \gamma\int_0^1 \psi_x\theta dx = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\psi_t dx &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt}dx \\
&= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad -k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \gamma\int_0^1 \psi_x\theta dx. \qquad (6.34)
\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, il résulte de (6.34)

$$\begin{aligned}
\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\psi_t dx &\leq -\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\gamma^2}{b}\int_0^1 \theta^2 dx \\
&\quad +\frac{k^2}{b}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx,
\end{aligned}$$

d'où (6.33). ■

**Lemme 65** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_4(t) = \tau_0\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s,t)\, ds dx$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon_4 > 0$,

$$F_4'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_0^1 q^2 dx. \qquad (6.35)$$

**Démonstration.** En intégrant d'abors l'équation $(6.3)_5$ sur $(0,x) \subset (0,1)$, puis en intégrant sur $(0,1)$ après la multiplication par $\theta$, on trouve

$$\tau_0 \int_0^1 \theta \int_0^x q_t ds dx + \beta\int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx + \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x ds dx = 0,$$

alors

$$\tau_0 \int_0^1 \theta \int_0^x q_t ds dx + \beta \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx + \int_0^1 \theta^2 dx = 0.$$

Donc on déduit que

$$\tau_0 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx = \tau_0 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx - \beta \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx - \int_0^1 \theta^2 dx. \tag{6.36}$$

D'autre part, en multipliant l'équation $(6.3)_4$ par $\int_0^x q ds$, et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx + \int_0^1 q_x \int_0^x q ds dx + \gamma \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x q ds dx = 0,$$

à l'aide de l'intégration par parties, il résulte que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx - \int_0^1 q^2 dx - \gamma \int_0^1 \psi_t q dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q ds dx = \int_0^1 q^2 dx + \gamma \int_0^1 \psi_t q dx. \tag{6.37}$$

En remplaçant (6.37) dans (6.36), on trouve

$$\begin{aligned} \tau_0 \rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx &= \tau_0 \int_0^1 q^2 dx + \tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_t q dx \\ &\quad - \beta \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx - \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Il en résulte, en appliquant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \tau_0 \rho_3 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx &\leq -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau_0 \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\beta^2 \rho_3}{2} \int_0^1 q^2 dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
F_4'(t) &= \tau_0\rho_3 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx \\
&\leq -\frac{\rho_3}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
&\quad + \left(\tau_0 + \frac{\beta^2\rho_3}{2} + \frac{\tau_0^2\gamma^2}{4\varepsilon_4}\right)\int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned}$$

■

**Lemme 66** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors, sous la condition* $k = k_0$, *la fonctionnelle*

$$F_5(t) = -\rho_1 \int_0^1 \left[\varphi_t(\omega_x - l\varphi) + \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)\right] dx$$

*vérifie*

$$\begin{aligned}
F_5'(t) &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2}\int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&\quad + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_1$ par $(\omega_x - l\varphi)$ et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx - k\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx = 0.$$

D'après la formule d'intégration par parties et sous les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx + k\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx = 0,$$

et donc on arrive à

$$
\begin{aligned}
-\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t \left(\omega_x - l\varphi\right) dx &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\omega_x - l\varphi\right)_t dx - k_0 l \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx \\
&\quad + k \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)_x \left(\varphi_x + \psi + l\omega\right) dx. \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

D'autre part, en multipliant l'équation $(6.3)_3$ par $(\varphi_x + \psi + l\omega)$ et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient

$$
\rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_{tt} dx - k_0 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx = 0,
$$

alors

$$
\begin{aligned}
-\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_t dx &= -\rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_t \omega_t dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
&\quad - k_0 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx. \qquad (6.41)
\end{aligned}
$$

En additionnant (6.40) et (6.41) et en axploitant la condition $k = k_0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_5'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\omega_x - l\varphi\right)_t dx - \rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_t \omega_t dx \\
&\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
F_5'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \omega_{xt} dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_{xt} \omega_t dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \\
&\quad - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx.
\end{aligned}
$$

En remarquant que $\int_0^1 \varphi_{xt}\omega_t dx = -\int_0^1 \varphi_t \omega_{xt} dx$, on déduit que

$$\begin{aligned} F_5^{'}(t) &= \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \\ &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx, \end{aligned}$$

et par conséquant, d'après l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} F_5^{'}(t) &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité coincide avec (6.39). ■

**Lemme 67** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors, sous la condition* $k = k_0$, *la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_6(t) &= -\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left( \int_0^x \omega_t ds \right) dx \\ &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \end{aligned}$$

*vérifie*

$$\begin{aligned} F_6^{'}(t) &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{6.42}$$

**Démonstration.** On a

$$
\begin{aligned}
F_6^{'}(t) &= -\rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)\left(\int_0^x \omega_t ds\right)dx - \rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+l\omega)ds\right)dx \\
&= -\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_t\left(\int_0^x \omega_t ds\right)dx - \rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)\left(\int_0^x \omega_{tt} ds\right)dx \\
&\quad -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+l\omega)_t ds\right)dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+l\omega)ds\right)dx.
\end{aligned}
$$

On remplace $-\rho_1\omega_{tt}$ par $-k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl(\varphi_x+\psi+l\omega)$ et $-\rho_1\varphi_{tt}$ par $-k(\varphi_x+\psi+l\omega)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right)$, on arrive à

$$
\begin{aligned}
F_6^{'}(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_{xt}\left(\int_0^x \omega_t ds\right)dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x \varphi_{xt} ds\right)dx \\
&\quad -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x \psi_t ds\right)dx \\
&\quad -k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)\left(\int_0^x (\omega_x - l\varphi)_x ds\right)dx \\
&\quad -k \int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)_x\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+l\omega)ds\right)dx.
\end{aligned}
$$

On revient aux conditions au bord qui impliquent

$$
\begin{aligned}
F_6^{'}(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_{xt}\left(\int_0^x \omega_t ds\right)dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&\quad -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x \psi_t ds\right)dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
&\quad -k \int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)_x\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+l\omega)ds\right)dx.
\end{aligned}
$$

Une intégration par parties avec les conditions au bord donne

$$
\begin{aligned}
F_6^{'}(t) &= \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
&\quad +k \int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x \psi_t ds\right)dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant alors l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$\begin{aligned} F_6'(t) &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ &+k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

d'où (6.42). ■

**Lemme 68** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *Alors sous la condition* $k = k_0$, *la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} &F_7(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx \\ &+\frac{\rho_3}{\gamma}\chi \int_0^1 \theta\varphi_t dx - \frac{\chi}{\gamma} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\ &-\frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi\psi_t dx + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi\omega_t dx \end{aligned}$$

*vérifie, pour tout* $\varepsilon, \varepsilon_6, \varepsilon_7 > 0$,

$$\begin{aligned} F_7'(t) &\leq \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &+\varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &+\varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+c\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{6.43}$$

**Démonstration.** En multipliant l'équation $(6.3)_2$ par $(\varphi_x + \psi + l\omega)$ et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\ &+k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx. \end{aligned}$$

D'après les conditions au bord et l' intégration par parties, on voit que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx \\ &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx \\ &= -b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad -\gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(6.3)_1$ par $\psi_x$ et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx - k \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k_0 l \int_0^1 \psi_x \left(\omega_x - l\varphi\right) dx = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx &= \rho_1 \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + \rho_1 \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx \\ &= \rho_1 \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + k \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx + k_0 l \int_0^1 \psi_x \left(\omega_x - l\varphi\right) dx \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{b\rho_1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx &= \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx \\ &\quad + bl \int_0^1 \psi_x \left(\omega_x - l\varphi\right) dx. \end{aligned} \tag{6.45}$$

En additionnant les égalités (6.44) et (6.45), on obtient

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+l\omega)dx + \frac{b\rho_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx \\
= \ & -k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx - \gamma\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx \\
& +\rho_2\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+l\omega)_t dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx \\
& +bl\int_0^1 \psi_x\left(\omega_x - l\varphi\right)dx,
\end{aligned}$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on conclut que

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+l\omega)dx + \frac{b\rho_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx \\
= \ & -k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx - \gamma\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx \\
& +\rho_2\int_0^1 \psi_t(\psi+l\omega)_t dx + b\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx \\
& +bl\int_0^1 \psi_x\left(\omega_x - l\varphi\right)dx. \qquad (6.46)
\end{aligned}$$

De $(6.3)_4$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= \frac{1}{\gamma}\int_0^1 \left[-\rho_3\theta_t - q_x\right]\varphi_t dx \\
&= -\frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta_t\varphi_t dx - \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q_x\varphi_t dx,
\end{aligned}$$

et d'après la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on remarque que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= -\frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q\varphi_{xt} dx \\
&= -\frac{\rho_3}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\varphi_t dx + \frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q\varphi_{xt} dx,
\end{aligned}$$

et par conséquant,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= -\frac{\rho_3}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\varphi_t dx + \frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\varphi_{tt}dx \\ &+\frac{1}{\gamma}\int_0^1 q(\varphi_x+\psi+l\omega)_t dx - \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q(\psi+l\omega)_t dx.\end{aligned} \tag{6.47}$$

En multipliant l'équation $(6.3)_1$ par $\theta$ et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \theta\varphi_{tt}dx - k\int_0^1 \theta(\varphi_x+\psi+l\omega)_x dx - k_0 l\int_0^1 \theta\left(\omega_x - l\varphi\right)dx = 0.$$

En intégrant par parties et utilisant les conditions au bord, on déduit que

$$\int_0^1 \theta\varphi_{tt}dx = -\frac{k}{\rho_1}\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx + \frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^1 \theta\left(\omega_x - l\varphi\right)dx. \tag{6.48}$$

En utilisant l'équation $(6.3)_5$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)_t dx &= \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx - \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q_t\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx - \frac{1}{\gamma\tau_0}\int_0^1 \left(-\beta q - \theta_x\right)\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx + \frac{\beta}{\gamma\tau_0}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx \\ &+\frac{1}{\gamma\tau_0}\int_0^1 \theta_x\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx.\end{aligned} \tag{6.49}$$

En remplaçant (6.48) et (6.49) dans (6.47), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= -\frac{\rho_3}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\varphi_t dx + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx \\ &+\left(\frac{1}{\gamma\tau_0} - \frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1}\right)\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx \\ &+\frac{\beta}{\gamma\tau_0}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+l\omega\right)dx \\ &+\frac{\rho_3 k_0 l}{\gamma\rho_1}\int_0^1 \theta\left(\omega_x - l\varphi\right)dx - \frac{1}{\gamma}\int_0^1 q(\psi+l\omega)_t dx.\end{aligned} \tag{6.50}$$

En remplaçant (6.50) dans (6.46), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{b\rho_1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx \\
= \; & -\frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \varphi_t dx + \frac{b}{\gamma} \chi \frac{d}{dt} \int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + l\omega\right) dx \\
& + \frac{b}{\gamma \tau_0} \left[ \left(1 - \frac{\tau_0 \rho_3 k}{\rho_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{\gamma^2 \tau_0}{b} \right] \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
& - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\psi + l\omega)_t dx \\
& + \frac{b\beta}{\gamma \tau_0} \chi \int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + l\omega\right) dx + \frac{b\rho_3 k_0 l}{\gamma \rho_1} \chi \int_0^1 \theta \left(\omega_x - l\varphi\right) dx \\
& - \frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx + bl \int_0^1 \psi_x \left(\omega_x - l\varphi\right) dx.
\end{aligned}
$$

D'autre part, en utilisant l'intégration par parties et les conditions au bord et prenant en considération $(6.3)_3$, on a

$$
\begin{aligned}
bl \int_0^1 \psi_x \left(\omega_x - l\varphi\right) dx &= -bl \int_0^1 \psi \left(\omega_x - l\varphi\right)_x dx \\
&= -\frac{bl}{k_0} \int_0^1 \psi \left[\rho_1 \omega_{tt} + kl(\varphi_x + \psi + l\omega)\right] dx \\
&= -\frac{bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi \left[k(\varphi_x + \psi + l\omega)\right] dx \\
&\quad -\frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_{tt} dx.
\end{aligned}
$$

De $(6.3)_2$ , on déduit que

$$\begin{aligned}
bl\int_0^1 \psi_x\left(\omega_x - l\varphi\right)dx &= \frac{bl^2}{k_0}\int_0^1 \psi\left[\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \gamma\theta_x\right]dx \\
&\quad -\frac{\rho_1 bl}{k_0}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\omega_t dx + \frac{\rho_1 bl}{k_0}\int_0^1 \psi_t\omega_t dx \\
&= \frac{\rho_2 bl^2}{k_0}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\psi_t dx - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0}\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
&\quad +\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x\theta dx \\
&\quad -\frac{\rho_1 bl}{k_0}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\omega_t dx + \frac{\rho_1 bl}{k_0}\int_0^1 \psi_t\omega_t dx.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
F_7'(t) &= \rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \frac{b\rho_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx \\
&\quad +\frac{b\rho_3}{\gamma}\chi\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\varphi_t dx - \frac{b}{\gamma}\chi\frac{d}{dt}\int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + l\omega\right)dx \\
&\quad -\frac{\rho_2 bl^2}{k_0}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\psi_t dx + \frac{\rho_1 bl}{k_0}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi\omega_t dx \\
&= \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi\int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
&\quad +\rho_2\int_0^1 \psi_t(\psi + l\omega)_t dx + \frac{b\beta}{\gamma\tau_0}\chi\int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + l\omega\right)dx \\
&\quad +\frac{b\rho_3 k_0 l}{\gamma\rho_1}\chi\int_0^1 \theta\left(\omega_x - l\varphi\right)dx - \frac{b}{\gamma}\chi\int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx \\
&\quad -\frac{\rho_2 bl^2}{k_0}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x\theta dx \\
&\quad +\frac{\rho_1 bl}{k_0}\int_0^1 \psi_t\omega_t dx. \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

Donc, à l'aide de l'inégalité de Young, il en résulte que

$$\begin{aligned}
F_7'(t) \leq\ & \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+l\omega)dx-\frac{k}{2}\int_0^1(\varphi_x+\psi+l\omega)^2dx \\
&+\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1\psi_x^2dx+\varepsilon\int_0^1\psi_x^2dx+\varepsilon_6\int_0^1\omega_t^2dx+\varepsilon_7\int_0^1(\omega_x-l\varphi)^2\,dx \\
&+\left(\rho_2+\frac{|\chi|}{2\gamma}-\frac{\rho_2bl^2}{k_0}+\frac{3\left(\rho_1bl\right)^2}{4k_0^2\varepsilon_6}+\frac{3\rho_2^2l^2}{4\varepsilon_6}\right)\int_0^1\psi_t^2dx \\
&+\left(\frac{\left(b\rho_3k_0l\chi\right)^2}{4\left(\gamma\rho_1\right)^2\varepsilon_7}+\frac{(\gamma bl^2)^2}{4k_0^2\varepsilon}\right)\int_0^1\theta^2dx \\
&+\left(\frac{b^2}{2\gamma}|\chi|+\frac{\left(b\beta\chi\right)^2}{2\left(\gamma\tau_0\right)^2k}+\frac{3\left(\frac{b}{\gamma}\chi\right)^2}{4\varepsilon_6}\right)\int_0^1q^2dx.
\end{aligned}$$

En simplifiant la dérnière inégalité, on obtient alors le résultat souhaité. ■

Maintenant, on introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}=NE+F_1+N_2F_2+N_3F_3+N_4F_4+\frac{1}{l}F_5+F_6+N_7F_7, \tag{6.52}$$

où $N, N_2, N_3, N_4$ et $N_7$ sont des constantes strictement positives à déterminer convenablement.

**Lemme 69** *Pour $N>0$ assez grand, il existe $\alpha_1,\alpha_2>0$ tels que*

$$\alpha_1E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq\alpha_2E(t)\,,\ \ \forall t\geq 0. \tag{6.53}$$

*Autrement dit, les fonctions $E$ et $\mathcal{L}$ sont équivalentes.*

Maintenant, on est prêt à citer et de prouver le résultat principal de cette section.

**Théorème 70** *Soit $(\varphi,\psi,\theta,\omega,q)$ une solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *On suppose que $\xi=0$ et $k=k_0$. Alors, pour $l$ assez petit, le problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5) *est exponentiellement stable ; c'est à dire, il existe deux constantes strictement positives $R$ et $r$ telles que la solution du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5) *vérifie*

$$E(t) \leq Re^{-rt}, \ \forall t \geq 0.$$

**Démonstration.** (**du Théorème** 70)

En combinant (6.20), (6.27), (6.31), (6.33), (6.35), (6.39), (6.42) et (6.43), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -\left[\beta N - cN_2 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)N_4 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_6}\right)N_7\right]\int_0^1 q^2 dx \\
& -\left[\frac{\rho_1}{2}+\rho_1-\rho_1\right]\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{\gamma}{2}N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_6}\right)N_7 - \frac{\rho_1}{2} - c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& -\left[\frac{b}{2}N_3 - \frac{b^2 l^2}{k_0}N_7 - \varepsilon N_7 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 N_2\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& -\left[\frac{\rho_3}{2}N_4 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)N_2 - cN_3 - c\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)N_7\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\
& -\left[\rho_1 - \rho_1 + \frac{\rho_1}{2} - \varepsilon_6 N_7\right]\int_0^1 \omega_t^2 dx \\
& -\left[k_0 - k_0 + k_0 - \varepsilon_7 N_7\right]\int_0^1 \left(\omega_x - l\varphi\right)^2 dx \\
& -\left[\frac{k}{2}N_7 - \frac{k^2}{b}N_3 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - N_2\varepsilon_2 - k - c\right]\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2 dx.
\end{aligned}$$

A ce point, on prend d'abord $\varepsilon_6 = \frac{\rho_1}{4N_7}$, $\varepsilon_7 = \frac{k_0}{2N_7}$, $\varepsilon = \frac{1}{N_7}$ et $N_3 = \frac{b}{4k}N_7$, et on peut fixer $\varepsilon_1$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\; & -\frac{\rho_1}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_1}{4}\int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{k_0}{2}\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[\left(\frac{1}{2} - 4l^2\right) bN_3 - 2\varepsilon_2 N_2 - c\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{k}{4}N_7 - N_2\varepsilon_2 - c\right]\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
& - \left[\frac{\gamma}{2}N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - cN_7 - c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_3}{2}N_4 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)N_2 - cN_3 - c\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[\beta N - cN_2 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)N_4 - cN_7\right]\int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned}$$

Maintenant, on choisit $\varepsilon_2 = \frac{1}{N_2}$, après on fixe $N_7$ tel que

$$\frac{k}{4}N_7 - N_2\varepsilon_2 - c > 0.$$

Pour $l$ assez petitet, on peut fixer $N_3$ tel que

$$\left(\frac{1}{2} - 4l^2\right) bN_3 - 2\varepsilon_2 N_2 - c > 0.$$

En choisissant $\varepsilon_4 = \frac{1}{N_4}$ et $N_2$ assez grand, on déduit

$$\frac{\gamma}{2}N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - cN_7 - c > 0.$$

En plus, on prend $N_4$ assez grand tel que

$$\frac{\rho_3}{2}N_4 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)N_2 - cN_3 - c > 0.$$

Finalement, on choisit $N$ assez grand tel que

$$\beta N - cN_2 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) N_4 - cN_7 > 0$$

et (6.53) reste vrai. Par conséquent, pour un certain $\rho > 0$,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\rho E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{6.54}$$

Combinons (6.54) et (6.53) pour obtenir

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\rho E(t) \leq -\rho\alpha_2 \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{6.55}$$

Une intégration simple de (6.55) mène à

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\rho\alpha_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.56}$$

Alors (6.56) et (6.53) impliquent que

$$E(t) \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{\alpha_1} e^{-\rho\alpha_2 t} = Re^{-rt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration. ■

## 6.4 L'absence de stabilité exponentielle

En utilisant le Théorème 1, on montre l'absence de stabilité exponentielle grâce au procédé suivant : on montre qu'il existe une suite de valeurs réelles $\lambda_\mu$ telle que

$$\left\| (i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \longrightarrow +\infty;$$

c'est-à-dire prouver qu'il existe une suite de vecteurs $F_\mu \in \mathcal{H}$ et une suite de nombres

$\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, avec $\|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ telles que

$$\left\|(i\lambda_\mu I - \mathcal{A})^{-1} F_\mu\right\|_{\mathcal{H}} = \|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow +\infty,$$

où

$$i\lambda_\mu \Phi_\mu - \mathcal{A}\Phi_\mu = F_\mu.$$

Maintenant, on considère le système résolvant

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - u & = f_1, \\ i\lambda\rho_1 u - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) & = \rho_1 f_2, \\ i\lambda\psi - v & = f_3, \\ i\lambda\rho_2 v - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x & = \rho_2 f_4, \\ i\lambda\omega - w & = f_5, \\ i\lambda\rho_1 w - k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) & = \rho_1 f_6, \\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + \gamma v_x & = \rho_3 f_7, \\ i\lambda\tau_0 q + \beta q + \theta_x & = \tau_0 f_8, \end{cases} \tag{6.57}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)^T \in \mathcal{H}$. Pour montrer que les conditions $\xi = 0$ et $k = k_0$ sont également nécessaires à la stabilité exponentielle, on suppose qu'il existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \neq 0$ et on choisit $f_1 = f_3 = f_5 = f_6 = f_7 = f_8 = 0$, donc

$$\begin{cases} -\lambda^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l\left(\omega_x - l\varphi\right) & = \rho_1 f_2, \\ -\lambda^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x & = \rho_2 f_4, \\ -\lambda^2\rho_1\omega - k_0\left(\omega_x - l\varphi\right)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) & = 0, \\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + i\lambda\gamma\psi_x & = 0, \\ i\lambda\tau_0 q + \beta q + \theta_x & = 0. \end{cases} \tag{6.58}$$

On choisit $f_2 = \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}x\right)/\rho_1$ et $f_4 = \alpha\cos\left(\mu\frac{\pi}{2}x\right)/\rho_2$ dans (6.57) afin d'avoir $F =$

$(0, f_2, 0, f_4, 0, 0, 0, 0)^T \in \mathcal{H}$. Pour assurer les conditions au bord (6.4), on suppose que

$$\varphi = A \sin\left(\mu \frac{\pi}{2} x\right), \ \psi = B \cos\left(\mu \frac{\pi}{2} x\right), \ \omega = C \cos\left(\mu \frac{\pi}{2} x\right), \ \theta = D \sin\left(\mu \frac{\pi}{2} x\right) \text{ et } q = E \cos\left(\mu \frac{\pi}{2} x\right).$$

Par conséquent, le système (6.58) est équivalent à

$$\begin{cases} \left[-\lambda^2\rho_1 + k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + k_0 l^2\right] A + k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) B + l\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)[k+k_0] C & = 1, \\ k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) A + \left[-\lambda^2\rho_2 + b\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + k\right] B + klC + \gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) D & = \alpha, \\ l\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)[k_0+k] A + klB + \left[-\lambda^2\rho_1 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + kl^2\right] C & = 0, \\ -i\lambda\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) B + i\lambda\rho_3 D - \left(\frac{\mu\pi}{2}\right) E & = 0, \\ \left(\frac{\mu\pi}{2}\right) D + (i\lambda\tau_0 + \beta) E & = 0, \end{cases} \tag{6.59}$$

où $\mu \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $\xi \neq 0$ et $k = k_0$ et on prend $\lambda$ tel que

$$-\lambda^2\rho_1 + k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + kl^2 = 2kl\left(\frac{\mu\pi}{2}\right),$$

ce qui conduit à réécrire le système (6.59) comme suit :

$$\begin{cases} 2kl\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) A + k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) B + 2kl\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) C & = 1, \\ k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) A + \left[-\lambda^2\rho_2 + b\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + k\right] B + klC + \gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) D & = 0, \\ 2kl\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) A + klB + 2kl\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) C & = 0, \\ -i\lambda\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) B + i\lambda\rho_3 D - \left(\frac{\mu\pi}{2}\right) E & = 0, \\ \left(\frac{\mu\pi}{2}\right) D + (i\lambda\tau_0 + \beta) E & = 0, \end{cases} \tag{6.60}$$

En choisissant $\alpha = 0$ et en soustrayant $(6.60)_1$ de $(6.60)_3$, on obtient

$$B = \frac{1}{k\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]}.$$

En substituant la valeur de $B$ dans $(6.60)_3$ et $(6.60)_4$, on trouve

$$
\begin{aligned}
A &= -C - \frac{1}{2k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]}, \\
E &= -\frac{\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{(i\lambda\tau_0+\beta)} D \\
\text{et } D &= i\frac{\lambda\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)(i\lambda\tau_0+\beta)}{k\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]\left[i\lambda\rho_3(i\lambda\tau_0+\beta) + \left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right]}.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $A$, $B$ et $D$ dans $(6.60)_2$, on voit que

$$
\begin{aligned}
k\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right] C &= -\frac{1}{2\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]} + \frac{\left[-\lambda^2\rho_2 + b\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + k\right]}{k\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]} \\
&\quad + \frac{i\lambda\gamma^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2(i\lambda\tau_0+\beta)}{k\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]\left[i\lambda\rho_3(i\lambda\tau_0+\beta) + \left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right]}.
\end{aligned}
$$

Donc, pour $\lambda = \lambda_\mu$, on a

$$
\begin{aligned}
k^2\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]^2 C &= -\frac{k}{2} + \left[-\lambda^2\rho_2 + b\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + k\right] + \frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 \\
&\quad -\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4 \frac{1}{\left[-\lambda^2\rho_3\tau_0 + i\lambda\rho_3\beta + \left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right]} \\
&= -\frac{k}{2} + \left[\left(b - \frac{k\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\rho_2 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) + k - \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1}\right] + \frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4}{\left[\left(1 - \frac{\tau_0\rho_3 k}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta\right]}.
\end{aligned}
$$

Si $\chi_1 = 1 - \frac{\tau_0\rho_3 k}{\rho_1} \neq 0$, le troisiéme terme s'écrit

$$\begin{aligned}
& -\frac{\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4}{\left[\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta\right]} \\
= \quad & -\frac{\gamma^2}{\rho_3\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + \frac{\frac{\gamma^2}{\rho_3\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\left(2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta\right)}{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
k^2\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - l\right]^2 C \quad = \quad & \frac{kb}{\rho_1\chi_1}\xi\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\rho_2 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) + \frac{k}{2} - \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \\
& + \frac{\frac{\gamma^2}{\rho_3\chi_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\left(2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta\right)}{\chi_1\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2\frac{\tau_0\rho_3 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\tau_0\rho_3 kl^2}{\rho_1} + i\lambda\rho_3\beta}.
\end{aligned}$$

Donc

$$C \longrightarrow \frac{b}{\rho_1 k\chi_1}\xi,\; A \longrightarrow -\frac{b}{\rho_1 k\chi_1}\xi,\quad B \longrightarrow 0,\; D \longrightarrow 0 \text{ et } \; E \longrightarrow 0$$

lorsque $\mu \longrightarrow +\infty$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\mu\|^2_{\mathcal{H}} \quad \geq \quad & k_0\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2\,dx = k_0\left[-C\frac{\mu\pi}{2} - lA\right]^2\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\mu\pi}{2}x\right)dx \\
\geq \quad & \frac{1}{2}k_0\left[-C\frac{\mu\pi}{2} - lA\right]^2.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$. Si $\chi_1 = 0$, dans ce cas là, on a

$$\begin{aligned} k^2\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)-l\right]^2 C &= -\frac{k}{2}+\left[\left(b-\frac{k\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+2\frac{\rho_2 kl}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)+k-\frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1}\right]+\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 \\ &\quad -\frac{\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4}{\left[2l\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)-l^2+i\lambda\rho_3\beta\right]}, \end{aligned}$$

d'où on a l'équivalence

$$C \approx -\frac{\gamma^2}{2k^2\rho_3 l}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right),$$

pour $\mu$ assez grand. Donc

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{1}{2}k_0\left[-C\frac{\mu\pi}{2}-lA\right]^2 \approx \frac{1}{2}k_0\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\rho_3 l}\right)^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4.$$

Ceci implique que

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$.

2. Maintenant, on suppose que $\xi = 0$ et $k \neq k_0$. Ici, on prend $\alpha = 1$ et on multiple l'équation $(6.59)_3$ par $\frac{k}{l(k+k_0)}$, on obtient

$$k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A+\frac{k^2}{(k+k_0)}B+\frac{k}{l\,(k+k_0)}\left[-\lambda^2\rho_1+k_0\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+kl^2\right]C=0.$$

On va prendre $\lambda$ tel que

$$\frac{k}{l\,(k+k_0)}\left[-\lambda^2\rho_1+k_0\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+kl^2\right]=kl$$

ce qui signifie que

$$-\lambda^2\rho_1+k_0\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2-k_0l^2=0.$$

Ceci nous permet de réécrire le système (6.59) comme suit :

$$\begin{cases} \left[(k-k_0)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+2k_0l^2\right]A+k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)B+l\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)[k+k_0]\,C & =1, \\ k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A+\left[\left(b-\frac{\rho_2k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+k\right]B+klC+\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)D & =1, \\ k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A+\frac{k^2}{(k+k_0)}B+klC & =0, \\ -i\lambda\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)B+i\lambda\rho_3D-\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)E & =0, \\ \left(\frac{\mu\pi}{2}\right)D+(i\lambda\tau_0+\beta)\,E & =0. \end{cases} \tag{6.61}$$

On soustrait membre à membre les équations $(6.61)_2$ et $(6.61)_3$ pour annuler $A$ et $B$, on trouve

$$\left(\left(b-\frac{\rho_2k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}\right)B+\gamma\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)D=1. \tag{6.62}$$

De $(6.61)_5$, on conclut que

$$E=-\frac{\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{(i\lambda\tau_0+\beta)}D.$$

En remplaçant $E$ dans $(6.61)_4$, on obtient

$$D=\frac{-\frac{\tau_0k_0\gamma}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^3+\left(\frac{\tau_0\gamma k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\gamma\beta\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{\left(1-\frac{\tau_0\rho_3k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_3\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta}B,$$

et en remplaçant $D$ dans (6.62), on constate que

$$\left(\left(b-\frac{\rho_2k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}+\frac{i\lambda\gamma^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\left[i\lambda\rho_3+\frac{1}{(i\lambda\tau_0+\beta)}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right]}\right)B=1$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{i\lambda\gamma^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\left[i\lambda\rho_3+\frac{1}{(i\lambda\tau_0+\beta)}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right]} &= \frac{i\lambda\gamma^2\left(i\lambda\tau_0+\beta\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{i\lambda\rho_3\left(i\lambda\tau_0+\beta\right)+\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}\\
&= \frac{-\frac{\gamma^2\tau_0k_0}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4+\left[\frac{\gamma^2\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\gamma^2\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\chi_2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\tau_0\rho_3k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta},
\end{aligned}$$

donc

$$\underbrace{\left(\left(b-\frac{\rho_2k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}+\frac{-\frac{\gamma^2\tau_0k_0}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4+\left[\frac{\gamma^2\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\gamma^2\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\chi_2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\tau_0\rho_3k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta}\right)}_{I}B=1. \tag{6.63}$$

Si $\chi_2=1-\frac{\tau_0\rho_3k_0}{\rho_1}\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{bk_0}{\rho_1\chi_2}\left[\left(1-\frac{\tau_0\rho_3k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k_0}-\frac{\rho_2}{b}\right)-\frac{\gamma^2\tau_0}{b}\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\\
&\quad+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}+\frac{\frac{\gamma^2}{\chi_2}\left[\frac{\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\chi_2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\tau_0\rho_3k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta}.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $\xi=0$, on déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \frac{bk_0}{\rho_1\chi_2}\left[\left(1-\frac{\tau_0\rho_3k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k_0}-\frac{\rho_2}{b}\right)-\left(1-\frac{\tau_0\rho_3k}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\\
&\quad+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}+\frac{\frac{\gamma^2}{\chi_2}\left[\frac{\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\chi_2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\tau_0\rho_3k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta}\\
&= \frac{\rho_2}{\rho_1\chi_2}\left(\frac{b\rho_1}{k\rho_2}-\frac{\tau_0\rho_3k_0}{\rho_1}\right)[k-k_0]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1}+\frac{kk_0}{(k+k_0)}\\
&\quad+\frac{\frac{\gamma^2}{\chi_2}\left[\frac{\tau_0k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{\chi_2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\tau_0\rho_3k_0l^2}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta}.
\end{aligned}$$

On distingue deux cas. Si $\frac{b\rho_1}{k\rho_2} - \frac{\tau_0\rho_3 k_0}{\rho_1} \neq 0$, alors on a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1\chi_2}\left(\frac{b\rho_1}{k\rho_2} - \frac{\tau_0\rho_3 k_0}{\rho_1}\right)[k-k_0]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 B \to 1 \text{ quand } \mu \to +\infty.$$

Si $\frac{b\rho_1}{k\rho_2} - \frac{\tau_0\rho_3 k_0}{\rho_1} = 0$, alors on a

$$i\frac{\gamma^2\lambda\beta}{\chi_2^2}B \longrightarrow 1 \text{ quand } \mu \to +\infty.$$

Alors dans les deux cas ci-dessus, on conclut que

$$B = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

En substituant cette expression dans $(6.61)_1$ et $(6.61)_2$, et à l'aide que $D = O(1)$, on obtient

$$\begin{cases} \left[(k-k_0)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + 2k_0 l^2\right]A + l\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)[k+k_0]\,C & = 1 - O(1), \\ k\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A + klC & = 1 - O(\mu), \end{cases} \tag{6.64}$$

alors

$$-2k_0\left[\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 - l^2\right]A \;\; = 1 - \tfrac{k+k_0}{k}\left(\tfrac{\mu\pi}{2}\right) + O(\mu^2)$$

ce qui signifie

$$\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A \;\; = \frac{k+k_0}{2k_0 k} - O(\mu).$$

Donc, à partir de $(6.64)_2$, on a

$$C \;\; = \frac{1}{kl}\left(\frac{k_0-k}{2k_0}\right) - O(\mu)$$

ce qui implique

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{1}{2}k_0\left[-C\frac{\mu\pi}{2} - lA\right]^2 \to +\infty$$

quand $\mu \to +\infty$.

Si $\chi_2 = 0$, (6.63) devient

$$\left(\left(b-\frac{\rho_2 k_0}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2+\frac{\rho_2 k_0 l^2}{\rho_1}+\frac{k k_0}{(k+k_0)}+\frac{-\frac{\gamma^2}{\rho_3}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4+\left[\frac{\gamma^2 l^2}{\rho_3}+i\lambda\gamma^2\beta\right]\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}{l^2+i\lambda\rho_3\beta}\right)B=1,$$

et par conséquent

$$-\frac{\gamma^2}{i\lambda\rho_3^2\beta}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^4 B\approx 1\Rightarrow B=O\left(\frac{1}{\mu^3}\right)\text{ et }D=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

En procédant comme dans le cas $\chi_2\neq 0$, on trouve

$$\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)A\to\frac{k+k_0}{2k_0 k},\ C\to\frac{1}{kl}\left(\frac{k_0-k}{2k_0}\right).$$

Alors

$$\|\Phi_\mu\|_{\mathcal{H}}^2\to+\infty\text{ quand }\mu\to+\infty.$$

## 6.5 Décroissance polynomiale

Dans cette section, nous examinons la situation dans laquelle le nombre de stabilité est différente de zéro (i.e. $\xi\neq 0$). A cet égard, nous établissons un résultat de décroissance polynomiale pour la solution forte du système (6.3), (6.4) et (6.5).

Pour la solution forte de (6.3), (6.4) et (6.5), on définit la fonctionnelle d'énergie du second ordre

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho_1\varphi_{tt}^2+\rho_2\psi_{tt}^2+b\psi_{xt}^2+\rho_1\omega_{tt}^2+\rho_3\theta_t^2+\tau_0 q_t^2\right]dx\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_0^1\left[k(\varphi_x+\psi+l\omega)_t^2+k_0\left(\omega_x-l\varphi\right)_t^2\right]dx. \qquad (6.65)\end{aligned}$$

Comme dans le Lemme 61, il en résulte que la fonctionnelle d'énergie du second ordre, définis par (6.65), satisfait

$$\mathcal{E}'(t) = -\beta \int_0^1 q_t^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.66}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section :

**Théorème 71** *Soit* $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ *une solution forte du problème* (6.3), (6.4) *et* (6.5). *On suppose que* $\xi \neq 0$ *et* $k = k_0$. *Alors, la fonctionnelle d'énergie* $E$ *vérifie*

$$E(t) \leq \frac{\lambda_0}{t}, \quad \forall t > 0,$$

*où* $\lambda_0$ *est une constante strictement positive.*

Comme pour (6.52), on définit la fonctionnelle de Lyapunov $\tilde{\mathcal{L}}$ comme suit

$$\tilde{\mathcal{L}} = N(E + \mathcal{E}) + F_1 + N_2F_2 + N_3F_3 + N_4F_4 + \frac{1}{l}F_5 + F_6 + N_7F_7, \tag{6.67}$$

où $F_i$ , $i = 1$ à 7, et leurs dérivées vérifiant toujours les Lemmes 62−68. D'autre part, en utilisant la cinquième équation de (6.3), on a

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq c \int_0^1 \left(q^2 + q_t^2\right) dx. \tag{6.68}$$

Par conséquent, la dérivée de $F_7$ devient

$$\begin{aligned} F_7'(t) \leq\ & -\frac{k}{4}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7}\right)\int_0^1 \theta^2 dx \\ & + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right)\int_0^1 q^2 dx + c\int_0^1 q_t^2 dx. \end{aligned} \tag{6.69}$$

**Démonstration.** (du Théorème 71) Pour finaliser la démonstration du Théorème 71, on dérive la fonctionnelle de Lyapunov $\tilde{\mathcal{L}}$ définie dans (6.67) et on utilise (6.66), (6.27), (6.31), (6.33), (6.35), (6.39), (6.42) et (6.69) , on obtient

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}'(t) \leq & -\left[\beta N - cN_2 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)N_4 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_6}\right)N_7\right]\int_0^1 q^2dx \\
& -\left[\beta N - cN_7\right]\int_0^1 q_t^2dx \\
& -\left[\frac{\rho_1}{2}+\rho_1-\rho_1\right]\int_0^1 \varphi_t^2dx \\
& -\left[\frac{\gamma}{2}N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_6}\right)N_7 - \frac{\rho_1}{2} - c\right]\int_0^1 \psi_t^2dx \\
& -\left[\frac{b}{2}N_3 - \frac{b^2l^2}{k_0}N_7 - \varepsilon N_7 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 N_2\right]\int_0^1 \psi_x^2dx \\
& -\left[\frac{\rho_3}{2}N_4 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)N_2 - cN_3 - c\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)N_7\right]\int_0^1 \theta^2dx \\
& -\left[\rho_1-\rho_1+\frac{\rho_1}{2}-\varepsilon_6 N_7\right]\int_0^1 \omega_t^2dx \\
& -\left[k_0-k_0+k_0-\varepsilon_7 N_7\right]\int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2dx \\
& -\left[\frac{k}{2}N_7 - \frac{k^2}{b}N_3 - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - N_2\varepsilon_2 - k - c\right]\int_0^1 (\varphi_x+\psi+l\omega)^2dx.
\end{aligned}
$$

Avec les mêmes choix des constantes comme dans la démonstration du Théorème 70 et en choisissant $N$ assez grand tel que

$$\beta N - cN_7 > 0,$$

on trouve

$$\tilde{\mathcal{L}}'(t) \leq -\lambda_1 E(t), \quad \forall t > 0, \tag{6.70}$$

où $\lambda_1$ est une constante positive. Une simple intégration de (6.70) sur $(0,t)$ et rappelant que $E$ est décroissante donne

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)\,ds \leq \frac{1}{\lambda_1}\left(\tilde{\mathcal{L}}(0) - \tilde{\mathcal{L}}(t)\right) \leq \frac{\tilde{\mathcal{L}}(0)}{\lambda_1}.$$

Finalement, pour $\lambda_0 = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(0)}{\lambda_1} = \frac{E(0)+\mathcal{E}(0)}{\lambda_1}$, on a

$$E\left(t\right) \leq \frac{\lambda_0}{t}, \quad \forall t > 0,$$

d'où le eésultat cherché. ■

# Bibliographie


[1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, Sobolev spaces, Academic press 2003.

[2] F. Alabau-Boussouira, Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 14 (2007), 643-669.

[3] F. Alabau-Boussouira, J. E. Muñoz Rivera and D. S. Almeida Júnior, Stability to weak dissipative Bresse system, J. Math. Anal. Appl., 347 (2011), 481-498.

[4] D. S. Almeida Jùnior, M. L. Santos and J. E. Muñoz Rivera, Stability to weakly dissipative Timoshenko systems, Math. Meth. Appl. Sci., 36 (14) (2013), 1965–1976.

[5] D. S. Almeida Jùnior, M. L. Santos and J. E. Muñoz Rivera, Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force, Z. Angew. Math. Phy., 65 (6) (2014), 1233-1249.

[6] M. Alves, C. A. Raposo, M. Sepulveda and O. Vera, Uniform stabilization for transmission problem for Timoshenko's system with memory, J. Math. Anal. Appl., 369 (1) (2010), 323-345.

[7] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory type, J. Differential Equations 194 (1) (2003), 82-115.

[8] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal and A. Soufyane, Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam, J. Math. Anal. Appl., 327 (1) (2007), 525-538.

[9] J. A. C. Bresse, Cours de Méchanique Appliquée, Mallet Bachelier, Paris, 1859.

[10] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris 1999.

[11] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, 2010.

[12] C. Cattaneo, Sulla conduzione del calore, Atti Sem. Math. Fis Univ. Modena, 3 (1948), 83-101.

[13] C. M. Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2000.

[14] F. Demengel and G. Demengel, Espases fonctionnels, CNRS éditions, Paris 2007.

[15] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical society, 1996.

[16] Fatori, Luci Harue and J. E. Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system, IMA J. Appl. Math., 75 (2010), 881-904.

[17] D. X. Feng, D. H. Shi and W. Zhang, Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation, Sci. China Ser., 41 (1998), 483-490.

[18] H. D. Fernández Sare, Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation, Adv. Differential Equations, 13 (7-8) (2009), 733-752.

[19] H. D. Fernández Sare and R. Racke, On the stability of damped Timoshenko system-Cattaneo versus Fourier law, Arch. Rational Mech. Anal., 194 (1) (2009), 221-251.

[20] M. Grasselli, V. Pata and G. Prouse, Longtime behavior of a viscoelastic Timoshenko beam, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (1-2) (2004), 337-348.

[21] A. E. Green and P. M. Naghdi, On thermodynamics and the nature of the second law, Proc. Royal soc. London. A. Mathematical & Physical Sciences, 357 (1977), 253-270.

[22] A. E. Green and P. M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermo-mechanics, Proc. Royal Society London. A., 432 (1991), 171-194.

[23] A. E. Green and P. M. Naghdi, On undamped heat waves in an elastic solid, J. Thermal Stresses, 15 (1992), 253-264.

[24] A. E. Green and P. M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, J. Elasticity, 31 (1993), 189-208.

[25] A. Guesmia, Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory, J. Math., Anal. Appl., 382 (2011), 748-760.

[26] A. Guesmia, On the Stabilization for Timoshenko System with Past History and Frictional Damping Controls, Palestine Journal of Mathematics, 2 (2) (2013), 187-214.

[27] A. Guesmia, Some well-posedness and general stability results in Timoshenko systems with infinite memory and distributed time delay, J. Math. Phys., 55 (8) (2014), 1-40.

[28] A. Guesmia and M. Kafini, Bresse system with infinite memories, Math. Methods Appl. Sci., 38 (11) (2015), 2389-2402.

[29] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, On the control of a viscoelastic damped Timoshenko-type system, Appl. Math. Compt., 206 # 2 (2008), 589-597.

[30] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, General energy decay estimates of timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (16) (2009), 2102-2122.

[31] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, On the stabilization of Timoshenko systems with memory cand different speeds of wave propagation, Appl. Math. Compt., 219 (2013), 9424-9437.

[32] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, A general stability result in a Timoshenko system with infinite memory : A new approach, Math. Meth. Appl. Sci., 37 (3) (2014), 384-392.

[33] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, Some stability results for Timoshenko systems with cooperative frictional and infinite-memory dampings in the displacement, Acta Math. Sci., 36 (1) (2016), 1-33.

[34] A. Guesmia, S. A. Messaoudi and A. Soufyane, Stabilization of a linear Timoshenko system with infinite history and applications to the Timoshenko-Heat systems, Elect. J. Diff. Equa., 2012 (193) (2012), 1-45.

[35] A. Guesmia, S.A. Messaoudi and A. Wehbe, Uniform decay in mildly damped Timoshenko systems with non-equal wave speed propagation, Dynamic systems and Applications, 21 (2012), 133-146.

[36] F. L. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Diff. Eqs, 1(1) (1985), 43-56.

[37] H. Jellab, Modélisation thermoélastique des tissus mous par éléments finis, Thèse M.Sc., Université de Montréal, 1999.

[38] S. Jiang and R. Racke, Evolution equation in thermoelasticity, $\pi$ Monographs and Surveys, Pure Appl. Math. 112, Champan & Hall / CRC, Boca Raton, 2000.

[39] D. D. Joseph and L. Preziosi, Heat waves, Reviews of Modern Physics, 61 (1) (1989), 41-73.

[40] J. U. Kim and Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim., 25 (1987), 1417-1429.

[41] Z. Liu and B. Rao, Energy Decay of the Thermoelastic Bresse System, Z. angew. Math.Phys., 60 (2009), 54-69.

[42] Z. Liu and S. Zheng, Semigroups Associated with Dissipative Systems, Chapman & Hall, 1999.

[43] S. A. Messaoudi and A. Fareh, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds, Arabian J. Math., 2 (2013), 199-207.

[44] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Blow up of solutions with positive energy in nonlinear thermoelasticity with second sound, J. Appl. Math., 3 (2004), 201-211.

[45] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams, Nonl. Differ. Eqns. Appl., 15 (2008), 655-671.

[46] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, A stability result in a memory-type Timoshenko system, Dynam. Systems Appl., 18 (3-4) (2009), 457-468.

[47] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (4) (2009), 454-469.

[48] S. A. Messaoudi, M. Pokojovy, and B. Said-Houari, Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound - global existence and exponential stability. Math. Meth. Appl. Sci., 32 (5) (2009), 505-534.

[49] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III, J. Math. Anal. Appl., 348 (1) (2008), 298-307.

[50] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III, J. Math. Anal. Appl., 348 (2008), 298-307.

[51] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, Adv. Differential Equations, 14 (3-4) (2009), 375-400.

[52] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history. J. Math. Anal. Appl., 360 (2) (2009), 459-475.

[53] S. A. Messaoudi and A. Soufyane, Boundary stabilization of solutions of a nonlinear system of Timoshenko type, Nonlinear Anal., 67 (7) (2007), 2107-2121.

[54] J. E. Muñoz Rivera and H. D. Fernández Sare, Stability of Timoshenko systems with past history, J. Math. Anal. Appl., 339 (1) (2008), 482-502.

[55] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems–Global existence and exponential stability, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 276 (2002), 248-278.

[56] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin. Dyn. Syst., 9 (6) (2003), 1625-1639.

[57] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, Timoshenko systems with indefinite damping, J. Math. Anal. Appl., 341(2) (2008), 1068-1083.

[58] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, 1983.

[59] J. Prüss, On the spectrum of Co-semigroups, Trans. AMS, 284 (1984), 847-857.

[60] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and N. N. O. Castro, Exponential stabilityfor the Timoshenko system with two weak dampings, Applied Math Letters, 18 (2005), 535-541.

[61] B. Said-Houari and A. Kasimov, Decay property of Timoshenko system in thermoelasticity, Math. Methods Appl. Sci., 35 (3) (2012), 314-333.

[62] B. Said-Houari and A. Kasimov, Damping by heat conduction in the Timoshenko system : Fourier and Cattaneo are the same, J. Differential Equations, 255(4)( 2013), 611-632.

[63] M. Santos, Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary, Abstr. Appl. Anal., 7 (2002), 531-546.

[64] M. L. Santos and D. S. Almeida Junior, Numerical Exponential Decay to Dissipative Bresse System, J. Appl. Math. Article, 2010 (2010), 17 pages.

[65] M. L. Santos, D. S. Almeida Junior and J. E. Muñoz Rivera, The stability number of the Timoshenko system with second sound, J. Differential Equations, 253 (2012), 2715-2733.

[66] K. Saxton and R. Saxton, Nonlinearity and memory effects in low temperature heat propagation, Arch. Rational Mech., 52 (2000), 127-142.

[67] D. H. Shi and D. X. Feng, Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback, IMA J. Math. Control Inform., 18 (2001), 395-403.

[68] D. H. Shi and D. X. Feng, Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback, ANZIAM J., 44 (2002), 205-220.

[69] J. A. Soriano, W. Charles and R. Schulz, Asymptotic stability for Bresse systems, J. Math. Anal. Appl., 412 (1) (2014), 369-380 .

[70] A. Soufyane and A. Wehbe, Exponential stability for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, Electron. J. Differential Equations, 29 (2003), 1–14.

[71] S. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars, Philisophical Magazine, 41 (1921), 744-746.

[72] A. Wehbe and W. Youssef, Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedback, Journal of Mathematical Physics, 51 (2010), 1067-1078.

[73] A. Wyler, Stability of wave equations with dissipative boundary conditions in a bounded domain, Differential and Integral Equations, 7 (1994), 345-366.