Ministère de l'Enseignement Supèrieur et la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbas
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques
Option : Probabilités

Présentée par

AICHA BOUAKA

Sur l'immersion des filtrations Browniennes

Soutenue le 14 Mars 2018

Devant le jury composé de :

Président	:	**Mr. M. K. ATTOUCH**	Prof	Université de SBA
Encadreur	:	**Mr. A. KANDOUCI**	Prof	Université de Saida
Co-encadreur	:	**Mr. A. RABHI**	MCA	Université de SBA
Examinateurs	:	**Mr. T. GUENDOUZI**	Prof	Université de Saida
		Mr. A. GHERRIBALLAH	Prof	Université de SBA
		Mlle. S. RAHMANI	MCA	Université de Saida

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier le grossissement progressif des filtrations Browniennes avec un temps honnête sous l'hypothèse (H). Nous donnons quelques résultats généraux sur la propriété de représentation prévisible, les filtrations faiblement et fortement Browniennes, ensuite nous étudions avec des exemples les grossissements initial et progressif, et nous nous intéressons au grossissement progressif à l'aide d'une variable honnête sous les conditions (CA). Nous étudions aussi la propriété d'immersion, plus particulièrement au grossissement progressif. Nous donnons un résultat principal sur l'immersion des filtrations Browniennes avec un temps honnête qui évite tous les temps d'arrêt.

Mots-clés : filtrations faiblement et fortement Browniennes, immersion, propriété de représentation prévisible, grossissement progressif de filtrations, temps honnêtes.

Abstract

The aim of this thesis is to study the progressive enlargement of Brownian filtrations with an honest time under the hypothesis (H). We give some general results on the predictable representation property, weak and strong Brownian filtrations, then we study with examples the initial and progressive enlargements, and we are interested in progressive enlargement using an honest variable under the conditions (CA). We also study the immersion property, especially in the progressive enlargement. We give a main result on the immersion of Brownian filtrations with an honest time that avoids all stopping times.

Keywords : weak and strong Brownian filtrations, immersion, predictable representation property, progressive enlargement of filtrations, honest times.

Remerciements

Cette thèse n'aurait pas été complète sans l'aide et le soutien de plusieurs personnes ; en particulier, le professeur **A. KANDOUCI** qui a tous les remerciements et gratitude pour avoir accepté de diriger cette thèse, je le remercie aussi pour son aide au cours des années de recherche et d'étude, pour son soutien, ses conseils, ses orientations, ses encouragements et son temps, qu'il m'a mis sur le bon chemin pour mener des recherches et mettre fin à cette thèse.

Je remercie également Monsieur **A. RABHI** d'avoir accepté de superviser cette thèse.

Je remercie sincèrement Monsieur **M. K. ATTOUCH** qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma thèse.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à Mlle **S. RAHMANI** et aux messieurs **T. GUENDOUZI, A. GHERRIBALLAH** pour avoir pris la peine d'expertiser ce travail.

Je remercie également tous les membres du Laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications (LMSSA) de l'université de Saida, en particulier **F. MOUSSAOUI**.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie de grossissement de filtrations a été introduite et développée par l'école française de probabilités dans les années 70-80, cette théorie dit qu'on peut grossir une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pour obtenir une nouvelle filtration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions habituelles et $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$, pour tout $t \geq 0$. Il y a des questions importantes liées à la théorie de grossissement de filtrations : sous quelles conditions, toute $\mathbb{F}$-semimartingale reste une $\mathbb{H}$-semimartingale ? Quelle est la nouvelle décomposition d'une $\mathbb{F}$-semimartingale dans la nouvelle filtration $\mathbb{H}$?

Il y a deux types classiques pour grossir la filtration $\mathbb{F}$:
Le *grossissement initial* : pour lequel la nouvelle information est ajoutée à l'origine de temps, i.e., si τ est une variable aléatoire, la filtration grossie initialement $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)} = (\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)})_{t\geq 0}$, est la plus petite filtration continue à droite contenant $\mathbb{F}$ et telle que τ est $\mathcal{G}_0^{\sigma(\tau)}$-mesurable. En d'autre terme

$$\boxed{\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)} = \bigcap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau))}$$

Le *grossissement progressif* : pour lequel la nouvelle information est ajoutée progressivement à mesure que le temps t augmente, i.e., si τ est un temps aléatoire (c'est à dire une variable aléatoire positive), la filtration grossie progressivement $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, est la plus petite filtration continue à droite contenant $\mathbb{F}$ et faisant de τ un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt. En d'autre terme

$$\boxed{\mathcal{G}_t = \bigcap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau \wedge s))}$$

La théorie de grossissement a été introduite pour la première fois dans l'ouvrage fondamental d'Itô en 1976 (publié dans [38] en 1978), lorsqu'il a démontré que si B est un mouvement Brownien standard, alors on peut grossir la filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de B par l'adjonction d'une σ-algèbre engendrée par la variable aléatoire B_1 à la filtration $\mathbb{F}$. Il a montré que B reste une semimartingale par rapport à la filtration grossie, il a calculé sa décomposition explicitement, et il a montré la formule suivante

$$B_1 \int_0^t H_s dB_s = \int_0^t B_1 H_s dB_s$$

pour tout processus borné $\mathbb{F}$-prévisible H, où l'intégrale sur la gauche est calculée par rapport à la filtration d'origine $\mathbb{F}$, et l'intégrale sur la droite est calculée à l'aide de la filtration grossie. Il est évident qu'un tel résultat est d'intérêt seulement pour $0 \leq t \leq 1$.

La deuxième avance pour la théorie de grossissement de filtrations était en 1978 par Barlow [12], où il a considéré le problème que si τ est une variable aléatoire positive, et on grossit la filtration initiale de manière minimale pour faire de τ un temps d'arrêt, quelles conditions assurent que toute semimartingale par rapport à la filtration initiale reste une semimartingale par rapport à la filtration grossie ?

Jusqu'à présent, quatre ouvrages ont été consacrés à la théorie de grossissement : Jeulin [48], Jeulin et Yor [52], Yor [77] et Mansuy et Yor [66] ; on trouve aussi de nombreux résultats aux chapitres correspondants dans les livres de Protter [72], Dellacherie et. al [28]. Quelques articles importants sont Brémaud et Yor [18], Barlow [12], Jacod [41, 40], Jeulin et Yor [49]. Le grossissement initial a été étudié dans Itô [38], Mackevičius [65], Meyer [67, 68], Jeulin et Yor [51], Jacod [41] et Amendinger [8], Callegaro et. al [19], Kchia et. al [57], et dans les livres de Jacod [40], Jeulin [48], Jeulin et Yor [52], Yor [77], Protter [72], Jeanblanc et. al [47], Aksamit et Jeanblanc [5], et dans les thèses de Amendinger [7], Kchia [56], Li [59] et Aksamit [1]. Le grossissement progressif a été examiné dans Azéma [9], Yor [76], Dellacherie et Meyer [30], Jeulin et Yor [49], Nikeghbali [69], Jeanblanc et Le Cam [44], Li et Rutkowski [61], Jeanblanc et Song [45, 46], Aksamit et. al [6].

Un *temps honnête* est par définition la fin d'un ensemble optionnel, c'est un temps aléatoire mais n'est pas un temps d'arrêt. Le grossissement progressif avec un temps honnête est le type de grossissement le plus connu et le premier qui a été étudié par Barlow [12], Azéma [9], Azéma et Yor [10], Yor [76], Dellacherie et Meyer [30], Jeulin et Yor [49, 50], puis Jeulin [48], Jeulin et Yor [52], Dellacherie et. al [28], Jeanblanc et. al [47], Li et Rutkowski [61], Coculescu et Nikeghbali [25], et par Nikeghbali [69], Nikeghbali et Yor [71], Nikeghbali et Platen [70] sous les conditions (CA) :

- *Condition (C)* : Toutes les martingales de la filtration initiale sont **c**ontinues.
- *Condition (A)* : Le temps aléatoire τ évite tous les temps d'arrêt.

Et récemment par Aksamit et. al [2, 3], Kardaras [54] et dans les thèses de Kchia [56] et Aksamit [1], dans les caractérisations de filtrations fortement Browniennes, Barlow et. al [14, 13], Azéma et Yor [11] et Yor [77].

La théorie de grossissement de filtrations s'intéresse à la stabilité de la propriété de martingales. Brémaud et Yor [18] ont étudié un cas particulier où toute $\mathbb{F}$-martingale reste une $\mathbb{H}$-martingale, cette propriété connue sous le nom d'*hypothèse (H)* ou propriété d'*immersion*. Elle est aussi étudiée par Beghdadi-Sakrani et Émery [16], Émery [34], et dans le cadre financier par Kusuoka [58], Elliott et. al [33], Jeanblanc et. al [47], Coculescu et. al [23], Aksamit et Jeanblanc [5], et récemment dans les articles de Aksamit et. al [6], Jeanblanc et Song [46], et dans les thèses de Kchia [56] et Aksamit [1].

La *propriété de représentation prévisible (PRP)* s'intéresse sur la représentation des martingales, i.e., on dit qu'une martingale locale M a la $\mathbb{F}$-PRP, si toute $\mathbb{F}$-martingale locale N nulle en 0 s'écrit comme une intégrale stochastique d'un processus $\mathbb{F}$-prévisible H par rapport à M,

$$N_t = \int_0^t H_s dM_s, \quad \forall t \geq 0.$$

Chronologiquement, la PRP a été étudiée pour une seule ou pour une famille de martingales locales mais pas pour les cas généraux. Une liste infinie de références est consacrée pour ce sujet. Premièrement dans Clark [22] qui a étudié la PRP pour les processus de Wiener, Jacod [40], Lipster et Shiryayev [63], puis dans Karatzas et Shreve [53], Revuz et Yor [73], et pour la PRP pour les semimartingales, He et .al [37], Jacod et Shiryayev [42] et Cohen [26], et dans Amendinger [8] et Fontana [35] pour la PRP dans le cas de grossissement initial, et Lipster et Shiryayev [64], dans Davis [27] qui a étudié la PRP pour le mouvement Brownien, processus de Lévy et processus avec sauts, Protter [72], C Klebaner [21], Mansuy et Yor [66], Jeanblanc et. al [47], et récemment dans Jeanblanc et Song [46], et la PRP pour la filtration de Poisson dans Aksamit et. al [6].

La propriété de représentation prévisible joue un rôle essentiel dans la notion de filtrations *faiblement* et *fortement Browniennes*. Une filtration fortement Brownienne est une filtration engendrée par un mouvement Brownien standard, et une filtration faiblement Brownienne est une filtration qui a un mouvement Brownien a la PRP par rapport à cette filtration. Ces filtrations ont été étudiées par Revuz et Yor [73], Beghdadi-Sakrani [15], Mansuy et Yor [66], Jeanblanc et. al [47] et Yor [78].

Cette thèse contient quatre chapitres : dans le premier chapitre, nous rappelons des résultats généraux sur les processus stochastiques, filtrations et temps d'arrêt, et nous nous intéressons à la propriété de représentation prévisible et les filtrations faiblement et fortement Browniennes.

Le deuxième chapitre traite des problèmes généraux de la théorie de grossissement de filtrations, et présente quelques exemples et aussi la relation entre les différents types de grossissement.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la propriété d'immersion et le grossissement progressif avec un temps honnête. Nous commençons avec la notion d'immersion et nous nous intéressons au grossissement progressif, et nous finissons ce chapitre par le grossissement progressif à l'aide d'une variable honnête, nous donnons la notion classique de temps honnête qui généralise la notion de temps d'arrêt, et aussi nous donnons sa caractérisation générale et sous les conditions (CA), et nous présentons un résultat important sur le temps honnête et les filtrations fortement Browniennes (la conjecture de Barlow (Théorème 3.2.5)).

Le dernier chapitre est consacré à notre résultat principal, qui est : si une filtration $\mathbb{G}$ est entre deux filtrations fortement Browniennes $\mathbb{F}$ et $\mathbb{H}$ au sens d'immersion, et si $\mathbb{G}$ est le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ avec un temps honnête τ qui évite tous les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors $\mathbb{G}$ est faiblement Brownienne.

Chapitre 1

Processus stochastiques, filtrations et temps d'arrêt

Notre but dans ce chapitre est l'étude de la propriété de représentation prévisible (PRP) et les filtrations faiblement et fortement Browniennes.

1.1 Préliminaires

Nous rappelons quelques résultats généraux sur la théorie de processus stochastiques qui sont liés au grossissement de filtrations. Les preuves des résultats présentés ici peuvent être trouvées dans Nikeghbali [69], Jeanblanc et. al [47] et Aksamit [1].

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$. i.e., $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $s < t$. Notons $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$.
Un espace probabilisé muni d'une filtration est appelé un *espace probabilisé filtré.*
Généralement, on suppose qu'une filtration satisfait les conditions habituelles. i.e., $\mathbb{F}$ est continue à droite ($\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$), et $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{F}_t$ contient aussi tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{A}$, pour tout $t \geq 0$.

Si $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ est la classe des processus $\mathbb{F}$-adaptés, on note $\mathcal{A}_{loc}(\mathbb{F})$ l'ensemble des processus X tel que, il existe une suite $(T_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt croissante vers $+\infty$ et le processus arrêté $X^{T_n} \in \mathcal{A}(\mathbb{F})$. L'ensemble des processus croissants, continus à droite (càd) $\mathbb{F}$-adaptés et intégrables (respectivement localement intégrables) est noté $\mathcal{A}^+(\mathbb{F})$ (resp. $\mathcal{A}^+_{loc}(\mathbb{F})$).

Le processus intégrale stochastique $\int_0^t H_s dX_s$ sera noter $H \centerdot X$.

1.1.1 Théorèmes de classe monotone

Les théorèmes de classe monotone sont un ensemble des résultats qui montre que si un ensemble de fonctions mesurables satisfaisant une certaine propriété, alors toute fonction mesurable (bornée) a cette propriété. Dans les littératures, on trouve plusieurs fois dans une démonstration qui vérifie certaine propriété pour les fonctions indicatrices, et alors il affirme que "Le reste s'ensuit par l'argument de classe monotone".

Nous donnons deux versions différentes de ces théorèmes, l'une pour les ensembles et l'autre pour les fonctions ; voir Dellacherie et Meyer ([29], Chapitre 1).

Théorème 1.1.1. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de sous-ensembles de Ω telle que*
- $\Omega \in \mathcal{C}$,
- *Si* $A, B \in \mathcal{C}$ *et* $A \subset B$, *alors* $B|A = B \cap A^c \in \mathcal{C}$,
- *Si* A_n *est une suite croissante des éléments de* $\mathcal{C}$, *alors* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$.

Alors, si $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$ *où* $\mathcal{H}$ *est stable par l'intersection finie, alors* $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}$.

Théorème 1.1.2. *Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées sur Ω telles que*
- *Les fonctions constantes sont dans* $\mathcal{V}$,
- *Si* h_n *est une suite croissante des éléments positifs de* $\mathcal{V}$ *tels que* $h = \sup h_n$ *est bornée, alors* $h \in \mathcal{V}$.

Si $\mathcal{G}$ *est un sous-ensemble de* $\mathcal{V}$ *qui est stable par la multiplication, alors* $\mathcal{V}$ *contient toutes les fonctions* $\sigma(\mathcal{G})$*-mesurables bornées.*

1.1.2 Temps d'arrêt

Soit T un temps aléatoire, i.e., une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ (voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], p. 5)). Nous rappelons les notions de graphe d'un temps aléatoire, voir Nikeghbali ([69], Proposition 2.3) :

$$[\![T]\!] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : T(\omega) = t\}$$

et la restriction d'un temps aléatoire pour donner l'ensemble

$$T_A(\omega) := \begin{cases} T(\omega) & si \quad \omega \in A \\ \infty & si \quad \omega \notin A \end{cases}$$

Pour deux temps aléatoires S et T tels que $S \leq T$, on définit l'intervalle stochastique ; voir par exemple Li ([59], Définition 1.2.2) :

$$[\![S, T[\![= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}.$$

On donne la définition d'un temps d'arrêt ; voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Définition 2.1).

Définition 1.1.1. *Un temps aléatoire T défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est dit un $\mathbb{F}$-**temps d'arrêt** (ou simplement **temps d'arrêt**) si pour tout $t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Si $\mathbb{F}$ est continue à droite, il équivaut à $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.*

Si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$, tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt.

On rappelle les σ-algèbres $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{T-}$ pour un temps d'arrêt T ; voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Définition 2.12), Li ([59], Définition 1.1.4).

Définition 1.1.2. *Pour un temps d'arrêt T, on a la caractérisation des tribus $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{T-}$*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\},$$

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(\{T > t\} \cap A : A \in \mathcal{F}_t, t \geq 0).$$

Pour classifier les temps d'arrêt, on donne la définition suivante ; voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Définition 2.1), Jeanblanc et. al ([47], Définition 1.2.3.1).

Définition 1.1.3.

(a) Un temps d'arrêt T est ***optionnel*** *si pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

(b) Un temps d'arrêt T est ***prévisible*** *s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) tels que $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$ p.s et $T_n < T$ pour tout n sur l'ensemble $\{T > 0\}$. La suite (T_n) est dite suite* ***prévisible****.*

(c) Un temps d'arrêt T est ***accessible*** *(et on note T^a), s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles tels que $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ p.s, en d'autre terme*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n \{\omega : T_n(\omega) = T(\omega) < \infty\}\right) = 1$$

(d) Un temps d'arrêt T est ***totalement inaccessible*** *(et on note T^i), si $\mathbb{P}(T = (S < \infty)) = 0$ pour tout temps d'arrêt prévisible S, en d'autre terme*

$$[\![T]\!] \cap [\![S]\!] = \emptyset \text{ p.s}$$

On donne quelques exemples de temps d'arrêt ; voir C Klebaner ([21], Exemples 8.29, 8.30 et 8.31).

Exemple 1.1.1. 1. Tout temps d'arrêt dans une filtration continue à droite est optionnel.

2. Si T est un temps d'arrêt, alors pour toute constante $a > 0$, $T + a$ est un temps d'arrêt prévisible. En effet, on peut approcher T par $T_n = T + a - 1/n$.
3. Soient B un mouvement Brownien (MB) issu de 0, $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle et T le temps d'atteinte de 1, i.e., $T = \inf\{t : B_t = 1\}$. T est un temps d'arrêt prévisible, puisque $T_n = \inf\{t : B_t = 1 - 1/n\}$ converge vers T.
4. Soient N un processus de Poisson, $\mathbb{F}$ sa filtration naturelle et T le temps du premier saut, $T = \inf\{t : N_t = 1\}$. T est un temps d'arrêt totalement inaccessible. Tout temps d'arrêt prévisible $T_n < T$ est une constante, en effet $\mathcal{F}_t \cap \{t < T\}$ est triviale. Mais T a une distribution continue (exponentielle), ainsi, on ne peut pas approcher T par des constantes.

Remarque 1.1.1. 1. Il est évident que les temps d'arrêt prévisibles sont accessibles et que les temps d'arrêt qui sont à la fois accessibles et totalement inaccessibles sont infinis p.s.

2. Il existe des temps d'arrêt accessibles qui ne sont pas prévisibles.
3. Tout temps d'arrêt peut se composer en parties accessible et totalement inaccessible comme il est indiqué dans le théorème suivant ; voir He et. al ([37], Théorème 4.20).

Théorème 1.1.3. *Pour tout temps d'arrêt T il existe $A \in \mathcal{F}_{T^-}$ tel que $A \subset \{T < \infty\}$, $T^a = T_A$ est accessible et $T^i = T_{A^c}$ est totalement inaccessible. La partition A de l'ensemble $\{T < \infty\}$ est unique p.s.*
En particulier, tout temps d'arrêt T peut se composer en parties accessible et totalement inaccessible comme suit $T = T^a \wedge T^i$ et $[\![T]\!] = [\![T^a]\!] \cup [\![T^i]\!]$.

Examinons un cas particulier où les temps d'arrêt accessibles sont prévisibles. Pour cela, nous avons besoin de définir le concept de filtrations quasi-continues à gauche ; voir He et. al ([37], Définition 3.39).

Définition 1.1.4. *Une filtration $\mathbb{F}$ est* ***quasi-continue à gauche*** *si*

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T^-}$$

pour tout temps d'arrêt prévisible T.

Le théorème suivant donne des caractérisations de filtrations quasi-continues à gauche ; voir He et. al ([37], Théorèmes 3.40 et 4.23).

Théorème 1.1.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les temps d'arrêt accessibles sont prévisibles ;*
2. *La filtration $\mathbb{F}$ est quasi-continue à gauche ;*
3. *La filtration $\mathbb{F}$ n'a aucun temps discontinu :*

$$\bigvee \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{(\lim T_n)}$$

pour toute suite croissante de temps d'arrêt (T_n).

1.1.3 Martingales

Une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in \mathbb{R}_+)$ est *uniformément intégrable (u.i)* si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}\left(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>a\}}\right) = 0.$$

Si $|X_t| \leq Y$ où Y est intégrable, alors $(X_t; t \in \mathbb{R}_+)$ est u.i, mais l'inverse n'est pas vrai.

On rappelle la définition des processus de classes (D) et (DL) ; voir C Klebaner ([21], Définition 7.25) ou Jeanblanc et. al ([47], Définition 1.2.1.5).

Définition 1.1.5. • *Un processus X est dit de* ***classe (D)*** *si la famille*

$$\{X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}, T \text{ un temps d'arrêt}\}$$

est uniformément intégrable.

- *Un processus X est dit de* ***classe (DL)*** *si pour tout $a > 0$, la famille de variables aléatoires $(X_T, T \in \mathcal{I}_a)$ est uniformément intégrable, où $\mathcal{I}_a$ est l'ensemble de temps d'arrêt inférieurs à a.*

1.1.3.1 Martingales

On donne la définition suivante ; voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Définition 3.1).

Définition 1.1.6. *Un processus $\mathbb{F}$-adapté $X = (X_t; t \in \mathbb{R}_+)$ est une $\mathbb{F}$-martingale (respectivement. sousmartingale, resp. surmartingale) si*

- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall t \geq 0$,
- $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ *(resp.* $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$, *resp.* $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$*) p.s pour tous* $s < t$.

1.1.3.2 Décomposition de Doob-Meyer

On rappelle le résultat suivant qui est dû à Meyer, ce résultat est connu sous le nom "*Décomposition de Doob-Meyer*" ; voir Dellacherie et Meyer ([31], p. 213).

Théorème 1.1.5. *(Décomposition de Doob-Meyer.) Le processus $X = (X_t; t \in \mathbb{R}_+)$ est une sousmartingale (resp. surmartingale) de classe (D) si et seulement si $X_t = M_t + A_t$ (resp. $X_t = M_t - A_t$) où M est une martingale uniformément intégrable et A est un processus croissant prévisible avec $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$.*

1.1.3.3 Martingales locales

Définition 1.1.7. *Un processus $\mathbb{F}$-adapté continu à droite M est une $\mathbb{F}$-martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) telle que*

- *La suite (T_n) est croissante et $\lim_n T_n = \infty$ p.s,*
- *Pour tout n, le processus arrêté $M^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ est une $\mathbb{F}$-martingale.*

On donne quelques critères pour qu'une martingale locale soit une martingale ; voir C Klebaner ([21], Théorème 7.26) et Revuz et Yor ([73], Proposition 1.7) :

- D'après le lemme de Fatou, une martingale locale positive M est une surmartingale. De plus, M est une martingale si et seulement si son espérance est constant ($\forall t$, $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$).
- Une martingale locale est une martingale uniformément intégrable si et seulement si elle est de classe (D).
- Une martingale locale est une martingale si et seulement si elle est de classe (DL).

Le résultat suivant est une généralisation de décomposition de Doob-Meyer ; voir Dellacherie et Meyer ([31], Théorème 12, p. 217).

Proposition 1.1.1. *Un processus X est une sousmartingale (resp. surmartingale) si et seulement si $X_t = M_t + A_t$ (resp. $X_t = M_t - A_t$) où M est une martingale locale et A est un processus croissant prévisible.*

1.1.3.4 Quasimartingales et semimartingales

On rappelle des résultats classiques de quasimartingales et semimartingales ; voir Jacod et Shiryaev ([42], Paragraphe 4c), Karatzas et Shreve ([53], Définition 3.1).

Définition 1.1.8. *Un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg X est une quasimartingale si pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$,*

$$\sup_{n,t_1,\ldots,t_n} \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq i\leq n-1} |\mathbb{E}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i})| + |X_{t_n}|\right) < \infty.$$

Définition 1.1.9.

(a) Une $\mathbb{F}$-semimartingale X est un processus $\mathbb{F}$-adapté et càdlàg de la forme

$$X = X_0 + M + A \tag{1.1}$$

où X_0 est une valeur finie et $\mathcal{F}_0$-mesurable, M est une martingale locale telle que $M_0 = 0$ et A est un processus à variation finie.

(b) Une $\mathbb{F}$-semimartingale spéciale X est une semimartingale qui admet la décomposition unique (1.1) qui est appelée la décomposition canonique de X, avec A est un processus prévisible à variation finie.

Remarque 1.1.2. • la décomposition (1.1) dans (a) n'est pas unique.

- Toute sousmartingale (ou surmartingale) est une semimartingale spéciale.
- Toute semimartingale spéciale est une différence de deux surmartingales locales.
- Toute quasimartingale est une différence de deux surmartingale positives.
- Toute semimartingale spéciale est une quasimartingale locale.

1.1.3.5 L'exponentielle de Doléans-Dade

L'exponentielle de Doléans-Dade est une application de la formule d'Itô ; voir Jacod et Shiryaev ([42], Paragraphe 4f) ou Jeanblanc et. al ([47], Sous-section 1.5.7).

Définition 1.1.10. *Soit M une martingale locale continue. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t := \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t)$$

*est une martingale locale positive (alors, une surmartingale), appelée **l'exponentielle de Doléans-Dade** de λM. Elle est une martingale si et seulement si $\forall t$, $\mathbb{E}(\mathcal{E}(\lambda M)_t) = 1$.*
Le processus $\mathcal{E}(\lambda M)$ est l'unique solution de l'equation différentielle stochastique suivante

$$dY_t = Y_t \lambda dM_t, \quad Y_0 = 1.$$

Cette définition admet une extension pour les semimartingales :

Si X est une semimartingale continue nulle en 0. L'exponentielle de Doléans-Dade de X est l'unique solution de l'équation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s.$$

Elle est donnée par

$$\mathcal{E}(X)_t := \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t).$$

De plus, on a

$$\mathcal{E}(X)_t \mathcal{E}(Y)_t = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)_t$$

et

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t \mathcal{E}(\mu M)_t = \mathcal{E}((\lambda + \mu)M + \lambda\mu\langle M\rangle)_t.$$

Alors, le produit de martingales locales exponentielles $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$ est une martingale locale si et seulement si les martingales locales X et Y sont orthogonales.

1.1.4 Les σ-algèbres progressives, optionnelles et prévisibles

On va définir les trois σ-algèbres fondamentales ; voir Nikeghbali ([69], Section 2.2), Karatzas et Shreve ([53], Chapitre 1) ou Dellacherie et Meyer ([29], Chapitre IV).

Définition 1.1.11. *Un processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est dit $\mathbb{F}$-**progressif** si pour tout $t \geqslant 0$, l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ sur $[0, t] \times \Omega$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.*
*Un ensemble $A \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est dit **progressif** si le processus $\mathbf{1}_A(t, \omega)$ est progressif. L'ensemble de tous les ensembles progressifs est une σ-algèbre appelée σ-algèbre **progressive** qui nous noterons $\mathcal{M}$.*

Proposition 1.1.2. *([29], Théorème 64, p. 196.) Si X est un processus $\mathbb{F}$-progressif et T est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Définition 1.1.12. *La σ-algèbre **optionnelle** $\mathcal{O}$ est la σ-algèbre définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par tous les processus càdlàg X $\mathbb{F}$-adaptés. Un processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est dit $\mathbb{F}$-**optionnel** si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{O}$.*

Proposition 1.1.3. *([42], Proposition 1.21.) Soient $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus optionnel et T un temps d'arrêt. Alors*

1. *$X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
2. *Le processus arrêté $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\geqslant 0}$ est optionnel.*

Définition 1.1.13. *La σ-algèbre **prévisible** $\mathcal{P}$ est la σ-algèbre définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par tous les processus $\mathbb{F}$-adaptés X càg sur $]0, \infty[$. Un processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est dit $\mathbb{F}$-**prévisible** si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{P}$.*

Proposition 1.1.4. *([29], Théorème 67, p. 200.) Soient $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus prévisible et T un temps d'arrêt. Alors*

1. *$X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_{T^-}$-mesurable.*
2. *Le processus arrêté $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\geqslant 0}$ est prévisible.*

Les inclusions suivantes sont toujours satisfaites (voir [73] ou [29]) :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{M}.$$

Nous noterons par $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ (resp. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$) la σ- algèbre optionnelle (resp. prévisible) correspondant à $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Maintenant, on va donner une caractérisation des σ-algèbres optionnelles et prévisibles en terme d'intervalles stochastiques ; voir Jacod et Shiryaev ([42], Remarque 1.26) ou Dellacherie et Meyer ([29], Théorèmes 64 et 67).

Définition 1.1.14. • *La σ-algèbre optionnelle $\mathcal{O}$ est engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $[\![T, \infty[\![$, où T est un temps d'arrêt.*

$$\mathcal{O} = \sigma\{[\![T, \infty[\![, T \text{ est un temps d'arrêt}\}.$$

• *La σ-algèbre prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par les intervalles stochastiques $]\!]S, T]\!]$, où S, T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$.*

$$\mathcal{P} = \sigma\{]\!]S, T]\!], S,\ T \text{ sont temps d'arrêt et } S \leq T\}.$$

Remarque 1.1.3. On a aussi

$$\mathcal{O} = \sigma\{[\![0, T[\![, T \text{ est un temps d'arrêt}\}.$$

Définition 1.1.15. *Pour un processus càdlàg X, on définit le processus $X_- = (X_{t^-})_{t\in\mathbb{R}_+}$, où X_{t^-} est la limite à gauche de X en $t \in (0, \infty)$, par convention, $X_{0^-} = 0$. Aussi, le processus de saut est défini par $\Delta X := X - X_-$.*

Nous donnons un résultat qui est souvent utilisé dans la théorie des martingales ; voir Nikeghbali ([69], Proposition 2.20).

Proposition 1.1.5. *Soit $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus optionnel. Alors*

1. *Le processus de saut $\Delta X := X - X_-$ est optionnel ;*
2. *X_- est prévisible ;*
3. *Si X est prévisible, alors ΔX est prévisible.*

1.1.5 Temps aléatoires

La définition suivante caractérise les σ-algèbres $\mathcal{F}_{T^-}$, $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{T^+}$ pour un temps aléatoire T ; voir Aksamit ([1], Définition 1.2) et Barlow et. al ([13], Définition, p. 286).

Définition 1.1.16. *Pour un temps aléatoire T, on définit les tribus $\mathcal{F}_{T^-}$, $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{T^+}$ comme suit*

$$\mathcal{F}_{T^-} := \sigma\{H_T : H \text{ } est \text{ } un \text{ } processus \text{ } \mathbb{F}-prévisible \text{ } sur \text{ } [0,\infty]\},$$
$$\mathcal{F}_{T} := \sigma\{H_T : H \text{ } est \text{ } un \text{ } processus \text{ } \mathbb{F}-optionnel \text{ } sur \text{ } [0,\infty]\},$$
$$\mathcal{F}_{T^+} := \sigma\{H_T : H \text{ } est \text{ } un \text{ } processus \text{ } \mathbb{F}-progressif \text{ } sur \text{ } [0,\infty]\},$$

avec H_∞ est une variable aléatoire arbitraire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.

Proposition 1.1.6. *Soit T un temps aléatoire.*

(a) Pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_{T^-}$-mesurable K, il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible $\acute{K}$ tels que $K = \acute{K}_T$.

(b) Pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable K, il existe un processus $\mathbb{F}$-optionnel $\acute{K}$ tels que $K = \acute{K}_T$.

(c) Pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_{T^+}$-mesurable K, il existe un processus $\mathbb{F}$-progressif $\acute{K}$ tels que $K = \acute{K}_T$.

Preuve. Voir par exemple Aksamit [1] p. 21.

1.1.6 Projections et projections duales

Les projections et les projections duales jouent un rôle important dans la théorie de grossissement de filtrations. On rappelle les définitions des projections optionnelles et prévisibles, voir par exemple He et. al ([37], Théorèmes 5.1 et 5.2) ou Jeanblanc et. al ([47], p .264-265).

Définition 1.1.17. *Soit X un processus mesurable borné (ou positif). La $\mathbb{F}$-**projection optionnelle** de X est l'unique processus optionnel ${}^oX$ tel que pour tout temps d'arrêt T, on a*

$$\mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_T) = {}^oX_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \text{ } p.s.$$

*La $\mathbb{F}$-**projection prévisible** de X est l'unique processus prévisible ${}^pX$ tel que pour tout temps d'arrêt prévisible T, on a*

$$\mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T^-}) = {}^pX_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \text{ } p.s.$$

Les projections dépendent de la filtration, en cas de divers filtrations nous noterons ${}^{o,\mathbb{F}}X$ la $\mathbb{F}$-projection optionnelle de X et ${}^{p,\mathbb{F}}X$ la $\mathbb{F}$-projection prévisible de X.

On donne l'exemple suivant ; voir Nikeghbali ([69], Remarque 4.6).

Exemple 1.1.2. Si H est une variable aléatoire intégrable, et si (H_t) est la version càdlàg de la martingale $\mathbb{E}(H|\mathcal{F}_t)$, alors la projection optionnelle du processus constant $X_t(\omega) = H(\omega)$ est (H_t) et sa projection prévisible est (H_{t^-}).

Remarque 1.1.4. les projections optionnelles et prévisibles partagent des propriétés communes avec l'espérance conditionnelle ; voir par exemple Li ([59], Proposition 1.3.1) :

Si X est un processus mesurable et Y est un processus borné optionnel (resp. prévisible), alors

$${}^o(XY) = {}^o(X)Y \quad (resp. \text{ } {}^p(XY) = {}^p(X)Y).$$

Proposition 1.1.7. *Supposons que X est un processus mesurable. Si les projections optionnelles et prévisibles de X existent, alors ${}^{p}({}^{o}X) = {}^{p}X$.*

Preuve. Voir par exemple Li [59] p. 18.

Maintenant, nous présentons un théorème important sur la différence entre les σ-algèbres optionnelles et prévisibles.

Théorème 1.1.6. *([73], Corollaire 5.7.) Soit $\mathcal{I}$ une σ-algèbre engendrée par les processus $(X_t - X_{t^-})$ où X représente les $\mathbb{F}$-martingales bornées, alors*

$$\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \mathcal{I}$$

En particulier, si toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues, alors $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ et tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt est prévisible.

On donne l'exemple suivant ; voir Jeanblanc et. al ([47], Proposition 5.10.3.1).

Exemple 1.1.3.
1. Dans la filtration Brownienne, tout temps d'arrêt est prévisible.
2. Soient $\mathbb{F}$ une filtration, B un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien et h un processus optionnel borné. Soit
$$Y_t = \int_0^t h_s ds + B_t.$$
Si $\widetilde{h}_t = \mathbb{E}(h|\mathcal{F}_t^Y)$ est la projection optionnelle de h par rapport à $(\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s, s \leq t))$, alors le processus
$$X_t = Y_t - \int_0^t \widetilde{h}_s ds$$
est un $\mathcal{F}_t^Y$-mouvement Brownien.

Pour la définition des projections duales optionnelles et prévisibles, voir par exemple He et. al ([37], Sections 5.18 et 5.19) ou Jeanblanc et. al ([47], p. 265).

Définition 1.1.18.

(a) Soit A un processus càdlàg à variation localement intégrable (pas nécessairement adapté). La ***projection duale optionnelle*** *de A est l'unique processus optionnel A^o tel que pour tout processus optionnel H, on a*

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,\infty[} H_s dA_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,\infty[} H_s dA_s^o\right).$$

(b) Soit A un processus càdlàg à variation localement intégrable (pas nécessairement adapté). La ***projection duale prévisible*** *de A est l'unique processus prévisible A^p tel que pour tout processus prévisible H, on a*

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,\infty[} H_s dA_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,\infty[} H_s dA_s^p\right).$$

Les projections duales dépendent de la filtration, en cas de divers filtrations, nous noterons $A^{o,\mathbb{F}}$ la $\mathbb{F}$-projection duale optionnelle de A et $A^{p,\mathbb{F}}$ la $\mathbb{F}$-projection duale prévisible de A.

Le résultat suivant relie le saut de la projection duale avec la projection de saut, voir par exemple He et. al ([37], Théorème 5.27, p. 150).

Lemme 1.1.1. *Soit A un processus croissant intégrable. Alors*

$$\Delta A^o = {}^o(\Delta A) \quad et \quad \Delta A^p = {}^p(\Delta A).$$

Lemme 1.1.2. *Soit A un processus croissant intégrable. Alors, A^p est l'unique processus prévisible croissant intégrable tel que ${}^oA - A^p$ est une martingale.*

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et. al [47] p. 267.

Une application utilisable du lemme précédent est la relation entre les processus variations quadratiques et les processus variations quadratiques prévisibles ; voir Aksamit ([1], Exemple 1.15) :

Exemple 1.1.4. Pour deux semimartingales X et Y, on a $[X,Y]^p = \langle X,Y\rangle$ et $[X,Y] - \langle X,Y\rangle$ est une martingale.

Maintenant, on définit le compensateur prévisible ; voir Jacod ([40], p. 36).

Définition 1.1.19. *Soit A un processus optionnel à variation intégrable. La projection duale prévisible de A est aussi appelée le **compensateur prévisible** de A.*

1.2 Propriété de représentation prévisible (PRP)

La propriété de représentation prévisible joue un rôle important dans la notion de filtrations faiblement Browniennes, voir C Klebaner ([21], p. 237-240), Mansuy et Yor ([66], p. 71-75), Jeanblanc et. al ([47], p. 57-60).

D'abord, nous rappelons la décomposition orthogonale de Kunita-Watanabe d'une martingale M par rapport à une autre martingale X ; voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Proposition 4.14), Revuz et Yor ([73], p. 209).

Théorème 1.2.1. *Soit X une $\mathbb{F}$-martingale locale continue. Alors, toute $\mathbb{F}$-martingale locale continue M nulle en 0 admet la décomposition orthogonale unique suivante :*

$$M_t = \int_0^t H_s dX_s + N_t \tag{1.2}$$

où H est un processus prévisible et N est une martingale locale orthogonale à X.

Donc, la question qui se pose : Pour quelle martingale locale X, toute martingale locale N dans (1.2) soit une constante ? Cette question conduit à la définition suivante ; voir Beghdadi-Sakrani ([15], p. 349), Mansuy et Yor ([66], Définition 4.1).

Définition 1.2.1. *Une martingale locale continue X adaptée a une filtration $\mathbb{F}$ est dite a la $\mathbb{F}$-**propriété de représentation prévisible (PRP)**, si pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale M, il existe une constante c et un processus unique $\mathbb{F}$-prévisible H satisfaisant $\int_0^t H_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty$ tels que*

$$M_t = c + \int_0^t H_s dX_s, \quad t \geq 0.$$

Généralement, une $\mathbb{F}$-martingale locale X a la $\mathbb{F}$-propriété de représentation prévisible si toute martingale locale $\mathbb{F}$-adaptée M peut s'écrire sous la forme $M_t = c + \int_0^t H_s dX_s$, avec $\int_0^t H_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty$.
En particulier, X a la PRP par rapport à sa filtration naturelle.

Notons que la PRP dans la définition 1.2.1 est parfois appelée la *propriété de représentation prévisible forte.*

1.2.1 Cas de mouvement Brownien

Soient B un mouvement Brownien réel et $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle.

Le théorème suivant donne la propriété de représentation prévisible dans la filtration Brownienne ; voir par exemple Clark ([22], p. 1283), Davis ([27], Théorème 6), Yor ([78], p. 110).

Théorème 1.2.2. *Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $\mathbb{F}^B$-martingale de carré intégrable (i.e., $\sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$). Il existe une constante c et un processus prévisible unique H satisfaisant $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$ tels que*

$$\forall t, \quad M_t = c + \int_0^t H_s dB_s.$$

Si M est une $\mathbb{F}^B$-martingale locale, il existe un processus prévisible unique H satisfaisant $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ tel que

$$\forall t, \quad M_t = c + \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.3}$$

Preuve. Voir par exemple Liptser et Shiryayev [64] p. 171-174 ou Protter [72] p. 186-187.

Ce théorème est vrai dans le cas multidimensionnel (voir par exemple Karatzas et Shreve ([53], Théorème 4.15)) : Soient B un mouvement Brownien de dimension n et M une $\mathbb{F}^B$-martingale de carré intégrable, il existe une constante c et un processus prévisible unique H de dimension n satisfaisant $\mathbb{E}(\int_0^t (H_s^i)^2 ds) < \infty$ tels que

$$\forall t, \quad M_t = c + \sum_{i=1}^n \int_0^t H_s^i dB_s^i.$$

En particulier, toute $\mathbb{F}^B$-martingale locale admet une version continue, mais (1.3) est plus précise (voir Revuz et Yor ([73], Théorème 3.5), Yor ([78], p. 110)).

Comme les intégrales d'Itô sont continues, et toute martingale locale d'une filtration Brownienne est une intégrale d'Itô, il s'ensuit que toutes les martingales locales d'une filtration Brownienne sont continues. En fait nous avons le résultat suivant ; voir C Klebaner ([21], Corollaire 8.36).

Corollaire 1.2.1.
1. *Toutes les martingales locales de la filtration Brownienne sont continues.*
2. *Tous les processus continus à droite et adaptés sont prévisibles.*

Le théorème 1.2.2 est valable pour une martingale satisfaisant $\sup_t \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

Théorème 1.2.3. *Soit M une $\mathbb{F}^B$-martingale satisfaisant $\sup_t \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$. Alors il existe un processus $\mathbb{F}^B$-prévisible H tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^t H_s^2 ds < \infty\right) = 1$, et pour tout t, M_t admet la représentation unique suivante*

$$M_t = c + \int_0^t H_s dB_s.$$

Preuve. Voir par exemple Liptser et Shiryayev [64] p. 178-180.

Le corollaire suivant assure l'existence du processus H dans la représentation (1.3) ; voir C Klebaner ([21], Corollaire 8.37).

Corollaire 1.2.2. *Soit M une martingale de carré intégrable $\mathbb{F}^B$-adaptée. Alors il existe un processus prévisible H satisfaisant $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$ tel que la représentation (1.3) soit satisfaite. De plus,*

$$\langle M, B\rangle_t = \int_0^t H_s ds, \quad et \quad H_t = \frac{d\langle M, B\rangle_t}{dt}. \tag{1.4}$$

On donne quelques exemples de propriété de représentation prévisible dans le cas Brownien ; voir C Klebaner ([21], Exemples 8.24 et 8.26), Jeanblanc et. al ([47], Commentaire 1.6.2.5 (partie (c)), Exemple 1.6.2.6 (partie (a))).

Exemple 1.2.1.

(a) *Représentation des martingales*

1. $M_t = B_t^2 - t$. Alors $M_t = \int_0^t 2B_s dB_s$, et $H_t = 2B_t$.
2. Soit $M_t = f(B_t, t)$ une martingale, par la formule d'Itô $dM_t = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)dB_t$. Ainsi $H_t = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)$. ça montre aussi que

$$\frac{d\langle f(B,t), B\rangle_t}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t).$$

(b) Soit $\mathbb{F}$ une filtration engendrée par deux mouvements Browniens indépendants B et W, et soit $M_t = \int_0^t W_s dB_s$, avec M_t est une martingale comme une intégrale stochastique satisfaisant $\mathbb{E}\int_0^t W_s^2 ds < \infty$. On va montrer que M n'a pas la PRP.
On a $\langle M, M\rangle_t = \int_0^t W_s^2 ds$. Comme $W_t^2 = \frac{d}{dt}\langle M, M\rangle_t$, ce qui montre que W_t^2 est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable. La martingale $X_t = W_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t^M$-adaptée, mais n'est pas une intégrale d'un processus prévisible par rapport à M. Par la formule d'Itô, on a : $X_t = 2\int_0^t W_s dW_s$,
et $\langle X, M\rangle_t = \int_0^t W_s^2 d\langle W, B\rangle_s = 0$. Supposons qu'il existe un processus prévisible H tel que $X_t = \int_0^t H_s dM_s$. Alors par (1.4) $H_t = \frac{d}{dt}\langle X, M\rangle_t = 0$, implique que $X_t = 0$, qui est une contradiction.

(c) Soient B un MB et $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle. Posons $X_t = a + \int_0^t K_s dB_s$ où $(K_t, t \geq 0)$ est un processus continu et ne s'annule pas. Alors X a la PRP par rapport à sa filtration naturelle.

(d) On donne un exemple d'une martingale qui n'a pas la PRP :
Soit $M_t = \int_0^t \exp(aB_s - \frac{a^2 s}{2})d\beta_s = \int_0^t \mathcal{E}(aB)_s d\beta_s$, où B, β sont deux mouvements Browniens indépendants et de dimension 1, et $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Doléans-Dade de aB.
On a $d\langle M\rangle_t = (\mathcal{E}(aB)_t)^2 dt$, et $(\mathcal{E}_t := \mathcal{E}(aB)_t, t \geq 0)$ est $\mathbb{F}^M$-adapté et donc est une $\mathbb{F}^M$-martingale. Puisque $\mathcal{E}_t = 1 + a\int_0^t \mathcal{E}_s dB_s$, on ne peut pas écrire la martingale $\mathcal{E}$ comme une intégrale ni par rapport à β ni par rapport à M. En fait, toute $\mathbb{F}^M$-martingale peut s'écrire comme une somme d'une intégrale stochastique par rapport à M (ou β) et une intégrale stochastique par rapport à B.

Le théorème 1.2.2 soulève le problème suivant : Quelle martingale peut s'écrire comme $H \centerdot B$ pour un convenable mouvement Brownien B ?
La proposition suivante donne une réponse partielle.

Proposition 1.2.1. *Si M est une martingale locale continue telle que la mesure $d\langle M, M\rangle_t$ est p.s équivalente à la mesure de Lebesgue, alors il existe un processus strictement positif $\mathbb{F}^M$-prévisible H et un $\mathbb{F}^M$-mouvement Brownien B tels que*

$$d\langle M, M\rangle_t = H_t dt \quad et \quad M_t = c + \int_0^t H_s^{\frac{1}{2}} dB_s.$$

Preuve. voir par exemple Revuz et Yor [73] p. 202.

Remarque 1.2.1. Si $d\langle M, M\rangle_t$ est seulement absolument continue par rapport à dt, la proposition précédente échoue et la filtration $\mathbb{F}^M$ pas nécessairement muni par un mouvement Brownien, mais on peut obtenir la relation (1.3) par un grossissement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, comme il est montré dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.4. *([53], Théorème 4.2.) Soit M une martingale locale continue telle que $d\langle M, M\rangle_t \ll dt$. Alors, il existe dans un espace probabilisé grossi un mouvement Brownien B et un processus prévisible H tels que*

$$M_t = c + \int_0^t H_s dB_s.$$

Les lemmes suivants donnent une autre condition caractéristique pour l'existence de la PRP.

Lemme 1.2.1. *Soit M une martingale locale par rapport à une filtration $\mathbb{F}$, avec $M_0 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M a la PRP par rapport à $\mathbb{F}$.*
2. *Toute $\mathbb{F}$-martingale locale L nulle en 0 telle que LM est une $\mathbb{F}$-martingale locale nulle en 0, est nulle.*

Preuve. voir par exemple Jeanblanc et Song [45] p. 6.

Lemme 1.2.2. *Soit M une martingale locale nulle en 0 telle que M a la PRP par rapport à une filtration $\mathbb{F}$. Alors pour tout temps d'arrêt T, M^T a la PRP par rapport à $\mathbb{F}^T = (\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$.*

Preuve. voir par exemple He et. al [37] p. 365-366.

1.2.2 La PRP pour l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration Brownienne

Soient $\mathbb{G}$ une filtration qui contient une filtration Brownienne $\mathbb{F}^B$, i.e., $\mathbb{F}^B \subset \mathbb{G}$, et X une $\mathbb{G}$-martingale continue et B un $\mathbb{G}$-mouvement Brownien. Posons la martingale $Y_t = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_t^B)$.

Théorème 1.2.5. *Si X_t est une $\mathcal{G}_t$-martingale de carré intégrable, alors la $\mathcal{F}_t^B$-martingale de carré intégrable $Y_t = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_t^B)$ admet la représentation*

$$Y_t = c + \int_0^t \mathbb{E}(H_s | \mathcal{F}_s^B) dB_s, \quad \forall t$$

où H_t est un processus $\mathcal{G}_t$-prévisible satisfaisant $\langle X, B\rangle_t = \int_0^t H_s ds$ et $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$.

Preuve. voir par exemple Liptser et Shiryayev [64] p. 194-195.

Corollaire 1.2.3. *Soit X_t une $\mathcal{G}_t$-martingale de carré intégrable telle que*

$$X_t = \int_0^t H_s dB_s,$$

et $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$. Alors $\mathbb{P}$-p.s, pour tout t,

$$\mathbb{E}(\int_0^t H_s dB_s | \mathcal{F}_t^B) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s | \mathcal{F}_s^B) dB_s$$

où $\mathbb{E}(H_s | \mathcal{F}_s^B)$ est la version prévisible de l'espérance conditionnelle.

Preuve. voir par exemple Jeanblanc et. al [47] p. 58.

1.2.3 Cas de processus de Poisson

Des résultats similaires sont valables pour la filtration de Poisson ; voir C Klebaner ([21], Théorème 8.38).

Théorème 1.2.6. *Soit M une martingale locale adaptée à la filtration de Poisson $\mathbb{F}^N$. Alors il existe un processus prévisible H tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\widehat{N}_s,$$

où $\widehat{N}_t = N_t - t$ est le processus de Poisson compensé.

On donne quelques exemples de la propriété de représentation prévisible dans le cas Poissonnien ; voir C Klebaner ([21], Exemple 8.27).

Exemple 1.2.2.
1. Soit $\mathbb{F}^N$ la filtration naturelle de processus de Poisson N d'intensité η. Posons $M_t = N_t - \eta t$. Alors toute $\mathbb{F}^N$-martingale locale X peut s'écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dM_s$$

pour un processus $\mathbb{F}^N$-prévisible H. Donc la martingale M a la PRP par rapport à $\mathbb{F}^N$.

2. Soit $\mathbb{F}$ une filtration engendrée par un mouvement Brownien B et un processus de Poisson N, et soit $M_t = B_t + N_t - t = B_t + \widehat{N}_t$, où $\widehat{N}_t = N_t - t$, M est une martingale comme une somme de deux martingales. On va montrer que M n'a pas la PRP.
On a $[M,M]_t = [B,B]_t + [N,N]_t = t + N_t$. ça donne $N_t = [M,M]_t - t$ qui est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable. Comme $B_t = M_t - N_t + t$ est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable, alors la martingale $X_t = \int_0^t N_{s^-} dB_s$ est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable, mais n'est pas une représentation prévisible. Si non, $X_t = \int_0^t N_{s^-} dB_s = \int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s dB_s = \int_0^t H_s d\widehat{N}_s$, et $\int_0^t (N_{s^-} - H_s) dB_s = \int_0^t H_s d\widehat{N}_s$. Comme l'intégrale à droite est à variation finie, $H_s = N_{s^-}$, $\forall s$, $p.s.$ Ainsi $\int_0^t H_s d\widehat{N}_s = 0$, c.à.d $\int_0^t N_{s^-} dN_s = \int_0^t N_{s^-} ds$. Mais ça est impossible. Pour avoir la contradiction, soit $t = T_2$ le temps de deuxième saut de N. Alors $\int_0^{T_2} N_{s^-} dN_s = 1$ et $\int_0^{T_2} N_{s^-} ds = T_2 - T_1$.

1.2.4 Cas de processus de Lévy

On rappelle le résultat suivant ; voir He et. al ([37], Corollaire 13.54, p. 392).

Corollaire 1.2.4. *Soit X un processus de Lévy homogène avec $X_0 = 0$ et $\mathbb{F}^X$ sa filtration naturelle augmentée. Supposons que X est une martingale. Alors X a la propriété de représentation prévisible si et seulement si X est un mouvement Brownien standard ou un processus de Poisson compensé.*

Remarque 1.2.2. La définition 1.2.1 s'accorde avec les martingales locales continues, mais elle est différente de la définition de la PRP pour les semimartingales donnée dans C Klebaner ([21], p. 240), Cohen ([26], p. 13-14), He et. al ([37], chapitre XIII), Jacod et Shiryayev ([42], p. 185) et Liptser et Shiryayev ([63], p. 250).

Définition 1.2.2. *On dit qu'une martingale locale $\mathbb{F}$-adaptée X a la $\mathbb{F}$-PRP, si toute $\mathbb{F}$-martingale locale M peut s'écrire sous la forme*

$$M_t = M_0 + \int_0^t h_s dX_s^c + \int_0^t H_s dX_s^d$$

pour deux processus prévisibles différents h et H, avec X^c et X^d représentent respectivement la partie continue et discontinue de X.

Notons que parfois la PRP dans la définition 1.2.2 est appelée la *propriété de représentation prévisible faible.*

Exemple 1.2.3. La martingale M donnée dans l'exemple 1.2.2 (partie 2.) a la PRP faible par rapport à $\mathbb{F}^M$.

1.3 Filtrations faiblement et fortement Browniennes

Nous finissons ce chapitre par la question suivante : Étant donné une filtration sur un espace probabilisé, comment reconnaître si elle est engendrée par un mouvement Brownien ou non ? Cette question a surtout de l'intérêt pour une filtration faiblement Brownienne.
En toute généralité, il existe des filtrations faiblement Browniennes, qui ne sont pas Browniennes, et le caractère non-Brownien d'une filtration faiblement Brownienne reste beaucoup plus délicat.

Les notions de faiblement et fortement Brownienne sont étudiées avec des exemples dans Revuz et Yor ([73], p. 219-220), Beghdadi-Sakrani et Émery [16], Mansuy et Yor ([66], p. 103-114), Jeanblanc et. al ([47], p. 311-316), et Yor [78].

On rappelle tout d'abord la définition de filtrations faiblement et fortement Browniennes ; voir par exemple Beghdadi-Sakrani et Émery ([16], p. 241), Nikeghbali ([69], Définitions 8.39 et 8.40), Émery ([34], p. 75).

Définition 1.3.1.
- *Une filtration $\mathbb{F}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **faiblement Brownienne** si $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$-p.s triviale et s'il existe un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien B qui a la PRP par rapport à $\mathbb{F}$.*
- *Une filtration $\mathbb{F}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **fortement Brownienne** si elle est engendrée par un mouvement Brownien standard, i.e., s'il existe un $\mathbb{F}$-MB B tel que $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$.*

Dans la définition précédente, on suppose que B est un MB unidimensionnel, et la définition reste vraie dans le cas multidimensionnel.

Remarquons que toute filtration fortement Brownienne est faiblement Brownienne puisque le mouvement Brownien a la PRP.

On donne quelques exemples des filtrations faiblement et fortement Browniennes ; voir par exemple Jeanblanc et. al ([47], Quelques exemples 5.8.2 (parties (a), (d), (e) et (g)), p. 313-315) et Yor ([78], p. 110).

Exemple 1.3.1.

(a) Toute filtration Brownienne engendrée par un MB B est aussi engendrée par un mouvement Brownien sous la forme

$$(B_t^{(s)} = \int_0^t s(u)dB_u; t \geq 0), \quad \textit{où} \quad s : \mathbb{R}_+ \to \{\pm 1\} \textit{ est déterministe.}$$

Généralement, on peut considérer ε, tout processus $\mathbb{F}^B$-prévisible à valeurs dans $\{\pm 1\}$, et on peut associer

$$(B_t^{(\varepsilon)} = \int_0^t \varepsilon_u dB_u; t \geq 0)$$

Alors, la filtration naturelle de $B^{(\varepsilon)}$ satisfait $\mathbb{F}^{B^{(\varepsilon)}} \hookrightarrow \mathbb{F}^B$ (on définira le symbole d'immersion ($\hookrightarrow$) dans la section 3.1).

(b) *Le mouvement Brownien réfléchi (ou transformation de Lévy)*

Nous avons besoin les formules de Tanaka qui sont des variantes de la formule d'Itô pour la valeur absolue et les parties positives et négatives d'un MB ; voir Jeanblanc et. al ([47], Proposition 4.1.5.1).

Proposition 1.3.1. *(Formule de Tanaka.) Soient B un mouvement Brownien et L_t^x son temps local en x. Pour tout t,*

$$(B_t - x)^+ = (B_0 - x)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > x\}} dB_s + \frac{1}{2} L_t^x$$

$$(B_t - x)^- = (B_0 - x)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s \leq x\}} dB_s + \frac{1}{2} L_t^x$$

$$|B_t - x| = |B_0 - x| + \int_0^t sgn(B_s - x) dB_s + \frac{1}{2} L_t^x$$

où $sgn(x) = 1$ si $x > 0$ et $sgn(x) = -1$ si $x \leq 0$, et $L_t^x = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}(B_s) ds$.

Cet exemple est un cas particulier de l'exemple précédent : posons $\varepsilon_s = sgn(B_s)$ et $B_t^{(\varepsilon)} = \int_0^t sgn(B_u) dB_u$. Le processus $B^{(\varepsilon)}$ est un mouvement Brownien dans la filtration $\mathbb{F}^{|B|}$. Avec $L_t = \sup_{u \leq t}(-B_u^{(\varepsilon)})$, il s'ensuit que $\mathcal{F}_t^{B^{(\varepsilon)}} = \mathcal{F}_t^{|B|}$ d'après la formule de Tanaka précédente, alors $\mathbb{F}^{|B|}$ est fortement Brownienne et différente de $\mathbb{F}^B$ puisque la variable aléatoire $sgn(B_t)$ est indépendante de $\sigma(|B_s|, s \leq t)$, et en fait de $\mathcal{F}_\infty(|B|)$.

Néanmoins, en général, toute $(\mathcal{F}_t^B; t \geq 0)$-martingale $(M_t; t \geq 0)$ peut s'écrire

$$M_t = c + \int_0^t m_s^{(\varepsilon)} dB_s^{(\varepsilon)} = c + \int_0^t m_s^{(\varepsilon)} \varepsilon_s dB_s$$

pour un processus $(\mathcal{F}_s^B; s \geq 0)$-prévisible $(m_s^{(\varepsilon)}; s \geq 0)$. En effet, par la représentation d'Itô : $M_t = c + \int_0^t m_s dB_s$, on obtient $m_s = m_s^{(\varepsilon)} \varepsilon_s$.

(c) Soit $Y_t = \int_0^t B_s dW_s$, où W et B sont des mouvements Browniens indépendants. Pour

$$Y_t = \int_0^t |B_s| sgn(B_s) dW_s = \int_0^t |B_s| d\widehat{W}_s$$

où $\widehat{W}_t = \int_0^t sgn(B_s) dW_s$, il s'ensuit que

$$\mathcal{F}_t^Y = \sigma\{|B_s|, \widehat{W}_s; s \leq t\} = \sigma\{\widehat{B}_s, \widehat{W}_s; s \leq t\},$$

où $\widehat{B}_t = \int_0^t sgn(B_s) dB_s$ est un MB indépendant de $\widehat{W}$. Toute $\mathbb{F}^Y$-martingale peut s'écrire

$$y + \int_0^t \varphi_s d\widehat{B}_s + \int_0^t \psi_s d\widehat{W}_s,$$

pour deux processus $\mathbb{F}^Y$-prévisibles φ et ψ.

(d) *Filtration engendrée par une intégrale stochastique*
Soient $X_t = \int_0^t H_s dW_s$, où W est un $\mathbb{F}^X$-mouvement Brownien ($\mathbb{F}^X$ n'est pas nécessairement la filtration naturelle de W), et H un processus continu strictement positif et $\mathbb{F}^X$-adapté. Alors $\mathcal{F}_t^X = \sigma(H_s, W_s; s \leq t)$.

(e) Soient W et B deux mouvements Browniens indépendants, et soit $Z = BW$. Puisque $B_t W_t = \int_0^t (B_s dW_s + W_s dB_s)$, on obtient : $B_t^2 + W_t^2$ est $\mathcal{F}_t^Z$-mesurable. Alors les variables aléatoires $\frac{1}{\sqrt{2}}|B_t + W_t|$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}|B_t - W_t|$ sont $\mathcal{F}_t^Z$-mesurables. Les processus $\beta_t^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t \pm W_t)$ sont des mouvements Browniens indépendants. La filtration $\mathbb{F}^Z$ est engendrée par deux MB réfléchis indépendants, i.e., $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(\frac{1}{\sqrt{2}}|B_s + W_s|, \frac{1}{\sqrt{2}}|B_s - W_s|; s \leq t) = \sigma(\beta_s^+, \beta_s^-; s \leq t)$.

Chapitre 2

Grossissement de filtrations

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats connus de grossissement de filtrations. Notons que notre intérêt principal dans cette thèse est le grossissement progressif avec un temps honnête, donc nous présenterons quelques résultats du grossissement initial, cependant le reste du chapitre est consacré à des résultats sur les caractérisations de grossissement progressif et décompositions de semimartingales.

L'étude de grossissement de filtration suppose d'habitude l'existence d'une variable aléatoire finie τ dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles. Rappelons que sous ces conditions,

(i) Toute $\mathbb{F}$-martingale admet une version càdlàg.

(ii) La projection $\mathbb{F}$-prévisible de toute martingale $(X_t, t \geq 0)$ est $(X_{t-}, t \geq 0)$.

2.1 Préliminaires

On rappelle la définition du grossissement de filtrations ; voir par exemple Jeulin et Yor ([52], p. 1), Li ([59], Définition 2.1.1).

Définition 2.1.1. *Une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ qui satisfait les conditions habituelles dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, est dite un **grossissement** de $\mathbb{F}$ associée à τ (ou seulement un **grossissement** de $\mathbb{F}$) si :*

(i) $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$, i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

(ii) τ est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt.

Le premier résultat obtenu dans le cadre de grossissement de filtrations est le théorème de Stricker.

Théorème 2.1.1. *(Stricker [75].) Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux filtrations telles que, pour tout t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Si X_t est une $\mathcal{G}_t$-semimartingale qui est $\mathcal{F}_t$-adaptée, alors X_t est une $\mathcal{F}_t$-semimartingale.*

Le problème de grossissement abordé ici est le problème inverse :
Est-ce-que toute $\mathbb{F}$-martingale X reste une $\mathbb{G}$-semimartingale ? et si oui : Quelle est sa $\mathbb{G}$-décomposition ?

Il semble naturel de caractériser des situations où les propriétés de semimartingale ou martingale sont préservées, la théorie de grossissement de filtration est centrée autour à deux hypothèses suivantes ; voir par exemple Coculescu et Nikeghbali ([24], Définitions 4 et 6), Jeulin et Yor ([50], p. 429) :

(i) *Hypothèse (H)* : Toute $\mathbb{F}$-martingale est une $\mathbb{G}$-martingale, qui est notre intérêt dans cette thèse,

(ii) *Hypothèse (Ĥ)* : Toute $\mathbb{F}$-semimartingale est une $\mathbb{G}$-semimartingale.

Il y a essentiellement deux manières de grossir les filtrations ; voir par exemple Coculescu et Nikeghbali ([24], p. 684) :

- *Grossissement initial* : pour lequel $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}$, i.e., la nouvelle information $\mathcal{H}$ est introduite à l'origine de temps ;
- *Grossissement progressif* : pour lequel $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$, i.e., la nouvelle information est amenée progressivement à mesure que le temps t augmente.

Avant de présenter les théorèmes de base sur les grossissements de filtrations, nous avons la proposition suivante qui donne la relation entre les martingales par rapport à la filtration initiale et la filtration grossie ; voir Callegaro et. al ([19], Proposition 2.1).

Proposition 2.1.1. *Soit $\mathbb{G}$ une filtration plus grande que $\mathbb{F}$, i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, pour tout $t \geq 0$. Si X est une $\mathbb{F}$-martingale uniformément intégrable, alors il existe une $\mathbb{G}$-martingale $\widetilde{X}$, telle que $\mathbb{E}(\widetilde{X}_t|\mathcal{F}_t) = X_t, t \geq 0$.*

Preuve. Le processus $\widetilde{X}$ défini par $\widetilde{X}_t := \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{G}_t)$ est une $\mathbb{G}$-martingale, et

$$\mathbb{E}(\widetilde{X}_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{G}_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t) = X_t. \qquad \square$$

Remarque 2.1.1. L'unicité de la martingale $\widetilde{X}$ n'est pas demandée dans la proposition précédente et n'est pas satisfaite dans le cas général (voir Callegaro et. al ([19], Remarque 2.3)).

2.2 Grossissement initial

La théorie de grossissement initial est très connue que le grossissement progressif ; voir par exemple Jeulin et Yor ([52], p. 1).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles, et $\tau : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire. On considère $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)} = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau)$ (ou généralement, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \widetilde{\mathcal{F}}$ où $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une σ-algèbre), la filtration obtenue à partir de $\mathcal{F}_t$ par adjonction de la variable τ au temps $t = 0$. Plus précisément, pour satisfaire les conditions usuelles, on redéfinit

$$\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(\tau))$$

qui est appelée le *grossissement initial* de $\mathbb{F}$ avec τ (voir Li et Rutkowski ([61], Définition 1.2)).

On rappelle qu'il existe une famille de distributions conditionnelle régulière $\lambda_t(\omega, dx)$ telles que $\lambda_t(., A)$ est une version de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau \in A\}}|\mathcal{F}_t)$ et pour tout ω, $\lambda_t(\omega, .)$ est une probabilité dans $\mathbb{R}$.

2.2.1 Critère de Jacod

Le théorème le plus important pour le grossissement initial est dû à Jacod.

Théorème 2.2.1. *(critère de Jacod ([41], Théorème 1.1.)) Supposons que pour tout $t \geq 0$, il existe une mesure positive σ-finie $\eta_t(dx)$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que*

$$\lambda_t(\omega, dx) \ll \eta_t(dx) \quad p.s.$$

Alors toute $\mathcal{F}_t$-semimartingale est une $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-semimartingale.

Il y a une manière canonique de choisir les mesures η_t.

Proposition 2.2.1. *([41], Proposition 1.5.) Il existe une mesure positive σ-finie η sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que*

$$\lambda_t(\omega, .) \ll \eta(.) \text{ pour tout } t > 0,\ \omega \in \Omega.$$

Dans ce cas, on peut prendre pour η la loi de la variable τ.

La difficulté major est de montrer l'existence de la version universelle de la famille de densité $\lambda_t(\omega, dx)$, Jacod ([41], Lemme 1.8) a étudié l'existence d'une bonne version des densités $p_t(\omega, x) = \lambda_t(\omega, dx)/\eta(dx)$ au sens suivant :
On introduit un espace auxiliaire $\widehat{\Omega}$ muni d'une filtration $\widehat{\mathbb{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ par $\widehat{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$, $\widehat{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t}(\mathbb{R} \otimes \mathcal{F}_s)$, $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{F}}) = \mathbb{R} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{F}}) \supset \mathbb{R} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{F})$, $\widehat{\mathcal{F}}_{t^-} = \mathbb{R} \otimes \mathcal{F}_{t^-}$.

Lemme 2.2.1. *([41], Lemme 1.8.) Il existe une fonction positive $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{F}})$-mesurable : $(x, \omega, t) \to p_t(\omega, x)$, càdlàg en t, telle que*

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, et si $\varsigma^x = \inf\{t : p_{t^-}(x) = 0\}$, on a $p_.(x) > 0$, et $p_-(x) > 0$ sur $[\![0, \varsigma^x[\![$ et $p_.(x) = 0$ sur $[\![\varsigma^x, \infty[\![$;

(ii) pour tout t, la mesure $\eta(dx)p_t(\omega, x)$ sur $\mathbb{R}$ est une version de $\lambda_t(\omega, dx)$.

On donne la définition d'hypothèse de densité ; voir par exemple Li ([59], Définition 2.2.2).

Définition 2.2.1. *On dit que τ satisfait l'**hypothèse de densité** (ou **hypothèse de densité de Jacod**) si*

$$\mathbb{P}(\tau \in dx|\mathcal{F}_t) = \lambda_t(dx) = p_t(x)\eta(dx).$$

On donne des corollaires classiques du théorème de Jacod ; voir par exemple Nikeghbali ([69], Corollaires 9.6 et 9.7), Jacod ([41], p. 15).

Corollaire 2.2.1. *Si la variable τ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$. Alors toute $\mathcal{F}_t$-semimartingale est une $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-semimartingale.*

Preuve. Il suffit de noter que $\lambda_t(\omega, dx) = \eta(dx)$, où $\eta(dx)$ est la loi de τ. □

Corollaire 2.2.2. *Si la variable aléatoire τ est à valeurs dans un ensemble dénombrable, alors toute $\mathbb{F}$-semimartingale est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale.*

Preuve. La loi de τ et la loi conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_t$ sont données par

$$\eta(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = x_k)\delta_{x_k}(dx) = \mathbb{P}(\tau \in dx),$$

$$\mathbb{P}(\tau \in dx|\mathcal{F}_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = x_k|\mathcal{F}_t)\delta_{x_k}(dx)$$

où $\delta_{x_k}(dx)$ est la mesure de Dirac en x_k, alors $\lambda(\omega, dx)$ est absolument continue par rapport à η avec la densité de Radon-Nikodym :

$$p_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau = x_k|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\tau = x_k)} \mathbf{1}_{\{x=x_k\}}$$

telle que $\mathbb{P}(\tau \in dx|\mathcal{F}_t) = p_t(x)\mathbb{P}(\tau \in dx)$. Le résultat s'ensuit du théorème de Jacod. $\square$

Corollaire 2.2.3. *([40], Théorème 9.36.) Soit $\mathcal{A} = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ une partition $\mathbb{F}$-mesurable, finie ou dénombrable de Ω, et soit $\mathbb{G}^{\sigma(\mathcal{A})} = \mathbb{F} \vee \sigma(\mathcal{A})$. Alors toute $\mathbb{F}$-semimartingale est une $\mathbb{G}^{\sigma(\mathcal{A})}$-semimartingale.*

Preuve. Appliquons le corollaire 2.2.2 pour $\tau = \sum_n n\mathbf{1}_{A_n}$. $\square$

2.2.2 Caractérisation de différentes types de mesurabilité

Nous rappelons quelques résultats importants sur la caractérisation des variables aléatoires $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mesurables, prévisibles et optionnels. Le cas des processus prévisibles est dû à Jeulin ([48], Lemme 3.13), et le cas des processus optionnels est étudié par Fontana ([35], Lemme 4.3).

Proposition 2.2.2.

(i) Une variable aléatoire Y est $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mesurable si et seulement si elle est de la forme $Y_t(\omega) = y_t(\omega, \tau(\omega))$, où $y_t(., u)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

(ii) Un processus Y est $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible si et seulement s'il est de la forme $Y_t(\omega) = y_t(\omega, \tau(\omega))$, $t \geq 0$, où $(t, \omega, u) \mapsto y_t(\omega, u)$ est une application $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

(iii) Un processus Y est $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-optionnel si et seulement s'il est de la forme $Y_t(\omega) = y_t(\omega, \tau(\omega))$, $t \geq 0$, où $(t, \omega, u) \mapsto y_t(\omega, u)$ est une fonction $\mathcal{O}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

Preuve. (i) Les variables aléatoires $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-mesurables engendrent les variables aléatoires de la forme $X_t(\omega) = x_t(\omega)f(\tau(\omega))$, avec $x_t \in \mathcal{F}_t$ et f est une fonction Borélienne sur $\mathbb{R}$.
(ii) Il suffit de noter que les processus de la forme $X_t := x_t f(\tau)$, $t \geq 0$ engendrent la tribu $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible, où x est $\mathbb{F}$-prévisible et f est une fonction Borélienne bornée sur $\mathbb{R}$.
(iii) La tribu $\mathcal{O}(\mathbb{G}^{\sigma(\tau)})$ est engendrée par tous les processus de la forme $X_t := x_t f(\tau)$, où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et x est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale. $\square$

On va écrire tout simplement $y_t(\tau)$ pour $y_t(\omega, \tau(\omega))$.

2.2.3 Espérance conditionnelle et projections

Le lemme suivant donne une caractérisation de l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$, ce résultat est dû à Callegaro et. al [19] sous une hypothèse supplémentaire nommée $(\mathcal{E})$-*hypothèse* et *hypothèse (2.1)* dans Amendinger [7], qui dit que la loi conditionnelle de la variable aléatoire τ par rapport à $\mathbb{F}$ est équivalente à la loi de τ, i.e,

$$\mathbb{P}(\tau \in dx|\mathcal{F}_t) \sim \eta(dx) \textit{ pour tout } t \geq 0 \ \mathbb{P}\textit{.p.s.}$$

Cette hypothèse est appelée l'*hypothèse d'équivalence de Jacod* qui est plus forte que l'hypothèse de densité de Jacod dans [41].

Lemme 2.2.2. *([19], Lemme 2.4.) Soit $Y_t = y_t(\tau)$ une variable aléatoire $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-mesurable.*

(i) Si $y_t(\tau)$ est intégrable et $y_t(\tau) = 0$ $\mathbb{P}$.p.s. Alors, pour $u \geq 0$, $y_t(u) = 0$ $\mathbb{P}$.p.s.

(ii) Pour $s \leq t$, on a $\mathbb{P}$.p.s : si $y_t(\tau)$ est intégrable, donc

$$\mathbb{E}(y_t(\tau)|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}) = \frac{1}{p_s(\tau)}\mathbb{E}(y_t(u)p_t(u)|\mathcal{F}_s)|_{u=\tau}.$$

La proposition suivante donne les projections $\mathbb{F}$-prévisibles et optionnelles d'un processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mesurable, le premier résultat est dû à Jacod ([41], Lemme 1.10) et le deuxième est trouvé dans Amendinger ([7], Lemme 1.3).

Proposition 2.2.3.

(i) Soit $y_t(u)$ une fonction $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-mesurable, positive ou bornée. Alors la projection $\mathbb{F}$-prévisible d'un processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mesurable $Y = y(\tau)$ est donnée par

$$^{p,\mathbb{F}}(Y)_t = \int_0^\infty y_t(u)p_{t-}(u)\eta(du), \quad t \geq 0.$$

(ii) Soit $y_t(u)$ une fonction $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-mesurable, positive ou bornée. Alors la projection $\mathbb{F}$-optionnelle d'un processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mesurable $Y = y(\tau)$ est donnée par

$$^{o,\mathbb{F}}(Y)_t = \int_0^\infty y_t(u)p_t(u)\eta(du), \quad t \geq 0.$$

Preuve. Il suffit (par un argument de classe monotone) de montrer le résultat pour $Y_t := y_t f(\tau)$, où y est un processus $\mathbb{F}$-prévisible (resp. optionnel) borné et f est une fonction Borélienne bornée. Dans ce cas, nous adoptons à la preuve de lemme 1.10 dans Jacod [41] (resp. lemme 1.3 dans Amendinger [7]). □

Et comme il est montré dans Jacod ([41], Corollaire 1.11), la proposition précédente implique que $\varsigma^\tau = \infty$ $\mathbb{P}$.p.s, donc le processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-optionnel $\left(\frac{1}{p_t(\tau)}\right)_{t\geq 0}$ est bien défini.

Le lemme suivant caractérise la projection duale $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible en terme de la projection duale $\mathbb{F}$-prévisible.

Lemme 2.2.3. *([4], Lemme 3.) Soit $(V(u), u \in \mathbb{R})$ un processus càdlàg $\mathbb{F}$-adapté à variation localement intégrable. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(a) La projection duale $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible de $V(\tau)$ est

$$(V(\tau))^{p,\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}} = \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot (p(u) \centerdot V(u))^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.$$

(b) Le processus $(U(u) = \frac{1}{p(\tau)} \centerdot V(u), u \in \mathbb{R})$ est bien défini, et sa variation est $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-localement intégrable, et la projection duale $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible de $U(\tau)$ est donnée par

$$(U(\tau))^{p,\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}} = \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot (\mathbf{1}_{\{p(u)>0\}} \centerdot V(u))^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.$$

(c) Si $V \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbb{F})$ (resp. $V \in \mathcal{A}^+(\mathbb{F})$), alors le processus $U \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbb{G}^{\sigma(\tau)})$ (resp. $U \in \mathcal{A}^+(\mathbb{G}^{\sigma(\tau)})$).

Remarque 2.2.1. En utilisant le lemme précédent pour préciser la relation entre les crochets prévisibles par rapport à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$. En effet, pour deux $\mathbb{F}$-martingales X et Y, on a

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle^{\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}} &= [X,Y]^{p,\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}}\\ &= \frac{1}{p_-(\tau)}\centerdot(p(u)\centerdot[X,Y])^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}\\ &= \frac{1}{p_-(\tau)}\centerdot(p_-(u)\centerdot[X,Y])^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}+\frac{1}{p_-(\tau)}\centerdot(\Delta p(u)\centerdot[X,Y])^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}\\ &= \langle X,Y\rangle^{\mathbb{F}}+\left(\sum\frac{\Delta p(u)}{p_-(u)}\Delta X\Delta Y\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.\end{aligned}$$

2.2.4 Caractérisation des martingales

Sous l'hypothèse d'équivalence de Jacod, Callegaro et. al [19] ont étudié la caractérisation de $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingales en terme de $\mathbb{F}$-martingales dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.4. *([19], Proposition 3.1.) Un processus $Y=y(\tau)$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale si et seulement si $(y_t(u)p_t(u),t\geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, pour tout $u\geq 0$ η.p.s.*

Preuve. La suffisance est une conséquence directe de la proposition 2.2.2 et le lemme 2.2.2 (partie (ii)).
Inversement, supposons que $y(\tau)$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale. Alors, pour $s\leq t$, et par le lemme 2.2.2 (partie (ii)),

$$y_s(\tau)=\mathbb{E}(y_t(\tau)|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)})=\frac{1}{p_s(\tau)}\mathbb{E}(y_t(u)p_t(u)|\mathcal{F}_s)|_{u=\tau}$$

et le résultat vient du lemme 2.2.2 (partie (i)). □

Fontana ([35], Proposition 4.4) a donné un prolongement du résultat précédent de Callegaro et. al ([19], Proposition 3.1) dans le cas où l'hypothèse de densité de Jacod est satisfaite mais l'hypothèse d'équivalence de Jacod n'est pas nécessairement vérifiée.

Proposition 2.2.5. *([35], Proposition 4.4.) Supposons que l'hypothèse de densité de Jacod est vérifiée. Alors le processus $Y=y(\tau)$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale si et seulement s'il existe une fonction $(t,\omega,u)\mapsto y_t(\omega,u)$ $\mathcal{O}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable telle que $(y_t(u)p_t(u),t\geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, pour tout $u\geq 0$, et $Y_t=y_t(\tau)$ $\mathbb{P}$.p.s, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.*

Maintenant, on caractérise les semimartingales de la filtration grossie.

Théorème 2.2.2. *Soit X une $\mathbb{F}$-martingale locale et supposons que X est une semimartingale par rapport à une filtration grossie $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$. Alors X est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale spéciale.*

Preuve. voir par exemple Protter [72] p. 359.

On donne le résultat suivant ; voir par exemple Meyer ([68], Théorème 3).

Théorème 2.2.3. *Soient X une $\mathbb{F}$-martingale locale, et H un processus prévisible tel que $\int_0^t H_s^2d[X,X]_s$ est localement intégrable. Supposons que $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$ est un grossissement de $\mathbb{F}$ tel que X est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale. Alors X est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale spéciale, et soit $X=N+A$ sa $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition canonique. Le processus intégrale stochastique $(\int_0^t H_sdX_s)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale si et seulement si le processus $(\int_0^t H_sdA_s)_{t\geq 0}$ existe comme une intégrale de Lebesgue-Steiltjes trajectoire par trajectoire p.s.*

Preuve. Supposons que $\mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s) < \infty$ qui implique que $H \centerdot X$ est une martingale de carré intégrable et par le théorème précédent, elle est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale spéciale. Soit $X = N + A$ la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition canonique de X, et il s'ensuit que $H \centerdot X = H \centerdot N + H \centerdot A$ est la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition canonique de $H \centerdot X$. Par (Protter [72], le lemme du Théorème IV.23), on a $\mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d[N,N]_s) \leq \mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s) < \infty$ et $\mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d[A,A]_s) \leq \mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s) < \infty$. Alors $H \centerdot A$ existe par rapport à $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$. $\square$

2.2.5 Décompositions des martingales

Nous avons besoin les résultats suivants, concernant l'existence de le crochet prévisible $\langle x, p_\cdot(u)\rangle$.
Jacod dans [41] considère les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt $(x,\omega) \mapsto R_n(x,\omega)$ suivants :
$R_n(x,\omega) = \inf\{t : p_{t^-}(x) \leq \frac{1}{n}\}$, qui vérifient $\bigcup_n [\![0, R_n(x,\omega)]\!] = \{p_-(x) > 0\}$.

Théorème 2.2.4. *([41], Théorème 2.5.) Soit M une $\mathbb{F}$-martingale locale.*

(a) Pour tout x n'appartient pas à un ensemble B (dépendant de M) qui est η-négligeable, et pour tout entier n, le processus arrêté $[p(x), M]^{R_n(x)}$ est à variation $\mathbb{F}$-localement intégrable : on peut donc définir un processus $\langle p(x), M\rangle$ sur l'ensemble prévisible $\bigcup_n [\![0, R_n(x)]\!]$, qui est la projection prévisible duale de $[p(x), M]$, en prenant pour $\langle p(x), M\rangle^{R_n(x)}$ la projection prévisible duale de $[p(x), M]^{R_n(x)}$.

(b) Il existe un processus croissant prévisible A et une fonction $\widehat{\mathbb{F}}$-prévisible : $(x,\omega,t) \mapsto K_t(x,\omega)$ tels que on ait pour tout $x \notin B$,

$$\langle p(x), M\rangle_t = \int_0^t K_s p_{s^-} dA_s \quad p.s \quad sur \quad \bigcup_n \{t \leq R_n(x)\}.$$

Si de plus M est localement de carré intégrable, on peut prendre $A = \langle M, M\rangle$.

(c) Si A et K vérifient les condition de (b), on a

$$\int_0^t |K_s(\tau)| dA_s < \infty \quad p.s \quad pour\ tout\ t > 0;$$

et le processus suivant est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale

$$\widetilde{M_t} = M_t - \int_0^t K_s(\tau) dA_s.$$

On a le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Proposition 6.2.1).

Proposition 2.2.6. *Supposons que, pour tout t, $\lambda_t(\omega, dx) \ll \eta(dx)$ où η est la loi de τ. Alors, toute $\mathbb{F}$-semimartingale X est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale.*
De plus, si $\lambda_t(\omega, dx) = p_t(\omega, x)\eta(dx)$ et si X est une $\mathbb{F}$-martingale, le processus

$$\widetilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{d\langle p_\cdot(\tau), X\rangle_s}{p_{s^-}(\tau)}$$

est une $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-martingale. Autrement dit, la décomposition de la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale X est

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t \frac{d\langle p_\cdot(\tau), X\rangle_s}{p_{s^-}(\tau)}.$$

Preuve. Étape 1 : On montre que, pour tout x, le processus $p(x)$ est une $\mathbb{F}$-martingale. On a, pour toute fonction bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable ζ_s et $s < t$,

$$\mathbb{E}(p_t(x)\zeta_s) = \mathbb{E}(p_s(x)\zeta_s),$$

il s'ensuit de

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau>x\}}|\mathcal{F}_t)\zeta_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau>x\}}|\mathcal{F}_s)\zeta_s).$$

Étape 2 : Supposons que toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues, et que X et p sont de carré intégrables. Dans ce cas, $\langle p_{\cdot}(\tau), X\rangle$ existe. Soient F_s une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_s$-mesurable, et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction Borélienne bornée. Alors la variable $F_s h(\tau)$ est $\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}$-mesurable et si la décomposition de la forme $X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t dK_u(\tau)$ est satisfaite, la propriété de martingale de $\widetilde{X}$ implique que $\mathbb{E}(F_s h(\tau)(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s)) = 0$, alors

$$\mathbb{E}(F_s h(\tau)(X_t - X_s)) = \mathbb{E}\left(F_s h(\tau)\int_s^t dK_u(\tau)\right).$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F_s h(\tau)(X_t - X_s)) &= \mathbb{E}\left(F_s(X_t - X_s)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)p_t(\theta)\eta(d\theta)\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\theta)\mathbb{E}\left(F_s(X_t p_t(\theta) - X_s p_s(\theta))\right)\eta(d\theta)\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\theta)\mathbb{E}\left(F_s\int_s^t d\langle X, p(\theta)\rangle_\vartheta\right)\eta(d\theta), \qquad (2.1)\end{aligned}$$

où la première égalité vient de la conditionnement par rapport à $\mathcal{F}_t$, la seconde vient de la propriété de martingale de $p(x)$, et la troisième vient à la propriété de $\mathbb{F}$-martingales de carré intégrables X et $p(x)$. De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(F_s h(\tau)\int_s^t dK_\vartheta(\tau)\right) &= \mathbb{E}\left(F_s\int_{\mathbb{R}} h(\theta)\int_s^t dK_\vartheta(\theta)p_t(\theta)\eta(d\theta)\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\theta)\mathbb{E}\left(F_s\int_s^t p_\vartheta(\theta)dK_\vartheta(\theta)\right)\eta(d\theta), \qquad (2.2)\end{aligned}$$

où la première égalité vient de la définition de p, et la seconde vient de la propriété de martingale de $p(x)$. Par l'égalité de deux quantités (2.1) et (2.2), on obtient nécessairement $dK_u(\theta) = d\langle X, p(\theta)\rangle_u / p_u(\theta)$. □

Remarque 2.2.2. La $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale obtenue dans la proposition précédente est analogue de celle trouvée dans Jacod ([41], Théorème 2.5), cette décomposition est appelée la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition *prévisible* ou *canonique*.

La proposition suivante généralise la proposition 2.2.6 pour les $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingales locales.

Proposition 2.2.7. *([4], Proposition 4.) Supposons que l'hypothèse de Jacod est satisfaite. Soit X une $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingale locale. Alors*

$$X_t(\tau) = \widetilde{X}_t(\tau) + \int_0^t \frac{1}{p_{s^-}(\tau)} d\langle X(u), p(u)\rangle_s^{\mathbb{F}}\,|_{u=\tau}$$

où $\widetilde{X}(\tau)$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale.

Preuve. Soit X de la forme $X_t(\omega,u) = g(u)x_t(\omega)$ où x est une $\mathbb{F}$-martingale et g est une fonction Borélienne. Alors $X(\tau) = g(\tau)x$, et en utilisant la décomposition de Jacod dans la proposition 2.2.6, pour $t \geq s$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t(\tau) - X_s(\tau)|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}) &= g(\tau)\mathbb{E}(x_t - x_s|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}) \\ &= g(\tau)\mathbb{E}\left(\int_s^t \frac{1}{p_{v^-}(\tau)} d\langle x, p(u)\rangle_v|_{u=\tau}|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_s^t \frac{1}{p_{v^-}(\tau)} d\langle X(u), p(u)\rangle_v|_{u=\tau}|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}\right),\end{aligned}$$

et par un argument de classe monotone, on généralise le résultat pour X. □

On rappelle le $\mathbb{F}$-temps d'arrêt qui est défini dans le lemme 2.2.1 par $\varsigma^u = \inf\{t : p_{t^-}(u) = 0\}$, et on décompose ς^u sous la forme $\varsigma^u = \widetilde{\varsigma}^u \wedge \bar{\varsigma}^u$ avec

$$\widetilde{\varsigma}^u = \varsigma^u_{\{p_{\varsigma^u_-}(u)>0\}} \quad et \quad \bar{\varsigma}^u = \varsigma^u_{\{p_{\varsigma^u_-}(u)=0\}}.$$

Il est clair que $\bar{\varsigma}^u$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt prévisible et $\{\varsigma^u = \infty\} \subset \{\bar{\varsigma}^u = \infty\}$ alors

$$\left(\mathbf{1}_{[\![\varsigma^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau} = \left(\mathbf{1}_{[\![\widetilde{\varsigma}^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.$$

Aksamit et. al ([4], Théorème 5) ont étudié la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition *optionnelle* d'une $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingale locale, c'est à dire, ils ont écrit la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale comme une somme d'une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale plus un processus à variation bornée optionnelle.

Théorème 2.2.5. *([4], Théorème 5.) Soit $(X(u), u \in \mathbb{R})$ une $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingale locale. Alors*

$$\bar{X}_t(\tau) := X_t(\tau) - \int_0^t \frac{1}{p_s(\tau)} d[X(\tau), p(\tau)]_s + \left(\Delta X_{\widetilde{\varsigma}^u}(u)\mathbf{1}_{[\![\widetilde{\varsigma}^u,\infty[\![}\right)_t^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau} \tag{2.3}$$

est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale.

Preuve. Par la décomposition prévisible obtenue dans la proposition 2.2.7, $X(\tau)$ peut s'écrire sous la forme

$$X(\tau) = \widetilde{X}(\tau) + \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \left(\mathbf{1}_{\{p(u)>0\}} \centerdot [X(u), p(u)]\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau} + \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \left(\mathbf{1}_{\{p(u)=0\}} \centerdot [X(u), p(u)]\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.$$

On utilise le lemme 2.2.3 (partie (b)) et le fait que $\Delta p_{\widetilde{\varsigma}^u}(u) = -p_{\widetilde{\varsigma}^u_-}(u)$, on obtient

$$\begin{aligned}X(\tau) &= \widetilde{X}(\tau) + \left(\frac{1}{p(\tau)} \centerdot [X(\tau), p(\tau)]\right)^{p,\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}} + \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \left(\Delta X_{\widetilde{\varsigma}^u}(u)\Delta p_{\widetilde{\varsigma}^u}(u)\mathbf{1}_{[\![\widetilde{\varsigma}^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau} \\ &= \bar{X}(\tau) + \frac{1}{p(\tau)} \centerdot [X(\tau), p(\tau)] - \left(\Delta X_{\widetilde{\varsigma}^u}(u)\mathbf{1}_{[\![\widetilde{\varsigma}^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau},\end{aligned}$$

où

$$\bar{X}(\tau) := \widetilde{X}(\tau) - \frac{1}{p(\tau)} \centerdot [X(\tau), p(\tau)] + \left(\frac{1}{p(\tau)} \centerdot [X(\tau), p(\tau)]\right)^{p,\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}}$$

qui est $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale. □

Dans [7], Amendinger a montré, sous l'hypothèse d'équivalence de Jacod que, pour toute $\mathbb{F}$-martingale X, le processus $\frac{X}{p(\tau)}$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale, et Aksamit et. al dans [4] ont étudié la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition de la $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingale $\frac{X(\tau)}{p(\tau)}$ dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.8. *([4], Proposition 9.) Soit $(X(u), u \in \mathbb{R})$ une $\mathcal{O}(\mathbb{F})$-martingale locale. Alors $\frac{X(\tau)}{p(\tau)}$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale avec sa partie $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale est égale à*

$$X_0(\tau) - \frac{X_-(\tau)}{p_-^2(\tau)} \centerdot \bar{p}(\tau) + \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \bar{X}(\tau),$$

où $\bar{X}$ est donnée par (2.3) et $\bar{p}(\tau) := p(\tau) - \frac{1}{p(\tau)} \centerdot [p(\tau)] - p_-(\tau) \centerdot \left(\mathbf{1}_{[\![\varsigma^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}$ est la partie $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale de $p(\tau)$ donnée par (2.3), et la partie à variation finie $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible de $\frac{X(\tau)}{p(\tau)}$ est égale à

$$-\frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \left(X_{\varsigma^u}(u)\mathbf{1}_{[\![\varsigma^u,\infty[\![}\right)^{p,\mathbb{F}}|_{u=\tau}.$$

On rappelle le résultat suivant ; voir Protter ([72], Théorème 2, p. 356).

Théorème 2.2.6. *Soient X une $\mathbb{F}$-semimartingale avec décomposition $X = M + A$ et $\mathcal{H}$ une σ-algèbre indépendante de la martingale locale M. Soit $\mathbb{G}^{\sigma(\mathcal{H})}$ la filtration obtenue par le grossissement de $\mathbb{F}$ avec la σ-algèbre $\mathcal{H}$ (c.à.d. $\mathcal{G}_t^{\sigma(\mathcal{H})} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}$, $\forall t \geq 0$ et $\mathcal{G}_t^{\sigma(\mathcal{H})} = \mathcal{G}_{t^+}^{\sigma(\mathcal{H})}$). Alors X est une $\mathbb{G}^{\sigma(\mathcal{H})}$-semimartingale avec la même décomposition.*

2.2.6 Exemples

▶ Grossissement avec une partition de Ω

On suppose qu'il existe une partition $(A_i)_{i\in I}$ $\mathcal{A}$-mesurable de Ω, $(A_i)_{i\in I}$ engendre $\sigma(\tau)$ telle que $A_i = \{\tau = a_i\}$ et $\mathbb{P}(A_i)$ est strictement positive pour tout i de I.
Pour A un ensemble $\mathcal{A}$-mesurable, notons ${}^AZ$ une version continue à droite, limitée à gauche de la $\mathbb{F}$-martingale $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_t)$.
L'ensemble $\{\omega : \inf {}^AZ_s(\omega) = 0\}$ est inclus dans A^c, les processus $\mathbf{1}_A \frac{1}{{}^AZ}$ et $\mathbf{1}_A \frac{1}{{}^AZ_-}$ sont donc bien définis.
Lorsque τ est à valeurs dans l'ensemble au plus dénombrable $(a_i)_{i\in I}$, l'hypothèse (Ḣ) est vérifiée entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$.

Théorème 2.2.7. *([67], Théorème 2.) La filtration $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$ vérifie (Ḣ). Si X est une $\mathbb{F}$-martingale locale, alors*

$$X_t - \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} \int_{0^+}^t \frac{1}{{}^{A_i}Z_{s^-}} d\langle X, {}^{A_i}Z\rangle_s$$

est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale.

▶ Grossissement du filtration Brownienne avec B_1

Le grossissement initial de filtrations est commencé par K. Itô en 1976 (qu'il a publié [38] en 1978), lorsque il a montré que si B est un mouvement Brownien standard, alors on peut grossir la filtration naturelle $\mathbb{F}$ de B par adjonction la tribu engendrée par la variable aléatoire B_1 à $\mathbb{F}$ au temps $t = 0$, i.e, B_1 est $\mathcal{G}_0^{\sigma(B_1)}$-mesurable. Il a montré aussi que B est une semimartingale par rapport à la filtration grossie et il a conclu sa décomposition explicitement. Cet exemple est

le premier "faux-amis" étudié avec Jeulin et Yor [51] en 1979.
On note, pour $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t^{\sigma(B_1)} = \bigcap_{\varepsilon > 0}\{\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \bigvee \sigma(B_1)\}$. On a alors le théorème suivant ; voir Jeulin et Yor ([51], Théorème 1).

Théorème 2.2.8. *Il existe un $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-mouvement Brownien β issu de 0 tel que*

$$\textit{pour tout } t,\ B_t = \beta_t + \int_0^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds \tag{2.4}$$

est la décomposition de B comme une $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-semimartingale.

Preuve. Étape 1. L'intégrale de Riemann qui figure en (2.4) est absolument convergente, car

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds\right) \leq \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} < \infty.$$

Étape 2. Montrons que $\beta_t = B_t - \int_0^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$ est une $\mathcal{G}_t^{\sigma(B_1)}$-martingale.
Puisque $(B_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, et $\mathcal{G}_t^{\sigma(B_1)} = \mathcal{F}_t$, pour $t \geq 1$, on peut se restreindre à l'intervalle de temps $[0, 1]$.
Notons que la définition de $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$ est faite pour satisfaire la condition de la continuité à droite. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $\acute{\mathcal{G}}_t = \mathcal{F}_t \bigvee \sigma(B_1) = \mathcal{F}_t \bigvee \sigma(B_1 - B_t)$. Soient $0 \leq s < t \leq 1$. La tribu $\mathcal{F}_s$ étant indépendante du processus $(B_{s+h} - B_s, h \geq 0)$, on a

$$\mathbb{E}(B_t - B_s|\acute{\mathcal{G}}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|B_1 - B_s) = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s),$$

la dernière égalité provenant de calcul élémentaire de la L^2-projection de $(B_t - B_s)$ sur $\{\lambda(B_1 - B_s); \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Un passage à la limite dans L^1 (par exemple) entraine :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{G}_s^{\sigma(B_1)}) = \mathbb{E}(B_t - B_s|B_1 - B_s) = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s).$$

Pour $t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_s^t \tfrac{B_1 - B_u}{1-u} du|\mathcal{G}_s^{\sigma(B_1)}\right) &= \int_s^t \frac{1}{1-u}\mathbb{E}(B_1 - B_u|B_1 - B_s)du \\
&= \int_s^t \frac{1}{1-u}\left(B_1 - B_s - \mathbb{E}(B_u - B_s|B_1 - B_s)\right)du \\
&= \int_s^t \frac{1}{1-u}\left(B_1 - B_s - \frac{u-s}{1-s}(B_1 - B_s)\right)du \\
&= \frac{1}{1-s}(B_1 - B_s)\int_s^t du = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s),
\end{aligned}$$

on a

$$\beta_t - \beta_s = B_t - B_s - \int_s^t \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\beta_t - \beta_s|\mathcal{G}_s^{\sigma(B_1)}) &= \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{G}_s^{\sigma(B_1)}) - \mathbb{E}\left(\int_s^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} du|\mathcal{G}_s^{\sigma(B_1)}\right) \\
&= \mathbb{E}(B_t - B_s|B_1 - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s) = 0,
\end{aligned}$$

et β est une $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-martingale.
Comme $\langle \beta, \beta \rangle_t = \langle B, B \rangle_t = t$, où le processus $\langle \beta, \beta \rangle$ (resp. $\langle B, B \rangle$) est calculé relativement à $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$ (resp. $\mathbb{F}$).
Il est alors classique d'après le théorème de Lévy que $(\beta_t, t \geq 0)$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-mouvement Brownien. □

Il s'ensuit que si M est une $\mathbb{F}$-martingale locale telle que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s}} d|\langle M, B \rangle_s|$ est fini, alors

$$\widehat{M_t} = M_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1 - s} d\langle M, B \rangle_s$$

est une $\mathcal{G}_t^{\sigma(B_1)}$-martingale locale (Jeulin ([48], Théorème 3.23 (partie (ii)), p. 46)).

On peut considérer la formule (2.4) comme une équation linéaire, où la fonction inconnue est $B_.(\omega)$, et les données sont $\beta_.(\omega)$ et $B_1(\omega)$, on obtient immédiatement un résultat concernant le pont Brownien. Avant de donner ce résultat, on rappelle le pont Brownien.

Le pont Brownien $(b_t, 0 \leq t \leq 1)$ est défini comme le processus conditionnel $(B_t, t \leq 1 | B_1 = 0)$. Notons que $B_t = (B_t - tB_1) + tB_1$, où par la propriété Gaussienne, le processus $(B_t - tB_1, t \leq 1)$ et la variable aléatoire B_1 sont indépendants. En effet $(b_t, 0 \leq t \leq 1) \overset{\text{loi}}{=} (B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1)$. Le pont Brownien est un processus Gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance $s(1-t)$, $s \leq t$, de plus, il satisfait $b_0 = b_1 = 0$.
On peut représenter le pont Brownien entre 0 et y pendant l'intervalle de temps $[0, 1]$ comme

$$(B_t - tB_1 + ty, t \leq 1).$$

Généralement, le pont Brownien entre x et y pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ peut s'écrire

$$(x + B_t - \frac{t}{T} B_T + \frac{t}{T}(y - x); t \leq T),$$

où $(B_t; t \leq T)$ est un mouvement Brownien standard.

Le résultat suivant est étudié par Jeulin et Yor ([51], Corollaire 1.1).

Corollaire 2.2.4. *Le pont Brownien $\{B_t - tB_1, t < 1\}$ est lié au $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-mouvement Brownien $(\beta_t, t < 1)$ par la formule*

$$B_t - tB_1 = (1 - t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{1 - s}. \tag{2.5}$$

En conséquence, les deux processus $(B_t - tB_1, t < 1)$ et $(\beta_t, t < 1)$ ont même filtration naturelle. La formule (2.5) donne la clé de la structure de la filtration $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$, que l'on explicite en cinq points :

(a) $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$ est identique à la filtration naturelle du processus $(B_1 + \beta_t, t \geq 0)$ (immédiat, d'après la formule (2.5)).

(b) La variable B_1 et le processus β sont indépendants.
En effet d'après le théorème 2.2.8, $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-mouvement Brownien, qui est donc indépendant de $\mathcal{G}_0^{\sigma(B_1)} \supseteq \sigma(B_1)$.
Ainsi, d'après la formule (2.5), on a trouvé le résultat suivant, obtenu par V. Mackevičius [65] : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi du mouvement Brownien réel $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ issu de 0, conditionnellement à $(B_1 = x)$, est celle de processus $(tx + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_s}{1-s}, t < 1)$, où $(\beta_t, t \leq 1)$ désigne un mouvement Brownien réel.
La conjonction de (a) et (b) entraine aisément :

(c) $\mathcal{G}_0^{\sigma(B_1)}$ *est égale à la tribu complétée de* $\sigma(B_1)$.

(d) *Tout processus* $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$*-prévisible* H *est indistinguable d'un processus de la forme* $K(B_1(\omega), s, \omega)$, *où* $K : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \to \mathbb{R}$ *est une application* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{F}^\beta)$*-mesurable.*
Une légère variation du théorème d'Itô sur la représentation des martingales du mouvement Brownien permet d'énoncer

(e) *Toute* $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$*-martingale de carré intégrable* X *peut se représenter comme* $X_t = f(B_1) + \int_0^t H(s,.)d\beta_s$, *où* $f \in L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)dx)$, *et* $H \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}), d\mathbb{P}ds)$.

Le théorème suivant caractérise les $\mathbb{F}$-martingales qui sont des $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-semimartingales ; voir Jeulin et Yor ([51], Théorème 3).

Théorème 2.2.9. *Soit* X *une* $\mathbb{F}$*-martingale locale continue, nulle en* 0. *Alors il existe un processus* $\mathbb{F}$*-prévisible* H *tel que*

$$\forall t \geq 0, \ \int_0^t H_s^2 ds < \infty \ \ \mathbb{P}.p.s, \quad et \ \ X_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X *est une* $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$*-semimartingale.*

(ii) $\int_0^1 |H_s| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds < \infty$ $\mathbb{P}.p.s.$

(iii) $\int_0^1 \frac{|H_s|}{\sqrt{1-s}} ds < \infty$ $\mathbb{P}.p.s.$

De plus, si ces conditions sont réalisées, la $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$*-décomposition canonique de* X *est donnée par*

$$X_t = \int_0^t H_s d\beta_s + \int_0^{t\wedge 1} H_s \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds.$$

Le résultat suivant donne une conséquence immédiate ; voir Jeulin et Yor ([51], Corollaire 3.1) et Jeulin ([48], Théorème 2.23 (partie (iii))).

Corollaire 2.2.5. *Soient* α *un réel tel que* $1/2 < \alpha < 1$,
et $H_s = (1-s)^{-1/2}(-\log(1-s))^{-\alpha}\mathbf{1}_{\{1/2<s<1\}}$, *alors* $H\centerdot B$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale de carré intégrable, mais* $H \centerdot B$ *n'est pas une* $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$*-semimartingale et (Ĥ) n'est pas donc vérifiée pour le couple* $(\mathbb{F}, \mathbb{G}^{\sigma(B_1)})$.

Remarque 2.2.3.
1. Dans le corollaire précédent, H est une fonction déterministe prévisible avec $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$, alors $X = H\centerdot B$ est bien défini, mais $\int_0^t \frac{|H_s|}{\sqrt{1-s}} = \infty$, alors par le théorème 2.2.9, X est une $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable, mais non une $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-semimartingale.
2. Notons que si $\mathbb{G}^{\sigma(B_T)}$ est le grossissement de $\mathbb{F}$ par B_T, alors le critère de Jacod est satisfait dans $[0, \infty)$, vraiment dans $[0, T)$; B_T est un processus Gaussien conditionnement à $\mathcal{F}_t$ pour $t < T$. Ainsi, si $\lambda_t(\omega, dx)$ est la version conditionnelle régulière de $\mathbb{P}(B_T \in dx|\mathcal{F}_t)$, alors $\lambda_t(\omega, dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx. Mais, pour $t \geq T$, $\lambda_t(\omega, dx)$ est la mesure de Dirac $\delta_{B_t(\omega)}(dx)$, et il est impossible de trouver la mesure η telle que $\delta_r(dx) \ll \eta(dx)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.
Jeulin et Yor ([51]) ont montré que, dans le cas Brownien, une $\mathbb{F}$-martingale locale X est une $\mathbb{G}^{\sigma(B_T)}$-semimartingale ssi $\int_0^T (T-s)^{1/2}|d[X,B]_s| < \infty$ (condition (iii) du théorème 2.2.9), et dans ce cas, $X_t - \int_0^{t\wedge T} \frac{B_T - B_s}{T-s} d[X,B]_s$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(B_T)}$-semimartingale.

On généralise le résultat de grossissement initial du filtration Brownien avec B_1 pour le processus de Lévy.

Théorème 2.2.10. *(Théorème d'Itô pour les processus de Lévy.) Soit Z un processus de Lévy, on définit $\mathbb{G}^{\sigma(Z_1)} = (\mathcal{G}_t^{\sigma(Z_1)})_{t\geq 0}$ la plus petite filtration satisfaisant les conditions habituelles, telle que Z_1 est $\mathcal{G}_0^{\sigma(Z_1)}$-mesurable et $\mathcal{F}_t^Z \subset \mathcal{G}_t^{\sigma(Z_1)}$, $\forall t \geq 0$. Le processus de Lévy Z est une $\mathbb{G}^{\sigma(Z_1)}$-semimartingale. De plus, si $\mathbb{E}(|Z_t|) < \infty$, $\forall t \geq 0$, alors le processus*

$$X_t = Z_t - \int_0^{t\wedge 1} \frac{Z_1 - Z_s}{1-s} ds$$

est une $\mathbb{G}^{\sigma(Z_1)}$-semimartingale.

Preuve. Voir par exemple Protter [72] p. 356-358.

▶ **Grossissement du filtration Poissonienne avec N_1**

$\mathbb{F}^N$ désigne la filtration naturelle du processus de Poisson N d'intensité λ, issu de 0, et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t^{\sigma(N_1)} = \bigcap_{\varepsilon>0}(\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^N \bigvee \sigma(N_1))$.
On note encore $\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t$ la $\mathcal{F}_t^N$-martingale compensée du processus croissant $(N_t)_{t\geq 0}$.
Cet exemple est étudié par Jeulin et Yor ([51], Théorème $1'$), et par Jeanblanc ([43], Proposition 2.2.7) pour le grossissement initial de $\mathbb{F}^N$ avec la valeur terminale N_T.

Théorème 2.2.11. *Il existe une $\mathbb{G}^{\sigma(N_1)}$-martingale à variation finie $(\tilde{\eta}_t, t \geq 0)$ telle que*

$$\widetilde{N}_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t\wedge 1} \frac{\widetilde{N}_1 - \widetilde{N}_s}{1-s} ds, \tag{2.6}$$

formule que l'on peut encore écrire

$$N_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t\wedge 1} \frac{N_1 - N_s}{1-s} ds + \lambda(t-1)^+. \tag{2.7}$$

De plus, l'amplitude des sauts de $\tilde{\eta}$ est 1, mais $\tilde{\eta}$ n'est pas un $\mathbb{G}^{\sigma(N_1)}$-processus de Poisson, le processus croissant $\mathbb{G}^{\sigma(N_1)}$-prévisible attaché à $\tilde{\eta}$ étant identique à

$$\langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle_t = \int_0^{t\wedge 1} \frac{N_1 - N_s}{1-s} ds + \lambda(t-1)^+. \tag{2.8}$$

Preuve. La démonstration de la formule (2.6) est très semblable à celle de la formule (2.4), et repose essentiellement sur le résultat suivant :
Si $0 < s < t < 1$, on a

$$\mathbb{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s^N \vee \sigma(N_1)) = \mathbb{E}(N_t - N_s | N_1 - N_s) = \frac{t-s}{1-s}(N_1 - N_s),$$

la formule (2.7) découle immédiatement de (2.6).
Il résulte de (2.7), par exemple que $[\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] = [N, N] = N$, et donc, $\langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle$ est le $\mathbb{G}^{\sigma(N_1)}$-compensateur prévisible de N, soit toujours d'après (2.7) : $\int_0^{t\wedge 1} \frac{N_1 - N_s}{1-s} ds + \lambda(t-1)^+$. □

Remarque 2.2.4. Toute $\mathbb{F}^N$-martingale locale étant à variation finie, c'est également une $\mathbb{G}^{\sigma(N_1)}$-semimartingale (i.e, l'hypothèse (H́) est vérifiée).

▶ **Grossissement du filtration Brownienne avec S_1**

S est le processus des maximums locaux : $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$, on rappelle le résultat classique (voir par exemple Meyer ([68], p. 185)), $\mathbb{P}(S_t > u) = 2\mathbb{P}(B_t > u)$, $\forall u > 0$.

Proposition 2.2.9. *([48], Proposition 3.24.) $\mathbb{G}^{\sigma(S_1)}$ vérifie (Ή), et toute $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable est une $\mathbb{G}^{\sigma(S_1)}$-semimartingale spéciale. Si X est une $\mathbb{F}$-martingale locale,*

$$X_t - \int_0^t \left(\mathbf{1}_{\{S_s<S_1\}} \frac{S_1 - B_s}{\sqrt{1-s}} - \mathbf{1}_{\{S_s=S_1\}} H\left(\frac{S_1 - B_s}{\sqrt{1-s}}\right)\right) \frac{d[X,B]_s}{\sqrt{1-s}}$$

est une $\mathbb{G}^{\sigma(S_1)}$-martingale locale, où $H(x) = e^{-x^2/2}/\left(\int_0^x e^{-r^2/2}dr\right)$.

▶ **Grossissement du filtration Brownienne avec T_1**

On rappelle que T_z est le temps de passage de B en z (voir par exemple Meyer ([68], p. 186)) : $T_z = \inf\{t > 0 : B_t = z\} = \sup\{t : S_t < z\}$ pour z réel et $\mathbb{P}(S_t > u) = \mathbb{P}(T_u < z) = g(u,t) = c\int_{u/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-r^2/2)dr$ avec $c = \sqrt{2/\pi}$.

Lemme 2.2.4. *([48], Lemme 3.25.) Pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale X, il y a équivalence entre :*

(i) X est une $\mathbb{G}^{\sigma(T_1)}$-semimartingale ;

(ii) $\int_0^{T_1} \frac{1}{1-B_s}|d[X,B]_s|$ est $\mathbb{P}$.p.s fini.
Si (i) est vérifiée, $X_t + \int_0^{t\wedge T_1} \frac{1}{1-B_s}\left(1 - \frac{(1-B_s)^2}{T_1-s}\right) d[X,B]_s$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(T_1)}$-martingale locale ; en particulier, $\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^{t\wedge T_1} \frac{1}{1-B_s}\left(1 - \frac{(1-B_s)^2}{T_1-s}\right) ds$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(T_1)}$-mouvement Brownien. Cependant (Ή) n'est pas vérifiée par $\mathbb{G}^{\sigma(T_1)}$.

Nous déduisons du lemme précédent le résultat suivant :

Théorème 2.2.12. *([48], Théorème 3.26.) Soit $C_s = \inf\{t > s : S_t > S_s\} = \inf\{t > s : S_t = B_t\}$; notons $\mathbb{G}^{\sigma(S)} = \mathbb{F} \bigvee \sigma(S)$. Pour X une $\mathbb{F}$-martingale locale, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est une $\mathbb{G}^{\sigma(S)}$-semimartingale ;*
2. *$\int_0^t \frac{1}{S_u - B_u} d[X,B]_u$ est fini pour tout $t \geq 0$.*

Sous 1. $X_t + \int_0^t \frac{1}{S_u-B_u}\left(1 - \frac{(S_u-B_u)^2}{C_u-u}\right) d[X,B]_u$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(S)}$-martingale locale.

▶ **Grossissement du filtration Brownienne avec L_0**

Corollaire 2.2.6. *([48], Corollaire 3.27.) Soient L_0 le temps local de B en 0, $D_s = \inf\{t > s, B_t = 0\}$, si X est une $\mathbb{F}$-martingale locale, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est une $\mathbb{G}^{\sigma(L_0)}$-semimartingale ;*
2. *$\int_0^t \frac{1}{|B_s|}|d[X,B]_s|$ est fini pour tout t.*

Si 1. est vérifiée, $X_t - \int_0^t \frac{1}{B_s}\left(1 - \frac{B_s^2}{D_s-s}\right) d[X,B]_s$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(L_0)}$-martingale locale.

2.2.7 Propriété de représentation prévisible et grossissement initial

Callegaro et. al ([19]) et Amendinger ([8]) ont étudié la stabilité de la propriété de représentation prévisible (PRP) sous le grossissement initial et l'hypothèse d'équivalence de Jacod.

Proposition 2.2.10. *([19], Proposition 5.3 ou [8], Théorème 4.2.) Supposons qu'il existe une $\mathbb{F}$-martingale locale Z qu'a la $\mathbb{F}$-PRP. Alors toute $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale X peut s'écrire sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dz_s$$

où z est la partie martingale dans la $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-décomposition canonique de Z et H est un processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible satisfaisant $\int_0^t H_s^2 d[z]_s < \infty$.

Récemment, Fontana ([35]) a étudié la stabilité de la PRP sous le grossissement initial et l'hypothèse de Jacod qui est plus faible de celle supposée par Callegaro et. al ([19]) dans la proposition précédente, Fontana a utilisé la décomposition optionnelle obtenue dans Aksamit et. al ([4], Théorème 5) et son résultat est le suivant.

Théorème 2.2.13. *([35], Théorème 2.6.) Supposons que l'hypothèse de Jacod est vérifiée et que l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est séparable. Si Z a la propriété de représentation prévisible dans $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors le processus $\bar{Z}$ défini par (2.3) a la propriété de représentation prévisible dans $(\Omega, \mathbb{G}^{\sigma(\tau)}, \mathbb{P})$.*

Remarque 2.2.5.
1. L'hypothèse de séparabilité supposée dans le théorème précédent pour assurer l'existence de la version du projection duale $\mathbb{F}$-prévisible du processus $\Delta Z_{\varsigma^u}(u)\mathbf{1}_{[\![\varsigma^u,\infty[\![}$.
2. Callegaro et. al ([19], Prposition 5.3) ont utilisé la décomposition canonique (prévisible) de Z dans $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$, mais Fontana ([35], Théorème 2.6) a utilisé la décomposition optionnelle de Z dans $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$.

Comme la variation quadratique $\langle Z, p(u)\rangle|_{u=\tau}$ est bien définie (Jacod [41], Théorème 2.5), et le processus $Z - \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \langle Z, p(u)\rangle|_{u=\tau}$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale locale, Fontana a donné le résultat suivant.

Corollaire 2.2.7. *([35], Corollaire 2.9.) Supposons que l'hypothèse de Jacod est satisfaite et que $\mathbb{P}(\varsigma^u < \infty) = 0$ η. p.s. Si Z a la PRP dans $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors le processus $\bar{Z}(\tau) := Z - \frac{1}{p_-(\tau)} \centerdot \langle Z, p(u)\rangle|_{u=\tau}$ a la PRP dans $(\Omega, \mathbb{G}^{\sigma(\tau)}, \mathbb{P})$.*

Exemple 2.2.1. Fontana dans ([35]) a donné deux exemples simples de processus ont la PRP dans la filtration grossie initialement $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$, le processus de Poisson et le mouvement Brownien.

On fixe le temps $T < \infty$. Dans les deux exemples suivants, l'hypothèse de Jacod est satisfaite.

1. *Le processus de Poisson*
Soient $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de Poisson standard et $\mathbb{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t\in[0,T]}$ sa filtration naturelle augmentée. Notons $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le temps de saut de N. Soient $\mathcal{A} = \mathcal{F}_T$ et $\tau = N_T$, comme Gasbarra et. al ([36], Paragraphe 4.3), pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_t(n) = \frac{\mathbb{P}(\tau = n|\mathcal{F}_t^N)}{\mathbb{P}(\tau = n)} = e^t \frac{(T-t)^{n-N_t}}{T^n} \frac{n!}{(n-N_t)!} \mathbf{1}_{\{N_t \le n\}}, \quad \forall t < T,$$

et $p_T(n) = e^T T^{-n} n! \mathbf{1}_{\{N_t = n\}}$, qui a montré que l'hypothèse de Jacod est vérifiée. Remarquons aussi que la densité conditionnelle $(p_t(n))_{t\in[0,T]}$ saut à $t = 0$ en T_{n+1}, signifions que $\varsigma^n = T_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le processus de Poisson compensé $Z := (N_t - t)_{t\in[0,T]}$ a la PRP par rapport à $\mathbb{F}^N$ (voir l'exemple 1.2.2 (partie 1)). Alors les hypothèses du théorème 2.2.13 sont satisfaites et le processus $\bar{Z} = (\bar{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ qui est défini dans le théorème 2.2.5 a la PRP par rapport à $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$. De plus, $\bar{Z}$ peut représenter explicitement sous la forme

$$\bar{Z}_t = (N_t - t) - \sum_{n=1}^{N_T} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}} \left(1 - \frac{T - T_n}{N_T - n + 1}\right) + (t - T_{N_T} \wedge t). \tag{2.9}$$

En effet, notons que $[Z, p(\tau)] = \sum_{0<u\le .} \Delta N_u \Delta p_u(\tau) = \sum_{n=1}^{N_T} \Delta p_{T_n}(\tau)\mathbf{1}_{\{T_n \le .\}}$ et que

$$\Delta p_{T_n}(\tau) = e^{T_n} \frac{(T-T_n)^{N_T - n}}{T^{N_T}} \frac{N_T!}{(N_T - n)!} \left(1 - \frac{T - T_n}{N_T - n + 1}\right),$$

qui satisfait

$$\frac{1}{p(\tau)} \centerdot [Z, p(\tau)] = \sum_{n=1}^{N_T} \mathbf{1}_{\{T_n \le .\}} \left(1 - \frac{T - T_n}{N_T - n + 1}\right).$$

De plus, remarquons que $\Delta Z_{\tilde{\varsigma}^n} \mathbf{1}_{[\![\tilde{\varsigma}^n, \infty[\![} = \mathbf{1}_{[\![T_{n+1}, \infty[\![}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après le théorème 2.2.5, pour démontrer (2.9), il reste de calculer la projection duale $\mathbb{F}^N$-prévisible du processus croissant $\mathbf{1}_{[\![T_{n+1}, \infty[\![}$. Notons que $\{T_{n+1} \le t\} = \{N_t \ge n+1\}$, pour que $\mathbf{1}_{[\![T_{n+1}, \infty[\![} = f^n(N)$, avec $f^n(x) := \mathbf{1}_{\{x \ge n+1\}}$. Par Jeanblanc et. al ([47], Proposition 8.2.3.1), le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de N est donné par $\mathcal{L}(f)(.) = f(.+1) - f(.)$, pour toute fonction mesurable bornée f. Alors, le processus

$$\begin{aligned} f^n(N_t) - \textstyle\int_0^t \mathcal{L}(f^n)(N_u)du &= \mathbf{1}_{\{T_{n+1} \le t\}} - \int_0^t \mathbf{1}_{\{n \le N_u < n+1\}} du \\ &= \mathbf{1}_{\{T_{n+1} \le t\}} - (T_{n+1} \wedge t - T_n \wedge t) \end{aligned}$$

est une $\mathbb{F}^N$-martingale locale. Par la décomposition de Doob-Meyer (voir par exemple Jacod et Shiryayev ([42], Théorème I.3.15)), il est aussi une $\mathbb{F}^N$-martingale uniformément intégrable, comme $\mathbf{1}_{[\![T_{n+1}, \infty[\![}$ est borné. Par He et. al ([37], Corollaire 5.31), ça implique que $(T_{n+1} \wedge . - T_n \wedge .)$ est la projection duale $\mathbb{F}^N$-prévisible de $\mathbf{1}_{[\![T_{n+1}, \infty[\![}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi il prouve la représentation (2.9).

2. *Le mouvement Brownien*

On définit le processus $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ par $Z := 1 + B$, où $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien standard, et $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$ sa filtration naturelle augmentée. Soient $\mathcal{A} = \mathcal{F}_T^B$ et la variable aléatoire discrète $\tau = \mathbf{1}_{\{\inf_{t\in[0,T]} Z_t > 0\}}$. Comme τ est une v.a discrète, l'hypothèse de Jacod est satisfaite (voir par exemple le corollaire 2.2.2), d'après Chau et Tankov [20], on peut calculer

$$p_t(1) = \frac{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u > 0 | \mathcal{F}_t^B)}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u > 0)} = 1 + \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u > 0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{Z_s > 0\}}}{\sqrt{T-s}} e^{-\frac{Z_s^2}{2(T-s)}} dB_s,$$

$$p_t(0) = \frac{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u \le 0 | \mathcal{F}_t^B)}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u \le 0)} = 1 - \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u \le 0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{Z_s > 0\}}}{\sqrt{T-s}} e^{-\frac{Z_s^2}{2(T-s)}} dB_s.$$

Remarquons que $p(1)$ et $p(0)$ peuvent prendre zéro continuellement avec une probabilité strictement positive (i.e, $\mathbb{P}(\varsigma^u < \infty) = 0$ η. p.s). Comme le MB B a la $\mathbb{F}^B$-PRP, les hypothèses du corollaire 2.2.7 sont satisfaites. Notons que

$$p_t(\tau) = p_t(1)\mathbf{1}_{\{\inf_{u\in[0,T]} Z_u > 0\}} + p_t(0)\mathbf{1}_{\{\inf_{u\in[0,T]} Z_u \le 0\}},$$

la PRP dans $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$ est vérifiée pour le processus

$$\begin{aligned}
\bar{Z}_t(\tau) &= Z_t - \int_0^t \frac{1}{p_s(\tau)} d\langle Z, p(u)\rangle_s \,|_{u=\tau} \\
&= Z_t - \frac{\mathbf{1}_{\{\inf_{u\in[0,T]} Z_u>0\}}}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u > 0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{p_s(1)\sqrt{T-s}} e^{-\frac{Z_s^2}{2(T-s)}} ds \\
&+ \frac{\mathbf{1}_{\{\inf_{u\in[0,T]} Z_u\leq 0\}}}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,T]} Z_u \leq 0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{Z_s>0\}}}{p_s(0)\sqrt{T-s}} e^{-\frac{Z_s^2}{2(T-s)}} ds.
\end{aligned}$$

2.2.8 Méthode de Yor

Supposons que $\mathbb{F}$ est une filtration Brownienne. Pour toute fonction Borélienne bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit $(\lambda_t(f); t \geq 0)$, la version continue de la martingale $(\mathbb{E}(f(\tau)|\mathcal{F}_t); t \geq 0)$. Il existe une famille prévisible de mesures $(\lambda_t(dx); t \geq 0)$ telle que

$$\lambda_t(f) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_t(dx) f(x).$$

On applique la propriété de représentation prévisible (PRP) à la martingale $\mathbb{E}(f(\tau)|\mathcal{F}_t)$, il existe un processus prévisible $(\widehat{\lambda}_t(f); t \geq 0)$ tel que

$$\lambda_t(f) = \mathbb{E}(f(\tau)) + \int_0^t \widehat{\lambda}_s(f) dB_s,$$

et supposons aussi qu'il existe une autre famille prévisible de mesure $(\widehat{\lambda}_t(dx); t \geq 0)$ telle que

$$\widehat{\lambda}_t(f) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\lambda}_t(dx) f(x).\ dt\ p.s.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 2.2.14. *([77], Théorème 12.1.) On suppose que la mesure $\widehat{\lambda}_t d(x)$ est absolument continue par rapport à $\lambda_t(dx)$. $dt \times d\mathbb{P}.p.s$, et on définit $\rho(x,t)$ par*

$$\widehat{\lambda}_t d(x) = \lambda_t(dx)\rho(x,t). \tag{2.10}$$

Alors, pour tout $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$-martingale $(X_t = \int_0^t m_u dB_u; t \geq 0)$, il existe une $(\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}, t \geq 0)$-martingale $(\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ telle que

$$\begin{aligned}
X_t &= \widetilde{X}_t + \int_0^t \rho(\tau,s) d\langle X, B\rangle_s \qquad (2.11)\\
&= \widetilde{X}_t + \int_0^t \rho(\tau,s) m_s ds.
\end{aligned}$$

à condition que

$$\int_0^t |d\langle X, B\rangle_s||\rho(\tau,s)| < \infty\ p.s.$$

En particulier, si $\int_0^t |\rho(\tau,s)|ds < \infty$ p.s, alors $(B_t, t \geq 0)$ s'écrit

$$B_t = \widetilde{B}_t + \int_0^t \rho(\tau,s) ds \tag{2.12}$$

avec $\widetilde{B}$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mouvement Brownien.

Preuve. Soient X une $\mathbb{F}$-martingale, f une fonction Borélienne bornée, $A_s \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_s} f(\tau)(X_t - X_s)) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_s}(\lambda_t(f)X_t - \lambda_s(f)X_s)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_s}(\langle\lambda(f), X\rangle_t - \langle\lambda(f), X\rangle_s)) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_s}\int_s^t m_u \widehat{\lambda}_u(f)du\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_s}\int_s^t m_u du \int \rho(x,u)f(x)\lambda_u(dx)\right).
\end{aligned}$$

Donc, $V_t = \int_0^t \rho(\tau, u)m_u du$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_s} f(\tau)(X_t - X_s)) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_s} f(\tau)(V_t - V_s)) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_s}\int_s^t du m_u f(\tau)\rho(\tau,u)\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit pour tout $G_s \in \mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$, que

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{G_s}(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{G_s}(V_t - V_s))$$

et par le théorème de classe monotone, on a

$$\mathbb{E}((X_t - X_s) - (V_t - V_s)|\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}) = 0$$

alors, $(X_t - V_t; t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-martingale. $\square$

Corollaire 2.2.8. *([77], Corollaire 12.1.1.) Supposons que $\lambda_t(dx) = \phi(t,x)dx$, avec $\phi > 0$, et ϕ peut s'écrire comme*

$$\phi(t,x) = \phi(0,x)\exp\left(\int_0^t \rho(x,s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \rho^2(x,s)ds\right), t \geq 0$$

alors les relations (2.10), (2.11) et (2.12) sont satisfaites.

Preuve. Comme $\lambda_t(f) = \int \lambda_t(dx)f(x) = \int f(x)\phi(t,x)dx$,
et $d\lambda_t(f) = \int f(x)(\phi(t,x)\rho(x,t)dB_t)dx$. Alors

$$\lambda_t(f) = \lambda_0(f) + \int_0^t \int f(x)\phi(u,x)\rho(x,u)dx dB_u$$

Il s'ensuit que $\widehat{\lambda}_u(f) = \int f(x)\phi(u,x)\rho(x,u)dx$, et $\widehat{\lambda}_t(dx) = \phi(t,x)\rho(x,t)dx$. $\square$

On va récrire le résultat du théorème 2.2.14 par le critère de Jacod.

Si $\lambda_t(dx) = p_t(x)\eta(dx)$, on a

$$\lambda_t(f) = \int p_t(x)f(x)\eta(dx).$$

Alors

$$d\langle\lambda_.(f), B\rangle_t = \widehat{\lambda}_t(f)dt = \int dx f(x) d_t\langle p_.(x), B\rangle_t$$

et $\widehat{\lambda}_t(dx) = d_t\langle p_.(x), B\rangle_t dx = \frac{d_t\langle p_.(x),B\rangle_t}{p_t(x)} p_t(x)dx$. Donc

$$\widehat{\lambda}_t(dx)dt = \frac{d_t\langle p_.(x), B\rangle_t}{p_t(x)}\lambda_t(dx).$$

2.2.8.1 Exemples

On donne quelques exemples de grossissement initial avec la méthode de Yor dans le cas Brownien ; voir Mansuy et Yor ([66], Exemples 1.6 et 1.7) et Yor ([77], Exemple 1, p. 34).

▶ **Grossissement avec B_1**

Nous comparons les résultats obtenus dans la sous-section 2.2.6 avec la méthode de Yor présentée dans le théorème 2.2.14.

Soit $\tau = B_1$, par la propriété de Markov

$$\mathbb{E}(g(B_1)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(g(B_1 - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t) = F_g(B_t, 1-t)$$

où $F_g(y, 1-t) = \int g(x)P(1-t; y, x)dx$ et $P(s; y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2s}\right)$. Il s'ensuit que $\lambda_t(dx) = P(1-t, B_t, x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} \exp\left(-\frac{(x-B_t)^2}{2(1-t)}\right) dx$. Alors

$$\lambda_t(dx) = p_t(x)\mathbb{P}(B_1 \in dx) = p_t(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

avec

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-t)}} \exp\left(-\frac{(x-B_t)^2}{2(1-t)} + \frac{x^2}{2}\right).$$

Par la formule d'Itô

$$d_t p_t(x) = p_t(x)\frac{x - B_t}{1-t}dB_t$$

et comme $(p_t(x), t \geq 0)$ est une martingale, il s'ensuit que $d\langle p(x), B\rangle_t = p_t(x)\frac{x-B_t}{1-t}dt$, donc

$$\widehat{\lambda}_t(dx)dt = \frac{d_t\langle p(x), B\rangle_t}{p_t(x)}\lambda_t(dx) = \frac{x-B_t}{1-t}\lambda_t(dx)dt$$

et d'après la formule (2.10) : $\rho(x,t) = \frac{x-B_t}{1-t}dt$, et par (2.12) on trouve

$$B_t = \widetilde{B}_t + \int_0^t \rho(B_1, s)ds = \widetilde{B}_t + \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}ds$$

où $\widetilde{B}$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(B_1)}$-mouvement Brownien, sachant que $\mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{|B_T - B_s|}{T-s}ds\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{T-s}} < \infty$.

▶ **Grossissement avec $S_1 = \sup_{s\leq 1} B_s$**

On a

$$\mathbb{E}(f(S)|\mathcal{F}_t) = F(1-t, B_t, S_t)$$

où $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$ avec

$$F(s,a,b) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\left(f(b)\int_0^{b-a} e^{-u^2/(2s)}du + \int_b^\infty f(u)e^{-(u-a)^2/(2s)}du\right)$$

et notons δ_x la mesure de Dirac en x,

$$\lambda_t(dx) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-t)}}\left(\delta_x(S_t)\int_0^{S_t - B_t} \exp\left(-\frac{u^2}{2(1-t)}\right)du + \mathbf{1}_{\{x>S_t\}} \exp\left(-\frac{(x-B_t)^2}{2(1-t)}\right)dx\right).$$

Par la formule d'Itô,

$$\widehat{\lambda}_t(dx) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-t)}} \left(\delta_x(S_t) \exp\left(-\frac{(S_t - B_t)^2}{2(1-t)} \right) + \mathbf{1}_{\{x > S_t\}} \frac{x - B_t}{1-t} \exp\left(-\frac{(x - B_t)^2}{2(1-t)} \right) \right).$$

Il s'ensuit que

$$\rho(t,x) = \mathbf{1}_{\{x>S_t\}} \frac{x - B_t}{1-t} - \mathbf{1}_{\{x=S_t\}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} H\left(\frac{x - B_t}{\sqrt{1-t}} \right)$$

avec $H(x) = e^{-x^2/2} / \left(\int_0^x dr e^{-r^2/2} \right)$.

▶ **Grossissement avec $\tau = \int_0^\infty f(s) dB_s$ avec $\int_0^\infty f^2(s) ds < \infty$, f est une fonction déterministe**

Comme $\mathbb{E}(g(\tau)|\mathcal{F}_t) = \lambda_t(f)$ est Gaussien de moyenne $m_t = \int_0^t f(s) dB_s$ et de variance $\sigma_t^2 = \int_0^t f^2(s) ds$. On utilise le corollaire 2.2.8, il faut trouver $\rho(x,t)$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\{-(x-m_t)^2/2\sigma_t^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\{-x^2/2\sigma_0^2\} \exp\left\{ \int_0^t \rho(x,s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \rho^2(x,s) ds \right\}.$$

Posons $X_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\{-(x-m_t)^2/2\sigma_t^2\}$, et $dX_t = X_t \frac{x-m_t}{\sigma_t^2} f(t) dB_t$,
ainsi $X_t = \exp\left\{ \int_0^t \rho(x,s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \rho^2(x,s) ds \right\}$ pour

$$\rho(x,t) = \frac{x - m_t}{\sigma_t^2} f(t)$$

et la condition de la continuité absolue (2.10) est satisfaite. D'après le théorème 2.2.14, on déduit, sous la condition d'intégrabilité $\int_0^t \frac{ds|f(s)|}{\sigma_s} < \infty$, que B est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-semimartingale, avec la décomposition canonique

$$\begin{aligned} B_t &= \widetilde{B}_t + \int_0^t ds \frac{f(s)}{\sigma_s^2} \left(\int_s^\infty f(u) dB_u \right) \\ &= \widetilde{B}_t + \int_0^t \rho(\tau, s) ds \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\widetilde{B}$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mouvement Brownien.
Comme un cas particulier, si on prend $f(t) = \mathbf{1}_{[0,t_0]}$, alors $\tau = \int_0^\infty f(s) dB_s = B_{t_0}$, t_0 fixé, la formule (2.13) devient

$$B_t = \widetilde{B}_t + \int_0^{t \wedge t_0} ds \frac{B_{t_0} - B_s}{t_0 - s}$$

où $\widetilde{B}$ est un $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-mouvement Brownien, et on retrouve le résultat de pont Brownien (le théorème 2.2.8 et le corollaire 2.2.4).

2.3 Grossissement progressif

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles et τ un temps aléatoire (i.e., une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). La nouvelle information est représentée par la tribu $\sigma(\tau\wedge t)$ ou de façon équivalente, par $\sigma(\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}, s \leq t) = \sigma(N_s, s \leq t)$ qui est la filtration naturelle de $N_t = \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$.
On introduit la filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ par

$$\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{D}_{t+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(\tau \wedge (t + \varepsilon)).$$

Alors $\mathbb{D}$ est la plus petite filtration continue à droite telle que τ est un $\mathbb{D}$-temps d'arrêt.
On définit

$$\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}$$

et on appelle $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ le *grossissement progressif* de $\mathbb{F}$ par le temps aléatoire τ, qui est la plus petite filtration continue à droite contenant $\mathbb{F}$ et faisant de τ un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt (ou, plus généralement $\mathbb{G} = \mathbb{F} \bigvee \widetilde{\mathbb{F}}$ où $\widetilde{\mathbb{F}}$ est une autre filtration) (voir par exemple Kchia ([56], Définition 3)).

Les processus suivants jouent un rôle important dans la théorie de grossissement progressif de filtrations ; voir Jeulin et Yor ([49], p. 79) :

- La $\mathbb{F}$-surmartingale càdlàg

  $$Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$$

  coïncide avec la projection $\mathbb{F}$-optionnelle de $\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$, Z_t est appelée la *surmartingale d'Azéma* associée à τ (voir Azéma [9]) ;
- Les projections duales $\mathbb{F}$-optionnelle et prévisible du processus croissant $N_t = \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ notées par a et A respectivement ;
- La martingale càdlàg non négative

  $$\mu_t = \mathbb{E}(a_\infty|\mathcal{F}_t) = a_t + Z_t$$

  où a est un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg, non négatif et non décroissant.
- La décomposition canonique (prévisible) ou la décomposition de Doob-Meyer de la $\mathbb{F}$-surmartingale Z est donnée dans le lemme suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Lemme 7.1.2).

  Lemme 2.3.1.

  (i) La décomposition de Doob-Meyer de la surmartingale Z est

  $$Z_t = \mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t = M_t - A_t,$$

  où M est une $\mathbb{F}$-martingale, et pour tout processus positif $\mathbb{F}$-prévisible Y,

  $$\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty Y_u dA_u\right)$$

  (ii)

  $$\mathbb{E}(Y_\tau \mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_u dA_u|\mathcal{F}_t\right) = -\mathbb{E}\left(\int_t^T Y_u dZ_u|\mathcal{F}_t\right).$$

Preuve. Pour tout processus càdlàg Y de la forme $Y_u = y_s \mathbf{1}_{]s,t]}(u)$ avec y_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et bornée, on a

$$\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}(y_s \mathbf{1}_{]s,t]}(\tau)) = \mathbb{E}(y_s(A_t - A_s)).$$

Le résultat s'ensuit à le théorème de classe monotone. □

En outre, on a les relations suivantes ; voir Jeulin et Yor ([49], p. 79) :

$$Z - {}^pZ = \Delta M, \quad {}^pZ + \Delta A = Z_-.$$

On note aussi $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t)$ la probabilité conditionnelle cumulative de τ qui donne l'information de $\mathcal{F}_t$, alors $Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = 1 - F_t$.

On rappelle le résultat suivant ; voir Li et Rutkowski ([61], Lemme 3.4).

Proposition 2.3.1. *Le processus $(F_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-sousmartingale. De plus*

$$\{\tau > t\} \subset \{Z_t > 0\} \quad \mathbb{P}.p.s \quad et \quad \{\tau \leq t\} \subset \{F_t > 0\} \quad \mathbb{P}.p.s$$

Preuve. Par définition, et comme le processus N est croissant, pour $s < t$

$$\mathbb{E}(F_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_t|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_t|\mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(N_s|\mathcal{F}_s) = F_s.$$

On note : $A = \{F_t = 1\} = \{\mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) = 1\}$. Comme $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}(A) = \int_A F_t d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) d\mathbb{P} = \int_A \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap \{\tau \leq t\}).$$

Alors $A = \{F_t = 1\} = \{Z_t = 0\} \subset \{\tau \leq t\}$, $\mathbb{P}$.p.s, et ainsi $\{\tau > t\} \subset \{Z_t > 0\}$, $\mathbb{P}$.p.s.
On note : $B = \{Z_t = 1\} = \{\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = 1\}$. Comme $B \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}(B) = \int_B Z_t d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) d\mathbb{P} = \int_B \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(B \cap \{\tau > t\}).$$

Alors $B = \{Z_t = 1\} = \{F_t = 0\} \subset \{\tau > t\}$, $\mathbb{P}$.p.s, et ainsi $\{\tau \leq t\} \subset \{F_t > 0\}$, $\mathbb{P}$.p.s. □

Remarque 2.3.1. Par convention $0/0 = 0$. Alors par la proposition 2.3.1 (voir par exemple Li ([59], Remarque 5.3.2)), les quantités $\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Z_t^{-1}$ et $\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} F_t^{-1}$ sont bien définies, $\mathbb{P}$.p.s.

Le résultat suivant donne la décomposition multiplicative de Doob-Meyer de Z, qui est traité premièrement par Itô et Watanabe [39].

Lemme 2.3.2. *Soit Z une surmartingale strictement positive càdlàg de classe (D). Il existe une martingale locale H et un processus décroissant prévisible D tels que $Z = HD$. La décomposition est unique.*

Preuve. Voir par exemple Aksamit et Jeanblanc [5] p. 13.

Il y a une autre $\mathbb{F}$-surmartingale importante est la projection $\mathbb{F}$-optionnelle de $\mathbf{1}_{[\![0,\tau]\!]}$

$$\widetilde{Z}_t := \mathbb{P}(\tau \geq t|\mathcal{F}_t).$$

La surmartingale $\widetilde{Z}$ admet des limites à gauche et à droite et se décompose comme $\widetilde{Z} = \mu - a_-$.
En outre, on a les relations suivantes ; voir Jeulin et Yor ([49], p. 79) :

$$\widetilde{Z}_+ = Z, \quad \widetilde{Z}_- = Z_- = {}^p\widetilde{Z}, \quad \widetilde{Z} = Z + \Delta a \;\; et \;\; \widetilde{Z} = Z_- + \Delta\mu.$$

Quand on travaille avec les temps aléatoires, il est usuel de travailler sous les conditions suivantes ; voir Li ([59], Définition 1.5.4) :

- *Condition (C)* : Toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont **c**ontinues (exemple, la filtration Brownienne).
- *Condition (A)* : Le temps aléatoire τ évite tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt T, i.e., $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$.

On réfère aux conditions (CA), ça signifie que les deux conditions (C) et (A) sont satisfaites. Notons que la condition (C) implique que la décomposition optionnelle et celle de Doob-Meyer de Z coïncident.

Le lemme suivant indique quelques conséquences des conditions (C) et (A) ; voir Nikeghbali ([69], Lemme 8.13), Kchia ([56], Lemme 3).

Lemme 2.3.3.

(1) Si τ évite tous les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt (i.e, la condition (A) est vérifiée), alors $A = a$ est continu.

(2) Sous la condition (A), la projection duale $\mathbb{F}$-prévisible de $N_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$, A est continue et τ est un temps d'arrêt totalement inaccessible.

(3) Sous la condition (C), les σ-algèbres optionnelle et prévisible coïncident, a est prévisible et par conséquent $A = a$.

(4) Sous les conditions (CA), Z est continu.

Les résultats suivants sont très importants ; voir Aksamit ([1], p. 32) :

- Si l'hypothèse (C) ou (A) est satisfaite, alors $Z = \widetilde{Z}$.
- Sous les hypothèses (CA), la surmartingale $Z = \widetilde{Z}$ est un processus continu,
  si $R := \inf\{t : Z_t = 0\}$, alors $R := \inf\{t : \widetilde{Z}_t = 0\}$.

Maintenant, quelles sont les propriétés d'un temps aléatoire τ si sa surmartingale d'Azéma associée est continue ? La proposition suivante répond à cette question ; voir Coculescu et Nikeghbali ([25], Proposition 3.3).

Proposition 2.3.2. *Soit τ un temps aléatoire fini tel que sa surmartingale d'Azéma associée est continue. Alors τ évite tous les temps d'arrêt.*

Preuve. On a $Z_t = {}^o(\mathbf{1}_{[\![o,\tau[\![})$ et $\widetilde{Z}_t = {}^o(\mathbf{1}_{[\![0,\tau]\!]})$, $\widetilde{Z}_+ = Z$, $\widetilde{Z}_- = Z_-$.
Comme Z est continue, on a

$$\widetilde{Z}_+ = \widetilde{Z}_- = Z,$$

et par conséquent, pour tout temps d'arrêt T

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}) = 0$$

qui signifie que $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$ pour tout temps d'arrêt T. □

Le résultat suivant n'est pas très connu.

Proposition 2.3.3. *([28], p. 134.) Soit τ un temps d'arrêt. Les ensembles $\{Z = 0\}$ et $\{Z_- = 0\}$ sont disjoints dans l'intervalle stochastique $[\![0, \tau[\![$, et ils ont la même loi jusqu'à T, qui est le plus petit temps supérieur à τ.*

Remarque 2.3.2. On a $\{Z = 0\} \subset]\!]\tau, \infty]\!]$ et $\{Z_- = 0\} \subset]\!]\tau, \infty]\!]$.

Lemme 2.3.4. *([49], Lemme 3.)*

1. *Z^c désignant la partie martingale locale continue de Z, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:*

$$\int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Z_s=x\}} dZ_s^c = 0.$$

2. *Les intégrales $\int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=0\}} dA_s$ et $\int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=0\}} dZ_s$ sont nulles.*

Parfois il est plus pratique d'introduire la filtration grande $\mathbb{G}^\tau = (\mathcal{G}_t^\tau)_{t\geq 0}$ définie par

$$\mathcal{G}_t^\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \exists A_t \in \mathcal{F}_t, A \cap \{\tau > t\} = A_t \cap \{\tau > t\}\},$$

qui coïncide avec $\mathbb{F}$ avant τ, et elle est constante après τ et elle est égale à $\mathcal{F}_\infty$ (voir Dellacherie et. al [28], p. 186). $\mathbb{G}^\tau$ satisfaisant les conditions usuelles et faisant de τ un temps d'arrêt, et $\mathbb{F} \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{G}^\tau$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés de $\mathbb{G}^\tau$-temps d'arrêt τ.

Proposition 2.3.4. *([49], Proposition 3.)*

(a) Soit T un $\mathbb{G}^\tau$-temps d'arrêt, alors il existe un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt S tel que $T \wedge \tau = S \wedge \tau$.

(b) τ est un $\mathbb{G}^\tau$-temps d'arrêt prévisible si, et seulement si, τ est égale à un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt prévisible sur $\{\tau > 0\}$.

(c) Soient

$$\tau^i = \tau \text{ sur } (\Delta A_\tau = 0),\ \tau^i = +\infty \text{ sur } (\Delta A_\tau > 0)$$

$$\tau^a = \tau \text{ sur } (\Delta A_\tau > 0),\ \tau^a = +\infty \text{ sur } (\Delta A_\tau = 0);$$

τ^i (resp. τ^a) est la partie totalement inaccessible (resp. accessible) du $\mathbb{G}^\tau$-temps d'arrêt τ. En particulier τ est totalement inaccessible si, et seulement si, pour tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt prévisible S, $\mathbb{P}(\tau = (S < \infty)) = 0$.

2.3.1 Caractérisation de différentes types de mesurabilité

La théorie de grossissement de filtrations donne des liens explicites entre les processus $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$-adaptés (resp. prévisibles, resp. optionnels).
En effet, on a le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Proposition 7.2.2), le second résultat est dû à Jeulin ([48], Lemme 4.4.b, p. 63).

Proposition 2.3.5.

(i) Toute variable aléatoire $\mathbb{G}$-mesurable Y s'écrit sous la forme

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}},$$

où $\widetilde{y}$ est $\mathbb{F}$-mesurable et $\bar{y}$ est $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.

(ii) Tout processus $\mathbb{G}$-prévisible Y s'écrit sous la forme

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}} + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau<t\}},$$

où $\widetilde{y}$ est un processus $\mathbb{F}$-prévisible et $\bar{y}$ est une fonction $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.

Preuve. (i) Il suffit de rappeler que les variables aléatoires $\mathbb{G}$-mesurables sont engendrées par les variables aléatoires de la forme $X_t = x_t f(t \wedge \tau)$, avec x_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et f est une fonction Borélienne bornée dans $\mathbb{R}_+$.
(ii) Il suffit de noter que les processus $\mathbb{G}$-prévisibles sont engendrés par les processus de la forme $X_t = x_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \bar{x}_t f(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < t\}}$, $t \geq 0$, où $x, \bar{x}$ sont $\mathbb{F}$-prévisibles et f est une fonction Borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}_+$. □

Remarque 2.3.3. Le résultat de caractérisation précédent n'est pas satisfait pour les processus optionnels, en général, nous reportons à Barlow ([12], Remarque p. 318-319) pour un contre-exemple, voir Song ([74]) pour un étude général.

On rappelle le résultat suivant ; voir Jeanblanc et. al ([47], Proposition 5.9.4.1).

Proposition 2.3.6. *Pour tout processus $\mathbb{G}$-prévisible Y, il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible $\widetilde{y}$ tel que $Y_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}$. Sous la condition $Z > 0$, le processus $(\widetilde{y}_t, t \geq 0)$ est unique.*

Proposition 2.3.7. *([49].) Les processus $\mathbb{G}^\tau$-optionnels nuls sur $[\![\tau, \infty]\!]$ sont les processus $U \mathbf{1}_{[\![0,\tau[\![}$ pour U un processus $\mathbb{F}$-optionnel.*

2.3.2 Espérance conditionnelle et projections

On étudie les lois conditionnelles par rapport aux différentes filtrations ; voir Elliott et. al ([33], Lemme 1).

Proposition 2.3.8. *Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable. Si $Z_t > 0$ pour tout $t \geq 0$, alors*

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}(Y \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t)}{Z_t}. \tag{2.14}$$

Preuve. Par la proposition 2.3.5 (partie (i)), il existe une variable aléatoire $\widetilde{y}$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \widetilde{y}_t.$$

En prenant l'espérance conditionnelle de l'égalité précédente par rapport à $\mathcal{F}_t$, on obtient

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) = Z_t \widetilde{y}_t,$$

d'où vient (2.14). □

On donne le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], p. 79).

Corollaire 2.3.1. *Pour tous $T \geq t \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}(Z_T | \mathcal{F}_t)}{Z_t}.$$

On rappelle le résultat suivant ; voir Elliott et. al ([33], p. 184).

Proposition 2.3.9. *On suppose que Z est à variation finie.*

1. *Soit h une fonction Borélienne bornée ou positive, alors pour $0 \leq t \leq T$, on a*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq T\}} h(\tau) | \mathcal{G}_t) = -\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}\left(\int_{]t,T]} h(u) dZ_u | \mathcal{F}_t\right)}{Z_t}.$$

2. Soit S un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné ou positif, alors

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}}S_\tau|\mathcal{G}_t) = -\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}\left(\int_{]t,T]} S_u dZ_u|\mathcal{F}_t\right)}{Z_t}.$$

Preuve. 1. Par la proposition 2.3.8, il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}}h(\tau)|\mathcal{F}_t) = -\mathbb{E}\left(\int_{]t,T]} h(u)dZ_u|\mathcal{F}_t\right).$$

On considère une fonction d'escalier de la forme $h(u) = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(u)$ où $h_i \in \mathbb{R}$ et $t = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = T$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}}h(\tau)|\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(h_i \mathbf{1}_{\{t_i<\tau\leq t_{i+1}\}}|\mathcal{F}_t) \\
&= \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(h_i \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t_i<\tau\}}|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(h_i \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t_{i+1}<\tau\}}|\mathcal{F}_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^n h_i (Z_{t_i} - Z_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(-\sum_{i=0}^n \int_{]t_i,t_{i+1}]} h(u)dZ_u|\mathcal{F}_t\right) \\
&= -\mathbb{E}\left(\int_{]t,T]} h(u)dZ_u|\mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

Comme toute fonction Borélienne s'écrit comme la limite d'une suite de fonctions d'escalier, on obtient 1.
2. La preuve est similaire que 1. Il suffit de considérer le processus de la forme $S_s = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)S_{t_i}$ où S_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. On utilise alors le procédure similaire pour démontrer 2. □

On a le résultat suivant ; voir Elliott et. al ([33], Proposition 5).

Lemme 2.3.5. *Soit h un processus $\mathbb{F}$-prévisible. Alors, pour $t < T$,*

$$\mathbb{E}(h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<T\}}|\mathcal{G}_t) = h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}\left(\int_t^T h_u dF_u|\mathcal{F}_t\right).$$

Preuve. Le résultat est étudié pour les processus h de la forme $h_t = \mathbf{1}_{]u,v]}(t)K_u$ où K_u est $\mathcal{F}_u$-mesurable. Dans ce cas, pour $t < u < v < T$, En appliquant la proposition 2.3.8.

$$\mathbb{E}(h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<T\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(K_u \mathbf{1}_{\{u<\tau<v\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}(K_u \mathbf{1}_{\{u<\tau<v\}}|\mathcal{F}_t).$$

Il reste de noter que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K_u \mathbf{1}_{\{u<\tau<v\}}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(K_u \mathbf{1}_{\{u<\tau\}}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(K_u \mathbf{1}_{\{v<\tau\}}|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(K_u(1-F_u)|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(K_u(1-F_v)|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_t^T h_r dF_r|\mathcal{F}_t\right) \qquad \square\end{aligned}$$

Les espérances conditionnelles sur l'ensemble $\{\tau \leq t\}$ sont importantes pour étudier les impacts d'un événement après τ. Pour effectuer des calculs explicites, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire qui est un analogue d'un résultat classique de Jacod ([41], Théorème 2.1) en théorie de grossissement initial de filtrations.

Hypothèse de densité

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la loi conditionnelle de τ sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, il existe une famille de fonctions $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables $(\omega, \theta) \mapsto \alpha_t(\theta)$ telles que

$$\mathbb{P}(\tau \in du|\mathcal{F}_t) = \alpha_t(u)du,\ t \geq 0$$

et pour toute fonction Borélienne f,

$$\mathbb{E}(f(\tau)|\mathcal{F}_t) = \int_0^\infty f(u)\alpha_t(u)du,\ p.s.$$

La famille $\alpha(.)$ est appelée la *densité conditionnelle de τ par rapport à $\mathbb{F}$*. On a

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \int_T^\infty \alpha_t(u)du,\ \forall T \geq 0.$$

Notons que pour tout $u \geq 0$, $(\alpha_t(u), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

On donne le résultat suivant ; voir El Karoui et. al ([32], Corollaire 2.2).

Proposition 2.3.10. *Sous l'hypothèse de densité, le temps aléatoire τ évite tous les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, c.à.d, τ satisfait la condition (A).*

Preuve. Soit ξ un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt borné par une constante T. Alors la variable aléatoire $H_\xi(t) = \mathbf{1}_{\{\xi=t\}}$ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable et on a

$$\mathbb{E}(H_\xi(\tau)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_\xi(\tau)|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_\xi(u)\alpha_T(u)du|\mathcal{F}_t\right) = 0.$$

Donc $\mathbb{E}(H_\xi(\tau)) = \mathbb{P}(\xi = \tau) = 0.$ $\square$

Proposition 2.3.11. *([32], Théorème 3.1.) Sous l'hypothèse de densité, pour toute fonction $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $Y_T(.)$ qui est positive ou bornée. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$, on a*

$$\mathbb{E}(Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t) = \frac{\int_t^\infty \mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t)d\theta}{Z_t}\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + \frac{\mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t)}{\alpha_t(\theta)}|_{\theta=\tau}\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}. \tag{2.15}$$

Preuve. On montre que

$$\mathbb{E}(Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\frac{\mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t)}{\alpha_t(\theta)}|_{\theta=\tau}\ p.s.$$

Par la proposition 2.3.5 (partie (i)), il existe une variable aléatoire $\bar{y}_t(\theta)$ qui est $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable telle que $\mathbb{E}(Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} = \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}$.
En outre, toute variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable s'écrit sous la forme $H_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}$ sur $\{\tau\le t\}$. Soit $H_t(\tau)$ une variable aléatoire de test positive, on a

$$\mathbb{E}(H_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}Y_T(\tau)) = \mathbb{E}(H_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\bar{y}_t(\tau)).$$

En utilisant la densité α,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}Y_T(\tau)) &= \int_0^\infty \mathbb{E}(H_t(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta\le t\}}Y_T(\theta)\alpha_T(\theta))d\theta\\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}(H_t(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta\le t\}}\mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t))d\theta\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(H_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\bar{y}_t(\tau)) = \int_0^\infty \mathbb{E}(H_t(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta\le t\}}\bar{y}_t(\theta)\alpha_t(\theta))d\theta.$$

Comme $H_t(\theta)$ est arbitraire, on obtient

$$\bar{y}_t(\theta)\alpha_t(\theta) = \mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t),$$

ce qui permet de conclure la preuve.
Pour montrer que

$$\mathbb{E}(Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{\int_t^\infty \mathbb{E}(Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t)d\theta}{Z_t}\ p.s,$$

on utilise les propositions 2.3.5 (partie (i)) et 2.3.8, et la procédure similaire. □

Remarque 2.3.4. La formule (2.15) sur l'ensemble $\{\tau\le t\}$ ignore complètement la loi conditionnelle de τ.

Le lemme suivant caractérise les $\mathbb{G}$-projections en terme de $\mathbb{F}$-projections.

Lemme 2.3.6. *([1], Lemme 6.17.)*

(a) Pour tout processus $\mathbb{F}$-adapté V à variation localement intégrable, on a

$$(V^\tau)^{p,\mathbb{G}} = (Z_-)^{-1}\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]}\centerdot(\widetilde{Z}\centerdot V)^{p,\mathbb{F}}.$$

(b) Pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale X, on a sur $[\![0,\tau]\!]$

$$^{p,\mathbb{G}}\left(\frac{\Delta X}{\widetilde{Z}}\right) = \frac{^{p,\mathbb{F}}(\Delta X\mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}>0\}})}{Z_-}\quad et\quad ^{p,\mathbb{G}}\left(\frac{1}{\widetilde{Z}}\right) = \frac{^{p,\mathbb{F}}(\mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}>0\}})}{Z_-}.$$

Le lemme suivant prouve que $\widetilde{Z}^{-1}\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]}$ est intégrable au sens de Lebesgue-Stieltjes par rapport à tout processus $\mathbb{F}$-adapté à variation localement intégrable.

Lemme 2.3.7. *([1], Lemme 6.18.) Soit V un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) Si $V \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbb{F})$ *(resp.* $V \in \mathcal{A}^+(\mathbb{F})$*), alors le processus*

$$U := \widetilde{Z}^{-1}\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]} \centerdot V \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbb{G}) \quad (resp.\ U \in \mathcal{A}^+(\mathbb{G})).$$

(b) Si V *est à variation* $\mathbb{F}$*-localement intégrable, alors le processus* U *est bien défini, et sa variation est* $\mathbb{G}$*-localement intégrable, et sa* $\mathbb{G}$*-projection duale prévisible est donnée par*

$$U^{p,\mathbb{G}} = \left(\frac{1}{\widetilde{Z}}\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]} \centerdot V\right)^{p,\mathbb{G}} = \frac{1}{Z_-}\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]} \centerdot (\mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}>0\}} \centerdot V)^{p,\mathbb{F}}.$$

En particulier, si $SuppV \subset \{\widetilde{Z} > 0\}$*, alors sur* $]\!]0,\tau]\!]$*, on a*

$$V^{p,\mathbb{F}} = Z_- \centerdot U^{p,\mathbb{G}}.$$

2.3.3 Caractérisation des martingales

Dans ce paragraphe, on caractérise les $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}^\tau$-martingales.

On rappelle le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Proposition 7.6.6).

Proposition 2.3.12. *Soit* X *un processus càdlàg* $\mathbb{G}$*-adapté et intégrable. Alors* X *est une* $\mathbb{G}$*-martingale si et seulement si*

(i) $(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t), t \geq 0)$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale.*

(ii) pour $s < t$*,* $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}X_s|\mathcal{F}_s)$*.*

Lemme 2.3.8. *Supposons que la surmartingale* Z *ne s'annule pas, et soit* $Z = HD$ *sa décomposition multiplicative, où* H *est une martingale locale et* D *est un processus décroissant et prévisible. Alors* $N_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$ *est une* $\mathbb{G}$*-martingale, où* $\Lambda_t = \int_0^t \frac{1}{D_{s^-}} dD_s$ *est un processus* $\mathbb{F}$*-prévisible.*

Preuve. Voir par exemple Aksamit et Jeanblanc [5] p. 101.

On rappelle le résultat suivant ; voir Jeulin et Yor ([49], Proposition 2), Elliott et. al ([33], p. 181).

Proposition 2.3.13. *1. Le processus*

$$X_t = N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_{u^-}}$$

est une $\mathbb{G}$*-martingale.*

2. Pour tout processus $\mathbb{G}$*-prévisible borné* Y*, le processus*

$$Y_t\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{Y_s}{Z_{s^-}} dA_s$$

est une $\mathbb{G}$*-martingale.*

3. Le processus

$$E_t = \frac{1-N_t}{Z_t}$$

est une $\mathbb{G}$*-martingale.*

4. Si U *est une* $\mathbb{F}$*-martingale, alors* UE *est une* $\mathbb{G}$*-martingale.*

5. *Si le processus Z est positif, décroissant et continu, le processus $Y_t = N_t - \Gamma(t \wedge \tau)$ est une $\mathbb{G}$-martingale où $\Gamma = -\ln Z$.*

Preuve. 1. On donne la preuve dans le cas où Z est continu. Soit $s < t$, on procède en deux étapes, en utilisant la décomposition de Doob-Meyer de Z comme $Z_t = M_t - A_t$.
$1^{ère}$ *étape* : Nous démontrons

$$\mathbb{E}(N_t - N_s|\mathcal{G}_s) = \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_t - N_s|\mathcal{G}_s) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{s<\tau\leq t\}}|\mathcal{G}_s) \\
&= \mathbb{P}(s < \tau \leq t|\mathcal{G}_s) \\
&= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(Z_s - Z_t|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)
\end{aligned}$$

$2^{ème}$ *étape* : On prouve que

$$\mathbb{E}\left(\int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_u}|\mathcal{G}_s\right) = \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\textstyle\int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_u}|\mathcal{G}_s\right) &= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \mathbb{E}\left(\int_s^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_u}|\mathcal{G}_s\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \int_s^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_u}|\mathcal{F}_s\right).
\end{aligned}$$

Posons $K_t = \int_s^t \frac{dA_u}{Z_u}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \textstyle\int_s^{t\wedge\tau} \frac{dA_u}{Z_u}|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{s<\tau\}} K_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_s) \\
&= -\mathbb{E}\left(\int_s^\infty K_{u\wedge\tau} dZ_u|\mathcal{F}_s\right) \\
&= -\mathbb{E}\left(\int_s^t K_u dZ_u + K_t Z_t|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_s^t Z_u dK_u|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_s^t dA_u|\mathcal{F}_s\right)
\end{aligned}$$

où on utilise la formule d'intégration par parties pour obtenir

$$-\int_s^t K_u dZ_u + K_t Z_t = K_s Z_t + \int_s^t Z_u dK_u = \int_s^t Z_u dK_u.$$

3. Par la proposition 2.3.8, pour $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(E_t|\mathcal{G}_s) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}|\mathcal{G}_s\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\frac{1}{Z_s}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\frac{1}{Z_s}\mathbb{E}(\frac{1}{Z_t}Z_t|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\frac{1}{Z_s} = E_s.
\end{aligned}$$

4. Par la proposition 2.3.8,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(E_tU_t|\mathcal{G}_s) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E_tU_t|\mathcal{G}_s\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\frac{1}{Z_s}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}U_t|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\frac{1}{Z_s}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t\right)\frac{1}{Z_t}U_t|\mathcal{F}_s\right) \\
&= E_s\mathbb{E}(U_t|\mathcal{F}_s) = E_sU_s.
\end{aligned}$$

5. Par la formule d'intégration par parties (N est un processus à variation finie, et Γ est un processus continu et croissant) :

$$dE_t = (1-N_t)e^{\Gamma_t}d\Gamma_t - e^{\Gamma_t}dN_t$$

et le processus $Y_t = N_t - \Gamma(t\wedge\tau)$ peut s'écrire

$$Y_t = \int_{]0,t]} dN_u - \int_{]0,t]}(1-N_u)d\Gamma_u = -\int_{]0,t]} e^{-\Gamma_u}dE_u$$

et est une $\mathbb{G}$-martingale locale comme E est une $\mathbb{G}$-martingale (notons que, si Γ n'est pas croissant, la dérivée de e^{Γ} est très compliquée). □

Sous l'hypothèse de densité, la surmartingale Z admet une décomposition explicite de Doob-Meyer ; voir El Karoui et. al ([32], Proposition 4.1).

Proposition 2.3.14. *On suppose l'hypothèse de densité.*

1. $(X_t := Z_t + \int_0^t \alpha_s(s)ds, t \geq 0)$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale.*
2. *Soit* $\zeta := \inf\{t : Z_{t^-} = 0\}$*. On définit* $\lambda_t := \frac{\alpha_t(t)}{Z_{t^-}}$ *sur* $\{t < \zeta\}$ *et* $\lambda_t := \lambda_\zeta$ *sur* $\{t \geq \zeta\}$*. Alors* $(L_t := Z_t e^{\int_0^t \lambda_s ds}, t \geq 0)$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale locale.*
3. $(Y_t := N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds, t \geq 0)$ *est une* $\mathbb{G}$*-martingale.*

Preuve. 1. Par la définition de la densité et sa propriété de martingale, on a

$$\mathbb{E}(Z_T - Z_t|\mathcal{F}_t) = -\mathbb{E}\left(\int_t^T \alpha_s(s)ds|\mathcal{F}_t\right) = -\int_t^T \alpha_t(s)ds.$$

Donc
$$Z_t + \int_0^t \alpha_s(s)ds = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \alpha_s(s)ds|\mathcal{F}_t\right) = 1 - \int_0^t (\alpha_t(\theta) - \alpha_\theta(\theta))d\theta \ p.s$$
est une $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable car $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \alpha_s(s)ds\right)^2\right] = 2\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \alpha_s(s)ds \int_s^\infty \alpha_u(u)du\right] = 2\mathbb{E}\left[\int_0^\infty Z_s\alpha_s(s)ds\right] \leq 2$.
2. On obtient par l'intégration par partie de 1. que
$$dL_t = e^{\int_0^t \lambda_s ds}dZ_t + e^{\int_0^t \lambda_s ds}\lambda_t Z_t dt = e^{\int_0^t \lambda_s ds}dX_t. \qquad \square$$

Remarque 2.3.5.
1. Le processus Z est décroissant si et seulement si la martingale X est constante ($X \equiv 0$) ou de façon équivalente, si et seulement si la martingale L est constante ($L \equiv 1$). Dans ce cas, par la proposition précédente, Z est le processus décroissant continu $Z_t = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}$. De plus, pour tout (t,θ), $t \leq \theta$, la distribution conditionnelle est donnée par $Z_t(\theta) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^\theta \lambda_s ds}|\mathcal{F}_t\right)$.
2. La condition $X \equiv 0$ peut s'écrire sous la forme $\int_0^t(\alpha_t(s) - \alpha_s(s))ds = 0$, et elle est satisfaite, si pour $t \geq s$, $\alpha_t(s) - \alpha_s(s) = 0$, mais l'inverse n'est pas vrai.

Les résultats que nous les présenterons, peut les trouver dans Jeulin et Yor [49] ou Dellacherie et. al [28], Kchia ([56], Lemme 4).

Proposition 2.3.15. *Soit $X \in \mathcal{F}_\infty$. Alors la version càdlàg de la martingale $Y_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_t^\tau)$ est*
$$\frac{1}{Z_t}\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t) + X\mathbf{1}_{\{t\geq\tau\}},$$
et le processus Y_{t^-} est
$$\frac{1}{Z_{t^-}}\,{}^p(X\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]}) + X\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty]\!]}.$$

Des propositions 2.3.5, 2.3.6, on déduit la

Proposition 2.3.16. *([49], Proposition 2.) Soit H un processus $\mathbb{G}^\tau$-prévisible borné. Alors*
$$H_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^{t\wedge\tau}\frac{H_s}{Z_{s^-}}dA_s$$
est une $\mathcal{G}_t^\tau$-martingale.

Remarque 2.3.6. Prenons $H \equiv 1$, on obtient $\int_0^{t\wedge\tau}\frac{1}{Z_{s^-}}dA_s$ est la projection duale $\mathcal{G}_t^\tau$-prévisible de $\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$.

On a le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Lemme 7.2.3).

Lemme 2.3.9. *Toute $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ est une $\mathbb{G}^\tau$-martingale.*

Preuve. Soit Y une $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ, pour $s < t$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{G}_s^\tau) &= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{G}_s^\tau) + \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{G}_s^\tau)\\ &= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}\mathbb{E}(Y_t\mathbf{1}_{\{s<\tau\}}|\mathcal{G}_s) + \mathbb{E}(Y_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{G}_s^\tau)\\ &= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}Y_s + \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}Y_\tau = Y_s. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 2.3.7. Le résultat précédent est valable pour toute filtration entre $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}^\tau$.

2.3.4 Décompositions des martingales

Dans ce paragraphe, on discute de la caractérisation des $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}^\tau$-martingales en termes des $\mathbb{F}$-martingales.

En général, une $\mathbb{F}$-martingale n'est pas une $\mathbb{G}^\tau$-semimartingale, mais Yor en [76] montre qu'une $\mathbb{F}$-martingale arrêtée en τ est une $\mathbb{G}^\tau$-semimartingale, et après Jeulin et Yor [49] donnent la $\mathbb{G}^\tau$-décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale arrêtée en τ.

Théorème 2.3.1. *([76].) Si X est une semimartingale relative à $\mathbb{F}$, alors les processus $X_t\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$ et $X_{t\wedge\tau}$ sont des semimartingales relative à $\mathbb{G}^\tau$.*

Théorème 2.3.2. *([76].) Si X est une martingale de carré intégrable relative à $\mathbb{F}$, les processus $X_t\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$ et $X_{t\wedge\tau}$ sont des quasimartingales relative à $\mathbb{G}^\tau$.*

Les résultats suivants sont très anciens et très connus ; voir par exemple Dellacherie et Meyer ([30], Résultats 1 et 3, p. 70-71).

Proposition 2.3.17. *Lorsque la variable aléatoire τ est étagée, ou plus généralement lorsque le graphe de τ est contenu dans une réunion dénombrable de graphes $[\![T_n]\!]$ de temps d'arrêt, alors toute $\mathbb{F}$-semimartingale est encore une $\mathbb{G}$-semimartingale.*

Proposition 2.3.18. *Supposons que l'on ait pour tout t*

$$\mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_t) \quad p.s.$$

Alors toute $\mathbb{F}$-martingale continue à droite est une $\mathbb{G}$-martingale.

La décomposition de $\mathbb{F}$-martingales dans la filtration $\mathbb{G}$ (ou $\mathbb{G}^\tau$) est connue avant τ.

Théorème 2.3.3. *([49], Théorème 1.) Toute $\mathbb{F}$-martingale locale X, arrêtée en τ est une $\mathbb{G}^\tau$-semimartingale, avec la décomposition canonique*

$$X_{t\wedge\tau} = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s}{Z_{s^-}}$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}^\tau$-martingale locale, et le crochet oblique $\langle X, M\rangle$ désigne le compensateur de la variation quadratique $[X, M]$.

Preuve. Soit Y_s une variable aléatoire $\mathcal{G}_s^\tau$-mesurable. Alors il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable y_s telle que $Y_s\mathbf{1}_{\{s\le\tau\}} = y_s\mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}$, alors, si X est une $\mathbb{F}$-martingale, pour $s<t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_s(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) &= \mathbb{E}(Y_s\mathbf{1}_{\{s<\tau\}}(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) \\
&= \mathbb{E}(y_s\mathbf{1}_{\{s<\tau\}}(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) \\
&= \mathbb{E}(y_s(\mathbf{1}_{\{s<\tau\le t\}}(X_\tau - X_s) + \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}(X_t - X_s))).
\end{aligned}$$

Par la définition de Z et la proposition 2.3.9 (partie 1.),

$$\mathbb{E}(y_s\mathbf{1}_{\{s<\tau\le t\}}X_\tau) = -\mathbb{E}\left(y_s\int_s^t X_u dZ_u\right).$$

Par la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} -\int_s^t X_u dZ_u - X_s Z_s + X_t Z_t &= \int_s^t Z_u dX_u + \langle X, Z\rangle_t - \langle X, Z\rangle_s \\ &= \int_s^t Z_u dX_u + \langle X, M\rangle_t - \langle X, M\rangle_s. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(y_s \mathbf{1}_{\{s<\tau\leq t\}} X_s) = \mathbb{E}(y_s X_s (Z_s - Z_t))$$
$$\mathbb{E}(y_s \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(y_s Z_t (X_t - X_s))$$

alors par la propriété de martingale de X,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_s(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) &= \mathbb{E}(y_s(\langle X, M\rangle_t - \langle X, M\rangle_s)) \\ &= \mathbb{E}\left(y_s \int_s^t \frac{d\langle X, M\rangle_u}{Z_u} Z_u \right) \\ &= \mathbb{E}\left(y_s \int_s^t \frac{d\langle X, M\rangle_u}{Z_u} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{u<\tau\}} | \mathcal{F}_u) \right) \\ &= \mathbb{E}\left(y_s \int_s^t \frac{d\langle X, M\rangle_u}{Z_u} \mathbf{1}_{\{u<\tau\}} \right) \\ &= \mathbb{E}\left(y_s \int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_u}{Z_u} \right). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante donne des $\mathbb{G}$-décomposition des $\mathbb{F}$-martingale locale X arrêtée en τ ; voir par exemple Jeulin ([48], Proposition 4.16) pour la décomposition (2.16), et Jeulin et Yor ([49], Théorème 1, p. 87-88) pour la décomposition (2.17).

Proposition 2.3.19. *Toute $\mathbb{F}$-martingale locale X arrêtée en τ est une $\mathbb{G}$-semimartingale, avec la décomposition canonique*

$$X_{t\wedge\tau} = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, \mu\rangle_s}{Z_{s^-}} \tag{2.16}$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.
D'autre terme

$$X_{t\wedge\tau} = \bar{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}<1\}} \frac{d\langle X, M\rangle_s + dJ_s}{Z_{s^-}}, \tag{2.17}$$

où J est la projection duale $\mathbb{F}$-prévisible de le processus $\Delta X_\tau \mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}$.

L'égalité (2.16) est appelée la *décomposition prévisible* de la semimartingale X^τ.

Par une comparaison entre les deux égalités (2.16) et (2.17), on obtient le résultat très connu suivant ; voir Aksamit et. al ([6], Corollaire 2.1).

Corollaire 2.3.2. *L'égalité suivante est satisfaite pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale X,*

$$\int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} dJ_s = \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle X, \mu - M\rangle_s.$$

Preuve. Notons que les processus

$$\int_0^{.\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle X, \mu\rangle_s$$

et

$$\int_0^{.\wedge\tau} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}<1\}} \frac{1}{Z_{s^-}} (d\langle X, M\rangle_s + dJ_s)$$

sont $\mathbb{G}$-prévisibles. Les égalités (2.16) et (2.17) sont deux décompositions de Doob-Meyer de la $\mathbb{G}$-semimartingale spéciale $X_{.\wedge\tau}$. L'unicité de la décompositions de Doob-Meyer conduit à l'égalité $\widetilde{X} = \bar{X}$, et ainsi à

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t\wedge\tau} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}<1\}} \frac{1}{Z_{s^-}} (d\langle X, M\rangle_s + dJ_s) - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle X, \mu\rangle_s \\ &= \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} (d\langle X, M-\mu\rangle_s + dJ_s) - \int_0^{t\wedge\tau} \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=1\}} (d\langle X, M\rangle_s + dJ_s) \\ &= \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} (d\langle X, M-\mu\rangle_s + dJ_s). \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'ensuit à Jeulin et Yor ([49], lemme 4 (partie (b)). □

Remarque 2.3.8. En utilisant la décomposition optionnelle multiplicative de Z qui apparue dans Kardaras ([55], p. 435), i.e, il existe un couple unique (G, K) tel que

$$Z = G(1-K)$$

où K est un processus $\mathbb{F}$-adapté, càd et croissant avec $0 \leq K \leq 1$, et il satisfait l'équation différentielle stochastique suivante

$$Z_t dK_t = (1-K_t) da_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et G est une $\mathbb{F}$-martingale locale positive avec $G_0 = 1$ et

$$G := \exp\left(\frac{1}{Z_-} \mathbf{1}_{\{Z_->0\}} \centerdot \mu\right) \tag{2.18}$$

De plus $da_t = G_t dK_t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Donc, la $\mathbb{G}$-décomposition prévisible d'une $\mathbb{F}$-martingale locale X arrêtée en τ peut s'écrire sous la forme ([55], Théorème 6.2)

$$X_{t\wedge\tau} = \bar{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, G\rangle_s}{G_{s^-}}$$

où $\bar{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Proposition 2.3.20. *Sous les conditions (CA), toute $\mathbb{F}$-martingale X arrêtée en τ est une $\mathbb{G}$-semimartingale, avec la décomposition canonique*

$$X_{t\wedge\tau} = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s}{Z_s}$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Preuve. Voir par exemple Aksamit et Jeanblanc [5] p. 103-104.

Remarque 2.3.9. Ce résultat reste vraie pour toute filtration $\mathbb{G}$ qui coïncide avec $\mathbb{F}$ avant τ.

2.3.4.1 La décomposition d'Aksamit et. al

Aksamit et. al ([4], Théorème 3) donnent une décomposition optionnelle de $\mathbb{F}$-martingales locales arrêtées en τ comme des $\mathbb{G}$-semimartingale, cette décomposition est différente de celle présentée dans la proposition 2.3.19.

On rappelle le $\mathbb{F}$-temps d'arrêt particulier R qui est défini par

$$R := \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}.$$

Alors, les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt définis par

$$\bar{R} := R_{\{Z_{R-}=0\}} \qquad \tilde{R} := R_{\{\widetilde{Z}_R = 0 < Z_{R-}\}} \qquad \hat{R} := R_{\{\widetilde{Z}_R > 0\}}$$

ont des graphes disjoints et $R = \hat{R} \wedge \tilde{R} \wedge \bar{R}$. Notons que $\bar{R}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt prévisible. Le résultat d'Aksamit et. al est le suivant.

Théorème 2.3.4. *([4], Théorème 3.) Soit X une $\mathbb{F}$-martingale locale. Alors le processus*

$$\bar{X}_t := X_t^\tau - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\widetilde{Z}_s} d[X, \mu]_s + (\Delta X_{\tilde{R}} \mathbf{1}_{[\![\tilde{R},\infty[\![})^{p,\mathbb{F}}_{t\wedge\tau} \tag{2.19}$$

est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Remarque 2.3.10.
1. La décomposition précédente n'est pas unique.
2. Dans Dellacherie et. al ([28], chapitre XX, paragraphe 77) une décomposition optionnelle de semimartingale est mentionnée (sans preuve) sous la forme : Soit X une $\mathbb{F}$-martingale locale, le processus
$$\bar{X}_t := X_t^\tau - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\widetilde{Z}_s} d[X, \mu]_s$$
est une $\mathbb{G}$-martingale locale. Cette décomposition est valable pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale si et seulement si $\tilde{R} = \infty$. En particulier, si toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues, alors $\tilde{R} = \infty$ et la formule est satisfaite.
3. La $\mathbb{G}$-martingale locale présentée dans (2.19) peut s'exprimer en terme de la $\mathbb{F}$-martingale locale G définie par (2.18)
$$\bar{X}_t := X_t^\tau - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{G_s} d[X, G]_s + (\Delta X_{\tilde{R}} \mathbf{1}_{[\![\tilde{R},\infty[\![})^{p,\mathbb{F}}_{t\wedge\tau}.$$
Par les égalités $G = G_-(\mathbf{1}_{\{Z_->0\}} \frac{\widetilde{Z}}{Z_-} + \mathbf{1}_{\{Z_-=0\}})$ et $G = 1 + G_- \frac{1}{Z_-} \mathbf{1}_{\{Z_->0\}} \centerdot \mu$, il s'ensuit que
$$\frac{1}{G} \centerdot [X, G] = \frac{1}{\widetilde{Z}} \mathbf{1}_{\{Z_->0\}} \centerdot [X, \mu]$$
et le fait que $Z_- > 0$ sur $[\![0, \tau]\!]$.

Maintenant, étant donné un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt τ. Soit Y une $\mathbb{G}$-martingale qui se décompose sous la forme

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$$

où $\widetilde{y}$ est $\mathbb{F}$-mesurable et $\bar{y}$ est $\mathbb{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.
On peut écrire Y comme la somme de deux martingales dont l'une est arrêtée en τ et l'autre commence en τ :

$$Y_t = Y_{t\wedge\tau} + (Y_t - Y_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} = Y^{a\tau} + Y^{ap\tau}\,[1], \ t \geq 0.$$

où $Y_t^{a\tau} = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + \bar{y}_\tau(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ et $Y_t^{ap\tau} = (\bar{y}_t(\tau) - \bar{y}_\tau(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$.

On a besoin des hypothèses supplémentaires pour qu'une $\mathbb{F}$-martingale locale soit une $\mathbb{G}$-semimartingale. Dans la suite de cette sous-section, on va supposer l'hypothèse de densité et on commence par donner une caractérisation pour les $\mathbb{G}$-martingales locales, les preuves de ces résultats peut les trouver dans El Karoui et. al [32].

Proposition 2.3.21. *Un processus $\mathbb{G}$-adapté càdlàg Y est une $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ si et seulement s'il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg $\widetilde{y}$ défini sur $[\![0,\zeta[\![$ et un processus $\mathbb{F}$-optionnel $\bar{y}$ tels que*

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + \bar{y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} \quad p.s$$

et que

$$(U_t := \widetilde{y}_t Z_t + \int_0^t \bar{y}_s \alpha_s(s)ds, t\geq 0) \ \textit{ est une } \mathbb{F}-\textit{martingale sur } [\![0,\zeta[\![. \tag{2.20}$$

ou de façon équivalente, en utilisant la décomposition multiplicative de Z définie dans la proposition 2.3.14, i.e., $Z_t = L_t e^{\int_0^t \lambda_s ds}$ sur $[\![0,\zeta[\![$, la condition (2.20) est équivalente à $(L_t(\widetilde{y}_t + \int_0^t(\bar{y}_s - \widetilde{y}_s)\lambda_s ds), t\geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale sur $[\![0,\zeta[\![$.

Remarque 2.3.11. Une $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ et égale à 1 sur $[\![0,\tau[\![$ est constante sur $[\![0,\tau]\!]$. En effet, la formule d'intégration par parties montre que $(L_t\int_0^t(1-\bar{y}_s)\lambda_s ds, t\geq 0)$ est une martingale locale si et seulement si le processus continu à variation bornée $(\int_0^t L_s(1-\bar{y}_s)\lambda_s ds, t\geq 0)$ est une martingale locale, c'est à dire si $L_s(1-\bar{y}_s)\lambda_s = 0$, qui implique que $Z_t = 1$ sur $[\![0,\zeta[\![$.

La $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ, $Y^{a\tau}$ peut toujours séparer en deux parties : une martingale $Y^{c,a\tau}$ continue arrêtée en τ ; et une martingale $Y^{d,a\tau}$ saute en τ.

Lemme 2.3.10. *Soit $Y^{a\tau}$ une $\mathbb{G}$-martingale arrêtée en τ de la forme $Y_t^{a\tau} = \widetilde{y}_t\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + \bar{y}_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$. Alors, il existe deux $\mathbb{G}$-martingales $Y^{c,a\tau}$ et $Y^{d,a\tau}$ telles que $Y^{a\tau} = Y^{c,a\tau} + Y^{d,a\tau}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$(Y_t^{d,a\tau} = (\bar{y}_\tau - \widetilde{y}_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^{t\wedge\tau}(\bar{y}_s - \widetilde{y}_s)\lambda_s ds, t\geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale avec un seul saut en τ ;*
2. *$(Y_t^{c,a\tau} = \widehat{Y}_{t\wedge\tau}, t\geq 0)$ est continue en τ, où $\widehat{Y}_t = \widetilde{y}_t + \int_0^t(\bar{y}_s - \widetilde{y}_s)\lambda_s ds$.*

Maintenant, nous nous concentrons sur les $\mathbb{G}$-martingales commencées en τ, $Y^{ap\tau}$ comme nous pouvons voir au dessous. La proposition suivante est une conséquence directe de la proposition 2.3.11.

Proposition 2.3.22. *Tout processus $\mathbb{G}$-intégrable càdlàg Y est une $\mathbb{G}$-martingale commencée en τ avec $Y_\tau = 0$ si et seulement s'il existe un processus $\mathcal{O}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $(\bar{y}_t(.), t\geq 0)$ tel que $\bar{y}_t(t) = 0$ et $Y_t = \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ et que, pour tout $\theta > 0$, $(\bar{y}_t(\theta)\alpha_t(\theta), t\geq\theta\geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $[\![\theta,\zeta^\theta[\![$, où $\zeta^\theta = \inf\{t : \alpha_{t^-}(\theta) = 0\}$.*

1. $a\tau$ (resp. $ap\tau$) désigne avant τ (resp. après τ).

Remarque 2.3.12. ζ^θ est analogue à ς^x qui est défini dans le lemme 2.2.1.

On combine les propositions 2.3.21 et 2.3.22 pour trouver la caractérisation générale d'une $\mathbb{G}$-martingale.

Théorème 2.3.5. *([32], Théorème 5.7.) Un processus càdlàg Y est une $\mathbb{G}$-martingale (locale) si et seulement s'il existe un processus càdlàg $\mathbb{F}$-adapté $\widetilde{y}$ et un processus $\mathcal{O}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $\bar{y}_t(.)$ tels que*

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$$

et que

1. *Le processus $(\widetilde{y}_t Z_t + \int_0^t \bar{y}_s(s)\alpha_s(s)ds, t \geq 0)$ ou de façon équivalente, $(L_t(\widetilde{y}_t + \int_0^t(\bar{y}_s(s) - \widetilde{y}_s)\lambda_s ds), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale (locale) ;*
2. *Pour tout $\theta > 0$, $(\bar{y}_t(\theta)\alpha_t(\theta), t \geq \theta)$ est une $\mathbb{F}$-martingale (locale).*

Un résultat important dans la théorie de grossissement de filtrations est la décomposition des $\mathbb{F}$-martingales (locales) comme des $\mathbb{G}$-semimartingales. En utilisant les résultats précédents pour donner le résultat suivant qui est étudié dans Jeanblanc et Le Cam [44].

Proposition 2.3.23. *([44], Théorème 3.1.) On suppose l'hypothèse de densité. Toute $\mathbb{F}$-martingale X est une $\mathbb{G}$-semimartingale qui peut s'écrire sous la forme $X_t = Y_t + G_t$ où $(Y_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale et $(G_t := \widetilde{g}_t \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + \bar{g}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{G}$-prévisible à variation finie avec*

$$\widetilde{g}_t = \int_0^t \frac{d\langle X, Z\rangle_u}{Z_{u^-}} \quad et \quad \bar{g}_t(\theta) = \int_0^t \frac{d\langle X, \alpha(\theta)\rangle_u}{\alpha_{u^-}(\theta)} + \widetilde{g}_\theta.$$

Exemple 2.3.1. Soit B un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien. Alors

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle B, Z\rangle_u}{Z_{u^-}} - \int_{t\wedge\tau}^t \frac{d\langle B, \alpha(\tau)\rangle_u}{\alpha_{u^-}(\tau)}, t \geq 0$$

est un $\mathbb{G}$-mouvement Brownien.

El Karoui et. al dans ([32], Proposition 5.9) donnent une décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale comme une $\mathbb{G}$-semimartingale, cette décomposition n'est pas unique et différente de celle présentée dans la proposition 2.3.23, car le processus G est optionnel, et ils utilisent le crochet optionnel au lieu du crochet prévisible. Le résultat est le suivant.

Proposition 2.3.24. *([32], Proposition 5.9.) Toute $\mathbb{F}$-martingale X est une $\mathbb{G}$-semimartingale qui peut s'écrire sous la forme $X_t = Y_t + G_t$ où Y est une $\mathbb{G}$-martingale et $(G_t := \widetilde{g}_t \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + \bar{g}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}, t \geq 0)$ est un processus optionnel à variation finie avec*

$$\widetilde{g}_t = \int_0^t \frac{d[X, Z]_u}{Z_u} \quad et \quad \bar{g}_t(\theta) = \int_0^t \frac{d[X, \alpha(\theta)]_u}{\alpha_u(\theta)}.$$

Maintenant, en absence de l'hypothèse de densité et sous des hypothèses générales, le théorème suivant donne la décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale locale comme une $\mathbb{G}$-semimartingale, cette décomposition est valable pour toute filtration coïncide avec $\mathbb{G}$ après τ.

Théorème 2.3.6. *([57], Théorème 3.) Soient X une $\mathbb{F}$-martingale locale, et $\mathbb{G}$ un grossissement progressif de $\mathbb{F}$ avec τ satisfaisant $\mathcal{G}_t \cap \{\tau > t\} = \mathcal{F}_t \cap \{\tau > t\}$ pour tout $t \geq 0$ et soit $\mathbb{H}$ une filtration qui coïncide avec $\mathbb{G}$ après τ. Supposons qu'il existe un processus $\mathbb{H}$-prévisible à variation finie U tel que $X - U$ est une $\mathbb{H}$-martingale locale. Alors X est une $\mathbb{G}$-semimartingale, et*

$$X_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s + dJ_s}{Z_{s^-}} - \int_{t\wedge\tau}^t dU_s$$

est la partie martingale locale de sa $\mathbb{G}$-décomposition, où J est défini dans la proposition 2.3.19.

2.3.5 Propriété de représentation prévisible et grossissement progressif

On suppose que le processus $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t)$ est croissant et continu, mais on ne suppose pas que toutes les martingales de $\mathbb{F}$ sont continues. Le résultat suivant est dû à Blanchet-Scalliet et Jeanblanc [17].

Proposition 2.3.25. *Supposons que le processus $\Gamma = -\ln Z$ est continu et croissant. Soit X un processus $\mathbb{F}$-prévisible tel que la variable aléatoire X_τ est intégrable. Alors la $\mathbb{G}$-martingale $\widehat{X}_t := \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{G}_t)$ admet la décomposition suivante*

$$\widehat{X}_t = m_0 + \int_{]\!]0,t\wedge\tau]\!]} E_{s^-}dm_s + \int_{]\!]0,t\wedge\tau]\!]} (X_s - \widehat{X}_{s^-})dY_s,$$

où m est une $\mathbb{F}$-martingale définie par

$$m_t := \mathbb{E}(\int_0^\infty X_s e^{-\Gamma_s} d\Gamma_s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_0^\infty X_s dF_s|\mathcal{F}_t)$$

et $Y_t = N_t - \Gamma_{t\wedge\tau}$, $m_0 = \widehat{X}_0$, et les processus Γ, E, Y sont définis dans la proposition 2.3.13.

Le cas Brownien

Supposons que $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$ pour un certain mouvement Brownien B. Par la propriété de représentation prévisible et comme $(Z_t(\theta), t \geq 0)$, $\theta \geq 0$ est une famille de martingales bornées, il existe une famille de processus $\mathbb{F}$-prévisibles $(H_t(\theta), t \geq 0)$ telle que

$$dZ_t(\theta) = H_t(\theta)dB_t \quad p.s.$$

Les preuves de deux propositions suivantes peuvent trouvées dans El Karoui et. al ([32], p. 1023-1024).

Proposition 2.3.26. *Soit $dZ_t(\theta) = H_t(\theta)dB_t$ la représentation du martingale $(Z_t, t \geq 0)$ et on suppose que le processus $(H_t(\theta), t \geq 0)$ est différentiable au sens suivant : il existe une famille de processus $(h_t(\theta), t \geq 0)$ bornés par un processus intégrable tel que $H_t(\theta) = \int_0^\theta h_t(u)du$, avec $H_t(0) = 0$. Alors*

1) La martingale de densité α peut s'écrire sous la forme $d\alpha_t(\theta) = -h_t(\theta)dB_t$ avec $\int_0^\infty h_t(\theta)d\theta = 0$ pour tout $t \geq 0$.

2) Le processus Z peut s'écrire sous la forme $dZ_t = -\alpha_t(t)dt + H_t(t)dB_t$.

3) Avec des hypothèses plus régulières, si $(\partial_\theta\alpha_t(\theta))_{\theta=t}$ est noté simplement par $\partial_\theta\alpha_t(t)$, alors le processus $\alpha_t(t)$ est donné par

$$d\alpha_t(t) = \partial_\theta\alpha_t(t)dt - h_t(t)dB_t.$$

Proposition 2.3.27. *Pour tout $t, \theta \geq 0$, soit $\Psi_t(\theta) = \frac{H_t(\theta)}{Z_t(\theta)}$, avec les notations de la proposition 2.3.26. On suppose que $\Psi_t(\theta)$ défini par $\Psi_t(\theta) = \int_0^\theta \psi_t(u)du$ est borné par un processus intégrable. Alors*

1. $Z_t(\theta) = Z_0(\theta) \exp\left(\int_0^t \Psi_s(\theta)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Psi_s(\theta)|^2 ds\right)$;
2. $\lambda_t(\theta) = \lambda_0(\theta) - \int_0^t \psi_s(\theta)dB_s + \int_0^t \psi_s(\theta)\Psi_s(\theta)ds$;
3. $Z_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds + \int_0^t \Psi_s(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Psi_s(s)|^2 ds\right)$.

Remarque 2.3.13.

- Si $\Psi_s(s) = 0$, alors $Z_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$ qui est décroissant.
- $Z_t(\theta)$ est décroissant à θ, qui équivaut à $\lambda_t(\theta)$ est positif.
- Les résultats précédents ne sont pas restreints au filtration Brownienne, et on peut simplement les agrandir pour des filtrations plus générales sous une représentation similaire $dZ_t(\theta) = H_t(\theta)dX_t$ où X est une martingale qui peut avoir des sauts.

Maintenant on suppose que $\mathbb{F}$ est une filtration quelconque, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.28. *([19], Proposition 5.3 (partie (ii)).) Supposons qu'il existe une $\mathbb{F}$-martingale locale X qui a la $\mathbb{F}$-propriété de représentation prévisible. Alors toute $\mathbb{G}$-martingale locale $\widehat{X}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\widehat{X}_t = \widehat{X}_0 + \int_0^t \Phi_s dx_s + \int_0^t \psi_s dY_s,$$

où x est la partie martingale dans la $\mathbb{G}$-décomposition canonique de X et $Y_t = N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds$ est une $\mathbb{G}$-martingale définie dans la proposition 2.3.14, $\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_s^2 d[x]_s\right) < \infty$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t \psi_s^2 d[Y]_s\right) < \infty$.

Pour le théorème suivant, on définit les tribus suivantes : pour toute variable aléatoire positive ρ, $\mathcal{F}_\rho$ (resp. $\mathcal{F}_{\rho^-}$) est la tribu engendrée par les variables aléatoires $U_\rho \mathbf{1}_{\{\rho<\infty\}} + \kappa \mathbf{1}_{\{\rho=\infty\}}$ où U est un processus $\mathbb{F}$-optionnel (resp. $\mathbb{F}$-prévisible) et κ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.
Jeanblanc et Song dans [46] généralisent Jeulin ([48], lemme 5.15) et donnent le résultat suivant qui représente la propriété de représentation prévisible avant τ.

Théorème 2.3.7. *([46], Théorème 3.1.) Supposons qu'il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg X qui a la $\mathbb{F}$-propriété de représentation prévisible et que l'hypothèse $(\acute{H})$ est satisfaite entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. Alors, pour toute variable aléatoire bornée $\mathcal{G}_\tau$-mesurable ξ, il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible $\bar{J}$ tel que $\bar{J}\mathbf{1}_{[\![0,\tau]\!]}$ est $\mathbb{G}$-prévisible satisfaisant $\mathbb{E}\left(\int_0^t \bar{J}_s^2 \mathbf{1}_{[\![0,\tau]\!]} d[\bar{X}]_s\right) < \infty$ et*

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_0) + \int_0^t (1-N_{s^-})\bar{J}_s d\bar{X}_s + \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}(\xi - Y_\tau)N_t - \int_0^t K_s(1-N_{s^-})\frac{1}{Z_{s^-}} dA_s, \quad (2.21)$$

pour $t \geq 0$, où $\bar{X}$ est la partie martingale dans la $\mathbb{G}$-décomposition canonique de X, K est un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné tel que $K_\tau \mathbf{1}_{\{0<\tau<\infty\}} = \mathbb{E}\left((\xi - Y_\tau)\mathbf{1}_{\{0<\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau^-}\right)$, le processus Y est défini par

$$Y_t = \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t)}{Z_t}\mathbf{1}_{\{t<R\}}, \quad 0 \leq t < \infty$$

et $R = \inf\{t \geq 0 : Z_{t^-} = 0$ ou $Z_t = 0\}$.

Remarque 2.3.14. 1. Soit $S_t = \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dA_s}{Z_{s^-}}$ qui est $\mathbb{G}$-martingale. Alors, la formule (2.21) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_0) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{0<s\leq\tau\}}\bar{J}_s d\bar{X}_s + \int_0^t K_s \mathbf{1}_{\{0<s\leq\tau\}} dS_s + \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}(\xi - Y_\tau - K_\tau)N_t$$

ça montre que, pour toute $\mathbb{G}$-martingale bornée $\bar{X}$, la martingale arrêtée $\bar{X}^\tau$ est une somme d'une intégrale stochastique par rapport à $(\bar{X}, S)$ et une $\mathbb{G}$-martingale de la forme ξN, où ξ est $\mathbb{G}_\tau$-mesurable telle que $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_{\tau^-}) = 0$.

2. Maintenant, supposons que $\{0 < \tau < \infty\} \cap \mathcal{G}_\tau = \{0 < \tau < \infty\} \cap \mathcal{G}_{\tau-}$. Dans ce cas, $\mathbf{1}_{\{0<\tau<\infty\}} K_\tau = \mathbf{1}_{\{0<\tau<\infty\}}(\xi - Y_\tau)$ et la formule (2.21) peut s'écrire sous la forme
$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_0) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{0<s\leq\tau\}} \bar{J}_s d\bar{X}_s + \int_0^t K_s \mathbf{1}_{\{0<s\leq\tau\}} dS_s.$$
Alors $(\bar{X}^\tau, S)$ a la $\mathbb{G}^\tau$-PRP, où $\mathbb{G}^\tau = (\mathcal{G}_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est la filtration arrêtée en τ et $\bar{X}^\tau$ est la martingale $\bar{X}$ arrêtée en τ.

Maintenant, Jeanblanc et Song supposent une hypothèse supplémentaire et ils donnent le résultat suivant.

Théorème 2.3.8. *([46], Théorème 6.4.) Supposons qu'il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg X qui a la $\mathbb{F}$-propriété de représentation prévisible et que l'hypothèse de densité est satisfaite. Alors, $\{0 < \tau < \infty\} \cap \mathcal{G}_\tau = \{0 < \tau < \infty\} \cap \mathcal{G}_{\tau-}$ et $(\bar{X}, S)$ a la $\mathbb{G}$-propriété de représentation prévisible.*

2.4 Liens entre la filtration initiale et les filtrations grossies initialement et progressivement

Dans cette section, on étudie les relations entre les filtrations $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$.
Les trois filtrations satisfaisant
$$\mathbb{F} \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{G}^{\sigma(\tau)},$$
où $\mathbb{F}$ est la filtration initiale, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$ sont respectivement, le grossissement progressif et initial de $\mathbb{F}$ avec un temps aléatoire fini τ.

On donne le résultat suivant ; voir Kchia ([56], Lemme 8), Li et Rutkowski ([60], p. 8).

Lemme 2.4.1. *Pour tout temps aléatoire fini τ, le grossissement progressif $\mathbb{G}$ coïncide avec la filtration initiale $\mathbb{F}$ avant τ.*

Preuve. On a
$$\mathcal{F}_t \cap \{\tau > t\} \subset \mathcal{G}_t \cap \{\tau > t\} \subset \mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)} \cap \{\tau > t\} = \mathcal{F}_t \cap \{\tau > t\}$$
donc $\mathcal{G}_t \cap \{\tau > t\} = \mathcal{F}_t \cap \{\tau > t\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. □

On rappelle la définition suivante ; voir par exemple Kchia ([56], Définition 7).

Définition 2.4.1. *Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$ deux filtrations telles que $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et τ un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt. Alors $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$ sont dites **coïncidant après** τ si pour tout processus $\mathbb{H}$-optionnel X, le processus*
$$\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}(X - X_\tau)$$
est $\mathbb{K}$-adapté.

Le lemme suivant étudie quelques propriétés des filtrations coïncidant après τ ; voir Kchia ([56], Lemme 22).

Lemme 2.4.2. *Soient $\mathbb{K} = (\mathcal{K}_t, t \geq 0)$ et $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t, t \geq 0)$ deux filtrations telles que $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et τ un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt. Supposons que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$ sont continues à droite, et coïncidant après τ. Alors*

(i) Pour tout $\mathbb{H}$-temps d'arrêt T, $T \vee \tau$ est un $\mathbb{K}$-temps d'arrêt. En particulier, τ lui même est un $\mathbb{K}$-temps d'arrêt.

(ii) Pour tout processus $\mathbb{H}$-optionnel (resp. prévisible) X, le processus $\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}(X - X_\tau)$ est $\mathbb{K}$-optionnel (resp. prévisible).

Preuve.
(i) Soit T un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt. Alors $T \vee \tau$ est aussi un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt, et $X = \mathbf{1}_{[\![0,T\vee\tau]\!]}$ est $\mathbb{H}$-adapté. Donc

$$\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}(r)(X_r - X_\tau) = -\mathbf{1}_{\{T\vee\tau<r\}}$$

est $\mathcal{K}_r$-mesurable par hypothèse pour tout $r \geq 0$. Alors $T\vee\tau$ est un $\mathbb{K}$-temps d'arrêt comme $\mathbb{K}$ est continue à droite.
(ii) Soit X sous la forme $X = h\mathbf{1}_{[s,t[}$ pour une variable aléatoire $\mathcal{H}_s$-mesurable h et $0 \leq s < t$. Alors

$$Y_r = \mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}(r)(X_r - X_\tau) = \mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}}(h\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}} - h\mathbf{1}_{\{s\leq\tau<t\}})$$

est $\mathcal{K}_r$-mesurable par hypothèse et définit un processus càdlàg. En effet, Y est $\mathbb{K}$-optionnel, et le théorème de classe monotone implique le résultat pour les processus $\mathbb{H}$-optionnels. Le cas prévisible est similaire. □

On a le résultat suivant ; voir Kchia ([56], Lemme 23).

Lemme 2.4.3. *Les grossissements initial $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)} = (\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}, t \geq 0)$ et progressif $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ coïncident après τ.*

Preuve. Soit $X = h\mathbf{1}_{[s,t[}$ pour une variable aléatoire $\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}$-mesurable h et $0 \leq s < t$. Alors

$$\begin{aligned} Y_r &= \mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![}(r)(X_r - X_\tau) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}}(h\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}} - h\mathbf{1}_{\{s\leq\tau<t\}}) \\ &= h\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}}\mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}} - h\mathbf{1}_{\{s\leq\tau<t\}}\mathbf{1}_{\{t\leq r\}} - h\mathbf{1}_{\{s\leq\tau\leq r\}}\mathbf{1}_{\{r<t\}} \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que les trois termes à droite sont $\mathcal{G}_r$-mesurables. Pour le premier terme, soit h de la forme $fK(r)$ pour f $\mathcal{F}_s$-mesurable et K une fonction Borélienne. Alors

$$\begin{aligned} h\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}}\mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}} &= fK(\tau)\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}}\mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}} \\ &= fK(r\wedge\tau)\mathbf{1}_{\{s\leq r<t\}}\mathbf{1}_{\{\tau\leq r\}}, \end{aligned}$$

qui est $\mathcal{G}_r$-mesurable. En utilisant le théorème de classe monotone, le résultat est satisfait pour tout $\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}$-mesurable h, et finalement pour tout $\mathcal{G}_s^{\sigma(\tau)}$-mesurable par l'argument standard. Les deux termes sont similaires. □

Les résultats suivants utilisent l'hypothèse de densité pour le grossissement progressif, les preuves peuvent trouvées dans Callegaro et. al ([19], p. 556-558).

Lemme 2.4.4. *Soit $Y_t^\tau = y_t(\tau)$ une variable aléatoire $\mathcal{G}_t^{\sigma(\tau)}$-mesurable et intégrable. Alors, pour $s \leq t$,*

$$\mathbb{E}(Y_t^\tau|\mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(y_t(\tau)|\mathcal{G}_s) = \widetilde{y}_s\mathbf{1}_{\{s<\tau\}} + \bar{y}_s(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}},$$

avec

$$\widetilde{y}_s = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}\left(\int_s^{+\infty} y_t(u)\alpha_t(u)du|\mathcal{F}_s\right),$$

$$\bar{y}_s(u) = \frac{1}{\alpha_s(u)}\mathbb{E}(y_t(u)\alpha_t(u)|\mathcal{F}_s).$$

Proposition 2.4.1. *Soit $Y^\tau = y(\tau)$ un processus $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$-prévisible borné ou positif. Alors, la projection prévisible de Y^τ dans $\mathbb{G}$ est donnée par*

$$^p(Y^\tau)_t = \mathbf{1}_{\{t \le \tau\}} \frac{1}{Z_{t^-}} \int_t^{+\infty} y_t(u) \alpha_{t^-}(u) du + \mathbf{1}_{\{\tau < t\}} y_t(\tau).$$

Chapitre 3

Propriété d'immersion et grossissement progressif avec un temps honnête

Dans ce chapitre, nous étudions le cas où toute $\mathbb{F}$-martingale reste une $\mathbb{G}$-martingale, pour deux filtrations satisfaisant $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ (nous ne supposons pas que $\mathbb{G}$ est un grossissement ni progressif ni initial de $\mathbb{F}$). Cette propriété (dite *immersion* ou *hypothèse (H)*) est équivalente à $\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G}_t)$, pour tout t et $\zeta \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$.

Nous nous intéressons aussi au grossissement progressif à l'aide de temps honnête, ces temps satisfaisant l'hypothèse $(\acute{H})$ entre la filtration initiale et son grossissement progressif.

3.1 Immersion de filtrations

Dans cette section, nous donnons une caractérisation complète des filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sous l'hypothèse (H) et nous faisons attention au grossissement progressif de filtrations.

Définition 3.1.1. *Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux filtrations dans le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La filtration $\mathbb{F}$ est dite **immergée** dans $\mathbb{G}$ et on écrit $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, si $\mathbb{F}$ est incluse dans $\mathbb{G}$, i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, pour tout $t \geqslant 0$ et toute $\mathbb{F}$-martingale est une $\mathbb{G}$-martingale (Émery [34]). Cela est également appelé l'**hypothèse (H)** par Brémaud et Yor [18] qui est définie comme :*
***(H)** Toute $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable est une $\mathbb{G}$-martingale.*

Il est facile de remarquer que (H) est satisfaite si et seulement si toute $\mathbb{F}$-martingale locale (resp. toute $\mathbb{F}$-martingale bornée) est une $\mathbb{G}$-martingale locale (resp. $\mathbb{G}$-martingale).

On rappelle la définition d'immersion pour les processus ; voir Beghdadi-Sakrani et Émery ([16], p. 242).

Définition 3.1.2. *Soient $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ un processus et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ une filtration dans le même espace probabilisé. Le processus X est **immergé** dans la filtration $\mathbb{F}$ si la filtration naturelle de X est immergée dans $\mathbb{F}$.*
*Un processus $X = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dit **immergé** dans une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq n}$ si le processus $(0, X_1, ..., X_n)$ est immergé dans $\mathbb{F}$.*

Théorème 3.1.1. *([18], Théorème 3.) L'hypothèse (H) est équivalente aux propriétés suivantes :*

(H1) $\forall t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{G}_t$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_t$, i.e., $\forall t \geqslant 0$, $\forall G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$, $\forall F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$, $\mathbb{E}(G_t F|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)$.

(H2) $\forall t \geqslant 0$, $\forall G_t \in L^1(\mathcal{G}_t)$, $\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)$.

(H3) $\forall t \geqslant 0$, $\forall F \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$, $\mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)$.

De plus, si (H) est satisfaite, alors $\mathcal{G}_t \cap \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_t$.

Preuve.

- (H)⇒(H1). Soit $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et supposons que l'hypothèse (H) est vérifiée. ça implique que la $\mathbb{F}$-martingale $F_t = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)$ est une $\mathbb{G}$-martingale telle que $F_\infty = F$, alors $F_t = \mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t)$. Il s'ensuit que pour tout t et toute $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$:

$$\mathbb{E}(FG_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t\mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t).$$

qui est exactement (H1).

- (H1)⇒(H2). Soient $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$. Sous (H1),

$$\mathbb{E}(F\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)) \overset{\text{(H1)}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(FG_t|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(FG_t).$$

qui est (H2).

- (H2)⇒(H3). Soient $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$. Si (H2) est vérifiée, alors il est facile de montrer que, pour $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$,

$$\mathbb{E}(G_t\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(F\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)) \overset{\text{(H2)}}{=} \mathbb{E}(FG_t) = \mathbb{E}(G_t\mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t)).$$

qui implique (H3).

- Évidement (H3) implique (H).

Maintenant, la preuve de $\mathcal{G}_t \cap \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_t$ est simple. Il suffit de vérifier que $\mathcal{G}_t \cap \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_t$. Soit $A \in \mathcal{G}_t \cap \mathcal{F}_\infty$. Alors, par (H1),

$$\mathbf{1}_A = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_t)$$

qui implique que $A \in \mathcal{F}_t$. □

On présente quelques conséquences de l'hypothèse (H) ; voir Beghdadi-Sakrani et Émery ([16], p. 241-243) :

Si (H) est vérifiée,

- T est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ssi T est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt, qui est aussi $\mathcal{F}_\infty$-mesurable ; de plus $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_T} = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_T}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}\mathbb{E}^{\mathcal{G}_T}$ (i.e., $\mathcal{G}_T$ et $\mathcal{F}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T \cap \mathcal{F}_\infty$).
- H est un processus $\mathbb{F}$-optionnel (resp. $\mathbb{F}$-prévisible) ssi H est un processus $\mathbb{G}$-optionnel (resp. $\mathbb{G}$-prévisible) tel que, pour tout t, H_t est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. De plus, si H est borné et $\mathbb{G}$-optionnel, sa $\mathbb{F}$-projection optionnelle est indistinguable de sa $\mathcal{F}_\infty$-projection optionnelle (on peut remplacer optionnelle par prévisible).
- En particulier, si B est un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien, alors il est une $\mathbb{G}$-martingale de crochet t. Comme le crochet ne dépend pas de la filtration, donc B est un $\mathbb{G}$-mouvement Brownien. En effet, pour tout λ, le processus $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, alors est une $\mathbb{G}$-martingale.
- De même, tout $\mathbb{F}$-processus de Markov est aussi un $\mathbb{G}$-processus de Markov, avec les mêmes probabilités de transition.

- Il est important de noter que, si B est un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien et un $\mathbb{G}$-mouvement Brownien, et ψ est un processus $\mathbb{F}$-prévisible intégrable par rapport à B, le processus $\int_0^t \psi_s dB_s$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale seulement pour une classe de processus $\mathbb{G}$-adapté ψ satisfaisant quelques conditions d'intégrabilité.

Un exemple très simple est obtenu par l'arrêt ; voir Beghdadi-Sakrani et Émery ([16], p. 242) : Si T est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, la filtration arrêtée $\mathbb{F}^T$ est immergée dans $\mathbb{F}$.

Le lemme suivant donne une condition suffisante et faible concernant les filtrations indépendantes ; voir Beghdadi-Sakrani et Émery ([16], Lemme 1, p. 242).

Lemme 3.1.1. *Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux filtrations indépendantes (i.e., $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$ sont indépendantes pour tout t). Si $\mathbb{H}$ est la plus petite filtration contenant $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{H}$.*

Preuve. Par l'argument de densité, il suffit de montrer que toute $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable M est une $\mathbb{H}$-martingale. Pour $s < t$, $F_s \in L^\infty(\mathcal{F}_s)$ et $G_t \in L^\infty(\mathcal{G}_t)$, on peut écrire

$$\mathbb{E}(M_t F_s G_t) = \mathbb{E}(G_t)\mathbb{E}(M_t F_s) = \mathbb{E}(G_t)\mathbb{E}(M_s F_s) = \mathbb{E}(M_s F_s G_t).$$

Comme le produit $F_s G_t$ est complètement dans $L^2(\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{G}_t)$, $M_t - M_s$ est orthogonale à $L^2(\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{G}_t)$. Le lemme s'ensuit puisque $\mathcal{H}_s$ est incluse dans $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{G}_t$ par Lindvall et Rogers ([62], Lemme 2). □

Un autre exemple trivial pour lequel $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$ est $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \tilde{\mathbb{F}}$ où $\mathbb{F}$ et $\tilde{\mathbb{F}}$ sont deux filtrations telles que $\mathcal{F}_\infty$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ sont indépendantes.

On rappelle le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Proposition 3.1.2).

Proposition 3.1.1. *Si pour tout t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_\infty$ et si $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$, alors $\mathbb{G}$ est égale à $\mathbb{F}$.*

Preuve. Sous l'hypothèse d'immersion, $\forall F_\infty \in \mathcal{F}_\infty, \mathbb{E}(\mathbf{1}_{F_\infty}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{F_\infty}|\mathcal{F}_t)$, ça implique pour tout $K_t \in \mathcal{G}_t$, $\mathbf{1}_{K_t} = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{K_\infty}|\mathcal{F}_t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. □

3.1.1 L'immersion dans le grossissement progressif de filtrations

Dans cette sous-section, on considère le cas où $\mathbb{G}$ est le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ avec un temps aléatoire τ.

On donne le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Lemme 3.2.1).

Lemme 3.1.2. *Dans le cadre de grossissement progressif, (H) est satisfaite entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ si et seulement si l'une de deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned} &(i)\forall(t,s), s \leqslant t, \mathbb{P}(\tau \leqslant s|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \leqslant s|\mathcal{F}_t), \\ &(ii)\forall t, \mathbb{P}(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Preuve. Voir par exemple Dellacherie et Meyer [30]. Si (ii) est vérifiée, alors (i) est aussi vérifiée. Si (i) est satisfaite, $\mathcal{F}_\infty$ et $\sigma(\tau \wedge t)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_t$ et l'hypothèse (H) est vérifiée. □

Remarque 3.1.1. 1. L'hypothèse (H) implique que pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable X, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$. Cette dernière égalité n'est pas applicable à toute variable $\mathcal{G}_\infty$-mesurable ; en particulier $\mathbb{P}(\tau \leqslant t|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ n'est pas égale à $F_t = \mathbb{P}(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t)$.

2. Si Θ est une v.a indépendante à $\mathbb{F}$, il est évident que toute $\mathbb{F}$-martingale M est une $\mathbb{G}^{\sigma(\Theta)} = \mathbb{F} \vee \sigma(\Theta)$-martingale. Comme $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}^{\sigma(\Theta)}$, il s'ensuit que M est une $\mathbb{G}$-martingale.
3. Notons que, si (H) est satisfaite, alors (3.1) implique que le processus $\mathbb{P}(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t) = F_t = 1 - Z_t$ est croissant, cependant, l'inverse n'est pas vrai. La propriété de décroissance de Z équivaut à que toute $\mathbb{F}$-martingale arrêtée en τ est une $\mathbb{G}$-martingale.
4. Si τ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, alors l'égalité (3.1) équivaut à τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. De plus, si $\mathbb{F}$ est une filtration Brownienne, alors τ est prévisible et la surmartingale d'Azéma Z est décroissante et $\mathbb{F}$-prévisible et sa décomposition de Doob-Meyer est $Z = 1 - A$.
5. En particulier, l'hypothèse (H) est vérifiée si τ est indépendante de $\mathcal{F}_\infty$.
6. Rappelons que $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}$, si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{D}$ sont immergées dans $\mathbb{G}$, et si toute $\mathbb{F}$-martingale est continue, alors τ et $\mathcal{F}_\infty$ sont indépendantes.
7. $\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{F} \vee \sigma(\tau)$ si et seulement si τ est constante.

Maintenant, nous donnons quelques conséquences de la condition (A).

Corollaire 3.1.1. *Supposons que la propriété d'immersion est vérifiée. Alors $Z = 1 - A$ est un processus décroissant. De plus, si τ évite tous les temps d'arrêt, alors Z est continu.*

Preuve. Voir par exemple Coculescu et. al [23] p. 518.

Remarque 3.1.2. Si la filtration initiale $\mathbb{F}$ est engendrée par un MB B et elle est immergée dans la filtration grossie $\mathbb{G}$, alors Z n'a pas une partie martingale dans sa décomposition de Doob-Meyer, i.e., Z est un processus prévisible et décroissant. De plus, le $\mathbb{F}$-MB B reste un $\mathbb{G}$-MB, et le crochet $\langle B, Z\rangle$ est nul.

3.1.1.1 $\mathbb{G}$-martingales contre $\mathbb{F}$-martingales

On rappelle le résultat suivant ; voir par exemple Li ([59], Proposition 3.3.1).

Proposition 3.1.2. *Supposons que $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$. Soit Y un processus $\mathbb{G}$-adapté, donné par la formule*

$$Y_t = \widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où $\widetilde{y}$ et $\bar{y}(u)$ sont $\mathbb{F}$-adaptés. Supposons que Y est intégrable et que

(i) La $\mathbb{F}$-projection de Y qui est définie par

$$\acute{Y}_t := \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_t) = \widetilde{y}_t \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}|\mathcal{F}_t),$$

est une $\mathbb{F}$-martingale,

(ii) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ fixé, le processus $(\bar{y}_t(u), t \in [u, \infty))$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

Alors, le processus Y est une $\mathbb{G}$-martingale.

Preuve. Soit $s < t$. L'application de la proposition 2.3.8 et le lemme 2.3.5 donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{G}_s) &= \mathbb{E}(\widetilde{y}_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{G}_s) + \mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{s<\tau\leq t\}}|\mathcal{G}_s) + \mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{G}_s) \\
&= \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1}{Z_s} \big(\mathbb{E}(\widetilde{y}_t Z_t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{s<\tau\leq t\}}|\mathcal{F}_s)\big) + \mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{G}_s).
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\mathbb{E}(\bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{G}_s) \overset{\text{(H)}}{=} \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}\mathbb{E}(\bar{y}_t(u)|\mathcal{F}_s)_{u=\tau} \overset{\text{(ii)}}{=} \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}\mathbb{E}(\bar{y}_s(u)|\mathcal{F}_s)_{u=\tau} = \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}\bar{y}_s(\tau). \quad (3.2)$$

En effet, il suffit de montrer l'égalité (3.2) pour $\bar{y}_t(u) = h(u)X_t$ où X est une $\mathbb{F}$-martingale. Pour un tel $\bar{y}(u)$, on a

$$\mathbb{E}(X_t h(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{G}_s) = \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}h(\tau)\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}_s) \overset{\text{(H)}}{=} \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}h(\tau)\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \overset{\text{(ii)}}{=} \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}h(\tau)X_s = \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}\bar{y}_s(\tau).$$

D'autre part, par (i)

$$\mathbb{E}(\widetilde{y}_t Z_t + \bar{y}_t(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}|\mathcal{F}_s) = \widetilde{y}_s Z_s + \mathbb{E}(\bar{y}_s(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_s).$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{G}_s) = \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}\frac{1}{Z_s}\left(\widetilde{y}_s Z_s + \mathbb{E}((\bar{y}_s(\tau) - \bar{y}_t(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_s)\right) + \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}\bar{y}_s(\tau).$$

Il reste à vérifier que

$$\mathbb{E}((\bar{y}_s(\tau) - \bar{y}_t(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_s) = 0$$

qui s'ensuit de

$$\mathbb{E}((\bar{y}_s(\tau) - \bar{y}_t(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_s) = \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}\mathbb{E}(\bar{y}_s(u) - \bar{y}_t(u)|\mathcal{F}_s)_{u=\tau} = 0$$

où on a utilisé (3.2). □

3.1.1.2 Théorèmes de représentation des martingales

Nous donnons quelques résultats très connus sur les théorèmes de représentation des martingales.

Proposition 3.1.3. *Soient $\mathbb{F}$ immergée dans $\mathbb{G}$, H un processus $\mathbb{G}$-prévisible et X une $\mathbb{F}$-martingale tels que $\int HdX$ existe. Alors,*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dX_s|\mathcal{F}_t\right) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s|\mathcal{F}_s)dX_s.$$

Preuve. Voir par exemple Aksamit et Jeanblanc [5] p. 48.

Maintenant, on compare les intégrations stochastiques par rapport à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ de processus $\mathbb{F}$-optionnels sous l'hypothèse (H).

Proposition 3.1.4. *([18].) Soit (H) vérifiée.*
Si H est un processus $\mathbb{F}$-optionnel et X est une $\mathbb{F}$-martingale locale tels que $(\int_0^\cdot H_s^2 d[X,X]_s)^{\frac{1}{2}}$ est $\mathbb{F}$-localement intégrable, alors

$$\int_{\mathbb{F}} HdX = \int_{\mathbb{G}} HdX.$$

La proposition suivante concerne les caractérisations des martingales qui ont la propriété de représentation prévisible (PRP).

Proposition 3.1.5. *([18].) Soient X une $\mathbb{F}$- et $\mathbb{G}$-martingale locale telle que toute $\mathbb{G}$-martingale locale M peut représenter sous la forme*

$$M = a + \int_{\mathbb{G}} HdX \quad (a\in\mathbb{R}, H \text{ est un processus } \mathbb{G}-\text{prévisible}).$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Toute $\mathbb{F}$-martingale locale N peut s'écrire sous la forme

$$N = b + \int_{\mathbb{F}} KdX \quad (b \in \mathbb{R}, K \text{ est un processus } \mathbb{F} - \text{prévisible}).$$

(b) Toute $\mathbb{F}$-martingale locale est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Remarque 3.1.3. Soit X une $\mathbb{G}$-martingale locale vérifiant les hypothèses de la proposition précédente. Ces hypothèses sont aussi vérifiées par $Y = \int_{\mathbb{G}} HdX$ où H est un processus $\mathbb{G}$-prévisible. Alors, on peut appliquer la proposition précédente à Y avec $\mathbb{F} = \mathbb{F}^Y$.

Supposons maintenant que l'hypothèse (H) est vérifiée et que $F_t = \mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_t)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec densité α. Rappelons d'après la proposition 2.3.14 que

$$Y_t := N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds$$

est une $\mathbb{G}$-martingale avec $\lambda_s = \frac{\alpha_s}{Z_s}$.

Kusuoka [58] a étudié le théorème de représentation suivant.

Théorème 3.1.2. *([58], Théorème 2.3.) Supposons que $\mathbb{F}$ est une filtration Brownienne engendrée par le MB B. Alors, sous l'hypothèse (H), toute $\mathbb{G}$-martingale de carré intégrable X admet une représentation comme une somme de deux intégrales stochastiques dont l'une par rapport à le MB B, et l'autre par rapport à la martingale discontinue Y :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dB_s + \int_0^t \psi_s dY_s$$

où, pour tout t, $\mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right) < \infty$ et $\mathbb{E}\left(\int_0^t \psi_s^2 \lambda_s ds\right) < \infty$.

Le résultat suivant est une généralisation du théorème 3.1.2 ; voir par exemple Coculescu et. al ([23], Corollaire 5.8).

Corollaire 3.1.2. *Soient τ un temps aléatoire qui vérifie la condition (A) et $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$. Alors toute $\mathbb{G}$-martingale locale de carré intégrable X peut s'écrire sous la forme*

$$X_t = X_0 + V_t + \int_0^t h_s dY_s,$$

où V est une $\mathbb{G}$-martingale locale de carré intégrable de la forme $\int_0^t R_s dm_s$, où m est une $\mathbb{F}$-martingale locale de carré intégrable, R est un processus $\mathbb{G}$-prévisible tel que $\int_0^t R_s^2 d\langle m, m\rangle_s$ est localement intégrable et h est un processus $\mathbb{F}$-prévisible tel que h_τ^2 est intégrable.

Dans le cas d'une $\mathbb{G}$-martingale de la forme $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t)$ où X est $\mathcal{F}_T$-mesurable, ou pour $\mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$ où h est prévisible, on a le théorème suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], Théorème 3.2.13).

Théorème 3.1.3. *Supposons que $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$, et que toute $\mathbb{F}$-martingale est continue et que $Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ est continue. Alors, la $\mathbb{G}$-martingale arrêtée $M_t^h = \mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$, où h est un processus $\mathbb{F}$-prévisible tel que $\mathbb{E}|h_\tau| < \infty$, admet une représentation comme une somme de deux $\mathbb{G}$-martingales dont l'une est continue et l'autre est discontinue :*

$$M_t^h := m_0^h + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_u} dm_u^h + \int_{]0,t\wedge\tau]} (h_u - M_{u^-}^h) dY_u, \tag{3.3}$$

où m^h est une $\mathbb{F}$-martingale continue définie par

$$m_t^h := -\mathbb{E}\left(\int_0^\infty h_u dZ_u | \mathcal{F}_t\right).$$

Preuve. Notons que, par le lemme 2.3.5

$$\begin{aligned}
M_t^h &= \mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t) = h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} - \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}\left(\int_t^\infty h_u dZ_u|\mathcal{F}_t\right) \\
&= h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}\left(-\int_t^\infty h_u dZ_u|\mathcal{F}_t\right) \\
&= h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}\left\{m_t^h + \mathbb{E}\left(\int_0^t h_u dZ_u|\mathcal{F}_t\right)\right\} \\
&= h_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{1}{Z_t}\left(m_t^h + \int_0^t h_u dZ_u\right) \\
&= \int_0^t h_u dN_u + (1-N_t)\frac{1}{Z_t}\left(m_t^h - \int_0^t h_u dF_u\right).
\end{aligned}$$

Donc, on peut obtenir directement la formule (3.3) par l'intégration par parties. Par l'hypothèse (H), les processus $(m_t^h; t\ge 0)$ et $(\int_0^t Z_u^{-1} dm_u^h; t \ge 0)$ sont aussi des $\mathbb{G}$-martingales. Donc, le processus arrêté $(\int_0^{t\wedge\tau} Z_u^{-1} dm_u^h; t\ge 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale. □

Lemme 3.1.3. *Supposons que la condition (A) est vérifiée et que $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$. Soit z un processus $\mathbb{G}$-prévisible. Si $\mathbb{E}|z_\tau| < \infty$, alors*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t z_s dY_s | \mathcal{F}_t\right) = 0.$$

Preuve. Voir par exemple Coculescu et. al [23] p. 522.

Corollaire 3.1.3. *Soient τ un temps aléatoire qui vérifie la condition (A) et $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$. Soit h un processus $\mathbb{F}$-prévisible tel que $\mathbb{E}|h_\tau| < \infty$. Supposons de plus qu'il existe une constante c telle que $\mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{F}_\infty) = c$. Alors, il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible K tel que*

$$\mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t) = c + \int_0^t K_s dY_s.$$

Preuve. Voir par exemple Coculescu et. al [23] p. 524.

La proposition suivante donne une représentation des $\mathbb{G}$-martingales de la forme $\mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$ pour un processus $\mathbb{F}$-optionnel h vérifiant $\mathbb{E}|h_\tau| < \infty$ sous des conditions supplémentaires ; voir par exemple Aksamit et. al ([6], Proposition 3.3).

Proposition 3.1.6. *Supposons que $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, et que la surmartingale d'Azéma Z est décroissante et $\mathbb{F}$-prévisible, i.e., $Z = 1 - A$. Supposons aussi qu'il existe une $\mathbb{F}$-martingale m qui a la PRP par rapport à $\mathbb{F}$. Alors la $\mathbb{G}$-martingale arrêtée $Y_t^h := \mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$, où h est un processus $\mathbb{F}$-optionnel vérifiant $\mathbb{E}|h_\tau| < \infty$, admet la représentation suivante :*

$$dY_t^h = \left(h_t - \frac{X_t^h}{Z_t}\right) dX_t + \frac{1-N_{t-}}{Z_{t-}}\phi_t^h dm_t,$$

tels que ϕ^h est un processus $\mathbb{F}$-prévisible, X est une $\mathbb{G}$-martingale définie dans la proposition 2.3.13, et X^h est donnée par

$$X_t^h := \mathbb{E}\left(\int_t^\infty h_s dA_s|\mathcal{F}_t\right) = \mu_t^h - \int_0^t h_s dA_s,$$

où $\mu_t^h := \mathbb{E}\left(\int_0^\infty h_s dA_s|\mathcal{F}_t\right)$ est une $\mathbb{F}$-martingale uniformément intégrable.

Remarque 3.1.4. La proposition 3.1.6 est étudiée par Kusuoka [58] dans le cadre Brownien, i.e., $\mathbb{F}$ est une filtration engendrée par un MB B. Notons que si $\mathbb{F}$ est une filtration Brownienne, alors toute les $\mathbb{F}$-martingales (en particulier, la martingale μ^h) sont continues, et la proposition 3.1.6 est valable pour $m = B$ un MB.

3.2 Grossissement progressif avec un temps honnête

Une classe importante de temps aléatoires est la classe de temps honnêtes. Cette classe généralise la notion de temps d'arrêt. Un temps honnête est un temps aléatoire mais n'est pas un temps d'arrêt, qui fait ses analyses plus délicates.

Par exemple, soit S une martingale tend vers 0 quand t tend vers l'infini, on peut trouver dans Dellacherie et. al ([28], p. 137) :
"Par exemple, S_t peut représenter le cours d'une certaine action à l'instant t, et $\tau = \sup\{t, S_t = \sup_s S_s\}$ est le moment idéal pour vendre son paquet d'actions. Tous les spéculateurs cherchent à connaître τ sans jamais y parvenir, d'où son nom de variable aléatoire honnête."

Dans cette section, nous rappelons la définition d'un temps honnête et ses différentes caractérisations. Les résultats sont très connus et peuvent être trouvés par exemple dans Jeulin ([48], Chapitre V).

Notons que

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon>0}(\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(\tau \wedge (t+\varepsilon))) \tag{3.4}$$

est le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ avec un temps honnête τ.

On a la définition suivante ; voir par exemple Kchia ([56], Définition 2), Li ([59], Définition 2.4.1).

Définition 3.2.1. *Un temps aléatoire τ est dit $\mathbb{F}$-**honnête** si pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable τ_t telle que $\tau = \tau_t$ sur $\{\tau < t\}$.*

Remarque 3.2.1.
1. Notons que tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ est un $\mathbb{F}$-temps honnête. Il suffit de prendre $\tau_t = \tau \wedge t$.
2. Soient τ et τ' deux temps honnêtes, alors $\tau \vee \tau'$ est un temps honnête : On a les temps aléatoires τ et τ' sont honnêtes, pour tout $t > 0$, il existe des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables τ_t et τ'_t telles que

$$\tau \mathbf{1}_{\{\tau<t\}} = \tau_t \mathbf{1}_{\{\tau<t\}} \quad et \quad \tau' \mathbf{1}_{\{\tau'<t\}} = \tau'_t \mathbf{1}_{\{\tau'<t\}}.$$

Considérons le temps aléatoire $\tau \vee \tau'$,

$$\tau \vee \tau' \mathbf{1}_{\{\tau\vee\tau'<t\}} = \tau \vee \tau' \mathbf{1}_{\{\tau<t,\tau'<t\}} = \tau_t \vee \tau'_t \mathbf{1}_{\{\tau<t,\tau'<t\}} = \tau_t \vee \tau'_t \mathbf{1}_{\{\tau\vee\tau'<t\}},$$

qui montre que $\tau \vee \tau'$ est un temps honnête.

Le lemme suivant est très utilisable quand on travaille avec un temps honnête ; voir Dellacherie et Meyer ([30], p. 72).

Lemme 3.2.1.

(a) Un temps aléatoire τ est un $\mathbb{F}$-temps honnête si pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t^-}$-mesurable τ_t telle que $\tau = \tau_t$ sur $\{\tau < t\}$.

(b) Un temps aléatoire τ est un $\mathbb{F}$-temps honnête si pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable τ_t telle que $\tau = \tau_t$ sur $\{\tau \leq t\}$.

Notons que la condition (a) est un peu plus faible que (b).

Par exemple (voir Dellacherie et Meyer [30], p. 72), si τ est la fin d'un ensemble progressif A

$$\tau(\omega) = \sup\{t : (t, \omega) \in A\}$$

on peut prendre pour τ_t dans (a) la fin de l'ensemble $A \cap [\![0, t[\![\in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}_t$, et nous verrons que, réciproquement, toute variable aléatoire honnête est la fin d'un ensemble optionnel (ou progressif, c'est équivalent puisque l'adhérence d'un ensemble progressif est optionnelle (Jeulin [48], Lemme (4.1), p. 61)).

Le théorème suivant donne une caractérisation d'un temps honnête.

Théorème 3.2.1. *Soit τ un temps aléatoire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) τ est un temps honnête ;

(b) Il existe un ensemble optionnel Γ tel que $\tau(\omega) = \sup\{t : (t, \omega) \in \Gamma\}$ sur $\{\tau < \infty\}$;

(c) $\widetilde{Z}_\tau = 1$ p.s sur $\{\tau < \infty\}$;

(d) $\tau = \sup\{t : \widetilde{Z}_t = 1\}$ p.s sur $\{\tau < \infty\}$;

(e) $\mathcal{P}(\mathbb{G})|_{]\!]0,\infty[\![}$ est engendrée par $\mathcal{P}(\mathbb{F})|_{]\!]0,\infty[\![}$ et $]\!]0, \tau]\!]$;

(f) $a_t = a_{t\wedge\tau}$.

Preuve. L'équivalence parmi les conditions (a), (b), (c), (d) et (e) est montrée dans Jeulin ([48], Théorème (5.1)). L'implication $(a) \Rightarrow (f)$ s'ensuit par un argument analogue comme dans Azéma [9]. Pour finir la preuve, on démontre l'implication $(f) \Rightarrow (b)$.
Soit Λ le support de la mesure da, i.e.,

$$\Lambda = \{(\omega, t) : \forall \varepsilon > 0, a_t(\omega) > a_{t-\varepsilon}(\omega)\}.$$

l'ensemble Λ est optionnel car a est un processus optionnel. Alors, $[\![\tau]\!] \subset \Lambda$ et $a_t = a_{t\wedge\tau}$, ça implique que τ est la fin de Λ sur $\{\tau < \infty\}$. $\square$

Le théorème 3.2.1 amène a quelques commentaires ; voir Jeulin ([48], p. 74) :

- Une fin d'ensemble optionnel est honnête ;
- Une variable honnête finie est fin d'ensemble optionnel ;
- Si τ est honnête et A est $\mathcal{A}$-mesurable, la variable τ_A définie par $\tau_A = \tau$ sur A, $\tau_A = +\infty$ sur A^c, est honnête ;
- Une variable $\mathcal{A}$-mesurable τ est fin d'un ensemble optionnel si et seulement s'il existe une suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de variables honnêtes finies telles que $\sup_n \tau_n = \tau$.

On donne un exemple d'un temps honnête dans le cas Brownien ; voir par exemple Aksamit ([1], Exemple 1.46, p. 34).

Exemple 3.2.1. Soit B un mouvement Brownien. Alors on définit un temps honnête τ comme suit : $\tau = \sup\{t \leq T_1 : B_t = 0\}$, où $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$. Alors τ est le dernier zéro de B avant qu'il atteint 1. De plus τ est un temps honnête fini (dans la définition de temps honnête, on prend $\tau_t = \sup\{t \leq t \wedge T_1 : B_t = 0\}$). La surmartingale d'Azéma Z associée à τ est donnée par

$$Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = 1 - (B_t^{T_1})^+$$

qui implique que le plus grand ensemble prévisible se situe à gauche de $[\![\tau]\!]$ est égale à

$$\Gamma = \{Z_- = 1\} = \{(t, \omega) : B_t^{T_1}(\omega) \leq 0\} = [\![0, T_1]\!] \cap \{B_t \leq 0\}.$$

On rappelle le lemme suivant ; voir Aksamit ([1], Lemme 1.47, p. 34).

Lemme 3.2.2. *Soit τ le temps de dernier passage d'un processus $\mathbb{F}$-adapté Λ au-dessous d'un niveau déterministe a, i.e., $\tau = \sup\{t : \Lambda_t \leq a\}$. Alors, τ est un temps honnête.*

L'exemple suivant est étudié dans Aksamit ([1], p. 51-55).

Exemple 3.2.2. Supposons que $\mathbb{F}$ est une filtration engendrée par un processus de Poisson N d'intensité 1. Considérons les deux nombres réels $a > 0$ et $\mu > 1$, posons

$$\tau := \sup\{t \geqslant 0 : Y_t := \mu t - N_t \leqslant a\}, \quad X_t := N_t - t.$$

Alors, τ est un temps honnête vérifiant $Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} < 1$, $\mathbb{P}$.p.s, tel que, les processus associés Z et $\widetilde{Z}$ sont donnés par

$$Z = \Psi(Y - a)\mathbf{1}_{\{Y \geqslant a\}} + \mathbf{1}_{\{Y < a\}} \quad \text{et} \quad \widetilde{Z} = \Psi(Y - a)\mathbf{1}_{\{Y > a\}} + \mathbf{1}_{\{Y \leqslant a\}},$$

où $\Psi(u) := \mathbb{P}(\sup_{t \geqslant 0} Y_t > u)$. Le résultat suivant est dû à Aksamit et. al ([3], Exemple 2.10, p. 8),

$$1 - Z_- = (1 - \Psi(Y_- - a))\mathbf{1}_{\{Y_- > a\}}, \quad \mu = \mu_0 + \phi \centerdot X,$$

où $\phi := (\Psi(Y_- - a - 1) - \Psi(Y_- - a))\mathbf{1}_{\{Y_- > 1 + a\}} + (1 - \Psi(Y_- - a))\mathbf{1}_{\{a < Y_- \leqslant 1 + a\}}$.

Les résultats suivants sont très connus, et sont des conséquences de la condition (A).

Lemme 3.2.3. *Un temps aléatoire τ est un temps honnête et évite tous les temps d'arrêt si et seulement si $Z_\tau = 1$ p.s sur $\{\tau < \infty\}$.*

Preuve. Voir par exemple Aksamit et. al [2] p. 5.

Corollaire 3.2.1. *Si τ est un temps honnête et évite tous les temps d'arrêt, alors Z est continue.*

On donne le résultat suivant ; voir Aksamit et Jeanblanc ([5], lemme 7.6.8).

Lemme 3.2.4. *Soit τ est un temps honnête qui évite tous les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. Alors*

(i) A_∞ *est de loi exponentielle de paramètre* 1,

(ii) La mesure dA_t *est de support* $\{t : Z_t = 1\}$,

(iii) $\tau = \sup\{t : Z_t = 1\}$,

(iv) $A_\infty = A_\tau$.

Décomposition multiplicative pour un temps honnête

Nikeghbali et Yor dans [71] ont donné une décomposition multiplicative de Z pour un temps honnête τ sous les conditions (CA).

Théorème 3.2.2. *([71].) Soit τ un temps honnête. Alors, sous les conditions (CA), il existe une martingale locale continue et non négative Σ, avec $\Sigma_0 = 1$ et $\lim_{t\to\infty} \Sigma_t = 0$ telle que*

$$Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = M_t - A_t = \frac{\Sigma_t}{\Sigma_t^*} = \mathbb{E}(\ln(\Sigma_\infty^*)|\mathcal{F}_t) - \ln(\Sigma_t^*),$$

où

$$\Sigma_t = \exp\left(\int_0^t \frac{dM_s}{Z_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{Z_s^2}\right), \quad \Sigma_t^* = \exp(A_t);$$

$$M_t = 1 + \int_0^t \frac{d\Sigma_s}{\Sigma_s^*} = \mathbb{E}(\ln(\Sigma_\infty^*)|\mathcal{F}_t), \quad \Sigma_t^* := \sup_{s\le t} \Sigma_s.$$

De plus, on a

$$\tau = \sup\{t \ge 0 : \Sigma_t = \Sigma_t^*\} = \sup\{t \ge 0 : \Sigma_t = \Sigma_\infty^*\}.$$

Le résultat suivant est dû à Nikeghbali et Platen [70].

Proposition 3.2.1. *([70].) Sous les conditions du théorème 3.2.2, la loi de temps honnête τ est donnée par*

$$\mathbb{P}(\tau \le t) = \mathbb{E}(\ln(\Sigma_t^*)).$$

Et après Kardaras dans ([54], Théorème 1.2) a donné une caractérisation d'un temps honnête qui évite tous les temps d'arrêt.

Comme dans Kardaras [54], on définit L une martingale locale non négative telle que $L_0 = 1$, le processus $L^* := \sup_{t\in[0,.]} L_t$ est continu p.s, et $\mathbb{P}(L_\infty = 0) = 1$, où $L_\infty := \lim_{t\to\infty} L_t$.
On définit aussi

$$\tau_L := \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : L_{t^-} = L_{t^-}^*\}, \tag{3.5}$$

où, on note que $L_{0^-} = 1 = L_{0^-}^*$ qui implique que l'ensemble aléatoire $\{t \in \mathbb{R}_+ : L_{t^-} = L_{t^-}^*\}$ est non vide. Comme $\mathbb{P}(L_\infty = 0) = 1$ est vérifiée, il s'ensuit que $\mathbb{P}(\tau_L < \infty) = 1$.
On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : R_t := \sup\{s \in [0, t] : L_{s^-} = L_{s^-}^*\} \wedge t$, qui est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que $\tau_L = R_t$ sur $\{\tau_L \le t\}$. Il s'ensuit que τ_L est un temps honnête.
D'après (3.5), τ_L coïncide avec la fin de l'ensemble prévisible $\{L_- = L_-^*\}$, de plus $\{L_- = L_-^*\} \subseteq \{\Delta L = 0\}$.

Le résultat de Kardaras est le suivant.

Théorème 3.2.3. *([54], Théorème 1.2.) Pour un temps aléatoire τ, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *τ est un temps honnête qui évite tous les temps d'arrêt.*
2. *$\tau = \tau_L$ p.s.*

Sous l'une des deux conditions précédentes, $L_{\tau^-} = L_\tau = L_\infty^*$ p.s ; de plus, $\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = L_t/L_t^*$ p.s, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Notons que le processus L dans le théorème 3.2.3 est unique.

3.2.1 Différentes types de mesurabilité, projections et espérance conditionnelle

Reprenons l'expression (3.4). Il est clair que (voir Dellacherie et Meyer [30], p. 73) $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_t$ induisent la même tribu sur $\{\tau \geq t\}$. Remplaçant t par $t+\varepsilon$ et faisant tendre ε vers 0, nous voyons que (sans restriction sur τ), $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_t$ induisent la même tribu sur $\{\tau > t\} \in \mathcal{G}_t$.
Si τ est honnête, il résulte du lemme 3.2.1 (partie (b)) que $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_t$ induisent aussi la même tribu sur $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ (et cela équivaut d'ailleurs au caractère honnête de τ). On déduit que $\mathcal{G}_t$ est engendrée par $\mathcal{F}_t$ et par la partition $(\{\tau > t\}, \{\tau \leq t\})$, et par conséquent, on a les résultats suivants (voir par exemple Jeulin ([48], Proposition (5.3), p. 75) et Dellacherie et Meyer ([30], Lemme 1, p. 73)).

Lemme 3.2.5. *Supposons τ honnête. Alors une v.a Y est $\mathcal{G}_t$-mesurable si et seulement si elle admet une écriture*

$$Y = U\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} + V\mathbf{1}_{\{t\geq\tau\}} \text{ avec } U, V \text{ sont } \mathcal{F}_t - \text{mesurables.}$$

De même Y est $\mathcal{G}_{t-}$-mesurable si et seulement si elle admet l'écriture

$$Y = U\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}} + V\mathbf{1}_{\{t>\tau\}} \text{ avec } U, V \text{ sont } \mathcal{F}_{t^-} - \text{mesurables.}$$

Remarque 3.2.2.
1. Soient τ une variable $\mathbb{F}$-honnête et λ une variable $\mathbb{G}$-honnête telles que $\tau < \lambda$; alors λ est $\mathbb{F}$-honnête.
   Pour tout $t > 0$, il existe λ_t $\mathcal{G}_t$-mesurable telle que $\lambda_t = \lambda$ sur $\{\lambda < t\}$; d'après le lemme 3.2.5, il existe $\lambda_t^{'}$ $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que $\lambda_t = \lambda_t^{'}$ sur $\{\lambda < t\}$, c'est bien que $\lambda = \lambda_t^{'}$ sur $\{\lambda < t\}$.
   En particulier, si τ est $\mathbb{F}$-honnête, tout $\mathbb{G}$-temps d'arrêt supérieur à τ est $\mathbb{F}$-honnête.
2. Les mêmes conclusions sont valables si en remplaçant honnête par fin d'optionnel.

On a la représentation suivante des processus $\mathbb{G}$-prévisibles obtenue par Dellacherie et Meyer ([30], Lemme 2), Jeulin et Yor ([50], Lemme 13).

Lemme 3.2.6. *Supposons τ honnête. Alors un processus Y est $\mathcal{G}_t$-prévisible si et seulement si elle admet une écriture*

$$Y = J\mathbf{1}_{[\![0,\tau]\!]} + K\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![} \text{ avec } J, K \text{ sont } \mathcal{F}_t - \text{prévisibles.}$$

Un processus Y est $\mathcal{G}_t$-optionnel si et seulement si elle admet une écriture

$$Y = J\mathbf{1}_{[\![0,\tau[\![} + K\mathbf{1}_{[\![\tau]\!]} + W\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![} \tag{3.6}$$

avec J, W sont $\mathcal{F}_t$-optionnels et K est $\mathcal{F}_t$-progressif.

Notons que si Y est borné, on peut toujours supposer J, K, W bornés par la même constante.

On rappelle le résultat suivant ; voir Jeulin ([48], Proposition (5.3), p. 75).

Lemme 3.2.7. *Soit X un processus $\mathcal{A}$-mesurable borné,*

- *La projection $\mathbb{G}$-prévisible ${}^{p,\mathbb{G}}X$ de X vérifie*

$${}^{p,\mathbb{G}}(X)\mathbf{1}_{]\!]0,\infty[\![} = {}^{p,\mathbb{F}}(X|_{\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]}})\mathbf{1}_{]\!]0,\tau]\!]} + {}^{p,\mathbb{F}}(X|_{\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![}})\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![};$$

- *La projection $\mathbb{G}$-optionnelle ${}^{o,\mathbb{G}}X$ de X vérifie*

$$ {}^{o,\mathbb{G}}(X)(1-\mathbf{1}_{[\![\tau]\!]}) = {}^{o,\mathbb{F}}(X|_{\mathbf{1}_{[\![0,\tau[\![}})\mathbf{1}_{[\![0,\tau[\![} + {}^{o,\mathbb{F}}(X|_{\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![}})\mathbf{1}_{]\!]\tau,\infty[\![}. $$

Le lemme suivant donne des relations exactes entre les $\mathbb{G}$-compensateurs/projections et les $\mathbb{F}$-compensateurs/projections d'un processus ; voir Aksamit et. al ([3], Lemme 3.1, p. 14-15).

Lemme 3.2.8. *Supposons que τ est un temps honnête vérifiant $Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}} < 1$, $\mathbb{P}$.p.s. Alors, les assertions suivantes sont satisfaites :*

(a) Pour tout processus $\mathbb{F}$-adapté V à variation localement intégrable, on a

$$ \mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![} \centerdot V^{p,\mathbb{G}} = \mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![}(1-Z_-)^{-1} \centerdot ((1-\widetilde{Z}) \centerdot V)^{p,\mathbb{F}}, $$

et sur $]\!]\tau,+\infty[\![$

$$ {}^{p,\mathbb{G}}(\Delta V) = (1-Z_-)^{-1}\, {}^{p,\mathbb{F}}((1-\widetilde{Z})\Delta V). $$

(b) Pour tout $\mathbb{F}$-martingale locale X, on a sur $]\!]\tau,+\infty[\![$

$$ {}^{p,\mathbb{G}}\left(\frac{\Delta X}{1-\widetilde{Z}}\right) = \frac{{}^{p,\mathbb{F}}\left(\Delta X \mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}<1\}}\right)}{1-Z_-} \quad et \quad {}^{p,\mathbb{G}}\left(\frac{1}{1-\widetilde{Z}}\right) = \frac{{}^{p,\mathbb{F}}\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}<1\}}\right)}{1-Z_-}. $$

L'étude d'intégrabilité de le processus $(1-\widetilde{Z})^{-1}\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![}$ par rapport à tout processus à variation $\mathbb{F}$-localement intégrable et une autre comparaison entre les $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$-compensateurs sont dûs à Aksamit et. al [3]. Rappelons que $\widetilde{Z} = Z$ sur $]\!]\tau,+\infty[\![$ (voir Dellacherie et. al [28], Chapitre XX).

Lemme 3.2.9. *([3], Lemme 3.2.) Soient τ un temps honnête et V un processus càdlàg $\mathbb{F}$-adapté à variation finie. Alors, les assertions suivantes sont satisfaites :*

(a) Le processus

$$ U := (1-Z)^{-1}\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![} \centerdot V, $$

est un processus bien défini, $\mathbb{G}$-adapté càdlàg à variation finie.

(b) Si $V \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{F})$ (resp. $V \in \mathcal{A}(\mathbb{F})$), alors $U \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{G})$ (resp. $U \in \mathcal{A}(\mathbb{G})$) et

$$ U^{p,\mathbb{G}} = \mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![}(1-Z_-)^{-1} \centerdot \left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{Z}<1\}} \centerdot V\right)^{p,\mathbb{F}}. $$

(c) Supposons de plus que τ est fini p.s. Alors, $\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![}\centerdot V \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{G})$ si et seulement si $(1-\widetilde{Z})\centerdot V \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{F})$.

(d) Supposons de plus que τ est fini p.s, et V un processus $\mathbb{F}$-prévisible. Alors, pour tout processus non négatif et $\mathbb{F}$-prévisible φ, $\varphi\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![} \centerdot V \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbb{G})$ si et seulement si $(1-Z_-)\varphi \centerdot V \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbb{F})$.

Un résultat similaire de la proposition 2.3.8 après un temps honnête est donné dans la proposition suivante ; voir par exemple Aksamit ([1], Proposition 1.44, p. 33).

Proposition 3.2.2. *Soit τ un temps honnête. Alors, pour une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable X et pour $s \leq t$, on a*

$$ \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}} = \mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}} \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_t)}. $$

Preuve. Notons que pour tout $G \in \mathcal{G}_t$, il existe $F \in \mathcal{F}_t$ tel que $G \cap \{\tau \le s\} = F \cap \{\tau \le s\}$ p.s, par le théorème de classe monotone 1.1.1, il suffit de le vérifier pour $G \in \mathcal{F}_t$ qui est évidemment vérifié et pour $G = \{\tau \in B\}$ où B est un ensemble Borélien, pour le quel, par la propriété de temps honnête, on a

$$\{\tau \in B\} \cap \{\tau \le s\} = \{\tau_s \in B\} \cap \{\tau \le s\}$$

avec $\{\tau_s \in B\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
Alors, on va montrer que

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}\mathbb{P}(\tau \le s|\mathcal{F}_t)|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_t).$$

Pour tout $G \in \mathcal{G}_t$, on choisit $F \in \mathcal{F}_t$ tel que $G \cap \{\tau \le s\} = F \cap \{\tau \le s\}$, et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}\cap G}\mathbb{P}(\tau \le s|\mathcal{F}_t)) &= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}\cap F}\mathbb{P}(\tau \le s|\mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}\cap F}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}\cap G}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le s\}}|\mathcal{F}_t)) \end{aligned}$$

qui finit la preuve. □

3.2.2 Caractérisation des martingales

Dans cette sous-section, nous donnons une caractérisation des $\mathbb{G}$-martingales ; voir par exemple Aksamit et. al ([3], Lemme 2.6).

Lemme 3.2.10. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(a) Soient X une $\mathbb{F}$-martingale locale, et τ un temps honnête. Alors le processus $\widehat{X}$ défini par

$$\widehat{X} := X - X^\tau + (1 - Z_-)^{-1}\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![} \centerdot \langle X, \mu\rangle^{\mathbb{F}},$$

est une $\mathbb{G}$-martingale locale.
(b) Si τ est un temps honnête vérifiant $Z_\tau\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}} < 1$, $\mathbb{P}$.p.s, alors le processus $\mathbb{G}$-prévisible $(1 - Z_-)^{-1}\mathbf{1}_{]\!]\tau,+\infty[\![}$ est $\mathbb{G}$-localement borné.

3.2.3 Décompositions des martingales

Si τ est fin d'un ensemble $\mathbb{F}$-optionnel, il résulte de Yor [76] que toute $\mathbb{F}$-semimartingale est une $\mathbb{G}$-semimartingale (voir aussi Barlow [12], Dellacherie et Meyer [30], Jeulin et Yor [50]). En outre, la connaissance des processus $\mathbb{G}$-prévisibles (lemme 3.2.6) permet d'expliciter la décomposition $\mathbb{G}$-canonique d'une $\mathbb{F}$-semimartingale en somme d'une $\mathbb{G}$-martingale locale et d'un processus $\mathbb{G}$-prévisible à variation finie (Barlow [12], Jeulin [48]).

Proposition 3.2.3. *Si τ est honnête, toute $\mathbb{F}$-martingale est une $\mathbb{G}^{\sigma(\tau)}$ (et $\mathbb{G}$)-semimartingale.*

La $\mathbb{G}$-décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale locale dans le cas d'un temps honnête est donnée dans le théorème suivant ; voir Jeulin et Yor ([49], Théorème 2), Kchia ([56], Théorème 9).

Théorème 3.2.4. *Soit τ une variable honnête, alors toute $\mathbb{F}$-martingale locale X est une $\mathbb{G}$-semimartingale avec la décomposition*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle X, M\rangle_s - \int_{t\wedge\tau}^t \frac{1}{1 - Z_{s^-}} d\langle X, M\rangle_s,$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Sous les conditions (CA), on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.4. *([49].) Soit τ un temps honnête. Supposons que les conditions (CA) sont satisfaites. Alors, toute $\mathbb{F}$–martingale locale X est une $\mathbb{G}$-semimartingale avec la décomposition*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s}{Z_s} - \int_\tau^t \frac{d\langle X, M\rangle_s}{1 - Z_s},$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Nikeghbali et Yor dans [71] ont utilisé la décomposition multiplicative de Z sous les conditions (CA) (le théorème 3.2.2), et ils ont donné le résultat suivant.

Corollaire 3.2.2. *([71].) Le couple de filtrations $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ satisfait l'hypothèse $(\acute{H})$. De plus, toute $\mathbb{F}$–martingale locale X se décompose comme suit*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \frac{d\langle X, \Sigma\rangle_s}{\Sigma_s} - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau \le s\}} \frac{d\langle X, \Sigma\rangle_s}{\Sigma_\infty^* - \Sigma_s},$$

où $\widetilde{X}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

3.2.4 La σ-algèbre $\mathcal{F}_{\tau^+}$

Il est bien connu que la continuité à droite des filtrations s'étend aux temps d'arrêt : on a $\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_T$ pour tout temps d'arrêt T. Nous allons nous intéresser à une classe de temps aléatoires ne partageant pas cette propriété, les temps honnêtes.
Soit τ un temps honnête, il résulte de (3.6) que $\mathcal{F}_{\tau^+}$ est égale à $\mathcal{G}_\tau$ la tribu des événements $\mathbb{G}$-antérieurs à τ ; la proposition suivante dûe à Azéma et Yor [10], donne une large classe de variables honnêtes pour lesquelles $\mathcal{F}_\tau$ est distincte de $\mathcal{F}_{\tau^+}$. La représentation (3.6) ne peut donc, en général, pas être améliorée.

Proposition 3.2.5. *Soit X une $\mathbb{F}$-martingale continue, uniformément intégrable (X_∞ est sa variable terminale), nulle en 0, mais non identiquement nulle. Soit $\tau = \sup\{t : X_t = 0\}$. Alors*

1. *$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau^-}$;*
2. *$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\tau) = 0$, $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_{\tau^+})$ n'est pas identiquement nulle, en conséquence, $\mathcal{F}_\tau$ est strictement contenue dans $\mathcal{F}_{\tau^+}$.*

Proposition 3.2.6.

(a) Soit τ un temps honnête pour une filtration $\mathbb{F}$.
Si λ est une variable aléatoire telle que $\tau \le \lambda \le \infty$, on a $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\lambda$.
La suite des tribus $\mathcal{F}_{\tau+1/n}$ est décroissante et sa limite est $\mathcal{F}_{\tau^+}$.
Si τ et τ' sont deux temps honnêtes tels que $\tau \le \tau'$, on a $\mathcal{F}_{\tau^+} \subset \mathcal{F}_{\tau'^+}$.

(b) Supposons que toutes les martingales de $\mathbb{F}$ sont continues (ceci revient à dire que tous les optionnels sont prévisibles). Dans $\mathbb{F}$, soient τ un temps honnête et M une martingale uniformément intégrable. Pour que $\mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_\tau) = 0$ p.s, il faut et il suffit que $M_\tau = 0$ p.s.

Peuve. Voir par exemple Barlow et. al [13] p. 286-287.

Remarque 3.2.3. Le (a) dit que pour τ honnête, $\mathcal{F}_{\tau^+}$ est la limite des $\mathcal{F}_{\tau+1/n}$. Ceci permet de calculer explicitement, à l'aide de projections optionnelles, les espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{F}_{\tau^+}$; voir Jeulin ([48], Proposition (5.9), p. 79).

Proposition 3.2.7. *Soit τ une variable $\mathbb{F}$-honnête.*

(a) Si h est une variable aléatoire intégrable, on a sur $\{\tau < +\infty\}$;

$$\mathbb{E}(h|\mathcal{F}_{\tau^+}) = \lim_{u \downarrow\downarrow 0} \frac{{}^o(h\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![})_{\tau+u}}{1 - Z_{\tau+u}}.$$

En conséquence, sur $\{Z_\tau < 1\}$, on a ;

$$\mathbb{E}(h|\mathcal{F}_{\tau^+}) = \frac{{}^o(h\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![})_{\tau}}{1 - Z_{\tau}} = \frac{{}^o(h\mathbf{1}_{[\![\tau]\!]})_{\tau}}{1 - Z_{\tau}}$$

et donc $\mathcal{F}_{\tau^+}|_{\{Z_\tau<1\}} = \mathcal{F}_\tau|_{\{Z_\tau<1\}}$.

(b) Si H est un processus mesurable borné, $t > 0$, on a sur $\{\tau < +\infty\}$;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_{\tau+t}|\mathcal{F}_{\tau^+}) &= \lim_{u \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{1 - Z_{\tau+u}} {}^o(H_{\tau+t}\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![})_{\tau+u} \\ &= \lim_{u \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{1 - Z_{\tau+u}} {}^o(H_{t-u+.}\mathbf{1}_{[\![\tau,\infty[\![})_{\tau+u}.\end{aligned}$$

3.2.4.1 Temps honnêtes et filtrations fortement Browniennes

Barlow et. al ont prouvé dans [13] une conjecture de Barlow :

Dans ce paragraphe, on va décrire un résultat très récent et très difficile sur les filtrations fortement Browniennes.

Théorème 3.2.5. *(Conjecture de Barlow.) Si τ est la fin d'un ensemble prévisible Γ, i.e., $\tau(\omega) = \sup\{t : (t,\omega) \in \Gamma\}$ dans la filtration naturelle $\mathbb{F}$ d'un mouvement Brownien B, alors la σ-algèbre $\mathcal{F}_{\tau^+}$ peut obtenir par $\mathcal{F}_\tau$ et l'adjonction d'un événement $A \in \mathcal{F}_{\tau^+}$ (qui peut être un événement impossible) tel que*

$$\mathcal{F}_{\tau^+} = \mathcal{F}_\tau \vee \sigma(A). \tag{3.7}$$

Remarque 3.2.4. • La propriété (3.7) est préservée par les changements (convenables) de temps ou de probabilités.

• Pour le moment, il n'existe pas de contre exemple de (3.7).
La propriété (3.7) est étudiée dans Barlow et. al [14], pour $\Gamma = \{(s,\omega) : B_s(\omega) = 0\} \cap [0,t]$, et $\tau = \sup\{s < 1 : B_s = 0\}$.
En général, on ne peut pas prolonger la propriété (3.7) à la fin de tout ensemble prévisible τ telle que $B_\tau = 0$ p.s (voir par exemple Azéma et Yor [11]). Il existe plusieurs fins des ensembles prévisibles qui ne sont pas zéros de mouvement Brownien, mais la proposition suivante montre que, il y a des fins τ qui sont zéros de mouvement Brownien et satisfaisant (3.7).

Proposition 3.2.8. *Soient $g = \sup\{s < 1 : B_s = 0\}$ et τ la fin d'un ensemble prévisible telles que $\tau \leq g$. Alors $B_\tau = 0$ et (3.7) est satisfaite.*

Preuve. Voir par exemple Yor [77] p. 108.

La propriété étudiée dans la proposition 3.2.8 reste vraie si on remplace le temps 1 par n'importe quel temps d'arrêt T tel que $(B_{t\wedge T})$ est uniformément intégrable (alors, on peut dire que T est régulier).

Chapitre 4

Immersion des filtrations Browniennes avec un temps honnête évitant les temps d'arrêt

Ce chapitre est consacré à notre résultat principal qui est écrit en anglais et publié dans le journal "*Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (BSPM)*".

Nous avons utilisé les notions d'immersion, grossissement progressif avec un temps honnête qui évite tous les temps d'arrêt, filtrations faiblement et fortement Browniennes pour donner une réponse partielle à la question suivante : Si $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{H}$, où $\mathbb{F}$ et $\mathbb{H}$ sont des filtrations Browniennes. Est-ce-que $\mathbb{G}$ l'est aussi ?

Notre résultat principal est donné dans la Proposition 4.1 et montre que, si $\mathbb{G}$ est le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ avec un temps honnête qui évite tous les $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors $\mathbb{G}$ est faiblement Brownienne.

Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) **v. 35** 3 (2017): 255–261.
©SPM –ISSN-2175-1188 ON LINE ISSN-00378712 IN PRESS
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.v35i3.28330

Immersion of strong Brownian filtrations with honest time avoiding stopping times

Aicha Bouaka and Abdeldjebbar Kandouci

ABSTRACT: In this paper, we give a partial answer to the following question: if $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{H}$ (where the symbol ($\hookrightarrow$) indicates the immersion property), and if $\mathbb{F}$ and $\mathbb{H}$ are two strong Brownian filtrations, is $\mathbb{G}$ also a strong Brownian filtration ? For a long time, there has been no attempts to respond to this question, and to our knowledge, there is no response, neither partial nor complete. We are, therefore, the first to give a response to this question, and we prove that $\mathbb{G}$ is a weak Brownian in the case of a progressive enlargement of $\mathbb{F}$ with an honest time τ that avoids all stopping times.

Key Words: Weak and strong Brownian filtrations, immersion, predictable representation property, progressive enlargement of filtrations, honest times.

Contents

1. Introduction

The theory of enlargements of filtrations has been developed since the end of the seventies, starting with the works of Barlow [2], Brémaud and Yor [4], Dellacherie and Meyer [5] , and Jeulin and Yor [7]. In fact, three lecture-notes volumes have been devoted to this subject; Jeulin [6], Mansuy and Yor [8], Aksamit and Jeanblanc [1].

The case of progressive enlargements is investigated in Barlow [2], Dellacherie and Meyer [5], Jeulin and Yor [7,6], then later in Aksamit and Jeanblanc [1].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60G07, 60G44
Submitted June 28, 2015. Published March 07, 2016

An *honest time* is by definition the end of an optional set; it is a random time but not a stopping time, this makes its analysis more delicate. It plays an important role in the theory of enlargements of filtrations, see Barlow [2], Dellacherie and Meyer [5], Jeulin and Yor [7,6], and Aksamit and Jeanblanc [1], and in the characterizations of strong Brownian filtrations, see Barlow et al. [3], Mansuy and Yor [8].

The **(H)** hypothesis (or immersion property: that is when any martingale of initial filtration remains a martingale in enlarged filtration) is studied by Brémaud, Yor and Mansuy [4,8], Aksamit and Jeanblanc [1].

The strong and weak Brownian filtrations are studied in details in Mansuy and Yor [8].

The main goal of this paper is to give a partial answer to the following question: if $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{H}$, where $\mathbb{F}$ and $\mathbb{H}$ are two strong Brownian filtrations, is $\mathbb{G}$ also a strong Brownian filtration ?
We study the case when $\mathbb{G}$ is the progressive enlargement of the initial filtration $\mathbb{F}$ with an honest time τ that avoids all stopping times.

The paper is organized as follows: Section 2 introduces definitions and preliminaries which will be relevant for this paper, and Section 3 is devoted to the study of the progressive enlargement of the filtration $\mathbb{F}$ with an honest time τ under the hypotheses **(CA)**:

- **(C)** all $\mathbb{F}$-martingales are **c**ontinuous (e.g: the Brownian filtration);
- **(A)** τ **a**voids every $\mathbb{F}$-stopping times T, i.e. $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$.

Then we end this case with our main result under the hypotheses **(H)** and **(CA)** in Section 4.

2. Preliminaries

We consider a complete filtered probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ that satisfies the *usual hypotheses*: i.e., $\mathbb{F}$ is right continuous $(\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s)$, and $\mathcal{F}_0$ contains all the $\mathbb{P}$ null sets of $\mathbb{F}$, therefore $\mathcal{F}_t$ contains all the $\mathbb{P}$ null sets of $\mathbb{F}$ as well, for any $t \geq 0$. The σ-field $\bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t)$ denoted by $\mathcal{F}_\infty$.

2.1. Predictable Representation Property

Definition 2.1. *A continuous local martingale X enjoys the* ***predictable representation property (PRP)*** *if for any $\mathbb{F}^X$-local martingale $(M_t, t \geq 0)$, there is a constant c and an $\mathbb{F}^X$-predictable process $(m_s, s \geq 0)$ which satisfies $\int_0^t m_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty$, such that*

$$M_t = c + \int_0^t m_s dX_s, \ \ t \geq 0.$$

More generally, a continuous $\mathbb{F}$-local martingale X enjoys the $\mathbb{F}$-predictable representation property if any $\mathbb{F}$-adapted martingale M can be written as $M_t = c + \int_0^t m_s dX_s$, with $\int_0^t m_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty$. We do not require in that last definition that $\mathbb{F}$ is the natural filtration of X.

Brownian Motion Case

Let B be a real-valued Brownian motion and $\mathbb{F}^B$ its natural filtration.

Definition 2.2. *Let $(M_t, t \geq 0)$ be a square integrable $\mathbb{F}^B$-martingale (i.e., $\sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$). There exists a constant c and a unique predictable process $(m_s, s \geq 0)$ which satisfies $\mathbb{E}\left(\int_0^t m_s^2 ds\right) < \infty$, such that*

$$\forall t, \quad M_t = c + \int_0^t m_s dB_s.$$

If M is an $\mathbb{F}^B$-local martingale, there exists a unique predictable process $(m_s, s \geq 0)$ which satisfies $\int_0^t m_s^2 ds < \infty$, such that

$$\forall t, \ \ M_t = c + \int_0^t m_s dB_s.$$

2.2. Strong and Weak Brownian Filtrations

Definition 2.3.
- *A filtration $\mathbb{F}$ on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ such that $\mathcal{F}_0$ is $\mathbb{P}$ a.s trivial, is said to be **weak Brownian** if there exists an $\mathbb{F}$-Brownian motion B such that B has the predictable representation property with respect to $\mathbb{F}$.*
- *A filtration $\mathbb{F}$ on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ such that $\mathcal{F}_0$ is $\mathbb{P}$ a.s trivial, is said to be **strong Brownian** if there exists an $\mathbb{F}$-Brownian motion B such that $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$.*

Note that a strong Brownian filtration is weak Brownian since the Brownian motion enjoys the PRP.

2.3. Immersion of Filtrations

Definition 2.4. *Let $\mathbb{F}$ and $\mathbb{G}$ be two filtrations on the same probability space. We say that $\mathbb{F}$ is **immersed** in $\mathbb{G}$, and we write $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, if $\mathbb{F}$ is included in $\mathbb{G}$, i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, for all t, and every $\mathbb{F}$-martingale is a $\mathbb{G}$-martingale. This is also referred to as the **(H)** hypothesis which is defined as :*

***(H)** Every $\mathbb{F}$-square integrable martingale is a $\mathbb{G}$-square integrable martingale.*

We first remark that **(H)** holds if, and only if, every bounded $\mathbb{F}$-martingale (respectively. every $\mathbb{F}$-local martingale) is a $\mathbb{G}$-martingale, (resp. a $\mathbb{G}$-local martingale).

Hypothesis **(H)** implies that $\mathbb{F}$ has a nice structure -among other properties- relatively to $\mathbb{G}$, as is shown in the following theorem:

Theorem 2.5. *([4]) Hypothesis **(H)** is equivalent to the following properties:*

(H1) *$\forall t \geq 0$, the σ-fields $\mathcal{F}_\infty$ and $\mathcal{G}_t$ are conditionnally independent given $\mathcal{F}_t$,*

(H2) $\forall t \geq 0, \forall G_t \in L^1(\mathcal{G}_t), \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)$,

(H3) $\forall t \geq 0, \forall F \in L^1(\mathcal{F}_\infty), \mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)$.

In particular, under **(H)**, if B is an $\mathbb{F}$-Brownian motion, then it is a $\mathbb{G}$-martingale with bracket t. Since such a bracket does not depend on the filtration, B is, hence, a $\mathbb{G}$-Brownian motion.

3. Progressive enlargement with an honest time that avoids all stopping times

We now recall some basic results on the progressive enlargement of filtrations. Let $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space satisfying the usual hypotheses (right continuous and complete), $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ be a Brownian filtration generated by the Brownian motion B.

Definition 3.1. *A positive random variable τ defined on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ is called an **honest time** if, for all $t \in \mathbb{R}_+$, there exists an $\mathcal{F}_t$-measurable random variable τ_t such that $\tau = \tau_t$ holds on $\{\tau \leq t\}$.*

These times are also referred to as the end of an $\mathbb{F}$-predictable set.

Definition 3.2. *Let τ be the end of an $\mathbb{F}$-predictable set Γ, that is*

$$\tau = \sup\{t : (t, w) \in \Gamma\}.$$

*We, then, call τ an **honest time**.*

Now we enlarge $\mathbb{F}$ with the process $(\tau \wedge t)_{t\geq 0}$, so that the new enlarged filtration $\mathbb{G}$ is the smallest filtration (satisfying the usual assumptions) containing $\mathbb{F}$ and making τ a stopping time, that is

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau \wedge s)).$$

In the literature, $\mathbb{G}$ is called the **progressive enlargement** of $\mathbb{F}$ with τ.

A few processes play a crucial role in our discussion:

- the $\mathbb{F}$ supermartingale
$$Z_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t),$$
chosen to be càdlàg, coincides with the $\mathbb{F}$ optional projection of $1_{\{t<\tau\}}$, called the **Azéma supermartingale** associated with τ.

- the $\mathbb{F}$ dual optional and predictable projections of the increasing process $N_t = 1_{\{\tau\leq t\}}$ denoted by a and A respectively.

- the càdlàg martingale

$$\mu_t = \mathbb{E}(a_\infty|\mathcal{F}_t) = a_t + Z_t.$$

- the Doob-Meyer (additive) decomposition of Z:

$$Z_t = \mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t = M_t - A_t,$$

  where M is an $\mathbb{F}$-martingale.

We shall assume two important hypotheses;

- **(C)** all $\mathbb{F}$-martingales are continuous (e.g: the Brownian filtration),
- **(A)** τ avoids every $\mathbb{F}$-stopping times T, i.e. $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$.

We note that the continuity assumption **(C)** implies that the optional and Doob-Meyer decompositions of Z are the same.

When one assumes that the honest time τ avoids $\mathbb{F}$-stopping times, then one has:

Lemma 3.3. *A random time τ is an honest time and avoids $\mathbb{F}$-stopping times if and only if $Z_\tau = 1$ a.s. on $\{\tau < \infty\}$.*

The following corollary indicates some consequences of the assumption **(A)**.

Corollary 3.4. *If τ avoids stopping times, then Z is continuous.*

In the next lemma, we present equivalent characterizations of hypothesis **(H)** in the progressive enlargement case,

Lemma 3.5. *([5]) In the progressive enlargement setting, **(H)** holds between $\mathbb{F}$ and $\mathbb{G}$ if and only if one of the following equivalent conditions holds:*

(i) $\forall (t, s), s \le t$, $\mathbb{P}(\tau \le s|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \le s|\mathcal{F}_t)$.

(ii) $\forall t$, $\mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_t)$.

Note that, if **(H)** holds, then (ii) implies that the process $F_t = 1 - Z_t = \mathbb{P}(\tau \le t|\mathcal{F}_t)$ is increasing.

Remark 3.6. *If the initial filtration $\mathbb{F}$ is immersed into the enlarged filtration $\mathbb{G}$, then Z has no martingale part, i.e., Z is a decreasing predictable process, and it is equal to A. Therefore, the $\mathbb{F}$-Brownian motion B remains a $\mathbb{G}$-Brownian motion, and the bracket $\langle B, Z\rangle$ is equal to zero.*

A key point of our main result is the following proposition which provides the canonical decomposition of any $\mathbb{F}$ local martingale as a semimartingale in $\mathbb{G}$.

Proposition 3.7. *([7]) Let τ be an honest time. We assume **(CA)**. Then, any $\mathbb{F}$-local martingale X is a $\mathbb{G}$ semi-martingale with decomposition*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s}{Z_s} - \int_\tau^t \frac{d\langle X, M\rangle_s}{1 - Z_s}$$

where $\widetilde{X}$ is a $\mathbb{G}$-local martingale.

Proof: see Aksamit and Jeanblanc [1] p.108-109. □

4. Main result

We give our main result by using proposition 3.7 and remark 3.6.

Proposition 4.1. *If $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{H}$, where $\mathbb{F}$ and $\mathbb{H}$ are strong Brownian filtrations, and if $\mathbb{G}$ is the progressive enlargement of $\mathbb{F}$ with an honest time τ that avoids all stopping times, then $\mathbb{G}$ is a weak Brownian filtration.*

Proof: On the one hand, $\mathbb{F}$ is a strong Brownian filtration, then any $\mathbb{F}$-local martingale can be written as

$$X_t = c + \int_0^t \phi_s dB_s$$

for some $c \in \mathbb{R}$ and a predictable process ϕ which satisfies $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$.

Using proposition 3.7, we get that any $\mathbb{G}$-local martingale $\widetilde{X}_t$ can be written as

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t &= X_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, M\rangle_s}{Z_s} + \int_\tau^t \frac{d\langle X, M\rangle_s}{1 - Z_s} \\ &= c + \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\phi_s}{Z_s} d\langle B, M\rangle_s + \int_\tau^t \frac{\phi_s}{1 - Z_s} d\langle B, M\rangle_s, \end{aligned}$$

where $c \in \mathbb{R}$ and ϕ a predictable process which satisfies $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$.

Since $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, and by remark 3.6, we have $\langle B, Z\rangle = \langle B, M\rangle = 0$; that is, the two integral terms on the right-hand side of the last equality vanish.

Consequently, any $\mathbb{G}$-local martingale $\widetilde{X}_t$ can be written as

$$\widetilde{X}_t = c + \int_0^t \phi_s dB_s, \tag{4.1}$$

where $c \in \mathbb{R}$ and ϕ a predictable process which satisfies $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$.

On the other hand, we have $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{H}$, i.e., the Brownian motion B remains a local martingale with respect to $\mathbb{H}$ generated by the Brownian motion B' which has the PRP with respect to $\mathbb{H}$, then $dB_t = U_t dB_t^{'}$, i.e., $dB_t^{'} = U_t^{-1} dB_t$, with U an $\mathbb{F}$-predictable process taking values in $\{-1, +1\}$.

Since $\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{H}$, then any $\mathbb{G}$-local martingale $\widetilde{X}_t$ can be written as

$$\widetilde{X}_t = a + \int_0^t K_s dB_s^{'} = a + \int_0^t K_s U_s^{-1} dB_s = a + \int_0^t K_s^{'} dB_s, \tag{4.2}$$

where $a \in \mathbb{R}$, K and $K^{'} \equiv KU^{-1}$ are $\mathbb{G}$-predictable processes which satisfie $\int_0^t K_s^2 ds < \infty$ and $\int_0^t K_s^{'2} ds < \infty$.

Consequently, by (4.1) and (4.2), we have $a = c \in \mathbb{R}$ and $\phi \equiv K^{'}$.

Moreover, the $\mathbb{F}$-Brownian motion B remains a $\mathbb{G}$-Brownian motion which has the PRP with respect to $\mathbb{G}$. Then $\mathbb{G}$ is a weak Brownian filtration. □

Perspective: Using Brownian transformations, we will establish additional conditions to meet the issue of the immersion property and prove that $\mathbb{G}$ is a strong Brownian filtration.

References

1. A. Aksamit, M. Jeanblanc. *Enlargements of filtrations with finance in view.* 2014.

2. M.T. Barlow. *Study of a filtration expanded to include an honest time*, Z. Wahr. Verw. Gebiete, **44** :307-324. 1978.

3. M.T. Barlow, M. Émery. F.B. knight, S. Song, M. Yor. *Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes.* Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Mathematics, **1686**, Springer, 264-305. 1998.

4. P. Brémaud, M. Yor. *Changes of filtrations and of probability measures*, Z. F. W, **45**, 269-295. 1978.

5. C. Dellacherie, P.A. Meyer. *A propos du travail de Yor sur les grossissements des tribus*, Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Mathematics, **649**, 69-78. 1978.

6. T. Jeulin. *Semi-martingale et grossissement d'une filtration*, Lecture Notes in Mathematics, **833**, Springer. 1980.

7. T. Jeulin and M. Yor. *Grossissement d'une filtration et semi-martingales: formules explicites.* Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Mathematics, **649**, Springer, 78-97. 1978.

8. R. Mansuy, M. Yor. *Random times and enlargement of filtration in a Brownian setting*, Lecture Notes in Mathematics, **1873**, Springer, 2006.

Aicha Bouaka and Abdeldjebbar Kandouci
Laboratory of Stochastic Models, Statistic and Applications
University Dr. Moulay Tahar. Saida, Algeria
E-mail address: aicha.bouaka@gmail.com
E-mail address: abdeldjebbar.kandouci@univ-saida.dz

Conclusion

Le but de cette thèse est d'étudier le grossissement progressif à l'aide d'une variable honnête sous les conditions (CA). Nous avons présenté quelques résultats généraux sur le grossissement initial et progressif avec des exemples pour chaque type de grossissement. Nous sommes intéressés au grossissement progressif avec un temps honnête. Nous avons traité la propriété de représentation prévisible et les filtrations faiblement et fortement Browniennes. Nous avons étudié aussi la propriété d'immersion spécialement dans le cadre de grossissement progressif.

Enfin, nous avons donné un résultat principal sur le grossissement progressif avec un temps honnête, nous avons utilisé la propriété de représentation prévisible et l'immersion sous les conditions (CA).

Prochainement, nous essaierons d'utiliser les transformations Browniennes et la propriété d'immersion pour rendre la filtration $\mathbb{G}$ de notre résultat principal une filtration fortement Brownienne.

Bibliographie

[1] A. Aksamit. *Random times, enlargement of filtration and arbitrages.* PhD. Thesis, Université d'Évry val d'Essonne, 2014.

[2] A. Aksamit, T. Choulli, J. Deng, and M. Jeanblanc. Arbitrages in progressive enlargement setting. *Arbitrage, Credit and Informational Risks. Peking University Series in Mathematics, World Scientific*, 6, p. 55-88, 2014.

[3] A. Aksamit, T. Choulli, J. Deng, and M. Jeanblanc. Non-Arbitrage under a class of honest times. *<hal-01253283>*, 2016.

[4] A. Aksamit, T. Choulli, and M. Jeanblanc. On an optional semimartingale decomposition and the existence of the deflator in an enlarged filtration. *Séminaire de probabilités* XLVII, *Lecture Notes in Mathematics* 2137, Springer, p. 187-218, 2015.

[5] A. Aksamit, M. Jeanblanc. *Enlargements of filtrations with finance in view*, 2014.

[6] A. Aksamit, M. Jeanblanc, and M. Rutkowski. Predictable representation property for progressive enlargements of a Poisson filtration. *<hal-01249662>*, 2015.

[7] J. Amendinger. *Initial enlargement of filtrations and additional information in financial markets.* PhD. Thesis, Technischen Universiteit, Berlin, 1999.

[8] J. Amendinger. Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations. *Stochastic Processes and their Applications*, volume 89, Issue 1, p. 101-116, September 2000.

[9] J. Azéma. Quelques applications de la théorie générale des processus. I. *Inventions math.* 18, Springer-verlag, p. 293-336, 1972.

[10] J. Azéma, M. Yor. Temps locaux. *Astérisque* 52-53, p. 3-35, 1977.

[11] J. Azéma, M. Yor. Sur les zéros des martingales continues. *Séminaire de probabilités* XXVI, *Lecture Notes in Mathematics* 1526, Springer, p. 248-306, 1992.

[12] M. T. Barlow. Study of filtration expanded to include an honest time. *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, 44, p. 307-323, 1978.

[13] M. T. Barlow, M. Émery, F. B. Knight, S. Song, M. Yor. Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes. *Séminaire de probabilités* XXXII, *Lecture Notes in Mathematics* 1686, p. 264-305, 1998.

[14] M. T. Barlow, J. W. Pitman, M. Yor. On Walsh's Brownian motions. *Séminaire de probabilités* XXIII, *Lecture Notes in Mathematics* 1372, Springer, p. 275-293, 1989.

[15] S. Beghdadi-Sakrani. Une martingale non pure, dont la filtration brownienne. *Séminaire de probabilités* XXXVI, Springer, p. 348-359, 2002.

[16] S. Beghdadi-Sakrani, M. Émery. On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer. *Séminaire de probabilités* XXXIII, p. 240-256, 1999.

[17] C. Blanchet-Scalliet, M. Jeanblanc. Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims. *Finance and Stochastics*, 8, p. 145-159, 2004.

[18] P. Brémaud, M. Yor. Changes of filtrations and of probability measures. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, 45(4), p. 269-295, 1978.

[19] G. Callegaro, M. Jeanblanc, and B. Zargari. Carthaginian enlargement of filtrations. *ESAIM : Probability and Statistics*, 17, p. 550-566, 2013.

[20] H. N. Chau, P. Tankov. Market models with optional arbitrage. *SIAM J. Financial Math.*, 6, p. 66-85, 2015.

[21] F. C Klebaner. *Intoduction to stochastic calculus with applications. Second edition.* Imperial College Press, 2005.

[22] J. M. C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *The Annals of mathematical statistics*, vol. 41, No. 4, p. 1282-1295, 1970.

[23] D. Coculescu, M. Jeanblanc, and A. Nikeghbali. Default times, non arbitrage conditions and change of probability measures. *Finance and Stochastics,* 16(3), p. 513-535, 2012.

[24] D. Coculescu, A. Nikeghbali. Filtrations. *Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley*, vol II, p. 683-686, 2010.

[25] D. Coculescu, A. Nikeghbali. Hazard processes and martingale hazard processes. *Mathematical Finance* 22, no.3, p. 519-537, 2012.

[26] S. N. Cohen. A martingale representation theorem for a class of jump processes, 2013.

[27] M. H. A. Davis. Martingale representation and all that. In : *Advances in Control, Cummunication Networks, and Transportation Systems*, Birkhäuser Boston, p. 57-68, 2005.

[28] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chapitres XVII-XXIV : Processus de Markov (fin), compléments de calcul stochastique*, Hermann, Paris, 1992.

[29] C. Dellacherie, P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chapitres I-IV*, Hermann, Paris, 1975.

[30] C. Dellacherie, P. A. Meyer. A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. *Séminaire de probabilités* XII, Springer, p. 70-77, 1978.

[31] C. Dellacherie, P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chapitres V-VIII : Théorie des martingales*, Hermann, Paris, 1980.

[32] N. El Karoui, M. Jeanblanc, and Y. Jiao. What happens after a default : the conditional density approach . *Stochastic Processes and their Applications*, 120(7), p. 1011-1032, 2010.

[33] R. J. Elliott, M. Jeanblanc, and M. Yor. On models of default risk. *Math. Finance*, 10, p. 179-196, 2000.

[34] M. Émery. Espace probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement Brownien, via des idées de Tsirelson. In *Séminaire Bourbaki*, 53 ième année, volume 282, Astérisque, p. 63-83, 2002.

[35] C. Fontana. The strong predictable representation property in initially enlarged filtrations. *arXiv preprint arXiv : 1508.03282v2*, 2015.

[36] D. Gasbarra, E. Valkeila, and L. Vostrikova. Enlargement of filtration and additional information in pricing models : Bayesian approach. In Y. Kabanov, R. Liptser, and J. Stoyanov, editors. *From stochastic calculus to mathematical finance*, Springer, p. 257-285, 2006.

[37] S. W. He, J. G. Wang, and J. A. Yan. *Semimartingale theory and stochastic calculus.* Kexue chubanshe (Science Press), Beijing, 1992.

[38] K. Itô. Extension of stochastic integrals. In Proceedings of *International Symposium on Stochastic Differential Equations*, New York, Wiley, p. 95-109, 1978.

[39] K. Itô, S. Watanabe. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 15 (fasc. 1), p. 13-30, 1965.

[40] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 1979.

[41] J. Jacod. Grossissement initial, hypothèse (H́) et théorème de Girsanov. In *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, Springer, p. 15-35, 1985.

[42] J. Jacod, A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes. Second edition*, volume 288 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2003.

[43] M. Jeanblanc. *Enlargements of filtrations*. Jena, June 2010.

[44] M. Jeanblanc, Y. Le Cam. Progressive enlargement of filtration with initial times. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(8), p. 2523-2543, 2009.

[45] M. Jeanblanc, S. Song. Random times and Azéma supermartingales. *Probability, Control and Finance, Columbia University*, June 6, 2012.

[46] M. Jeanblanc, S. Song. Martingale representation property in progressively enlarged filtrations. *Stochastic processes and their Applications*, 123, p. 4242-4271, 2015.

[47] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney. *Mathematical methodes for financial markets*. Springer, 2009.

[48] T. Jeulin. *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, volume 833 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 1980.

[49] T. Jeulin, M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites. *Séminaire de probabilités* XII, Springer, p. 78-97, 1978.

[50] T. Jeulin, M. Yor. Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. *Annales Scientifiques de l'É.N.S.* 4^{e} série, tome 11, no 3, p. 429-443, 1978.

[51] T. Jeulin, M. Yor. Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis. *Séminaire de probabilités* XIII, Springer, p. 332-359, 1979.

[52] T. Jeulin, M. Yor, editors. *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, volume 1118 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 1985.

[53] I. Karatzas, S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus. Second edition*. Springer-Verlag, 1991.

[54] C. Kardaras. On the characterisation of honest times that avoid all stopping times. *Stochastic Processes and their Applications* 124, p. 373-384, 2014.

[55] C. Kardaras. On the stochastic behaviour of optional processes up to random times. *The Annals of Applied Probability*, 25(2), p. 429-464, 2015.

[56] Y. Kchia. *Semimartingales and contemporary issues in quantitative finance*. PhD. Thesis, Ecole Polytechnique, 2011.

[57] Y. Kchia, M. Larsson, and P. Protter. Linking progressive and initial filtration expansions. In *Mallivin calculus and stochastic analysis : A festschrift in honor of David Nualart*, 2013.

[58] S. Kusuoka. A remark on default risk models. *Advances in Mathematical Economics*, 1, p. 69-82, 1999.

[59] L. Li. *Random times and enlargements of filtrations*. PhD. Thesis, University of Sydney, 2012.

[60] L. Li, M. Rutkowski. Random times, enlarged filtrations and semimartingale decompositions. *CREST and Sakigake Symposium*, Tokyo, 14-18 December 2010.

[61] L. Li, M. Rutkowski. Progressive enlargements of filtrations and semimartingale decompositions. *Working paper, University of Sydney*, 2011.

[62] T. Lindvall and L. C. G. Rogers. Coupling of multidimensional diffusions by reflexion. *Ann. Prob.* 14, p. 860-872, 1986.

[63] R. S. Liptser, A. N. Shiryayev. *Theory of martingales*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[64] R. S. Liptser, A. N. Shiryayev. *Statistics of random processes. I. General theory. Second edition.* Springer, 2001.

[65] V. Mackevičius. Formula for conditional wiener integrals. *International Symposium on Stochastic Differential Equations.* August 28-Sept. 2, vilnius. Abstracts of Communications, 1978.

[66] R. Mansuy, M. Yor. *Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting*, volume 1873 of *Lectures Notes in Mathematics.* Springer, 2006.

[67] P. A. Meyer. Sur un théorème de J. Jacod. *Séminaire de probabilités* XII, Springer, p. 57-60, 1978.

[68] P. A. Meyer. Les résultats de Jeulin sur le grossissement des tribus. *Séminaire de probabilités* XIV, Springer, p. 173-188, 1980.

[69] A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probability Surveys*, 3, p. 345-412, 2006.

[70] A. Nikeghbali, E. Platen. On honest times in financial modeling. *arXiv preprint arXiv : 0808.2892v1*, 2008.

[71] A. Nikeghbali, M. Yor. Doob's maximal identity, multiplicative decompositions and enlargements of filtrations. *Illinois J of Mathematics* 50(4), p. 791-814,2006.

[72] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations. Second edition, version 2.1.* Springer, 2004.

[73] D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion. Third edition*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer, 1999.

[74] S. Song. Optional splitting formula in a progressively enlarged filtration. *ESAIM : Probability and Statistics*, 18, p. 829-853, 2014.

[75] C. Stricker. Quasi-martingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle, *ZW*, 39, p. 55-63, 1977.

[76] M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux. *Séminaire de probabilités* XII, Springer, p. 61-69, 1978.

[77] M. Yor. *Some aspects of brownien motion. Part II : Some recent martingale problems.* In *Lectures in Mathematics, ETH Zürich*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[78] M. Yor. On weak and strong Brownian filtrations : definitions and examples. *Séminaires et Congrès, SMF*, 28, p. 109-115, 2013.