



## **THESE DE DOCTORAT**

Spécialité: Génie Civil

Option: STRUCTURES & MATERIAUX

Présentée par: *BELLIFA Hichem*

Intitulé de la thèse:

### **Application de la théorie du gradient de déformation à l'étude de la réponse des structures multi échelles**

#### **Composition de jury :**

A. TOUNSI	<i>Pr</i>	U.D.L – SBA	Président
K.H. BENRAHOU	<i>Pr</i>	U.D.L – SBA	Directeur de thèse
E. ADDA BEDIA	<i>Pr</i>	U.D.L – SBA	Examineur
B. FAHSI	<i>MC. A</i>	U.D.L – SBA	Examineur
R. YEGHNEM	<i>MC. A</i>	U.M.T – Saida	Examineur
M. ZIDOUR	<i>MC. A</i>	U.I.K – Tiaret	Examineur
M. BENGUEDIAB	<i>Pr</i>	U.D.L – SBA	Invité

## Remerciements

---

*Avant tout, Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné le courage ; la volonté et la patience pour faire ce travail.*

*J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur le Professeur BENRAHOU pour avoir dirigé ce travail, pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée, pour sa patience, sa confiance, son encouragement, et son œil critique qui m'a été très précieux pour structurer le travail et améliorer la qualité des différentes sections de cette thèse, je le remercie vivement.*

*Mes vifs remerciements s'adressent également au professeur TOUNSI, pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury. Je le remercie particulièrement pour son aide et ses encouragements, sa compétence et sa rigueur scientifique qui m'ont beaucoup appris.*

*Je remercie également le professeur E.Adda Bedia, directeur de laboratoire des Matériaux et Hydrologie, d'avoir accepté d'examiner ce travail, de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire et pour sa disponibilité le long de la réalisation de ce travail.*

*Je suis sensible à l'honneur que m'a fait l'ensemble des membres de jury : Dr. FAHSI Bouazza, Dr. YEGHNEM Redha, Dr. ZIDOUR pour m'avoir honoré de leurs présences en acceptant de juger ce travail.*

*Je remercie ma famille pour la patience dont elle a fait preuve et pour son soutien moral et son encouragement tout au long de la préparation de cette thèse.*

*Au terme de ce travail, il m'est agréable de remercier vivement tous ceux qui, grâce à leur aide précieuse, ont permis la réalisation de ce travail.*

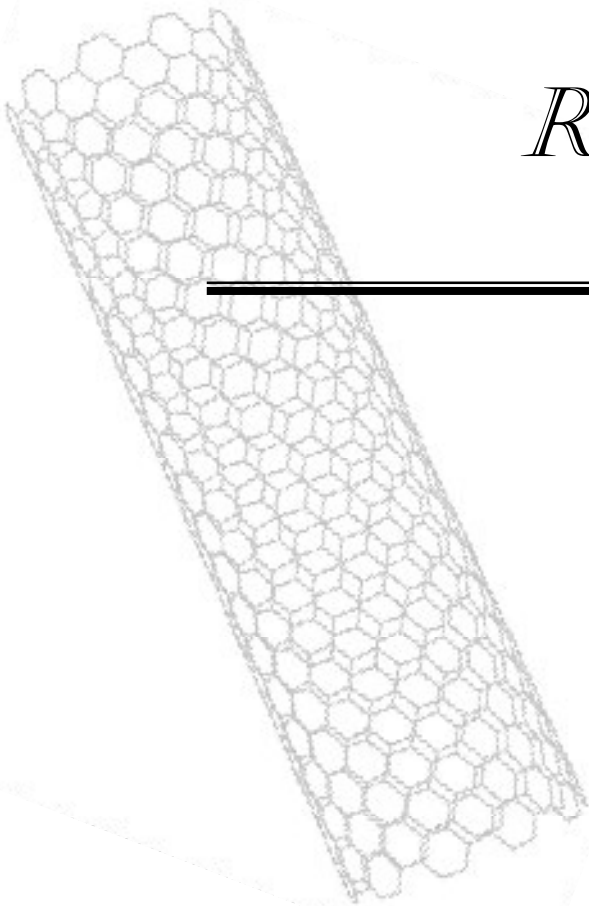
---

---

# *RÉSUMÉ*

---

---



## Résumé

---

*Le présent travail a pour but d'étudier la réponse mécanique des structures multi-échelles en utilisant la théorie de déformation de cisaillement. Deux grandes catégories sont mises en évidence à savoir l'échelle nano et l'échelle macro.*

*On présente une nouvelle théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) pour le cas de vibration et de comportement dynamique des plaques à gradients de propriétés. Le nombre des inconnus de cette théorie est moindre comparé aux théories du premier ordre traditionnelle et d'ordre élevée de déformation de cisaillement. Les équations de déformations axiales et transversales de plaques fonctionnellement graduées sont déterminées en se basant sur la présente théorie de plaque du premier ordre de déformation de cisaillement et du concept physique de surface neutre. Pour la présente théorie, l'effet de couplage membrane-flexion dans la formulation basé sur la surface neutre n'existe pas, et par conséquent les équations gouvernantes et les conditions aux limites des plaques à gradient de propriétés dans les surfaces neutres ont une forme simple comme ceux dans le cas des plaques isotopiques. Pour évaluer l'exactitude de la présente formulation, plusieurs comparaisons ont été faites. D'où on peut conclure que la théorie proposée est précise et simple dans la résolution de la flexion statique et les comportements de vibration libres de plaques fonctionnellement graduées.*

*Par ailleurs à l'échelle nano une théorie non local d'ordre zéro de la déformation du cisaillement pour les états de post-flambement des poutres à l'échelle nano est présentée. L'originalité de cette formulation consiste en plus de l'inclusion de l'effet de la réponse non locale suivant la théorie d'élasticité non-locale d'Eringen, la considération de l'effet de la déformation dans le déplacement axial dans l'utilisation des forces de cisaillement au lieu du déplacement rotatif comme l'implique les théories de déformation existantes. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels et les relations constitutives différentielles non-locales d'Eringen. La charge de flambement critique et l'amplitude de la réponse non-linéaire statique dans l'état de post-flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano simplement appuyées et encastées-encastées ont été déterminés.*

**Mot clés :** *Plaques fonctionnellement graduées; Théorie du premier ordre de déformation de cisaillement; position de surface neutre; Nano-poutres; Post-flambement; Elasticité non-locale.*

## Abstract

---

*This present work has the objective to study the mechanical answer of multi-scales structures by using shear deformation theory. Two grand categories are put in evidence, nano and macro scales, respectively. For the latter we present a new first-order shear deformation theory (NFSDT) for bending and dynamic behaviours of functionally graded plates. Moreover, the number of unknowns of this theory is the least one comparing with the traditional first-order and the other higher-order shear deformation theories. The equations governing the axial and transverse deformations of functionally graded plates are derived based on the present first-order shear deformation plate theory and the physical neutral surface concept. There is no stretching–bending coupling effect in the neutral surface-based formulation, and consequently, the governing equations and boundary conditions of functionally graded plates based on neutral surface have the simple forms as those of isotropic plates. To examine accuracy of the present formulation, several comparison studies are investigated. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the static bending and free vibration behaviors of functionally graded plates. on the other hand, on nano scale a nonlocal zeroth-order shear deformation theory is developed for the nonlinear post buckling behavior of nanoscale beams. The beauty of this formulation is that, in addition to including the nonlocal effect according to the nonlocal elasticity theory of Eringen, the shear deformation effect is considered in the axial displacement within the use of shear forces instead of rotational displacement like in existing shear deformation theories. The principle of virtual work together of the nonlocal differential constitutive relations of Eringen, are considered to obtain the equations of equilibrium. Closed-form solutions for the critical buckling load and the amplitude of the static nonlinear response in the post buckling state for simply supported and clamped clamped nanoscale beams are determined.*

**Keywords:** *Functionally graded plate; First shear deformation theory; Neutral surface position; Nanobeams; Post buckling; Nonlocal elasticity*

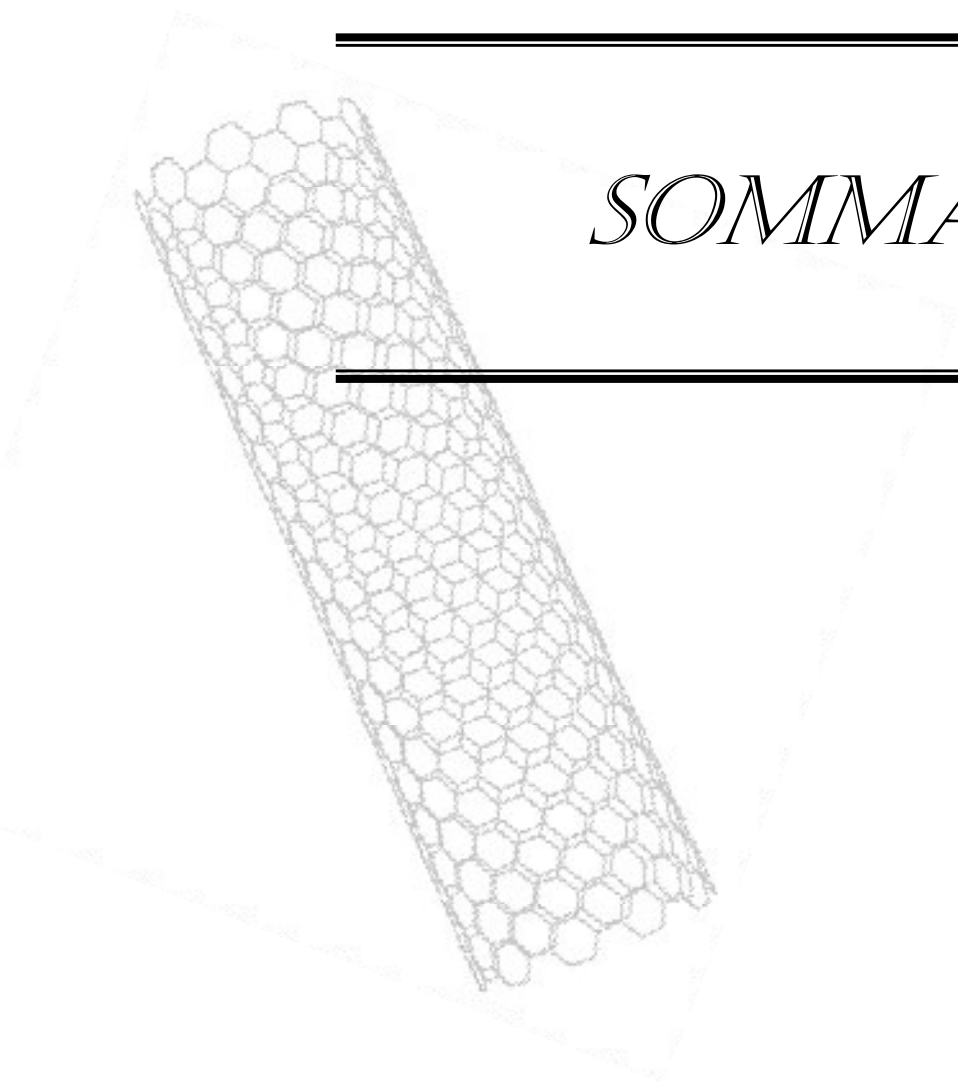
---

---

# *SOMMAIRE*

---

---



# Sommaire

---

<b>Remerciements</b> .....	<b>i</b>
Résumé .....	ii
Abstract .....	iii
Listes des figures .....	iv
Liste des tableaux .....	vii
Liste des abréviations et notations .....	ix
Introduction générale .....	1

## *Chapitre I : Généralité sur les matériaux à gradient de propriétés*

I-1 Introduction .....	4
I-2 Définition des FGM .....	4
I-3 Historique .....	6
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	7
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	8
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	9
I.4.3. Compaction sèche des Poudres .....	9
I.4.4. Projection plasma .....	9
I.4.5. Frittage et Infiltration .....	10
I.5. Domaines d'application .....	10
I.6. Exemples des produits de FGM .....	10
I.6.1. Système spatial .....	10
I.6.2 Système de distribution et de transmission .....	10
I.6.3 Fibre optique .....	10
I.6.4 Industriel .....	11
I.6.5 Titanium .....	11

# Sommaire

---

I.6.6 Crampons Baseball.....	11
I.6.7 Lames de rasoir.....	11
I.6.8 D'autres .....	11
I.7. Conclusion .....	12

## Chapitre II : Généralités sur les nanostructures

II-1 Introduction .....	13
II-2 Définition des FGM .....	14
II-3 Structure des nanotubes de carbone .....	15
II-3.1. L'hybridation $sp$ .....	15
II-3.2. L'hybridation $sp^2$ .....	16
II-3.3. L'hybridation $sp^3$ .....	16
II-4 Les différentes formes du carbone .....	17
II.4.1. Le graphite .....	17
II.4.2. Le diamant .....	17
II.4.3. Les fullerènes .....	18
II.6. Propriétés des nanotubes de carbone .....	18
II.6.1. Propriétés mécaniques .....	19
II.6.2. Propriétés électroniques.....	19
II.6.3. Propriétés émissives.....	19
II.6.4. Propriétés thermiques .....	20
II.6.5. Propriétés optiques .....	20
II.7. Méthodes de synthèse .....	20



# Sommaire

---

II.8. Applications des nanotubes de carbone .....	22
II.9. Inconvénients des Nanotubes: .....	23
II.10. Conclusion .....	23

## Chapitre III : Théories des structures FGM

III.1. Introduction .....	24
III.2. Historique des théories des plaques.....	24
III.3. Définition d'une plaque .....	24
III.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	25
III.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	26
III.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	28
III.4.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	29
III.5. Les théories de déformation des plaques.....	30
III.5.1. Théorie classique des plaques (CPT) .....	31
III.5.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) .....	32
III.5.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) .....	33
III.6. Conclusion .....	36

## Chapitre IV : Analyse de la réponse des structures multi échelles

IV.1. Etude du comportement des plaques sous flexion et vibration libre.....	37
IV.1.1. Formulations théoriques .....	37
IV.1.1.1. Hypothèses .....	39
IV.1.1.2. Cinématique .....	39
IV.1.1.3. Équations de mouvement .....	41

# *Sommaire*

---

IV.1.2. Solution analytique pour l'appui simple .....	45
IV.2. Etude du flambement des nano-poutres .....	49
IV.1.1. Formulations théoriques .....	49
IV.1.1.2. Cinématique .....	49
IV.1.1.3. Les Relations constitutive .....	50
IV.2.1.3. Les équations d'équilibre .....	51
IV.2.2. Solutions analytiques .....	54
IV.2.2.1. Solutions analytiques pour les conditions aux limites simplement appuyées en extrémités .....	55
IV.2.2.2. Solution analytique pour la poutre encastree-encastree .....	55
IV.3. Conclusion .....	56

## **Chapitre IV : Résultats et discussions**

V.1. Etude du comportement des plaques sous flexion et vibration libre .....	57
V.1.1. Analyses de flexion .....	57
V.1.1.1. Premier cas .....	57
V.1.1.2. Deuxième cas .....	60
V.1.1.3. Troisième cas .....	63
V.1.1.4. Quatrième cas.....	64
V.2. Etude du flambement des nano-poutres .....	68
V.2.1. Interprétation des résultats .....	68
V.3. Conclusion .....	73
Conclusion Générale .....	74

# *Sommaire*

---

Références bibliographiques .....	75
-----------------------------------	----

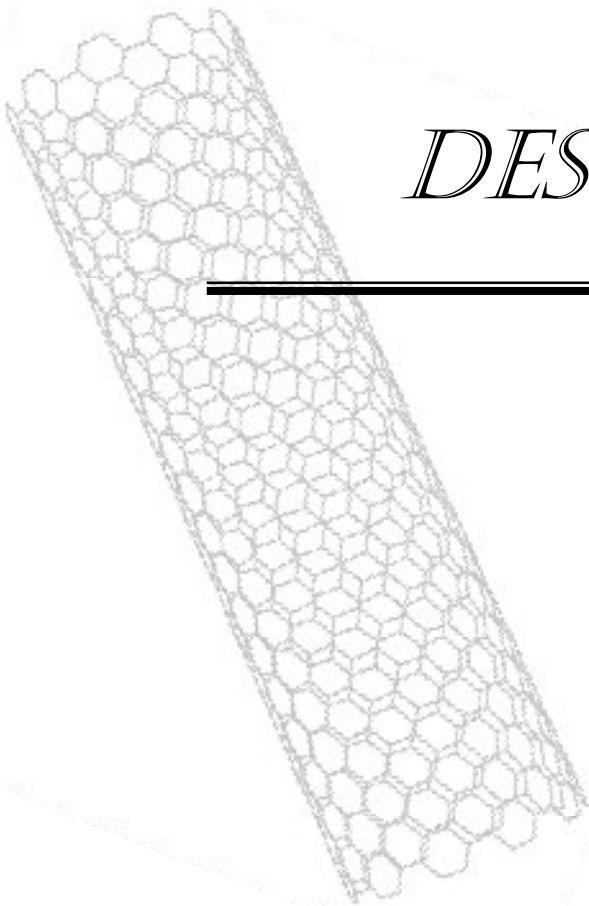
---

---

*LISTE  
DES FIGURES*

---

---



# Liste des Figures

---

## Chapitre I

- Figure I-1** *Une vue de la microstructure des FGM.*
- Figure I-2** *Modèle d'un FGM*  
*(a) : une poutre composite (multicouche), (b) : une poutre FGM*
- Figure I-3** *Principe de la méthode coulage en bande Boch (1986,1987).*

## Chapitre II

- Figure II-1** *Observation au microscope électronique à transmission haute résolution de nanotubes de carbone multi parois par Sumio Ijima en 1991. Au-dessous de chaque images MET, une vue schématique représente la section droite du nanotube avec le nombre de parois correspondantes.*
- Figure II-2** *Nanotubes de carbone mono parois (SWCNT) et multi parois (MWCNT).*  
*a) Représentation schématique d'un SWCNT.*  
*b) Vue en coupe par microscopie électronique à transmission (MET) de la section droite d'un faisceau de nanotube composé essentiellement de SWCNT. Chaque nanotube à un diamètre d'environ 1,4 nm et la distance inter tube est de 0,315 nm.*  
*c) Image MET d'un SWCNT le long de son axe principal.*  
*d) vue longitudinale de la section droite d'un faisceau de nanotube composé essentiellement de SWCNT*  
*e) Représentation schématique d'un MWCNT.*  
*f) Image MET haute résolution d'un MWCNT. La distance entre les lignes horizontales (représentant les parois du nanotube) est de 0,34 nm (proche de la distance entre les plans de graphène dans le graphite).*
- Figure II-3** *Nanotube de Carbone (SWNT).*
- Figure II-4** *Représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp$*
- Figure II-5** *Représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp^2$*
- Figure II-6** *Représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp^3$*

# *Liste des Figures*

---

- Figure II-7** *Représentation de la structure atomique du graphite*
- Figure II-8.** *Arrangement des atomes de carbone dans la structure du diamant*
- Figure II-9** *Représentation schématique des différentes formes allotropiques du carbone. (a) structure d'un ballon de football C60 (b) C70 (c) La@C82 constitue la présence d'un métal dans la cage de carbone (d) nanotube de carbone mono-feuillet (e) nanotube de carbone multi-feuillets.*
- Figure II-10** *Schéma de principe des trois principales méthodes de synthèses des nanotubes de carbones. Sublimation d'une cible de graphite par les méthodes de l'arc électrique (a) et de l'ablation laser (b). Décomposition catalytique d'hydrocarbure, méthode CVD (c).*

## Chapitre III

- Figure III-1** *Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.*
- Figure III-2** *Les dimensions de la plaque (P-FGM)*
- Figure III-3** *Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM*
- Figure III-4** *Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM*
- Figure III-5** *Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.*
- Figure III-6** *Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques*
- Figure III-7** *Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre*
- Figure III-8** *Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy)*

## Chapitre IV

- Figure IV. 1** *La position de la surface medium et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.*

## Chapitre V

- Figure V.1** *Comparaison de la variation adimensionnelle de la flèche  $\bar{w}$  de la plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans exemple 1 sous une distribution de charge sinusoïdale en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  ( $a/h = 10$ ).*

## Liste des Figures

---

- Figure V.2** *Comparaison de la variation adimensionnelle de la flèche  $\bar{w}$  de la plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans exemple 1 sous une distribution de charge sinusoïdale en fonction du paramètre d'épaisseur  $a/h$ .*
- Figure V.3** *Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  de la plaque FG carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans l'exemple 4 en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  ( $a/h = 5$ ).*
- Figure V.4** *Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  de la plaque FG carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans l'exemple 4 en fonction du paramètre d'épaisseur  $a/h$ .*
- Figure V.5** *Variation du pourcentage de réduction de la charge critique de flambement en fonction du paramètre de la petite échelle*
- Figure V.6** *Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axial appliqué pour le cas des poutres simplement appuyées pour  $\mu = 1$ .*
- Figure V.7** *Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axial appliqué pour le cas des poutres encastées-encastées pour  $\mu = 3$ .*
- Figure V.8** *Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axial appliqué pour le cas des poutres simplement appuyées pour  $L/h = 10$ .*
- Figure V.9** *Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axial appliqué pour le cas des poutres encastées-encastées pour  $L/h = 10$ .*



---

*LISTE  
DES TABLEAUX*

---



# *Liste des Tableaux*

---

## Chapitre I

**Tableau I.1** *Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.*

## Chapitre II

**Tableau II-1** *Comparaison des propriétés mécaniques des CNT et d'autres matériaux.*

## Chapitre V

**Tableau V.1** *Effets de la fraction de volume présentée dans la flèche et les contraintes adimensionnelles de la plaque carrée FG Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans l'exemple 1 (  $a/h = 10$  ).*

**Tableau V.2** *Effets de la fraction de volume présentée dans la flèche adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans l'exemple 2 (  $a/h = 10$  ).*

**Tableau V.3** *Effets de la fraction de volume présentée dans la contrainte axiale adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans l'exemple 2 (  $a/h = 10$  ).*

**Tableau V.4** *Effets de la fraction de volume présentée dans la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans l'exemple 2 (  $a/h = 10$  ).*

**Tableau V.5** *Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle (  $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$  ) de la plaque carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans l'exemple 3.*

**Tableau V.6** *Comparaison du paramètre de fréquence naturelle (  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$  ) de la plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> définie dans l'exemple 4.*

**Tableau V.7** *Première charge critique adimensionnelle de flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano simplement appuyées*

**Tableau V.8** *Première charge critique adimensionnelle de flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano encastées-encastées*

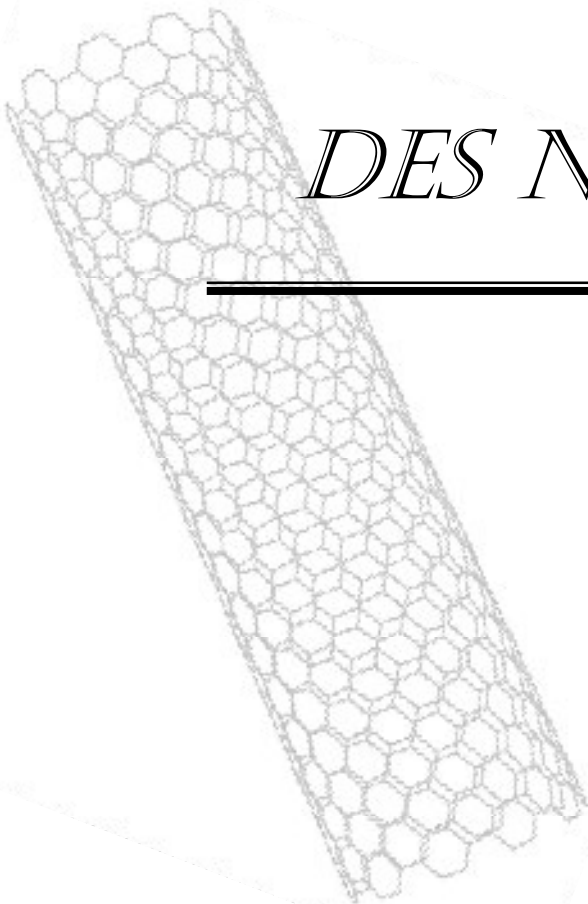
---

---

*LISTE  
DES NOTATIONS*

---

---



## *Liste Des Notations*

---

$G$	Module de cisaillement dans le plan $(x, z)$
$E_C$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young du métal
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de $z$
$E(z)$	Module de Young en fonction de $z$
$V(z)$	Module de cisaillement en fonction de $z$
$k$	Paramètre du matériau
$z_{ms}$	Coordonné mesure à partir de la surface du milieu de la plaque
$z_{ns}$	Coordonné mesure à partir de la surface neutre de la plaque
$C$	Distance entre la surface neutre et la surface médiane
$u, v, w$	Déplacements dans les directions $x, y, z$
$u_0$ et $v_0$	Déplacements de la surface neutre
$\Phi$	Fonction de coordonnées $x, y$
$t$	Temps
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Composantes de contrainte
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Composantes de déformation
$k_s$	Facteur de correction de cisaillement
$Q_{ij}$	Coefficients de rigidité
$\delta U$	Energie de déformation virtuelle;
$\delta V$	Energie potentielle virtuelle
$\delta K$	Variation d'énergie cinétique
$N, M, Q$	Résultantes de contrainte
$q$	Charge transversale appliquée
$\rho(z_{ns})$	Masse volumique
$I_0, I_1, I_2$	Moments d'inertie
$A_{ij}, D_{ij}$	Termes de matrice de rigidité de la plaque
$\omega$	Fréquence propre
$m, n$	Modes propres
$h$	Epaisseur de la poutre

## *Liste Des Notations*

---

$Q_x$	Force transversale de cisaillement; et
$\lambda_x$	Inconnu constant a déterminé en se basant sur la définition de la force transversale de cisaillement
$e_0$	Constante appropriée à chaque matériau
$a$	Longueur caractéristique interne
$N_0$	Charge compressive externe appliquée aux extrémités de la poutre.
$\bar{N}_{cr}$	Charge critique non-dimensionnelle de flambement,
$\mu = (e_0 a)^2$	Parametre non-local qui prend en compte l'effet de l'échelle

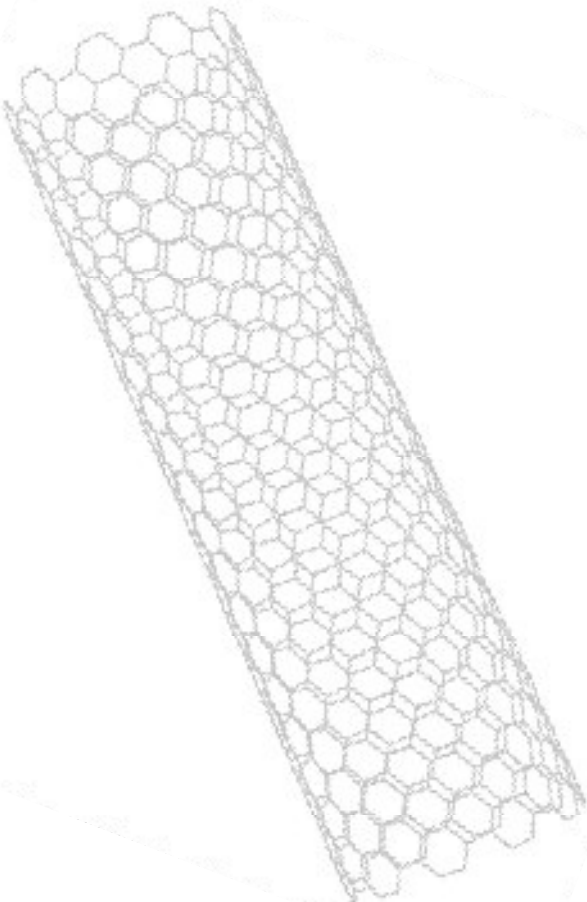
---

---

*INTRODUCTION  
GÉNÉRALE*

---

---



# *Introduction Générale*

---

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent.

Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage du contenu de deux ou plusieurs matériaux tel que les nouveaux matériaux qui ont la gradation de propriété désirée dans des directions spatiales. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGMs ont gagné l'applicabilité répandue comme les structures de barrière thermique, les habillages -et les revêtements résistant à la corrosion d'autres que la jonction de matériaux dissemblables.

Les concepts de FGMS sont proposés par les japonais Yamanouchi et al. (1990) et Koizumi et Sata (1993) et sont projeté comme des matériaux de barrière thermiques pour des applications à savoir les avions spatiaux, les structures spatiales et les réacteurs nucléaires.

Quelques chercheurs ont employé la théorie de plaque classique (CPT) pour analyser la vibration et le comportement statique des plaques minces (FG) fonctionnellement graduées. Les fréquences naturelles des plaques minces FG rectangulaires simplement appuyées et encastrées-encastrées ont été obtenues par Abrate (2008) en utilisant le CPT. La vibration libre, le flambement et l'analyse de la flexion des plaques minces FG ont été présentées par Zhang et Zhou (2008) sur la base de la physique de la surface neutre. Woo et al. (2006) ont fourni une solution analytique pour le comportement de vibration libre non-linéaire des plaques minces carrées en utilisant la théorie Von-Karman.

Les théories d'ordre élevé et du troisième ordre (TSDT) ont été appliquées pour le cas des structures FGMs par Matsunaga (2009), Ravikiran et al. (2008), Chung and Chen (2007), Chi and Chung (2006), Ferreira et al. (2005). Reddy et Cheng (2001) ont examiné les déformations thermomécaniques tridimensionnelles des plaques rectangulaires simplement appuyées en utilisant une méthode asymptotique. Les théories d'ordre élevé et de plaque normale déformable et la méthode de mesh-less ont été appliquée pour les déformations Statiques, les vibrations libres et forcées d'une plaque élastique FG rectangulaire épaisse par Qian et al. (2004).

En raison de sa haute efficacité et simplicité, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) a été utilisée pour l'analyse des plaques FG modérément épaisses. Praveen et Reddy (1998) ont examiné les réponses statiques et dynamiques non-linéaires de plaques fonctionnellement graduées céramique-métal en utilisant la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) et la théorie de Von Karman. Croce et Venini (2004) ont formulé une famille hiérarchique d'éléments finis selon la théorie Reissner-Mindlin.

Ainsi, il peut être noté que les modèles basés sur la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) sont souvent utilisé vu leur simplicité dans l'analyse et la programmation. Shimpi et al. (2007) ont proposé une nouvelle théorie de premier ordre de déformation de cisaillement pour étudier la flexion et la vibration des plaques ortho-topique.

## *Introduction Générale*

---

D'autre part la communauté scientifique prête ces dernières années une grande attention aux éléments nanostructure à cause de leurs propriétés importantes. Établissez des expériences avec des éléments de taille à l'échelle nano révèlent être difficile et cher.

Ainsi, on élaborant des modèles théoriques appropriés pour des nanostructures est un sujet important pour des demandes en nano-ingénierie. Dans la littérature scientifique, nous pouvons trouver trois approches qui modélise les structures à l'échelle nano, à savoir : (a) atomistique (Ball, (2001); Baughman et al., (2002)), (b) hybridation atomistique - Mécanique des milieux continus (Bodily and Sun, (2003); Li and Chou, (2003) ab; Pradhan and Phadikar, (2008)) et Mécanique des milieux continus (c). L'Atomistique et l'hybridation atomistique - mécanique des milieux continus sont généralement coûteux sur le plan de calcul et ne sont pas simples et pratiques pour étudier les systèmes à la grande échelle. Par contre, la méthode de la mécanique des milieux continus est moins couteuse sur le plan de calcul que les deux anciennes approches.

De plus, il a été remarqué que cette approche fournit des résultats presque précis comparés à ceux d'approches atomistique et hybridation atomistique. La flexion, le flambement et la vibration des structures à l'échelle nano sont très importants dans la nanotechnologie. La compréhension du comportement mécanique de structures de l'échelle nano est l'étape principale pour beaucoup de dispositifs de NEMS comme des oscillateurs, des horloges et des dispositifs de capteur. Il y a déjà des travaux exploratoires sur les modèles des milieux continus pour la réponse mécanique de nanotubes carboniques (CNTs) (Wang et al., (2006); Wang and Varadan, (2006); Lu et al., (2007); Roque et al., (2011); Nacéri et al., (2011); Tounsi et al., (2013); Benguediab et al., (2014)) ou les nanotubes (Reddy, (2007); Murmu and Adhikari, (2012); Eltaher et al., (2012); Emam, (2013)).

Dans ces travaux mentionnées ci-dessus il a été suggéré que la théorie d'élasticité non-locale développée par Eringen (1983, 2002) devrait être employée dans les modèles de continuum pour la prédiction (prévision) précise des comportements mécaniques de nanostructures. Contrairement aux théories locales qui supposent que la contrainte en un point est une fonction de tension à ce point, la théorie d'élasticité non locale suppose que la contrainte à un point est une fonction de tensions à tous les points dans le milieu continu.

Le premier objectif principal de ce travail a pour but d'étendre la théorie proposé par Shimpi et al. (2007) pour la flexion et la vibration des plaques à gradient de propriété FG. Contrairement à la conventionnelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) a quatre inconnus. En général, les propriétés des matériaux de plaques graduellement fonctionnelles n'ont pas de symétrie par rapport au plan médium de la plaque. Donc, les équations de membrane et de flexion d'une telle plaque sont couplées. Morimoto et al. (2006), Abrate (2008), Zhang et Zhou (2008), Ould Larbi et al. (2013), Fekrar et al. (2014), Al-Basyouni et al. (2015) ont montré qu'il n'y a pas de couple membrane-flexion dans les équations consécutives si la surface référence est correctement choisie.

# *Introduction Générale*

---

Le second objectif de ce travail a pour but d'étudier le comportement de post-flambement non-linéaire statique des poutres à l'échelle nano selon la théorie d'ordre zéro non-local de déformation en cisaillement (ZSDT). Le ZSDT a été d'abord développé par Shimpi (1999) pour des plaques isotopiques et ainsi il semble être important d'étendre cette théorie aux nanostructures en utilisant la théorie d'élasticité non locale d'Eringen.

Le ZSDT représente la déformation en cisaillement transversal à l'aide de forces de cisaillement au lieu du déplacement rotatif comme l'implique les théories de déformation existantes. Le ZSDT contient les mêmes inconnus que dans la théorie des poutres de Timoshenko (TBT), mais elle satisfait les conditions aux limites de traction en haut et en bas des surfaces de la poutre sans exiger aucun facteur de correction de cisaillement.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application

Le deuxième chapitre est consacré à une étude bibliographique sur les nanotubes. Dans un premier temps, ce chapitre décrit brièvement la synthèse, les différents types de nanotubes, leur caractérisation physico-chimique ainsi que leur fonctionnalisation permettant leur utilisation dans différents domaines.

Le troisième chapitre présente les différentes propriétés des matériaux à gradient de propriétés, les différentes lois de mélange et les différentes théories de déformation des plaques (applicables également aux poutres) en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les plus utilisées telle que celle de Reddy et enfin les plus récentes.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation de la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) à quatre inconnus ainsi à l'étude du comportement de post-flambement non-linéaire statique des poutres à l'échelle nano selon la théorie d'ordre zéro non-local de déformation en cisaillement (ZSDT)

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à des applications numériques divers sont établis pour vérifier l'exactitude de la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) dans la prévision de la flexion et des réponses de vibration des plaques FG simplement appuyées et de la présente théorie d'ordre zéro non-local de déformation en cisaillement (ZSDT) dans la prévision du flambement et les réponses du post-flambement des poutres à l'échelle nano.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives pour des travaux futurs.

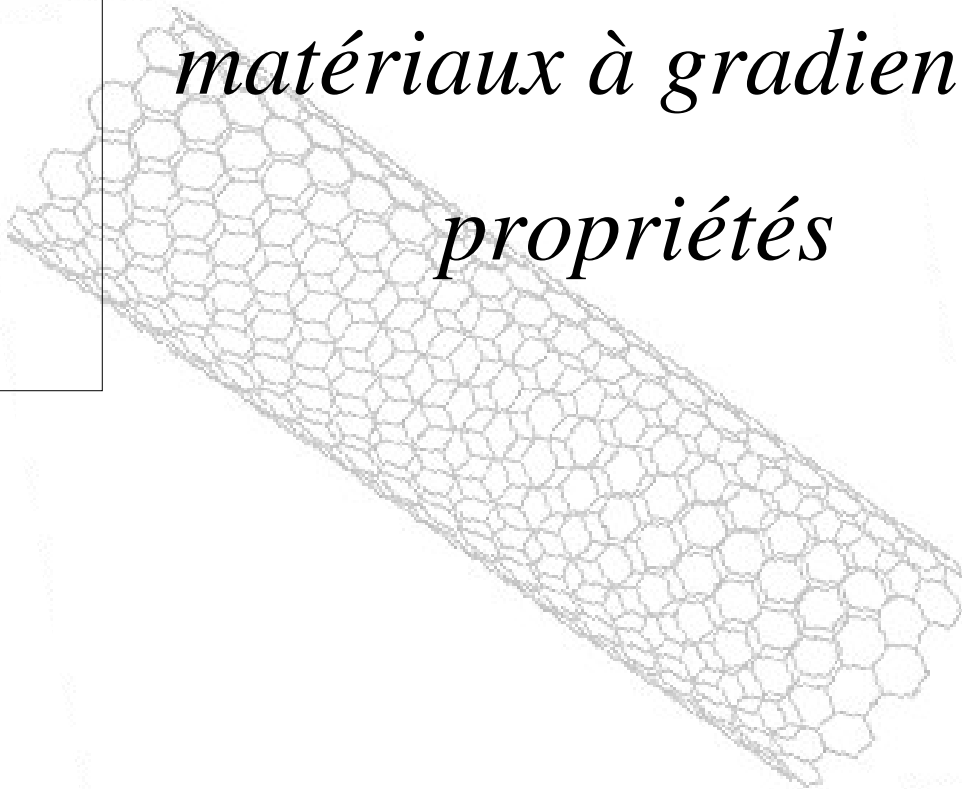


# CHAPITRE

01

---

## *Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés*



## **I.1. Introduction**

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

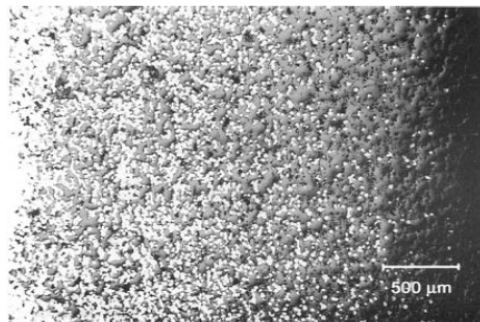
Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G. M ").

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière.

Les matériaux à gradient de propriétés ( FGM ) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ils sont composés de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Les (FGM) permettent l'adaptation des fractions de volume d'un matériau pour extraire l'avantage maximum de leur inhomogénéité.

## **I.2. Définition des FGM :**

Un matériau fonctionnellement gradué est un matériau composite qui a des propriétés mécaniques variables en suivant une fonction dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de la poutre. Il est fabriqué en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, métal et céramique. Autrement dit, un FGM est une classe des composites qui ont une variation continue des propriétés matériels d'une surface à une autre.

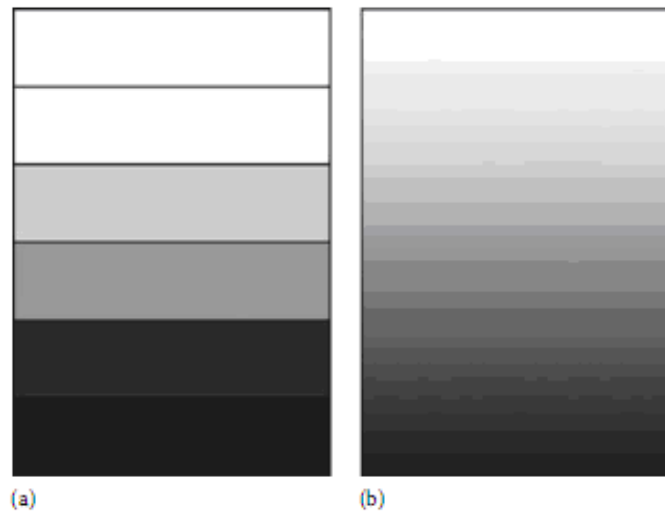


**Figure I-1 :** Une vue de la microstructure des FGM.

Une poutre fonctionnellement graduée est définie comme une poutre dont les fractions volumiques de deux ou trois matériaux varient continuellement avec une fonction à travers une épaisseur (William G.C, 2005).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) est caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, il représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels.

Des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie, Leurs but principal est d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, et avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) qui peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Ould Larbi, L., (2013)



**Figure I-2 : Modèle d'un FGM**

(a) : une poutre composite (multicouche), (b) : une poutre FGM.

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur le secteur de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Ces derniers offrent plusieurs avantages. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Houari, M.S.A., (2011)

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires»	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

**Tableau I.1:** comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

### I.3. Historique :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous.

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Ils discutaient la problématique de la résistance à de graves écarts de la température entre l'intérieur et l'extérieure et ils se confrontent à la réalité suivante: Ils n'existent pas de matériau unique supportable à une telle condition. Mahi, A., (2012)

A partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGM, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Donc Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour cela, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température, quand à la surface intérieure (coté basse température), ils ont utilisé un matériau conducteur de la chaleur.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant ces FGM, et a partir de cette année leur études a pris de l'ampleur et fut utilisé par plusieurs autres chercheurs et différents laboratoires qui ont initié leur recherche en discutant sur : les méthodes de développement des FGM, la conception des matériaux, leurs production et leurs évolution.

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc. Okamura (1991), Berrebah, H.M., (2011)

Enfin, les recherches dans ce domaine permettent de développés et d'améliorés nos connaissance concernant ces nouveaux matériaux : thermique, dynamique, stabilité (flambement), etc.

### **I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable.

Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non

contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation Kieback (2003).

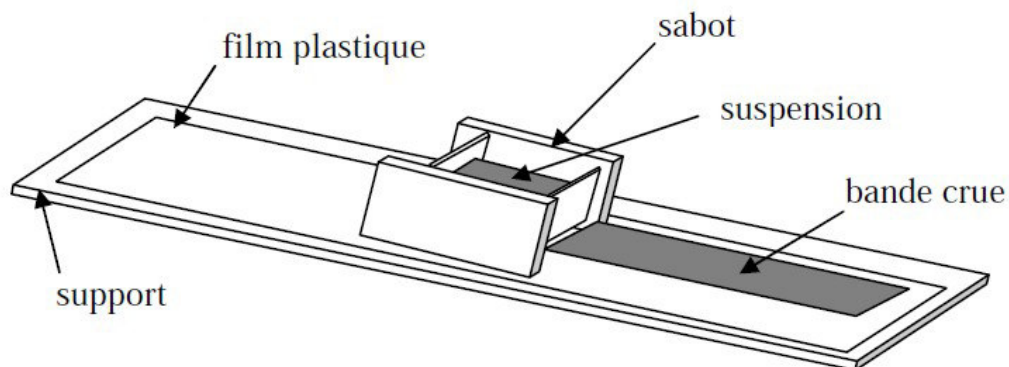
Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après:

### I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. Houari, M.S.A., (2011)

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande Boch (1986,1987). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.3 :** Principe de la méthode coulage en bande Boch (1986,1987).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (1973) ; soit

par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression Boch (1987).

### **I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.4.3. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée.

Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale Yang (2003).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **I.4.4. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important.

Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique Steffens (1990).

### **I.4.5. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique Takahashi (1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres. Ait Atmane, H., (2011)

### **I.5. Domaines d'application**

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs. Houari, M.S.A., (2011)

### **I.6. Exemples des produits de FGM**

#### **I.6.1. Système spatial**

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Ould Larbi, L., (2013)

#### **I.6.2 Système de distribution et de transmission**



Les FGM technologie sont utilisées pour la commutation à isolation gazeuse (GIS). Le SIG est un appareillage complexe, constitué d'un disjoncteur, un sectionneur et un parafoudre. Power and Industrial Systems Research and Development Center, Toshiba Corp construit un élément d'arrêt pour l'éclairage d'avoir une structure cristalline classés dans les entre l'extérieur et l'intérieur, résultant en une gestion du stress thermique et une amélioration considérable dans la capacité d'adsorption de l'énergie.

### **I.6.3 Fibre optique**

Asahi Glass Company a publié un Graded Index CYTOP TM de fibre optique, Lucina MC, depuis Juin 2000. Les fibres optiques plastiques (POF) peuvent facilement augmenter une fibre de taille due à la propriété en plastique tout en maintenant leur flexibilité, ce qui entraîne la réduction du coût de l'installation grâce à un câblage facile. Dans le présent, de nombreuses constructions ont été réalisées principalement dans les hôpitaux et les écoles, et les demandes sont encore en croissance.

### **I.6.4 Industriel**

La substance se comportant à la fois résistance à l'usure supérieure et de la ténacité est nécessaire pour produire des outils idéaux industriels. Autres différentes applications sont également possibles, par exemple, le carbure de composition classés / matériel en acier articulé est applicable aux instruments de plastique formant (coup de poing par exemple, de matrices et de moules), des outils pour le développement urbain) et les pièces de machines (p.ex. garniture mécanique et manette des gaz tige de valve).

En outre, des diamants dispersés carbure est applicable au centre des lames et des outils de roulement et résistant à l'usure des outils industriels tels que des centres de tournage.

### **I.6.5 Titanium**

Le titane est utilisé pour une caisse de voir car il est la lumière matérielle pondérée et non allergique, mais il a une faible dureté et est inférieur en résistance aux dégâts. Par conséquent, le durcissement de surface de titane, une nouvelle technique a évolué pour améliorer la qualité des eaux de surface par traitement

### **I.6.6 Crampons Baseball**

La technique d'excision est utilisée pour tasseaux. Traitement thermique des aciers industriels utilisés doivent être utilisées avant. Toutefois, il n'était pas facile de résister à l'usure à partir d'argile et de sable, et des clous en l'habitude d'avoir de nombreux échecs. Par conséquent, une nouvelle chaussure de base-ball a été conçue pour avoir taquets de forme particulière avec des conseils en alliage de carbure de ciment et d'aciers au carbone constitué par la méthode de soudage par résistance.

### **I.6.7 Lames de rasoir**

Ltd commercialisées avec succès classés lames de rasoir dureté. Ils ont utilisé à haute résistance et la ténacité à-inox pour un substrat et des composés de haute dureté intermétalliques pour une couche de surface pour la fabrication d'une lame qui a une structure

à haute adhérence composition classée. En conséquence, l'une avec douceur ainsi que la forte et profonde à raser les résultats pourraient être obtenus.

### **I.6.8 D'autres**

Comme mentionné ci-dessus, il existe des produits FGM, par exemple), outils industriels, fibres optiques, pièces et composants électroniques de précision sur le marché. Nous pouvons voir de nombreuses applications de la FGM 's concept dans diverses recherches et les domaines industriels, il s'avère que l'application de la FGM se propage tranquillement, peu à peu. BOURADA, M., (2014)

### **I.7. Conclusion :**

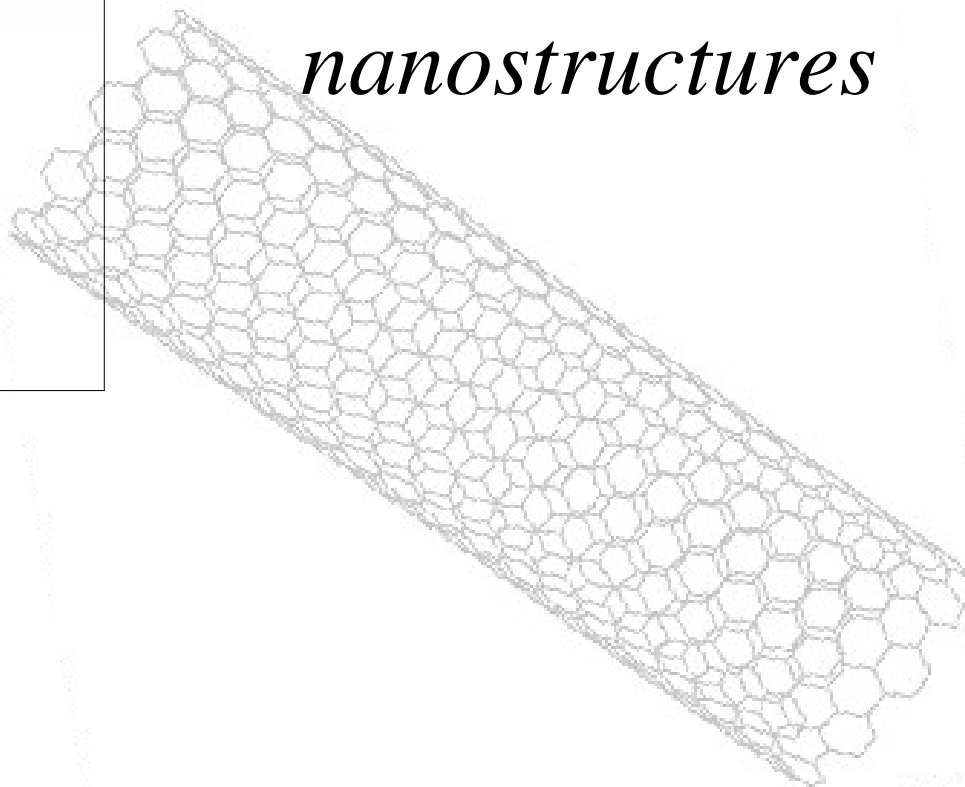
Dans ce chapitre on a présenté une synthèse sur les travaux connus dans la littérature concernant les matériaux fonctionnellement gradués a été illustrée. Un aperçu sur l'historique des matériaux FGM a été mit en évidence ainsi que les différentes méthodes de fabrication d'application et des exemples de produits FGM.

CHAPITRE

02

---

*Généralités sur les  
nanostructures*



## Chapitre II: Généralités sur les nanostructures

### II.1. Introduction :

Les nanotubes de carbone ont été identifiés pour la première fois en 1991 par Sumio Iijima (1991) alors qu'il observait par microscopie électronique à transmission à haute résolution les sous-produits, présents sous forme de suie, de fullerènes<sup>1</sup> synthétisés par la méthode dite de l'arc électrique par Bacon et Krätschmer (1960, 1990).

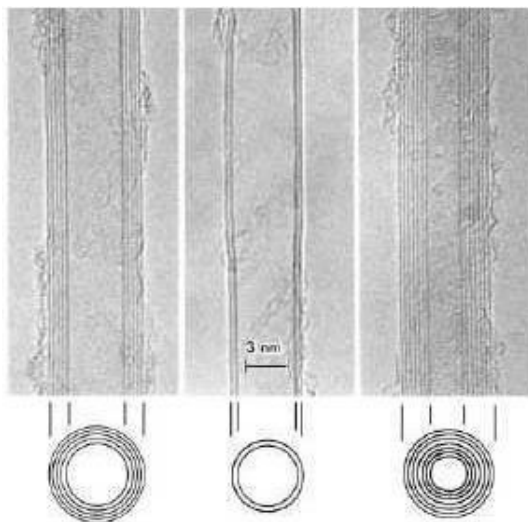
Dans cette suie, il a clairement mis en évidence la présence de tubes constitués uniquement de carbone graphitique, de quelques nanomètres de diamètre. Ces « nano » tubes étaient en fait constitués de plusieurs tubes imbriqués les uns dans les autres.

La communauté scientifique les a alors qualifiés de nanotubes multi parois (Figure II.1.). En 1993, des nanotubes de carbones mono parois (Figure II.2.) ont été synthétisés par la même méthode, en ajoutant des catalyseurs métalliques dans les électrodes de carbone entre lesquelles se produit l'arc électrique Iijima et Bethune (1993).

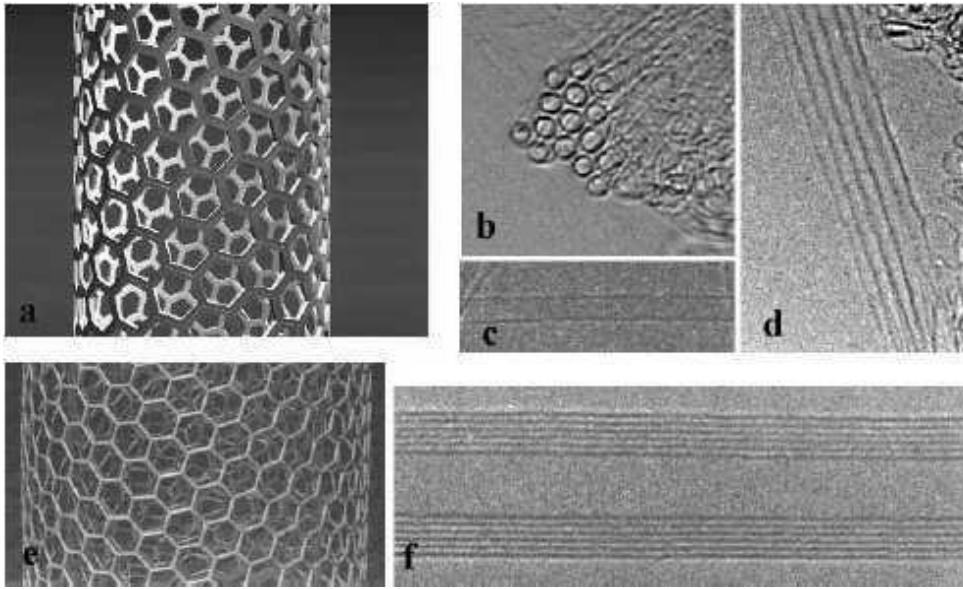
Aujourd'hui, on distingue deux sortes de nanotubes : les nanotubes mono parois et multi parois. Les nanotubes mono parois (en anglais, **Single Walled Carbon Nanotube** ou SWCNT) sont constitués d'une seule paroi graphitique, alors que les nanotubes multi parois (en anglais, **Multi Walled Carbon Nanotubes** ou MWCNT) sont constitués de plusieurs parois graphitiques.

Historiquement ce sont surtout les propriétés électroniques (possibilités d'être soit métalliques, soit semi-conducteurs par Satio, Mintmire et Hamada (1992) et mécaniques (module de Young : environ 1,2 Tpa Treacy (1996) pour des diamètres supérieurs à 1 nm, coefficient de Poisson (0,2 - 0,3), très grande flexibilité Iijima (1996) qui ont d'abord été mises en avant grâce à plusieurs prédictions théoriques concordantes.

De très belles confirmations expérimentales sont ensuite venues renforcer ces prédictions Yao, Ebbesen et Hu (1999) et de très grandes firmes industrielles se sont lancées dans la bataille aux applications grands publics. LEFEVRE, R., (2005)



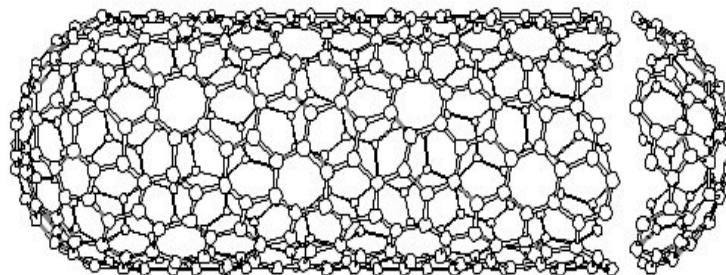
**Figure II.1.** Observation au microscope électronique à transmission haute résolution de nanotubes de carbone multi parois par Sumio Iijima en 1991. Au-dessous de chaque images MET, une vue schématisée représente la section droite du nanotube avec le nombre de parois correspondantes.



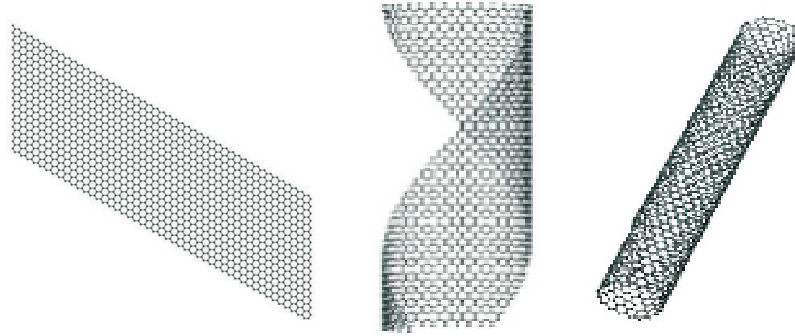
**Figure II.2.** Nanotubes de carbone mono parois (SWCNT) et multi parois (MWCNT). a) Représentation schématique d'un SWCNT. b) Vue en coupe par microscopie électronique à transmission (MET) de la section droite d'un faisceau de nanotube composé essentiellement de SWCNT [vue longitudinale en d)]. Chaque nanotube à un diamètre d'environ 1,4 nm et la distance inter tube est de 0,315 nm. c) Image MET d'un SWCNT le long de son axe principal. e) Représentation schématique d'un MWCNT. f) Image MET haute résolution d'un MWCNT. La distance entre les lignes horizontales (représentant les parois du nanotube) est de 0,34 nm (proche de la distance entre les plans de graphène dans le graphite).

### II.2. Définition :

Les nanotubes, sont les derniers nés de la famille des carbones, On peut voir un nanotube idéal comme une bande de grande longueur, découpée dans une feuille de graphène et enroulée sur elle-même, qui peut ou non être fermée à ses extrémités. Le diamètre de ces structures est nanométrique et leur longueur est de l'ordre du micromètre.



**Figure II.3.** Nanotube de Carbone (SWNT).



Feuille de graphite    enroulement    nanotube de C

Dans ce cas, le nanotube possède une hélicité (suivant la manière dont les deux bords de la feuille de graphène vont se recouper).

### II.3. Structure des nanotubes de carbone

Connu depuis l'Antiquité, le carbone est le sixième élément le plus abondant de l'Univers et le 14ème élément le plus abondant sur Terre. La particularité de cet élément parmi d'autres, réside dans le fait que le nombre des composés dans lequel il intervient dépasse de loin la somme des composés de tous les autres éléments du tableau périodique.

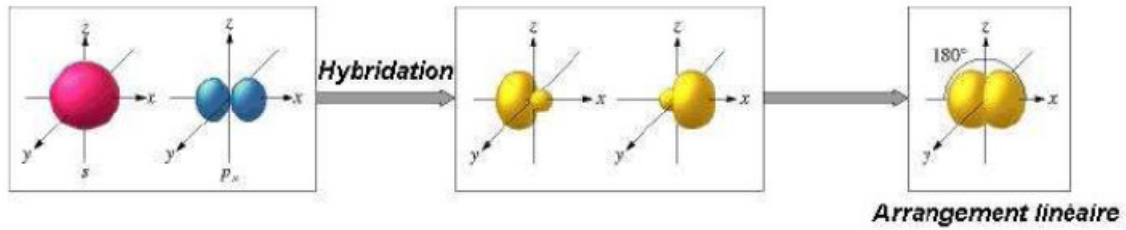
Le carbone possédant 6 électrons, sa configuration électronique est :  $1s^2 2s^2 2p_x 2p_y$ . Il possède 4 électrons sur sa couche de valence, ce qui lui permet de former quatre liaisons covalentes, dont des liaisons de type  $\sigma$  ou de type  $\pi$ . Les liaisons de type  $\pi$  sont toujours accompagnées d'une liaison de type  $\sigma$ .

La réorganisation des orbitales appelée hybridation, permet à l'atome de carbone de se lier de manière stable à d'autres atomes : deux, trois ou quatre atomes voisins. Les électrons des orbitales 2s et 2p peuvent se répartir de différentes manières et former ainsi trois types d'hybridation : NACERI, M., (2013)

#### II.3.1. L'hybridation $sp$

Dans ce cas la seule orbitale 2s se combine avec une seule des trois orbitales 2p du carbone, on obtient alors deux nouvelles orbitales dont l'hybridation est  $sp$ . Ces deux orbitales s'orientent avec un angle de  $180^\circ$  entre elles pour donner un arrangement linéaire (à une dimension).

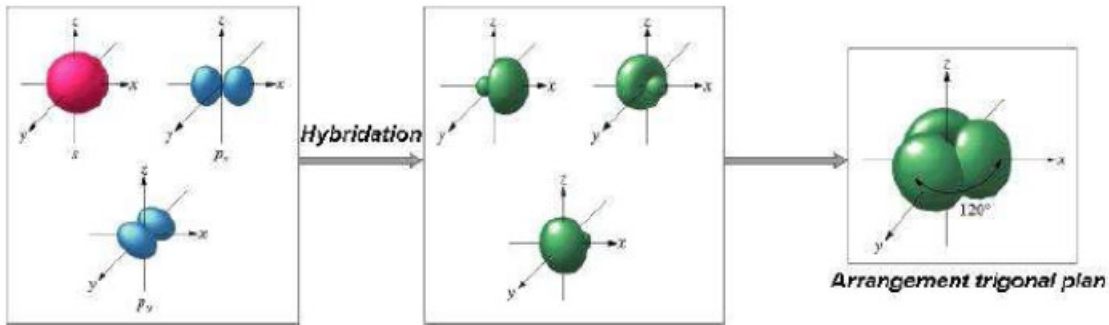
Les deux orbitales 2p non-hybridées restent en place perpendiculairement aux deux orbitales  $sp$ .



**Figure II.4.** représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp$

### II.3.2. L'hybridation $sp^2$

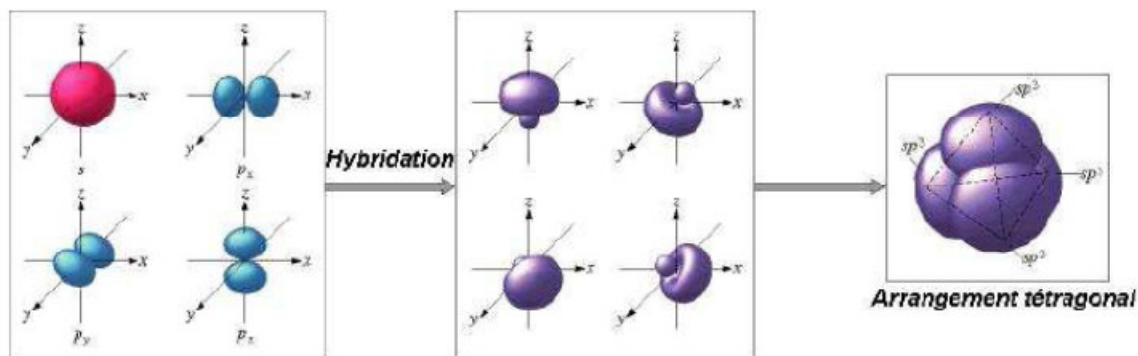
Maintenant si l'orbitale  $2s$  se combine avec deux orbitales  $2p$  du carbone, on obtient trois nouvelles orbitales dont l'hybridation est  $sp^2$ . Ces trois nouvelles orbitales s'orientent avec un angle de  $120^\circ$  entre elles pour donner un arrangement triangulaire (à deux dimensions).



**Figure II.5.** Représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp^2$

### II.3.3. L'hybridation $sp^3$

Dans le troisième cas, l'orbitale  $2s$  se combine avec trois orbitales  $2p$  du carbone. On obtient alors quatre nouvelles orbitales dont l'hybridation est  $sp^3$ . Ces quatre nouvelles orbitales s'orientent avec un angle de  $109,5^\circ$  entre elles pour donner un arrangement tétraédrique (à trois dimensions).



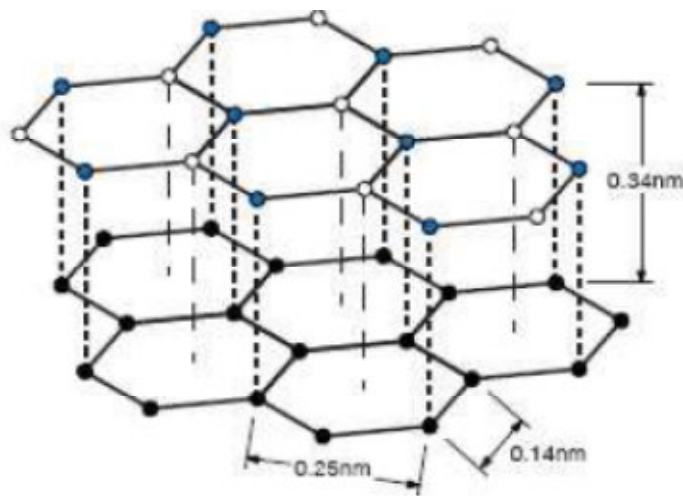
**Figure II.6.** Représentation schématique de la réorganisation des orbitales dans le cadre d'une hybridation  $sp^3$

### II.4. Les différentes formes du carbone

#### II.4.1. Le graphite

Le graphite est la forme la plus abondante et la plus stable à température et à pression ambiante. Sa structure est constituée de feuillets hexagonaux non compacts, nommés graphènes, séparés d'environ 0,34 nm le long de la direction de leur normale.

Dans chaque feuillet, les atomes de carbone sont fortement liés par des liaisons covalentes de type  $sp^2$ , tandis que les liaisons entre les feuillets sont faibles, de type Van der Waals  $\pi$ , ce qui explique le clivage et la faible dureté. La Figure II.7. est une représentation de la structure atomique du graphite.



**Figure II.7.** Représentation de la structure atomique du graphite

#### II.4.2. Le diamant

Le diamant est une forme métastable du carbone dans les conditions de température et de pression normales. Il ne comporte que des atomes  $sp^3$  et possède la dureté la plus élevée (10 Mohs). Ainsi chaque atome de carbone est associé de façon tétraédrique à ses quatre voisins les plus proches et complète sa couche extérieure. Ces liaisons covalentes, fortes et donc difficiles à casser, couvrent tout le cristal, d'où son incroyable dureté.

D'autre part il présente une plus forte densité que le graphite ( $3500 \text{ Kg/m}^3$  contre  $2200 \text{ Kg/m}^3$  pour le graphite) et possède la plus haute conductivité thermique à température ambiante. La Figure II.8. montre l'arrangement des atomes de carbone dans la structure du diamant.



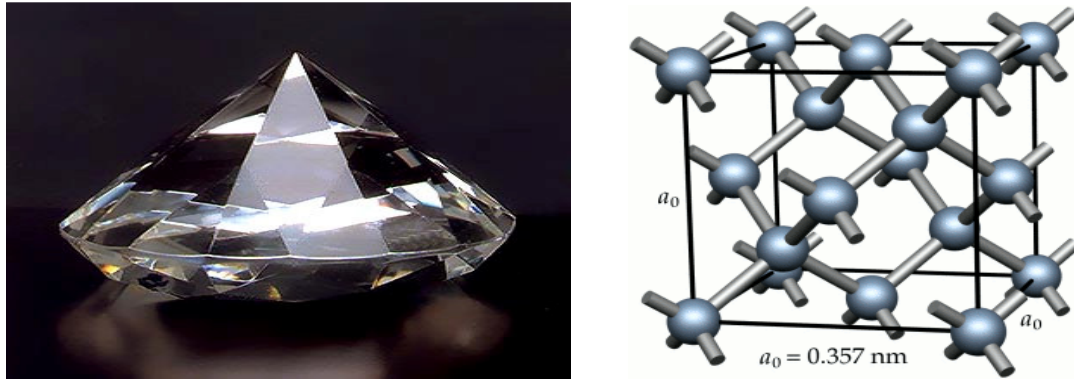


Figure II.8. Arrangement des atomes de carbone dans la structure du diamant.

### II.4.3. Les fullerènes

Un fullerène est une molécule composée de carbone pouvant prendre une forme sphérique, ellipsoïdale, d'un tube (appelé nanotube) ou d'un anneau.

Les fullerènes sont similaires au graphite, et sont composés de feuilles d'anneaux hexagonaux liés, mais contenant des anneaux pentagonaux et parfois heptagonaux, ce qui empêche la feuille d'être plate.

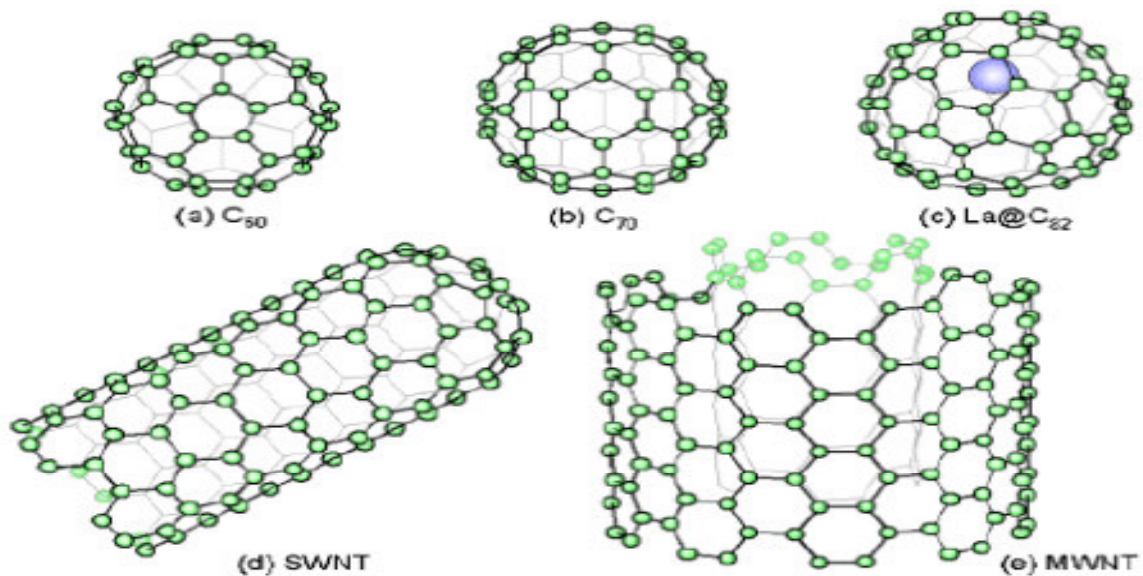


Figure II.9. Représentation schématique des différentes formes allotropiques du carbone. (a) structure d'un ballon de football C<sub>60</sub> (b) C<sub>70</sub> (c) La@C<sub>82</sub> constitue la présence d'un métal dans la cage de carbone (d) nanotube de carbone mono-feuillet (e) nanotube de carbone multi-feuillets.

### II.6. Propriétés des nanotubes de carbone

Les nanotubes de carbones présentent les propriétés suivantes :

## Chapitre II: Généralités sur les nanostructures

---

### II.6.1. Propriétés mécaniques

La présence de fortes liaisons chimique C-C dans le graphite rend les propriétés des nanotubes de carbone exceptionnelles. Grâce à ces liaisons fortes entre les atomes, les nanotubes de carbone présente un module de Young équivalent à celui du diamant.

De nombreux travaux théoriques entrepris montrent un module d'Young des nanotubes de carbone très élevé : Les calculs de Yakobson et son équipe, Yakobson (1996) montrent un module de Young de l'ordre de 1Tpa pour une feuille de graphène. De plus, les tests de flexibilité réalisés sur les nanotubes montrent que ces derniers peuvent être soumis à d'importantes contraintes (longitudinales ou transverses) sans montrer de signe de déformation plastique, de fracture fragile ou de réarrangement atomique. KACI, A., (2012)

Matériau	Module de Young (GPa)	Résistance à la traction (GPa)	Densité
SWNT	1050	150	
MWNT	1260	150	2,6
Fibres de Carbone	230	3,5	1,75
Acier	208	0,4	7,8
Résines époxydes	3,5	0,005	1,25
Bois	16	0,008	0,6

*Tableau II.1.* Comparaison des propriétés mécaniques des CNT et d'autres matériaux.

### II.6.2. Propriétés électroniques

La structure électronique d'un nanotube de carbone est une conséquence directe de la structure hexagonale d'un mono-feuillet de graphite dont la surface de Fermi se trouve être réduite à 6 points, sommets de la zone de Brillouin. En effet, dans un métal on appelle énergie de Fermi l'énergie maximum des états électroniques occupés.

Ces états participent à la conduction si, de surcroît, ils sont délocalisés à travers l'échantillon. Un plan de graphite ne contient que six états de conduction à l'énergie de Fermi.

### II.6.3. Propriétés émissives

Les nanotubes de carbone sont capables d'émettre des électrons par effet tunnel via leur pointe lorsqu'ils sont placés parallèlement aux lignes d'un champ électrique. Avec des tensions relativement faibles, il est possible de générer à leurs extrémités des champs électriques importants,

## *Chapitre II: Généralités sur les nanostructures*

---

capables d'arracher les électrons de la matière et de les émettre vers l'extérieur [Houdyp, 2006 ; Postma, 2001].

Cette émission est extrêmement localisée (à l'extrémité du tube) et peut servir à envoyer des électrons sur un endroit bien précis.

### **II.6.4. Propriétés thermiques**

De même que pour les propriétés électroniques, l'unidimensionnalité des nanotubes laisse espérer des propriétés thermiques originales. Le diamant présente la conductivité thermique la plus élevée de tous les matériaux connus à ce jour environ ( $103 \text{ à } 300 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ).

Le plan de graphène possède une conductivité comparable, mais le graphite présente des propriétés moindres dues à l'anisotropie. La structure particulière des nanotubes permet de penser que leur conductivité doit également être grande le long de l'axe du nanotube.

### **II.6.5. Propriétés optiques**

Par ailleurs, les nanotubes de carbone possèdent des propriétés optiques intéressantes. En effet, le matériau le plus noir jamais conçu par l'homme est un tapis de nanotubes disposés verticalement, réalisé par des chercheurs l'Université Rice autour du professeur Pulickel Ajayan ; avec un indice de réflexion de 0,045%, il est 30 fois plus sombre que le carbone, ce qui lui permet d'absorber 99,9 % de la lumière qu'il reçoit.

C'est 3 fois « mieux » que ce que permettait l'alliage de nickel-phosphore qui était le matériau réputé le plus sombre. Ces inventions pourraient intéresser les secteurs militaire, de la communication, de l'énergie (solaire notamment), de l'observation, des colorants, etc. ... De plus la photo physique des nanotubes en fait un matériau très prometteur pour la conception d'une nouvelle famille de détecteurs infrarouge.

## **II.7. Méthodes de synthèse**

Les différentes méthodes de synthèse pour produire des nanotubes de carbone se classent en deux grandes catégories : les techniques à haute température et les techniques à moyenne température. À haute température, la formation des nanotubes s'obtient par la condensation d'un gaz carboné, obtenu par la sublimation d'une cible de graphite <sup>2</sup>, sous atmosphère inerte.

Les méthodes à arc électriques, à ablation laser, et CVD (pour **Chemical Vapor Decomposition**) sont, de loin, les plus employées car elles permettent de produire en assez grande quantité des nanotubes de carbone de qualité et de toutes sortes : monoparoi, multi parois, et faisceaux de nanotubes. LEFEVRE, R., (2005)

## *Chapitre II: Généralités sur les nanostructures*

---

**La méthode de l'arc électrique** a été la première méthode employée pour produire des nanotubes de carbone. Initialement elle avait été mise au point lors de la découverte des fullerènes puis de leur production en masse, Kroto et Krätschmer (1985,1990). Son principe assez simple, implique l'utilisation de deux électrodes de graphite installées dans une chambre de réaction remplie d'un gaz inerte d'hélium ou d'argon (fig. 2.3 a) Journet et Ebbesen, (1997, 1999).

La cathode est composée d'un barreau de graphite fixe tandis que l'anode est constituée d'un barreau de graphite mobile en translation de manière à maintenir une distance anode-cathode constante d'environ 1 cm.

Entre ces électrodes, une tension de 20 à 35 V est appliquée pour des courants allant de 50 À 120 A. Il se forme alors un plasma dont la température peut atteindre 6000 K dépassant largement la température de sublimation du carbone.

L'ensemble est ensuite refroidi par un fort gradient thermique. Après la synthèse, un dépôt est formé sur la cathode, composé principalement de nanotubes de carbone multi parois et de nanoparticules. Le dépôt est essentiellement formé de nanotubes mono parois qui sont le plus souvent assemblés en faisceau et parfois isolés.

Sa principale limite repose sur une trop importante présence d'impuretés (carbone amorphe, coques carbonées, particules métalliques,...) dans les échantillons.

Avec **la méthode d'ablation laser**, Thess (1996), il est possible de synthétiser des nanotubes par vaporisation de carbone à l'aide d'un laser (fig. 2.11 b). Pour ce faire, une cible en graphite est introduite dans un tube en quartz, préalablement mis sous vide et soumise à un flux de gaz neutre. La sublimation du carbone à des températures supérieures à 3000 °C est obtenue par un faisceau laser focalisé balayant la surface de la cible de façon homogène, tandis que la température du tube du réacteur est maintenue à 1200 °C, Guo (1995).

L'avantage de cette méthode est de produire une grande quantité de nanotubes avec des rendements très élevés (70 à 90 % de la masse de graphite initiale est convertie en nanotubes par l'Université de Rice).

Les nanotubes obtenus sont très propres (non recouverts d'une couche de carbone amorphe) et présentent une distribution en diamètre remarquablement uniforme. Les principaux inconvénients sont essentiellement le coût et là aussi la présence d'espèces carbonées autres que des nanotubes.

**La méthode CVD**, Dai, Cheng, Kong, Nikolaev et Colomer (1996, 1998, 1999, 2000), est une technique moyenne température adaptée des méthodes catalytiques ou pyrolytiques traditionnellement utilisées pour la synthèse des fibres de carbone.

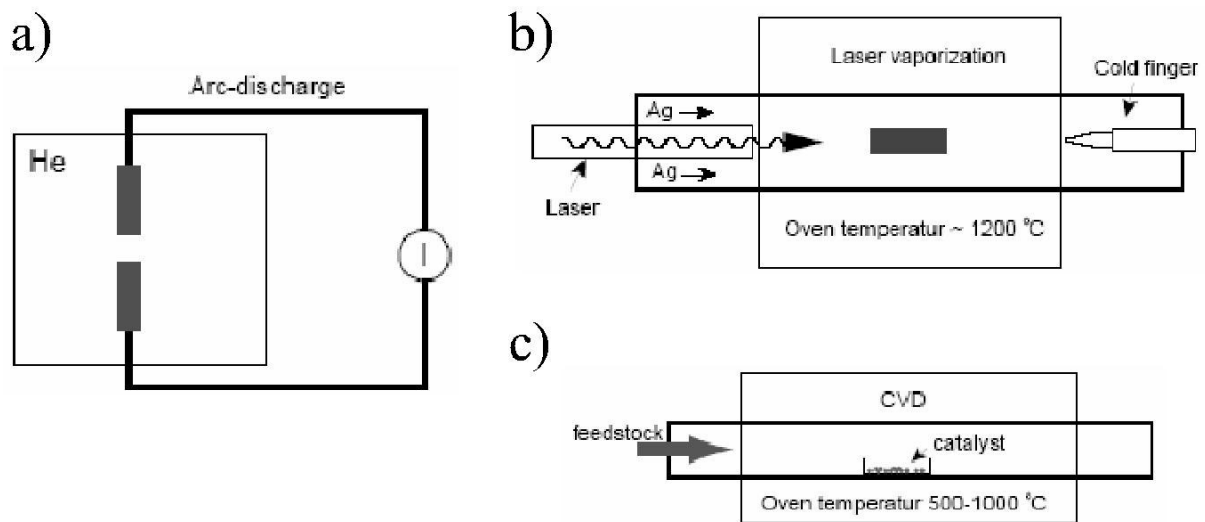
Le principe de cette méthode est basé sur la décomposition d'un gaz carboné à la surface de nanoparticules d'un catalyseur métallique dans un four porté à une température comprise entre 500 °C et 1200 °C, suivant la nature du gaz. Le carbone libéré par la décomposition du gaz précipite ensuite à la surface de la particule et cette condensation aboutit à la croissance de structure tubulaires graphitiques.

## Chapitre II: Généralités sur les nanostructures

Le gaz carboné peut être le monoxyde de carbone, un hydrocarbure (acétylène, méthane,...), ou un alcool, Maryama (2002). Le catalyseur métallique est un métal de transition (Fe, Ni, Co, ...).

Le principal avantage des méthodes à arc électrique et à ablation laser est la température de synthèse élevée, qui conduit à une très bonne cristallinité des nanotubes synthétisés. Actuellement, cette méthode, plus facile à transposer à l'échelle industrielle, est la plus employée pour la production commerciale de nanotubes mono parois.

De plus, les nanotubes obtenus par cette méthode présentent des caractéristiques géométriques (longueur, diamètre) plus uniformes, ce qui est un avantage. Un autre avantage important de la méthode CVD, est la synthèse localisée des nanotubes directement sur des substrats plats « prêt à l'emploi », à partir de catalyseurs métalliques préalablement déposés à la surface de celui-ci. LEFEVRE, R., (2005)



**Figure II.10.** Schéma de principe des trois principales méthodes de synthèses des nanotubes de carbones. Sublimation d'une cible de graphite par les méthodes de l'arc électrique (a) et de l'ablation laser (b). Décomposition catalytique d'hydrocarbure, méthode CVD (c).

### II.8. Applications des nanotubes de carbone

Du fait de leurs propriétés exceptionnelles, Les nanotubes de carbone recèlent de potentialités très diverses et leurs utilisations ouvrent de nombreuses perspectives.

L'application la plus directe envisagée consiste à les utiliser comme additifs pour polymères (thermoplastiques, thermodurcissables et élastomères). Les propriétés spécifiques des nanotubes de carbone peuvent ainsi être transposées d'électrons semblent parfaitement adoption inter-tubulaire) ainsi qu'entre les dans des matrices, à condition d'assurer une bonne dispersion de l'additif dans le composite.

Il est alors possible de choisir d'apporter une propriété bien précise des nanotubes (conductivité thermique ou électrique, renforcement mécanique, etc.) ou, au contraire, une multifonctionnalité. Des matériaux composites haute performance ou des polymères conducteurs peuvent ainsi être élaborés

## *Chapitre II: Généralités sur les nanostructures*

---

trouvant leurs applications dans l'automobile (peintures conductrices évitant l'emploi de solvants polaires), l'aéronautique (ailes d'avions, trains d'atterrissage des hélicoptères, etc. la défense, les équipements sportifs (raquettes de tennis, vélos, kayaks, clubs de golf, etc.), la médecine, les textiles etc.

Leurs propriétés électriques semblent en faire un matériau de choix pour l'électronique, la recherche de la miniaturisation étant dans ce domaine un souci primordial.

### **II.9. Inconvénients des Nanotubes:**

Les nanotubes de carbone ont des propriétés qui suscitent beaucoup d'espoirs industriels, mais outre leur coût élevé, en début et fin de cycle de vie notamment, ou en cas de dispersion accidentelle, les nanotubes, comme d'autres nano molécules, présentent des risques de pollution nanométrique.

Une étude publiée le 4 avril 2010 dans la revue Nature Nanotechnologies indique que les nanotubes de carbone ne seraient non pas bio persistants, comme on le pensait jusqu'alors, mais qu'ils seraient plutôt dégradés par une enzyme, myeloperoxidas qui s'attaque à ces nanotubes. Elle est produite par les neutrophiles, qui constituent la majorité des globules blancs.

Il est important de savoir que grâce à leur petite taille, les nanomatériaux peuvent facilement pénétrer dans le corps humain. En effet, ce dernier a plusieurs entrées, notamment la peau et les voies respiratoires.

C'est pour cela que le corps humain est exposé aux dangers. La peau n'est plus une barrière efficace contre bon nombre de corps étrangers. Même si les avancées apportées par les nanotechnologies dans le domaine de la santé sont très prometteuse, il y a beaucoup d'inquiétudes concernant les nanomatériaux.

### **II.10. Conclusion**

Ce chapitre, nous a permis de constituer une recherche bibliographique sur les nanotubes de carbone de montrer l'importance de ces nano-objets tant dans le domaine des nanosciences que dans leur côté applicatif. Leurs dimensions particulières ainsi que leurs propriétés diverses ouvrent à l'industrie des perspectives d'innovations nombreuses et prometteuses. Vu les différentes propriétés d'un nanotube de carbone, il est important de noter que la structure géométrique du nanotube a une grande influence sur ses propriétés électroniques. En raison des propriétés physiques remarquables, Les nanotubes de carbone font l'objet d'une attention particulière.

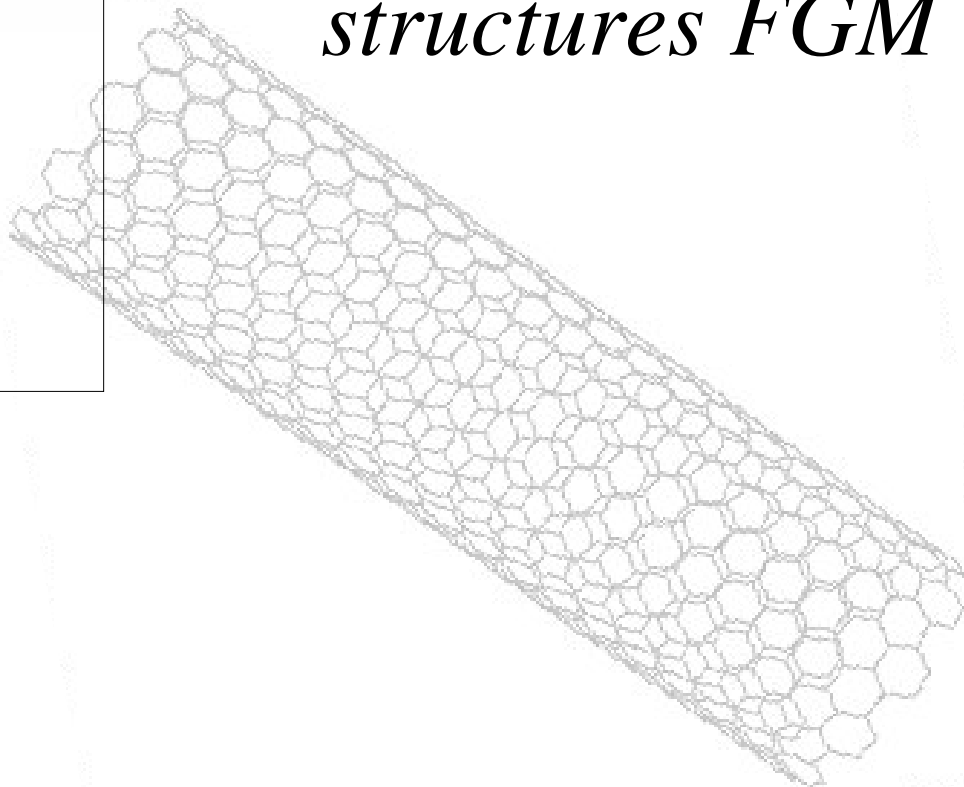
Mais malgré les progrès significatifs dans ce domaine, il reste encore beaucoup à faire pour arriver à une croissance contrôlée, sélective et réalisable à basse température. Une meilleure compréhension des mécanismes fondamentaux qui concernent la croissance de ces nanostructures est également fondamentale. La multitude des méthodes de synthèse ainsi que les conclusions souvent relatives aux procédés utilisés rendent la tâche plus difficile.

CHAPITRE

03

---

*Les Théories des  
structures FGM*



## ***Chapitre III: Les Théories des structures FGM***

---

### **III.1. Introduction :**

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports et le génie civil. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...).

La plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation. L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords. Il est complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développés dans la littérature.

### **III.2. Historique des théories des plaques:**

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh en (1877) Timoshenko., (1959), Timoshenko He.,(2001) et Chi.,(2006) en (1921), Reissner Reddy., (1997) en (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Bakhti., K, (2014)

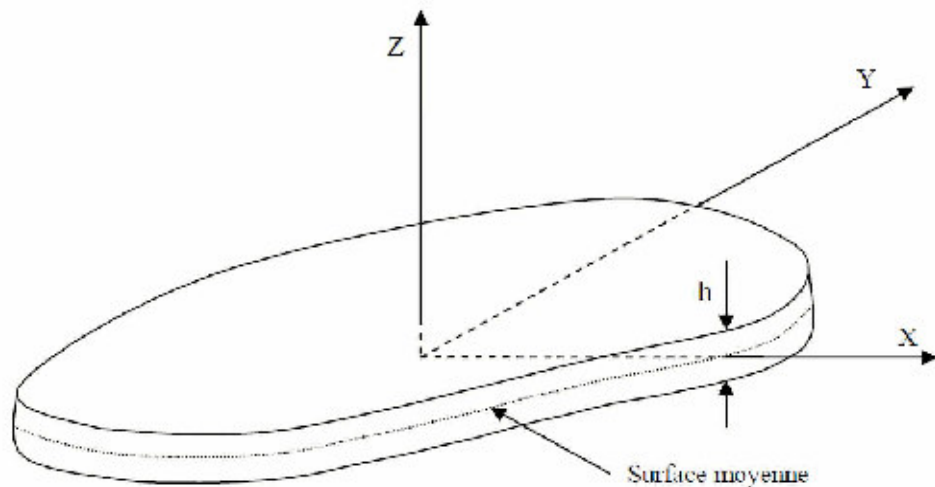
Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D). Ait Atmane., H (2011)

### **III.3. Définition d'une plaque :**

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions et l'axe est perpendiculaire aux faces. Tebboune., W (2015) Figure III.1. On peut définir :



- Le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(O, x, y)$ , d'équation  $z = 0$
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .
- On appelle  $(h)$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .



**Figure III.1.** Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

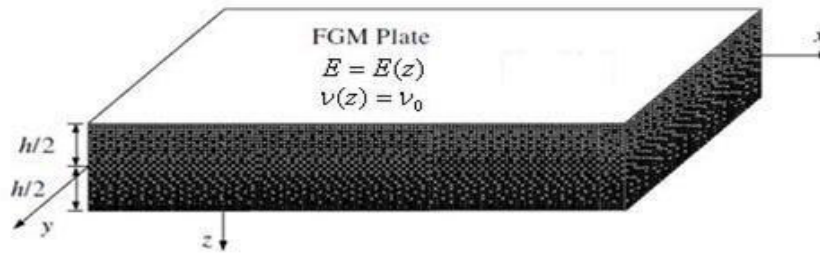
### III.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume.

Pour décrire les fractions de volume la plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, elles sont également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. KACI., A, (2012)



**Figure III.2.** Les dimensions de la plaque (P-FGM)

Les coordonnées (x) et (y) définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe (z) est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit :  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), de la fonction exponentielle (E-FGM) de avec la fonction sigmoïde (S-FGM). Houari, M.S.A., (2011)

### III.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

Le constituant céramique des matériaux fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique.

Le constituant métal ductile, d'autre part, empêche la fracture causée par des contraintes dues au gradient de température élevée dans une période de temps très courte.

En outre, un mélange d'une céramique et un métal ayant une fraction volumique variant de façon continue peuvent facilement être fabriqué. Nous supposons que le module d'élasticité change suivant l'épaisseur dans la direction z, tandis que le coefficient de poisson est supposé constant SUGANO., (1990), HSU., (1984). Les propriétés matérielles des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont introduites suivant PRAVEEN. et REDDY., (1998).

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

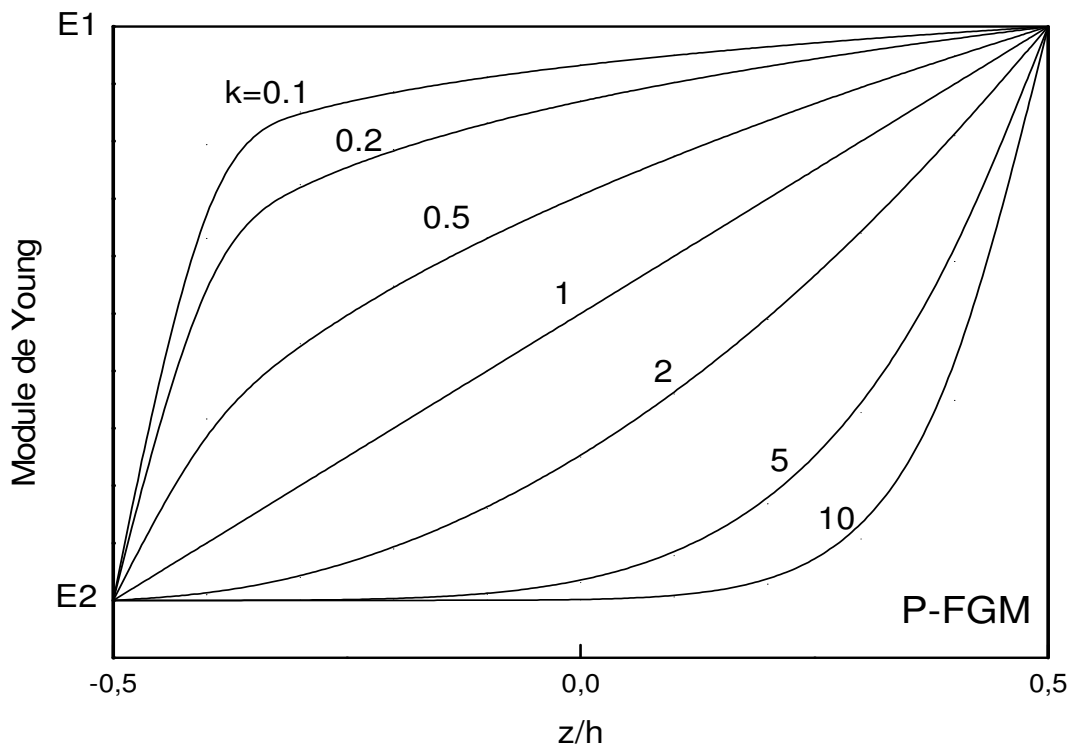
$$V(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^k \quad \text{(III.1)}$$

## Chapitre III: Les Théories des structures FGM

Ou ( $k$ ) est un paramètre matériels et ( $h$ ) est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $v(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque (P-FGM) peuvent être déterminées par la loi des mélanges [35] :

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2)V(z) \quad (\text{III.2})$$

Ou ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) sont respectivement les modules de Young de la surface du céramique (surface supérieure  $z = h/2$ ) et de la surface du métal (surface inférieure  $z = -h/2$ ) de la plaque (FGM). La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représenté sur Figure III.3



**Figure III.3.** Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM

On remarque bien que le module de Young change et diminue rapidement dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque (pour  $k > 1$ ), et augmente rapidement en allant vers l'extrémité supérieure (pour  $k < 1$ ).

Lorsque ( $k = 1$ ), la variation du module de Young devient linéaire.

On constate que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sur, le pourcentage de la céramique dans la plaque.

## Chapitre III: Les Théories des structures FGM

---

La plaque devient de faible résistance si son module de Young est faible, c'est le résultat de la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal.

Comme il est présenté sur la figure, le changement de la valeur de ( $k$ ) produit un nombre infini de distribution de composition. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemple, les propriétés matérielles effectives ( $S$ ) de la couche de (FGM), comme le module de Young  $E$ , et la densité et le coefficient de poisson peuvent alors être exprimées comme suit :

$$S = \sum_{j=1}^n S_j V_j \quad (\text{III.3})$$

( $S_j$ ) et ( $V_j$ ) sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche ( $j$ ), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1}^n V_j = 1 \quad (\text{III.4})$$

### III.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais changent rapidement Yung., (1996).

Par conséquent, Chung et Chi Chun., (2001) ont défini la fraction de volume de la plaque (FGM) en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$\begin{aligned} V_1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \\ V_2(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

En utilisant la loi de mélange, le module de YOUNG de la plaque S-FGM peut être calculé par :

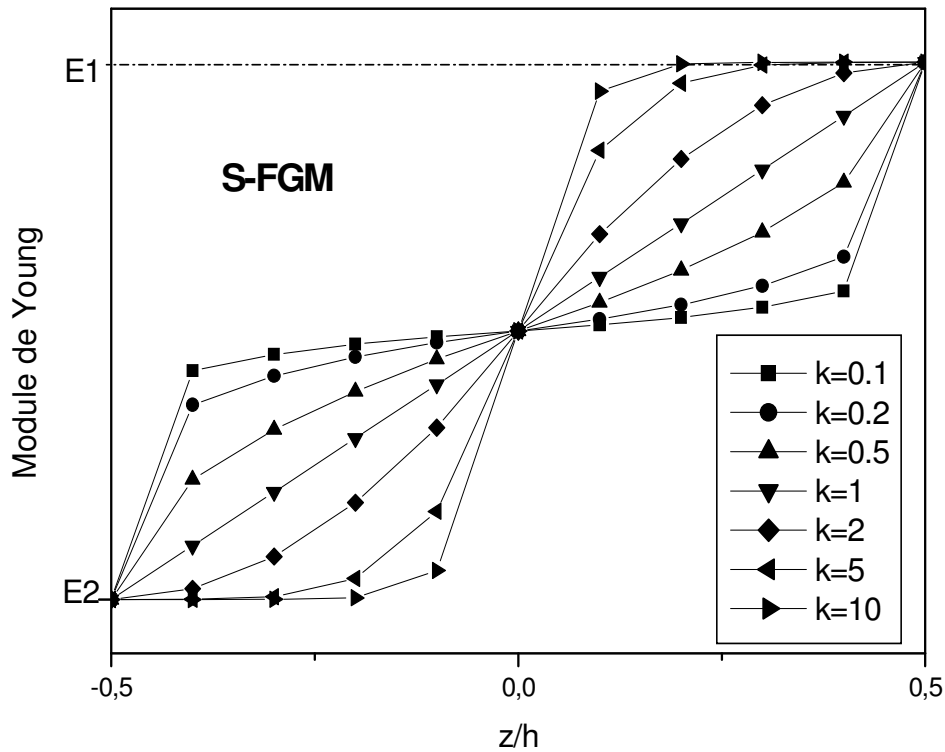


Figure III.4. Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM

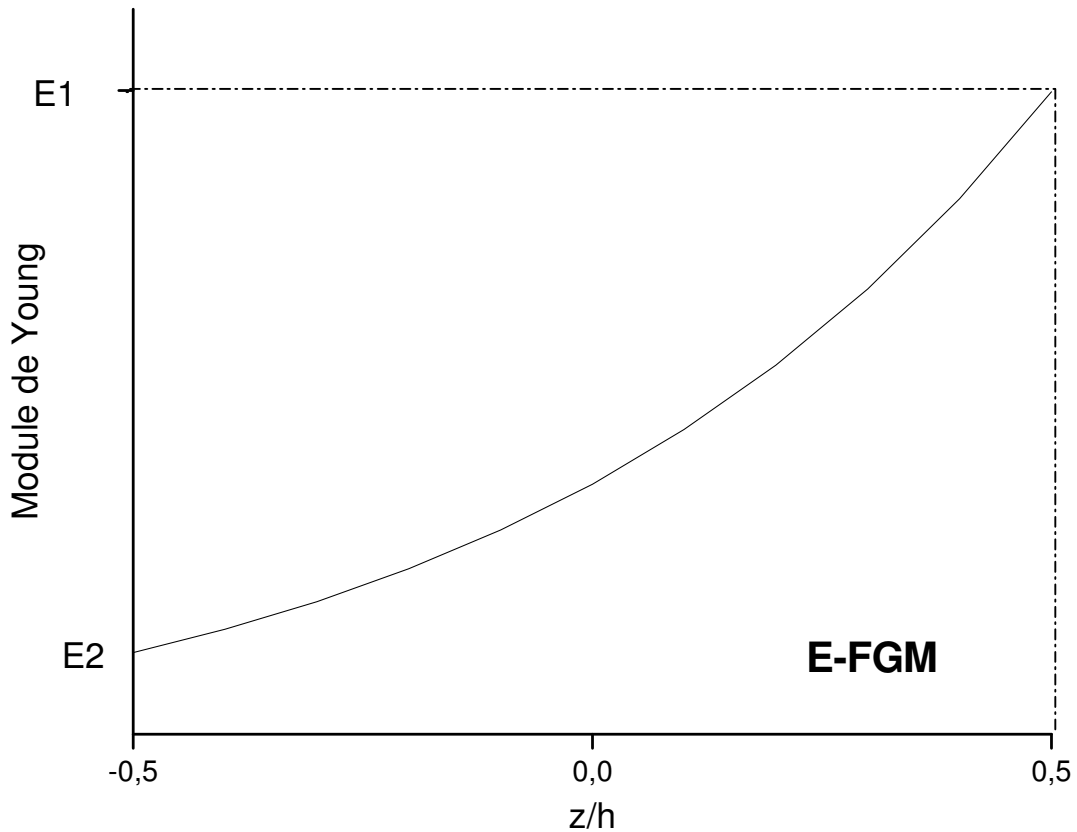
### III.4.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par Dela., (1983) :

Avec :

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (III.6)$$

Avec  $(A = E_2)$  et  $B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$



**Figure III.5.** Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

On remarque que l'augmentation du module de Young suit l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

### III.5. Les théories de déformation des plaques:

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur.

Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques FGM, seront exposées.

### **III.5.1. Théorie classique des plaques (CPT):**

Kirchhoff (1850) a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques ». On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation Figure III.6., ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger Timoshenko., (1959), Reddy., (1997), Reddy.,(1999),

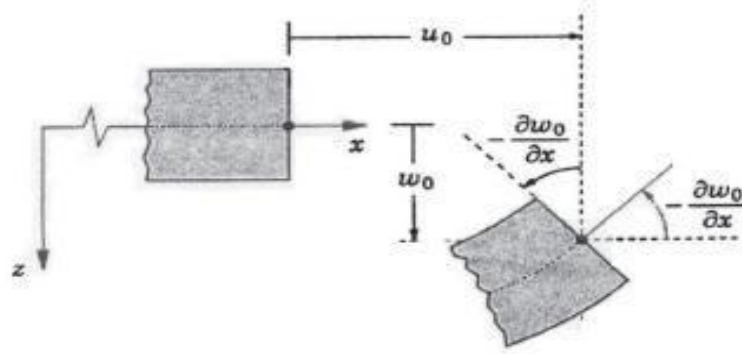
En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\w(x, y, z) &= w_0(x, y),\end{aligned}$$

$(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements le long des coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point du plan moyen (plan  $z = 0$ ).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation normale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan; ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces Ashton., (1970), Timoshenko et al., (1959)



**Figure III.6.:** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

### III.5.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) :

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko., (1959), Ciarlet., (1997) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff).

Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Figure III.7.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a étendue la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Cela oblige l'introduction d'un facteur de correction.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans Reissner., (1945), Mindlin., (1951). Ainsi que Timoshenko et al., (1959), Reddy (1997), Reddy., (1999).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{III.7}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membranes et les rotations autour des axes (x) et (y) respectivement.

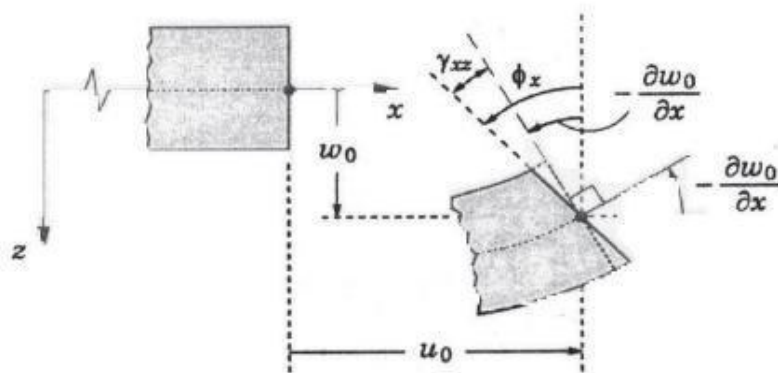


Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement. Ce facteur est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, pour cette raison le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est appelé modèle ou poutre de Timoshenko.



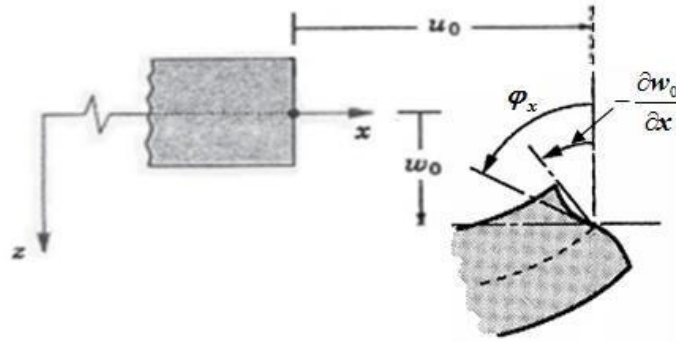
**Figure III.7:** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

### III.5.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) :

Contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur.

Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction.

Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al., (1949) ; Naghdi., (1957) ; Reissner., (1975) ; Reddy, (1984); Kan et Swaminathan., (2002) ).



**Figure III.8.** *Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy).*

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2<sup>ème</sup> ordre, 3<sup>ème</sup> ordre, voire plus).

Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

Le champ de déplacement est donné comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membranes et les rotations autour des axes (x) et (y) respectivement.

$(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $\psi(z)$  une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant  $\psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\psi(z) = z$ .

## Chapitre III: Les Théories des structures FGM

---

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, (1997), (1999)) sont obtenus par :

$$\psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{III.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Touratier (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale.

Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous:

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.11})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al., (2003) est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{III.12})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al., (2010) est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh[(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh[(\pi/2) - 1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{III.13})$$

### III.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, les différentes lois de mélange ont été présentées. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

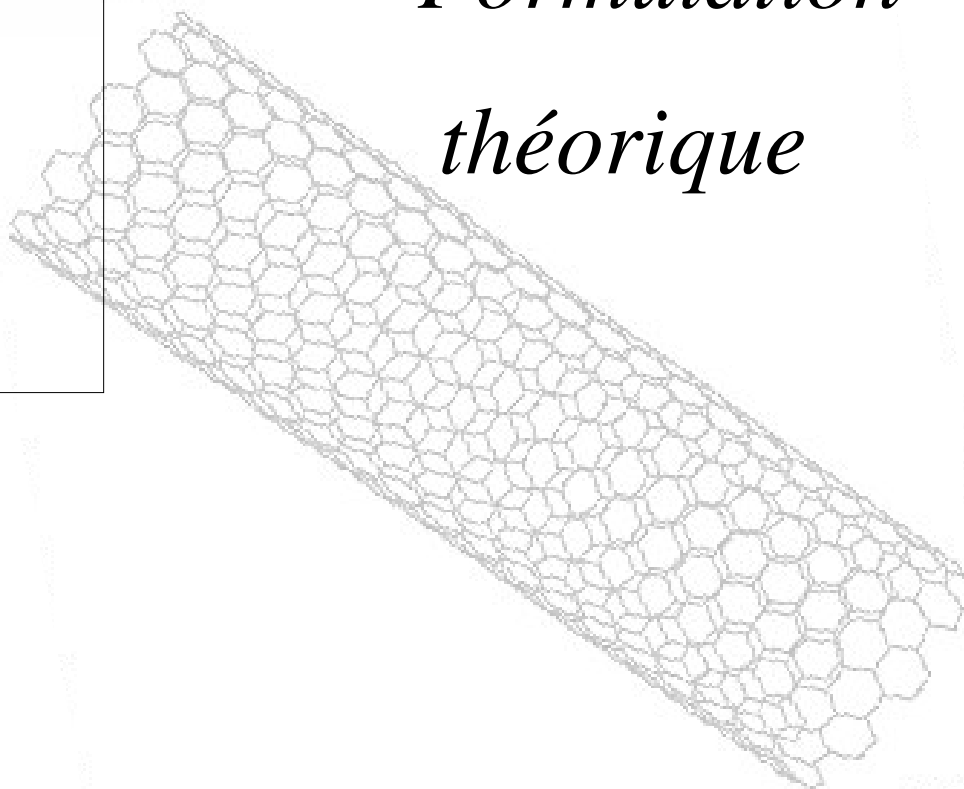
Suite à cela, nous avons présenté différentes théories de déformation des plaques (applicables également aux poutres) en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les plus utilisées telle que celle de Reddy et enfin les plus récentes.

# CHAPITRE

04

---

## *Formulation théorique*



### ***IV.1. Etude du comportement des plaques sous flexion et vibration libre***

Dans cette partie du chapitre on va étendre la théorie proposée par Shimpi et al. (2007) pour la flexion et la vibration des plaques à gradient de propriété FG. Contrairement à la conventionnelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) a quatre inconnus.

En général, les propriétés des matériaux de plaques graduellement fonctionnelles n'ont pas de symétrie par rapport au plan médium de la plaque. Donc, les équations de membrane et de flexion d'une telle plaque sont couplées. Morimoto et al. (2006), Abrate (2008), Zhang et Zhou (2008), Ould Larbi et al. (2013), Bousahla et al. (2014), Khalfi et al. (2014), Fekrar et al. (2014), Al-Basyouni et al. (2015) et Bourada et al. (2015) ont montré qu'il n'y a pas de couple membrane-flexion dans les équations consécutives si la surface référence est correctement choisie.

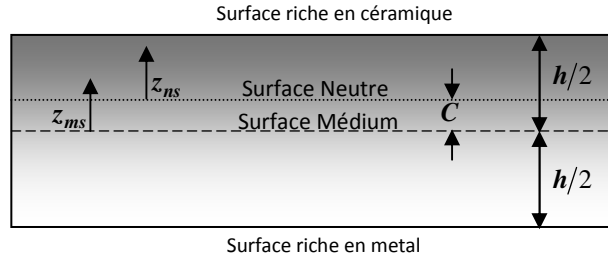
D'où, pour simplifier les équations gouvernantes pour la plaque (FG) dans le présent travail, le système de coordonnées est localisé à la surface neutre physique de la plaque. La présente théorie du premier ordre de déformation de cisaillement basée dans la position exacte de la surface neutre et avec le principe de Hamilton sont employés pour déterminer les équations de mouvement de la plaque FG.

Les solutions analytiques de flexion et de vibration libre ont été déterminées. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie présente.

#### **IV.1.1. Formulations théoriques:**

Considérant une plaque rectangulaire en FGMs d'épaisseur ( $h$ ), de longueur ( $a$ ), et largeur ( $b$ ), mentionné par rapport aux coordonnées cartésiennes rectangulaires ( $x, y, z$ ). Le plan ( $x - y$ ) est pris pour être le mi-plan de la non-déformé du plan de la plaque et l'axe  $z$  est perpendiculaire au plan ( $x - y$ ).

En raison de l'asymétrie des propriétés des matériaux des plaques FG par rapport au mi-plan, les équations de membrane-flexion sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est convenablement choisie dans la direction d'épaisseur de la plaque FG afin d'être la surface neutre, les propriétés de la plaque FG devient symétrique par rapport à elle. Pour déterminer la position de la surface neutre des plaques FG, on considère deux plans de référence pour la mesure de ( $z$ ), à savoir, ( $z_{ms}$ ) et ( $z_{ns}$ ) mesuré à partir de la surface du milieu et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme le montre la Figure 1.



**Fig.IV. 1:** la position de la surface médium et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.

La fraction volumique de céramique ( $V_C$ ) est exprimée en fonction des coordonnées ( $z_{ms}$ ) et ( $z_{ns}$ ) tel que

$$V_C = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (1)$$

Ou ( $k$ ) est l'indice de loi de puissance, qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro et le paramètre ( $C$ ) est la distance entre la surface neutre et la surface médiane. Les propriétés matérielles non-homogènes des matériaux fonctionnellement gradués d'une poutre peuvent être obtenues à partir de la loi de Voigt de mélange (Suresh et al. (1998), Boudarba et al. (2013), Tounsi et al. (2013), Ait Amar Meziane et al. (2014), Belabed et al. (2014), Hebali et al. (2014), Mahi et al. (2015), Zidi et al. (2014)). Ainsi, en utilisant Equation (1), les propriétés matérielles non-homogènes de la plaque (FG), ( $P$ ), en fonction de l'épaisseur des coordonnées, deviennent

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (2)$$

( $P_M$ ) et ( $P_C$ ) sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement. Dans le présent travail, Nous supposons que le module de Young ( $E$ ) et la densité massique ( $\rho$ ) sont exprimées dans Equation (2), tant dit que le module de Poisson( $\nu$ ), est Considère pour être une constant à travers l'épaisseur, Sallai et al. (2009). Basé sur le concept de surface neutre établie par Ould Larbi et al. (2013) Et Bourada et al. (2014), on donne la position de la surface neutre de la plaque FG comme suit :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (3)$$

Il est Clair que le parametre ( $C$ ) est nul pour le cas des plaques isotopiques homogènes.

### IV.1.1.1. hypothèses

Les principales hypothèses de la présente théorie sont les suivantes:

- (i) L'origine du système de coordonnées Cartésien est pris à la surface neutre de la plaque FG.
- (ii) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, donc, les déformations engendrées sont infinitésimales.
- (iii) La contrainte normale transversale ( $\sigma_z$ ) est négligeable par rapport aux contraintes longitudinales ( $\sigma_x$ ) et ( $\sigma_y$ ).
- (iv) Cette théorie suppose que la contrainte de cisaillement transversale est constante et qu'elle nécessite un facteur de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de limites sur la surface inférieure et supérieure de la plaque.

### IV.1.1.2. Cinématique:

En se basant sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu comme suit:

$$u(x, y, z_{ns}, t) = u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (4a)$$



$$v(x, y, z_{ns}, t) = v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4b)$$

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w(x, y, t) \quad (4c)$$

$(u, v, w)$  sont les déplacements dans les directions  $(x, y, z)$

$(u_0)$  et  $(v_0)$  sont les déplacements de la surface neutre.  $(\Phi)$  Est une fonction de coordonnées  $(x, y)$  et le temps  $(t)$ .

Les déformations associées aux déplacements dans Equation (4) devient alors:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Les relations linéaires constitutives de plaque (FG) peuvent être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{And} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s Q_{44} & 0 \\ 0 & k_s Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement.  $(k_s)$  est le facteur de correction de cisaillement qui est analogue au facteur de cisaillement proposé par Mindlin (1951).

En utilisant les propriétés matérielles définies dans Equation (2), les coefficients de rigidité,  $(Q_{ij})$ , peuvent être exprimé par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad (8a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad (8b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}, \quad (8c)$$

### IV.1.1.3. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement. Le principe peut être exprimé en forme analytique comme suit (Reddy JN (2002), Draiche et al. (2014), Ait Yahia et al. (2015) et Nedri et al.(2014))

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (9)$$

$(\delta U)$  est l'énergie de déformation virtuelle;  $(\delta V)$  est l'énergie potentielle virtuelle; et  $(\delta K)$  est la variation d'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculer par :

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz_{ns} \\
 &= \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial x \partial y} + Q_{yz} \frac{\partial \delta (w - \Phi)}{\partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta (w - \Phi)}{\partial x} \right\} dA
 \end{aligned} \tag{10}$$

$(N, M, Q)$  sont des résultantes de contrainte définies par :

$$(N_i, M_i) = \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} (1, z_{ns}) \sigma_i dz_{ns}, \quad (i = x, y, xy) \text{ and } (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz_{ns}. \tag{11}$$

La variation de l'énergie potentielle des charges extérieurs appliqués peut être exprimés par:

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \tag{12}$$

$q$  est la charge transversale appliquée.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z_{ns}) dA dz_{ns} \\
 &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w} \delta \dot{w}] \right. \\
 &\quad \left. - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
 &\quad \left. + I_2 \left( \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\Phi}}{\partial y} \right) \right\} dA
 \end{aligned} \tag{13}$$

## *Chapitre IV: Analyse de la réponse des structures multi échelles*

---

La convention de l'indice du point indique la différenciation par rapport au variable de temps  $t$ ;  $\rho(z_{ns})$  est la masse volumique; et  $(I_0, I_1, I_2)$  sont les moments d'inertie définie comme suit

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (1, z_{ns}, z_{ns}^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad (14)$$

Substituant les relations pour  $(\delta U, \delta V, \delta K)$  des Equations (10), (12), et (13) dans Equation (9) en intégrant par partie, et en mettant les coefficients  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta \Phi, \text{ et } \delta w)$  nuls séparément, Les équations de mouvement de la plaque sont obtenues comme suit

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial x} \quad (15a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial y} \quad (15b)$$

$$\delta \Phi : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{\Phi} \quad (15c)$$

$$\delta w : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = I_0 \ddot{w} \quad (15d)$$

En substituant Equation (5) dans Equation (7) Et les résultats ultérieurs dans Equation (11), les résultantes de contraintes sont obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k \end{Bmatrix}, \quad Q = A^s \gamma, \quad (16)$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, \quad (17a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^t, \quad (17b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (17c)$$

$$Q = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (17d)$$

( $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$ , etc..) sont les termes de matrice de rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} \\ A_{12} & D_{12} \\ A_{66} & D_{66} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} Q_{11}(1, z_{ns}^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (18a)$$

$$(A_{22}, D_{22}) = (A_{11}, D_{11}), \quad (18b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = k_s \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} dz_{ns}, \quad (18c)$$

En substituant Equation (16) dans Equation (15), les équations de mouvement peuvent être exprimé en terme de déplacement ( $u_0, v_0, \Phi, w$ ) comme suit

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 = I_0\ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial x} \quad (19a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 = I_0\ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial y} \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} -D_{11}d_{1111}\Phi - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}\Phi - D_{22}d_{2222}\Phi - A_{55}^s d_{11}(w - \Phi) \\ - A_{44}^s d_{22}(w - \Phi) = I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{\Phi} \end{aligned} \quad (19c)$$

$$A_{55}^s d_{11}(w - \Phi) + A_{44}^s d_{22}(w - \Phi) + q = I_0 \ddot{w} \quad (19d)$$

Ou ( $d_{ij}$ ) et ( $d_{ijlm}$ ) sont des opérateurs différentiels définis par:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (20)$$

Quand l'effet de la déformation de cisaillement transversale est négligé ( $w = \Phi$ ), Equation (19) donne les équations de mouvement des plaques basé sur la théorie classique de plaque et le concept physique de surface neutre.

#### **IV.1.2. Solution analytique pour l'appui simple**

Les plaques rectangulaires sont généralement classifiées conformément au type de d'appui utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte d'Eqs. (19a-d) pour le cas de plaque FG

simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de facette pour la présente théorie:

$$v_0 = w = \Phi = N_x = M_x = 0 \text{ à } x=0, a \quad (21a)$$

$$u_0 = w = \Phi = N_y = M_y = 0 \text{ à } y=0, b \quad (21b)$$

D'après la procédure de solution de Navier, la forme de la solution suivante pour  $(u_0, v_0, \Phi)$  et  $(w)$  satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ \Psi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$(U_{mn}, V_{mn}, \Psi_{mn}, W_{mn})$  sont arbitrairement des paramètres a déterminer,  $(\omega)$  est la fréquence propre associé au modes propres  $(m, n)$ , et  $\lambda = m\pi/a$ ,  $\mu = n\pi/b$  et  $i = \sqrt{-1}$ .

Pour le cas d'une distribution de charge sinusoïdale, nous avons

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \quad (23)$$

$(q_0)$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Substituant Equation (22) dans Equation (19), les solutions analytiques peuvent être obtenues sous la forme

$$([C] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{P\}, \quad (24)$$

$\{\Delta\} = \{U, V, \Psi, W\}^t$ , et  $[C]$  et  $[M]$  Sont les matrices symétriques données comme suit

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= 0 \\ a_{14} &= 0 \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \\ a_{24} &= 0 \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + A_{55}\lambda^2 + A_{44}\mu^2) \\ a_{34} &= A_{55}\lambda^2 + A_{44}\mu^2 \\ a_{44} &= -A_{55}\lambda^2 - A_{44}\mu^2 \\ m_{11} &= m_{22} = -I_0 \\ m_{13} &= \lambda I_1 \\ m_{23} &= \mu I_1 \\ m_{33} &= -I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} &= -I_0 \end{aligned} \quad (26)$$



Les composantes du vecteur de force général  $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^t$  sont donnée par

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= 0 \\ P_3 &= 0 \\ P_4 &= -q_0 \end{aligned} \tag{27}$$

### IV.2. Etude du flambement des nano-poutres

Cette partie du chapitre a pour objectif d'étudier le comportement de post-flambement non-linéaire statique des poutres à l'échelle nano selon la théorie d'ordre zéro non-local de déformation en cisaillement (ZSDT). Le ZSDT a été d'abord développé par Shimpi (1999) pour des plaques isotropiques et ainsi il semble être important d'étendre cette théorie aux nanostructures en utilisant la théorie d'élasticité non locale d'Eringen.

Le ZSDT représente la déformation en cisaillement transversal à l'aide forces de cisaillement au lieu du déplacement rotatif comme l'implique les théories de déformation existantes.

Le ZSDT contient les mêmes inconnus que dans la théorie des poutres de Timoshenko (TBT), mais elle satisfait les conditions aux limites de traction en haut et en bas des surfaces de la poutre sans exiger aucun facteur de correction de cisaillement.

Les équations d'équilibre sont obtenues en employant le principe des travaux virtuels avec la théorie de Von-Karman pour de grandes déflexions. Les résultantes de contrainte sont reformulées pour considérer le petit effet d'échelle selon la théorie d'élasticité non-locale d'Eringen.

La charge de flambement critique et l'amplitude de la réponse non-linéaire statique dans l'état de post-flambement pour une poutre avec des conditions aux limites simplement appuyée et encastree-encastree sont déterminées. Les effets des paramètres différents comme le paramètre non-local et le paramètre du rapport longueur à la hauteur sur la charge de flambement critique et la réponse de post-flambement sont analysés.

Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions existantes pour vérifier l'exactitude de la théorie présente dans la prévision de la charge de flambement critique et la réponse de post-flambement de nanopoutres.

#### IV.2.1. Formulations théoriques

##### IV.2.1.1. Cinématique :

Le champ de déplacement du ZSDT est adopté et basé en supposant que le contrainte de cisaillement transversal varie de façon parabolique dans la profondeur de la poutre de telle façon qu'elle disparaît sur les surfaces de bas et de haut. Par conséquent, il n'y a aucun besoin d'utiliser le facteur de correction de cisaillement. En se basant sur cette hypothèse, le champ de déplacement correspondant peut être obtenu (Hadji et al., 2015)

$$\begin{aligned}u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x(x) \\v(x, z) &= 0 \\w(x, z) &= w_0(x)\end{aligned}\tag{1}$$

## Chapitre IV: Analyse de la réponse des structures multi échelles

$(u_0)$  et  $(w_0)$  sont les déplacements d'un point dans le plan-médium de la poutre dans l'axe des directions  $(x)$  et  $(z)$ , respectivement;  $(h)$  est l'épaisseur de la poutre;  $(Q_x)$  est la force transversale de cisaillement; et  $(\lambda_x)$  est un inconnu constant déterminer en se basant sur la définition de la force transversale de cisaillement en tant que

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad (2)$$

Le type de Von-Karman- de non-linéarité géométrique est pris en considération dans les relations de contrainte de déplacement qui sont données comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x + f \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \text{ et } \gamma_{xz} = g \frac{Q_x}{\lambda_x} \quad (3)$$

$(\varepsilon_x^0)$  et  $(k_x)$  sont, respectivement, la déformation longitudinale non linéaire et la courbure données par :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \text{ et } k_x = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (4a)$$

et

$$f = \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \text{ et } g = \frac{df}{dz} = \frac{3}{2h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (4b)$$

### IV.2.1.2. Les Relations constitutive

Eringen a d'abord proposé la théorie d'élasticité non-locale (1983) et il a supposé que la contrainte à un point de référence est une fonction du champ de contrainte à chaque point dans le corps.

On donne la formule différentielle de la relation constitutive non-locale proposée par Eringen (1983) pour la contrainte normale  $(\sigma_x)$  et la contrainte de cisaillement  $(\tau_{xz})$  par:

$$\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E \varepsilon_x \quad (5a)$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} = G \gamma_{xz} \quad (5b)$$

( $E$ ) et ( $G$ ) sont le module d'Young et le module de cisaillement transversal des nanopoutres, respectivement;  $\mu = (e_0 a)^2$  est le parametre non-local qui prend en compte l'effet de l'échelle, ( $e_0$ ) est une constante appropriée à chaque matériau, ( $a$ ) est une longueur caractéristique interne (par exemple longueur de liaison C-C). Quand le parametre non-local est pris en mettant ( $\mu = 0$ ), on obtient la relation constitutive de la théorie locale (le modèle local).

#### **IV.2.1.3. Les équations d'équilibre**

Le principe de déplacements virtuels est employé en ceci pour obtenir les équations d'équilibre. Le principe peut être présenté en forme analytique comme :

$$\int_0^L \int_A (\delta U + \delta V) dA dx = 0 \quad (6)$$

( $\delta U$ ) est l'énergie de déformation virtuelle; ( $\delta V$ ) est l'énergie potentielle virtuelle du travail effectué par les charges externes appliquées. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \left( N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x + P_x \frac{d\delta Q_x}{\lambda_x dx} + R_x \frac{\delta Q_x}{\lambda_x} \right) dx \end{aligned} \quad (7)$$

( $N_x$ ,  $M_x$ ,  $P_x$  et  $R_x$ ) sont des résultantes de contrainte définies par :

$$(N_x, M_x, P_x) = \int_A (1, z, f) \sigma_x dA \quad \text{et} \quad R_x = \int_A g \tau_{xz} dA \quad (8)$$

## *Chapitre IV: Analyse de la réponse des structures multi échelles*

---

La variation de l'énergie potentielle des charges extérieures appliquées peut être exprimée par:

$$\delta V = -\int_0^L N_0 \frac{d w_0}{dx} \frac{d \delta w_0}{dx} dx \quad (9)$$

( $N_0$ ) Est une charge compressive externe appliquée aux extrémités de la poutre.

Remplaçant les expressions de ( $\delta U$ ) et ( $\delta V$ ) des Equation (7) et (9) dans l'Equation (6) en intégrant par partie, et en mettant les coefficients ( $\delta w_0$ ) et ( $\delta Q_x$ ) nuls, les équations d'équilibres suivantes de la théorie de la poutre proposé sont obtenus :

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( N_x \frac{d w_0}{dx} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{dP_x}{dx} - R_x = 0 \quad (10c)$$

En remplaçant Eq. (3) dans Eq. (5) et les résultats ultérieurs dans Eq. (8), les résultantes de contrainte sont obtenues comme suit :

$$N_x - \mu \frac{d^2 N_x}{dx^2} = A_{11} \left[ \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d w_0}{dx} \right)^2 \right] \quad (11a)$$

$$M_x - \mu \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + D_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (11b)$$

$$P_x - \mu \frac{d^2 P_x}{dx^2} = -D_{11}^s \frac{d^2 w_0}{dx^2} + H_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (11c)$$

$$R_x - \mu \frac{d^2 R_x}{dx^2} = A^s \frac{Q_x}{\lambda_x} \quad (11d)$$

$$(A_{11}, D_{11}, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_A (1, z^2, z f, f^2) E dA, \quad A^s = \int_A g^2 G dA \quad (12)$$

Dans la lumière des Equations (4a) et (10a), Eq. (11a) Peut être exprimée en forme locale comme suit :

$$N_x = A_{11} \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \quad (13)$$

Résolvant Equation (10b) pour  $(d^2M_x/dx)$ , en substituant le résultat dans Equation (11b), en notant que  $(dN_x/dx=0)$ , nous obtenons la résultante de contrainte du moment non local comme suit:

$$M_x = -D_{11} \frac{d^2w_0}{dx^2} + \mu(N_0 - N_x) \frac{d^2w_0}{dx^2} + D_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (14)$$

Pour développer les équations d'équilibre en termes des composants de déplacement, nous pouvons utiliser Equation (14) et Equation (10b), et notant que  $(dN_x/dx=0)$ , nous obtenons l'équation d'équilibre de moment comme suit :

$$D_{11} \frac{d^4w_0}{dx^4} + (N_0 - N_x) \frac{d^2}{dx^2} \left( w_0 - \mu \frac{d^2w_0}{dx^2} \right) - D_{11}^s \frac{d^3Q_x}{\lambda_x dx^3} = 0 \quad (15)$$

En intégrant Equation (13) une fois par rapport à  $(x)$  et en mettant  $u(0) = u(L) = 0$  (c.a.l., les extrémités de la poutre ne se déplacent pas), on obtient:

$$N_x = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 dx \quad (16)$$

Substituant Equation (16) dans Equation (15), on obtient:

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \left( N_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( w_0 - \mu \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - D_{11}^s \frac{d^3 Q_x}{\lambda_x dx^3} = 0 \quad (17)$$

Pour exprimer la troisième équation d'équilibre en termes des déplacements, on résout Equation (10c) pour ( $P_x$ ) et on obtient:

$$\frac{dP_x}{dx} = R_x \quad (18)$$

En dérivant Equation (18) une fois par rapport à ( $x$ ) et substituent le résultat dans Equation (11c), On obtient :

$$P_x - \mu \frac{dR_x}{dx} = -D_{11}^s \frac{d^2 w_0}{dx^2} + H_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (19)$$

En Résolvant la susdite équation pour ( $P_x$ ), dérivant le résultat une fois par rapport à ( $x$ ), et substituant le résultat dans Equation (18), on obtient :

$$R_x - \mu \frac{d^2 R_x}{dx^2} + D_{11}^s \frac{d^3 w_0}{dx^3} - H_{11}^s \frac{d^2 Q_x}{\lambda_x dx^2} = 0 \quad (20)$$

Finalement, la susdite équation, à la lumière d'Equation (11d), peut être exprimé comme suit:

$$A^s \frac{Q_x}{\lambda_x} - H_{11}^s \frac{d^2 Q_x}{\lambda_x dx^2} + D_{11}^s \frac{d^3 w_0}{dx^3} = 0 \quad (21)$$

Finalement, on note qu'Equations (17) et (21) gouvernent la réponse non-linéaire non-locale des poutres soumises à une charge axiales externe.

#### **IV.2.2. Solutions analytiques :**

La solution analytique des Equations (17) et (21) pour la charge de post flambement critique et la réponse statique de post flambement de la poutre aux conditions aux limites simplement appuyées et encastées-encastées peut être élaboré.

**IV.2.2.1. Solutions analytiques pour les conditions aux limites simplement appuyées en extrémités**

Les conditions aux limites pour la poutre simplement appuyées sont :

$$w_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (22a)$$

$$Q_x(x) = b \cos \frac{\pi x}{L} \quad (22b)$$

Ou  $(a)$  et  $(b)$  sont des inconnus à déterminer. Il faut noter que  $(a)$  est la flèche statique maximale à la mi-longueur de la poutre. Substituant Eqs. (22) dans Equation (17) et (21) et les résoudre pour  $(a)$  et  $(b)$ . Trois solutions analytiques de l'amplitude statique du post-flambement  $(a)$  sont obtenues. La première est la solution insignifiante,  $(a = 0)$  qui correspond à la position d'équilibre instable de l'état de post flambement. Les deux autres solutions sont exprimées comme suit :

$$a = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{N_0 L^2}{A_{11}} - \frac{\pi^2 L^2}{(\pi^2 \mu + L^2)} \left( \frac{D_{11}}{A_{11}} - \frac{\pi^2 (D_{11}^s)^2}{A_{11} (A^s L^2 + \pi^2 H_{11}^s)} \right)} \quad (23)$$

Ces deux solutions correspondent aux positions d'équilibre stables dans l'état se post-flambement. D'autres part, la charge critique de flambement  $(N_{cr})$ , Peut être obtenu en résolvant la contrepartie linéaire de l'Equation (17). Le résultat est:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 [D_{11} A^s L^2 + \pi^2 (D_{11} H_{11}^s - (D_{11}^s)^2)]}{(\pi^2 \mu + L^2) (A^s L^2 + \pi^2 H_{11}^s)} \quad (24)$$

La charge critique adimensionnelle de flambement  $(\bar{N}_{cr})$  est définie comme suit:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{L^2}{D_{11}} \quad (25)$$

**IV.2.2.2. Solution analytique pour la poutre encastree-encastree**

Pour les poutres **encastrees-encastrees**, Le champ de déplacement suivant est supposé:

$$w_0(x) = \frac{1}{2} a \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (26a)$$



$$Q_x(x) = b \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (26b)$$

Substituant Equation (26) dans Equation (17) et (21), On obtient l'amplitude de post-flambement statique comme suit :

$$a = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{N_0 L^2}{A_{11}} - \frac{4\pi^2 L^2}{\mu(4\pi^2 + L^2)} \left( \frac{D_{11}}{A_{11}} - \frac{4\pi^2 (D_{11}^s)^2}{A_{11}(A^s L^2 + 4\pi^2 H_{11}^s)} \right)} \quad (27)$$

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 \left[ D_{11} A^s L^2 + 4\pi^2 (D_{11} H_{11}^s - (D_{11}^s)^2) \right]}{(4\pi^2 \mu + L^2) (A^s L^2 + 4\pi^2 H_{11}^s)} \quad (28)$$

La charge critique adimensionnelle de flambement ( $\bar{N}_{cr}$ ) est définie comme suit:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{L^2}{D_{11}} \quad (29)$$

### **IV.3. Conclusion**

Ce chapitre a pour but d'étudier une nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) pour le cas de vibration et de comportement dynamique des plaques à gradients de propriétés.

Contrairement à la conventionnelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) a quatre inconnus.

D'autre part la théorie d'ordre zéro non-local de déformation de cisaillement (ZSDT) a été développée dans le cadre de l'étude du comportement de post-flambement non-linéaire statique des poutres à l'échelle nano.

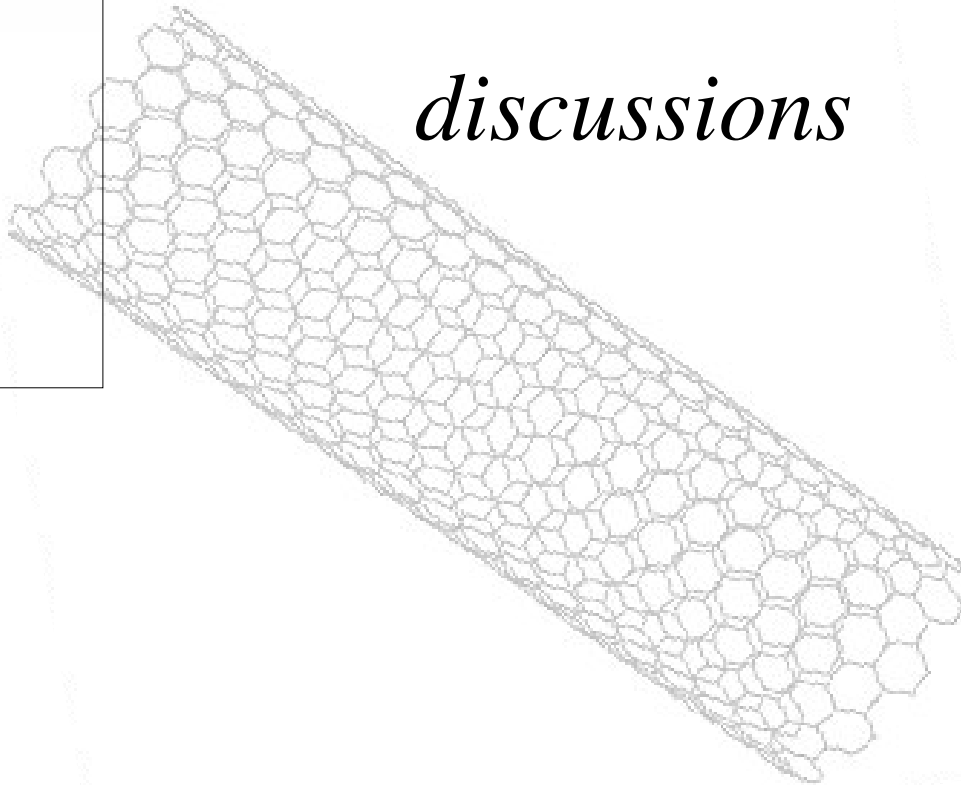
La charge de post flambement critique et la réponse statique de post flambement de la poutre aux conditions aux limites simplement appuyée et encastrée-encastrée ont été élaboré.

# CHAPITRE

05

---

## *Résultats et discussions*



### V.1. Etude du comportement des plaques sous flexion et vibration libre

Dans cette partie, différents exemples numériques ont été présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie dans la prévision de la flexion et des réponses de vibration des plaques FG simplement appuyées.

A titre de vérification, les résultats obtenus sont comparés avec ceux rapportés dans la littérature.

Dans tous les exemples du présent travail, un facteur de correction de cisaillement de (5/6), Benguediab et al. (2014), est utilisé pour la présente théorie. Le module de Poisson de la plaque est pris constant à travers l'épaisseur et égal à (0.3).

#### V.1.1. Analyses de flexion et de vibration

**V.1.1.1. Premier cas:** le premier cas est exécuté pour Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> des plaques carrées isotropes sous des charges sinusoïdales. Le module de Young et le module de Poisson, pour l'aluminium (Al-) sont respectivement: 70 GPA, 0.3 et pour l'alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) sont respectivement : 380 GPA, 0.3. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont (Zenkour (2006))

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0 a} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right),$$
$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right), \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6}\right)$$

Dans le Tableau V.1, une étude comparative est effectuée entre les résultats obtenus avec la théorie de plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) développé par Zenkour (2006) et la théorie de plaque conventionnelle du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) avec cinq inconnus.

Donc on peut conclure qu'en général, les résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par SSDT (2006) pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance ( $k$ ) considérées, À part le cas des contraintes de cisaillement transversaux ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) et ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) où on remarque une légère différence entre la présente théorie et la SSDT.

## Chapitre V: Résultats et discussions

Cela est dû au faite que la présente théorie enfreint les conditions aux limites de contraintes libres sur la surface de la plaque. Ainsi, un facteur de correction de cisaillement est exigé. Cependant, on peut voir que la théorie proposée (NFSDT) et la conventionnelle (FSDT) donnent des résultats identiques de la flèche aussi bien que des contraintes pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance ( $k$ ).

$k$	Methode	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
1	FSDT	0.5891	3.0537	1.4968	0.6125	0.1910	0.2348
	SSDT [41]	0.5889	3.0870	1.4894	0.6110	0.2462	0.2622
	Present	0.5891	3.0537	1.4968	0.6125	0.1910	0.2348
2	FSDT	0.7552	3.5657	1.4057	0.5459	0.1625	0.2289
	SSDT [41]	0.7573	3.6094	1.3954	0.5441	0.2265	0.2763
	Present	0.7552	3.5657	1.4057	0.5459	0.1625	0.2289
4	FSDT	0.8736	4.0101	1.1922	0.5693	0.1293	0.1899
	SSDT [41]	0.8819	4.0693	1.1783	0.5667	0.2029	0.2580
	Present	0.8736	4.0101	1.1922	0.5693	0.1293	0.1899
8	FSDT	0.9623	4.6957	0.9608	0.5887	0.1302	0.1501
	SSDT [41]	0.9750	4.7661	0.9466	0.5856	0.2124	0.2121
	Present	0.9623	4.6957	0.9608	0.5887	0.1302	0.1501

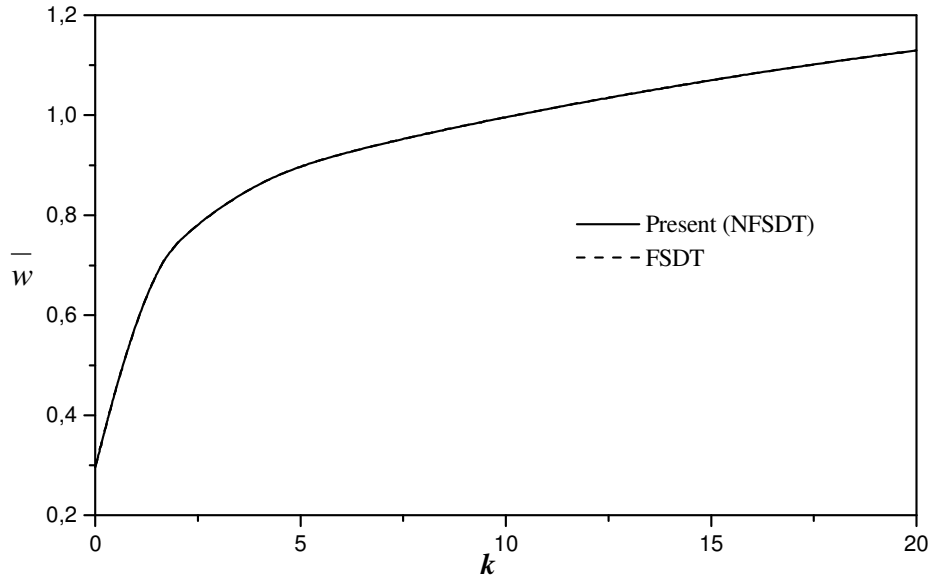
**Tableau V.1:** Effets de la fraction de volume présenté dans la flèche et les contraintes adimensionnelle de la plaque carré FG ( $Al/Al_2O_3$ ) définie dans exemple 1 ( $a/h = 10$ ).

Pour une meilleure illustration de la présente théorie pour une large gamme d'indice de loi de puissance ( $k$ ) et de parametre d'épaisseur ( $a/h$ ), les variations de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) en fonction de l'indice de loi de puissance ( $k$ ) et le parametre d'épaisseur ( $a/h$ ) sont illustrées dans Figures. V. 1 et 2, respectivement.

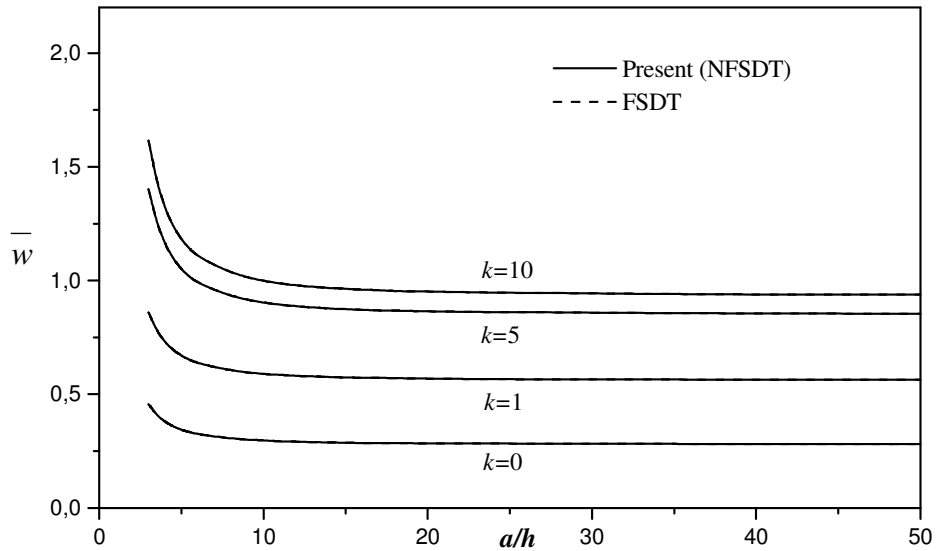
Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés en utilisant la conventionnelle FSDT avec cinq inconnus.

## Chapitre V: Résultats et discussions

On peut facilement remarquer que les résultats de la présente théorie et de la conventionnelle FSDT sont identiques.



**Fig. V.1:** Comparaison de la variation adimensionnelle de la flèche ( $\bar{w}$ ) de la plaque carrée ( $Al/Al_2O_3$ ) définie dans exemple 1 sous une distribution de charge sinusoïdale en fonction de l'indice de la loi de puissance ( $k$ ) ( $a/h = 10$ ).



**Fig. V.2:** Comparaison de la variation adimensionnelle de la flèche ( $\bar{w}$ ) de la plaque carrée ( $Al/Al_2O_3$ ) définie dans exemple 1 sous une distribution de charge sinusoïdale en fonction du paramètre d'épaisseur ( $a/h$ ).

## Chapitre V: Résultats et discussions

---

**V.1.1.2. Deuxième cas:** Dans le cas suivant, on considère une plaque sandwich carré avec des plaques sandwich céramiques-métal fonctionnellement graduées soumises aux charges sinusoïdales. Le module de Young et le module de Poisson, pour l'aluminium (Al) sont respectivement: 70 GPA, 0.3 et pour le zirconium (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) sont respectivement : 151GPA, 0.3. Dans cet exemple Les résultats numérique sont présentés en termes de contrainte et de déflexion adimensionnelle. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont (Zenkour (2005))

$$\bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0a} \sigma_y\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$$

Où la valeur de référence est prise comme suit ( $E_0 = 1$  GPa).

Les résultats numériques (flèche et contrainte) sont exprimés dans les tableaux V. 2–4.

Les prévisions obtenues sont comparées avec la conventionnelle théorie de plaque du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) développée par Zenkour (2005). On voit facilement que la conventionnelle FSDT (2005) et la présente NFSDT donnent des résultats identiques pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance ( $k$ ) pour les différentes plaques sandwich.

Finalement, il est important de noter que la présente théorie implique seulement quatre inconnus contre cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

## *Chapitre V: Résultats et discussions*

---

$k$	Théorie	$\bar{w}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT [42]	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
	Present	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
1	FSDT [42]	0.32484	0.30750	0.29301	0.28168	0.27167
	Present	0.32484	0.30750	0.29301	0.28168	0.27167
2	FSDT [42]	0.37514	0.35408	0.33441	0.31738	0.30370
	Present	0.37514	0.35408	0.33441	0.31738	0.30370
5	FSDT [42]	0.41120	0.39418	0.37356	0.35123	0.33631
	Present	0.41120	0.39418	0.37356	0.35123	0.33631
10	FSDT [42]	0.41919	0.40657	0.38787	0.36395	0.34996
	Present	0.41919	0.40657	0.38787	0.36395	0.34996

**Tableau V.2:** Effets de la fraction de volume présenté dans la flèche adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans exemple 2 ( $a/h = 10$ ).

## Chapitre V: Résultats et discussions

$k$	Théorie	$\bar{\sigma}_x$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT [42]	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576
	Present	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576
1	FSDT [42]	1.53245	1.45167	1.38303	1.27749	1.28096
	Present	1.53245	1.45167	1.38303	1.27749	1.28096
2	FSDT [42]	1.77085	1.67496	1.58242	1.42528	1.43580
	Present	1.77085	1.67496	1.58242	1.42528	1.43580
5	FSDT [42]	1.93576	1.86479	1.76988	1.56401	1.59309
	Present	1.93576	1.86479	1.76988	1.56401	1.59309
10	FSDT [42]	1.96780	1.92165	1.83754	1.61645	1.65844
	Present	1.96780	1.92165	1.83754	1.61645	1.65844

**Tableau V.3:** Effets de la fraction de volume présentée dans la contrainte axiale adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ ZrO<sub>2</sub> définie dans exemple 2 ( $a/h = 10$ ).



## Chapitre V: Résultats et discussions

$k$	Theorie	$\bar{\tau}_{xz}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT [42]	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099
	Present	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099
1	FSDT [42]	0.26099	0.24316	0.23257	0.22762	0.22057
	Present	0.26099	0.24316	0.23257	0.22762	0.22057
2	FSDT [42]	0.29731	0.26752	0.25077	0.24316	0.23257
	Present	0.29731	0.26752	0.25077	0.24316	0.23257
5	FSDT [42]	0.34538	0.29731	0.27206	0.26099	0.24596
	Present	0.34538	0.29731	0.27206	0.26099	0.24596
10	FSDT [42]	0.37277	0.31316	0.28299	0.26998	0.25257
	Present	0.37277	0.31316	0.28299	0.26998	0.25257

**Tableau V.4:** Effets de la fraction de volume présenté dans la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle de la plaque sandwich FG carrée Al/ ZrO<sub>2</sub> définie dans exemple 2 (  $a / h = 10$  ).

**V.1.1.3. Troisième cas:** Dans cette vérification, on considère une plaque carrée isotropique Al/ZrO<sub>2</sub>. Le module de Young et la densité, pour l'aluminium (Al) sont respectivement  $E_m = 70$  GPa et  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>. Et ceux de zirconium (ZrO<sub>2</sub>) sont respectivement  $E_c = 200$  GPa et  $\rho_c = 5700$  kg/m<sup>3</sup>, le module de poisson de la plaque est constant à travers l'épaisseur il égale à 0.3.

Le paramètre de fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}$ ) est obtenu en utilisant la présente théorie (NFSDT) et comparé avec ceux de solutions exactes 3-D de Vel et Batra (2004), des théories d'ordre élevées de déformation de déformation (HSDT) avec les solutions 2D de théorie d'ordre élevées de Matsunaga (2008), la théorie de Reddy avec les solutions de la méthode analytique de Hosseini-Hashemi et al. (2011) et FSDT avec les solutions de méthode analytiques de Hosseini-Hashemi et al. (2011).

## Chapitre V: Résultats et discussions

Les résultats sont présentés dans Tableau V.5 pour les différentes valeurs du paramètre d'épaisseur ( $a/h$ ) et l'indice de loi de puissance  $k$ , un bon accord a été observé.

On peut facilement voir que pour la plaque avec ( $k=0$ ), la plaque isotropique entièrement céramique, les résultats de la présente théorie (NFSDT) s'accordent bien avec ceux des solutions 3-D, de HSDT et FSDT.

Cependant, pour la plaque FG avec les valeurs non-zéro de ( $k$ ), les résultats de la présente théorie et d'autres théories de déformation de cisaillement sont plus élevés que ceux obtenus selon les solutions exactes 3-D de Vel et Batra (2004).

Il devrait être noté que la présente théorie implique quatre inconnus contre cinq inconnus dans les théories de Reddy et de FSDT.

Méthode	$k = 0$		$k = 1$			$a/h = 5$		
	$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
3-D [43]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
HSDT [44]	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.227	0.2281
HSDT [45]	0.4623	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
FSDT [46]	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291
Present	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291

**Tableau V.5:** Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ ) de la plaque carrée Al/ZrO<sub>2</sub> définie dans exemple 3.

**V.1.1.4. Quatrième cas:** Dans cet exemple, les fréquences adimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) de plaques carrées d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> minces et épaisses avec le paramètre d'épaisseur qui varie de (5 à 20) et l'indice de loi de puissance qui varie de (0 à 10) sont analysés en utilisant les différentes théories de plaque et les résultats obtenus de la présente théorie sont présentés dans le Tableau V.6 et comparés à ceux prévus par TSDT (2011) et FSDT (2011).

## Chapitre V: Résultats et discussions

$a/h$	Mode ( $m, n$ )	Méthode	Indice de loi de puissance (k)				
			0	0.5	1	4	10
5	(1,1)	TSDT [45]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [46]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Present	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	(1,2)	TSDT [45]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT [46]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Present	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
	(2,2)	TSDT [45]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT [46]	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Present	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
10	(1,1)	TSDT [45]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT [46]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Present	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	(1,2)	TSDT [45]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT [46]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Present	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
	(2,2)	TSDT [45]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [46]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Present	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
20	(1,1)	TSDT [45]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT [46]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Present	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

**Tableau V.6:** Comparaison du paramètre de fréquence naturelle ( $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ ) de la plaque carrée  $Al/Al_2O_3$  définie dans l'exemple 4.

## Chapitre V: Résultats et discussions

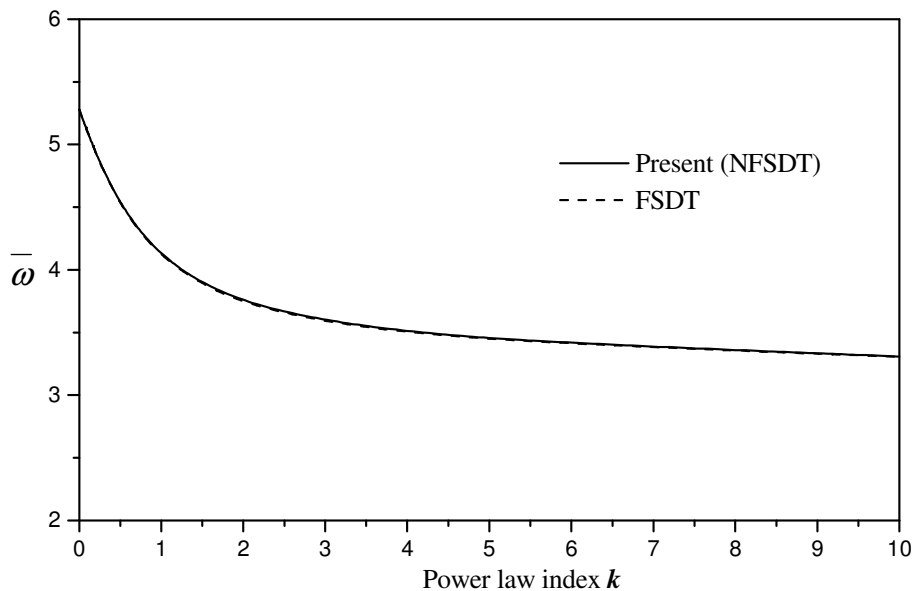
On peut facilement remarquer que les résultats obtenus selon la présente théorie sont en bon accord avec ceux obtenus par Hosseini-Hashemi et al. (2011) basé sur la théorie de Reddy et Hosseini-Hashemi et al. (2011) basé sur FSDT.

Un excellent accord entre les résultats obtenus selon des théories différentes est enregistré pour tous les modes de vibration.

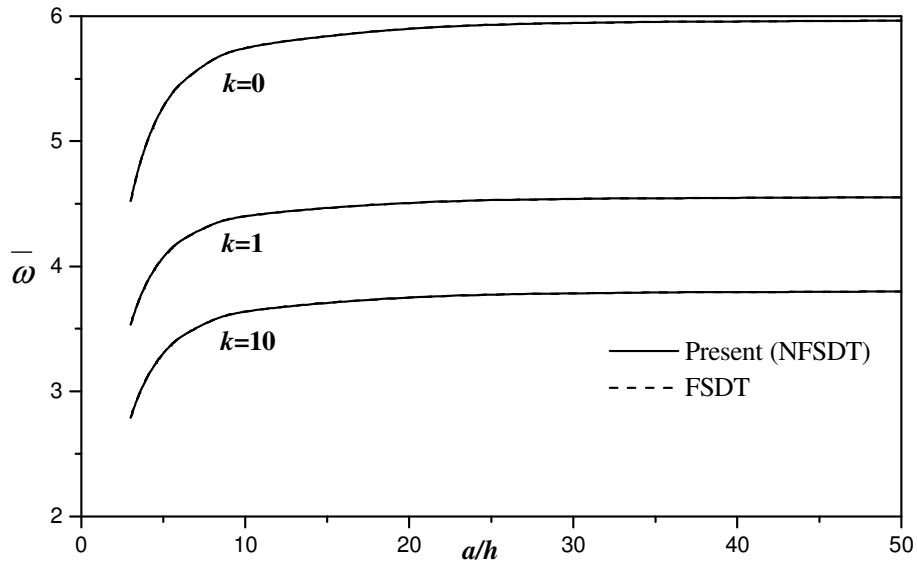
Il faut noter que les deux théories à savoir la TSDT et la conventionnelle FSDT contiennent plus de nombre d'inconnus que la présente théorie (NFSDT).

Pour une meilleure illustration de la présente théorie pour une large gamme d'indice de loi de puissance ( $k$ ) et de paramètre d'épaisseur ( $a/h$ ), Figures. V. 3 et 4 présentent la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'indice de loi de puissance ( $k$ ) et le paramètre d'épaisseur, respectivement.

Il a été remarqué que les fréquences adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) obtenues par la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) et la conventionnelle (FSDT) sont identiques.



**Fig. V.3:** Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  de la plaque FG carrée  $Al/Al_2O_3$  définie dans l'exemple 4 en fonction de l'indice de la loi de puissance  $k$  ( $a/h = 5$ ).



**Fig. V.4:** Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  de la plaque FG carrée  $Al/Al_2O_3$  définie dans l'exemple 4 en fonction du paramètre d'épaisseur  $a/h$ .

## *Chapitre V: Résultats et discussions*

---

### ***V.2. Etude du flambement des nano-poutres***

Dans cette Partie, des résultats numériques divers sont établis et interprétés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie dans la prévision du flambement et les réponses du post-flambement des poutres à l'échelle nano. La longueur de la poutre à l'échelle nano ( $L$ ) est pris égal à (10 nm), le module de Young ( $E$ ) et le module de Poisson ( $\nu$ ), sont pris égaux à 30 MPa et 0.3, respectivement.

#### **V.2.1. Interprétation des résultats :**

Les résultats obtenus en utilisant la présente théorie non-locale ZSDT pour des valeurs différentes du paramètre de la petite échelle et le rapport d'épaisseur ( $L/h$ ) sont comparés à ceux rapportés par Emam (2013) basé sur la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT) et la théorie de poutre de Reddy (RBT).

D'après les tableaux V.7 et 8 on remarque facilement que les résultats de la présente théorie sont dans l'accord excellent avec ceux de RBT utilisé par Emam (2013) pour toutes les valeurs du paramètre de la petite échelle et le rapport d'épaisseur et cela même pour les poutres encastrees-encastres.

## *Chapitre V: Résultats et discussions*

$L/h$	$\mu$	EBT	TBT	RBT	Present
100	0	9.8696	9.8671	9.8671	9.8671
	1	8.9830	8.9807	8.9807	8.9807
	2	8.2426	8.2405	8.2405	8.2405
	3	7.6149	7.6130	7.6130	7.6130
	4	7.0761	7.0743	7.0743	7.0743
	5	6.6085	6.6068	6.6068	6.6068
20	0	9.8696	9.8067	9.8067	9.8067
	1	8.9830	8.9258	8.9258	8.9258
	2	8.2426	8.1900	8.1900	8.1900
	3	7.6149	7.5664	7.5664	7.5664
	4	7.0761	7.0310	7.0310	7.0310
	5	6.6085	6.5663	6.5663	6.5663
10	0	9.8696	9.6227	9.6228	9.6228
	1	8.9830	8.7583	8.7583	8.7583
	2	8.2426	8.0364	8.0364	8.0364
	3	7.6149	7.4244	7.4245	7.4245
	4	7.0761	6.8990	6.8991	6.8991
	5	6.6085	6.4431	6.4432	6.4432

**Tableau V.7:** Première charge critique adimensionnelle de flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano simplement appuyées

## *Chapitre V: Résultats et discussions*

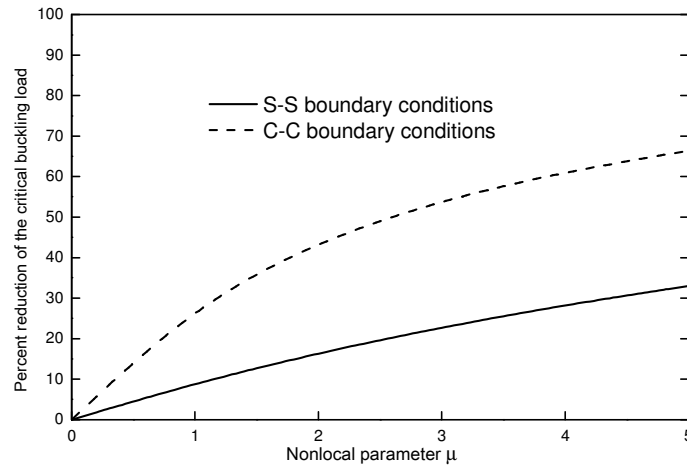
$L/h$	$\mu$	EBT	TBT	RBT	Présente
100	0	39.4784	39.4379	39.4379	39.4379
	1	28.3043	28.2753	28.2753	28.2753
	2	22.0603	22.0377	22.0377	22.0377
	3	18.0733	18.0548	18.0548	18.0548
	4	15.3068	15.2911	15.2911	15.2911
	5	13.2749	13.2613	13.2613	13.2613
20	0	39.4784	38.4907	38.4910	38.4910
	1	28.3043	27.5962	27.5964	27.5964
	2	22.0603	21.5084	21.5085	21.5085
	3	18.0733	17.6211	17.6212	17.6212
	4	15.3068	14.9239	14.9240	14.9240
	5	13.2749	12.9428	12.9429	12.9429
10	0	39.4784	35.8034	35.8075	35.8075
	1	28.3043	25.6695	25.6724	25.6724
	2	22.0603	20.0067	20.0090	20.0090
	3	18.0733	16.3909	16.3927	16.3927
	4	15.3068	13.8819	13.8835	13.8835
	5	13.2749	12.0391	12.0405	12.0405

**Tableau V.8:** Première charge critique adimensionnelle de flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano encastrées-encastrées

La figure V.5 représente le pourcentage de réduction de la charge critique de flambement en fonction du paramètre de la petite échelle pour les poutres à l'échelle nano simplement appuyées et encastrées-encastrées.

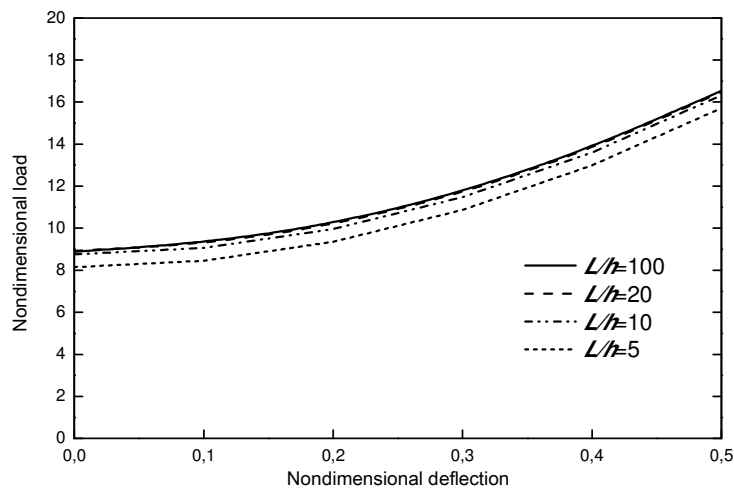
On peut facilement remarquer que la charge critique du flambement est très affectée par le paramètre de petite échelle et les résultats de la poutre simplement appuyée sont moins importants que ceux de la poutre encastrée-encastrée.





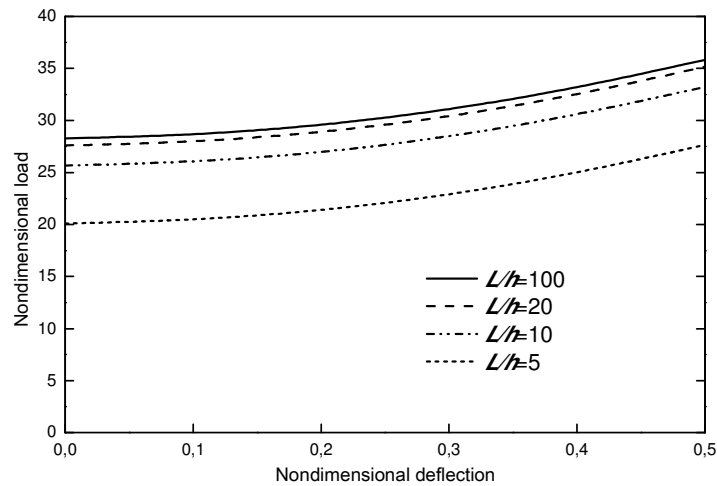
**Fig. V.5:** Variation du pourcentage de réduction de la charge critique de flambement en fonction du paramètre de la petite échelle

La figure V.6 représente la charge mécanique de post-flambement en fonction de la flèche pour des valeurs différentes du paramètre d'épaisseur ( $L/h$ ) selon la présente formulation.



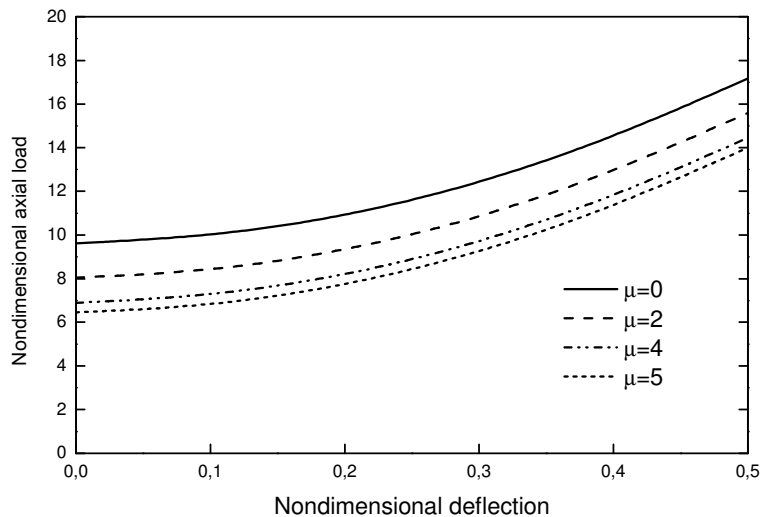
**Fig. V.6:** Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axiale appliqué pour le cas des poutres simplement appuyées pour  $\mu = 1$ .

On peut facilement constater que l'effet du paramètre de l'épaisseur ( $L/h$ ) sur l'amplitude surgissant du flambement est insignifiant dans le cas de la poutre simplement appuyée. Cependant, cet effet est fortement significatif dans le cas de la poutre encastree-encastree comme le montre la Figure V.7.



**Fig. V.7:** Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axiale appliquée pour le cas des poutres encastées-encastées pour  $\mu = 3$ .

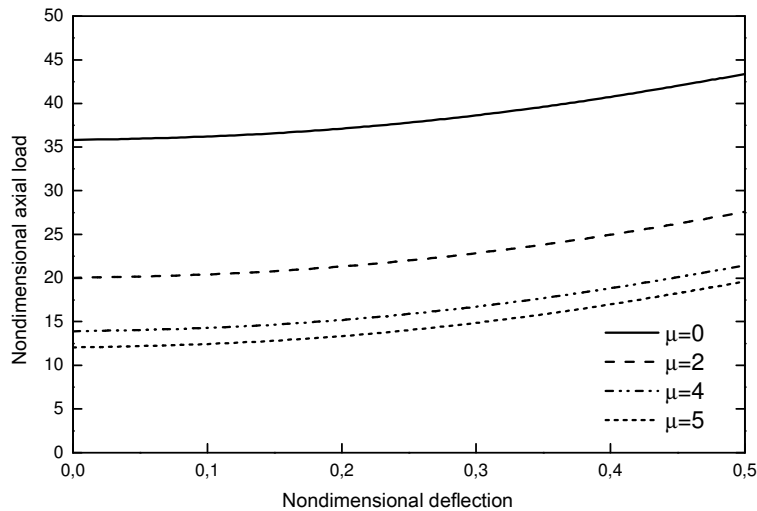
Les figures V 8 et 9 illustrent la charge mécanique de post-flambement en fonction de la flèche pour des valeurs différentes du paramètre de la petite échelle ( $\mu$ ) pour des poutres simplement appuyées et encastées-encastées respectivement.



**Fig. V.8:** Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axiale appliquée pour le cas des poutres simplement appuyées pour  $L/h = 10$ .

D'après ces figures on peut constater que le paramètre de la petite échelle réduit non seulement la charge de flambement critique, mais il amplifie aussi l'amplitude surgissant du flambement.

Ainsi, on peut conclure que le paramètre non-local adoucit la poutre et que la connaissance de ce comportement est cruciale dans l'examen et la conception des poutres à l'échelle nano comme les capteurs. Pour les poutres encadrées-encadrées, la contribution du paramètre de la petite échelle sur le comportement post-flambement est plus significatif comme l'illustre la figure V.9.



**Fig. V.9:** Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axiale appliquée pour le cas des poutres encadrées-encadrées pour  $L/h = 10$ .

### V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques de l'analyse de vibration et du comportement dynamique des plaques à gradients de propriétés en utilisant une présente une nouvelle théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) à quatre variables.

Pour la présente théorie, l'effet de couplage membrane-flexion dans la formulation basé sur la surface neutre n'existe pas.

Toutes les études comparatives ont démontré que les résultats obtenus en utilisant la théorie proposée à quatre variables et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace pour résoudre les problèmes de vibration et de comportement dynamique des plaques à gradients de propriétés.

La deuxième partie de ce chapitre traite la théorie d'ordre zéro non local qui est appliquée pour l'étude du comportement de post flambement non linéaire statique des poutres à l'échelle nano. Cette étude fait ressortir les résultats suivants :

## *Chapitre V: Résultats et discussions*

---

- la réponse du flambement et le post flambement des poutres à l'échelle nano est très susceptible au parametre non local.
- Le parametre non local augmente lorsque la charge critique de flambement diminue.
- L'effet du parametre de l'épaisseur ( $L/h$ ) sur l'amplitude surgissant du flambement est fortement significatif dans le cas de la poutre encastrée-encastrée.

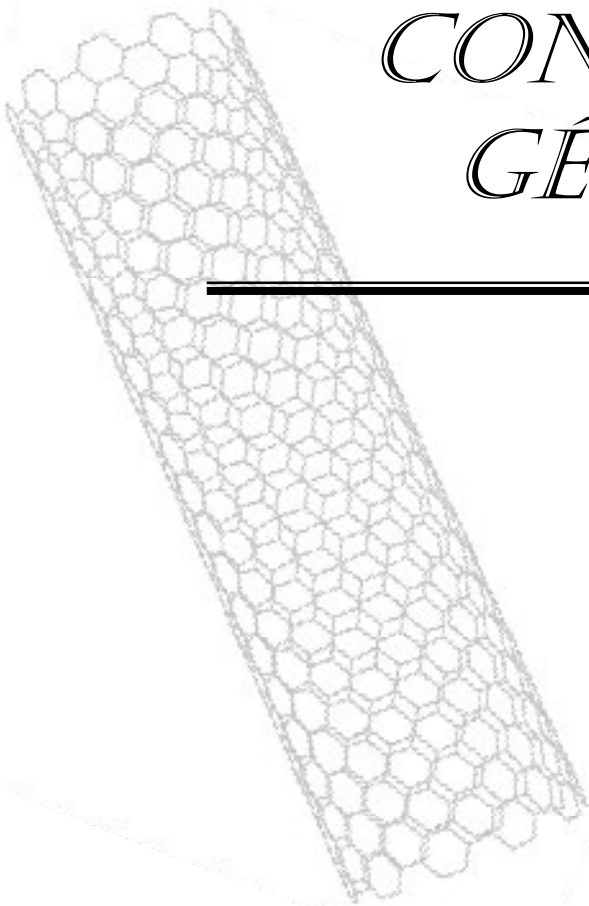
---

---

*CONCLUSION  
GÉNÉRALE*

---

---



## *Conclusion Générale*

---

Dans ce travail, Une nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) a été développée pour la flexion et le comportement dynamique des plaques FG. Contrairement aux autres théories de déformations de cisaillement, seulement quatre fonctions inconnues de déplacement sont utilisées dans la présente théorie contre cinq fonctions inconnues de déplacement utilisées dans les correspondantes. Basé sur la présente théorie et le concept de surface neutre, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton. L'exactitude de modèle à base de surface neutre est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Finalement, on peut conclure que la nouvelle du premier ordre de déformation de cisaillement est non seulement précise, mais simple aussi dans la prévision de la flexion et du comportement dynamique des plaques FG.

Des solutions analytiques de post-flambement non-linéaire des poutres à l'échelle nano soumise à la compression axiale dans le contexte de la théorie du zéro-ordre de la déformation du cisaillement et des relations différentielles constitutives non-locales d'Eringen ont été présentées. La présente formulation est en mesure d'identifier la déformation de cisaillement et les effets non locaux des poutres à l'échelle nano et n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement. Les solutions analytiques de la charge critique de flambement et l'amplitude statique non linéaire de l'état de post flambement pour le cas des poutres simplement appuyées et encastées-encastées ont été déterminé. Il a été observé que la réponse du flambement et le post flambement des poutres à l'échelle nano est très susceptible au parametre non local.

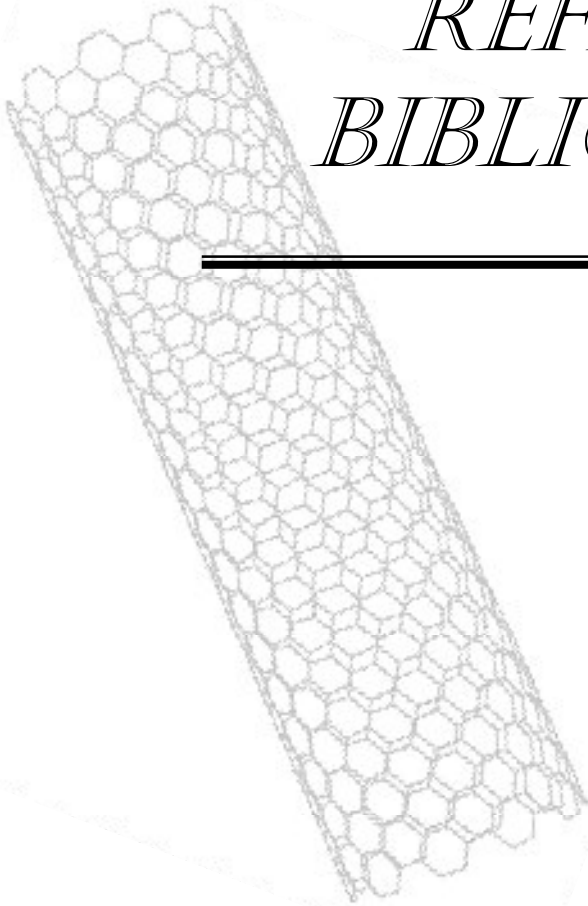
---

---

*RÉFÉRENCES*  
*BIBLIOGRAPHIE*

---

---



## Références Bibliographiques

---

1. Abrate, S. *functionally graded plates behave like homogeneous plates*. *Compos. Part B-Eng.* **39**, 151–158 (2008).
2. Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions” *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293 – 318.
3. Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A., *Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory*. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
4. Ait Atmane Hassen, (2011) « *Vibration des structures en composites en tenant compte de l'effet du cisaillement* » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes*.
5. Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1143 – 1165.
6. Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Composite Structures*, **125**, 621–630.
7. Amara, K., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2010), “Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field”, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3933–3942.
8. Ashton, J.E. et Whitney, J.M., “*Theory of Laminated Plates*”: Technomic Pub. Co., (1970).
9. Aubouin, J., Brousse, R., Lehman, J. P., *Précis de Géologie*, Ed. Dunod, Paris (1968).
10. P. Avouris, T. Hertel, R. Martel, T. Schmidt, H.R. Shea, R.E. Walkup, *Appl. Surf. Sci.*, **141**, 201 (1999).
11. Bacon, R., *Growth, structure, and properties of graphite whiskers*. *Journal of Applied Physics*, volume 31, 1960, pages 283-290.
12. Ball, P. (2001), “Roll up for the revolution”, *Nature*, **414**, 142–144.
13. G. Bao., L. Wang, *Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings*, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
14. Baughman, R.H., Zakhidov, A.A., de Heer, W.A. (2002), “Carbon nanotubes—the route toward applications”, *Science*, **297**, 787–792.
15. Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M., Semmah, A. (2014), “Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes”, *Composites Part B.*, **57**, 21 – 24.
16. Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283.



## Références Bibliographiques

---

17. Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M., Semmah, A. (2014), "Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes", *Composites Part B*, **57**, 21 – 24.
18. Berber, S., et al. "Unusually High Thermal Conductivity of Carbon Nanotubes", *Phys.Rev. Lett.* **84** (2000).
19. Bethune, D.S., Kiang, C. H., M. S. de Vries, Gorman, G., Savoy, R., Vazeques, J., et Beyers, R., Colbat –catalysed growth of carbon nanotubes with single-atomic-layer walls. *Nature*, volume 388, 1993, pages 605-607.
20. Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A., Adda Bedia, E.A. (2013), "Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams", *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 351 – 365.
21. Berrebah Hamza Majid, (2011) « Etude et analyse des poutres FGM sous chargement électrostatique ». Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes.
22. Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N., Boumia, L. (2008), "The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory", *Journal of Physics D: Applied Physics*, **41**, 225404.
23. Bodily, B.H., Sun, C.T. (2003), "Structural and equivalent continuum properties of single-walled carbon nanotubes", *International Journal of Materials and Product Technology*, **18 (4-6)**, 381–397.
24. BOCH, P., CHARTIER, T. & HUTTEPAIN, M., *Tape Casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> Laminated Composites*, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192, (1986).
25. BOCH, P. *Tape Casting of Layered Composites*, in *Processing of Advanced Ceramics*. Edited by J. S. Moya and S. de Aza. *Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain*, p. 103-112, (1987)
26. Boudierba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, **14**, 85 – 104.
27. Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 409 – 423.
28. BOURADA Mohamed, (2014) « Analyse du flambement des structures hétérogènes sandwichs sous chargement thermique en utilisant les théories à ordre élevé » Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes.
29. Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, **11(6)**, 1350082.
30. Chang, H., et Bard, A.J., *Journal of American Chemical Society*, volume 113 – 5588, 1991.

## Références Bibliographiques

---

31. Chen, Y. K., Green, M. L. H., Griffin, J. L., Hammer, J. L., Lago, R. M., et Tsang, S. K. *Advanced Materials*, 1996.
32. Chi, S. H., Chung, Y.L, *Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part I: Analysis*, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3657-3674, 2006.
33. Chung, Y.L., Chi, S.H., 2001. *The residual stress of functionally graded materials*. 13, 1-9.
34. Chung, Y.-L., Chen, W.-T. *Bending behavior of FGM-coated and FGM undercoated plates with two simply supported opposite edges and two free edges*. *Comput. Struct.* **81**, 157–167 (2007).
35. Cheng, H., Li,F., Su,G., Pan,H., et Dreseslhauss, M. S., *Applies Physics Letters*, volume 72, 1998, pages 3282 – 3284.
36. Chi, S., Chung, Y. *Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – part I: Analysis*. *Int. J. Solids Struct.* **43**, 3657–3674 (2006).
37. Colomer, J.-F., Stéphan, C., Lefrant, S.,. Van Tendeloo, S., Konya, Z., Konya, Z., Willems, I., Fonseca, A., Laurent, A., et Nagy, J. B., *Chemical Physics Letters*, volume 317, 2000, page 83.
38. Croce, LD., Venini, P., *Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates*. *Comput Methods Appl Mech Eng.* **193**, 705–725 (2004).
39. Dai, H., Rinzler, A. G., Nikolaev, P., Thess, A., Colbert, D. T., et Smalley, R. E., *Chemical Physics Letters*, volume 260, 1996, page 471.
40. Decossas, S., *Nanotribologie par Microscopie de Force Atomique (AFM) sur des nanotubes de carbone*, Thèse de Doctorat (2001), Université Grenoble I - Joseph Fourier.
41. Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.
42. Ebbesen, T. W., Ajayan, P. M., Hiura, H., et Tanigaki, K., *Nature*, volume 367, 1994, page 519.
43. Ebbesen, T. W., Lezec, H. J., Hiura, H., Bennet, J.W., Ghaemi, H.F., et Thio, T., *Electrical-conductivity of individual carbon nanotubes and silicon nanowires*. *Nature*, volume 399, 1999, pages 48-51.
44. Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. (2012), “Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams”, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 7406– 7420.
45. Emam, S.A. (2013), “A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams”, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 6929–6939.
46. Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied Physics*, **54**, 4703–4710.
47. Eringen, A.C. (2002), “*Nonlocal continuum field theories*”, Springer, New York.
48. Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795 – 810.

## Références Bibliographiques

---

49. Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Martins, P.A.L.S. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and meshless method. *Comp. Struct.* **69**, 449–457 (2005).
50. Gilhooley, D.F., Batra, R.C., Xiao, J.R., McCarthy, M.A., Gillespie, Jr. J.W. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Comput. Struct.* **80**, 539–552 (2007).
51. Guo, T., Nikolaev, P., Thess, A., Colbert, D. T., et Smalley, R.E., *Chemical Physics Letters*, volume 243, 1995, page 49.
52. Hadji, L., Khelifa, Z., Adda Bedia, E.A. (2015), “A new higher order shear deformation model for functionally graded beams”, *KSCE Journal of Civil Engineering*, *In press*.
53. Hamada, N., Sawada, S., et Oshiyama, A., *New one-dimensional conductors – graphitic microtubules. Physical Review Letters*, volume 68, 1992, pages 1579 -1582.
54. He, X.Q., Ng, T.Y., Sivashankera, S., M, K., Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *Int. J; Solids Structures*; 38 (9): 1641-1655,2001.
55. Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda Bedia, E.A. (2008), “Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity”, *Physica E*, **40**, 2791.
56. Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **140**, 374 – 383.
57. Hiura, H., Ebessen, T. W., et Tanigaki, K., *Advanced Materials*, volume 7, 1995, page 275.
58. Hildebrand, F.B., Reissner, E., Thomas, G.G., *Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833*, 1949.
59. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. *Compos. Struct.* **93(2)**, 722–735 (2011).
60. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.* **53(1)**, 11–22 (2011).
61. Houari Mohammed, Sid Ahmed, (2011) « Analyse des contraintes thermo-élastiques: lois des puissances ». Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes.
62. Houdyp, Dupasc, Lahmani, « Les nanosciences - nanotechnologies et nanophysique » La collection Echelle, Editions Belin 2006.
63. Hsu, T.R., *The finite element method in thermomechanics*. Allen and UnwinPub. 1984.
64. Huang, J.Y., Chen, S., Wang, Z.Q., Kempa, K., Wang, Y.M., Jo, S.H., Chen, G., Dresselhaus, M.S., *Ren. Z.F., Nature* **439** 281 (2006).
65. Hu, J., Ouyang, M., Yang, P., et Lieber, C.M., *Controlled growth and electrical properties of heterojunctions of carbon nanotubes and silicon nanowires. Nature*, volume 399, 1999, pages 48-51.

## Références Bibliographiques

---

66. Iijima, S., *Helical microtubules of graphite carbon*. *Nature*, volume 354, (1991) page 56.
67. Iijima, S., Ichihashi, T., *Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter*. *Nature*, volume 363, 1993, pages 603-605.
68. Iijima, S., Brabec, C., Maiti, A., et Bernholc, J., *Structural flexibility of carbon nanotubes*. *Chem, J., Phys.*, volume 104 (5), 1996, pages 2089-2092.
69. Izard, N., *nanotubes de carbone : Systèmes pour la limitation optique*, thèse de doctorat, l'Université Montpellier II, (2004).
70. Journet, C., Maser, W. K., Bernier, P., Loiseau, A., Delachapelle, M. L., Lefrant, S., Deniard, P., Lee, R., et Fischer, J. E., *Large-scale production of single-walled carbon nanotubes by the electric-arc technique*. *Nature*, volume 388, 1997, pages 756-758.
71. KACI Abdelhakim, (2012) « *Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique* » Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès.
72. Kant, T., Swaminathan, K., *Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory*. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
73. Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., *Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
74. KIEBACK B., NEUBRAND A., Riedel H. «*Processing techniques for functionally graded materials*», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
75. Kirchhoff, G.R., "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, (1850), 40, 51-88.
76. Kirchhoff, G.R., "Uber die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe", *Poggendorffs Annalen*, (1850), 81, 258–264.
77. Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, **11**(5), 135007.
78. Koizumi, M. *The concept of FGM*. *Ceram Trans Funct Grad Mater*, **34**, 3–10 (1993).
79. Kong, J., Cassel, A.M., et Dai, H., *Chemical Physics Letters*, volume 292, 1998, pages 567-574.
80. Krätschmer, W., Lamb, L.D., Fostiropoulos, K., Huffman, D.R., *Solid C<sub>60</sub>: a new form of carbon*. *Nature*, volume 347, 1990, pages 354-358.

## Références Bibliographiques

---

81. Krishnan, A., Dujardin, E., Ebbesen, T.W., Yianilos, P.N., Treacy, M., *Physical Review B* 58 (20), 14013 (1998).
82. Kroto, H.W., Heath, J.R., O'Brien, S. C., Curl, R.F., Smalley, R.E., *C<sub>60</sub>: Buckminsterfullerene. Nature*, volume 318, 1985, pages 162-163.
83. LEFEVRE Roland, (2005) « Propriétés électromécaniques des nanotubes de carbone multi parois » Thèse de Doctorat Université Paris Xi UFR Scientifique D'Orsay, France
84. Li, C., Chou, T.W. (2003a), "A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 2487–2499.
85. Li, C., Chou, T.W. (2003b), "Single-walled nanotubes as ultra high frequency nanomechanical oscillators", *Physical Review B*, **68**, 073405.
86. Lu, P., Lee, H.P., Lu, C., Zhang, P.Q. (2007), "Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, **44**, 5289–5300.
87. Lu, J., *Elastic properties of carbon nanotubes and nanoropes. Phys Rev Lett* 1997;79:1297–300.
88. Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, (In press).
89. Mahi, A., (2012), « Analyse et étude des plaques composites FGM en vibration libres ». These de Doctorat, Université Saad Dahleb, Blida.
90. Maser, W.K., Munoz, E., Benito, A. M., Martinez, M. T., de la Fuente, G.F., Maniette, Y., Anglaret, E., et Sauvajol, J.-L., *Chemical Physics Letters*, volume 292, 1998, page 587.
91. Maryama, S., Kojima, R., Miyauchia, Y., et Chiashia, M., Kohno, S., *Chemical Physics Letters*, volume 360, 2002, page 229.
92. Matsunaga, H. *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. Compos. Struct.* **82(4)**, 499–512 (2008).
93. Matsunaga, H. *Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. Comput. Struct.* **87**, 344–357 (2009).
94. Mindlin, R.D. *Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic. Elastic Plates. ASME J. Appl. Mech.* **18**, 31–38 (1951).
95. Mintmire, J. W., Dunlap, B. I., et White, C. T., *Are fullerence tubules metallic? Physical Review Letters*, volume 68, 1992, pages 631-634.
96. Merkulov, V. I., Lowndes, D. H., Wei, Y. Y., Eres, G., and Voelkl, E., *Appl. Phys. Lett.* **76** 3555 (2000).
97. Mistler, R. E., *High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull;* 52 (11): 850-854, (1973).
98. Morimoto, T., Tanigawa, Y., Kawamura, R. *Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating. Int. J. Mech. Sci.* **48**, 926–937 (2006).

## Références Bibliographiques

---

99. Murmu, T, Adhikari, S. (2012), “Non local elasticity based vibration of initially pre-stressed coupled nanobeam systems”, *Eur. J. Mechanics A-Solids*, **34**, 52-62.
100. Mustapha, KB, Zhong, ZW. (2010a), “The thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube studied using the Bubnov–Galerkin method”, *Physica E*, **43**, 375–381.
101. Nacéri, M., Zidour, M., Semmah, A., Houari, M.S.A., Benzair, A., Tounsi, A. (2011), “Sound wave propagation in armchair single walled carbon nanotubes under thermal environment”, *Journal of Applied Physics*, **110**, 124322.
102. NACERI Mokhtar, (2013) « Etude et analyse de la propagation des ondes dans les nanotubes en carbone par le modèle non local généralisé » Thèse de Doctorat de l’Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès.
103. Naghdi, P. M., *On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math*, **14**: 369-380 1957.
104. Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mechanics of Composite Materials*, **49(6)**, 641 – 650.
105. Nikolaev, P., Bronikowski, M. J., Bradley, R. K., Rohmund, F., Colbert, D. T., Smith, K. A., et Smalley, R. E., *Chemical Physics Letters*, volume 313, 1999, pages, 91-97
106. Okamura, H., *State of the art of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, (1991).
107. Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* **41**, 421–433 (2013).
108. Ould Larbi, Latifa, (2013) « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM ». Thèse de Doctorat de l’Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès.
109. Overney, G., Zhong, W., and Tománe, D., *Zeitschrift für Physik D Atoms Molecules and Clusters* **27** 93 (1993).
110. Postma, H. W. C., Teepen, T., Yao, Z., Grigoni, M., and Dekker, C., *Science* **293** 76 (2001).
111. Pradhan, S.C., Phadikar, J.K. (2008), “Nonlinear analysis of carbon nanotubes”, *Proceedings of Fifth International Conference on Smart Materials, Structures and Systems, Indian Institute of Science, Bangalore*, 24–26 July 2008, paper ID 19.
112. Praveen, GN, Reddy, JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct.* **35**, 4457–4476 (1998).
113. Qian, L.F., Batra, R.C., Chen, L.M. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites, Part B.* **35**, 685–697 (2004).

## *Références Bibliographiques*

---

114. Ravikiran, K., Kashif, A., Ganesan, G. *Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. Appl. Math. Model.* **32**, 2509–2525 (2008).
115. Ray, M.C. (2003), “Zeroth-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*, **70**, 374–380.
116. Reddy, J.N., *A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
117. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
118. Reddy, J.N., *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
119. Reddy, J.N., Cheng, Z.-Q. *Three-dimensional thermo-mechanical deformations of functionally graded rectangular plates. Eur. J. Mech. A/Solids.* **20**, 841–855 (2001).
120. Reddy JN. *Energy principles and variational methods in applied mechanics: John Wiley & Sons Inc;* (2002).
121. Reddy, J.N. (2007), “Nonlocal theories for buckling bending and vibration of beams”, *Int. Eng. Sci.*, **45**, 288–307.
122. Reissner, E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech;* 12 (2): 69-77, 1945.
123. Reissner, E., *On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures;* 25 (5):495-502, 1975.
124. Roque, CMC, Ferreira, AJM, Reddy, JN. (2011), “Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method”, *Int J Eng Sci*, **49**, 976–984.
125. Sallai BO., Tounsi A., Mechab I., Bachir MB, Meradjah MB, Adda Bedia EA. *A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams. Comput Mater Sci.* **44**, 1344–1350 (2009).
126. Saito, R., Fujita, M., Dresselhaus, G., et Dresselhaus, M. S., *Electronic structure of chiral graphene tubules. Applied Physics Letters*, volume 60, 1992, pages 2204-2206.
127. Saito, R., Fujita, M., Dresselhaus, G., et Dresselhaus, M. S., *Electronic structure of chiral graphene tubules on C<sub>60</sub>. Physical Review B*, volume 46, 1992, pages 1804-1811.
128. Shimpi, R.P., Patel, H.G., Arya, H. *New first-order shear deformation plate theories. Journal of Applied Mechanics.* **74**, 523 – 533 (2007)
129. Song, J, Shen, J, Li, XF. (2010), “Effects of initial axial stress on waves propagating in carbon nanotubes using a generalized nonlocal model”, *Comput Mater Sci.*, **49**, 518–523.

## Références Bibliographiques

---

130. Steffens H.D., Dvorak. M., Wewel. M., *Plasma sprayed functionally gradient materials- processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, (1990).*
131. Sugano, Y.: *An analytical solution for a plane thermal stress problem in (1990) , 136-144.*
132. Suresh, S., Mortensen, A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials (IOM Communications Ltd., London) (1998).*
133. Takahash, M., Itoh. Y., Kashiwaya, K., *Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, (1990).*
134. Tebboune, W., (2015), “*Contribution à l'étude de la stabilité thermique des structures composites*”. *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes.*
135. S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.*
136. Thess, A., Lee, R., Nikolaev, P., Dai, H., Petit, P., Robert, T., Xu, C. H., Lee, Y. H., Kim, S. G., Rinzler, A. G., Colbert, D. T., Scuseria, G.E., Tomanek,D., Fischer, J.E., et Smalley R. E., *Science, volume 273, 1996, pages 483-487.*
137. Timoshenko. S.P., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.*
138. Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), “*A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates*”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.
139. Tounsi, A., Heireche, H., Berrabah, H.M., Benzair, A., Boumia, L. (2008), “*Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field*”, *Journal of Applied Physics*, **104**, 104301.
140. Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A., Zidour, M. (2013), “*Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes*”, *Advances in Nano Research*, **1**, 1 – 11.
141. Touratier, M., *An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.*
142. Treacy, M. M., Ebbesen, T.W., et Gibson, J. M., *Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes. Nature, volume 381, 1996, pages 678.*
143. Tsang, S. C., Chen, Y. K., Harris P. J. F., et Green, M. L. H., *Nature, volume 372, 1994, page 159.*
144. Vel, S.S., Batra, R.C. *Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. J. Sound Vib. 272(3–5), 703–730 (2004).*



## Références Bibliographiques

---

145. Wang, Q., Zhou, G.Y., Lin, K.C. (2006a), "Scale effect on wave propagation of double walled carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 6071–6084.
146. Wang, Q., Varadan, V.K. (2006b), "Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics", *Smart Materials and Structures*, **15**, 659–666.
147. Woo, J., Meguid, S.A., Ong, L.S. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J. Sound Vib.* **289**, 595–611 (2006).
148. Xu, M., *Proc. R. Soc. A* **462**, 2977 (2006).
149. Yakobson, B.I., Brabec, C.J., Bernholc, J., *Physical Review Letters* **76**, 2511 (1996)
150. Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I. In: *Proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan; (1990)*.
151. Yang, J., Shen, J., H.-S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; **34** (2) :103–115, (2003).
152. Yao, Z., Zhu, C.-C., Cheng, M., et Liu, J., *Mechanical properties of carbon nanotube by molecular dynamics simulation. Comp. Mat. Sci.*, volume 22, 2001, pages 180-184.
153. Yao, Z., Potman, H.W. Ch., Balents, L., et Dekker, C., *Carbon nanotube intramolecular junctions. Nature*, volume 402, 1999, pages 273-276.
154. Yu, M.F., Files, B. S., Arepalli, S., Ruo, R.S., *Physical Review Letters* **84** (24), 5552 (2000).
155. Yung, Y.Y., Munz, D., 1996. *Stress analysis in two materials joint with a functionnaly graded material. In: Shiota, T., Miyamoto, M.Y. (Eds.), functionally Graded Material, pp.41-46*
156. Zenkour A.M. *Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Applied Mathematical Modelling* **30**, 67–84 (2006).
157. Zenkour A.M. *A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses. International Journal of Solids and Structures* **42**, 5224–5242 (2005).
158. Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34.
159. Zhang, D.G., Zhou, Y.H. *A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, Comp. Mater. Sci.* **44**, 716–720 (2008).