

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE**

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme : **BARKA Merbouha**

Intitulé de la thèse

# Détermination des températures critiques des plaques FGM

Composition du jury :

Président	TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA
Directeur de thèse	BENRAHOU Kouider Halim	MCA	UDL SBA
Examineur	ADDA BEDIA El Abbas	Pr	UDL SBA
Examineur	HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	U DE MASCARA
Examineur	KACI Abdelhakim	MCA	U DE SAIDA
Examineur	YEGHNEM Redha	MCA	U DE SAIDA

Année universitaire 2016-2017

# **REMERCIEMENTS**

## ***Remerciements***

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbas.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr le professeur **Benrahou Kouider Halim** de m'avoir un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

Je remercie particulièrement Mr le Professeur **Adda Bedia el Abbas**, pour son aide et ses encouragements et je salue en lui ses hautes qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de toujours aller de l'avant. J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr **Tounsi Abdelouahed** Professeur à l'université de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **HOUARI Mohamed Sid Ahmed**, **KACI Abdelhakim**, **YEGHNEM Redha** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers **Bakora Ahmed ; Benyoucef Houria ; A.Kader Fekrar** et l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

# **DEDICACES**

## *Dédicace*

*Je dédie cette thèse*

*À mes parents,*

*À mes frères Hicham, Nasredine, Oussama et Ismail.*

*À mon cher époux*

*À toute ma famille.*

*À mes amis.*

*À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.*

# ملخص

## ملخص

تعرض هذه الدراسة تحقيقا تحليليا عن سلوكيات ما بعد الالتواء للوحات متدرجة وظيفيا (FG) سندويشية تتعرض لحملة ارتفاع درجة الحرارة باستعمال نظرية التشوه القصي و الإجهاد الوظيفي. نفترض أن اللوحة ذات الطبقات على اتصال مع أساس مرن خلال التشويه ، والذي يعمل في كل من الضغط والتوتر. الخصائص الحرارية المرنة الغير متجانسة لطبقات (FG) تتغير بشكل سلس وفقا لتوزيع قوة قانون بسيط من حيث حجم كسور المكونات داخل سمك اللوحة، وباعتماد خصائص المواد مرتبطة بدرجة الحرارة. في هذا التحليل، نأخذ بعين الاعتبار عدم استقامة Von Karman و التشوه الهندسي الأولي للوحة السندويشية. من خلال تطبيق طريقة Galerkin ، يتم تحديد الحلول التحليلية للالتواء الحراري و مسارات التوازن لما بعد الالتواء postbuckling للوحات بدعم البسيط . . الأمثلة العددية الواردة في هذه الدراسة تناقش آثار مؤشر التدرج، وهندسة اللوحة السندويشية، التشوه الهندسي الأولي والاعتماد في درجة الحرارة، ومؤشرات الأساس المرنة.

**الكلمات الدالة:** مواد متدرجة وظيفيا، ما بعد الالتواء الحراري، نظرية التشوه القصي، أساس مرن، التشوه الهندسي الأولي.

# **RESUME**



## **Résumé**

Dans cette article, on examine le comportement post-flambement des plaques sandwich (FG) fonctionnellement gradué sous un chargement de température uniforme élevée basé sur la théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdale et la fonction des contraintes. On suppose que la plaque sandwich est en contact avec une fondation élastique pendant la déformation, ce qui agit l'effet de compression et tension. Les propriétés non homogènes thermo-élastiques des couches FG varient progressive selon une loi de puissance suivant l'épaisseur, et les matériaux de constituants sont dépendant de température dans cette formulation. Dans le présent développement, on prend en compte la non linéarité de Von Karman et l'imperfection géométrique initiale de la plaque sandwich.

Par l'utilisation de la méthode de Galerkin, les solutions analytiques des plaques simplement appuyées de flambement thermique et l'équilibre de post-flambement sont déterminées. Les exemples numériques présentés dans la présente étude sont en fonction des effets de l'indice de gradient, La géométrie de la plaque sandwich, l'imperfection géométrique, la dépendance de température, et les paramètres de fondation élastiques.

**Mots clé :** Matériaux fonctionnellement graduée; Post-flambement thermique; Théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdal; Fondation élastique; Imperfection.

# **ABSTART**

## **Abstract**

In this paper, post-buckling behavior of sandwich plates with functionally graded (FG) face sheets under uniform temperature rise loading is examined based on both sinusoidal shear deformation theory and stress function. It is supposed that the sandwich plate is in contact with an elastic foundation during deformation, which acts in both compression and tension. Thermo-elastic non-homogeneous properties of FG layers change smoothly by the variation of power law within the thickness, and temperature dependency of material constituents is considered in the formulation. In the present development, Von Karman nonlinearity and initial geometrical imperfection of sandwich plate are also taken into account. By employing Galerkin method, analytical solutions of thermal buckling and postbuckling equilibrium paths for simply supported plates are determined. Numerical examples presented in the present study discuss the effects of gradient index, sandwich plate geometry, geometrical imperfection, temperature dependency, and the elastic foundation parameters.

**Keywords:** functionally graded materials; thermal post-buckling; sinusoidal shear deformation theory; elastic foundation; imperfection

# **TABLE DES MATIERES**

# Table des matières

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

INTRODUCTION GENERALE .....	23
<b>CHAPITRE I: GENERALITE SUR LES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES FGM</b>	
I.1 Introduction.....	27
I.2 Concept des matériaux a gradient de propriétés .....	27
I.3 Méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés .....	28
I.3.1 Les procédés à l'état solide: .....	29
I.3.1.1 Compaction Sèche des Poudres .....	29
I.3.1.2 Diffusion collage .....	29
I.3.2. Les procédés à l'état liquide:.....	29
I.3.2.1 Frittage et Infiltration.....	29
I.3.2.2 Coulée par centrifugation (centrifugal casting). .....	30
I.3.3. Procéssus de dépôt .....	30
I.3.3.1 Dépôts laser . .....	30
I.3.3.2 L'électrodéposition.....	30
I.3.3.3 Dépôt physique en phase vapeur : .....	31
I.4 Avantages et inconvénients de la FGM .....	31
I.4 1. Avantages de la FGM .....	31
I.4 .2. Inconvénient de la FGM .....	31
I.5 Domaines d'utilisation des matériaux a gradient de propriétés.....	32
I.6 Lois regissant la variation des proprietes materielles des plaques FGM	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
I.6 .1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	33
I.6 .2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	34
I.6 .3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	35
I.7 CONCLUSION.....	36
<b>CHAPITRE II: LES STRUCTURES SANDWICH</b>	
II.1 INTRODUCTION.....	38
II.2 Définition.....	38

II.3 Les éléments constituant les matériaux sandwiches .....	38
II.3.1 Les peaux.....	38
II.3.2 L'âme.....	39
II.3.3 L'interface .....	39
II.4 Type des structures sandwich.....	39
II.5 Domaines d'utilisation .....	39
II.6 Sollicitations et modes de dégradations des sandwiches.....	40
II.7 Flambement générale des peaux.....	40
II.8 Théorie des plaques sandwich.....	41
II.9 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs.....	41
II.10 CONCLUSION .....	42

### **CHAPITRE III: THEORIE DES PLAQUES FGM**

III.1 INTRODUCTION .....	44
III.2 Les modèles des plaques pour les matériaux a gradient de propriétés.....	44
III. 2.1 Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT).....	44
III.2.2 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de Déformation de cisaillement (FSDT) :.....	45
III.2.3 Le modèle de la plaque basé sur la théorie d'ordre supérieur de la déformation cisaillement (TSDT).....	46
III.3 Phénomène de flambement des structures .....	48
III.3.1 Définition .....	48
III.3.2 Influence des défauts initiaux .....	49
III.4 Flambements locaux et post-flambement des structures raidies.....	50
III.5 CONCLUSION.....	52

### **CHAPITRE IV: LE MODELE THEORIQUE ET LE DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE**

IV.1 INTRODUCTION .....	54
IV.2 Les plaques sandwichs FGM .....	54
IV.3 Formulations mathématiques.....	55
IV.4 Résolution d'équations .....	59
IV.5 CONCLUSION.....	61

### **CHAPITRE V: RESULTATS ET DISCUSSION**

V.1 INTRODUCTION.....	63
V.2 Les propriétés matérielles .....	63
V.3 Etudes comparatives.....	64
V.4 Etudes des paramètres .....	67
V.5 CONCLUSION .....	71

<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>73</b>
----------------------------------	-----------

<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>75</b>
---	-----------

# **LISTE DES FIGURES**

## Liste des figures

<b>Figure I.1 :</b> Microstructure de FGM céramique-métal [Nguyen 2008] .....	27
<b>Figure I.2 :</b> Schéma présente Les deux phases de FGM [Shen 2011] .....	28
<b>Figure I.3 :</b> Conception de l'appareil de filtration (a) à l'aide de pression de gaz contrôlées,(b) à l'aide de pression de liquide contrôlé. [Kieback 2005] .....	30
<b>Figure I.4:</b> Géométrie d'une plaque en FGM.....	33
<b>Figure I.5:</b> La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM .....	34
<b>Figure I.6:</b> La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM .....	35
<b>Figure I.7:</b> Variation du module de Young dans une plaque E-FGM .....	36
<b>FigureII.1 :</b> les structures sandwich [Gay 2003] .....	38
<b>Figure II.2.</b> Les différents types de noyau sandwich. [Herrmann 2005] .....	39
<b>Figure II.3 :</b> différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich. ....	40
<b>Figure II.4.</b> Flambement généralisé des peaux du sandwich [Gognard 2000] .....	41
<b>Figure III.1 :</b> Cinématique de Love-Kirchhoff [Reddy 1997].....	45
<b>Figure III.2 :</b> Cinématique de Reissner-Mindlin [Reddy 1997] .....	46
<b>Figure III.3 :</b> Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	47
<b>Figure III.4 :</b> Comportement d'une poutre en fonction de la déflexion initiale .....	49
<b>Figure III.5 :</b> Comportement d'une plaque supportée, en compression en fonction de la déflexion initiale .....	50
<b>Figure III.6 :</b> Flambement local d'une poutre en « L » [BERTOLINI 2008] .....	51
<b>Figure III.7 :</b> Instabilités locales [BERTOLINI 2008] .....	51
<b>Figure III.8 :</b> (a) Influence du flambement local sur la rigidité structurale et (b) exemple de plissement [BERTOLINI 2008].....	52
<b>Figure IV .1 :</b> Système des coordonnées géométrique de plaque sandwich FG à trois couches reposé sur une fondation élastique. ....	54
<b>Figure. V.1 :</b> Une comparaison des réponses post-flambement de plaque carrée initialement parfait et imparfait sans contact homogène avec celles de donné par [Shen 2007].....	67
<b>Figure. V.2 :</b> Effet de matériau des constituants dépendant de la température sur $\Delta TCr$ ( $k = 1$ , $a / h = 20$ ). ....	67
<b>Figure. V.3 :</b> Effet de la dépendance de la température sur la réponse post- flambement des plaques carrées sandwich parfaites et imparfaites. Les plaques avec tous les bords simplement appuyés immobiles ( $k = 1$ , $a / h = 20$ , $K_w = K_g = 0$ ). ....	68
<b>Figure. V.4 :</b> Effets de la fondation élastique et du rapport d'aspect sur $\Delta TCr$ . Tous les bords sont empêchés de se dilater thermiquement ( $k = 1$ , $h / b = 0,02$ , $\gamma = hH / hf = 4$ , $K_g = 0$ ). ....	69



**Figure V.5 :** Effets de la dépendance à la température et de la fondation élastique sur les courbes température-flèche de la plaque carrée sandwich FG parfait ( $k = 1$ ,  $h / b = 0,04$ ,  $\gamma = h_H / h_f = 4$ ,  $K_g = 0$ ). Tous les bords sont supposé immeubles. .... 69

**Figure V.6 :** Effets de l'imperfection géométrique et de l'indice de la loi de puissance sur la réponse post-flambement de la plaque carrée sandwich FG avec tous les bords simplement appuyée ( $k = 1$ ,  $h / b = 0,04$ ,  $\gamma = h_H / h_f = 4$ ,  $K_g = 20$ ).....70

# **LISTE DES TABLEAUX**

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1 :</b>	Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal. [Nguyen 2008]....	28
<b>Tableau I.2 :</b>	Méthodes de fabrication de FGM [Pai 2004] .....	28
<b>Tableau I.3 :</b>	Les principaux domaines d'application des FGM. [Miyamoto 2013] .....	32
<b>Tableau V.1 :</b>	Les coefficients dépendant de température pour $ZrO_2$ et Ti6Al4V [Kiani2012]. .....	63
<b>Tableau V.2 :</b>	Différence température critique de flambement pour une plaque carrée simplement appuyée en contact avec la fondation élastique de Winkler et soumise à une élévation uniforme de la température. ....	64
<b>Tableau V.3 :</b>	Effet de la dépendance de la température sur une plaque FGM carrée à deux couches. ....	65
<b>Tableau V.4 :</b>	Comparaison de la réponse de flèche thermique d'une plaque carrée mince homogène ( $h/b=0.01$ , $\nu=0.3$ ) parfaite en contact avec fondation élastique Winkler. ....	66

# **LISTE DES NOTATIONS**

## Liste des notations

<b>a, b</b>	: la longueur et largeur de la plaque
<b>E(z), E<sub>c</sub>, E<sub>m</sub></b>	: les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal
<b>h</b>	: l'épaisseur de la plaque
<b>K(z), K<sub>c</sub>, K<sub>m</sub></b>	: la conductivité thermique du FGM, céramique, métal
<b>m, n</b>	: le nombre des demi-ondes dans les deux directions x et y
<b>N<sub>i</sub>, M<sub>i</sub>, S<sub>i</sub>, Q<sub>i</sub></b>	: les résultantes des contraintes
<b>F<sub>x</sub>, F<sub>y</sub></b>	: les forces planes de bords
<b>T</b>	: la température
<b>u, v, w</b>	: les composantes du déplacement
<b>x, y, z</b>	: les coordonnées cartésiennes rectangulaires
<b>α(z), α<sub>c</sub>, α<sub>m</sub></b>	: les coefficients d'expansion thermique du FGM, céramique, métal
<b>γ<sub>xy</sub>, γ<sub>xz</sub>, γ<sub>yz</sub></b>	: les déformations de cisaillement
<b>ε<sub>x</sub>, ε<sub>y</sub></b>	: les déformations normales
<b>ΔT<sub>cr</sub></b>	: le changement dans la température critique de flambement
<b>ν</b>	: le coefficient de Poisson
<b>σ<sub>x</sub>, σ<sub>y</sub></b>	: les contraintes normales
<b>σ<sub>xy</sub>, σ<sub>xz</sub>, σ<sub>yz</sub></b>	: les contraintes de cisaillement

# **INTRODUCTION GENERALE**

## **Introduction générale**

Les comportements de flambement et de post-flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) soumises à des différents types de chargement sont importants pour des utilisations pratiques et ont pris un intérêt considérable. Wu (2004) A utilisé la théorie de la déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) pour déterminer les expressions analytiques des températures critiques de flambement pour les plaques FG simplement appuyées. Le comportement de post-flambement thermo-mécanique des plaques FG basées sur une approche analytique est examiné par Woo et al. (2005).Liew et al. (2003, 2004).Ils ont utilisé la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevée en conjonction avec méthode de quadrature différentielle pour étudier le post-flambement des plaques FG pur et hybride avec et sans imperfection sur le point de vue que le flambement ne se produit pour les plaques FG entièrement serrées.

La réponse de post-flambement des plaques FG pure et hybride soumises à la combinaison de différents types de chargement ont également été étudiées par Shen (2007, 2009) en utilisant la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevée et la technique de perturbation en deux étapes tout en prenant en compte les caractéristiques matériels dépendant de la température .

Zhao et al. (2009) ont étudié les stabilités mécanique et thermique des plaques FG par utilisation de la méthode Ritz (element- free). Lee et al. (2010) ont utilisé la technique de Ritz (element- free) pour étudier le post-flambement des plaques FG sous des charges de compression et thermique. Tung et Duc (2010) ont proposé une analyse analytique simple pour étudier le comportement de flambement et post-flambement des plaques FG minces.

En considérant l'imperfection initiale pour une plaque FG, ils ont démontré que les plaques imparfaites ne suivent pas le type de flambement par bifurcation et commencent à se défléchir par la compression initiale. Ils ont étudié des combinaisons possibles de bords simplement appuyées mobiles et immobiles pour chaque cas de chargement thermo-mécanique.

Tounsi et al. (2013) ont proposé une théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique raffiné pour la flexion thermo-élastique des plaques sandwiches FG. Bachir Bouiadjra et al.(2013) ont présenté une analyse de flambement thermique non linéaire pour plaques FG en employant la théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdal efficace. Ahmed (2014) a étudié le comportement post-flambement des poutres sandwich FG en utilisant la théorie d'ordre élevée.

Swaminathan et Naveenkumar (2014) ont développé une approche analytique pour l'analyse du flambement des plaques sandwiches FG simplement appuyée basée à deux modèles de calcul raffinés d'ordre élevé. Basé sur la théorie de la déformation en cisaillement de méthode trigonométrique efficace et simple, Tebboune et al. (2015) ont présenté une analyse de flambement thermique des plaques FG

reposant sur fondation élastique. Akbaş (2015) a discuté de la propagation d'ondes d'une poutre FG dans un milieu thermique.

Bouchafa et al. (2015) ont analysé les contraintes thermiques et les déformations des plaques sandwich FG en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement raffinée hyperbolique. Bouguenina et al. (2015) ont étudié la stabilité thermique des plaques FGM à épaisseur variable en utilisant la méthode différentielle finie. Laoufi et al. (2016) ont analysé le comportement mécanique et hygrothermique des plaques FG en utilisant une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique. Bourada et al. (2016) ont présenté un nouveau déplacement pour analyser le comportement de flambement des plaques isotropes et orthotropes.

Des travaux complémentaires sur l'analyse de flambement et post-flambement des structures composites laminées et FG sous l'effet de charge thermomécanique sont présentés dans la littérature par Panda et ses collègues (Kar et Panda 2015a,b, 2016a, b, Katariya et Panda 2016, Boudarba et al. 2016, Panda et Katariya 2015, Panda et Singh 2013a, b, c, 2011, 2010a, b, 2009).

L'utilisation croissante des FGM dans différents domaines de l'aérospatiale, automobile, les structures civiles et mécaniques, à cause de leurs propriétés matérielles adaptées à différentes applications dans les conditions d'environnements [Arefi 2015a, b, Hamidi et al. 2015, Darılmaz 2015, Arefi et Allamm 2015, Meksi et al. 2015, Ebrahimi et Dashti 2015, Pradhan et Chakraverty 2015, Kar et Panda 2015a, b, Boukhari et al. 2016, Bounouara et al. 2016, Ebrahimi et Habibi 2016, Hadji et al. 2016, Moradi-Dastjerdi 2016, Bousahla et al. 2016, Ebrahimi et Salari 2016, Trinh et al. 2016].

L'influence de la fondation élastique type Pasternak sur le post-flambement mécanique des plaques FG modérément épaisses est traitée par Yang et al. (2005). Leur travail couvre les plaques avec les quatre bords sont bloqués et la formulation est basée sur la FSDT. Ils ont déterminé l'équilibre de post-flambement basés sur une méthode de quadrature différentielle 2D combinée à la technique de perturbation.

Librescu et Lin (1997) et Lin et Librescu (1998) ont développé des études antérieures (Librescu Et Stein 1991, 1992) pour discuter de la réponse de post-flambement des panneaux composites stratifiés plats et courbés reposant sur des fondations élastiques Winkler. Duc et Tung (2011) ont étudié le post-flambement mécanique et thermique de la plaque FG sur une fondation élastique en utilisant la théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre et la variation simple de la fraction volumique du métal et céramique.

Boudarba et al. (2013) ont étudié le comportement de la flexion thermo-mécanique des plaques FG épaisses reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak.

Zidi et al. (2014) ont étudié la réponse de flexion des plaques FG sur fondation élastique sous charge hygro-thermo-mécanique en utilisant la théorie des plaques raffinées à quatre variables.



Ait Amar Meziane et al. (2014) a présenté la théorie raffinée efficace et simple pour le flambement et la vibration libre des plaques sandwiches exponentiellement graduée sous diverses conditions aux limites et reposant sur les fondations élastiques de Winkler-Pasternak.

Khalfi et al. (2014) a développé une théorie de déformation en cisaillement simple et raffinée pour la stabilité thermique des plaques solaire FG sur fondation élastique. Bakora et Tounsi (2015) ont étudié le post-flambement de comportement thermo-mécanique des plaques épaisses P-FGM reposant sur des fondations élastiques.

Récemment, Chikh et al. (2016) ont examiné le post-flambement thermo-mécanique des plaques symétriques S-FGM reposant sur fondations élastiques type Pasternak en utilisant la théorie de déformation en cisaillement hyperbolique. De plus, des nombres publications concernant l'analyse des structures FGM basées sur les théories déformation en cisaillement d'ordre élevée.

Ce travail présente une formulation analytique simple pour examiner le comportement post-flambement de plaques sandwich avec des feuilles faciales FGM sous l'effet d'élévation uniforme de température. Le modèle actuel est facilement appliqué pour tous les types de chargement avec des charges constantes de pré-flambement qui conduisent un flambement de type bifurcation (bifurcation-type buckling) des plaques simplement appuyées, en considérant que les caractéristiques matérielles des couches FGM suivent la variation de la loi de puissance dans l'épaisseur et, pour les trois couches, les caractéristiques thermo-mécaniques sont dépendantes de température.

Un modèle de fondation élastique type Pasternak à deux paramètres est supposé être en contact pendant la déformation, qui agit à la tension et compression. Enfin, des expressions analytiques sont présentées, ce qui donne correctement le chemin température de réflexion et la température critique de flambement des plaques sandwichs FGM symétriques.

Le plan de thèse s'organise de la manière suivante :

Dans le chapitre I, on a présenté des Généralité sur les matériaux fonctionnellement gradues FGM tels que leur définition, principaux classification et les différents domaines d'applications.

Le chapitre II, présente les modèles analytiques pour étudier les plaques FGM et aussi une analyse de phénomène d'instabilité de flambement pour un élément plaque a été cité.

Dans le chapitre III, nous avons défini les structures sandwichs, les types, leurs utilisations, les sollicitations, les modes de dégradations des sandwichs et aussi les hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs.

Le chapitre IV, est consacré à la formulation analytique pour étudier la réponse de post-flambement des plaques sandwich (FG).

Dans le chapitre V, une approche analytique pour étudier le comportement post-flambement des plaques sandwich FGM à été présentée.

Et enfin, on achève cette étude par une conclusion tout en donnant des perspectives que ce travail ouvre.

**CHAPITRE**

**I**

GENERALITES SUR LES MATERIAUX  
FONCTIONNELLEMENT GRADUEES  
"FGM"

## I.1 INTRODUCTION

Les matériaux composites légers à un rapport de résistance/poids et rigidité/ poids élevés ont été utilisés dans l'industrie des aéronautique et d'autres applications d'ingénierie. Toutefois, le matériau composite traditionnel est incapable d'être utilisé à haute température. En général, les métaux ont été utilisés dans le domaine d'ingénierie depuis des années en raison de leur excellente résistance et ténacité. Dans le cas de matériau composite traditionnel et dans les conditions à haute température, la résistance du métal est réduite. Les céramiques offrent d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur. Toutefois, les applications de céramique sont habituellement limitées en raison de leur faible ténacité.

Récemment, une nouvelle classe des matériaux composites nommée les matériaux fonctionnellement gradués FGM a attiré une attention considérable. Un exemple typique de la FGM, avec un effet de couplage flexion-allongement élevé est un composite hétérogène de matériau constitué fabriqué en différentes phases (généralement de céramique et de métal).

## I.2 CONCEPT DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Les matériaux fonctionnellement gradué FGM sont l'un des matériaux avancés résistant à température élevée, capables de résister aux températures extrêmes. FGM sont des nouveaux matériaux microscopiquement hétérogènes dans lesquels les propriétés mécaniques varient régulièrement et de façon continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé par la variation progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs. [Samsam Shariat 2005]

En réalité, la microstructure des FGM est discrètement et disposées de façon aléatoire comme illustré dans les figures (I.1) et (I.2). La microstructure des FGM se distingue par trois zones différentes : deux zones avec une faible concentration de phases représentent les parties particules- matrice, tandis que la zone intermédiaire est une transition dans laquelle il existe une interface de phases. [Nguyen 2008].

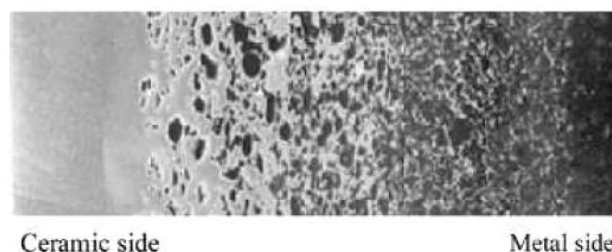


Figure I.1 : Microstructure de FGM céramique-métal [Nguyen 2008]

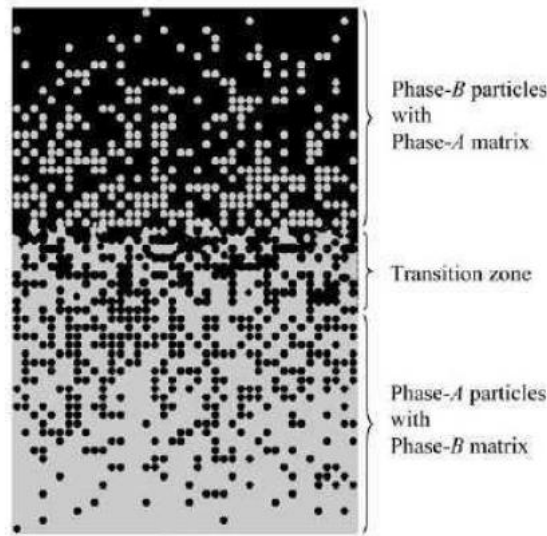


Figure I.2 : Schéma présente Les deux phases de FGM [Shen 2011]

La plupart des FGM sont composés de céramiques et métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau (I.1). Les vides sont également considérés comme une composante de la FGM. Ils peuvent être distribués sur la surface ou à l'intérieur de la structure pour assurer une résistance aux chocs mécaniques derrière l'isolation thermique. [Nguyen 2008]

Face à haut température	Céramique	Bonne résistance thermique bonne résistance à l'oxydation faible conductivité thermique
Les couches intermédiaires	Céramique-métal	Élimination des problèmes d'interface
Face à basse température	métal	Bonne résistance mécanique haute conductivité thermique élevée très bonne ténacité

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal. [Nguyen 2008]

I.3 METHODES D'ELABORATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Les matériaux fonctionnellement gradués sont habituellement sous forme de revêtement de surface, il existe un large éventail de procédés de dépôts de surface en fonction de l'exigence de service du processus [Mahamood 2012], le tableau (I.2) suivant présente quelques procédés de fabrication de FGM.

Les procédés à l'état solide	Les procédés à l'état liquide	Procédés de dépôt
Compaction Sèche des Poudres Diffusion collage	Frittage et Infiltration coulée par centrifugation	Dépôt par vapeur électro-déposition dépôt laser

Tableau I.2 : Méthodes de fabrication de FGM [Pai 2004]

### **I.3.1 Les procédés à l'état solide**

#### **I.3.1.1 Compaction Sèche des Poudres**

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.3.1.2 Diffusion collage**

Ce processus implique la fabrication des structures graduées par l'injection des feuilles métalliques de différentes épaisseur et quantités avec la variation de fraction volumique de la phase de céramique suivie par diffusion de collage à des températures plus élevées. [Pai 2004]

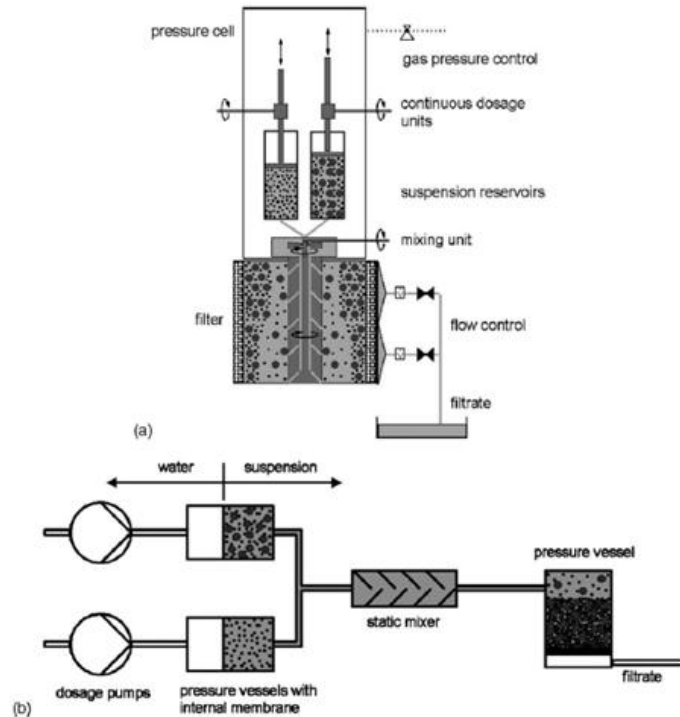
### **I.3.2. Les procédés à l'état liquide:**

#### **I.3.2.1 Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.



**Figure I.3 :** Conception de l'appareil de filtration (a) à l'aide de pression de gaz contrôlée, (b) à l'aide de pression de liquide contrôlé. [Kieback 2005]

### I.3.2.2 Coulée par centrifugation (centrifugal casting):

La méthode suivie par la création de graduation dans la microstructure par l'application de la force centrifuge. Lorsque des particules contenant le coulis sont soumises à la force centrifuge, deux zones sont formées en fonction de la concentration des particules l'une est enrichie et autre appauvrie. En fonction de la densité des particules, les particules légères séparées vers l'axe de rotation, tandis que les particules plus denses s'éloignent de l'axe de rotation. [Pai 2004]

### I.3.3. Processus de dépôt :

#### I.3.3.1 Dépôts laser :

Le laser forme un bassin de métal sur le substrat dans lequel on injecte de poudre métallique. la poudre injectée fusible sur les substrats comme le laser balaie la partie, laissant un cordon de matériel déposé. Le matériel est déposé seulement lorsque le laser frappe la surface. Depuis le laser peut être positionné avec précision, il est facile de déposer du matériel sélectivement réduisant le temps d'usinage autrement requise dans les opérations de traitement ultérieur. [Pai 2004]

#### I.3.3.2 L'électrodéposition :

Electrodéposition ou processus électroformé a été utilisé pour produire des dépôts la graduation fonctionnelle des composites de bi-métal et métal/céramique. [Pai 2004]

### I.3.3.3 Dépôt physique en phase vapeur :

Des structures fonctionnellement gradué contenant des métaux et céramiques sont préparées par la combinaison de dépôt d'un ou de plusieurs éléments de métal vaporisé et l'introduction simultanée d'un gaz réactif conduisant à la formation d'une phase de céramique. [Pai 2004]

## I.4 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients:

### I.4 1. Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc [Narottam P. Bansal 2011]

### I.4 .2. Inconvénient de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec une température de fusion ( $T_2$ ). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ),le céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses. [Narottam P. Bansal 2011]

### I.5 DOMAINES D'UTILISATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure (I.4). Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

	DOMAINE	L'UTILISATION
DOMAINES D'UTILISATIONS DES FGM	Ingénierie	Outils de coupe. Éléments de moteur.
	Aérospatial	Composants de moteur-fusée. Corps des avions spatiaux.
	L'énergie nucléaire	Composants des réacteurs nucléaires. Pastilles de combustible.
	Chimique	L'échangeur de chaleur. Tube de chaleur Récipient de réaction.
	Électronique	Semi-conducteur à bande graduée Capteurs.
	Conversion d'énergie	Générateur thermoélectrique Convertisseur thermoïonique Pile à combustible.
	Optiques	Fibres optiques. Lentilles.
	Produits	Matériaux de constructions. Corps de voiture. Verres de fenêtre.
	Matières biologiques	Implants. Peau artificielle.

Tableau I.3 : Les principaux domaines d'application des FGM. [Miyamoto 2013]

### I.6 LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué FGM peuvent être produits par une variation continue des constituant des matériaux dans un profil. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont



leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

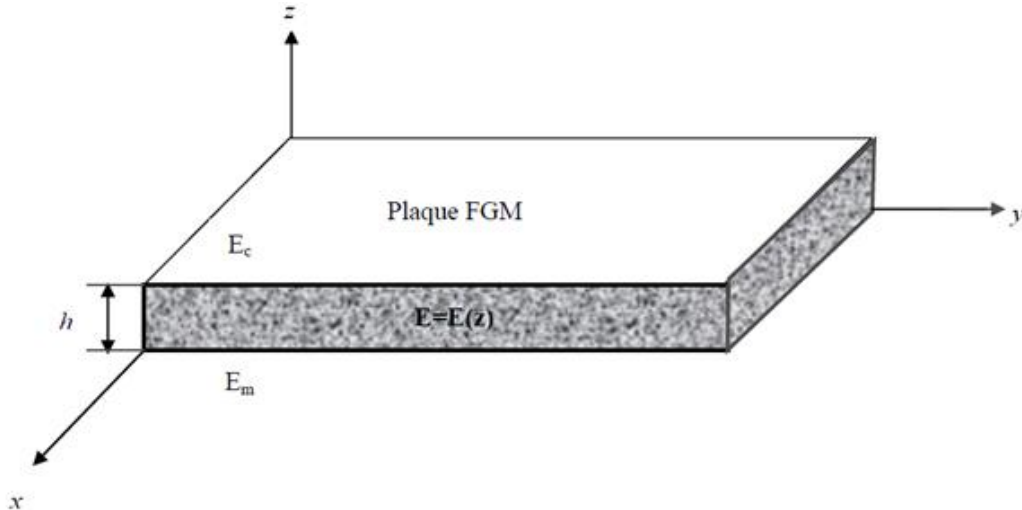


Figure I.4: Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$  ,  $\nu = \nu(z)$  . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.6 .1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Houari 2011] :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où :  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (I.5), il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

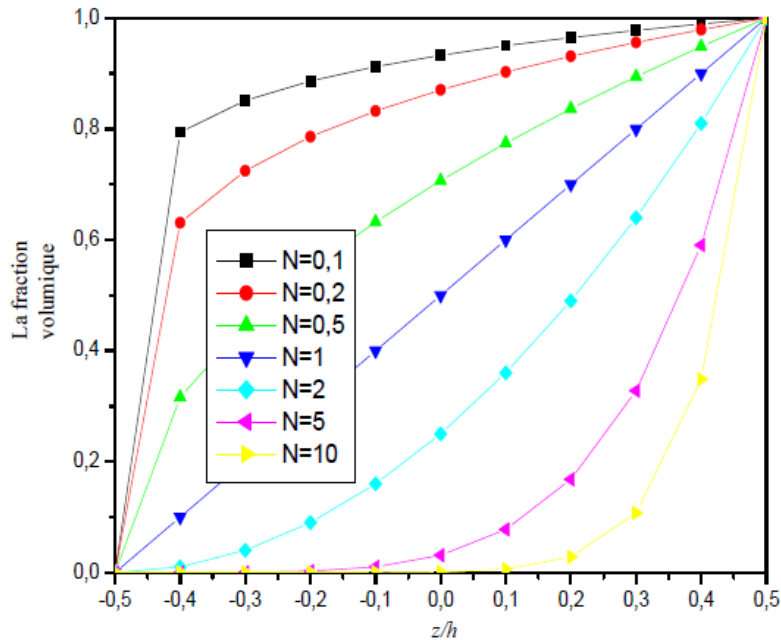


Figure I.5: La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM

### I.6 .2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Houari 2011]. Par conséquent, Chung et chi [Chi . Shyang-ho. 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k & , -h/2 \leq z \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k & , 0 \leq z \leq h/2 \end{cases} \quad (I.3)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = \begin{cases} V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 & , -h/2 \leq z \leq 0 \\ V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 & , 0 \leq z \leq h/2 \end{cases} \quad (I.4)$$

La figure (I.6) montre que la variation de la fraction volumique dans l'équation (I.3) représente la distribution sigmoïde, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

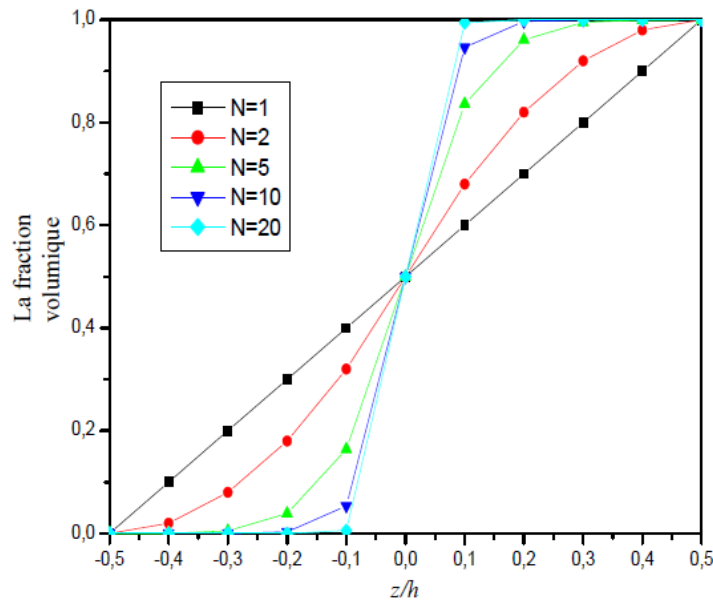


Figure I.6: La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM

### I.6 .3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

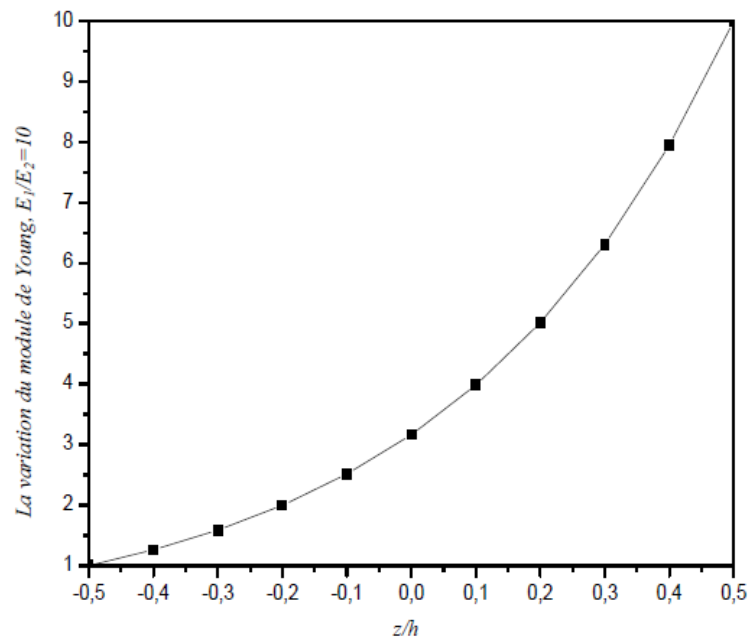
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Ou :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure (I.7).



**Figure I.7:** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

## I.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre. Nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel FGM. Leurs propriétés et leurs domaines d'application. la variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

**II** **CHAPITRE**  
**LES STRUCTURES SANDWICH**

## II.1 INTRODUCTION

L'utilisation des structures en sandwich continue est plus utilisée pour des applications allant des satellites, des avions, des navires, des automobiles, des wagons, des systèmes d'énergie éolienne et de la construction des ponts. Les nombreux avantages des constructions en sandwich : le développement de nouveaux matériaux et le besoin de structures hautes performances et de faible poids garantissent que la construction en sandwich continuera à être demandée.

## II.2 DEFINITION

Sont des matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

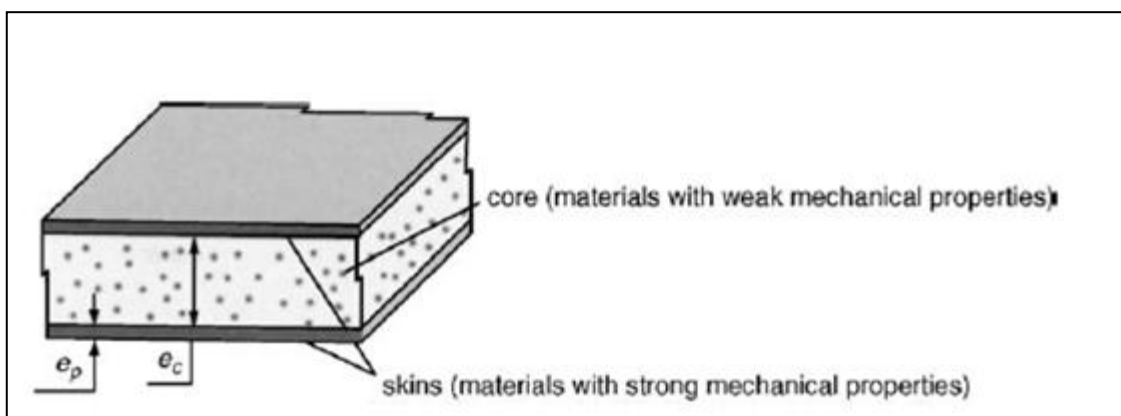


Figure II.1 les structures sandwich [Gay 2003]

La performance globale des structures en sandwich dépend des propriétés des matériaux constitutifs (feuilles de face, adhésif et noyau), des dimensions géométriques et du type de chargement. La conception et l'application appropriées de la construction en sandwich dépendent d'une caractérisation et d'une compréhension approfondies non seulement des matériaux constitutifs du sandwich, mais également de la structure dans son ensemble sous des charges quasi statiques et dynamiques. [Daniel 2009].

## II.3 LES ELEMENTS CONSTITUANTS LES MATERIAUX SANDWICHES

### II.3.1 Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

### II.3.2 L'âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre le cisaillement transverse et les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

### II.3.3 L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

## II.4 TYPE DES STRUCTURES SANDWICH

Aujourd'hui, une grande variété de noyaux sandwich sont appliqués en génie des structures (voir figure II.2). Les types suivants sont discutés plus en détail par [Vinson 1999]

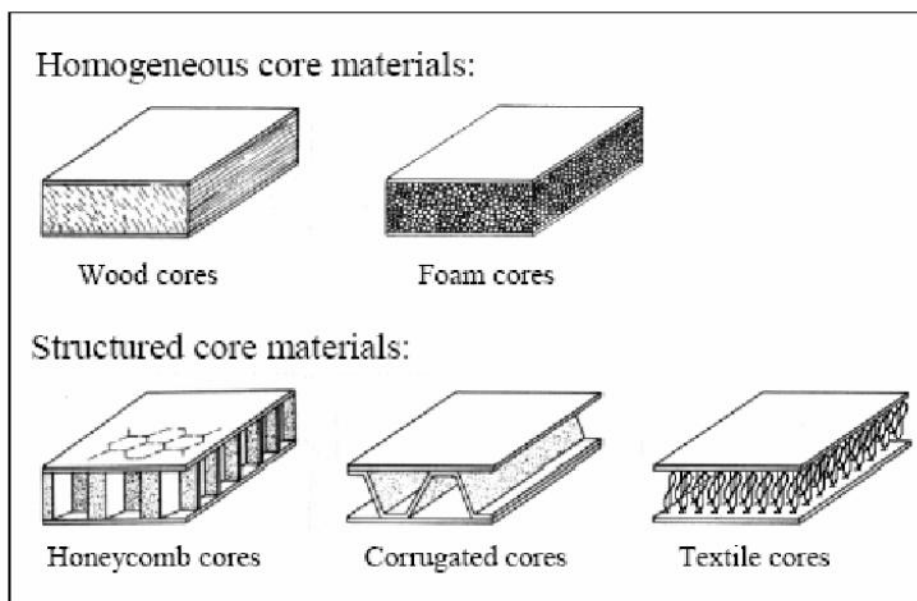


Figure II.2. Les différents types de noyau sandwich. [Herrmann 2005]

## II.5 DOMAINES D'UTILISATION

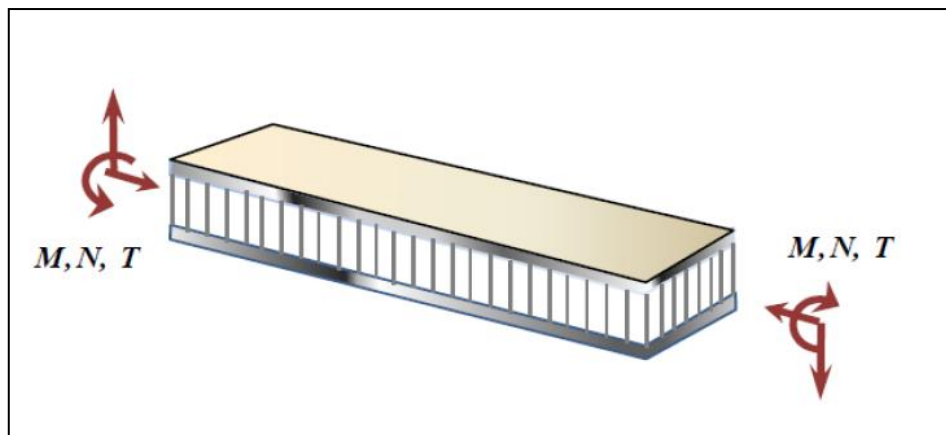
L'usage des structures sandwichs, continue à augmenter rapidement pour diverses applications qui vont des satellites, avions, bateaux, automobiles, voitures sur rail, éoliennes et construction de pont pour n'en mentionner, que quelques-unes. Les performances des structures sandwichs comme matériau, sont en constante évolution avec à chaque fois de nouvelles fonctionnalités comme l'amortissement des vibrations et des bruits, la haute résistance au feu et aux environnements agressifs. Il y a, aujourd'hui, de bonnes raisons de penser que dans la prochaine décennie, les ingénieurs et les constructeurs voudront construire des structures industrielles et des engins de transports encore plus grands et certainement plus légers. Avec la technologie actuelle, il est possible de remplacer de grandes parties des structures et superstructures, souvent en matériau conventionnel, avec un matériau sandwich. Ceci permettra à la

structure d'être plus légère, plus stable et plus économiques grâce à une moindre consommation de fuel. Le sandwich est aussi utilisé par une large gamme de constructions navales et maritimes et de nouveaux marchés sont encore à venir. Les conceptions de terres d'aujourd'hui permettent uniquement l'utilisation du béton, de l'acier et de quelques alliages d'aluminium. Dans le futur le concept du sandwich peut être introduit comme matériau de substitution pour différents modules composant ces structures, telles que les chambres de stockage et l'isolation en période hivernale.

## II.6 SOLLICITATIONS ET MODES DE DEGRADATIONS DES SANDWICHES

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.

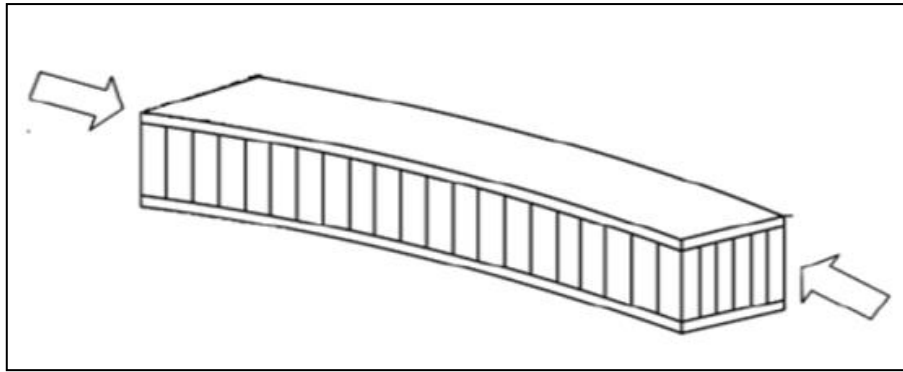


**Figure II.3** : Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.

## II.7 FLAMBEMENT GENERALISE DES PEAUX

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure II.4). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.





**Figure II.4.** Flambement généralisé des peaux du sandwich [Gognard 2000]

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

## II.8 THEORIE DES PLAQUES SANDWICH

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre le cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur  $h_1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h_2$  (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée  $h_c$  et l'épaisseur totale du sandwich  $H$  ( $H = h_1 + h_c + h_2$ ). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen.

## II.9 HYPOTHESES DE LA THEORIE DES MATERIAUX SANDWICHS

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux.
- Les déplacements du cœur  $u_c$  et  $v_y$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
- Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation ( $\epsilon_{zz}$ ) est négligée.

[HADJI 2012]

**II.10 CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons défini les structures sandwich : les types, leurs utilisations, les sollicitations et les modes de dégradations des sandwichs et aussi les hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs.

# CHAPITRE

**III**

THEORIE DES PLAQUES FGM

### III.1 INTRODUCTION

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports et le génie civil. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement des plaques. La littérature sur le thème des études du comportement en linéaire est abondante. Cependant, l'hypothèse des comportements linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, les structures couramment utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux de chargement toujours plus importants. Cela conduit à des déplacements importants, pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable, et nécessitant une modélisation non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est d'écrire un modèle discret représentant le comportement de structures, en non linéaire géométrique. Après une présentation des différents modèles analytiques des plaques possibles

### III.2 LES MODELES DES PLAQUES POUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ( $\epsilon_z = 0$ ), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan  $xy$ ) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. [BELABED 2016] Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

- 1) Les théories classiques des plaques FGM,
- 2) Les théories de premier ordre des plaques FGM,
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques FGM.

#### III. 2.1 Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ). [Houari 2011]

Le modèle de plaque basé sur la théorie classique de la plaque (CPT) satisfait l'hypothèse de Love-Kirchhoff avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à la surface moyenne avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse de love-Kirchhoff néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion

et de la membrane. Une description détaillée des modèles de plaques, y compris le modèle actuel peut être trouvée dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [Timoshenko 1959], Reddy [Reddy 1997] [Reddy 1999]

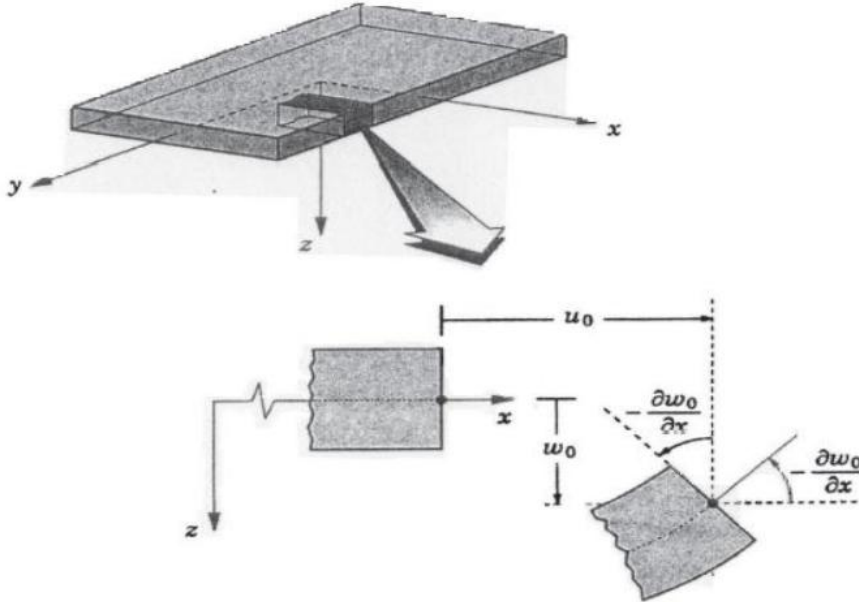


Figure III.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff [Reddy 1997]

Le champ de déplacement résultant provenant de cette hypothèse est linéaire par rapport à l'épaisseur de coordonnée ( $z$ ):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$  sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ( $z=0$ ).

### III.2.2 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de Déformation de cisaillement (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), qui s'étend de la cinématique de la (CLPT) en incluant une déformation en cisaillement transversale dans ses hypothèses cinématiques, c.-à-d. la déformation en cisaillement transversal est supposé être constante par rapport à la coordonné d'épaisseur (figure III.2). La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre nécessite des facteurs de correction de cisaillement. [Carlos 1999]

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans ([Reissner 1945], [Mindlin 1951]) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko 1959], Reddy [Reddy 1997] [Reddy 1999].

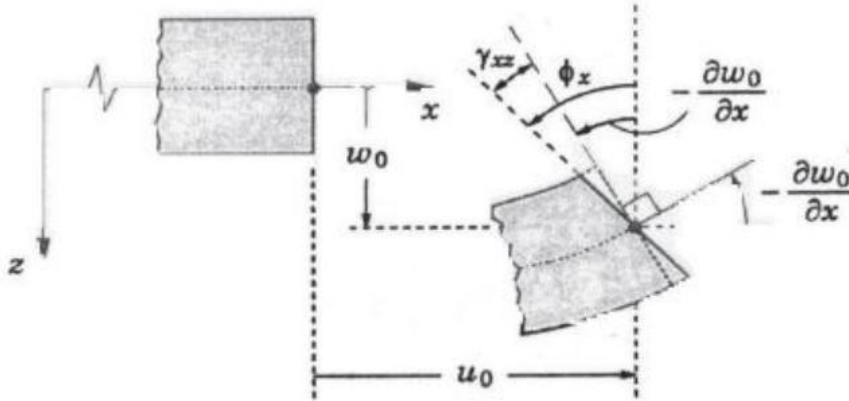


Figure III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin [Reddy 1997]

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des

plaques décrite dans la dernière section par le remplacement  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ .

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### III.2.3 Le modèle de la plaque basé sur la théorie d'ordre supérieur de la déformation cisaillement (TSDT)

Pour améliorer la mauvaise approximation du cisaillement transverse dans des modèles classiques du premier ordre, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées dans la littérature. La plupart de ces théories sont des approches en déplacement et utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement sous la forme suivante:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + x_3^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Où  $n$  détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love  $n = 0$ . La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec  $n = 1$  pour les déplacements dans le plan et  $n = 0$  pour le déplacement normal. La figure (III.3) montre une cinématique schématique d'un modèle d'ordre supérieur.

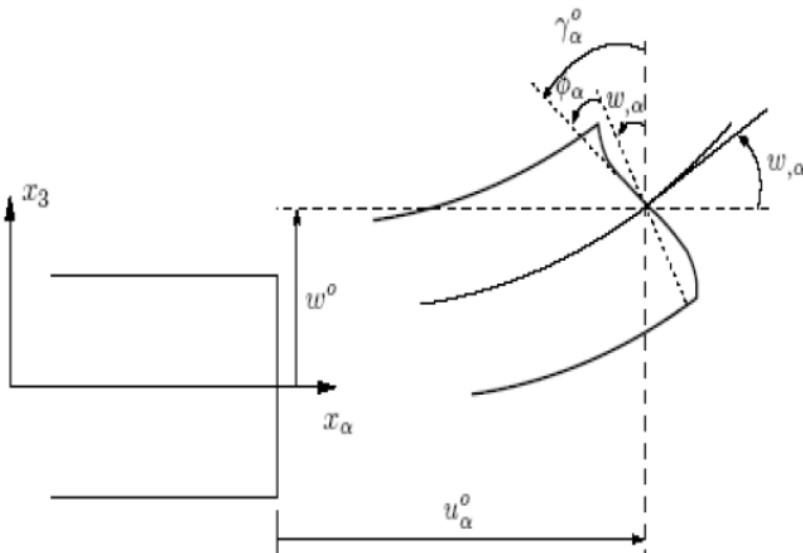


Figure III.3 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans ([Hildebrand 1949]; [Naghdi 1957]; [Reissner 1975]; [Reddy 1984] ; [Kant 2002])

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement  $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y, )$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque

(CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .

Voici quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $\Psi(z)$ :

- Ambartsumyan [Ambartsumyan1969]: 
$$\Psi(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$
- Reissner [Reissner1945], Panc [Panc1975] 
$$\Psi(z) = \frac{5}{2} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$
- Levinson [Levinson 1980], Murthy [Murthy 1981] et Reddy [Reddy 1984]: 
$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

Ou :  $h$  étant l'épaisseur de la plaque.

La plupart de ces modèles adoptés pour étudier la mécanique des plaques en FGMs ont les mêmes cinq inconnus, citons la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Reddy 2000], théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale [Zenkour 2006], théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Ait Atmane 2010] [Benyoucef 2010].

### III.3 PHENOMENE DE FLAMBEMENT DES STRUCTURES

#### III.3.1 Définition

On peut considérer qu'il y a flambement lorsque sous l'action d'une charge axiale et l'introduction d'une charge transversale minime, la structure fléchit et reste dans sa position même après suppression de la charge transversale [VALLAT 1945], [TIMOSHENKO 1968].

Le principe des travaux virtuels permet de mettre en évidence le seuil d'instabilité au-delà duquel apparaît le flambement. Considérant les déplacements virtuels licites de la structure (compatibles avec les conditions aux limites), on peut écrire la variation du potentiel total à partir de l'état initial sous la forme :

$$\delta(V+W) = F_1\delta + F_2\delta^2 + F_3\delta^3 + \dots \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$V$  : le potentiel des efforts extérieurs,

$W$  : le potentiel élastique,

$F_1, F_2, F_3$  : des fonctions des charges appliquées, de la rigidité de la structure et de ses caractéristiques dimensionnelles.

$\delta$  : caractérise l'amplitude infinitésimale de la transformation virtuelle (déplacements).

L'équilibre est stable si  $F_2 > 0$  et instable si  $F_2 < 0$ . On définit par post-flambement le comportement de la structure pour des charges comprises entre la charge de flambement et la charge de rupture de l'ensemble de la structure. Il convient de définir à ce stade les notions de flambement général et de flambement local.



### III.3.2 Influence des défauts initiaux

Rivello [RIVELLO 1969] montre sur des poutres que les défauts initiaux n'ont pas d'influence sur la valeur asymptotique de flambement (Figure III.4). Par contre, la déflexion initiale due aux défauts induit des moments de flexion secondaires et donc une augmentation non linéaire des contraintes dans la structure. Il se peut donc que la rupture ait lieu bien avant le niveau de flambement théorique. La difficulté est alors de savoir si la rupture est due à de la flexion ou à du flambement puisque les deux phénomènes sont couplés.

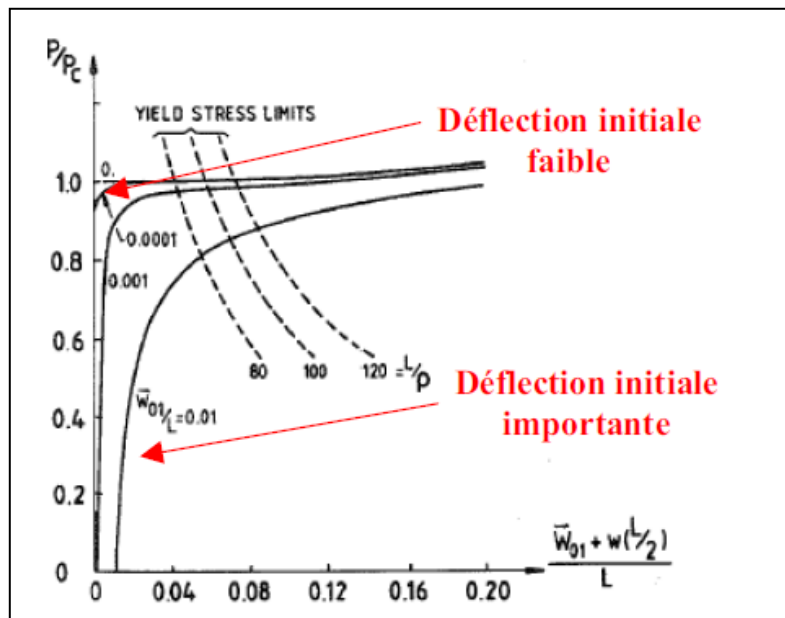
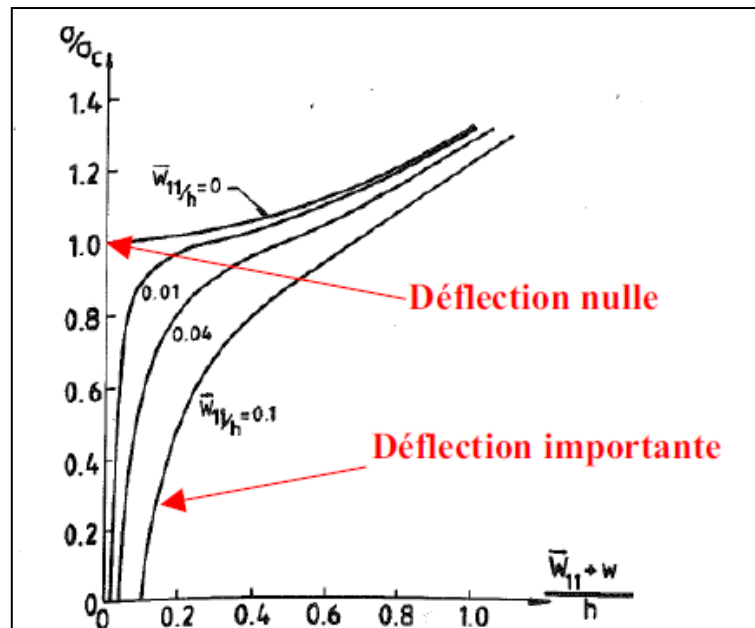


Figure III.4 : Comportement d'une poutre en fonction de la déflexion initiale

Les défauts initiaux peuvent être de deux natures. Ils peuvent être le résultat d'imperfections dues à des aléas de fabrication, mais peuvent également être le résultat d'un montage d'essai désaxé par exemple. Dans ce dernier cas, des moments locaux sont introduits et conduisent à des défauts géométriques avant chargement. D'un point de vue pratique, un léger excentrement dans le chargement, un montage hyperstatique qui induit des flexions locales ou simplement des défauts de fabrication conduisent au même phénomène et à l'apparition d'une flexion induite au cours du chargement.

Pour les plaques et les cylindres, Hu et al [HU 1946] montrent que l'on retrouve globalement les mêmes résultats que pour les poutres. En effet, la déflexion initiale introduit de la flexion au cours du chargement, ce qui engendre un comportement non linéaire important.



**Figure III.5 :** Comportement d'une plaque supportée, en compression en fonction de la déflexion initiale.

#### III.4 FLAMBEMENTS LOCAUX ET POST-FLAMBEMENT DES STRUCTURES RAIDIES

Jusqu'à présent, le flambement a été abordé sur des structures simples pour lesquelles le flambement général est souvent dimensionnant. Sur des structures plus complexes comme les panneaux raidis composés d'éléments poutres (raidisseurs) et d'éléments plaques (peau), il peut exister plusieurs modes de flambement pour une même structure et pour un chargement donné. Les flambements ne concernant qu'une seule partie de la structure sont appelés flambements locaux. Les flambements locaux sont donc une instabilité partielle d'une structure. Il existe deux types de flambements locaux :

- Les flambements locaux conduisant une rupture directe des structures (non admissibles),
- Les flambements locaux ne conduisant pas à la rupture directement (admissibles).

Dans le premier cas (flambements non admissibles), la perte de rigidité de la zone flambée devient critique pour l'ensemble de la structure. Elle s'effond donc car la stabilité ne peut pas être assurée par les zones non flambées. L'exemple Figure (III.6) permet d'illustrer ce phénomène sur une poutre de type « L ». Sur cet exemple, le flambement local d'une aile de la poutre se traduit quasi instantanément par une rupture en flexion de celle-ci.

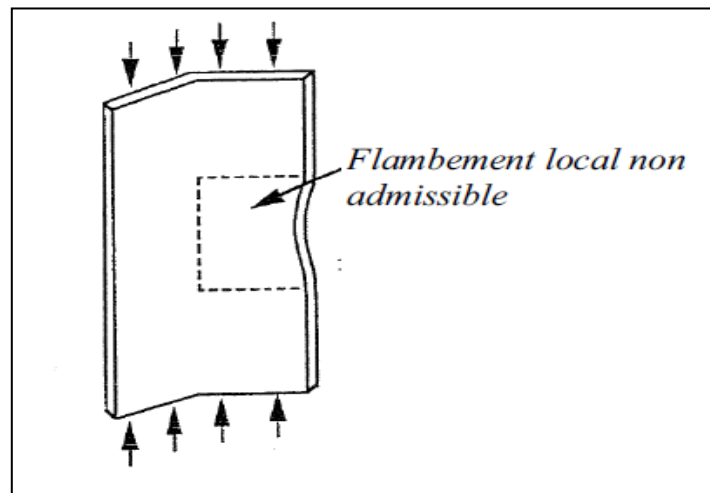


Figure III.6 : Flambement local d’une poutre en « L » [BERTOLINI 2008]

Les panneaux raidis sont sujets aux flambements locaux non admissibles et il s’agit de modes de rupture nécessitant une attention particulière compte tenu de leur criticité. La Figure (III.7) résume l’ensemble de ces flambements locaux.

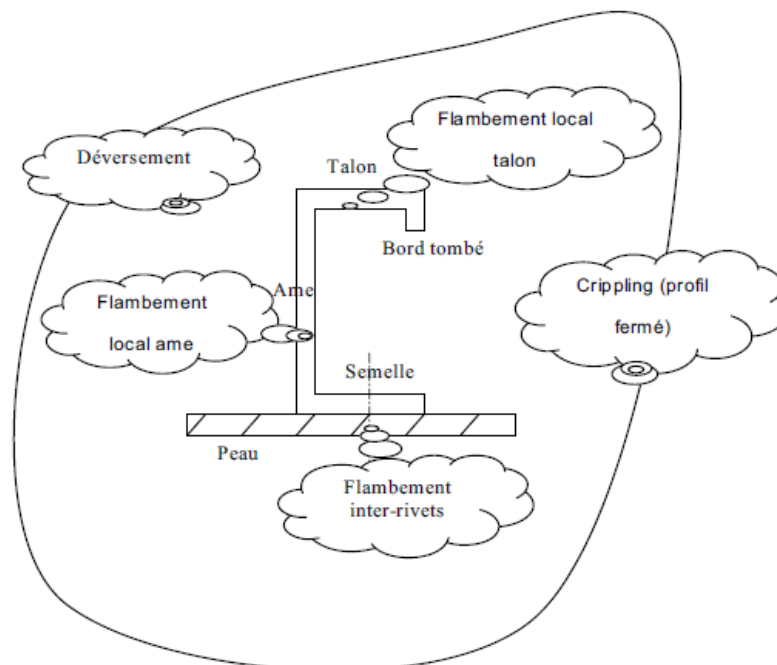


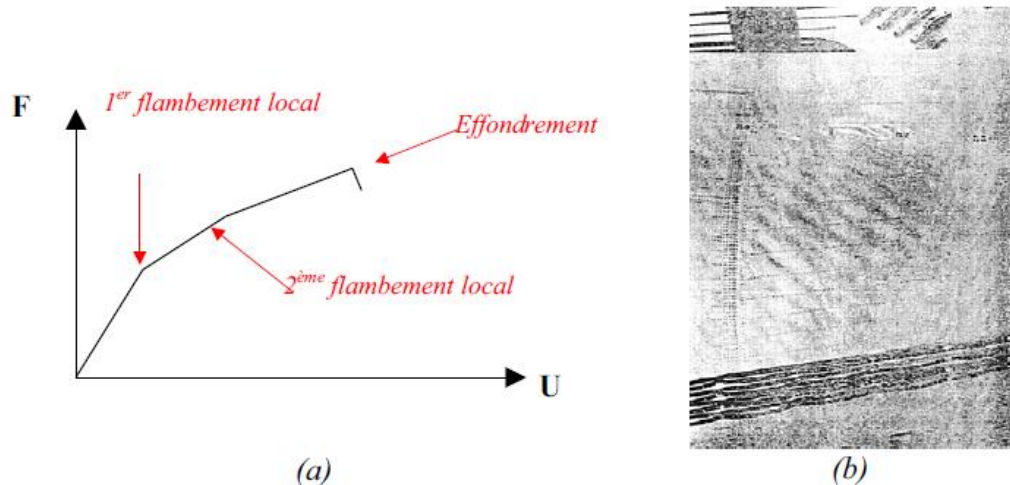
Figure III.7 : Instabilités locales [BERTOLINI 2008]

Chaque partie du raidisseur (âme, talon, semelle) se comporte comme une plaque simple avec des conditions d’appui qui varient entre libre et encastéré. On trouve ainsi des flambements des plaques simples relatifs à chaque partie du raidisseur (talon, âme, semelle..). Le déversement est une instabilité caractérisée par un « affaissement » du raidisseur. Le flambement inter rivets conduit à un « déboutonnage » des raidisseurs. Le « crippling » est une instabilité « de coins ». En effet, il peut arriver qu’après un

flambement local, les coins plus rigides continuent à supporter la charge. Le « crippling » est le mode de rupture relatif à ce phénomène.

En ce qui concerne les flambements locaux admissibles, ils se traduisent par une modification du mode de travail de la structure et l'ensemble continue à supporter les charges appliquées.

Pour les panneaux raidis, le flambement local de la peau (plissement) est généralement le seul type de flambement admissible. Il se produit quand la contrainte critique de flambement de la peau est atteinte et se traduit par une perte de rigidité structurale qui induit une re-répartition des efforts dans la structure. La stabilité de la structure est alors assurée par les parties plus rigides.



**Figure III.8 :** (a) Influence du flambement local sur la rigidité structurale et (b) exemple de plissement [BERTOLINI 2008]

Sur une même structure, il peut se produire plusieurs flambements locaux admissibles avant la rupture comme indiqué Figure (III.8). Cela peut être du par exemple à des largeurs de mailles ou des épaisseurs de peau différentes au sein d'un même panneau, ce qui se traduit par des plissements de peau pour différentes charges. Le plissement est courant sur les structures optimisées et permet généralement de concevoir des structures plus légères. Une fois la charge de plissement passée, la structure travaille en post-flambement. La ruine peut ensuite se produire en flambement général ou suite à un flambement local non admissible.

### III.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les modèles analytiques des plaques FGM tel que de la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff, théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) et théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé.

Enfin, une analyse de phénomène d'instabilité le flambement pour un élément plaque a été citée.

# CHAPITRE

IV

LE MODELE THEORIQUE ET LE  
DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE

IV.1 INTRODUCTION

En ce chapitre, on va présenter une formulation analytique pour étudier la réponse de post-flambement des plaques sandwich (FG) sous un chargement augmenté de température uniforme. Cette formulation est basée sur la théorie sinusoïdale de la déformation en cisaillement et la fonction des contraintes. On suppose que la plaque sandwich est en contact avec une fondation élastique pendant la déformation, ce qui agit l'effet de compression et tension. Par l'utilisation de la méthode de Galerkin, les solutions analytiques des plaques simplement appuyées de flambement thermique et l'équilibre de post-flambement sont déterminées. Les exemples numériques sont présentés dans la présente étude discuté des effets de l'indice de gradient, La géométrie de la plaque sandwich, l'imperfection géométrique, la dépendance de température, et les paramètres de fondation élastiques.

IV.2 LES PLAQUES SANDWICHS FGM

Dans ce travail, on étudie une plaque sandwich rectangulaire symétrique par rapport au plan médian avec trois couches. on considère une configuration de deux feuilles faciales FG semblables et d'un noyau homogène (figure IV .1) [Liew 2004][ Houari 2011][Li 2008]. L'hauteur totale, largeur et longueur de la plaque sont désignés par **h**, **b** et **a**, respectivement. Considérant une simple variation de la loi de puissance dans la direction d'épaisseur, la fraction volumique du constituant métallique de la structure  $V_m$  peut être exprimée sous la forme :

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h}{2h_f}\right)^k, & -\frac{1}{2}h \leq z \leq \frac{1}{2}h_H \\ 1 & , -\frac{1}{2}h_H \leq z \leq \frac{1}{2}h_H \\ \left(\frac{-2z+h}{2h_f}\right)^k, & \frac{1}{2}h_H \leq z \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \quad (IV .1)$$

Ou:  $h_H$  et  $h_f$  sont les épaisseurs de noyau homogène et des feuilles de face, respectivement.

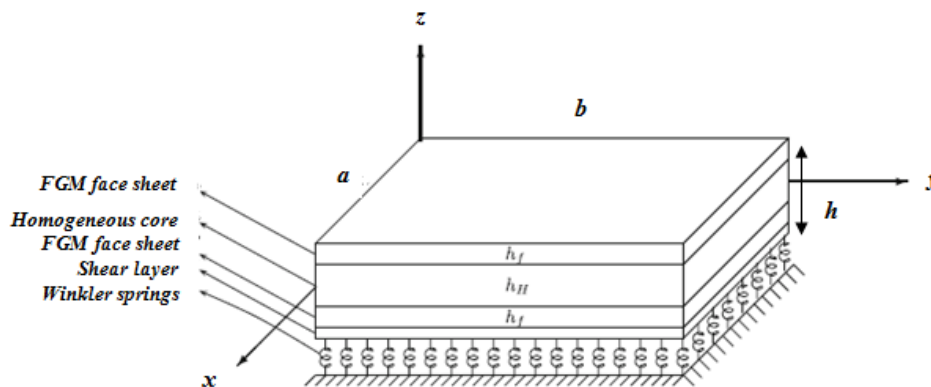


Figure IV .1 : Système des coordonnées géométrique de plaque sandwich FG à trois couches reposé sur une fondation élastique.

Les caractéristiques matérielles de la plaque sandwich FGM peuvent être déterminées avec la loi de mélange [Suresh et Mortensen 1998]. Par conséquent, en employant l'équation (IV.1), les caractéristiques non homogènes (P) de la plaque sandwich par rapport à la coordonnée d'épaisseur deviennent :

$$P(z) = \begin{cases} P_c + P_{mc} \left( \frac{2z+h}{2h_f} \right)^k, & -\frac{1}{2}h \leq z \leq \frac{1}{2}h_H \\ P_m & , -\frac{1}{2}h_H \leq z \leq \frac{1}{2}h_H \\ P_c + P_{mc} \left( \frac{-2z+h}{2h_f} \right)^k, & \frac{1}{2}h_H \leq z \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Où :  $P_{mc} = P_m - P_c$  et  $P_m$  et  $P_c$  sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, Respectivement, et  $k$  est l'indice de gradient qui prend les valeurs supérieures ou égales à zéro. Dans la présente étude, nous considérons que le module d'Young (E) et le coefficient de dilatation thermique ( $\alpha$ ) sont définis par Eq. (IV.2), tandis que le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé constant suivant l'épaisseur [Tung 2010][Bakora 2015][Akavci 2015][Hadji 2015][Kar 2015][Bellifa 2016].

### IV.3 FORMULATIONS MATHÉMATIQUES

Dans ce travail, la théorie sinusoïdale de déformation en cisaillement est utilisée avec la cinématique suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{IV.4})$$

Où :  $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$  sont les quartes inconnues de déplacement de plan moyen de la plaque.

Les équations de déformation-déplacement non linéaires de Von Karman sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \Psi(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \Psi'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV .5})$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + \frac{(w_{0,x})^2}{2} \\ v_{0,y} + \frac{(w_{0,y})^2}{2} \\ u_{0,x} + v_{0,y} + w_{0,x}w_{0,y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV .6})$$

Les relations constitutives linéaires des plaques sandwich FG sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV .7})$$

Où :  $\Delta T$  est l'élévation de température d'un état initial de contrainte ou d'une différence de température entre deux surfaces de la plaque sandwich FG.

En employant le principe de travail virtuel pour minimiser la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale dans les équations d'équilibre non linéaires d'une plaque parfaite avec les deux paramètres de fondation élastique comme :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (\text{IV .8a})$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (\text{IV .8b})$$

$$(M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w = 0 \quad (\text{IV .8c})$$

$$S_{x,x} + S_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (\text{IV .8d})$$

$$S_{xy,x} + S_{y,y} - Q_y = 0 \quad (\text{IV .8e})$$

Où les résultantes des forces et des moments (N,Q,S et M) de la plaque sandwich FGM sont exprimées par :



$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, \Psi(z)) dz, \quad (i = x, y, z) \quad (\text{IV.9a})$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j \Psi'(z) dz, \quad (i = x, y); (j = xz, yz) \quad (\text{IV.9b})$$

Ou les résultantes des forces et des moments (N, Q, S et M) de la plaque sandwich FGM sont exprimées par :

$$(N_x, M_x, S_x) = \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2, E_3) (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0) + (E_2, E_4, E_5) (k_x + \nu k_y) + (E_3, E_5, E_7) (\eta_x + \nu \eta_y) - (1+\nu) (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)] \quad (\text{IV.10a})$$

$$(N_y, M_y, S_y) = \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2, E_3) (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0) + (E_2, E_4, E_5) (k_y + \nu k_x) + (E_3, E_5, E_7) (\eta_y + \nu \eta_x) - (1+\nu) (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)] \quad (\text{IV.10b})$$

$$(N_{xy}, M_{xy}, S_{xy}) = \frac{1}{2(1+\nu)} [(E_1, E_2, E_3) \gamma_{xy}^0 + (E_2, E_4, E_5) k_{xy} + (E_3, E_5, E_7) \eta_{xy}] \quad (\text{IV.10c})$$

$$(Q_x, Q_y) = \frac{1}{2(1+\nu)} E_8 (\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0) \quad (\text{IV.10d})$$

Ou :

$$(E_1, E_4, E_5, E_7) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z\Psi(z), \Psi(z)^2) E(z) dz, \quad (E_2, E_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (z, \Psi(z)) E(z) dz = (0, 0)$$

$$E_8 = \int_{-h/2}^{h/2} (\Psi'(z))^2 E(z) dz \quad (\text{IV.11a})$$

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \Psi(z)) E(z) \alpha(z) \Delta T(z) dz \quad (\text{IV.11b})$$

Les trois dernières équations de l'équation (IV.8) peuvent être exprimées en deux équations en termes des variables ( $w_0$ ) et  $(\Phi_{x,x} + \Phi_{y,y})$  en remplaçant les équations. (IV.6) et (IV.10) dans les équations (IV.8c)-(IV.8e). Par la suite, l'élimination de la variable  $\Phi_{x,x} + \Phi_{y,y}$  de deux équations résultantes, conduit au système d'équations d'équilibre suivant :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (\text{IV.12a})$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (\text{IV.12b})$$

$$\begin{aligned} & (D_2^2 - D_1 D_3) \nabla^6 w + D_1 D_4 \nabla^4 w + D_3 \nabla^2 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w) \\ & - D_4 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12c})$$

Ou :

$$D_1 = \frac{E_4}{(1-\nu^2)}, \quad D_2 = \frac{E_5}{(1-\nu^2)}, \quad D_3 = \frac{E_7}{(1-\nu^2)}, \quad D_4 = \frac{E_8}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.13})$$

Pour une plaque sandwich FG imparfaite, Eq. (IV.12) sont modifiés sous la forme :

$$\begin{aligned} & (D_2^2 - D_1 D_3) \nabla^6 w + D_1 D_4 \nabla^4 w + D_3 \nabla^2 \left[ \begin{aligned} & f_{,yy} (w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy} (w_{,xy} + w_{,xy}^*) \\ & + f_{,xx} (w_{,yy} + w_{,yy}^*) - k_w w + k_g \nabla^2 w \end{aligned} \right] \\ & - D_2 [f_{,yy} (w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy} (w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx} (w_{,yy} + w_{,yy}^*) - k_w w + k_g \nabla^2 w] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Dans laquelle  $w^*(x, y)$  est une fonction connue indiquant une petite imperfection initiale de la plaque. Notons que l'équation (IV.14) a une forme compliquée d'après la théorie sinusoidale de la déformation en cisaillement qui comprend le terme différentiel partiel de 6ème ordre  $\nabla^6 w_0$ . En outre,  $f(x, y)$  est la fonction de contrainte définie par :

$$N_x = f_{,yy}, \quad N_y = f_{,xx}, \quad N_{xy} = -f_{,xy} \quad (\text{IV.15})$$

L'équation de compatibilité géométrique pour une plaque imparfaite est écrite comme suit :

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} + 2w_{0,xy} w_{0,xy}^* - w_{0,xx} w_{0,yy}^* - w_{0,yy} w_{0,xx}^* \quad (\text{IV.16})$$

Les relations constitutives Eqs. (IV.10) et (IV.15) on peut écrire :

$$(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0) = \frac{1}{E_1} [(f_{,yy}, f_{,xx}) - \nu (f_{,xx}, f_{,yy}) + \Phi_1(1,1)] \quad (\text{IV.17})$$

$$\gamma_{xy}^0 = -\frac{1}{E_1} [2(1+\nu) f_{,xy}]$$

En remplaçant l'équation (IV.17) dans l'équation (IV.16), l'équation de compatibilité d'une plaque sandwich imparfaite se transforme :

$$\nabla^4 f - E_1 (w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} + 2w_{0,xy} w_{0,xy}^* - w_{0,xx} w_{0,yy}^* - w_{0,yy} w_{0,xx}^*) = 0 \quad (\text{IV.18})$$

Dans ce travail, on considère une plaque simplement appuyée dans tous les bords où le déplacement normal à bord est empêché aux frontières. Ce type de conditions de bord est également connu des conditions simplement appuyée immobilisé [Shen 2007]. Expression mathématique pour cette classe de supports de bord peut être écrite comme [Shen 2007] :

$$\begin{aligned} w_0 = u_0 = \phi_y = M_x = S_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \quad \text{at } x=0, a \\ w_0 = v_0 = \phi_x = M_y = S_y = 0, \quad N_y = N_{y0} \quad \text{at } y=0, a \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Où :  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$  sont des charges de compression fictives sur des bords immobiliers. Les solutions proposées de (w) et (f) concernant les conditions aux limites Eq. (IV.19) sont considérés comme [Librescu 1997][Lin 1998] :

$$(w, w^*) = (W, \mu h) \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \quad (\text{IV.20a})$$

$$f = A_1 \cos(2 \lambda_m x) + A_2 \cos(2 \delta_n y) + A_3 \sin(\lambda_m x) \sin(\delta_n y) + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 \quad (\text{IV.20b})$$

Où  $\lambda_m = m\pi/a$ ,  $\delta_n = n\pi/b$ , m, n sont des nombres impairs, (W) est l'amplitude de la déviation et ( $\mu$ ) est paramètre d'imperfection. Les coefficients  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont obtenus par substitution des équations (IV.20a),(IV.20b) dans l'équation (IV.18) que :

$$A_1 = \frac{E_1 \delta_n^2}{32 \lambda_m^2} W(W + 2\mu h), \quad A_2 = \frac{E_1 \lambda_m^2}{32 \delta_n^2} W(W + 2\mu h), \quad A_3 = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Ensuite, on introduisant les équations (IV.20a), (IV.20b) dans l'équation (IV.14) et en utilisant la méthode de Galerkin on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( (D_1 D_3 - D_2^2) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^3 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + [k_w + k_g (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] [D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4] \right) \times W \\ & + \frac{E_1}{16} (D_3 (5 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4) + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)) \times W (W + \mu h) (W + 2 \mu h) \\ & + (D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4) \times (N_{x0} \lambda_m^2 + N_{y0} \delta_n^2) (W + \mu h) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Cette équation sera utilisée pour examiner les réponses de flambement et de post-flambement d'épaisseur plaques sandwich FG épaisses sous charges thermiques.

#### IV.4 RESOLUTION D'EQUATIONS

La condition en plan à tous les bords sont immobilier, c-à-d  $u_0 = 0$  à  $x = 0, a$  et  $v_0 = 0$  à  $y = 0, b$ , est donné comme [Tung 2010]:

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} dx dy = 0, \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} dy dx = 0. \quad (\text{IV.23})$$

D'après les équations (IV.6) et (IV.10) on peut obtenir les expressions dans lesquelles l'imperfection de l'équation (IV.15) est inclus :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{E_1} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) - \frac{1}{2} w_{,x}^2 - w_{,x} w_{,x}^* + \frac{\Phi_1}{E_1} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= \frac{1}{E_1} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) - \frac{1}{2} w_{,y}^2 - w_{,y} w_{,y}^* + \frac{\Phi_1}{E_1}\end{aligned}\quad (\text{IV.24})$$

En remplaçant l'équation (IV.20) dans l'équation (IV.24), puis le résultat dans l'équation (IV.23) :

$$\begin{aligned}N_{x0} &= -\frac{\Phi_1}{1-\nu} + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2) W (W + 2 \mu h). \\ N_{y0} &= -\frac{\Phi_1}{1-\nu} + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\nu \lambda_m^2 + \delta_n^2) W (W + 2 \mu h).\end{aligned}\quad (\text{IV.25})$$

Lorsque les efforts dépendant des charges fictives de bord sont ignorée (c'est-à-dire,  $W = 0$ ), Eq. (IV.25) se transforme :

$$N_{x0} = N_{y0} = -\frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (\text{IV.26})$$

En remplaçant l'équation (IV.25) dans l'équation (IV.22), on obtient l'expression de paramètre thermique comme :

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1}{1-\nu} &= \left[ \frac{(D_1 D_3 - D_2^2) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + k_w + k_g (\lambda_m^2 + \delta_n^2)}{D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4} \right] \frac{W}{W + \mu h} \\ &\quad \left[ \frac{E_1 \left[ D_3 (5 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4) + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4) \right]}{16 \left[ D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4 \right] (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \right] \\ &\quad + \frac{E_1 \left[ \lambda_m^4 + 2\nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4 \right] k_w + k_g (\lambda_m^2 + \delta_n^2)}{8(1-\nu^2) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \right] W (W + 2 \mu h)\end{aligned}\quad (\text{IV.27})$$

La plaque sandwich FG est exposée dans un milieu à température uniformément élevée à partir du contrainte de l'état initial  $T_i$  à la valeur finale  $T_f$ , et le changement de température  $\Delta T = T_f - T_i$  est supposé être indépendant de la variation d'épaisseur. Le paramètre thermique  $\Phi_1$  est obtenu à partir de l'équation (IV.11b), et substitution du résultat à l'équation (IV.27) .on obtient :

$$\Delta T = e_1^2 \frac{W}{W + \mu h} + e_2^2 W (W + 2 \mu h) \quad (\text{IV.28})$$

$$e_1^2 = \frac{(1-\nu)}{L [D_3(\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times \left[ (D_1 D_3 - D_2^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) \right] \quad (\text{IV.29a})$$

$$e_2^2 = \frac{E_1(1-\nu)}{16 L (\lambda_m^2 + \delta_n^2) [D_3(\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times \left[ D_3 \left( 5(\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4) + \lambda_m^6 + \delta_n^6 \right) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4) \right] \\ + \frac{E_1 (\lambda_m^4 + 2 \nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4)}{8 L (1+\nu) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \quad (\text{IV.29b})$$

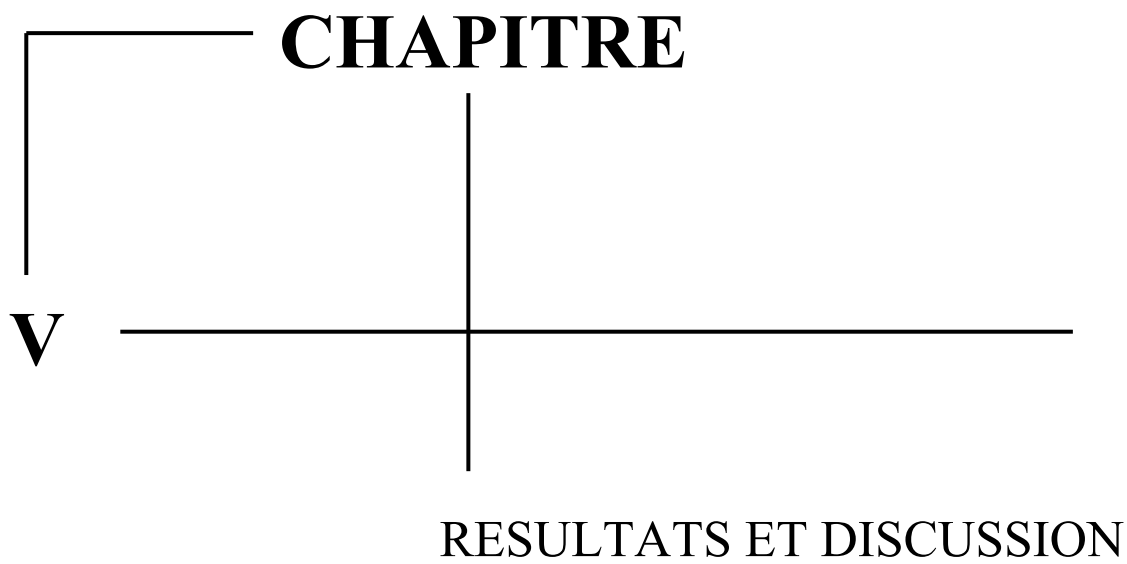
Dans lequel :

$$L = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\alpha(z)dz \quad (\text{IV.30})$$

#### IV.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique du post-flambement thermique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » à partir de champ de déplacement par inclusion d'une fonction sinusoïdale, champ des contraintes et des déformations correspondant ; et les équations d'équilibre d'après le principe de travail virtuel qui inclut les termes de flambement et aussi les paramètres de la fondation élastique type Pasternak.

Les solutions des termes (w) et (f) concernant les conditions aux limites sont déterminés par l'introduction de fonction d'Airy et par la suite l'expression de température critique de post-flambement.



## V.1 INTRODUCTION

L'intérêt de ce chapitre est l'utilisation de la théorie présentée au chapitre précédent pour l'étude du comportement post-flambement de plaques sandwich FGM reposant sur fondation élastique type Pasternak à deux paramètres. Nous exposerons des tableaux de valeurs et des courbes relatives à la plaque sandwich FGM soumise à une élévation uniforme de la température. Nous prendrons en considération la théorie sinusoïdale de la déformation en cisaillement et la fonction des contraintes. On considère fonction de loi de puissance pour la distribution de la matière à travers l'épaisseur et avec une condition au limite simplement appuyée.

## V.2 LES PROPRIETES MATERIELLES

Pour vérifier la formulation proposée, on examine une plaque sandwich FGM à noyau métallique. Les couches FGM sont graduées suivant l'épaisseur. Les matériaux de constituants de FGM sont ZrO<sub>2</sub> et Ti6Al4V. La température de référence  $T_0$  est considérée comme étant de 300 K [Shen 2007][Liew 2004] [Kiani2012]. Les coefficients dépendant de la température sont présentés dans le tableau V.1, et ainsi, chaque propriété peut être calculée comme suit [Kiani2012].

$$P = P_0 \left( 1 + \frac{P_{-1}}{T} + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (\text{V.1})$$

Pour simplifier, on utilise les paramètres non dimensionnels suivants :

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D_0}, K_g = \frac{k_g a^2}{D_0}, D_0 = \frac{E_m^0 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{V.2})$$

Matériaux	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
ZrO <sub>2</sub>					
E (Pa)	244.27e+9	0	-1.671e-3	1.214e-6	-3.681e-10
$\alpha$ (1/K)	12.766e-6	0	-1.491e-3	1.006e-5	-6.778e-11
Ti6Al4V					
E (Pa)	122.56e+9	0	-4.586e-4	0	0
$\alpha$ (1/K)	7.5788e-6	0	6.638e-4	-0.3147e-6	0

**Tableau V.1.** les coefficients dépendant de température pour ZrO<sub>2</sub> et Ti6Al4V [Kiani2012].

Pour la plaque sandwich (ZrO<sub>2</sub> / Ti6Al4V), le coefficient de Poisson est supposé constant et choisi comme  $\nu = 0,29$  [Shen 2007][Liew 2004] [Kiani2012]. La plaque est supposée être simplement appuyée dans les quatre bords avec la capacité de prévention d'expansion des supports de bord.

### V.3 ETUDES COMPARATIVES

Pour la détermination des solutions de flambement et de post-flambement d'après l'approche proposé, Quatre études comparatives sont présentes dans les tableaux (V.2), (V.3), (V.4) et Fig. (V.1).

Le tableau (V.2) montre une étude comparative de la différence température critique de flambement de plaque isotrope homogène déterminée par la présente méthode et les données disponibles dans la littérature ( $k = 0$ ).

$(k_w, k_g)$	$h/b=0.01$	$h/b=0.02$	$h/b=0.05$
(0,0)			
<b>Present</b>	<b>14.36</b>	<b>57.35</b>	<b>354.34</b>
Kiani	14.36	57.35	354.27
Shen	14.37	57.48	359.26
Raju and Rao	14.26	57.04	356.21
$(\pi^4, 0)$			
<b>Present</b>	<b>17.86</b>	<b>71.72</b>	<b>444.16</b>
Kiani	17.95	71.72	444.09
Shen	17.96	71.85	449.07
Raju and Rao	17.86	71.45	446.56
$(2\pi^4, 0)$			
<b>Present</b>	<b>21.55</b>	<b>86.10</b>	<b>533.97</b>
Kiani	21.55	86.09	533.90
Shen	21.56	86.22	538.89
Raju and Rao	21.47	85.86	536.64
$(5\pi^4, 0)$			
<b>Present</b>	<b>32.33</b>	<b>129.21</b>	<b>803.42</b>
Kiani	32.33	129.20	803.34
Shen	32.33	129.33	808.33
Raju and Rao	32.27	129.08	806.77

Dans tous les cas ( $m=n$ )=(1.1)

**Tableau V.2** : Différence de température critique de flambement pour une plaque carrée simplement appuyée en contact avec la fondation élastique de Winkler et soumise à une élévation uniforme de la température.

La solution de problème de post-flambement thermique dans les études de [Shen 1997][ Raju 1988] est déterminée sur la base de la méthode des perturbations régulières et des éléments finis non linéaires itératifs, respectivement, et la solution dans l'étude de [Kiani2012] est basée sur FSDT. Cependant, la



présente solution est basée sur la théorie sinusoïdale de déformation en cisaillement et la fonction de contrainte. Comme on l'a observé, dans ce cas, la comparaison est bien démontrée.

Le tableau (V.3) présent la différence de température de flambement pour une plaque FGM à deux couches et les résultats sont comparés à ceux donnés par [Shen 2007] sur la base d'une méthode de perturbation itérative en deux étapes.

	$k$					
	0	0.2	0.5	1	2	5
(T-ID)						
<b>Present</b>	<b>354.3428</b>	<b>315.9042</b>	<b>279.5835</b>	<b>247.6850</b>	<b>219.2483</b>	<b>193.0968</b>
Kiani	354.2707	315.9903	279.7846	247.9336	219.4674	193.2106
Shen	354.3356	315.9033	279.5919	247.7017	219.2681	193.1101
(T-D)						
<b>Present</b>	<b>321.3564</b>	<b>226.7279</b>	<b>187.6934</b>	<b>163.1828</b>	<b>144.9072</b>	<b>129.5516</b>
Kiani	321.3050	226.8111	187.6975	163.1947	144.9294	129.6938
Shen	321.3503	226.7268	187.6960	163.1888	144.9149	129.5569

**Tableau V.3** Effet de la dépendance de la température sur une plaque FGM carrée à deux couches.

Les caractéristiques des matériaux dépendant et indépendant de la température sont prises en compte et nommés T-D et T-ID, respectivement.

Le tableau (V.4) montre le comportement de post-flambement thermique d'une plaque carré isotrope homogène en contact avec la fondation élastique Winkler et effectuée une comparaison avec les données dans la littérature. Les résultats donnent le paramètre thermique non-dimensionnel défini par

$$\lambda_T = \frac{12(1+\nu)\alpha \Delta T b^2}{h^2 \pi^2}. \text{ Cet exemple démontre la précision et l'efficacité de la présente formulation.}$$

$k_w$	$W/h$					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
<b>Present</b>	<b>1.9989</b>	<b>2.1042</b>	<b>2.4202</b>	<b>2.9469</b>	<b>3.6842</b>	<b>4.6322</b>
Kiani	2.0000	2.1053	2.4212	2.9477	3.6848	4.6325
Shen	2.0000	2.1054	2.4231	2.9571	3.7144	4.7049
Rajo and Rao	1.9847	2.1058	2.4170	2.9528	3.7136	4.6990
$\pi^4$						
<b>Present</b>	<b>2.4989</b>	<b>2.6042</b>	<b>2.9202</b>	<b>3.4469</b>	<b>4.1842</b>	<b>5.1322</b>
Kiani	2.5000	2.6053	2.9212	3.4477	4.1848	5.1325
Shen	2.5000	2.6054	2.9232	3.4576	4.2160	5.2088
Rajo and Rao	2.4860	2.5897	2.9181	3.4540	4.2322	5.2174
$2\pi^4$						
<b>Present</b>	<b>2.9989</b>	<b>3.1042</b>	<b>3.4202</b>	<b>3.9469</b>	<b>4.6842</b>	<b>5.6322</b>
Kiani	3.0000	3.1053	3.4212	3.9477	4.6848	5.6325
Shen	3.0000	3.1054	3.4233	3.9581	4.7177	5.7129
Rajo and Rao	2.9874	3.0911	3.4197	3.9556	4.7335	5.7018

**Tableau V.4** Comparaison de la réponse de flèche thermique d'une plaque carrée mince homogène ( $h/b=0.01$ ,  $\nu=0.3$ ) parfaite en contact avec fondation élastique Winkler.

Dans la Fig. (V.1), pour confirmer la précision de la présente formulation dans le cas d'une plaque parfaite et imparfaite (sans fondation élastique), les résultats du présent travail sont comparés à ceux donnés dans [Shen 2007] pour une plaque carrée homogène épaisse ( $h/b = 0,1$ ), lorsque les matériaux sont considérés indépendants de la température. Comme le montrent les tableaux (V.2), (V.3), (V.4) et Fig. (V.1), les comparaisons sont bien démontrées.

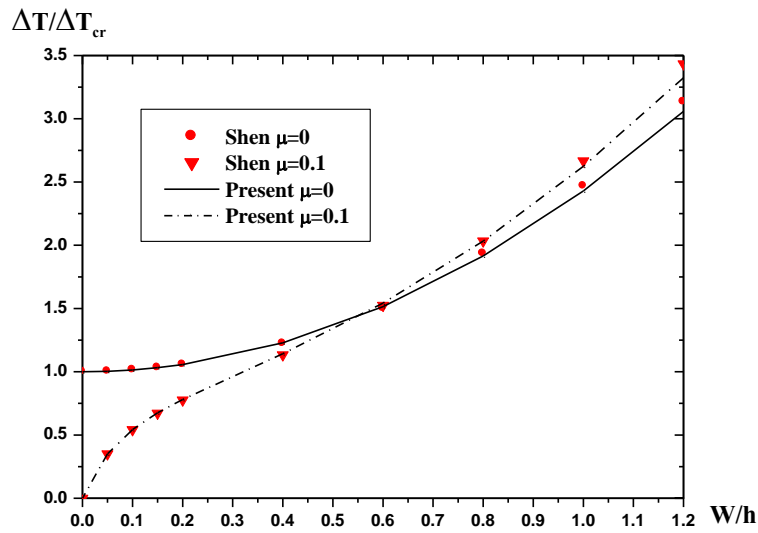


Figure. V.1 Une comparaison des réponses post-flambement de plaque carrée initialement parfait et imparfait sans contact homogène avec celles de donné par [Shen 2007].

V.4 ETUDES DES PARAMETRES

La figure (V.2) montre l'effet de la dépendance de la température des constituants du matériau sur la différente température critique du flambement d'une plaque carrée sans fondation élastique ( $K_w = K_g = 0$ ).

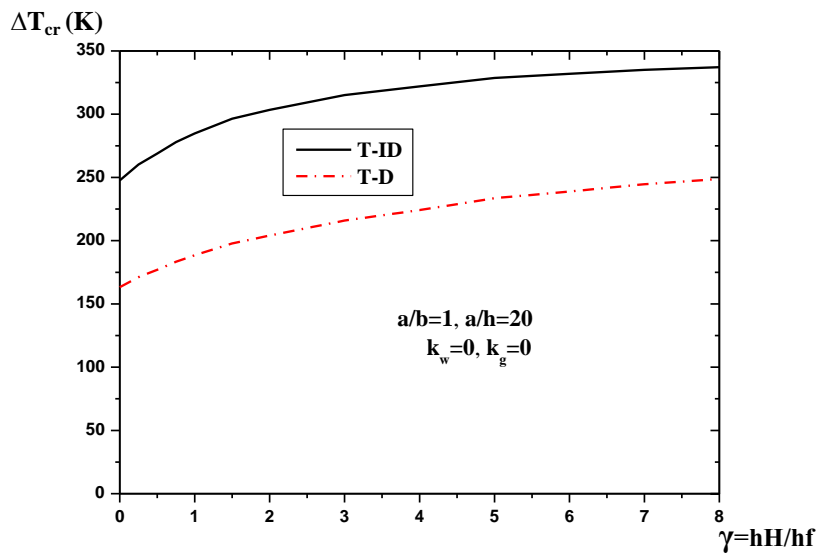
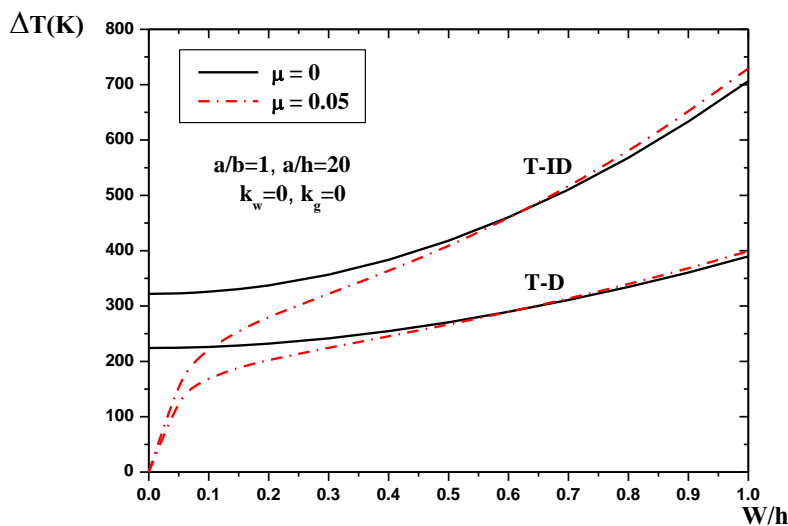


Figure. V.2 Effet de matériau des constituants dépendant de la température sur  $\Delta T_{Cr}$  ( $k=1, a/h=20$ ).

La composition linéaire des constituants du matériau est supposée pour les feuilles de face, et les autres paramètres sont  $b/a=20, h/b=1$ . Comme on l'a observé, l'effet des caractéristiques des matériaux

dépendant de la température est significatif sur  $\Delta T_{Cr}$ . Par conséquent, lorsque la dépendance à la température n'est pas considérée, les températures critiques du flambement deviennent considérables. La différence de température critique de flambement des plaques sandwich augmente de façon permanente lorsque l'épaisseur du noyau métallique augmente, car le coefficient de dilatation thermique de constituant céramique est beaucoup plus élevé que celui du métal.

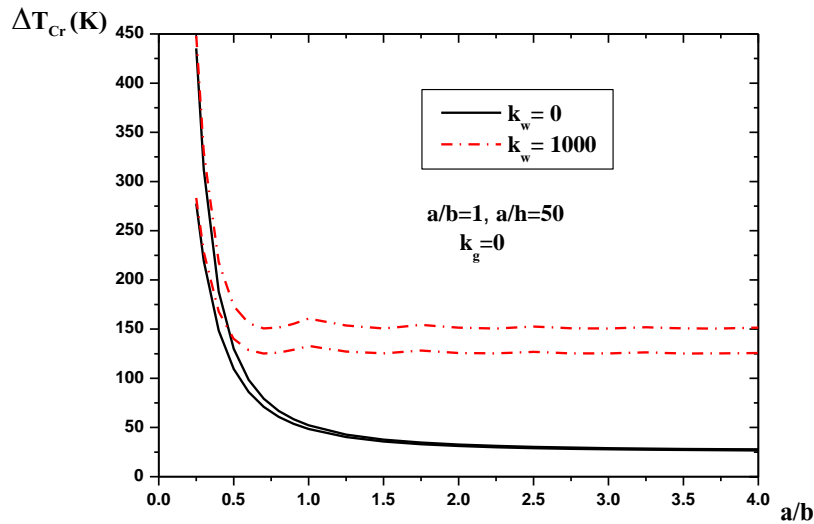
L'effet de la dépendance de la température des constituants du matériau sur la réponse post-flambement des plaques sandwich est présenté dans la Fig.(V.3). Comme on peut le constater, pour la plaque parfaite, nous trouvons un point de bifurcation dans lequel se produit le flambement, tandis que pour les plaques imparfaites, il n'y a pas de point de flambement et la plaque commence à la flèche latérale par initiation de la charge thermique. De plus, l'incidence de la dépendance de la température est importante, où les courbes de post-flambement des plaques parfaites et imparfaites deviennent plus faibles. Notez que lorsque  $W/h$  devient plus grande, l'effet des propriétés de la dépendance de la température est plus important. Comme la plaque se déforme de plus en plus, les courbes sont fortement descendues lorsque la dépendance de la température est considérée.



**Figure. V.3** Effet de la dépendance de la température sur la réponse post- flambement des plaques carrées sandwich parfaites et imparfaites. ( $k = 1$ ,  $a / h = 20$ ,  $K_w = K_g = 0$ ).

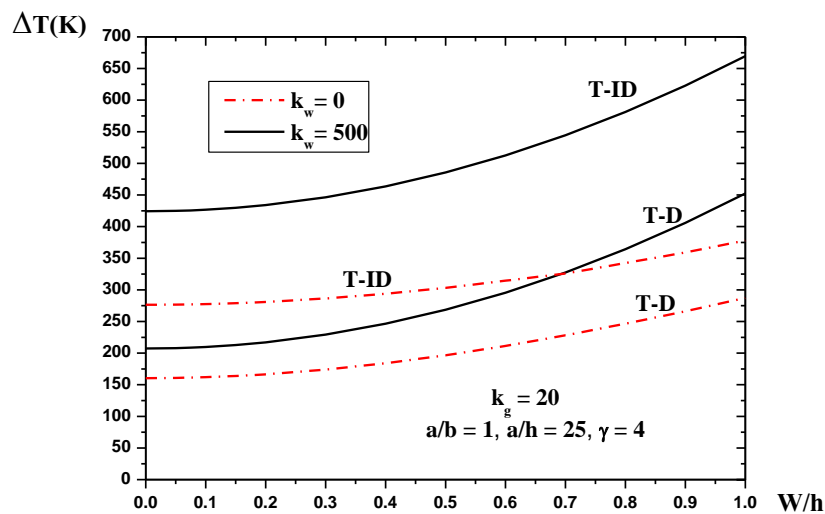
Figure. (V.4) démontre l'influence de la fondation élastique sur la différence de température critique de flambement des plaques sandwich parfaites. Comme on peut l'observer, le paramètre de Winkler de l'élastique la fondation retarde le point de bifurcation des plaques par rapport à une plaque sans fondation. Pour les plaques sans fondation élastique, les courbes T-D et T-ID sont complètement lisses.

Le paramètre Winkler de fondation élastique modifie directement les modes de flambement de la plaque. Comme on l'a observé, pour les plaques avec / sans fondation élastique, la température critique de flambement est presque constante lorsque  $a/b > 2$ . Cependant, ces valeurs constantes sont obtenues sous différentes formes de voilement de la plaque.



**Figure. V.4** Effets de la fondation élastique et du rapport d'aspect sur  $\Delta T_{Cr}$ . ( $k = 1$ ,  $h / b = 0,02$ ,  $\gamma = hH / hf = 4$ ,  $Kg = 0$ ).

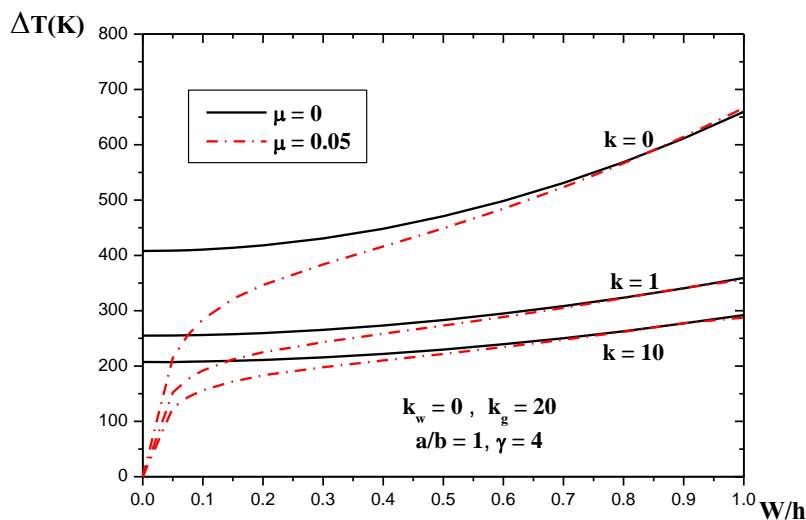
La figure (V.5) montre l'influence de la fondation élastique sur la réponse post-flambement de la plaque sandwich carrée.



**Figure. V.5** Effets de la dépendance à la température et de la fondation élastique sur les courbes température-flèche de la plaque carrée sandwich FG parfait ( $k = 1$ ,  $h / b = 0,04$ ,  $\gamma = hH / hf = 4$ ,  $Kg = 0$ ).

Les cas T - D et T - I D sont présentés pour assurer l'importance de l'influence de la dépendance de la température. Comme on pouvait s'y attendre, les plaques sur fondation élastique présentent une courbe de déformation post-flambement de la plaque très élevée dues à l'opposition de la fondation élastique. L'influence de la dépendance de la température est présentée, et on remarque que pour les plaques sandwich sur fondation élastique, l'effet de la dépendance de température du constituant du matériau est plus important.

La figure (V.6) présente les courbes de charge- flèche des plaques sandwich parfaites et imparfaites avec différents types de feuilles de face FG ( $k = 0, 1, 10$ ). Une fondation élastique avec coefficient de Winkler  $K_w = 0$  et coefficient de Pasternak  $K_g = 20$  résiste à la déviation de la plaque.



**Figure V.6 :** Effets de l'imperfection géométrique et de l'indice de la loi de puissance sur la réponse post-flambement de la plaque carrée sandwich FG ( $h / b = 0,04$ ,  $\gamma = h_H / h_f = 4$ ,  $K_g = 20$ ).

Pour obtenir les courbes de charge-flèche des figures. (V.2), (V.3), (V.4), (V.5), pour obtenir des courbes de charge- flèche, la dépendance de la température des constituants du matériau doit être considérée, et par conséquent, dans la Fig. (V.6), seul T - D est examiné. Notez que pour les plaques imparfaites, il n'y a pas de réponse de bifurcation et les courbes sont complètement lisses. Aucun changement brusque n'est observé dans la courbe température-flèche. Cela signifie que les plaques géométriquement imparfaites présentent des flexions lorsqu'elles sont soumises à une charge thermique uniforme, alors que des plaques parfaites suivent un flambement de type bifurcation.

Comme on observe, en raison de la configuration symétrique du plan médian de la structure et de l'immobilité des conditions aux limites, la plaque reste non déformée dans état de pré-flambement, alors qu'un chemin d'équilibre non linéaire existe en régime de post flambement. Lorsque l'indice de loi de puissance des couches FG augmente, les courbes température- flèche descendent. Notons toutefois que

l'imperfection initiale a des influences importantes sur la réponse primaire de la plaque; Cet effet disparaît si quelqu'un suit le chemin de post-flambement de la plaque.

Comme la plaque se plie de plus en plus, les courbes associées à l'imparfaites et parfaites présentent la même réponse.

## **V.5 CONCLUSION**

Dans ce chapitre, une approche analytique pour étudier le comportement post-flambement des plaques sandwich avec des feuilles faciales FGM supposées sur des fondations élastiques et soumises à une charge d'élévation uniforme de température. La dérivation est basée sur la théorie sinusoïdale de déformation en cisaillement des plaques et le concept de la fonction de contrainte, avec l'hypothèse d'une composition de loi de puissance pour les matériaux constitutifs des couches FGM.

# **CONCLUSION GENERALE**



## **Conclusion générale**

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans ce présent travail, une approche analytique pour étudier le comportement post-flambement des plaques sandwich avec des feuilles faciales FGM supposées sur des fondations élastiques et soumises à une charge d'élévation uniforme de température. La dérivation est basée sur la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques et le concept de la fonction de contrainte, avec l'hypothèse d'une composition de loi de puissance pour les matériaux constitutifs des couches FGM. Les conditions aux limites de la plaque sur tous les bords sont supposées être simplement appuyées par la prévention de la dilatation thermique. La dépendance de la température des couches de noyau, de FGM et l'imperfection géométrique initiale de la plaque FGM sont également considérées dans ce travail. Il est conclu que:

- La dépendance de la température des constituants du matériau a un effet considérable sur le flambement thermique et la trajectoire de post-flambement. Les températures critiques sont surévaluées lorsque les matériaux sont considérés comme indépendants de la température. En outre, les courbes température-flèche sont surestimées lorsque l'indépendance de température est considérée.
- L'imperfection géométrique de la plaque a une influence considérable sur le chemin d'équilibre de la plaque. Les plaques parfaites symétriquement par rapport au plan moyen, suivent un flambement du type bifurcation, et par conséquent, des chemins de post-flambement existent, tandis que des plaques imparfaites présentent une flexion avec le début de la charge thermique en plan.
- Pour les plaques avec tous les bords immobilisés et sans fondation élastique, le flambement thermique se produit dans les premiers modes, tandis qu'une fondation élastique peut augmenter les modes de flambement de la plaque. L'augmentation de chacun des paramètres de fondation élastiques augmente la température critique. Le paramètre Winkler de la fondation élastique a une influence importante sur les modes de flambement, tandis que les modes de flambement des plaques sont indépendants du paramètre Pasternak de fondation élastique.

**REFERENCES**  
**BIBLIOGRAPHIQUES**

**CHAPITRE I:**

[**Bishop 1993**] Bishop, a, lin, c.y. navaratnam, m. rawlings.r.d mc. chane a functionallygraded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters 1993.

[**Chi . Shyang-ho. 2003**]Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.

[**Hamidi 2015**]Hamidi ahmed, comportement thermomecanique des plaques sandwiches non symetriques en FGM : cas de la flexion,thèse de doctorat université djilali liabes ,2015 page 30

[**Houari 2011**] :HOUARI Mohammed Sid Ahmed,Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances, thèse de doctorat université djilali liabes ,2011

[**Kieback 2005**]:B.kieback,a.neubrand,h.riedel,processing techniques for functionally graded materials,material science and engineering a362 (2003) 81-105

[**Mahamood 2012**]:Rasheedat m.Mahamood,esther t.akinlabi member.laeng.mukul shukla and sisa pityana ;functionally graded material :an overview ;proceeding of the world congress on engineering 2012 **vol iii**

[**Miyamoto 2013**]Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford,Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications,Springer Science & Business Media;2013, p 4-5.

[**Narottam 2011**]Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi ,Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions ;John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011 .

[**Nguyen 2008**]: Trung-Kien Nguyen , quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, thèse de doctorat université paris-est ,2008 page 30-31.

[**Pai 2004**]B.C.Pai,R.M.Pillai and T.P.D.Rajan,functionally graded materials and composites for engineering applications,regional research laboratory,thiruvananthapuram-695 109

[**Samsam Shariat 2005**]B.A.Samsam Shariat ,R.Javaheri,M.R.Eslami,buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading,thin-walled structure 43 (2005) 1020-1036.

[**Shen 2011**] Hui-Shen Shen, functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells,crc press,2011.

**CHAPITRE II:**

[**Ait Atmane 2010**] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6 (2010) 113-121.

[**Ambartsumyan1969**] Ambartsumyan S.A., Theory of anisotropic plate,. Tech Publishing Co,1969.

[**Belabed 2016**] BELABED Zakaria, Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes, these de doctorat en sciences, 2015-2016, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes.

[**Benyoucef 2010**] S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi, A. Fekrar, H. Ait Atmane, E.A. Adda Bedia, Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mech. Comp. Mat.* 46 (2010) 425-434.

[**BERTOLINI 2008**] Julien BERTOLINI ; Contribution à l'analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs ; thèse de doctorat 2008, Université De Toulouse.

[**Carlos 1999**] Carlos A. Mota Soares, Cristóvão M. Mota Soares, Manuel J. M. Freitas, Mechanics of composite materials and structures, 1999 , Springer, page 6.vol.361,1999.

[**Hildebrand 1949**] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N.* N°:1833, 1949.

[**Houari 2011**] :HOUARI Mohammed Sid Ahmed, Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances, thèse de doctorat université djilali liabes ,2011

[**HU 1946**] Hu P.C, Lundquist, R.E and Batdorf, .B, "Effect of small deviations from flatness on effective width and buckling of plates in compression", *NACA TN* 1124, 1946.

[**Kant 2002**] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.

[**Levinson 1980**] Levinson M. ,An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates,. *Mechanics Research Communication*, vol. 7, pages 343-50, 1980.

[**Mindlin 1951**] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.

[Murthy 1981] Murthy .M.V.V., An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate,. Rapport technique, NASA, 1981.

[Naghdi 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380 1957.

[Panc1975] Panc V. ,Theories of elastic plates,. Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.

[Reddy 1997] Reddy, J., 1997. Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis. CRC Press, Boca Raton.

[Reddy 1999] Reddy, J., 1999. Theory and analysis of Elastic Plates. Taylor Francis, Philadelphia.

[Reddy 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.

[Reddy 2000] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates. Int. J. Num. Meth. Eng. 47(2000) 663-684.

[Reissner 1945] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech;12 (2): 69-77, 1945.

[Reissner 1975] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502, 1975.

[RIVELLO 1969] Rivello, R.M., "Theory and analysis of flight structures" éditions McGraw-Hill, New York, 1969.

[Timoshenko 1959] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959. Theory of plates and Shells. McGraw-Hill, New York.

[Timoshenko 1968] S. Timoshenko, éditions Dunod, "Résistance des matériaux, Théorie développée et problèmes" , Tome 2. 1968.

[VALLAT 1945] P. Vallat, Aérospatiale Itw, "Résistance des matériaux appliquée à l'aviation" , Tome 1. 1945.

[Zenkour 2006] A.M. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Appl. Math. Modell. 30 (2006) 67-84.

**CHAPITRE III:**

[**Daniel 2009**]: Isaac M. Daniel and Emmanuel E. Gdoutos; Failure Modes of Composite Sandwich Beams; Springer 2009.

[**Gay 2003**] Daniel Gay, Suong V. Hoa et Stephen W. Tsai; composite materials. design and applications; CRC press LLC 2003.

[**Gognard 2000**] Gognard, " collage des métaux généralités et caractéristiques ", Techniques de l'ingénieur BT4 , 2000.

[**HADJI 2012**] HADJI Lazreg, contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM, thèse de doctorat en sciences, 2012-2013, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès.

[**Herrmann 2005**] : Axel S. Herrmann, Pierre C. Zahlen and Ichwan Zuardy; sandwich structures technology in commercial aviation; O.T. Thomsen et al. (eds), Sandwich Structures 7;2005.

[**Vinson 1999**] Jack R. Vinson; The behavior of sandwich structures of isotropic and composite material; CRC Press, 1999

**CHAPITRE IV:**

[**Akavci 2015**] Akavci, S.S. (2015), "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", Compos. Struct., 108, 667-676.

[**Bakora 2015**] Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", Struct. Eng. Mech., Int. J., **56**(1), 85-106.

[**Bellifa 2016**] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 38(1), 265-275.

[**Hadji 2015**] Hadji, L. and Adda Bedia, E.A. (2015), "Analyse of the behavior of Functionally graded beams based on neutral surface position", Struct. Eng. Mech., Int. J., **55**(4), 703-717.

[**Houari 2011**] Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2011), "Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", J. Therm. Stress., **34**(4), 315-334.

[**Kar 2015**] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015a), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(3), 693-709.

[**Librescu 1997**] Librescu, L. and Lin, W. (1997), “Postbuckling and vibration of shear deformable flat and curved panels on a non-linear elastic foundation”, *Int. J. Non-Lin. Mech.*, **32**(2), 211-225.

[**Liew 2004**] Liew, K.M., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2004), “Thermal post-buckling of laminated plates comprising functionally graded materials with temperature-dependent properties”, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **71**(6), 839-850.

[**Li 2008**] Li, Q., Iu, V.P. and Kou, K.P. (2008), “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates”, *J. Sound Vib.*, **311**(1-2), 498-515.

[**Lin 1998**] Lin, W. and Librescu, L. (1998), “Thermomechanical postbuckling of geometrically imperfect shear deformable flat and curved panels on a nonlinear foundation”, *Int. J. Eng. Sci.*, **36**(2), 189-206.

[**Shen 2007**] Shen, H.S. (2007), “Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature dependent properties”, *Int. J. Mech. Sci.*, **49**(4), 466-478.

[**Suresh et Mortensen 1998**] Suresh, S. and Mortensen, A. (1998), *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications Ltd., London, UK.

[**Tung 2010**] Tung, H.V. and Duc, N.D. (2010), “Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Compos. Struct.*, **92**(5), 1184-1191.

## **CHAPITRE V:**

[**Kiani2012**] Kiani, Y. and Eslami, M.R. (2012), “Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperaturedependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation”, *Arch. Appl. Mech.*, **82**(7), 891-905.

[**Liew 2004**] Liew, K.M., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2004), “Thermal post-buckling of laminated plates comprising functionally graded materials with temperature-dependent properties”, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **71**(6), 839-850.

[**Raju 1988**] Raju, K.K. and Rao, G.V. (1988), “Thermal postbuckling of a square plate resting on an elastic foundation by finite element method”, *Comput. Struct.*, **28**(2), 195-199.

[**Shen 2007**] Shen, H.S. (2007), “Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature dependent properties”, *Int. J. Mech. Sci.*, **49**(4), 466-478.

## *Références bibliographiques*

---

[Shen 1997] Shen, H.S. (1997), “Thermal post-buckling analysis of imperfect shear-deformable plates on two-parameter elastic foundation”, *Comput. Struct.*, **63**(6), 1187-1193.