

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité Génie Civil

Option Structures & Matériaux

Par : MEFTAH ALI

Intitulé

CONSTRUCTION D'UN NOUVEAU CHAMP DE DEPLACEMENT POUR L'ANALYSE DE LA REPONSE MECANIQUE DES STRUCTURES COMPOSITES

Soutenue publiquement Le: 06/12/2017 devant le jury composé de :

FAHSI Bouazza	MCA	U.D.L – SBA	Président du jury
TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L – SBA	Directeur de thèse
HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA	U.MASCARA	Examineur
BOUCHAFA Ali	MCA	U.D.L – SBA	Examineur
BOUSAHLA Abdelmoumèn Anis	MCA	C.U.RELIZANE	Examineur
KACI Abdelhakim	MCA	U.SAIDA	Examineur
BOUREMANA Mohammed	MCA	U.D.L – SBA	Invité

REMERCIEMENTS

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur **Tounsi Abdelouahed**, Professeur de l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, directeur de cette thèse. Je lui suis très reconnaissant pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée tout au long de l'élaboration de cette thèse, ses conseils éclairés, pour sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont beaucoup aidé à achever ce travail dans des conditions favorables.

Je désire exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse le Professeur **Adda Bedia El Abbés**, enseignant à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbés et directeur du laboratoire pour ses conseils avisés qui m'ont facilité l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur **Fahsi Bouazza**, Maitre de conférence à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, d'avoir accepté d'examiner ce travail, et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur **Houari Mohammed Sid Ahmed**, Maitre de conférence à l'Université de Mascara, qui a accepté d'être examinateur.
- Monsieur **Bouchafa Ali**, Maitre de conférence à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, qui a accepté d'examiner mon travail.
- Monsieur **Bousahla Abdelmoumèn Anis**, Maitre de conférence au Centre Universitaire de Relizane, qui a voulu examiner ce travail.
- Monsieur **Kaci Abdelhakim** Maitre de conférence à l'Université de Saida, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur **Bouremana Mohammed**, qui tout au long de ces années, m'a toujours encouragé et conseillé. Je n'oublierai jamais son soutien moral. Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LM&H) de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbés. A toute ma famille.

Résumé

Ce travail présente l'analyse de vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués reposant sur une fondation élastique à deux couches, en proposant une théorie raffinée non polynomiale à quatre variables. Les termes d'intégrale indéfini sont introduits dans le champ de déplacement proposé, et contrairement aux théories conventionnelles de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSTD), la présente théorie ne contient que quatre inconnus.

Les équations de mouvement pour les plaques F.G.M reposant sur les fondations élastiques sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenus en utilisant la méthode de Navier, les résultats numériques obtenus par la présente analyse des vibrations libres des plaques F.G.M sur les fondations élastiques sont présentés et comparés à ceux disponibles dans la littérature.

Mots clés : Vibration ; Plaque fonctionnellement graduée; Fondation élastique; Théorie des plaques.

Abstract

This paper presents a free vibration analysis of plates made of functionally graded materials and resting on two-layer elastic foundations by proposing a non-polynomial four variable refined plate theory. Undetermined integral terms are introduced in the proposed displacement field and unlike the conventional higher shear deformation theory (HSDT), the present one contains only four unknowns.

Equations of motion are derived via the Hamilton's principles and solved using Navier's procedure. Accuracy of the present theory is demonstrated by comparing the results of numerical examples with the ones available in literature.

Key words: Vibration; Functionally graded plate; Elastic foundation; Plate theory.

ملخص

في هذه الدراسة تم عرض تحليل الاهتزازات الحرة للصفائح المتدرجة وظيفيا و التي تستند على أساس مرن مكون من طبقتين، وتقدم النظرية غير متعدد الحدود أربعة متغيرات. يتم إدخال شروط الحدية في معادلات الحركة المقترحة، وعلى عكس النظريات العليا لتشوه القص، هذه النظرية يحتوي فقط أربعة مجاهل

معادلات الحركة بالنسبة للصفائح المتدرجة وظيفيا والتي تستند على أسس مرنة، يتم الحصول عليها من تطبيق مبدأ هاملتون. ويتم الحصول على حلول باستخدام أسلوب نافير، النتائج الرقمية التي حصل عليها خلال دراسة الاهتزازات الحرة يتم مقارنتها مع نتائج النظريات المدروسة سابقا.

الكلمات المفتاحية: الاهتزازات، صفائح متدرج وظيفيا، أساس مرن، نظرية الصفائح.

Sommaire

Résumé	i
Abstract.....	ii
ملخص.....	iii
La liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	ix
Liste des notations.....	x
Introduction générale.....	1
Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites	
I.1.Introduction.....	5
I.2. Définition d'un matériau composite.....	6
I.3. Les éléments constituants d'un matériau composite.....	6
I.3.1. Les renforts	7
I.3.1.1. Différents types de renfort	7
I.4. Ensimage.....	12
I.5. Architecture des renforts.....	12
I.6. La matrice	13
I.6.1. Les matrices de sources minérales.....	13
I.6.2. Les matrices de sources organiques.....	14
I.7. Les charges.....	17
I.8. Les additifs.....	17
I.9. L'interface.....	17
I.10. Architecture des matériaux composites.....	17
I.10.1. Monocouches.....	17
I.10.2. Stratifiés.....	18
I.10.3. Les sandwichs.....	19
I.11. Revue des méthodes d'élaboration des FGM.....	19
I.11.1. Procédé de poudre sèche.....	20
I.11.2. Coulage centrifuge.....	21
I.11.3. Coulage Séquentiel en Barbotine.....	23

I.11.4. Pressage à chaud.....	23
I.11.5. Coulage en bande.....	23
I.11.6. Processus de frittage.....	24
I.11.7. Projection thermique.....	24
I.11.8. Processus d'infiltration.....	25
I.12. Les matériaux composites classiques et les FGM.....	25
I.13. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	27
I.13.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	28
I.13.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	29
I.13.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM.....	30
I.14. Exemples de secteurs d'application des composites.....	31
I.14.1. Secteur de la construction civile.....	31
I.14.2. Secteur de la médecine.....	32
I.14.3. Secteur de l'aérospatiale et l'automobile.....	32
I.14.4. Secteur de l'industrie.....	33
I.14.5. Articles de sports.....	33
I.15. Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	33
I.15.1. Avantages.....	33
I.15.2. Inconvénients.....	34
I.16. Conclusion.....	35
Chapitre II: Les différentes approches d'analyse des plaques	
II.1. Introduction.....	36
II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	36
II.2.1. Approches monocouche équivalente.....	36
II.2.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT).....	36
II.2.1.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	38
II.2.1.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	39
II.2.2. Approche par couche.....	43

II.2.2.1.Les modèles zig-zag.....	44
II.2.2.2.Les modèles couches discrètes.....	46
II.2.3.Modèle éléments finis de structure multicouche.....	46
II.2.3.1 Modèles éléments finis 2D.....	47
II.2.3.2.Modèles éléments finis 3D.....	48
II.3.Conclusion.....	50
Chapitre III: Étude analytique des vibrations des plaques FGM	
III.1. Introduction.....	51
III.2. Formulation de la problématique.....	52
III.3. Équations de mouvement.....	55
III.4. Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées.....	59
III-5 Conclusion.....	61
Chapitre IV: Validation et comparaison des résultats	
IV.1. Introduction.....	62
IV.2. Validation des résultats de la vibration libre d'une plaque FGM simplement appuyée.....	63
IV.2. 1.Vibration libre des plaques isotropes.....	63
IV.2. 2.Vibration libre des plaques fonctionnellement graduées.....	65
IV.2. 3.Vibration libre des Plaques fonctionnellement graduées posées sur une fondation élastique.....	70
IV.3. Conclusions.....	78
Conclusion générale et perspectives.....	79
Références Bibliographiques.....	80

La liste des figures

Figure I.1: Constituants d'un matériau composite.....	6
Figure I. 2 : Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort.....	7
Figure I.3: Histogramme des résistances à la rupture en traction des fibres.....	11
Figure I.4: Fibres multidirectionnelles.....	13
Figure I.5: Fibres orientées	13
Figure. I.6: Organigramme illustrant les différentes familles de matrice.....	15
Figure. I.7: Matériau composite monocouche.....	18
Figure. I.8: Constitution d'un stratifié.....	18
Figure. I.9: Composite sandwichs.....	19
Figure I.10: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.....	21
Figure I.11: Représentation schématique du : (a)- Procédure de coulage centrifuge horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée)	22
Figure I.12: Installation du coulage centrifuge verticale.....	22
Figure I.13: Système de processus de coulage en bande	24
Figure I.14: Une vue microscopique d'un FGM	26
Figure I.15: La microstructure d'un FGM.....	26
Figure I.16: Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique.....	27
Figure I.17: Géométrie d'une plaque FGM.....	28
Figure I.18: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.....	29
Figure I.19: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.....	30
Figure I.20: La variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	31
Figure II.1: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	37
Figure II.2: Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner.....	38
Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé	40
Figure. II.4: Variation de la fonction de forme $\Phi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	42
Figure.II.5: Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Phi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	43
Figure II.6: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique	44
Figure II.7: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....	44
Figure II.8: Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.....	45
Figure II.9: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.....	45

Figure II.10: Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds	47
Figure II.11: Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds	48
Figure II.12: Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds.....	48
Figure II.13: Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires.....	49
Figure II.14: Élément d'interface.....	49
Figure III.1: Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique.....	52
Figure IV. 1: Variation de la fréquence dimensionnelle $\bar{\beta} = \omega a^2 / h\sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque FGM carre en Al/Al2O3.....	70
Figure IV.2: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h\sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque carre FGM en Al/Al2O3 reposée sur une fondation élastique ($a / h = 5$)	75
Figure IV. 3: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\bar{\beta} = \omega a^2 / h\sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque carre FGM en Al/Al2O3 reposée sur une fondation élastique avec coefficient de Winkler ($a / h = 5$). (a) $k_s = 0$, (b) $k_s = 10$	76

Liste des tableaux

Tableau I.1: Composition moyenne et propriétés des différentes fibres de verre.....	9
Tableau I.2: Propriétés des fibres.....	11
Tableau I.3: Principale différence entre matrices TP et TD.....	15
Tableau I.4: Caractéristiques mécaniques des résines époxy.....	16
Tableau I.5: Caractéristiques mécaniques des résines polyesters	16
Tableau IV.1 propriétés des matériaux utilisées.....	62
Tableau IV.2: fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaque carrée et isotrope simplement appuyée.....	64
Tableau IV.3: fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaque carrée isotrope simplement appuyée reposée sur une fondation élastique $(h/b) = 0,2$	65
Tableau IV.4: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ pour plaque carrée FGM en Al/ZrO ₂ $(a/h) = 5$	67
Tableau IV.5: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ pour plaque FGM carrée $(m = n = 1)$	67
Tableau IV.6: Les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque carrée FGM en Al / Al ₂ O ₃ simplement appuyée $(h/b = 0.1)$	68
Tableau IV.7: comparaison des quatre premières fréquences naturelles non dimensionnelles $\beta = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / Al ₂ O ₃ simplement appuyée $(b/a) = 2)$	69
Tableau IV.8: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / ZrO ₃ simplement appuyée $(a/b) = 1.5)$	72
Tableau IV.9: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al/Al ₂ O ₃ simplement appuyée $(h/a) = 0.15)$	73
Tableau IV.10: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\tilde{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / Al ₂ O ₃ simplement appuyée	74

Liste des notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations, symboles et abréviations utilisées dans cette thèse.

FGM	Les matériaux à gradient de propriétés où bien fonctionnellement gradués.
CSPM	Méthode particule-solide centrifuge
CVD	Le dépôt chimique en phase vapeur.
PVD	Le dépôt physique en phase vapeur.
ENPC	École nationale des ponts et chaussées.
SFF	Fabrication solide de forme libre (solid free form fabrication).
2D, 3D	Bidimensionnelle et tridimensionnelle respectivement.
E	Le module de Young
E(z)	Module de Young en fonction de « z ».
E _c	Module de Young de la céramique.
E _m	Module de Young du métal.
ZrO ₂	Zirconia.
Al ₂ O ₃	Alumine ou oxyde d'aluminium.
Al	Aluminium
SiC	Carbure de silicium
FEM	Le modèle de l'élément fini.
G	Le module de cisaillement.
G(z)	Module de cisaillement en fonction de « z ».
ν	Le coefficient de Poisson.
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z ».
V	La fraction volumique.
ρ	La masse volumique.
P	Les propriétés matérielles de la plaque.
a	Longueur de la plaque suivant la direction de x.
b	Largeur de la plaque suivant la direction de y.
p	Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).

h	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de z .
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
u_α	Le déplacement de membrane dans la direction α .
w	La flèche de la plaque.
w, α	La rotation due à la flexion (sans cisaillement).
$f(x), \Phi(x)$	Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque.
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) par rapport à z .
∂	Dérivée partielle.
U	L'énergie de déformation de la plaque
K	L'énergie cinétique de la plaque
i et j	Sont des nombres naturels.
U_F	L'énergie de déformation de la fondation
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les contraintes normales.
γ_{xz}, γ_{yz}	Les déformations de cisaillement.
τ_{xz}, τ_{yz}	Les contraintes de cisaillement.
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité.
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation.
k_w	Coefficient de Winkler
k_s	Coefficient de Pasternak
$[K]$	La matrice symétrique
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites microscopiques inhomogènes, qui sont souvent fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramiques, les caractéristiques matérielles des FGM varient selon les dimensions du matériau suivant une fonction. Le concept de FGM a été proposé au Japon en 1984, lors d'un projet spatial, depuis ses débuts dans les années 80.

Les FGM sont des matériaux alternatifs largement utilisés dans les industries de l'aérospatiale, des réacteurs nucléaires, des sources d'énergie biomécaniques et de construction navale [Koizumi 1993], Tounsi *et al.* [Tounsi 2013] Hamidi *et al.* [Hamidi 2015], Al-Basyouni *et al.* [Al-Basyouni 2015], Tagrara *et al.* [Tagrara 2015], Bennai *et al.* [Bennai 2015], Larbi Chaht *et al.* [Larbi Chaht 2015], Bourderba *et al.* [Bourderba 2016], Bousahla *et al.* [Bousahla 2016], Boukhari *et al.*, [Boukhari 2016] Turan *et al.* [Turan 2016], El-Hassar *et al.* [El-Hassar 2016].

Plusieurs travaux ont été réalisés pour étudier le comportement vibratoire des plaques fonctionnellement graduées FGM. [Vel et Batra 2004] ont proposé une solution exacte tridimensionnelle des vibrations libres et forcées, pour des plaques rectangulaires en FG simplement appuyées. Ferreira *et al.* [Ferreira 2006] ont étudié les vibrations des plaques FG en utilisant une technique globale de collocation, pour un modèle des plaques de premier et de troisième ordre de déformation de cisaillement. Qian *et al.* [Qian 2004] ont discuté sur la flexion et les vibrations libres et forcées d'une plaque FG rectangulaire épaisse en utilisant une théorie de cisaillement d'ordre supérieur, et une théorie de déformation normale. [Matsunaga 2008] a étudié les fréquences naturelles et le flambement des plaques FG en considérant les effets de déformations transversales.

Lu *et al.* [Lu 2009] ont présente une analyse des vibration libre des plaques épaisses en FG reposant sur une fondation élastique d'élasticité tridimensionnelle, Zhao *et al.* [Zhao 2009] ont examiné une vibration libre des plaque FG ,en utilisant la méthode de Ritz sur un élément libre K_p . Chen *et al.* [Chen 2009] ont étudié la dynamique et le flambement des plaques FG basé sur la théorie de déformation d'ordre supérieur. [Malekzadeh 2009] a analysé la réponse de vibration libre des plaque FG reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement. Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi 2010] ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaires FG en utilisant la théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre. Neves *et al.* [Neves 2012] ont proposé une formule de déformation de

cisaillement sinusoïdale, et une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi 3D pour l'analyse statique et dynamique de plaques FG. [Akavci 2014] a présenté une analyse de vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique, en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Ait Amar Meziane *et al* [Ait Amar 2014] ont présenté une théorie raffinée, simple et efficace pour le flambement et la vibration libre des plaques sandwich à gradient exponentiel sous divers conditions aux limites. Hebali *et al* [Hebali 2014] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi 3D pour l'analyse de vibrations statiques et libres des plaques FG. Belabed *et al* [Belabed 2014] ont développé une théorie de déformation de cisaillement transversales, simple et efficace pour la flexion et la vibration libre des plaques FG. Zidi *et al* [Zidi 2014] ont proposé une théorie raffinée à quatre variables pour l'analyse des plaques FG sous charge hygro-thermo-mécanique. Ait Yahia *et al* [Ait Yahia 2015] ont discuté sur la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées avec des porosités, en employant diverses théories des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. [Bakora et Tounsi 2015] ont étudié le comportement thermomécanique de flambement des plaques épaisses FG reposant sur une fondation élastique en développant une nouvelle théorie de déformations de cisaillement traverse, Bourada *et al* [Bourada 2015] ont étudié la flexion et la vibration libre des plaques épaisses FG. Tebboune *et al* [Tebboune 2015] ont étudié, le flambement thermique de plaques FG reposant sur une fondation élastique, en se basant sur une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique simple et efficace. Belkorissat *et al* [Belkorissat 2015] ont discuté sur les propriétés vibratoires de nano-plaques FG en utilisant un nouveau modèle raffiné et non localisé à quatre variables . Ait Atmane *et al* [Ait Atmane 2015] ont proposé un modèle de déplacement de cisaillement pour l'analyse des vibrations de plaques FG avec porosité. Bousahla *et al* [Bousahla 2014] ont présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, basée sur la position de la surface neutre pour analyser la flexion des plaques composites avancés. Attia *et al* [Attia 2015] ont étudié l'analyse de vibrations libre des plaques FG avec des propriétés dépendant de la température, en utilisant une théorie raffinée à quatre variables. Nguyen et al [Nguyen 2015] ont développé une théorie de déformation de cisaillement à ordre supérieur pour l'analyse de flexion , de vibration et de flambement des plaques sandwiches FG. Mahi *et al* [Mahi 2015] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à ordre supérieur pour la flexion et de l'analyse des vibrations libres des plaques composites isotropes , fonctionnellement graduées , sandwich et stratifiées, le comportement vibratoire des plaques FG a été étudié par [Mantari et Granados 2015] en utilisant une nouvelle théorie de

déformation de cisaillement, Bourada *et al* [Bourada 2016] ont discuté sur le comportement au flambement des plaques isotropes en utilisant une nouvelle théorie raffinée des plaques, à quatre variables. Bounouara *et al* [Bounouara 2016] ont proposé une théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro pour les vibrations libres des plaques FG nanométrique, reposant sur une fondation élastique. Récemment, Bennoun *et al* [Bennoun 2016] ont proposé une nouvelle théorie raffinée pour l'analyse des vibrations des plaques sandwich FG. Draiche *et al* [Draiche 2016] ont proposé une théorie raffinée avec l'effet de traction pour l'analyse de flexion des plaques composites stratifiées. Tounsi *et al* [Tounsi 2016] ont développé une nouvelle théorie non polynomiale à trois inconnus pour le flambement et les vibrations des plaques sandwich FG. dans la même voie Houari *et al* [Houari 2016] ont également présenté une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement, sinusoïdale à trois inconnus pour les plaques FG.

Dans la présente étude, un nouveau champ de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, est appliqué à l'étude du comportement de vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler- Pasternak, l'addition du terme d'intégral dans le champ de déplacement conduit à une réduction des nombres d'inconnus, les équations de mouvement et les équations gouvernantes des plaques sont obtenues par l'utilisation de principe d'Hamilton, ces équations sont ensuite résolues par la méthode de Navier, des études comparatives sont effectuées pour vérifier les résultats actuels.

L'étude bibliographique, dans le premier chapitre, présente une définition des matériaux à gradients de propriétés, en citant les diverses techniques appliquées pour la fabrication des FGM. Cette partie présente aussi les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM à travers l'épaisseur de la plaque ainsi que leur domaine d'application.

Le chapitre II, présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites ainsi que les différents travaux qui ont été effectués et publiés sur l'analyse des structures FG.

Ensuite, le troisième chapitre concerne le développement de la solution analytique des plaques en FGM qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques FG simplement appuyées.

Le chapitre IV est une application numérique et une étude comparative des résultats pour la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées par une théorie proposée, qui prend en considération l'effet de déformation de cisaillement transverse. La convergence de la théorie est démontrée et pour valider les résultats, des comparaisons sont faites avec les solutions

disponibles pour le matériel isotrope et en gradient de propriétés FGM, L'effet de l'exposant de la fraction volumique et les autres paramètres sur les plaques FGM en Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₃ reposant sur une fondation élastique de type Winkler - pasternak est présenté sous forme graphique et numérique.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la fonction utilisée dans les calculs des matériaux composites et des perspectives envisagées à l'avenir.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES

MATÉRIAUX COMPOSITES

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I.1.Introduction:

Au cours de ces dernières années, les matériaux composites connaissent un essor considérable dans la quasi-totalité des secteurs, ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages notoires : légèreté, résistance mécanique et chimique, bon comportement à l'humidité et à la corrosion, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent de prolonger la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils participent au renforcement de la sécurité grâce à une bonne tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique, acoustique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (bâtiment, automobile, électricité, industries de l'aérospatiale, réacteurs nucléaires, ...). Ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Malheureusement, ces matériaux composites présentent parfois quelques anomalies internes qui ne sont pas forcément visibles en surface.

Selon leur taux d'utilisation, les composites sont classés en deux grandes classes: les composites à grande diffusion et les composites hautes performances [Drapier 2014].

- Les composites à grande diffusion(GD): Ils possèdent des caractéristiques mécaniques souvent inférieures à celles des matériaux de références tels que l'acier. Ils sont utilisés pour leur prix de revient global (matière et mise en œuvre) attrayant et leur faible poids. De plus, les procédés de fabrication utilisés permettent d'obtenir des pièces de formes complexes en une seule opération. Ce type de matériaux, généralement à base de fibres de verre convient parfaitement aux grandes séries telles que celles rencontrées dans l'industrie des transports.
- Les composites hautes performances(HP): Les composites hautes performances se caractérisent d'une part par leurs propriétés mécaniques plus élevées que celles des composites GD, et d'autre part par un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés. Les composites à matrice

organique sont le plus souvent utilisés en lieu et place des métaux et alliages métalliques. Ce sont la plupart du temps des applications structurales à base de fibres continues dont la fabrication nécessite une attention particulière. On retrouve ces matériaux dans les applications de pointe telles que l'aéronautique, les bateaux de compétition, les loisirs, etc...

I.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux. On appelle de façon courante « matériaux composites » des arrangements de fibres qui sont noyées dans une matrice. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. [Glos 2006].

I.3. Les éléments constitutifs d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort. Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. [Berthelot 2010].

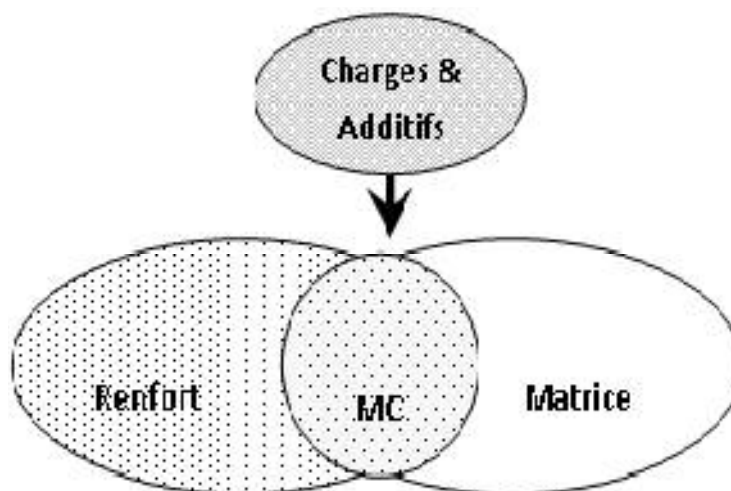


Figure. I.1: Constituants d'un matériau composite

I.3.1. Les renforts :

Renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites, se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Berreur *et al.* [Berreur 2002]. Les propriétés des composites sont principalement influencées par le choix des fibres Teng *et al.* [Teng 2002]. Parmi les fibres les plus connues en génie civil, on peut citer : le carbone (haut module élastique et résistances mécaniques importantes à la fatigue), le verre (résistances moyennes, très utilisé pour renforcer les bétons) et l'aramide (de haute résistance à la traction, utilisée en câbles de hautes performances).

I.3.1.1. Différents types de renfort :

Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes [Cugnoni 2004]. [Jules 2001] a présenté les principaux matériaux de renfort comme suit (Figure I.2):

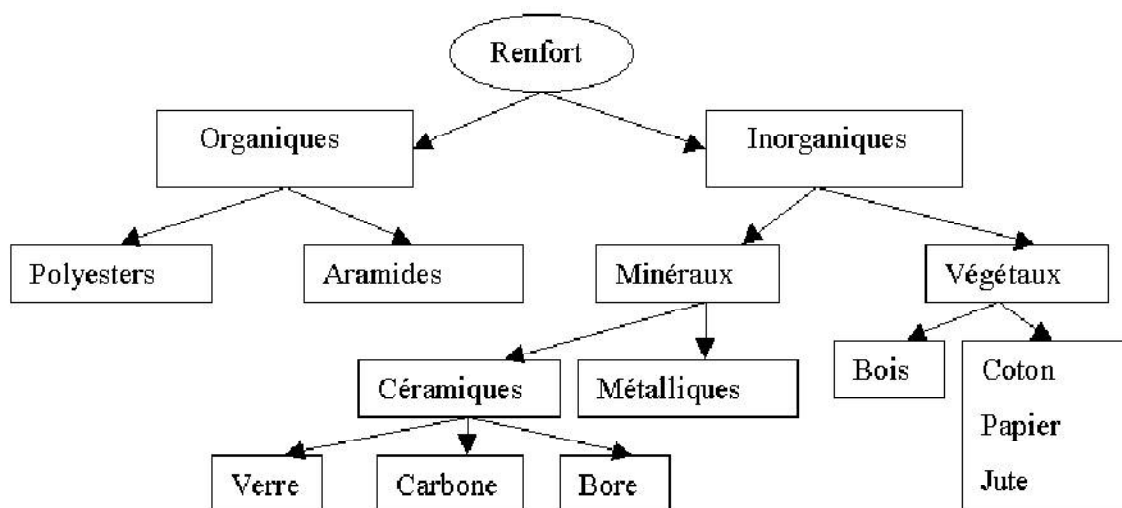


Figure. I. 2: Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort. [Jules 2001]

- **Fibres de verre :**

Les fibres de verre sont moins chères que les fibres de carbone et les fibres d'aramide. Par conséquent, les composites en fibres de verre sont devenues la solution la plus utilisée dans plusieurs applications, tel que le génie civil, l'industrie des bateaux et d'automobiles. Les modules d'élasticité des fibres sont de 70 à 85 GPa avec un allongement ultime de 2 à 5 % selon la qualité. Par contre les fibres de verre peuvent avoir des problèmes de relaxation. Elles sont aussi sensibles à l'humidité, mais avec le choix correct de matrice, les fibres sont protégées. Benzaid *et al* [Benzaid 2013].

Les fibres de verre sont obtenues à partir de silice et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). Le verre est coulé en fusion à 1.250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées (Tableau I.1), les fibres de verre sont réparties en cinq qualités, [Bathias 2005].

- **fibres E** pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- **fibres D** pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- **fibres R** et **S** qui contiennent plus d'alumine ; pour les composites hautes performances (HP);
- **fibres C** résistent bien à la corrosion en milieu acide.

- **Fibre de carbone**

Les fibres de carbone ont un haut module d'élasticité, de 200 à 800 GPa. L'allongement ultime est de 0,3 à 2,5 %. Les fibres de carbone n'absorbent pas l'eau et elles résistent aux plusieurs solutions chimiques. Elles présentent une résistance excellente à la fatigue, et une faible relaxation comparée à celle des aciers extensibles précontraints. La fibre de carbone est un conducteur électrique et, par conséquent, peut donner la corrosion galvanique si elle est en contact direct avec l'acier. Il faut signaler également le mauvais comportement au choc et à l'abrasion des stratifiés renforcés par des fibres de carbone. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité. On trouvera des fibres dites : à haute résistance (HR) et des fibres à haut module (HM) ou même à très haut module (THM), et des fibres intermédiaires [Chatain 2001].

La fibre de carbone est la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile).

Tableau I.1: Composition moyenne et propriétés des différentes fibres de verre [Bathias 2005]

Type de verre	E	S	R	C	D
SiO ₂	54	65	60	65	74
Al ₂ O ₃	15	25	25	4	
CaO	18		9	14	0.2
MgO	4	10	6	3	0.2
B ₂ O ₃	8			5.5	23
F	0.3				
Fe ₂ O ₃	0.3				
TiO ₂					0.1
Na ₂ O				8	1.2
K ₂ O	0.4			0.5	1.3
Propriétés					
Densité	2.54	2.49	2.49	2.49	2.16
Résistance (20°C) Gpa	3.5	4.65	4.65	2.8	2.45
Module élastique (20°C) Gpa	73.5	86.5	86.5	70	52.5
Déformation à la rupture %	4.5	5.3	5.3	4	4.5
Propriétés spécifiques	Usage général	Propriétés mécaniques renforcées	Propriétés mécaniques renforcées	Alcali-résistant	Propriété diélectriques renforcées

- **Fibre d'aramide**

Souvent appelée Kevlar, Les modules d'élasticité de ces fibres sont de 70 à 200 GPa avec une haute énergie de fracture et un allongement ultime de 1,5 à 5 % selon la qualité. Les fibres d'aramide sont sensibles aux températures élevées, à l'humidité et aux radiations « ultra violet » et par conséquent, ne sont pas largement utilisées dans les applications de génie civil.

Plus loin, les fibres d'aramide ont des problèmes avec la relaxation et la corrosion, mais avec une bonne résistance au choc et à la fatigue, Benzaid *et al* [Benzaid 2013].

- **Fibres de bore et carbure de silicium**

Ces deux types de renforts sont appelés au même principe de fabrication et ont des propriétés et des domaines d'application voisins. Leur utilisation reste toutefois très marginale (navette spatiale).

Ces matériaux sont fabriqués à base de bore, bore-carbure de bore, carbure de silicium, bore-carbure de silicium ; On opère par dépôt en phase gazeuse sur une âme en tungstène porté à 1200°C, qui sert de substrat. Le diamètre du mono filament est plus important que pour les autres fibres (100 à 150 microns).

Les prix et difficultés de mise en œuvre (fragilité, usinage difficile, manipulation dangereuse) freinent le développement de ces types de renforts. [Ait Atmane 2011].

- **Autres renforts**

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques. Parmi ces fibres nous avons, [Berthelot 2010].

1. Les fibres d'origine végétale, telles que le bois utilisé sous forme de fibres orientées, le sisal, le jute, le lin, etc.
2. Les fibres synthétiques, telles les fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.), les fibres polyamides, les fibres polyéthylène, les fibres polypropylène, etc.
3. Les fibres métalliques, comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermique et électrique et leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.

Tableau I.2: Propriétés des fibres [Guillon 1995]

Filament	Diamètre (µm)	Densité	Résistance à la traction (MPa)	Module à la traction (MPa)	Allongement à la rupture(%)	Température de fusion (°c)
Verre E	3 à 30	2.54	3400	73000	4.5	850
Verre D	3 à 30	2.14	2500	55000	4.5	-
Verre R	3 à 30	2.48	4400	86000	5.2	990
Carbone HR	8	1.78	3500	200000	1	2500
Carbone HM	8	1.8	2200	400000	0.5	2500
Aramide HR	12	1.45	3100	70000	4	480
Aramide HM	12	1.45	3100	130000	2	480

HR: haute résistance ; HM: haute module.

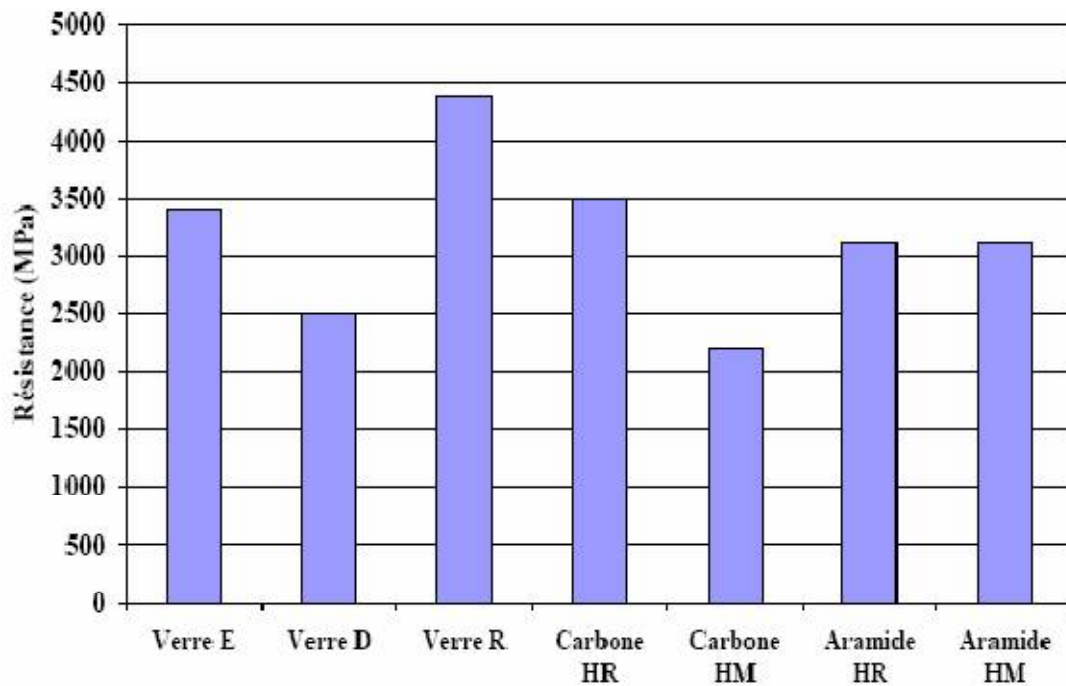


Figure. I.3: Histogramme des résistances à la rupture en traction des fibres.
[Ait Aneur 2008]

I.4. Ensimage

Les renforts destinées à la fabrication des composites reçoivent un ensimage. L'ensimage est une dispersion aqueuse spécifique comportant un agent collant, un agent pontant et des agents antistatiques, permettant d'assurer différents rôles :

- compatibilité de la liaison fibre - matrice ;
- cohésion inter filamentaire (raideur du fil) pour qu'il soit manipulable ;
- protection contre l'abrasion générée par la mise en œuvre (frottement contre pièces métalliques) ;
- élimination des charges électrostatiques dues aux frottements ;
- augmentation du mouillage de la fibre au cours de l'imprégnation.

L'ensimage est spécifique pour une résine et un procédé donné.

I.5. Architecture des renforts:

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en composites, il est nécessaire de jouer sur l'architecture des renforts pour apporter une bonne résistance adaptée aux contraintes mécaniques. Il existe différentes géométries et textures de renforts.

Les propriétés mécaniques des matériaux composites dépendent fortement de l'architecture du renfort utilisé, pour apporter une bonne résistance adaptée aux contraintes mécaniques.

- **Unidirectionnelle:**

Les performances mécaniques de diverses armures unidirectionnelles dépendent du type de fils constituant l'armure (verre, carbone, etc...) et de leur nature (fils avec ou sans torsion).

Ces fibres parallèles peuvent être présentées sous deux formes : sans liaison particulière, sous forme de bobine appelée également roving , ou bien reliées par un fil fin appelées nappes .

- **Multidirectionnelle aléatoire :**

- fibres coupées et broyées, sans arrangement particulier.
- feutre de fibres agglomérées par un liant : le mat peut être à fibres courtes (longueur inférieure à 50 mm), sans orientations particulière ou à fibres continues.



Figure.I.4: Fibres multidirectionnelles [Gomet 2008]

- **Orientée :**

- Le tissu comporte des fils de chaîne ou de trame (fibres bidirectionnelles) ; suivant le mode de croisement de la trame et de la chaîne, le tissu sera une toile, un sergé ou un satin.



Figure. I.5: Fibres orientées [Gomet 2008]

I.6. La matrice :

La matrice fournit le mécanisme nécessaire au transfert de la charge de part et d'autre des fibres. Elle protège également les fibres des risques d'abrasion et des autres attaques environnementales et chimiques, Foo *et al* [Foo 2001]. On distingue deux grandes familles de matrice, présentées dans la Figure I.6, pouvant entrer dans la formulation de matériau composite : les matrices organiques et les matrices minérales.

I.6.1. Les matrices de sources minérales :

- **Les matrices métalliques :**

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000°C interdit

Pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique.

Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, son véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel, [Ait Atmane 2011].

- **Les matrices céramiques :**

Elles sont particulièrement importantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont réservées aux applications de très haute technicité travaillant à haute température comme la tuile de protection thermique, les brûleurs.

La disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques dans les années 80, devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Elles sont utilisées dans le spatial, le nucléaire et le militaire.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

La matrice céramique a un seul inconvénient c'est qu'ils résistent mal à la rupture à la traction qui est partiellement masqué et compensé par l'introduction des fibres.

1.6.2. Les matrices de sources organiques

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer le transfert de charge entre elles, de les protéger des chocs, des frottements et de l'environnement extérieur. En outre, elle présente l'avantage d'être chimiquement réactive, ce qui permet l'établissement de liaisons fortes avec le renfort. Elle apporte aussi la tenue chimique de la structure et enfin d'assurer la forme de la structure. Cependant, la matrice ne doit pas être trop rigide pour ne pas contrarier le travail des fibres ce qui fait de sa ductilité.

Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces trois types de matrices organiques.

- Résine thermodurcissable (TD) : polymère transformée en un produit essentiellement infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physicochimique (catalyse, durcisseur). La transformation est irréversible.
- Résine thermoplastique (TP) : polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité. La transformation est réversible.

Tableau I.3: Principale différence entre matrices TP et TD [Jules 2001]

Matrice	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage +refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleur	Réduit (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Émanations de solvants	Propreté

- les élastomères dont le renforcement par différentes fibres conduit à diverses applications dans le domaine de l'automobile [Berthelot 1996].

Les différentes familles de matrice sont résumées dans le schéma de la Figure I.6 :

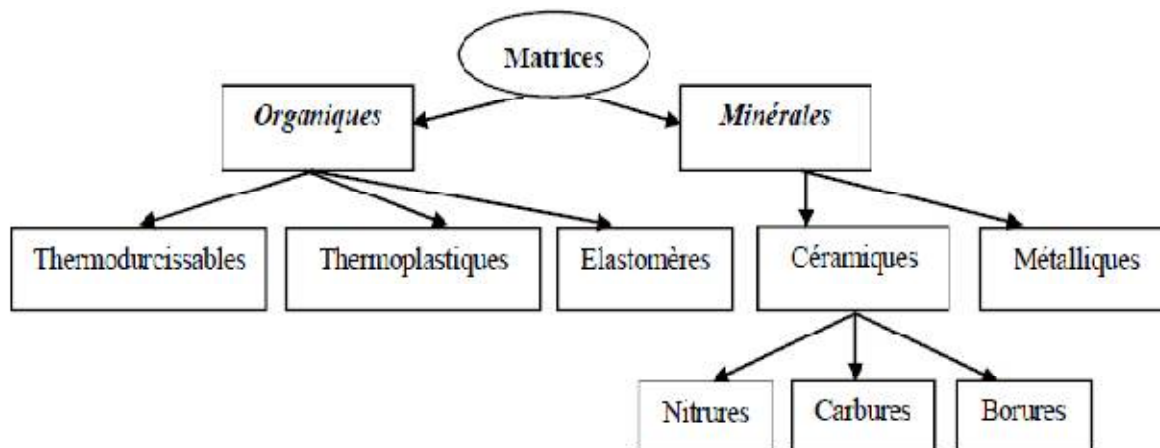


Figure. I.6: Organigramme illustrant les différentes familles de matrice [Jules 2001].

En génie civil, les résines thermodurcissables sont utilisées presque exclusivement, telles que les matrices vinylesters, polyesters et époxyes [Carolin 2003]. Les Tableaux I.2.1, I.2.2 et I.2.3 donnent un ordre de grandeur des caractéristiques des fibres et matrices usuellement employées dans la fabrication des matériaux composites.

Tableau I.4: Caractéristiques mécaniques des résines époxyes
[Bardonnnet 1992]

Résistance à la traction(MPa)	50 à 80
Module de traction(GPa)	3 à 10
Allongement à la rupture(%)	1 à 1.5
Résistance à la compression(MPa)	140 à 150
Energie de rupture au choc(KJ/m ²)	7 à 10

Tableau I.5: Caractéristiques mécaniques des résines polyesters
[Schneider1993,Canard1993]

Masse volumique (Kg/m ³)	1200
Module d'élasticité en traction(GPa)	2.8 à 3.5
Contrainte à la rupture en traction....(MPa)	50 à 80
Allongement à la rupture en traction.....(%)	2 à 5
Résistance au cisaillement..... (MPa)	10 à 20

I.7. Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant leurs performances. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre).

Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...)
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc.)
- des particules de carbone (noir de carbone)

I.8. Les additifs :

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre les renforts fibreux et la matrice et, de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage.
- pigments et colorants.
- agents anti-retraits.
- agents anti-ultraviolets.
- accélérateur.
- catalyseur.

I.9. L'interface :

L'utilisation d'une couche d'interface (sizing) permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Les fibres destinées à la fabrication des composites reçoivent un apprêt spécifique comportant un agent collant qui permet de coller les filaments pour en faire des fils est assure, en outre, une fonction de lubrification (pour le protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres).

I.10. Architecture des matériaux composites

I.10.1. Monocouches:

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (Figure 1.7). Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, répartie aléatoirement), à fibres tissus fibres courtes, dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport l'autres.

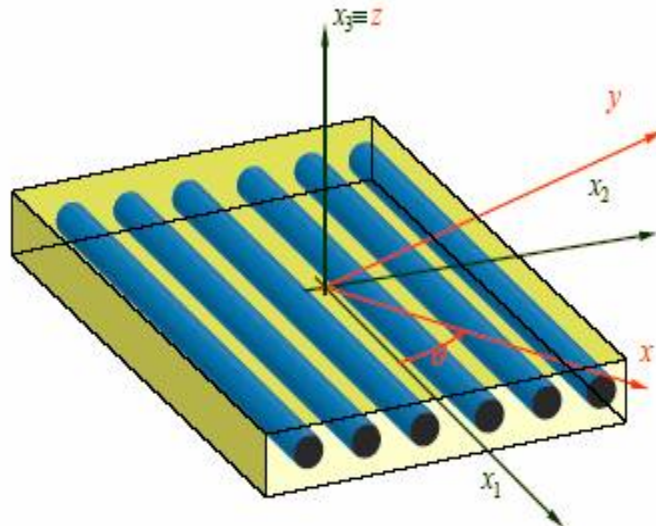


Figure. I.7: Matériau composite monocouche

I.10.2. Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques [Berthelot 2010].

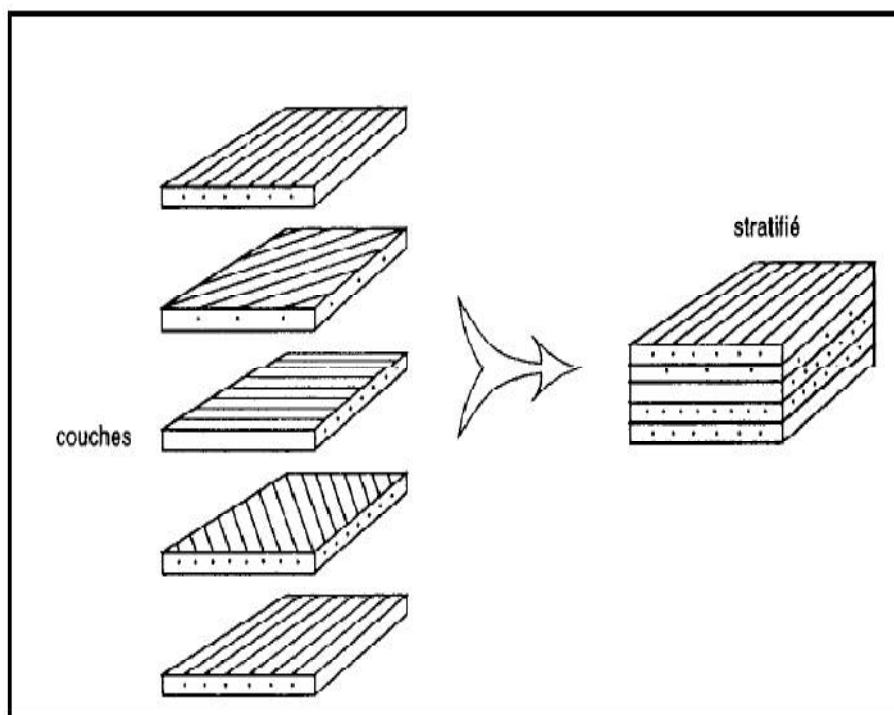


Figure. I.8: Constitution d'un stratifié [Berthelot 2010]

I.10.3. Les sandwichs

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés : peau et noyau (Figure I.9).

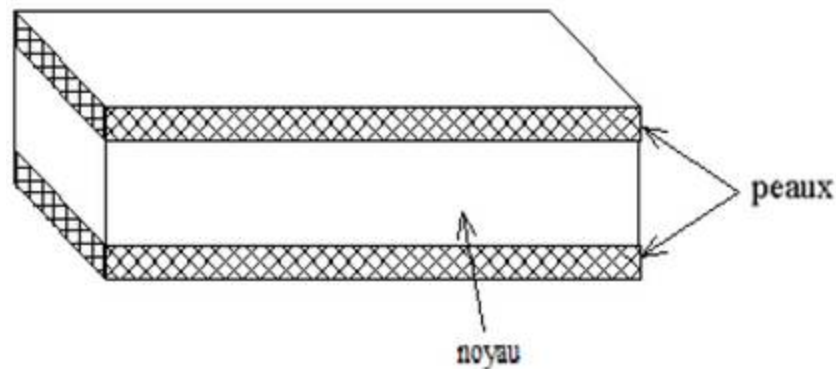


Figure. I.9: Composite sandwichs [Gupta 2003]

Les propriétés de ce type de matériaux dépendent de celles du noyau et des peaux, de leurs épaisseurs et des caractéristiques de liaison entre elles.

- **Le noyau:**

Il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :

- Matériaux solide à faible densité : balsa et d'autres types de bois.
- Matériaux à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles.
- Matériaux à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.

- **La peau:**

Une large variété de matériaux est utilisée comme peau, par exemple : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane,...etc.

Le choix des matériaux utilisés comme peau est important du point de vue de l'environnement de travail, car la présente partie entre en contact direct avec ce dernier, [Gupta 2003].

I.11. Revue des méthodes d'élaboration des FGM

Les procédés de fabrication d'un matériau fonctionnellement gradués peuvent être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène "mélange graduel" puis la

transformation de cette structure en un seul matériau "solidification". Les méthodes de mélange graduel peuvent être classées dans les constituants, la ségrégation et l'homogénéisation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par phases de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux matériaux fonctionnellement gradués. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation. [Kieback 2003].

Afin de fabriquer les matériaux fonctionnellement gradués avec succès, les chercheurs ont appliqué la combinaison optimale de plusieurs méthodes en fonction des propriétés des composants de matériaux [Kiebeck 2003, Miyamoto 1999, Li 2003, Jamaludin 2013]. Les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront examinées en ci-dessous. [Jamaludin 2013] :

I.11.1. Procédé de poudre sèche:

Est une technologie apparente pour la fabrication des matériaux fonctionnellement gradués et elle est plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux composites. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du matériau fonctionnellement gradué, utilisant des matériaux solides.

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993].

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [Ramachandran 2015, Saiyath 2015], Figure I.10.

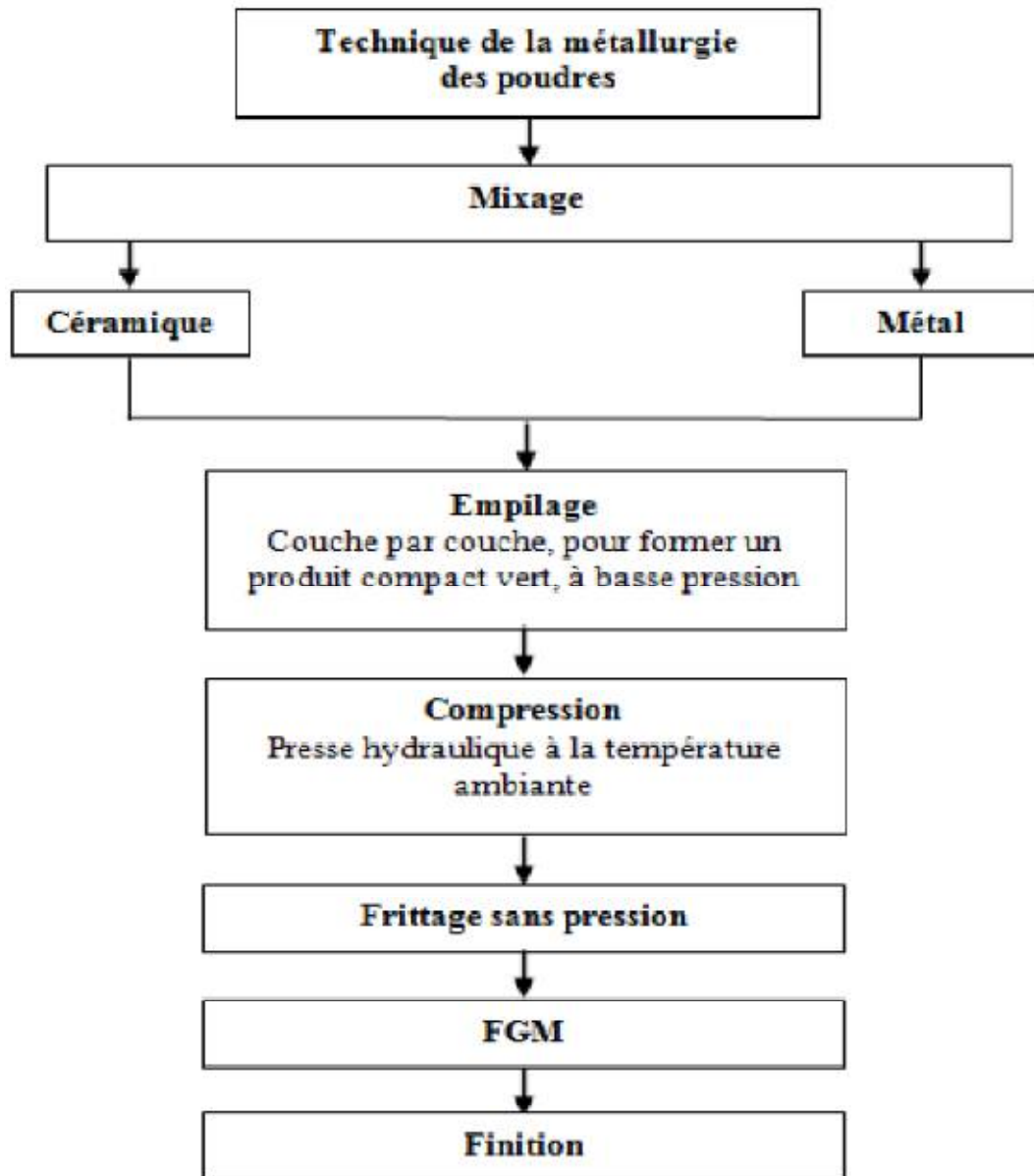


Figure I.10: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM [Saiyath 2015]

I.11.2. Coulage centrifuge:

Cette technique est basée sur la force centrifuge qui peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique et qui contient une autre phase solide. Le procédé de centrifugation est divisé en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice. À l'inverse si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule

de renfort reste solide dans une matrice liquide. Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge -CSPM-. Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenue par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac.

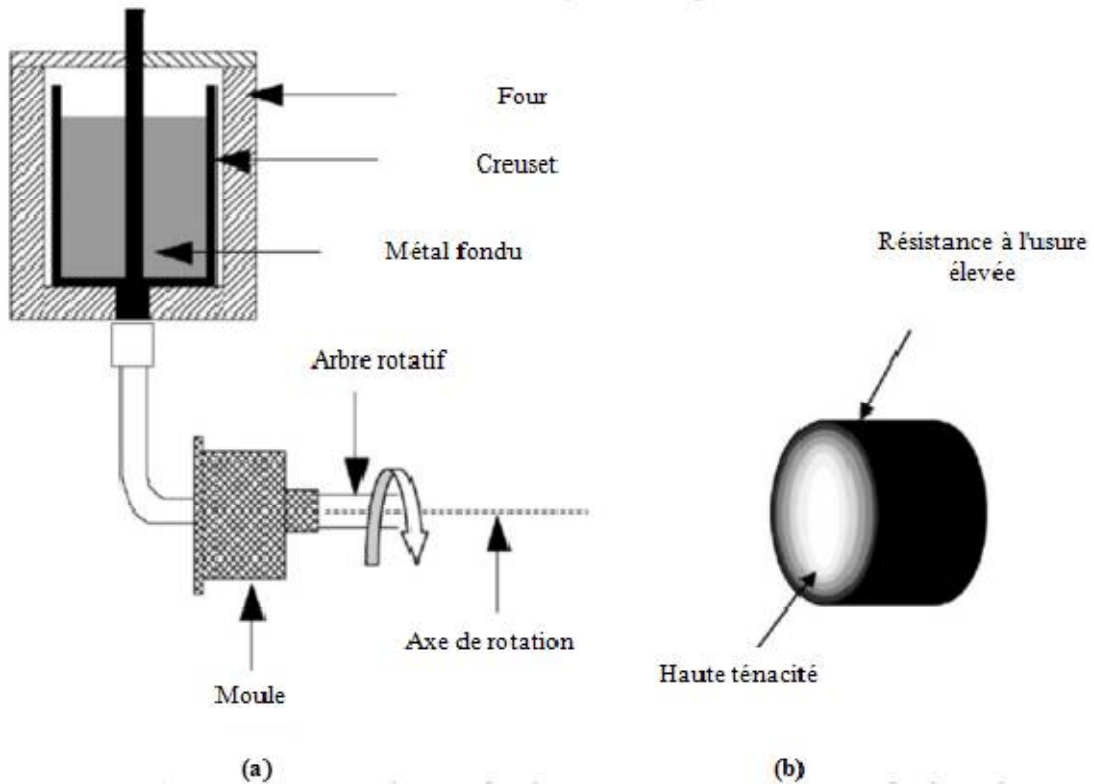


Figure I.11: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) [Saiyath 2015]

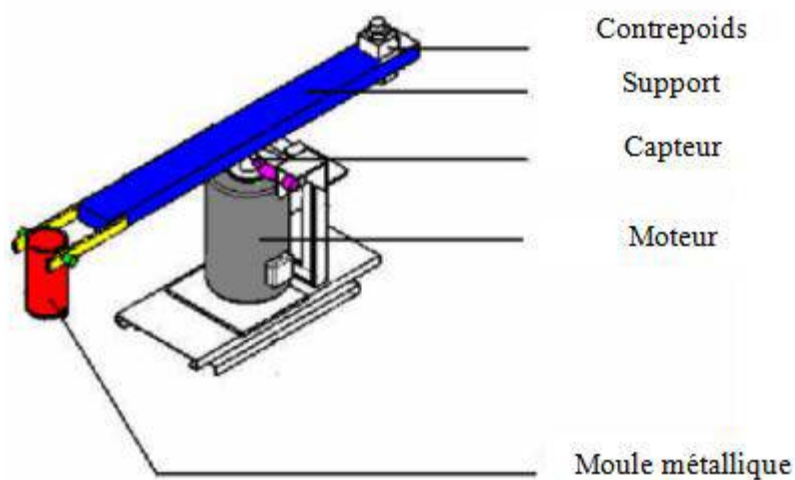


Figure I.12: Installation du coulage centrifuge verticale [Saiyath 2015]

I.11.3. Coulage Séquentiel en Barbotine:

En général, le coulage en barbotine est une technique de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes, le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Le gradient sera formé en changeant la composition où la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Ce procédé nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite [Katayama 2011].

I.11.4. Pressage à chaud :

Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le matériau fonctionnellement gradué est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactées.

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certaines des poudres métalliques légères, tels que le magnésium et l'aluminium auront tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent. [Watari 2003, Jamaludin 2013].

I.11.5. Coulage en bande :

La technique de coulage en bande est illustrée dans la figure I.13, la bande coulée à une épaisseur est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μ m et 1mm. Les bandes minimales inférieures à 1 μ m pourraient être produites.

Il y a trois phases différentes de coulage, la première consiste l'élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant, la deuxième est de sécher le corps vert ou de la bande, la troisième phase à pour la consolidation de la matière dense de bande. Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés. Des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres.

La densification de la bande est obtenue par frittage, si d'épaisseur de la bande est de l'ordre de 200 μ m. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique-

céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent.

Anne-Laure Dumont *et al.* [Dumont 2001] ont fabriqué un FGM en $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction auto-entretenue à haute température. Après déliantage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites [Dumont 2001].

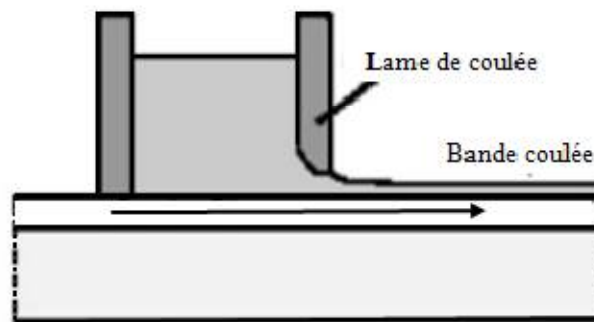


Figure I.13: Système de processus de coulage en bande [Saiyath 2015]

I.11.6. Processus de frittage :

La poudre compacte a été soumise à une gradation qui doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Il existe des poudres métalliques légères, comme le magnésium et l'aluminium auront tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent.

La technique de frittage est réalisée en même temps que le procédé de compactage si le matériau fonctionnellement gradué est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés [Watari 2003, Jamaludin 2013].

I.11.7. Projection thermique :

La projection thermique est une méthode pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'on construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm à mm). En 2002, trois types de

revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique, ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM [Jamaludin 2013].

I.11.8. Processus d'infiltration :

Ce procédé est constitué de deux phases et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première phase est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi 1990].

D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al/SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue [Cho 2004, Jamaludin 2013].

I.12.les matériaux composites classiques et les FGM :

Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et, par conséquent, les éléments constitutifs des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les propriétés souhaitées, tels que la haute rigidité, légèreté, résistance mécanique et chimique, bon comportement à l'humidité et à la corrosion. L'anisotropie des structures composites stratifiées généralement se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, qui peut conduire à des dommages sous la forme des fissures de la matrice, la séparation des assemblages et délaminage.

Les matériaux à gradient de propriétés FGM sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre. La variation progressive dans un matériau est très utile, elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, les céramiques présentent une résistance à la chaleur et à la corrosion; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité, ces types des FGM sont

utilisés comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figures, I.14, I.15 et I.16.

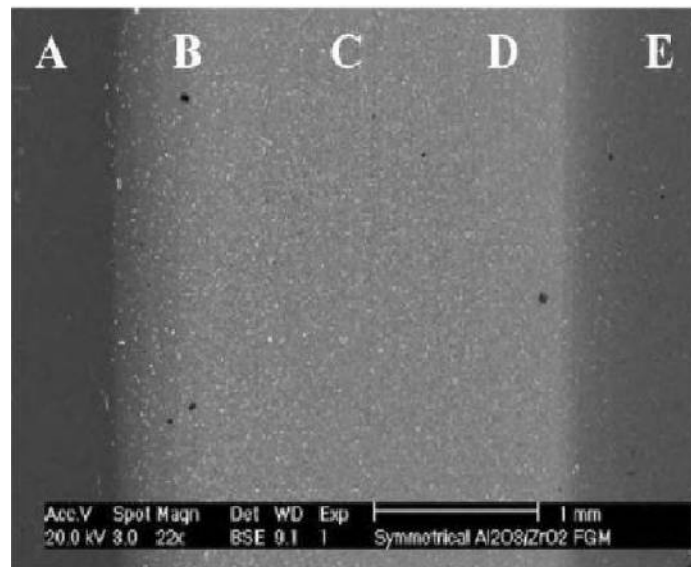


Figure I.14: Une vue microscopique d'un FGM [Hashmi 2014]

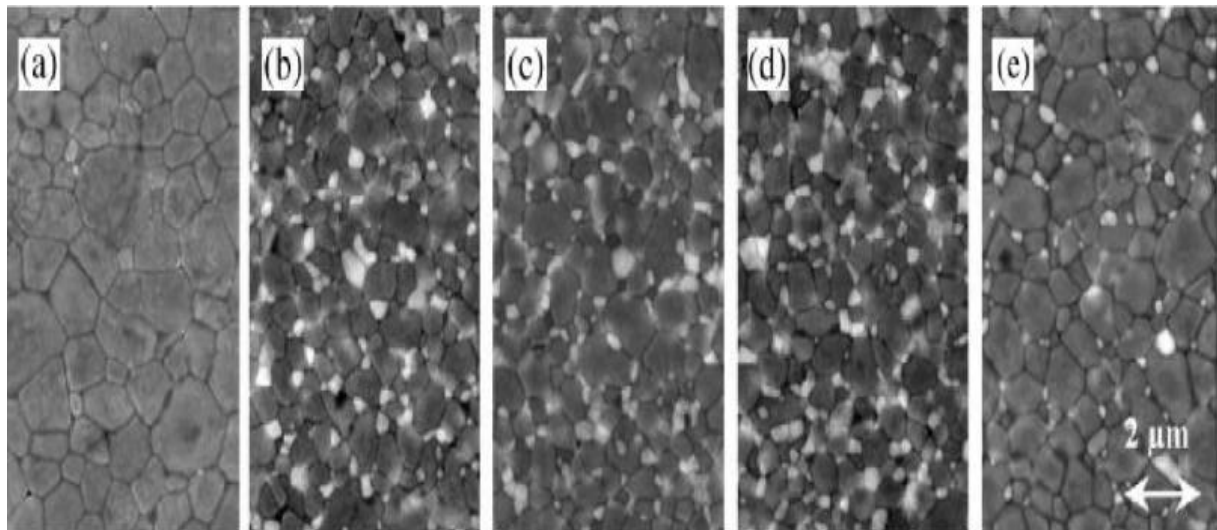


Figure I.15: La microstructure d'un FGM [Hashmi 2014]

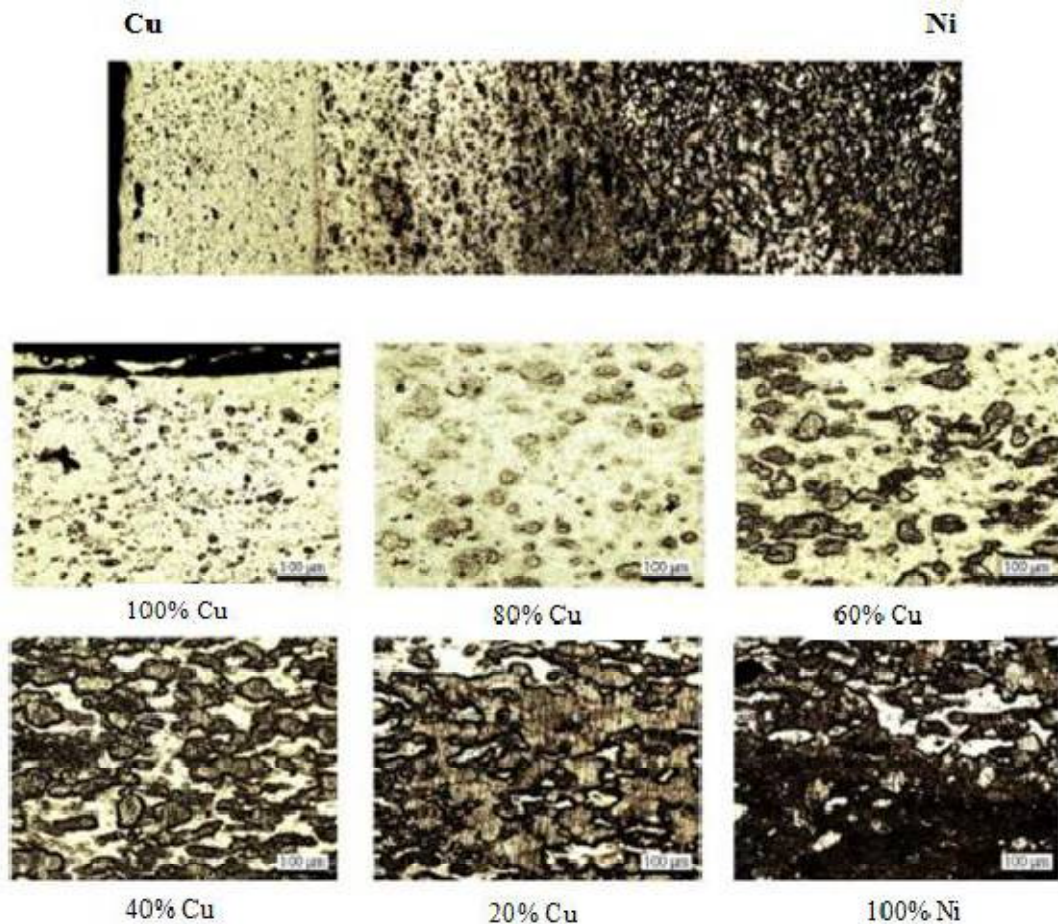


Figure I.16: Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [Hashmi 2014]

I.13. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

[Delale et Erdogan 1983] ont indiqué que l'effet du module de Young sur la déformation est beaucoup plus important que celui du coefficient de Poisson. Ainsi, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque est constant. Cependant, le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou avec une fonction sigmoïde (S - FGM).

La figure I.17, indique les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson

sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $V = V(z)$

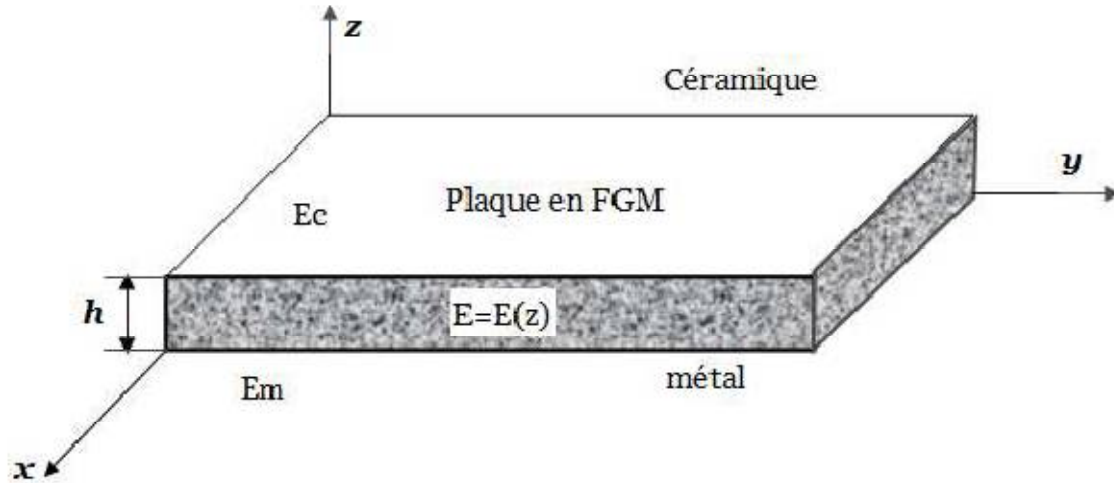


Figure I.17: Géométrie d'une plaque FGM

I.13.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la plaque P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.18. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$ et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

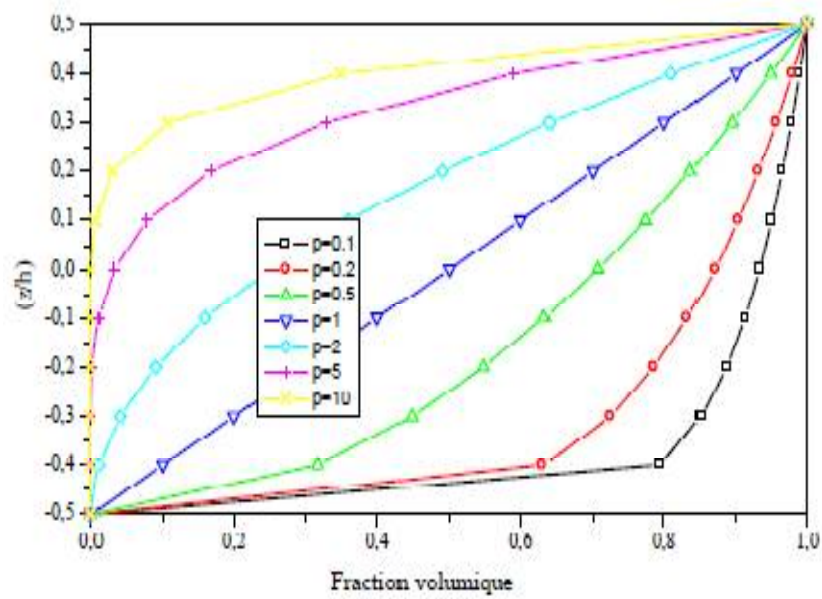


Figure I.18: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM

I.13.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

[Chi et Chung 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La figure I.19 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-4a) et (I-4b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée plaque S-FGM.

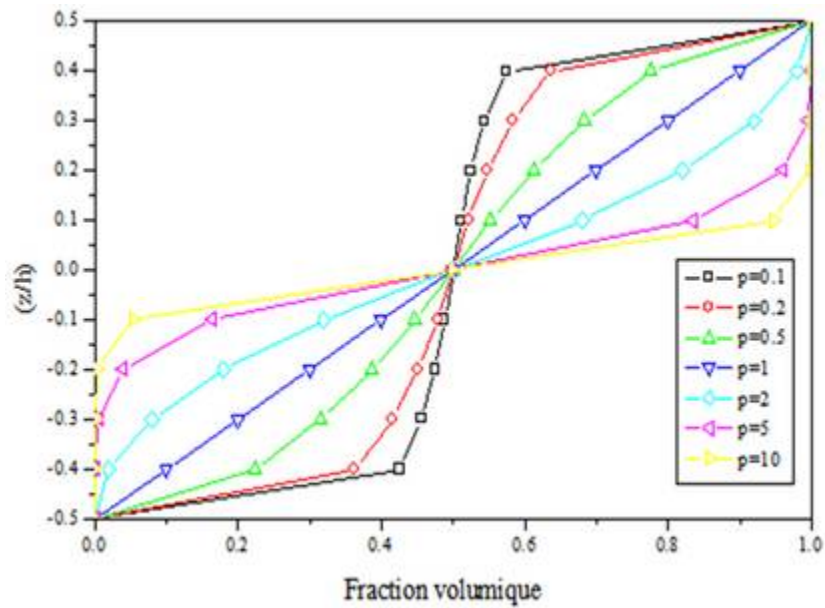


Figure I.19: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM

I.13.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FG, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [Delale et Erdogan 1983].

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5a})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.20.

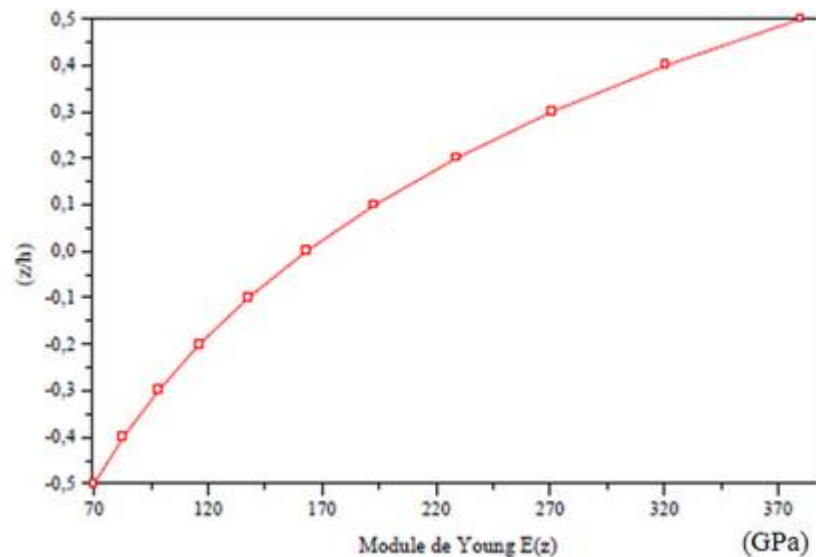


Figure I.20: La variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.14. EXEMPLES DE SECTEURS D'APPLICATION DES COMPOSITES

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie, ont permis de produire des matériaux fonctionnellement gradués, utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microscopie, et la composition matérielle. Le concept du FGM est applicable à de nombreux domaines. Dans les applications d'ingénierie à des outils de coupe, des composants du moteur, et des pièces de machines, grâce à des propriétés incompatibles telles que légèreté, liberté de forme, résistance à la chaleur et l'usure, la résistance à la corrosion ainsi que la ténacité et l'usinage sont incorporés dans une seule pièce. Quelques-unes des applications des FGM sont discutées ci-dessous:

I.14.1. Secteur de la construction civile

L'utilisation des matériaux composites dans la construction civile est un nouveau pas, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. Le problème majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. [Menail 2009].

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone résistent aux

séismes. L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité. [Ait Atmen 2011]

I.14.2. Secteur de la médecine

Watari et al. [Watari 2003] ont présenté une technique pour la fabrication d'implants dentaires en titane et hydroxyapatite en céramique. La base de l'implant a été faite de l'hydroxyapatite à insérer dans la mâchoire. L'implant était en titane gradué vers le haut, afin de recevoir la prothèse dentaire. L'expérience a montré le tissu osseux succès croissant autour de l'insert. L'implant a été produit par une graduation de titane et hydroxyapatite en poudre dans un moule en caoutchouc de silicone qui a été soumise à une pression isostatique à froid et ensuite fritté dans un four.

Chu *et al.* [Chu 1999] ont également étudié les FGM avec le titane et hydroxyapatite et les résultats ont montré que l'amélioration des propriétés mécaniques de l'implant a été obtenue et aucun problème inter faciale n'a été détecté. [Kumar et Maruno 2002] ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité. Les couches de verre et de verre/zircone graduée ont été utilisées pour enrober l'alumine substrats par Vitale Brovarone *et al.* [Brovarone 2001]. La graduation était nécessaire en raison du coefficient de dilatation différent et l'incompatibilité entre le substrat et les revêtements. Les revêtements fournis une bonne biocompatibilité et l'alumine fourni de bonnes propriétés mécaniques [Hopkinson 2006, Saiyath 2015].

I.14.3. Secteur de l'aérospatiale et l'automobile :

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, Le secteur de l'aérospatiale a montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale

Aboudi *et al* [Aboudi 2000] ont présenté l'utilisation des FGM pour adapter la réponse des composants structurels par la théorie d'ordre élevé. L'objectif était d'analyser la performance du gradient par la modélisation de la microstructure en utilisant le modèle de l'élément fini (FEM). Des travaux ultérieurs présentés par Arnold [Arnold 2001] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [Hopkinson 2006, Saiyath 2015].

[Bhatt 2000] a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine. Le nitrure de silicium supporte des températures élevées, mais a un coût de traitement élevé et faible résistance aux chocs. En utilisant des technologies SFF, la métallurgie des poudres et la coulée de gel ont été étudiés comme des alternatives pour produire des pièces viables.

I.14.4. Secteur de l'industrie :

Le développement des matériaux composites, avec la possibilité de modifier leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique, particulièrement gradient à matrice d'aluminium, ont été utilisés dans des applications importantes dans l'industrie tels que l'emballage électronique, les ensembles de frein de rotor dans l'industrie automobile et les matériaux de blindage [Saiyath 2015].

I.14.5. Articles de sports :

Les matériaux composites répondent bien aux exigences sportives, malgré un coût relativement élevé, divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance, Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques etc..... Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports. [Hopkinson 2006, Saiyath 2015].

I.15. Avantages et inconvénients des matériaux composites :

I.15.1. Avantages :

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant.

- Ils sont bien sûr insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques... etc.
- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande. Ils offrent de grandes possibilités de maniement.
- Grande résistance à la fatigue ;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone).

I.15.2. Inconvénients :

- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.
- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température,
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes,
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques,
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.

I.16. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux composites , leurs propriétés, les différentes méthodes d'élaboration de ces matériaux, ensuite on s'est intéressé aux domaines d'application, leurs différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau "module de Young ,coefficient de Poisson et masse volumique" à travers l'épaisseur d'une plaque fonctionnellement graduée, ces lois peuvent être puissances, exponentielles ou même sigmoïde, La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet d' inventer des nouvelles structures , peuvent exploiter dans le domaine de génie civil.

CHAPITRE II

LES DIFFÉRENTES APPROCHES D'ANALYSE DES PLAQUES

Chapitre II

Les différentes approches d'analyse des plaques

II.1. Introduction:

Le vaste problème de la modélisation d'une plaque est étudié depuis de nombreuses années afin de pouvoir répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures avec une forte anisotropie, (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) nécessite de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution appropriée.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches. Ces modèles permettent de réduire le problème d'élasticité 3D en 2D; en considérant un champ de déplacement continu suivant l'épaisseur avec également une continuité de déformation entre les différentes couches.

II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles:

II.2.1.Approches monocouche équivalente:

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, dans cette approche, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme une seule couche statiquement équivalente.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques où les champs de contraintes plus raffinés.

II.2.1.1.La théorie classique des plaques minces de love- kirchhoff (CLPT):

Le développement de la théorie des poutres d'Euler -Bernoulli aux plaques est connu comme la théorie des plaques de [Kirchhoff 1950] Figure II.1 ou de la théorie classique de la plaque (CPT). La théorie classique de la plaque est celle dans laquelle le champ de déplacement est basé sur l'hypothèse Kirchhoff, qui se compose des trois parties suivantes :

1- Les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane (les normales transversales) avant déformation restent droites après déformation.

2- Les normales transversales ne subissent pas élongation (ils sont inextensibles).

3- Les normales transversales tournent de telle sorte qu'ils restent perpendiculaires à la surface du milieu après déformation.

Ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [Cugnoli 2004].

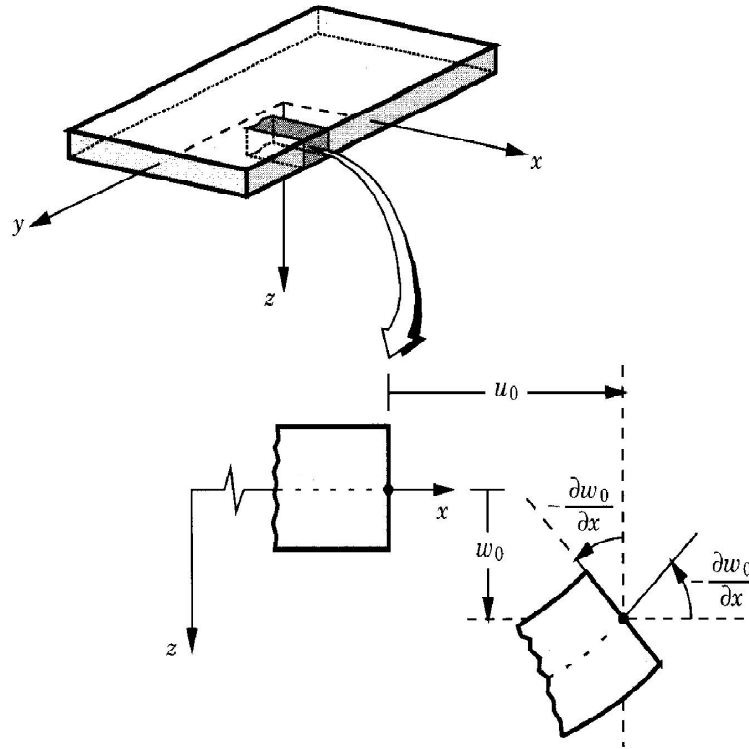


Figure II.1: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy 2004]

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit alors:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1c})$$

Avec: u_0, v_0, w_0 le déplacement de membrane dans les directions x, y et z sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$)

w_0 : la flèche de la plaque, $\frac{\partial w_0}{\partial x}$: la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan x, y , et l'épaisseur h est orienté selon l'axe

$$z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$$

Puisque l'effet de cisaillement transverse ne tient pas en compte dans ce modèle, la précision de la théorie CLPT n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces.

II.2.1.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT:

Les modèles élaborés selon la théorie FSDT, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement, les études sur la théorie FSDT peuvent être référées dans [Reissner1945],[Henky 1947], [Mindlin 1951] ainsi que [Timoshenko et Woinowsky-Krieger 1959],[Reddy1997], [Reddy 1999]

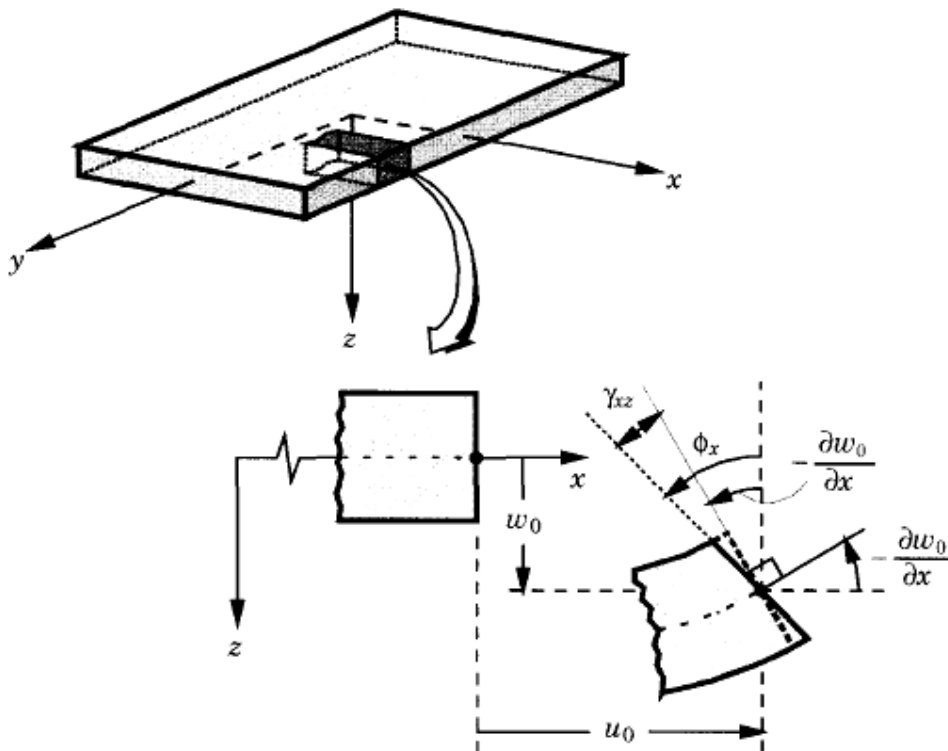


Figure II.2: Illustration de la plaque de Mindlin-Reissner [Reddy 2004]

Le champ du déplacement de la théorie FSDT est défini par :

$$u(x, y, z) = u_0 + z\phi_x(x, y), \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0 + z\phi_y(x, y), \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (\text{II.2c})$$

La théorie de FSDT donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige d'introduire des facteurs de correction de cisaillement, ces facteurs dépendent des propriétés constitutives de la couche, le dispositif de stratification et le type de structure "comme les conditions aux limites et la géométrie"[Ochoa1992]; pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.1.3. La théorie de déformation en cisaillement ordre élevé HSDT:

Pour passer les limites des théories de CPT et FSDT et pour assurer la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur, la plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor. Des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme. Nguyen *et al* [Nguyen 2004];

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)} + z^3\phi_i^{0(3)} + z^4\phi_i^{0(4)} + \dots \quad (\text{II.3})$$

A Partir de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4, \dots$

Les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre de développement c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand 1949]; [Naghdi 1957] ; [Reissner 1975]; [Reddy 1984], [Kant et Swaminathan 2002].

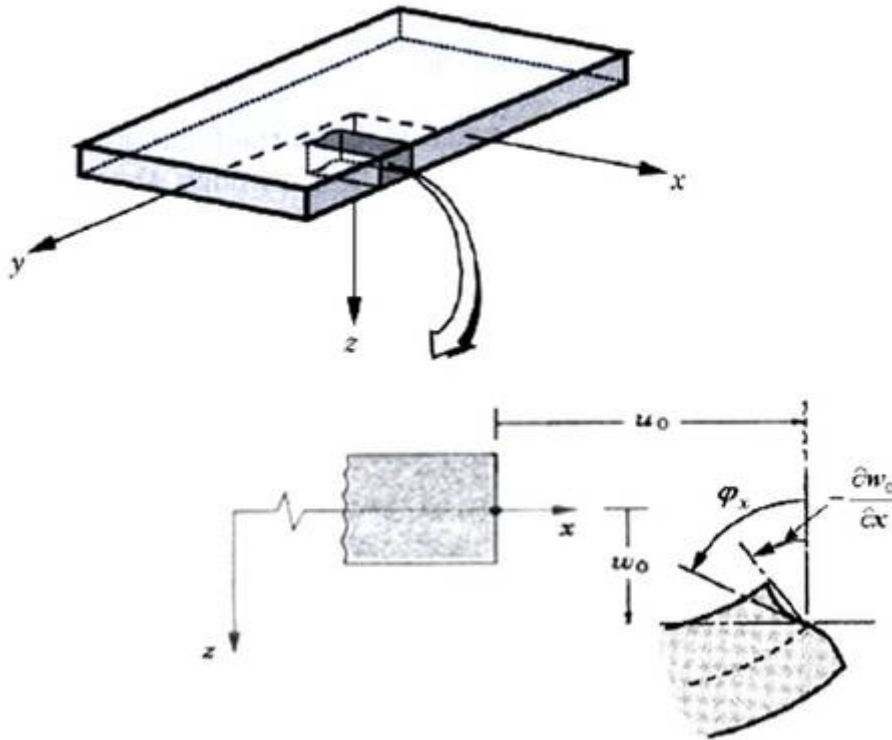


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy 1997]

La forme du champ de déplacement proposée à travers l'épaisseur est la suivante:

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \tag{II.4a}$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \tag{II.4b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \tag{II.4c}$$

Avec: (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes x et y respectivement, $\left(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$ et $\psi(z)$ est une fonction de

cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z) = z$

Le modèle de HSDT a été développé par [Ambartsumyan 1969] dans lequel il donne une fonction de cisaillement transversal sous la forme:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \tag{II-5}$$

Selon la fonction de cisaillement $f(z)$, nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont décrites comme suit:

- L'approche de [Reissner 1945], [Panc 1980] et [Kaczkowski 1975], avec:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Levinson, [Murthy 1981],[Reddy 1997],[Reddy 1999] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de [Reddy 1984], le champ de déplacement membranaire est cubique, ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle [Duong 2008], la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur, les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier 1991] propose le modèle "sinus", il utilise une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur, cette fonction s'écrit comme ci-dessous:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z\pi}{h} \right) \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverse prennent une forme cosinus à travers l'épaisseur de la plaque. La version exponentielle de la théorie de déformation d'ordre élevé a été proposée par Afaq *et al* [Afaq 2003], où la fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.9})$$

La fonction de sinus de [Touratier1991] ne permet qu'un développement en puissance impaire, mais la fonction exponentielle permet un développement pair et impair.

On peut citer quelques contributions importantes de développement d'ordre supérieur:

- L'approche de [Aydogdu 2005]

$$f(z) = z \alpha^{-2 \left(\frac{z}{h}\right)^2} \ln(\alpha) \quad \alpha > 0 \quad (II.10)$$

- L'approche de [Soldatos 1992]

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (II.11)$$

- L'approche d'Ait Atmane *et al* [Ait Atmane 2010]

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (II.12)$$

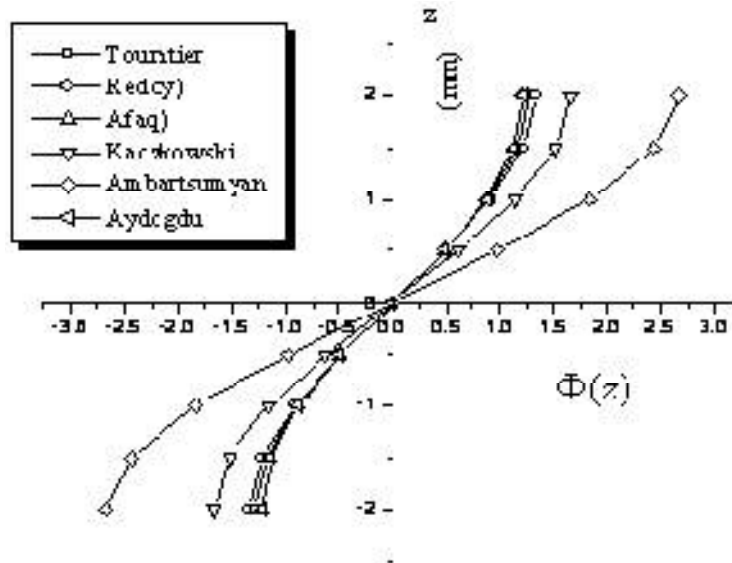


Figure. II.4: Variation de la fonction de forme $\Phi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

Selon la figure II.4, on remarque que les deux approches de [Ambartsumyan 1969] et de Karczowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; elles sont servies comme éléments de base pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

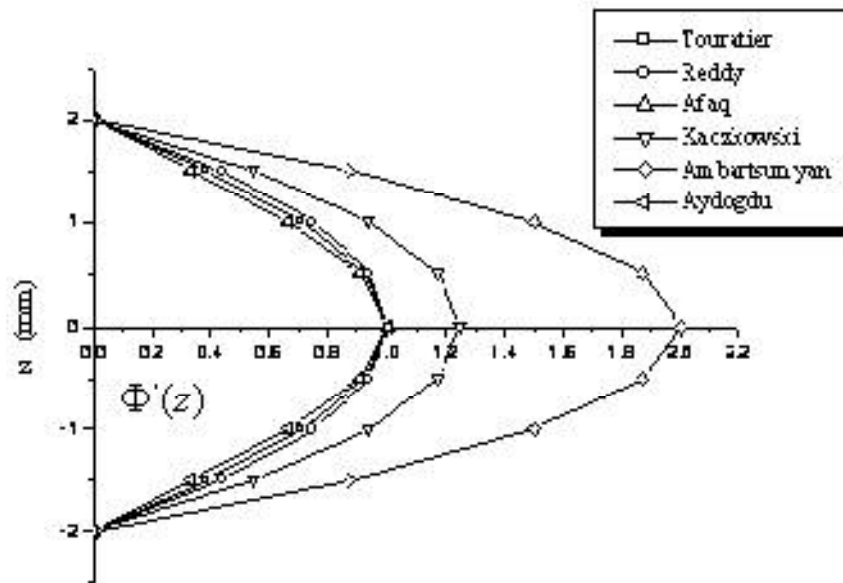


Figure.II.5: Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Phi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

Pour la figure. II.5, on remarque aussi la divergence des deux approches de [Ambartsumyan 1969] et de Kaczkowski par rapport aux autres approches.

II.2.2.Approche par couche

L'approche par couche est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot 1997], [Carrera 2000], [Afaq 2003], [Reddy 1984], [Di Sciuva 1987].

D'une façon générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux catégories: les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches, et les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces. (Figures. II.6 et II.7).

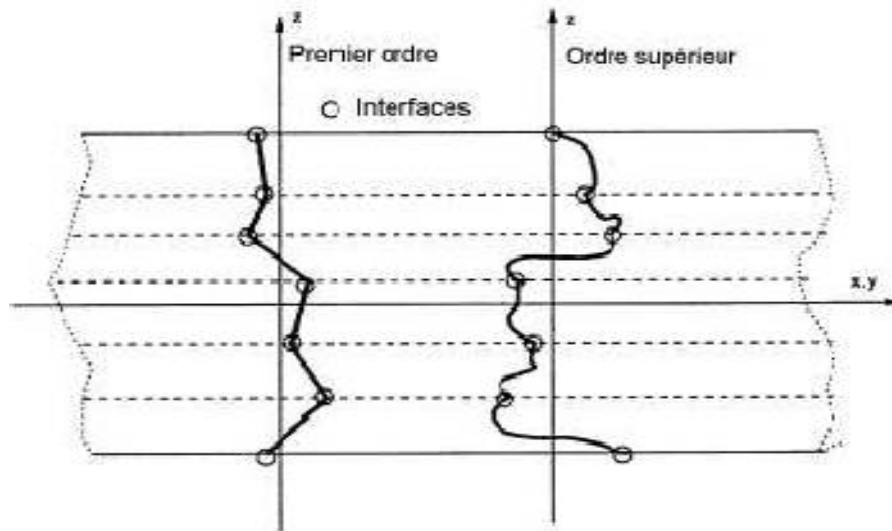


Figure II.6: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [Nguyen 2004]

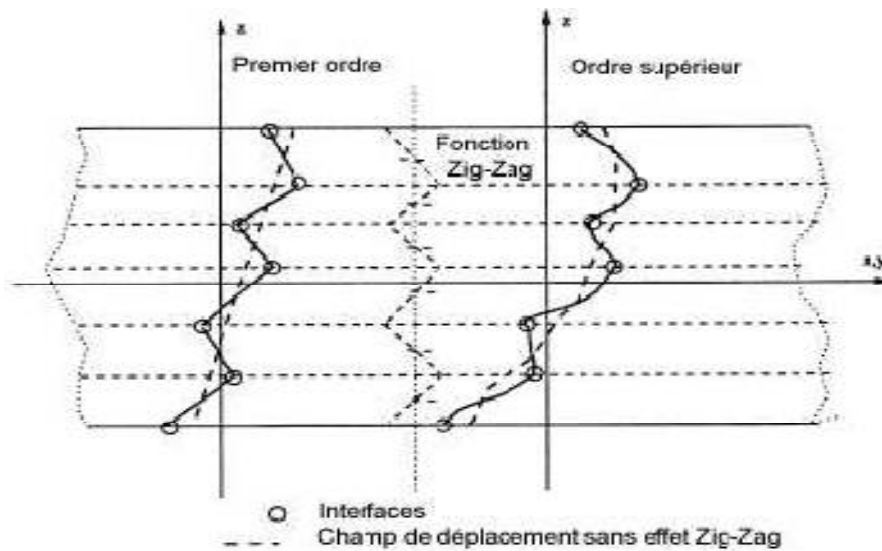


Figure II.7: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique Nguyen et al [Nguyen 2004]

II.2.2.1. Les modèles zig-zag:

[Di Sciuva 1987] a proposé le modèle de zig-zag du premier ordre. Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, où les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside), cette dernière donne une contribution des déplacements membranaires qui sont continus en z , mais sa première dérivée est discontinue à l'interface (Figure. II.8). La continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée, et les déformations transversales sont donc discontinues.

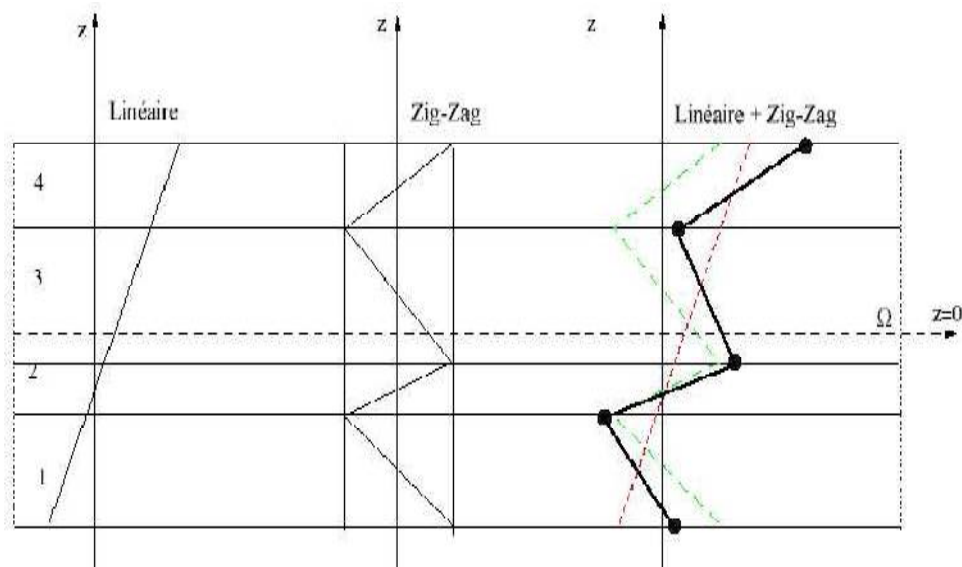


Figure II.8: Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.

Nguyen et al [Nguyen 2004]

En se basant sur le concept de [Di Sciuva 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle de zig-zag [Murakami 1986], [Averill 1994], [He 1994], [Icardi 2001], [Carrera 2004], l'amélioration primordiale réside dans l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements, on suppose le champ de zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique), figure. II.9, les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres [Tafla 2007].

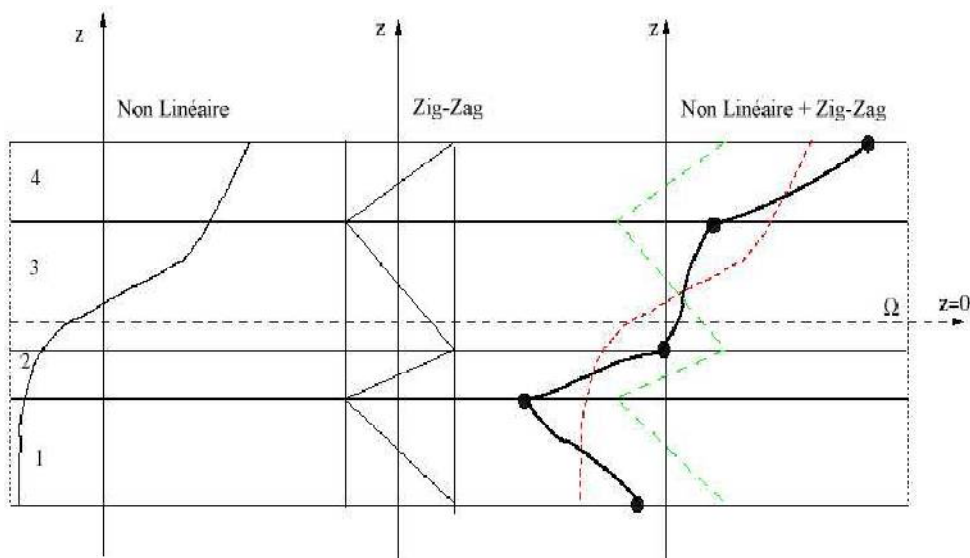


Figure II.9: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur

Nguyen et al [Nguyen 2004]

II.2.2.2. Les modèles couches discrètes:

Ces modèles adoptent une approximation plus fine des champs à travers l'épaisseur du multicouche que les approches décrites précédemment puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. Avec le modèle couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaque (2D) couplés par des efforts d'interface, le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite, les conditions de continuité aux interfaces sont assurées.

Le champ de contraintes dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche, les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. [Kassapoglou 1986], dans les contraintes planes sont supposées constantes à travers l'épaisseur, et le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Dans [Yin 1987], pour déterminer les contraintes inter laminaires, des fonctions de contraintes sont utilisées par couche, les contraintes sont approximées de façon polynomiale à travers l'épaisseur.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité, Nguyen *et al* [Nguyen 2004].

II.2.3. Modèle éléments finis de structure multicouche:

Les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples, mais pour les cas compliqués, plusieurs méthodes numériques ont été développées. La méthode des éléments finis est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

II.2.3.1 Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [Reddy 1980], [Ganapathi 1997]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud.

L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grace à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité, les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen 2004].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants.

En se basant sur le modèle "sinus" de [Touratier, 1991], différents éléments finis quadrilatères et triangulaires sont considérés. L'élément triangulaire développé par [Polit, 1997] est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds, la continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure II.10.

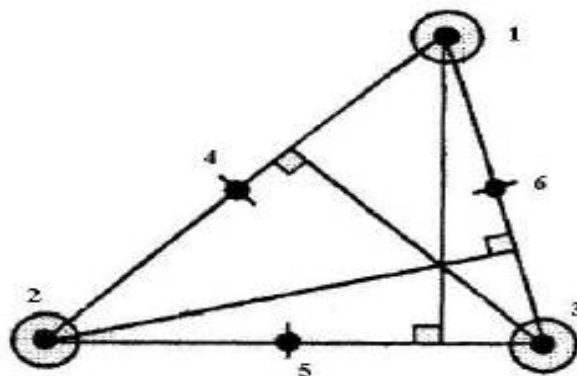


Figure II.10: Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds [Polit, 1997].

Les travaux de [Shankara ,1996] et [Khare, 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures II.11 et II.12). Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:

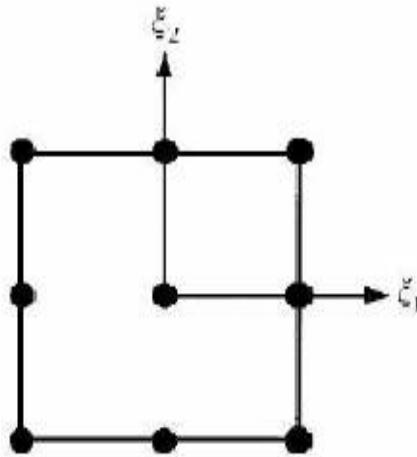


Figure II.11: Éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 nœuds
[Nguyen 2004].

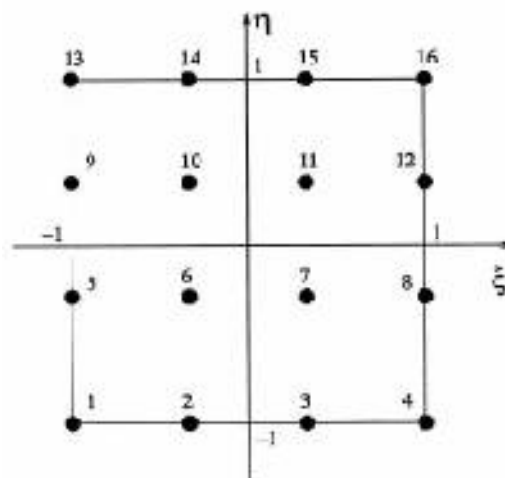


Figure II.12: Éléments quadrilatères de type Lagrange à 16 nœuds
[Nguyen 2004].

II.2.3.2. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso-paramétrique 20 nœuds de Raju [Raju, 1981]

sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure. II.13.

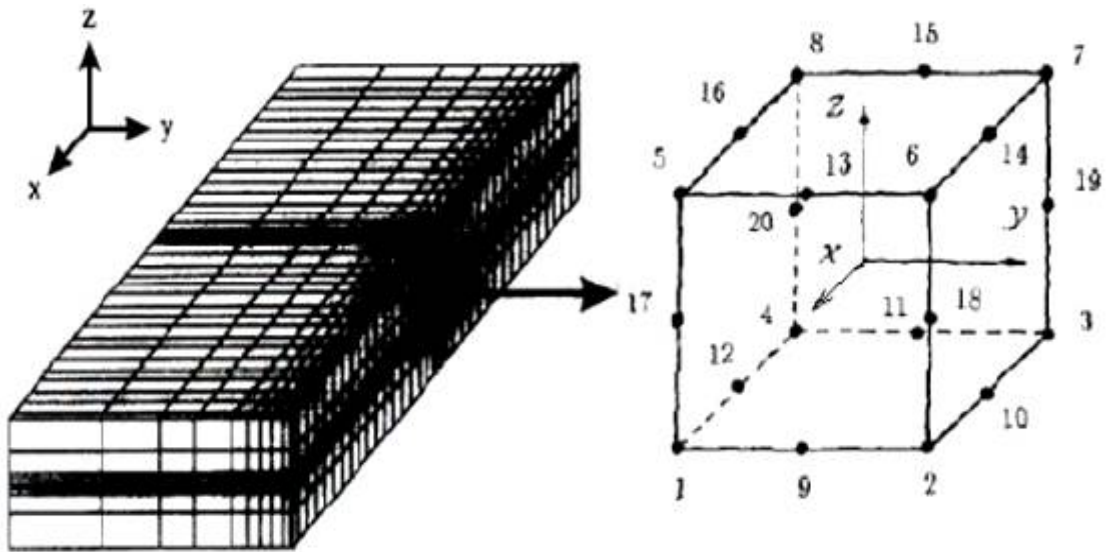


Figure II.13: Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires [Nguyen 2004]

Dans [Bui 2000] les interfaces sont modélisés par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement l'épaisseur d'un élément de plaque mince vers zéro (voir Figure. II.14). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

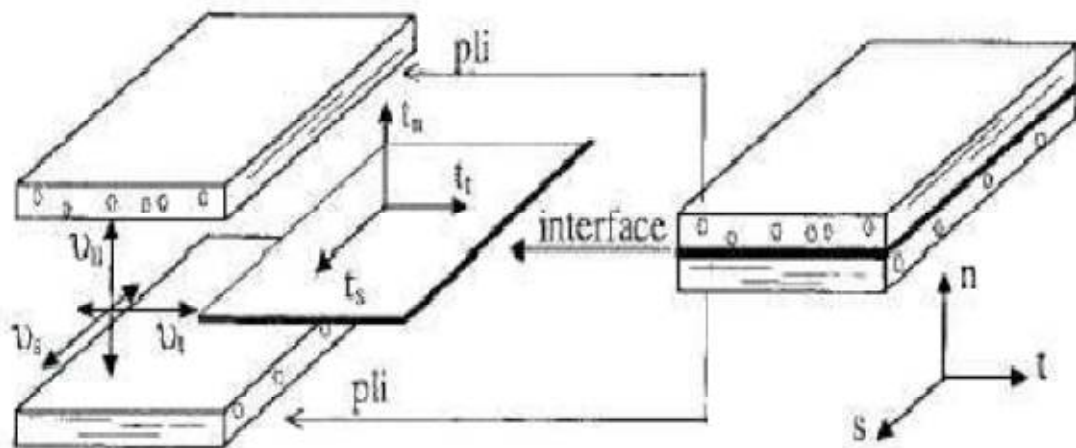


Figure II.14: Élément d'interface. [Bui 1999]

II.3.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites à savoir l'approche monocouche équivalente et l'approche par couche. La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), permet de décrire avec une bonne précision les champs de contrainte et déformation dans le cas où la plaque mince ou modérément épaisse. Pour les plaques épaisses la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), devient assez bien adaptée à la description du comportement mécanique.

CHAPITRE III

ETUDE ANALYTIQUE DES VIBRATIONS DES PLAQUES FGM

Chapitre III

Étude analytique des vibrations des plaques FGM

III.1. Introduction:

Les plaques posées sur fondations élastiques ont été largement adoptées par plusieurs recherches pour modéliser divers problèmes constructifs pendant les décennies passées. Pour décrire les interactions de la plaque et de la base aussi appropriée que possible, les scientifiques ont proposé divers genres de modèles de bases [Kerr 1964].

Le modèle le plus simple concernant la base élastique est le modèle de Winkler (1867), ce modèle est incapable de prendre en compte la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qui stipule qu'il n'y a pas d'interaction entre les ressorts adjacents résulte de la négligence de l'influence du sol sur les bords de la plaque. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak [Pasternak 1954] qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases). [Shen 1995, Omurtag 1997, Matsunaga 2000, Filipich 2002, Zhou 2004, Huang 2008].

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie des composites. Il a atteint une large acceptation dans l'aérospatiale et de nombreuses autres industries, et il est largement utilisé dans les avions et les véhicules spatiaux, des navires, des bateaux, des conteneurs et des constructions résidentielles. La technique de gradation de la céramique ainsi que des métaux initiés par le scientifique du matériel japonais à Sendai a marqué le début d'explorer la possibilité d'utiliser les FGM pour diverses applications structurelles [Reddy. 2000].

L'objectif de cette thèse est d'utiliser la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement pour étudier la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak. Nous supposons que la plaque est réalisée en matériau isotrope ayant des propriétés matérielles variant d'une façon continue dans seulement la direction d'épaisseur. Nous considérons un matériau à gradient de propriétés à deux phases, avec une variation de la loi de puissance des fractions en volume des

constituants dans l'épaisseur. Nous avons comparé les résultats analytiques avec ceux disponibles dans la littérature, et nous avons trouvé des bons accords avec eux.

III.2. Formulation de la problématique

Considérons une plaque rectangulaire FGM simplement appuyée ayant une épaisseur uniforme (h), la longueur (a) et la largeur (b), référence aux coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z). Comme indiqué sur la figure III.1. Les caractéristiques matérielles de la plaque FGM sont considérées comme variant de façon continue selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit: Boudierba *et al.* [Boudierba 2013], Meksi *et al.* [Meksi 2015], Meradjah *et al.* [Meradjah 2015]:

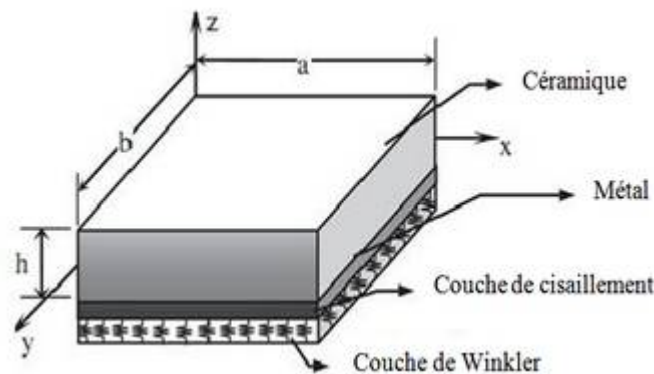


Figure III.1 Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où P est la propriété effective du matériau, le coefficient de Poisson ν , module de Young E et la densité de masse ρ , P_m et P_c représentent respectivement la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, et p est l'exposant de la fraction de volume. Il est à constater que le nombre réel positif p ($0 \leq p < \infty$) est l'indice de loi de puissance ou d'une fraction de volume, les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$, le plan médian est défini par $z = 0$. La plaque FGM est une plaque entièrement en céramique lorsque p est mis à zéro et entièrement métallique pour une valeur de p égal à l'infini.

Ainsi, les équations du module de Young E et la densité du matériau ρ de la plaque FGM peuvent être exprimée comme:

$$\begin{aligned}
E(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \\
\rho(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p
\end{aligned} \tag{III.2}$$

Le coefficient de Poisson ν est considéré comme constant. Sallai *et al.* [Sallai 2015], Bellifa *et al.* [Bellifa 2016].

Le champ de déplacement de la nouvelle théorie est donné comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \tag{III.3a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \tag{III.3b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \tag{III.3c}$$

Où $u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y)$, et $\theta(x, y)$ sont les quatre fonctions de déplacement inconnues de la surface moyenne de la plaque, le dernier inconnu est un terme mathématique qui permet d'obtenir les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes y et x , respectivement (comme dans le HSDT ordinaire). Noter que les intégrales n'ont pas de limites. Dans la présente étude, on considère seulement quatre termes de déplacement inconnus au lieu de cinq termes dans HSDT ordinaire [Akavci, 2014]. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. $f(z)$ représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur.

La fonction du cisaillement proposée est donnée comme suite [Nguyen 2014] :

$$f(z) = \sinh^{-1} \left(\frac{3z}{h} \right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \tag{III.4}$$

En remplaçant, les relations de déplacement (III.3) dans les équations d'élasticité de déformation-déplacement, les composantes normales et déformations transversale sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^h \\ k_y^h \\ k_{xy}^h \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \tag{III.5}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x^h \\ k_y^h \\ k_{xy}^h \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{array} \right\}, \quad (III.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{array} \right\}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (III.6b)$$

Les intégrales apparaissant dans les expressions ci-dessus doivent être résolues par une solution de Navier et peuvent être exprimées comme suites:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (III.7)$$

Où les coefficients A' et B' sont définis selon le type de solution adoptée, dans ce cas par Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, B' = -\frac{1}{\beta^2}, k_1 = \alpha^2, k_2 = \beta^2 \quad (III.8)$$

Où α et β sont définis dans l'expression (III.25).

Pour les plaques FG, les relations contrainte-déformation pour l'état de contrainte plane peuvent être exprimées comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} \quad (III.9)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (III.2), les coefficients de rigidité, C_{ij} peuvent être exprimés comme:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu^2)} \quad (III.10)$$

III.3. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et aux équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique:

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_e - \delta K) dt \quad (\text{III.11})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δV_e est la variation de l'énergie potentielle de la base élastique; Et δK est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^t [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}] dt \\ &= \int_A [N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où A est la surface supérieure. Les efforts et les moments résultants $N, M, et S$ sont définies par:

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \text{ et } (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III.13})$$

La variation de l'énergie potentielle de la base élastique peut être exprimée par:

$$\delta V_e = \int_A f_e \delta w_0 dA \quad (\text{III.14})$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de base de Pasternak:

$$f_e = K_w w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.15})$$

Dans lequel K_w et K_s sont la rigidité de la fondation Winkler, et la rigidité du cisaillement de la base élastique respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V [u \delta u + v \delta v + w \delta w] \rho(z) dV \\
&= \int_A \{ I_0 [u_0 \delta u_0 + v_0 \delta v_0 + w_0 \delta w_0] \\
&\quad - I_1 \left(u_0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta u_0 + v_0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \delta v_0 \right) \\
&\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(u_0 \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta u_0 \right) + (k_2 B') \left(v_0 \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta v_0 \right) \right) \\
&\quad + I_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) + K_1 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) \right) \\
&\quad - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \right) \} dA
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Où la convention de (·) représente la dérivée par rapport au temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse donnée par l'équation. (III.1); Et (I_1, J_1, K_1) sont des inerties de masse exprimées par:

$$(I_1, I_1, I_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \tag{III.17a}$$

$$(J_1, J_2, K_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \tag{III.17b}$$

En utilisant les relations de déplacement-déformation généralisées (III.5), les relations contraintes-déformation (III.9), les fondamentaux du calcul des variations et la collecte des coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$ dans l'équation. (III.11), les équations de mouvement sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 u_0 - I_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 v_0 - I_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e &= I_0 w_0 - I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 w_0 \\
&\quad + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
\delta \theta : k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} &+ k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = \\
&\quad - J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\
&\quad - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Où les résultats des contraintes et les moments résultants définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma, \tag{III.19}$$

Dans lequel:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{III.20a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{III.20b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{III.20c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{III.20d}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}^t, \quad (III.20e)$$

Les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{12} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (III.21a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (III.21b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)^2] dz, \quad (III.21c)$$

En remplaçant l'équation (III.18) dans l'équation (III.19), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements u_0, v_0, w_0, θ et les équations appropriées prennent la forme:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + B_{66})d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}\theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1\theta = I_0u_0 - I_1d_1w_0 + J_1A'k_1\theta, \quad (III.22a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1)d_2\theta = I_0uv_0 - I_1d_2w_0 + J_1B'k_2\theta, \quad (III.22b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + 2B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}\theta + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}\theta - f_e = I_0w_0 + I_1(d_1u_0 + d_2v_0) - I_2(d_{11}w_0 + d_{22}w_0) + J_2(k_1A'd_{11}\theta + k_2B'd_{22}\theta), \quad (III.22c)$$

$$\begin{aligned} & (B_{12}^s k_1 + B_{66}^s k_2)d_1u_0 - B_{66}^s(k_1A' + k_2B')d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 \\ & - (B_{12}^s k_1 + B_{66}^s k_2)d_2v_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 \\ & + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}w_0 H_{11}^s k_1^2 \theta + H_{22}^s k_2^2 \theta - 2H_{11}^s k_1 k_2 \theta - ((k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta \\ & + A_{44}^s ((k_2B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1A')^2 d_{11} \theta) = J_1(k_1A'd_1u_0 + k_2B'd_2v_0) \\ & + J_1(k_1A'd_{11}w_0 + k_2B'd_{22}w_0) - K_2((k_1A')^2 d_{11} \theta + (k_2B')^2 d_{11} \theta) \end{aligned} \quad (III.22d)$$

Où d_{ij}, d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.23})$$

III.4. Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées:

Pour la solution analytique de l'équation différentielle partielle Eq. (III.22), la technique de Navier, basée sur de doubles séries de Fourier, est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées, la solution des variables de déplacement satisfaisant aux conditions limites ci-dessus peut être exprimée dans la série de Fourier suivante:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer et ω est la fréquence naturelle. α et β sont exprimés comme suit:

$$\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b \quad \text{et } i = \sqrt{-1}. \quad (\text{III.25})$$

En remplaçant l'équation (III.24) en équations de mouvement (III.22), on obtient en dessous l'équation de valeur propre pour toute valeur fixe de m et n, pour un problème de vibration libre:

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

où

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ S_{14} &= \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\ S_{24} &= \beta(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2), \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) + K_w + K_s(\alpha^2 + \beta^2), \\ S_{34} &= -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(D_{66}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2), \\ S_{44} &= -k_1(H_{11}^s K_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(H_{66}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A') A_{55} \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44} \beta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= -I_0, m_{13} = \alpha I_1, m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, m_{22} = -I_0, m_{23} = \beta I_1, \\ m_{24} &= -k_2 B' \beta J_1, m_{33} = -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \\ m_{34} &= J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), m_{44} = -K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Les fréquences naturelles de la plaque FGM peuvent être trouvées à partir de la solution non triviale de l'équation. (III.26).

III-5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, démontré les étapes à suivre pour la résolution d'un problème d'élasticité plane de vibration libre des plaques FGM simplement appuyées reposent sur fondation élastique, en utilisant le principe d'Hamilton qui conduit à une équation générale du mouvement. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats numériques avec validation sont présentés dans le chapitre IV.

CHAPITRE IV

VALIDATION ET COMPARAISON

DES RÉSULTATS

Chapitre IV

Validation et comparaison des résultats

IV.1. Introduction:

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse de comportement vibratoire des plaques FGM posées sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, en utilisant différentes formes de fonction de cisaillement, permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution à travers l'épaisseur.

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente analyse, des comparaisons sont faites avec les différentes théories des plaques disponibles dans la littérature. Deux types de plaques sont employés dans cette étude Al/AlO₂ et Al/ ZrO₂, plaques FGM composées d'aluminium (Métal) et d'alumine ou zircon (Céramique), dans laquelle leurs propriétés matérielles sont présentées dans le tableau. IV.1

Tableau IV.1: propriétés des matériaux utilisées.

Matériaux	propriétés		
	Module de Young(GPa)	Coefficient de poisson	La masse volumique (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	0,3	2702
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	0,3	3800
Zircone (ZrO ₂)	200	0,3	5700

Les relations suivantes sont utilisées pour la présentation de fréquences naturelles et des coefficients de fondation non dimensionnelles:

- Pour plaque isotrope

$$\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0} \text{ avec } D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- Pour plaque FGM

$$\tilde{\omega} = \omega a / h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \bar{\beta} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

- Pour les paramètres élastiques des fondations

$k_w = K_w a^4 / A$, $k_s = K_s a^2 / A$ avec :

$$A = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{[p(8+3p+p^2)E_m + 3(2+p+p^2)E_c]}{[(1+p)(2+p)(3+p)]}$$

IV.2. Validation des résultats de la vibration libre d'une plaque FGM simplement appuyée

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude du modèle actuel, pour la prévision des réponses dynamiques des plaques FGM simplement appuyées, des différentes valeurs de l'indice de puissance, les paramètres de fondations, le rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur sont utilisés.

IV.2. 1. Vibration libre des plaques isotropes

En tant que premier exemple, les plaques carrées isotropes simplement appuyées sont examinées pour l'étude de convergence de la présente théorie de la plaque à quatre variables non polynomiales. Les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles pour différents rapports d'épaisseur sont calculées et comparées à d'autres résultats publiés, dans le tableau IV.2. Les résultats donnés par [Leissa 1973] étaient basés sur une solution 3D exacte, Zhou *et al.* [Zhou 2002] étaient basés sur une méthode 3D Ritz avec des polynômes [Chebyshev, Liu et Liew 1999] étaient basés sur la méthode d'élément en quadrature différentielle, Nagino *et al.* [Nagino 2008]) ont été basés sur une méthode 3D B-spline Ritz, Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi 2011] sur la base d'une solution exacte de type Levy, et Shufrin *et al.* [Shufrin 2005] et [Akavci 2014] basé sur HSDT à deux dimensions.

Le tableau IV.2 examine l'effet du rapport d'épaisseur (h/a) sur les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaque FGM carrée et isotrope simplement appuyée. Comme on le voit à partir de ce tableau, non seulement pour des plaques minces, mais aussi pour les plaques épaisses, les fréquences naturelles sont prédites avec précision par la présente méthode. On peut constater que les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles diminuent lorsque le rapport d'épaisseur (h/a) augmente.

Tableau IV.2: fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaque carrée et isotrope simplement appuyée

h/a	Théorie	Mode							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(1,3)	(3,2)	(2,3)
0.001	Leissa (1973)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou et al.(2002)	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci (2014)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019	128.3019
	Présente	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019	128.3019
0.01	Leissa (1973)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Zhou et al.(2002)	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Akavci (2014)	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0115	128.0115
	Présente	19.7321	49.3040	49.3040	78.8442	98.5202	98.5202	128.0080	128.0080
0.1	Leissa (1973)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5115	106.5154
	Zhou et al.(2002)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci (2014)	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3037	107.3037
	Présente	19.0775	45.5548	45.5548	69.9664	85.2958	85.2958	107.0953	107.0953
0.2	Leissa (1973)	17.4524	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Zhou et al.(2002)	17.4523	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci (2014)	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Présente	17.4916	38.3701	38.3701	55.6322	65.8425	65.8425	79.7662	79.7662

Le deuxième exemple est effectué pour une plaque carrée isotrope reposant sur une fondation élastique de type winkler-paternak. Le tableau IV.3, présente Les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$, avec un rapport d'épaisseur constant $(h/b) = 0,2$ et des paramètres $K_w^{(a)} = K_w a^4 / D_0$ et $K_s^{(a)} = K_s a^2 / D_0$ variables et non dimensionnelles comparées aux résultats de différents HSDT de [Matsunaga 2000] et [Akavci 2014]. On peut également constater que la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une plaque reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak est plus grande qu'une plaque reposée sur une fondation de type Winkler.

Tableau IV.3: fréquences naturelles non-dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaque carrée isotrope simplement appuyée reposée sur une fondation élastique ($h/b = 0,2$).

$K_w^{(a)}$	$K_z^{(a)}$	\hat{w}_{11}			\hat{w}_{12}			\hat{w}_{13}		
		Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente	Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente	Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente
0	0	17.5260	17.5149	17.4916	38.4827	38.4722	38.3701	65.9961	66.1207	65.8425
10	0	17.7847	17.7859	17.7630	38.5929	38.4912	38.4912	66.0569	66.1899	65.9120
10^2		19.9528	20.0603	20.0405	39.5669	39.6620	39.5640	66.5995	66.8087	66.5346
10^3		34.3395	35.5261	35.5178	47.8667	49.0757	49.0040	71.5577	72.6997	72.4588
10^4		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	97.4964	101.799	101.7992
10^5		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.09829	101.799	101.799	101.7992
		10	22.0429	22.2607	22.2435	43.4816	44.0294	43.9447	71.4914	72.6178
		22.2453	22.4745	22.4574	43.5747	44.1347	44.0503	71.5423	72.6806	72.4396
		23.9830	24.3133	24.2980	44.3994	45.0711	44.9893	71.9964	73.2430	73.0050
		36.6276	38.0839	38.0767	51.6029	53.5296	53.4675	76.1848	78.6389	78.4273
		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	99.0187	101.799	101.799
		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7992	101.799	101.799

$$K_w^{(a)} = K_w a^4 / D_0, \quad K_z^{(a)} = K_z a^2 / D_0$$

IV.2. 2. Vibration libre des plaques fonctionnellement graduées

Dans cette section, pour vérifier l'exactitude du présent travail pour les plaques FGM, les fréquences naturelles des plaques, avec des bords simplement appuyés sont examinées. Les deux exemples suivants sont établis pour les plaques carrées FGM en Al / ZrO₂. Dans le tableau IV.4, Les fréquences fondamentales sans dimension sont calculées pour trois exposants différents de fraction de volume, les résultats sont comparés avec la solution 3D exacte de [Vel et Batra 2004] quasi tridimensionnelle sinusoïdale, la théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique de Neves *et al.* [Neves 2012ab], la théorie de cisaillement bidimensionnel à ordre supérieur, théories de la déformation de [Matsunaga 2008], Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi 2011] et [Akavci 2014]. Comme on peut le voir, les résultats sont en bon accord avec les résultats d'autres théories de déformation à deux ou trois dimensions.

Dans le tableau IV.5, les fréquences fondamentales non- dimensionnelles, calculées selon le modèle actuel, sont comparées à la théorie 3D de [Vel et Batra 2004] et 2D HSDT de [Matsunaga 2008], et [Akavci 2014]. On peut observer à partir de cet exemple qu'un bon accord est obtenu entre les résultats de la méthode actuelle et ceux d'autres théories. Pour vérifier les modes d'ordre supérieur, les huit premières et quatre fréquences des plaques

rectangulaires Al / Al₂O₃ FGM sont calculées et illustrées dans les tableaux IV.6 et IV.7, Le tableau IV.6, montre une comparaison entre les huit premières fréquences naturelles sans dimension des plaques carrées FGM calculées par la théorie actuelle et celles données par [Matsunaga 2008] et [Akavci 2014] en utilisant d'autres théories de déformation 2D de ordre supérieur. Un bon accord entre les résultats est confirmé par cette comparaison. Dans le tableau IV.7, les quatre premières fréquences naturelles sans dimension des plaques rectangulaires FGM pour différents rapports d'épaisseur sont présentées par rapport à la théorie de la déformation par cisaillement 2D de [Akavci 2014], et à la théorie exacte de Mindlin , Hosseini- Hashemi *et al.* [Hosseini- Hashemi 2010]. On peut conclure de cet exemple, qu'il existe un excellent accord avec les résultats de la méthode actuelle et ceux du HSDT de [Akavci 2014]. Dans la Figure IV.2, les variations des fréquences naturelles non-dimensionnelles des plaques carrées FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyées, par rapport à l'exposant de la fraction volumique sont tracées, et les résultats sont également comparés à ceux obtenus en utilisant le HSDT proposé par [Akavci 2014]. On voit à partir de la figure IV.2 que la valeur croissante de l'exposant de la fraction de volume entraîne la diminution de la fréquence naturelle.

Le tableau IV.4 présente la comparaison de la fréquence non dimensionnelle obtenue à partir de la nouvelle théorie actuelle de la plaque FGM en Al/ZrO₂ avec les résultats de d'autres théories de Vel *et al.* [Vel. 2004], Neves *et al.* [Neves. 2012ab] et Matsunaga *et al.* [Matsunaga. 2008] et Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011] Akavci *et al.* [Akavci. 2014] pour différentes valeurs de l'exposant de la fraction de volume ($p= 2, 3$ et 5), avec un rapport d'épaisseur constant ($a/h = 5$). Comme on peut le voir, les résultats sont en bon accord avec les autres théories. Les résultats montrent que l'effet de l'exposant de la fraction de volume sur la fréquence de vibration naturelle est très intéressant.

Comme une autre tentative de vérification, le tableau IV.5 présente les comparaisons des fréquences naturelles non-dimensionnelles, pour une plaque carré FGM en Al / ZrO₂ simplement appuyée avec ceux rapportés par Vél *et al.* [Vél. 2004], Matsunaga *et al.* [Matsunaga. 2008], Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011] et Akavci *et al.* [Akavci. 2014] Une corrélation étroite est obtenue. Comme on peut le constater, la fréquence naturelle de vibration augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur et l'indice de loi de puissance.

Tableau IV.4: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ pour plaque carrée FGM en Al/ZrO₂ (a/h) = 5

Théorie	$p=2$	$p=3$	$p=5$
Vel et Batra (2004)	0.2197	0.2211	0.2225
Neves et al. (2012a) ($\varepsilon_z = 0$)	0.2189	0.2202	0.2215
Neves et al. (2012a) ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2198	0.2212	0.2225
Neves et al. (2012b) ($\varepsilon_z = 0$)	0.2191	0.2205	0.2220
Neves et al. (2012b) ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2201	0.2216	0.2230
Matsunaga (2008)	0.2264	0.2270	0.2280
Hosseini-Hashemi et al.(2011)	0.2264	0.2276	0.2291
Akavci (2014)	0.2264	0.2269	0.2278
présente	0.2261	0.2266	0.2275

Tableau IV.5: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ pour plaque FGM carrée ($m = n = 1$).

Mode n°	Théorie	$P = 0^{(a)}$		$P = 1$			$a/h = 5$		
		$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$P=2$	$P=3$	$P=5$
1	Vel et Batra (2004)	4.6582	5.7769	5.4806	5.9609	6.1076	5.4923	5.5285	5.5632
	Matsunaga (2008)	4.6582	5.7769	5.7123	6.1932	6.3390	5.6599	5.6757	5.7020
	Akavci (2014)	4.6569	5.7754	5.7110	6.1924	6.3388	5.6593	5.6718	5.6941
	Présente	4.6445	5.7731	5.7039	6.1901	6.3381	5.6522	5.6647	5.6866
2	Vel et Batra (2004)	8.7132	27.5540	14.5580	29.1230	58.2500	14.2780	14.1500	14.0260
	Matsunaga (2008)	8.7132	27.5540	15.3390	30.6850	61.3740	14.9700	14.7420	14.4760
	Akavci (2014)	8.7132	27.5536	15.3408	30.6861	61.3744	14.9718	14.7436	14.4772
	Présente	8.7132	27.5536	15.3438	30.6876	61.3751	14.9776	14.7502	14.4830
3	Vel et Batra (2004)	14.4630	46.5030	24.3810	49.0130	98.1450	23.9090	23.6960	23.4940
	Matsunaga (2008)	14.4630	46.5030	25.7760	51.7950	103.7100	25.1400	24.7410	24.2780
	Akavci (2014)	14.7280	46.5741	25.9255	51.8664	103.7404	25.2966	24.9091	24.4606
	Présente	14.7280	46.5741	25.9253	51.8662	103.7404	25.3962	24.9087	24.4601
4	Vel et Batra (2004)	24.8300	201.3400	57.6200	212.2200	828.7800	54.6850	53.1790	52.0680
	Matsunaga (2008)	24.8300	201.3400	61.5090	227.2900	888.6000	57.5760	55.2370	53.2880
	Akavci (2014)	25.4268	203.9805	62.8857	231.5235	904.2521	58.9929	56.3726	54.0672
	Présente	25.3381	202.9566	62.6150	230.3785	899.5930	58.7874	56.2176	53.9320

^(a) $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$

Le tableau IV.6 présente la comparaison de la fréquence non dimensionnelle obtenue à partir de la nouvelle théorie actuelle de la plaque FGM en Al/Al₂O₃ avec les résultats d'autres théories de Matsunaga *et al.* [Matsunaga. 2008] ,Akavci *et al.* [Akavci. 2014], Les résultats ci-dessus représentent une validation du présent model. Il est à noter que pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($p= 0, 0.5, 1, 4, 10$ et ∞), la plaque est considérée purement céramique ($p=0$), purement métallique ($p=\infty$). Il est claire que la fréquence non-dimensionnelle devienne plus faible lorsque la plaque est en métal, et augmente quand la plaque FGM devienne plus riche en céramique.

Tableau IV.6: Les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque carrée FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyées ($h / b = 0,1$).

p	Théorie	Mode n°			
		2	4	6	8
	Mode	(1, 1, 1)	(1, 2, 1)	(2, 2, 1)	(1, 3, 1)
0	Matsunaga (2008)	0.0577	0.1381	0.2121	0.2587
	Akavci (2014)	0.0578	0.1380	0.2120	0.2585
	Présente	0.0573	0.1378	0.2117	0.2581
0.5	Matsunaga (2008)	0.0491	0.1180	0.1819	0.2222
	Akavci (2014)	0.0491	0.1176	0.1813	0.2214
	Présente	0.0490	0.1175	0.1811	0.2211
1	Matsunaga (2008)	0.0442	0.1063	0.1640	0.2004
	Akavci (2014)	0.0442	0.1061	0.1636	0.1999
	Présente	0.0442	0.1060	0.1634	0.1996
4	Matsunaga (2008)	0.0381	0.0904	0.1383	0.1681
	Akavci (2014)	0.0381	0.0903	0.1379	0.1677
	Présente	0.0381	0.0902	0.1378	0.1674
10	Matsunaga (2008)	0.0364	0.0858	0.1306	0.1583
	Akavci (2014)	0.0364	0.0858	0.1305	0.1582
	Présente	0.0364	0.0857	0.1303	0.1579
∞	Matsunaga (2008)	0.0283	0.0701	0.1077	0.1313
	Akavci (2014)	0.0294	0.0702	0.1079	0.1316
	Présente	0.0294	0.0702	0.1077	0.1313

Les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyée, pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h), un rapport de géométrie ($b/a = 2$). et l'indice de la loi de puissance ($P=0, 0.5, 1, 2, 5, 8$ et 10) sont énumérés dans le tableau IV.7, les fréquences non dimensionnelles calculées, sont comparées à celles Akavci *et al.* [Akavci. 2014] et Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011]. Excellent accords entre les résultats sont obtenus.

Il est à noter que la fréquence non-dimensionnelle diminue avec l'augmentation du l'indice de puissance.

Tableau IV.7: comparaison des quartes premières fréquences naturelles non dimensionnelles

$\beta = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyée

($b / a = 2$).

a/h	Mode n° (m, n)	Théorie	P						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1 (1, 1)	Réf. ^(a)	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Réf. ^(b)	3.4495	2.9408	2.6529	2.3989	2.2275	2.1724	2.1455
		Présente	3.4463	2.9385	2.6509	2.3970	2.2260	2.1703	2.1431
	2 (1, 2)	Réf. ^(a)	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Réf. ^(b)	5.3002	4.5321	4.0906	3.6900	3.3952	3.3031	3.2626
		Présente	5.2932	4.5269	4.0859	3.6859	3.3919	3.2985	3.2571
	3 (1, 3)	Réf. ^(a)	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Réf. ^(b)	8.1179	6.9690	6.2950	5.6613	5.1479	4.9921	4.9313
		Présente	8.1021	6.9572	6.2845	5.6519	5.1404	4.9820	4.9193
	4 (2, 1)	Réf. ^(a)	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		Réf. ^(b)	10.1828	8.7640	7.9209	7.1105	6.4181	6.2111	6.1355
		Présente	10.1587	8.7459	7.9047	7.0958	6.4064	6.1957	6.1175
10	1 (1, 1)	Réf. ^(a)	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Réf. ^(b)	3.6542	3.1008	2.7952	2.5376	2.3915	2.3418	2.3124
		Présente	3.6533	3.1001	2.7946	2.5370	2.3911	2.3412	2.3117
	2 (1, 2)	Réf. ^(a)	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		Réf. ^(b)	5.7754	4.9059	4.4231	4.0118	3.7682	3.6864	3.6403
		Présente	5.7731	4.9042	4.4216	4.0105	3.7671	3.6849	3.6385
	3 (1, 3)	Réf. ^(a)	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.7575
		Réf. ^(b)	9.2029	7.8300	7.0612	6.3959	5.9766	5.8388	5.7662
		Présente	9.1973	7.8258	7.0575	6.3925	5.9740	5.8351	5.7617
	4 (2, 1)	Réf. ^(a)	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Réf. ^(b)	11.8560	10.0992	9.1093	8.2428	7.6738	7.4892	7.3965
		Présente	11.8467	10.0924	9.1033	8.2374	7.6695	7.4832	7.3892
20	1 (1, 1)	Réf. ^(a)	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		Réf. ^(b)	3.7130	3.1462	2.8356	2.5774	2.4402	2.3924	2.3623
		Présente	3.7127	3.1461	2.8355	2.5773	2.4401	2.3923	2.3621
	2 (1, 2)	Réf. ^(a)	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		Réf. ^(b)	5.9215	5.0191	4.5238	4.1108	3.8883	3.8112	3.7632
		Présente	5.9208	5.0189	4.5234	4.1104	3.8880	3.8108	3.7626
	3 (1, 3)	Réf. ^(a)	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		Réf. ^(b)	9.5711	8.1164	7.3159	6.6453	6.2759	6.1488	6.0715
		Présente	9.5695	8.1153	7.3149	6.6443	6.2752	6.1477	6.0702
	4 (2, 1)	Réf. ^(a)	12.4560	10.5660	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		Réf. ^(b)	12.4633	10.5729	9.5307	8.6542	8.1634	7.9954	7.8950
		Présente	12.4606	10.5710	9.5289	8.6527	8.1621	7.9936	7.8928

^(a) Hosseini-Hashemi et al. (2010)

^(b) Akavci (2014)

La figure IV.1 montre l'effet de l'exposant de la fraction volumique sur la fréquence naturelle dimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur variable (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃. Comme on peut le voir, l'effet de la fraction volumique sur la fréquence naturelle dimensionnelle, l'augmentation de la fraction volumique provoque une diminution de la fréquence.

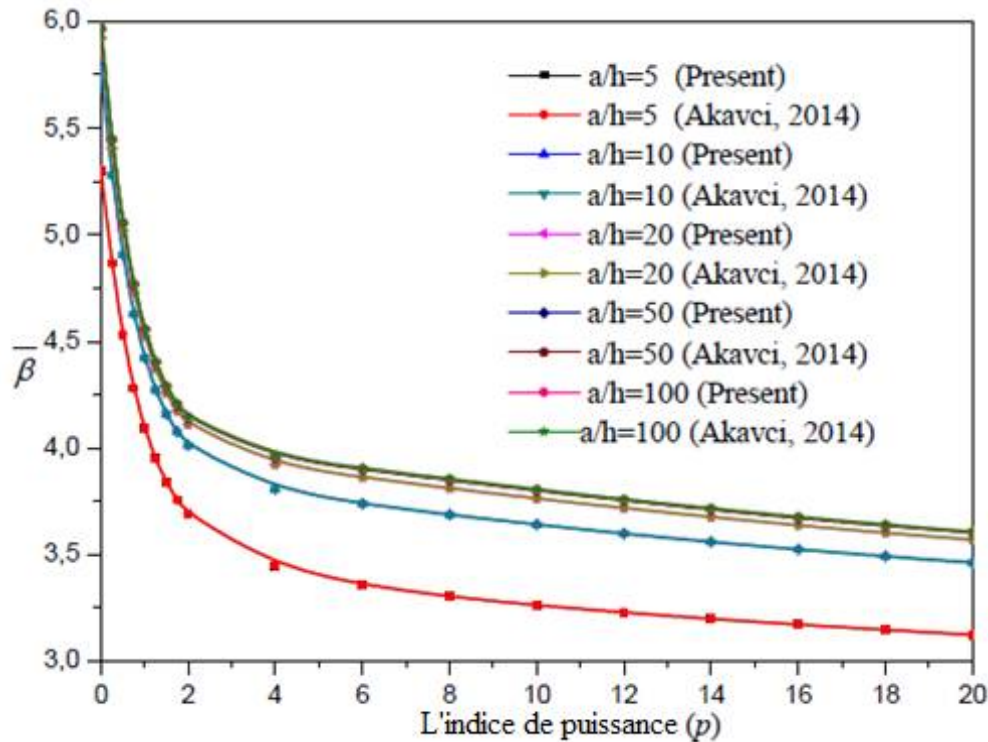


Figure IV. 1: Variation de la fréquence dimensionnelle $\bar{\beta} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque FGM carre en Al/Al₂O₃.

IV.2. 3.Vibration libre des Plaques fonctionnellement graduées posées sur une fondation élastique :

Pour vérifier la précision de la méthode actuelle pour les plaques FGM posées sur les fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, les fréquences naturelles des plaques sont comparées à celles trouvées dans la littérature. Le tableau IV.8, montre des fréquences fondamentales non- dimensionnelle des plaques FGM rectangulaires en Al / ZrO₂ reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres. Les résultats du modèle proposé sont comparés aux résultats de la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre de Hosseini-Hashemi *et al.*[Hosseini-Hashemi 2010], HSDT de Baferani *et al.* [Baferani 2011] et Akavci *et al.* [Akavci. 2014]. On constate à partir du tableau IV.8 que, les résultats du modèle proposé sont en excellent accord avec les résultats d'autres théories.

Les résultats présentés dans les tableaux IV.9 et IV.10 sont réalisés pour les plaques FGM rectangulaires Al/Al₂O₃ posées sur fondations élastiques. Dans le tableau IV.9, les fréquences fondamentales non-dimensionnelles pour différents rapports géométrique ($a/b = 1,5$), sont calculées et comparées à d'autres solutions publiées en utilisant HSDT Baferani *et al.* [Baferani 2011], Akavci *et al.* [Akavci. 2014] et la FSDT Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi 2010]. On peut observer à partir des résultats que, le modèle non-polynomiale à quatre variable est bien conforme aux autres théories de déformation de cisaillement. Le tableau IV.10 démontre la comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles des plaques rectangulaires FGM posées sur une fondation élastique avec celles fournies par Akavci *et al.* [Akavci. 2014] via HSDT. On constate que les résultats du modèle présent sont en bon accord.

La figure IV.2 montre les variations des fréquences fondamentales non-dimensionnelles correspondant à différents indices de la loi de puissance des plaques FGM carrées en Al / Al₂O₃ simplement appuyées reposant sur une fondation élastique, avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique, les fréquences fondamentales diminuent. On peut voir à partir de la figure que la valeur croissante des coefficients Winkler et Pasternak provoque l'augmentation de la fréquence fondamentale. La figure démontre également que le paramètre de modèle Pasternak a une influence plus importante que le paramètre de modèle Winkler sur la fréquence fondamentale de la plaque. Aux figures IV.3 (a et b), on illustre les variations de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle de la plaque FGM carrée en Al / Al₂O₃ simplement appuyée reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak par rapport au paramètre modèle Winkler. On constate à partir des résultats que, l'augmentation de l'exposant de la fraction de volume diminue la fréquence naturelle pour les deux cas. On constate également que, l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente l'effet de la fréquence naturelle sur la fondation élastique. Les figures démontrent également, bien que la valeur croissante de l'exposant de la fraction de volume diminue dans la fréquence fondamentale, si la valeur de l'exposant de la fraction de volume est supérieure à 5, son effet sur la fréquence fondamentale est négligeable. Les résultats présentés dans les tableaux IV.2 à IV.10, et les figures IV.2 à IV.4 démontrent que la même précision est réalisable avec le modèle actuel en employant un nombre de variables inférieurs à celui des autres modèles et souligne clairement comment le modèle actuel est plus simple et plus facile à utiliser dans la prévision de la réponse de vibration des plaques FGM.

D'après le tableau IV.8, il est à noter que l'effet du paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler. Comme il peut être observé dans le tableau, l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente l'effet de la fondation élastique sur la fréquence fondamentale. L'augmentation de l'indice de loi de puissance a un effet négligeable sur une plaque reposée sur une fondation de type Winkler. Les résultats du modèle proposé sont en excellent accord avec les résultats d'autres théories.

Tableau IV.8: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / ZrO₃ simplement appuyée ($a / b = 1,5$).

(K_w, K_s)	h/a	p	Théorie			
			Baferani et al. (2011)	Hosseini-Hashemi et al. (2010)	Akavci (2014)	Présente
(0,0)	0.05	0	-	0.02392	0.02393	0.02392
		0.25	-	0.02269	0.02309	0.02308
		1	-	0.02156	0.02202	0.02201
		5	-	0.02180	0.02244	0.02243
		∞	-	0.02046	0.02056	0.02055
	0.1	0	-	0.09188	0.09203	0.09197
		0.25	-	0.08603	0.08895	0.08889
		1	-	0.08155	0.08489	0.08484
		5	-	0.08171	0.08576	0.08570
		∞	-	0.07895	0.07908	0.07902
	0.2	0	-	0.32284	0.32472	0.32408
		0.25	-	0.31003	0.31531	0.31473
		1	-	0.29399	0.30152	0.30097
		5	-	0.29099	0.29762	0.29704
		∞	-	0.27788	0.27902	0.27842
(250,25)	0.05	0	0.03421	0.03421	0.03422	0.03421
		0.25	0.03321	0.03285	0.03312	0.03312
		1	0.03249	0.03184	0.03214	0.03213
		5	0.03314	0.03235	0.03277	0.03276
		∞	-	0.02937	0.02940	0.02940
	0.1	0	0.13365	0.13365	0.13375	0.13371
		0.25	0.13004	0.12771	0.12959	0.12955
		1	0.12749	0.12381	0.12585	0.12581
		5	0.12950	0.12533	0.12778	0.12775
		∞	-	0.11484	0.11492	0.11490
	0.2	0	0.43246	0.49945	0.50044	0.50061
		0.25	0.42868	0.48327	0.48594	0.48581
		1	0.46406	0.46997	0.47298	0.47208
		5	0.44824	0.47400	0.47637	0.47561
		∞	-	0.43001	0.43001	0.42989

D'après le tableau IV.9 l'effet du rapport géométrique, la fraction volumique et les paramètres de fondation K_w et K_s sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle. Le regroupement de ces paramètres précités diminue la fréquence fondamentale non dimensionnelle. On peut constater que les présents résultats convergent avec ceux qui sont donnés par HSDT Baferani *et al.*[Baferani 2011] ,Akavci *et al.* [Akavci. 2014] *et la* FSDT Hosseini-Hashemi *et al.*[Hosseini-Hashemi 2010]

Tableau IV.9: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyée (h/a) = 0.15).

(k_w, k_s)	a/b	p	Théorie			
			Baferani et al. (2011)	Hosseini-Hashemi et al. (2010)	Akavci (2014)	Présente
(0,0)	0.5	0	-	0.08006	0.08018	0.08014
		0.25	-	0.07320	0.07335	0.07331
		1	-	0.06335	0.06148	0.06145
		5	-	0.05379	0.05215	0.05213
		∞	-	0.04100	0.04081	0.04078
	1	0	-	0.12480	0.12508	0.12497
		0.25	-	0.11354	0.11457	0.11449
		1	-	0.09644	0.09613	0.09606
		5	-	0.08027	0.08089	0.08084
		∞	-	0.06335	0.06366	0.06360
	2	0	-	0.28513	0.28660	0.28610
		0.25	-	0.25555	0.26356	0.26314
		1	-	0.20592	0.22190	0.22157
		5	-	0.16315	0.18232	0.18208
		∞	-	0.14591	0.14587	0.14557
(1000,10)	0.5	0	0.12869	0.12870	0.12876	0.12874
		0.25	0.11885	0.11842	0.11847	0.11845
		1	0.10498	0.10519	0.10388	0.10386
		5	0.09227	0.09223	0.09098	0.09096
		∞	-	0.06591	0.06554	0.06554
	1	0	0.17020	0.17020	0.17039	0.17032
		0.25	0.15734	0.15599	0.15665	0.15659
		1	0.13854	0.13652	0.13592	0.13587
		5	0.12077	0.11786	0.11774	0.11772
		∞	-	0.08663	0.08673	0.08671
	2	0	0.31449	0.32768	0.32890	0.32848
		0.25	0.30484	0.29612	0.30270	0.30235
		1	0.26966	0.24674	0.25901	0.25874
		5	0.22932	0.20359	0.21785	0.21766
		∞	-	0.16773	0.16740	0.16718

Comme une autre tentative de vérification, le tableau IV.10 présente les comparaisons de fréquence obtenue à partir de la nouvelle théorie actuelle de la plaque avec les résultats de la théorie d'Akavci *et al.* [Akavci, 2014]. Bon accord entre les résultats est obtenu.

Tableau IV.10: comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles

$\tilde{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque rectangulaire FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyée

$(k_w, k_s)^{(a)}$	a/b	a/h	P							
			0		1		5		10	
			Akavci (2014)	Présente	Akavci (2014)	Présente	Akavci (2014)	Présente	Akavci (2014)	Présente
(0,0)	0.5	5	6.7771	6.7711	5.2122	5.2082	4.3763	4.3735	4.2153	4.2105
		10	7.1794	7.1775	5.4918	5.4906	4.6986	4.6978	4.5432	4.5417
		20	7.2948	7.2943	5.5712	5.5708	4.7943	4.7941	4.6411	4.6407
	1	1	10.4133	10.3995	8.0368	8.0276	6.6705	6.6640	6.4099	6.3992
		10	11.3468	11.3424	8.6900	8.6871	7.4033	7.4012	7.1521	7.1485
		20	11.6338	11.6326	8.8879	8.8871	7.6393	7.6389	7.3934	7.3924
	2	5	22.8734	22.8126	17.8289	17.7879	14.3625	14.3325	13.7120	13.6669
		10	27.1085	27.0842	20.8487	20.8328	17.5051	17.4938	16.8613	16.8422
		20	28.7174	28.7102	21.9670	21.9623	18.7946	18.7912	18.1727	18.1668
(0,100)	0.5	5	11.1237	11.1204	10.8489	10.8474	10.9925	10.9917	11.0818	11.0806
		10	11.4503	11.4492	11.0940	11.0934	11.2538	11.2535	11.3313	11.3307
		20	11.5474	11.5471	11.1660	11.1658	11.3343	11.3342	11.4093	11.4091
	1	5	15.2095	15.2010	14.3923	14.3884	14.3071	14.3050	14.3829	14.3798
		10	15.9813	15.9782	14.9443	14.9427	14.8693	14.8683	14.9193	14.9177
		20	16.2285	16.2277	15.1189	15.1184	15.0607	15.0604	15.1056	15.1051
	2	5	28.6623	28.6184	25.6912	25.6688	24.3625	24.3498	24.3109	24.2936
		10	32.3444	32.3246	28.2316	28.2206	26.7223	26.7155	26.5586	26.5475
		20	33.8076	33.8015	29.2272	29.2237	27.7770	27.7748	27.5919	27.5881
(100,0)	0.5	5	7.2276	7.2219	5.8746	5.8711	5.2360	5.2341	5.1288	5.1255
		10	7.6153	7.6136	6.1393	6.1383	5.5276	5.5269	5.4199	5.4187
		20	7.7272	7.7267	6.2152	6.2149	5.6156	5.6154	5.5087	5.5083
	1	5	10.7082	10.6948	8.4748	8.4665	7.2560	7.2502	7.0373	7.0272
		10	11.6261	11.6218	9.1107	9.1079	7.9520	7.9501	7.7356	7.7323
		20	11.9093	11.9081	9.3044	9.3037	8.1789	8.1783	7.9658	7.9501
	2	5	23.0053	22.9454	18.0231	17.9827	14.6363	14.6069	14.0098	13.9658
		10	27.2246	27.2005	21.0241	21.0083	17.7396	17.7285	17.1126	17.0938
		20	28.8295	28.8223	22.1378	22.1332	19.0187	19.0155	18.4115	18.4057
(100,100)	0.5	5	11.4036	11.4004	11.1817	11.1801	11.3598	11.3593	11.4581	11.4584
		10	11.7285	11.7274	11.4284	11.4278	11.6243	11.6240	11.7103	11.7098
		20	11.8253	11.8250	11.5008	11.5007	11.7054	11.7052	11.7888	11.7887
	1	5	15.4127	15.4043	14.6407	14.6368	14.5862	14.5835	14.6702	14.6658
		10	16.1808	16.1778	15.1927	15.1912	15.1498	15.1489	15.2075	15.2060
		20	16.4271	16.4263	15.3674	15.3670	15.3414	15.3411	15.3938	15.3933
	2	5	28.7674	28.7273	25.8251	25.8033	24.5206	24.5080	24.4759	24.4596
		10	32.4417	32.4220	28.3613	28.3504	26.8763	26.8695	26.7186	26.7077

		20	33.9029	33.8968	29.3557	29.3523	27.9292	27.9270	27.7497	27.7460
--	--	----	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

^(a) $k_w = K_w a^4 / D_m, k_s = K_s a^2 / D_m, \text{ et } D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$

La figure IV.2 montre les variations des fréquences fondamentales non-dimensionnelles correspondantes à différents indices de la loi de puissance des plaques FGM carrées en Al / Al₂O₃ simplement appuyées reposant sur une fondation élastique, il est noter que l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique, les fréquences fondamentales diminuent. On peut voir à partir de la figure que la valeur croissante des coefficients Winkler et Pasternak provoque l'augmentation de la fréquence fondamentale. La figure démontre également que le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence naturelle que le paramètre Winkler.

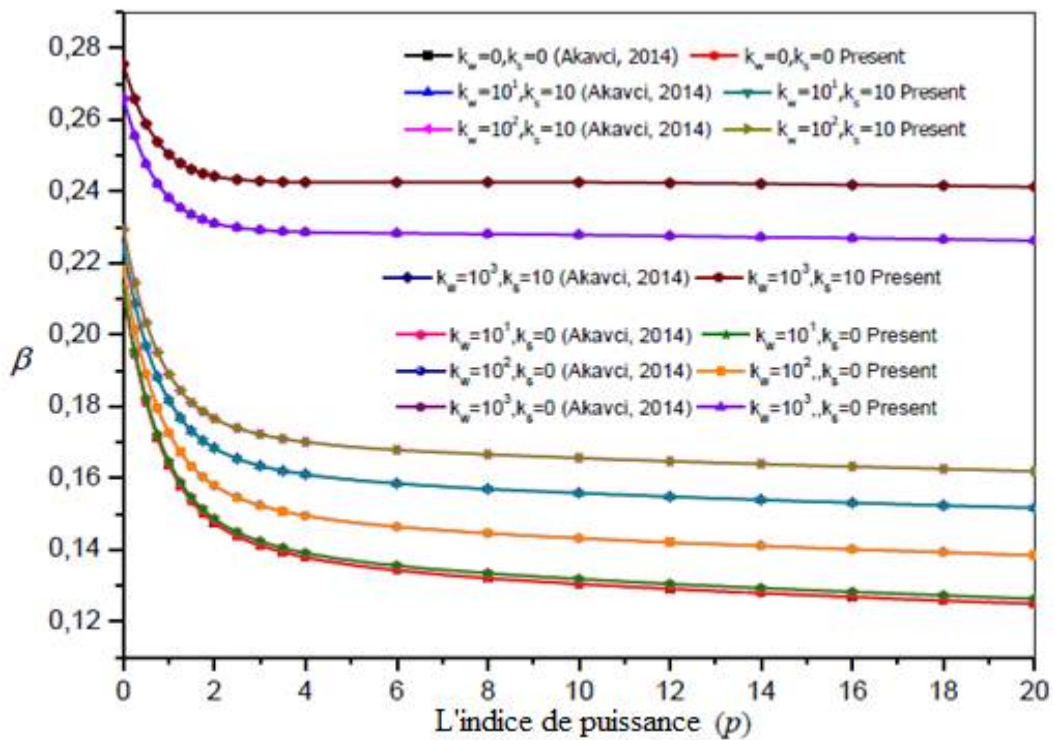


Figure IV.2: Variation de la fréquence non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque carrée FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique ($a / h = 5$).

Les figures IV.3 (a et b), montrent les variations de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle de la plaque FGM carrée en Al / Al₂O₃ simplement appuyée reposant sur les fondations de type Winkler-Pasternak par rapport au paramètre modèle Winkler de la fondation. On constate à partir des résultats que, l'augmentation de l'exposant de la fraction de volume diminue la fréquence naturelle pour les deux cas. On constate également que,

l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente l'effet de la fondation élastique sur la fréquence naturelle. La figure démontre également, bien que la valeur croissante de l'exposant de la fraction de volume diminue la fréquence fondamentale, si la valeur de l'exposant de la fraction de volume est supérieure à 5, son effet sur la fréquence fondamentale est négligeable.

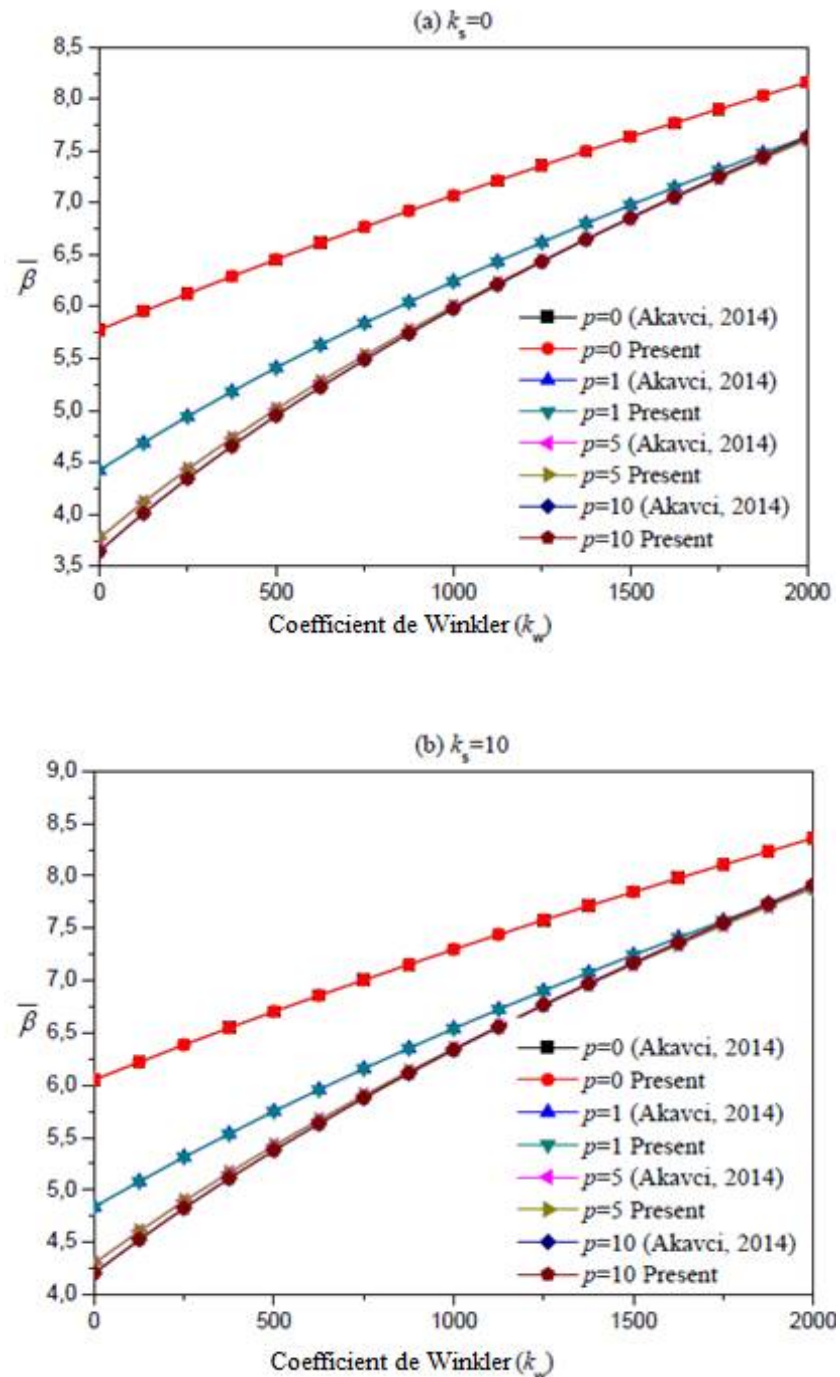


Figure IV. 3 Variation de la fréquence non dimensionnelle $\bar{\beta} = \omega a^2 / h\sqrt{\rho_c / E_c}$ en fonction de l'exposant de la fraction volumique d'une plaque carrée FGM en Al/Al2O3 reposée sur une fondation élastique avec coefficient de Winkler ($a / h = 5$). (a) $k_s = 0$, (b) $k_s = 10$.

IV.3. Conclusions

Dans le présent travail, des solutions analytiques pour les études de vibrations libres des plaques FGM sont développées en faisant d'autres hypothèses simplificatrices au HSDT existant, avec l'inclusion d'un terme intégral indéterminé. Le nombre d'inconnus et les équations de mouvement du présent HSDT sont réduits d'un seul, et donc, rendre cette théorie simple et efficace à utiliser. Les études de comparaisons démontrent que les prédictions du HSDT actuel et du HSDT existant, Akavci *et al.* [Akavci 2014] pour les plaques FGM sont proches les unes des autres. Les résultats obtenus par la théorie actuelle peuvent être résumés comme suit:

- On a observé que le modèle analytique actuel peut prédire avec précision les fréquences fondamentales des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres.
- Les fréquences fondamentales de la plaque FGM diminuent avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique.
- En présence de fondations élastiques, la valeur croissante des coefficients Winkler et Pasternak entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale de la plaque FGM.
- Le paramètre de modèle Pasternak (cisaillement) a une influence plus importante sur l'augmentation de la fréquence naturelle de la plaque FGM que le paramètre du modèle Winkler.
- L'augmentation de la valeur de l'exposant de la fraction volumique augmente l'influence de la fondation élastique sur la fréquence naturelle.

CONCLUSION GENERALE

ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives :

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur la détermination des caractéristiques vibratoires des structures composites en matériaux fonctionnellement gradués, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les valeurs des fréquences naturelles des plaques FGM, comparée aux issues de la littérature, notre méthode analytique a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques vibratoires. La théorie proposée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour:

- l'analyse des vibrations libres des plaques isotropes
- L'étude de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées
- L'analyse du comportement des vibrations libres des plaques FGM posées sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak.

Le nombre des inconnus dans la présente théorie est quatre tandis que plus dans les cas des autres théories de déformation de cisaillement transverse. L'équation du mouvement des plaques FGM est obtenue par le principe d'Hamilton, la méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la plaque avec des conditions aux frontières sous forme d'appui simple sur tous les côtés. Dans cette investigation sous forme numérique et graphique, deux combinaisons de matériaux fonctionnellement gradués tels que Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ sont utilisées. Les résultats obtenus pour les différents rapports géométriques, rapport d'épaisseur, paramètres de rigidité de fondation élastique de type Winkler-Pasternak et l'exposant de fraction volumique ont permis de dégager plusieurs points:

- le modèle analysé permet de traiter à la fois les structures minces et épaisses sans introduire des inconnus supplémentaires, ni des coefficients de correcteurs, de plus le nouveau modèle prédit les fréquences avec une bonne précision.
- les effets des paramètres de fondation élastique de type Winkler-Pasternak sont analysés, ils ont une grande influence sur les fréquences naturelles, et précisément le paramètre de cisaillement (Pasternak).
- la fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de rapport d'épaisseur.

En conclusion, on peut dire que le modèle proposé est simple pour la résolution du comportement vibratoire des plaques FGM, et peut améliorer le coût de calcul numérique en raison de leurs degrés de liberté réduits.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer le présent modèle pour le calcul de différentes formes de structure et des plaques FGM sous la combinaison des

différents types de chargement (mécanique, thermique, hygrothermique....), ainsi sous différentes conditions aux limites.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

- [Aboudi. 2000] Aboudi, J. Pindera, M.J. and Arnold, S.M. Higher-order theory for functionally graded materials, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2000.
- [Afaq 2003] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Ait Amar 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" J. Sandw. Struct. Mater., 16(3), 293-318.
- [Ait Atmane 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", Int J Mech Mater Des, 6, 113–121.
- [Ait Atmane 2011] Ait Atmane Hassen .2011. Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement Thèse de doctorat de l'Université Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes 2004.
- [Ait Atmane 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel Compos. Struct., Int. J.*,19(2), 369-384.
- [Ait Yahia 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1143 – 1165.
- [Akavci 2014] Akavci, SS., (2014), "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Compos Struct*, 108, 667–676.
- [Al-Basyouni 2015] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, 125, 621-630.

- [Ambartsumyan 1969] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Attia 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212.
- [Averill 1994] Averill R.C. Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage. *Composite Eng.*, vol. 4, pages 381/395, 1994.
- [Aydogdu 2005] M. Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 ,1740–1755, 2005.
- [Bahlouli 1993] N. Bahlouli «Cours Composites sur le site Internet " <http://www-ipst.u-trasbg.fr/cours/matériaux-composites> "»
- [Bakora 2015] Bakora, A. and Tounsi, A. (2015),” Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 56(1), 85-106.
- [Bao 1995] Bao. G, Wang. L. (1995), —Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings], *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [Bathias 2005] C. Bathias, *matériaux composites et coll DUNOD* 2005
- [Belabed 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, 60, 274–283.
- [Belkorissat 2015] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(4), 1063-1081.
- [Bellifa 2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38, 265-275.
- [Bennai 2015] Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 521-546.

- [Bennoun 2016]** Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423 – 431.
- [Benzaid 2010]** Riad Benzaid, Habib Abdelhak Mesbah, Nasr-Eddine Chikh,2010] Contribution a 'Etude des Matériaux Composites Dans le Renforcement et la Réparation Des Eléments Structuraux Linéaires en Béton. Editions Universitaires Européennes. Editions Universitaires Européennes, pp.264, 2010, 978-613-1-55146-8.
- [Berreur 2001]** Berreur L., De Maillard B., Nösperger S. L’industrie française des matériaux composites, Nodal Consultants, 2001.
- [Berreur 2002]** Berreur, L., De Maillard, B., et Nösperger, S.(2002) “L’industrie française des matériaux composites”, Etude stratégique réalisée par Nodal Consultants pour le compte de la DIGITIP / SIM, Rapport final, Révision 2 du 13 mai 2002.
- [Berthelot 2010]** J.M. Berthelot. (2010). Mécanique des matériaux et structures composites, institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés, le Mans, France.
- [Bishop 1993]** A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Bouderba 2013]** Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013) “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct.*, 14(1), 85-104.
- [Bouderba 2016]** Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, 58(3), 397-422.
- [Boukhari 2016]** Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.
- [Bounouara 2016]** Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, 20(2), 227-249.

- [Bourada 2015]** Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409 – 423.
- [Bourada 2016]** Bourada, F., Amara, K., Tounsi, A. (2016), “Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory”, *Steel and Composite Structures*, 21(6), 1287-1306.
- [Bousahla 2014]** Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Meth.*, 11(6), 1350082.
- [Bousahla 2016]** Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(2), 313-335.
- [Bui 1999]** V.Q. Bui, E. Marechal, and H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : bending, buckling and transient responses. *Composites Science and Technology*, 59 :2269–2277, 1999.
- [Bui 2000]** V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*, vol. 60, pages 131,143, 2000.
- [Carrera 2000]** E. Carrera .An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198, 2000.
- [Carrera 2004]** Carrera E. On the use of Murakami's zig- zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, vol. 82, pages 541/554, 2004.
- [Chabot 1997]** A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [Chatain 2001]** M. Chatain , 2001 "Matériaux composites : présentation générale", AM5000, *Technique de l'ingénieur, Traité Plastiques et Composites*, Vol. AM 6.
- [Chen 2009]** Chen, CS, Hsu, CY, Tzou, GJ. (2009), “Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory”, *J Reinforced Plast Compos*, 28(10), 1215–1234.
- [Chi 2003]** Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, - Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

- [Cho 2004]** Cho, K-M. Choi, I-D. Park, I. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. *Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials. Mater. Sci. Forum*, 449:621-624, 2004.
- [Cugnoni 2004]** J.cugnoni. Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat de l'école polytechnique fédérale de Lausanne ,2004.
- [Di Sciuva 1984]** M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279/295, 1984.
- [Di Sciuva 1987]** M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [Draiche 2016]** Draiche, K., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", *Geomechanics and Engineering*, 11(5), 671-690.
- [Drapier 2014]** S. Drapier. *Mécanique des composites hautes performances version 2*, Octobre 2014
- [Dumont 2001]** Dumont, A. L. Jean-Pierre, Bonnet. Thierry, Chertier. and Jose, M.F. Ferreira. MoSi₂/Al₂O₃ FGM : elaboration by tape casting and SHS. *Journal of the European Ceramic Society*, 21, 2353-2360, 2001.
- [Duong 2008]** Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école national des ponts et chaussées, 2008.
- [El-Hassar 2016]** El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H., Tounsi, A. (2016), "Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory", *Geomechanics and Engineering*, 10(3), 357-386.
- [Ferreira 2006]** Ferreira, AJM, Batra, RC, Roque, CMC, Qian, LF, Jorge, RMN. (2006), "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Compos Struct*, 75, 593–600.

- [Ganapathi 1997]** M. Ganapathi & M. Touratier. A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible finite element. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- [Glos 2006]** "GLOSSAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES," Centre d'animation regional en materiaux avances, 2006. Figures Laurent Gornet. Generalites sur les materiaux composites. Engineering school. 2008. <cel-00470296v1>
- [Glos 2004]** « Glossaire des matériaux composites ». C.A.R.M.A –Actualisation, décembre (2004).
- [Gomet 2008]** Laurent Gornet .Généralités sur les matériaux composites.Ecole ational central de Nante.2008.
- [Gupta 2003]** N. Gupta, "Characterization Of Syntactic Foams And Their Sandwich Composites: Modeling And Experimental Approaches," The Graduate Faculty of the Louisiana State University andAgricultural and Mechanical College, 2003.
- [Hamidi 2015]** Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [Hasani 2011]** Hasani Baferani, A., Saidi, A.R., Ehteshami, H. (2011), “Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”, *Compos Struct*, 93, 1842–1853.
- [He 1994]** L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. *Int J Solids Structures*, vol. 31, no. 5, pages 613-627, 1994.
- [Hebali 2014]** Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383.
- [Hebali 2016]** Hebali, H, Bakora, A, Tounsi, A., Kaci, A. (2016), “A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures*, 22(3), 473-495.

- [Hencky. 1947]** Hencky, H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. Ingenieur-Archiv, 16 (1), 72–76, 1947.
- [Hildebrand 1949]** F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [Hopkinson 2006]** Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- [Hosseini 2010]** Hosseini-Hashemi, S.H, Rokni Damavandi Taher, H, Akhavan, H, Omid, M. (2010), “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, Appl Math Model, 34, 1276–1291.
- [Hosseini 2011]** Hosseini-Hashemi, Sh., Fadaee, M., Rokni Damavandi Taher, H. (2011), “Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory”, Appl Math Model, 35, 708–727.
- [Houari 2016]** Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three –unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, Steel Compos. Struct., Int. J., 22(2), 257 - 276.
- [Icardi 2001]** Icardi U. Higher-order zig- zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. Composite Structures: Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Jamaludin 2013]** Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. Scientific Research and Essays, 8(21), 828-840, 4 June 2013.
- [Jules 2001]** JULES. E. J., "Couplages entre propriétés thermiques, réactivité chimique et viscosité des matériaux composites thermodurcissables en relation avec les conditions de leur élaboration fondée sur l’hystérésis diélectrique." Ecole Nationale Supérieure D’arts Et Metiers, 2001.
- [Kant 2002]** T. Kant and K.Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order rened theory. Composite Structures, 56(4):329{344, 2002.

- [Kassapoglou1986]** C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [Katayama.2011]** Katayama, T. Sohei, Sukenaga. Noritaka, Saito. Hajime, Kagata. And Kunihiko, Nakashima. Fabricated of Al₂O₃-W functionally graded materials by slip casting method, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 18, 2011.
- [Kerr 1964]** Kerr AD. Elastic and viscoelastic foundation models. *ASME J Appl Mech* 1964; 31(3):491–8.
- [Khare 2004]** R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- [Kieback2003]** Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering*, A362 (2003) 81–105.
- [Kirchhoff 1950]** G.Kirchhoff .uber das gleichgewicht und die bewegungeiner elastischen scheid.Journal fur reine und angewandte Mathematik, Vol.40, pages 51-88 ,1950.
- [Koizumi 1993]** Koizumi, M. (1993), “The concept of FGM Ceramic transactions”, *Funct Grad Mater*, 34, 3–10.
- [Larbi 2015]** Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- [Leissa 1973]** Leissa, AW. (1973), “The Free vibration of rectangular plates”, *J Sound Vib*, 31(3), 257–23.
- [Li 2003]** Li, JQ. Zeng, XR. Tang, JN. Xiao, P. Fabrication and thermal properties of an YSZ-NiCr joint with an interlayer of YSZ-NiCr functionally graded material. *J. Eur. Ceram. Soc*, 23,1847-1853, 2003.
- [Liu 1999]** Liu, F.L., Liew, K.M. (1999), “Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method”, *J Sound Vib*, 225(5), 915–934.

- [Lu 2009] Lu, CF, Lim, CW, Chen, WQ. (2009), "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mech Advan Mater Struct*, 16, 576–584.
- [Mahi 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508.
- [Malekzadeh 2009] Malekzadeh, P. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Compos Struct*, 89, 367–373.
- [Mantari 2015] Mantari, J.L., Granados, E.V. (2015), "Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT", *Composites Part B*, 75, 148 – 155.
- [Matsunaga 2000] Matsunaga, H. (2000), "Vibration and stability of thick plates on elastic foundations", *J Eng Mech*, 126, 27–34.
- [Matsunaga 2008] Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 82, 499–512.
- [Meksi 2015] Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1215-1240.
- [Menail 2009] Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat UBMA naba Menail Younès 2009.
- [Meradjah 2015] Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 793-809.
- [Merdaci 2016] Merdaci, S., Tounsi, A., Bakora, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates", *Steel and Composite Structures*, 22(4), 713-732.
- [Mindlin 1951] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on exural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.

- [Murakami 1986]** Murakami H. Laminated composite plate theory with improved inplane responses. *Journal of Applied Mechanics*. vol.53, pages 661- 666, 1986.
- [Murthy 1981]** M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. *Rapport technique, NASA*, 1981.
- [Naghdi 1957]** P. M. Naghdi. On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.
- [Nagino 2008]** Nagino, H., Mikami, T, Mizusawa, T. (2008), “Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method”, *J Sound Vib*, 317, 329–353.
- [Neves 2012a]** Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, et al. (2012a), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Composites: Part B*, 43, 711–725.
- [Neves 2012b]** Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, et al. (2012b), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*, 94, 1814–1825.
- [Nguyen 2004]** Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Nguyen 2015]** Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 91-120.
- [Nguyen 2015]** Nguyen, T.K. (2015), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Int J Mech Mater Des*, 11, 203 - 219.
- [Ochoa. 1992]** Ochoa, O.O., Reddy, J.N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates. Solid mechanics and its applications*. Dordrecht: Springer, 1992.
- [Pasternak. 1954]** Pasternak, P.L. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture Moscow USSR*, 1-56. (in Russian),1954.

- [Polit 1997]** O. Polit & M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- [Qian 2004]** Qian, LF, Batra, RC, Chen, LM. (2004), “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method”, *Composites: Part B*, 35, 685–697.
- [Raju 1981]** I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.
- [Ramachandran 2015]** Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B.Daniel, James. *Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore, 2015.
- [Reddy 1980]** J.N. Reddy. A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.
- [Reddy 1984]** J.N.Reddy. A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* .Vol.51, pages 745-752, 1984.
- [Reddy 1997]** Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures* 34 (26), 3373–338, 1997.
- [Reddy 1999]** J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reddy 2004]** Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis (second edition)*. CRC Press; 2004.
- [Reissner 1975]** E.Reissner & Y.Stavesky. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate .*Journal of Applied Mechanics*. Vol.28, pages 402-408, 1975.
- [Reissner1945]** Reissner.E .The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates.*J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.

- [Saiyath 2015]** Saiyath ibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication, engineering and technology, 2015.
- [Sallai 2015]** Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(4), 829-841.
- [Shankara 1996]** C.A. Shankara & N.G.R. Iyengar. A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- [Shufrin 2005]** Shufrin, I, Eisenberger, M. (2005), “Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses”, *Int J Solids Struct*, 42, 1225–1251.
- [Soldatos 1992]** Soldatos, K. a general laminated plate theory accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at material interfaces. *Composite structures*, 20, 195-211, 1992.
- [Tafla 2007]** Achraf TAFLA .Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches. Thèse de doctorat de l’Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [Tagrara 2015]** Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A. (2015), “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(5), 1259-1277.
- [Takahashi 1990]** Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1990, 129-34.
- [Tebboune 2015]** Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 443-465.

- [Teng 2002] Teng, J.G., Chen, J.F., Smith, S.T. et Lam, L. (2002) “FRP strengthened RC structures”, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 245p.
- [Timoshenko1959] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [Tounsi 2013] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [Tounsi 2016] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 - 565.
- [Touratier 1991] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Turan 2016] Turan, M., Adiyaman, G., Kahya, V., Birinci, A. (2016), "Axisymmetric analysis of a functionally graded layer resting on elastic substrate", *Structural Engineering and Mechanics*, 58(3), 423 - 442.
- [Vel 2004] Vel, SS, Batra, RC. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J Sound Vib*, 272, 703–730.
- [Watari 2003] Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. *Mater. Sci. Forum*, 423-425:321-326, 2003.
- [Winkler 1867] Winkler E. (1867), —Die lehre von der elasticitaet und festigkeitl. Prag Dominicus.
- [Yin 1987] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a subla-minate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [Zhao 2009] Zhao, X, Lee, YY, Liew, KM. (2009), “Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”, *J Sound Vib*, 319, 918–939.
- [Zhou 2002] Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K., Lo, S.H. (2002), “Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method”, *Int J Solids Struct*, 39, 6339–6353.

- [Zidi 2014] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.