



*Je dédie ce modeste  
travail à mes chers  
parents (ma mère et  
mon père et ma grande  
mère) Mes chers frères  
et chères sœurs  
A tous mes amis*

---

## Remerciements

---

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe 'Comportement physique et mécanique des matériaux' du laboratoire des matériaux et systèmes réactifs (LMSR) et de l'équipe 'modélisation mathématique des structures' du laboratoire des matériaux et hydrologie (LMH)

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur le Professeur

**Mohamed BENGUEDIAB** pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant et d'actualité, pour sa disponibilité et son soutien pendant toutes ces années de recherche. J'ai beaucoup appris de lui et j'en apprendrai encore.

Je remercie vivement mon Co-Encadreur, le Professeur **Abdelouhed TOUNSI** d'avoir la gentillesse d'apporter généreusement son aide. Je le remercie aussi pour sa disponibilité et son intérêt pour mes idées et mes questions malgré ses charges.

Je tiens aussi à remercier le professeur **Mohamed MAZARI** pour m'avoir accepté au sein du Laboratoire Matériaux et Systèmes Réactifs et accepté de présider ce jury. Je le remercie pour son aide très précieuse qu'il m'a apportée depuis le début en me faisant intégrer au sein d'une de leurs équipes de travail et ses encouragements. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

J'adresse mes remerciements à Messieurs le Professeur **Ali BENHAMENA** et les Docteurs **Mohammed Sid HOUARI**, **Redha YEGHNEM** d'avoir accepté d'examiner ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à ma famille, à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie tout particulièrement,

Monsieur le professeur **Ali BENHAMENA** Professeur à l'université de Mascara qui m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury et aussi pour l'intérêt qu'ils a porté à ce travail.

Messieurs les Docteurs **Mohammed Sid HOUARI** Maitre de Conférences A , à l'université de Mascara et le Docteur **Redha YEGHNEM** Maitre de Conférences A , à l'université de Saida pour leurs précieux conseils et aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et avoir accepté de faire partie du jury.

Résumé

Abstract

ملخص

Symboles

Liste des figures

Liste des tableaux

Abréviations

Introduction générale..... 1

**Chapitre I: Etude bibliographique des vibrations des plaques en matériaux composites**

I.1 Introduction..... 3

I.2 Généralités sur les matériaux composites ..... 3

I.2.1 Introduction..... 3

I.2.2 Définition ..... 4

I.2.3 Bref historique ..... 4

I.2.4 Les constituants des matériaux composites ..... 5

I.2.4.1 Les matrices ..... 5

I.2.4.2 Les renforts ..... 5

I.2.4.3 L'interface..... 6

I.2.5 Architecture des matériaux composites ..... 6

I.2.5.1 Monocouches..... 6

I.2.5.2 Stratifiés ..... 7

I.2.5.3 Sandwich..... 8

I.2.6 Comportement mécanique des matériaux composites stratifiés..... 8

I.2.6.1 Loi de mélange..... 9

I.2.6.2 Loi de comportement..... 10

I.2.6.3 Matériaux anisotropes ..... 10

I.2.6.4 Matériau monoclinique..... 11

I.2.6.5 Matériaux orthotropiques ..... 11

I.2.6.6 Matériau transversalement isotrope..... 11

I.2.6.7 Matériaux isotropes ..... 12

I.2.7 Avantages et inconvénients des matériaux composites ..... 12

I.2.7.1 Avantages..... 12

I.2.7.2 Inconvénients .....	13
I.3 Cinématique des solides .....	13
I.3.1 Introduction.....	13
I.3.2 Principe général d'équilibre .....	14
I.3.3 Relations contraintes-efforts.....	14
I.3.3.1 Efforts normaux internes .....	15
I.3.3.2 Efforts de cisaillement .....	15
I.3.3.3 Moment de flexion et moment de torsion.....	15
I.3.4 Relations fondamentales de la mécanique des milieux continus.....	16
I.4 Théories des plaques .....	17
I.4.1 Introduction .....	17
I.4.2 Définition d'un milieu continu .....	17
I.4.3 Définition d'une plaque.....	17
I.4.4 Hypothèses.....	17
I.4.5 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff .....	18
I.4.5.1 Hypotèses.....	19
I.4.5.2 Champ des déplacements.....	19
I.4.5.3 Champ des déformations .....	19
I.4.5.4 Limitation .....	20
I.4.6 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin.....	20
I.4.6.1 Hypotèses.....	21
I.4.6.2 Champ des déplacements.....	21
I.4.6.3 Champ des déformations .....	21
I.4.6.4 Limitation .....	22
I.4.7 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	23
I.4.7.1 Hypotèses.....	24
I.4.7.2 Champ des déplacements.....	24
I.4.7.3 Champ des déformations .....	26
I.4.7.4 Limitation .....	26
I.4.8 Théorie des plaques stratifiées .....	27
I.5 Vibrations des plaques .....	27
I.5.1 Introduction.....	29
I.5.2 Degrés de liberté.....	29

I.5.3 Types de forces appliquées sur une structure .....	29
I.5.3.1 Forces extérieures.....	29
I.5.3.2 Forces intérieures .....	29
I.5.4 Formulation énergétique des plaques.....	30
I.5.4.1 Energie de déformation.....	30
I.5.4.2 Energie cinétique.....	30
I.5.4.3 Travail des actions exercées sur le stratifié. ....	30
I.5.5 Formulation du problème général de la dynamique des structures .....	31
I.5.5.1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe d'Alembert.....	31
I.5.5.2 Principe des travaux virtuels.....	31
I.5.5.3 Principe des travaux virtuels.....	32
I.5.6 Formulation du problème général de la dynamique des structures .....	33
I.5.6.1 Solutions exactes .....	33
I.5.6.2 Valeurs propres.....	42
I.5 Conclusion et position du problème .....	43

**Chapitre II: Analyse mathématique et numérique des vibrations des plaques en matériaux composites**

II.1 Introduction .....	44
II.2 Analyse mathématique du problème.....	45
II.2.1 Théorie raffinée de déformation de cisaillement exponentielle des plaques en composites stratifiées .....	45
II.2.2.1 Hypothèses de la présente théorie .....	46
II.2.2.2 Cinématique .....	47
II.2.2 Relations constitutive .....	48
II.2.3 Formulation des équations du mouvement .....	50
II.2.3.1 Variation de l'énergie de déformation.....	50
II.2.3.2 Variation de l'énergie cinétique.....	55
II.2.3.3 Equations du mouvement .....	56
II.2.4 Solutions mathématiques pour les stratifiés antisymétriques .....	60
II.2.5 Résultats et discussions .....	63
II.2.5.1 Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques (matériau 1) simplement appuyée (0 / 90 )n.....	64
II.2.5.2 Cas d'une plaque en composites stratifiées équilibrées antisymétriques (matériau 2) simplement appuyée ( 45 / 45 )n.....	70

II.3 Analyse numérique du problème par la méthode des éléments finis .....	74
II.3.1 Introduction .....	74
II.3.2 Représentation iso-paramétrique .....	75
II.3.3 Justification du choix de l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec quatre degré de liberté .....	78
II.3.4 Comportement mécanique des plaques en composites stratifiées .....	78
II.3.5 Formulation de l'énergie .....	81
II.3.5.1 Energie de déformation.....	81
II.3.5.2 Energie cinétique.....	83
II.3.6 Formulation par la méthode des éléments finis de l'équation de la dynamique vibratoire.....	83
II.3.7 Résultats et discussions .....	84
II.3.7.1 Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques (matériau 1) simplement appuyée (0 / 90 )n .....	84
II.3.7.2 Discussions .....	85
II.4 Conclusion .....	86
<b>Chapitre III: Formulation mathématique des vibrations des plaques en matériaux composites</b>	
III.1 Introduction .....	87
III.2 Formulation mathématique .....	88
III.2.1 Cinématique.....	88
III.2.2 Equations constitutives .....	90
III.2.3 Equations du mouvement.....	93
III.3 Solutions exactes pour les stratifiés antisymétriques .....	97
III.4 Résultats et discussions .....	99
III.4.1 Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques (matériau 1) simplement appuyée (0 / 90 )n .....	100
III.4.2 Cas d'une plaque en composites stratifiées équilibrées antisymétriques (matériau 2) simplement appuyée( 45 / 45 )n.....	105
III.5 Conclusion.....	109
Conclusion générale et Perspectives .....	110
Références bibliographiques .....	112

Les plaques en composites sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance ; rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique. Plusieurs théories prenant en compte l'effet de déformation de cisaillement transverse avec un coefficient de correction de cisaillement pour l'analyse des vibrations des structures en matériaux composites ont été développées ces dernières années. Ces théories utilisent souvent un grand nombre de variables, la distribution des contraintes est soit constante soit linéaire.

Afin de simplifier l'étude des vibrations libres, une théorie raffinée exponentielle prenant en compte l'effet de déformation de cisaillement transverse sans coefficient de correction de cisaillement avec seulement quatre inconnues a été développée. Dans cette théorie, une approche mathématique de la fonction de gauchissement non-polynomiale a été développée.

Une analyse numérique a été effectuée par la méthode des éléments finis sous environnement du code de calcul Matlab.

En second lieu, une formulation mathématique de la nouvelle théorie raffinée à quatre variables a été développée en introduisant la distribution des contraintes et les déformations de cisaillement sous forme non linéaire permettant de vérifier la nullité des contraintes transversales aux bords de la plaque.

Les effets de la variation des divers paramètres tel que (le degré d'orthotropie, le rapport d'orthotropie, le rapport de la longueur sur l'épaisseur et le rapport de la longueur sur la largeur) sur les vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques sont pris en compte. Les résultats obtenus par les théories développées comparés à ceux obtenus par les autres théories sont en bon accord.

**Mots clés :** plaques en composites stratifiées ; théorie raffinée de déformation de cisaillement vibration libre ; cisaillement transverse ; fonction de gauchissement non polynomiale ; degré d'orthotropie ; le rapport d'orthotropie ; fréquence adimensionnelle.

The Laminated plates are widely employed in the structures civil, mechanical, aeronautical, and especially aerospace. That is mainly due to advantageous features such as high ratio of stiffness and strength to weight and low maintenance cost .Several theories taking into account the effect of transverse shear deformation with a shear correction coefficient for vibration analysis of composite material structures have been developed in recent years. These theories often use a great number of variables, the distribution of the stress is either constant or linear.

In order to simplify the study of the free vibrations, an exponential refined theory taking of account the effect of transverse shear deformation without introducing shear correction coefficient with only four unknowns has been developed. In this theory, a mathematical approach to the non-polynomial transverse shear function has been developed.

A numerical analysis was carried out by the finite element method under Matlab code environment.

Secondly, a mathematical formulation of the novel four variable refined plate theory was developed. The theory considers a non-linear distribution of the transverse shear strains, and verifies the zero traction boundary conditions on the surfaces of the plate without introducing shear correction coefficient.

Effects of variation of various parameters such as (number of layers, modulus ratio, thickness ratio and aspect ratio) on free vibrations of composite plates Anti-symmetric laminates are taken into account. The results obtained by the theories developed compared to those obtained by the other theories are in good agreement.

**Keywords:** laminated composite plates; refined shear deformation theory; free vibration; transverse shear; non dimensionalized natural frequencies; number of layers; modulus ratio.

اللوحات المركبة تستخدم على نطاق واسع في هندسة المنشآت المدنية، الورشات الميكانيكية، عتاد الطيران وخاصة الهياكل الفضائية. يرجع ذلك بالدرجة الأولى إلى مقاومتها الكبيرة؛ جودة صلابتها وخصائصها التي تتكيف مع متطلبات تطبيقاتها.

في السنوات الأخيرة تم تطوير عدة نظريات لتحليل اهتزازات الهياكل المصنوعة من المواد المركبة؛ وقد أخذت هذه الأخيرة بعين الاعتبار تأثير تشوه القص العرضي مع معامل تصحيح القص. تستخدم هذه النظريات غالباً عدداً كبيراً من المتغيرات ويكون فيها توزيع الإجهادات إما ثابت أو خطي.

لتبسيط دراسة الاهتزازات الحرة، قمنا بتطوير النظرية المكررة الأسية والتي تأخذ بعين الاعتبار تأثير تشوه القص العرضي بدون معامل تصحيح القص بأربعة مجاهيل فقط. في هذه النظرية قمنا ببرهنة سلاسل غير متعددة الحدود لدالة القص العرضي. من جانب آخر تم إجراء تحليل عددي بواسطة طريقة العناصر المنتهية باستعمال برنامج ماتلاب.

ثانياً، قد طورنا صيغة رياضية للنظرية المكررة الجديدة ذات أربعة متغيرات و ذلك بوضع توزيع الإجهادات على شكل غير خطي والتي تحقق شرط انعدام الإجهادات العرضية على حواف اللوحة.

تأثير تغير عدة معايير مثل ( عدد الصفائح، نسبة مقياس القص الطولي على مقياس القص العرضي، نسبة الطول على السمك، ونسبة الطول على العرض) على الاهتزازات الحرة في اللوحات ذات الصفائح الغير متناظرة. بمقارنة النتائج التي تم التوصل إليها من قبل النظريتين المقترحتين مع النتائج التي تم الحصول عليها سابقاً في النظريات الأخرى ثبت أن هذه النتائج جد متقاربة.

**الكلمات المفتاحية:** اللوحات المركبة؛ النظرية المكررة الأسية؛ صيغة رياضية؛ الاهتزازات الحرة؛ القص العرضي؛ سلاسل غير متعددة الحدود؛ نسبة مقياس القص الطولي على مقياس القص العرضي؛ نسبة الطول على السمك

Seuls les symboles les plus importantes sont repris ici.

$x, y, z$  : Cordonnées cartésiennes.

$\xi, \eta$  : Cordonnées iso-paramétrique.

$E$  : Le module de Young.

$E_{ij}$  : Module d'Young suivant la direction  $i=1, 2, 3$ .

$E_L$  : Module de Young longitudinal.

$E_T$  : Module de Young transversal.

$E_f$  : Module de Young des fibres.

$E_m$  : Module de Young de matrice.

$G$  : Module de cisaillement dans le plan  $(x, z)$ .

$G_{ij}$  : Module de cisaillement dans le plan  $(i, j)$  ( $i, j= 1, 2, 3$ ).

$G_{LT}$  : Module de cisaillement dans le plan  $(L, T)$ .

$\nu$  : Le coefficient de Poisson.

$\nu_{LT}$  : Coefficient de poisson dans le plan  $(L, T)$ .

$\bar{Q}_{ij}^k$  : Les constantes de rigidité du matériau dans le repère local du stratifié.

$Q_{ij}$  : Les constantes de rigidité du matériau dans le repère principal du stratifié.

$\theta_k$  : L'angle formé par les axes du repère principal des stratifiés avec les axes du repère local de chaque couche.

$\rho$  : La masse volumique.

$a$  : Longueur de la plaque suivant la direction de  $x$ .

$b$  : Largeur de la plaque suivant la direction de  $y$ .

$h$  : L'épaisseur de la plaque suivant la direction de  $z$ .

$a/h$  : L'élancement de la plaque.

---

## Symboles

---

$A$  : Aire d'une plaque (surface transversale).

$V$  : Volume de la plaque.

$V_f$  : Fraction volumique de matrice.

$V_m$  : Fraction volumique de fibre.

$I, J, K$  : Moment d'inertie de la section transversale.

$u_0, v_0, w_0$  : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

$u, v, w$  : Les déplacements dans les directions  $x, y, z$ .

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  : Les rotations autour des axes  $x, y$  et  $z$ .

$w_b$  : La composante de déplacement transversal dû à la flexion.

$w_s$  : La composante de déplacement transversal dû au cisaillement.

$f(z)$  : Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).

$g(z)$  : La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à  $z$ .

$n$  : Le nombre de couches de la plaque en composites stratifiées (degré d'orthotropie).

$\partial$  : Dérivée partielle.

$d_{ij}, d_{ijl}, \text{et } d_{ijlm}$  : Les opérateurs différentiels.

$i$  et  $j$  : Sont des nombres naturels.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : Contraintes normales.

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  : Les contraintes de cisaillement.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : Déformation dans les directions  $x, y$  et  $z$ .

$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  : Déformations de distorsion.

$q(x)$  : Une charge mécanique sinusoïdalement distribuée.

$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$  : Efforts normaux et tranchants suivant les axes  $x$  et  $y$  par unité de longueur.

$M_x, M_y, M_{xy}, M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$  : Moments de flexion et de torsion par unité de longueur.

---

## Symboles

---

$S_x, S_y, S_{xy}, M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$  : Moment supplémentaire du au cisaillement transverse par unité de longueur.

$Q_{xz}, Q_{yz}, S_{xz}^s, S_{yz}^s$  : Effort de cisaillement par unité de longueur.

$\{X\}$  : Le vecteur des déplacements généralisés.

$\{F\}$  : Le vecteur des efforts généralisés.

$\{ \}$  : Vecteur colonne.

$[ ]$  : Matrice.

$\delta$  : Opérateur variationnel.

$\delta u, \delta v, \delta w$  : Champ virtuel de déplacement.

$W$  : Travail des forces appliquées.

$\delta W_{\text{int}}$  : Travail virtuel intérieur.

$\delta W_{\text{ext}}$  : Travail virtuel extérieur.

$T^e$  : Energie cinétique de l'élément.

$T$  : Energie cinétique totale de la structure.

$U^e$  : Energie de déformation de l'élément.

$U$  : Energie de déformation totale de la structure.

$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$  : Champ de déformation longitudinal virtuel.

$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$  : Champ de déformation transversal virtuel.

$A_{ij}$  : Les constantes de la rigidité en membrane.

$B_{ij}$  : Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-flexion/torsion.

$B_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-cisaillement.

$D_{ij}$  : Les constantes de la rigidité en flexion.

$D_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité de couplage en flexion-cisaillement.

$H_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité en cisaillement.

$[S]$  : Matrice de rigidité globale.

$[M]$  : Matrice de masse globale.

$[N]$  : Matrice des fonctions de forme.

$\{k\}$  : Vecteur de courbure.

$\varepsilon$  : Déformation globale.

$t$  : Temps.

$t_1, t_2$  : Variation du temps.

$\{\delta^e\}$  : Vecteur des déplacements nodaux.

$\bar{\omega}$  : Fréquence propre adimensionnelle.

$\omega$  : Fréquence propre.

$x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  : Fonctions d'approximation.

$m, n$  : Nombres d'approximation.

$M \times N$  : Nombre des équations du système.

$E_1 / E_2$  : Rapport d'orthotropie de la plaque en composite stratifiée.

$a / h$  : Rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque.

$a / b$  : Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque.

$b / h$  : Rapport de la largeur sur l'épaisseur de la plaque.

$\{\sigma_{ij}\}$  : Tenseur de contraintes.

$\{\varepsilon_{ij}\}$  : Tenseur de déformations.

$[C]$  : Matrice de rigidité.

$D$  : Domaine de corrélation.

## Symboles

---

$\partial D$  : Frontière de domaine.

$f^v$  : Forces extérieure à distance appliquée à un volume.

$f^s$  : Forces extérieure de contact appliqué à une surface.

$(0^\circ / 90^\circ)_n$  : Un stratifié croisé antisymétrique.

$(-45^\circ / 45^\circ)_n$  : Un stratifié équilibré antisymétrique.

$\forall$  : Quel que soit.

**Chapitre I :** Etude bibliographique des vibrations des plaques en matériaux composites.

Figure I.1: Différentes familles des matrices.....	5
Figure I.2: Différents matériaux des renforts. ....	6
Figure I.3: Interface. ....	6
Figure I.4: Structure d'un matériau monocouche. ....	7
Figure I.5: Constitution d'un stratifié. ....	7
Figure I.6: Désignation d'un stratifié. ....	8
Figure I.7: Constitution d'un sandwich. ....	8
Figure I.8: Schématisation des efforts normaux appliqués sur une plaque. ....	15
Figure I.9: Schématisation des efforts de cisaillement appliqués sur une plaque. ....	15
Figure I.10: Schématisation des moments de flexion et de torsion appliqués sur une plaque.....	16
Figure I.11: géométrie d'une plaque. ....	17
Figure I.12: Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff. ....	18
Figure I.13 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin. ....	20
Figure I.14: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques. ....	23
Figure I.15: Élément de stratifié. ....	27
Figure I.16: Principe des travaux virtuels. ....	32
Figure I.17 : Transformation géométrique. ....	35
Figure I.18: Triangle à 3 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel).....	37
Figure I.19: Triangle à 6 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel). ....	37

Figure I.20: Triangle à 10 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel). .....	38
Figure I.21: Quadrangle à 4 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel). .....	40
Figure I.22: Quadrangle à 8 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel). .....	40
Figure I.23: Quadrangle à 9 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel). .....	41
<b>Chapitre II : Analyse mathématique et numérique des vibrations des plaques en matériaux composites.</b>	
Figure II.1: Représentation de la plaque en composites stratifiées et des systèmes de coordonnées.....	44
Figure II.2 : Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques $(0^\circ / 90^\circ)_n$ (cas d'un degré d'orthotropie $n = 2$ ).....	63
Figure II.3 : Effets du rapport d'orthotropie $E_1 / E_2$ et du degré d'orthotropie $n$ sur les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques avec $a / h = 5$ . .....	65
Figure II.4 : Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur $a / h$ et du degré d'orthotropie $n$ sur les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec $E_1 / E_2 = 40$ .....	66
Figure II.5 : Effets du rapport d'orthotropie $E_1 / E_2$ et du degré d'orthotropie $n$ sur les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques $(0^\circ / 90^\circ)_n$ avec (a): $a / h = 5$ et (b): $a / h = 100$ .....	67
Figure II.6: Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur $a / h$ et du degré d'orthotropie $n$ sur les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques $(0^\circ / 90^\circ)_n$ avec (a): $E_1 / E_2 = 3$ et (b): $E_1 / E_2 = 40$ .....	68
Figure II.7 : Cas d'une plaque en composites stratifiées équilibrées antisymétriques $(-45^\circ / 45^\circ)_n$ cas d'un degré d'orthotropie $n = 2$ ).....	69

Figure II.8 : Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches avec  $E_1/E_2 = 40$ . .....70

Figure II.9 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques avec  $n = 1$  et  $a/h = 5$ . .....71

Figure II.10. Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques carrées en composites stratifiées équilibrées antisymétriques  $(-45^\circ/45^\circ)_n$  avec (a):  $a/h = 5$  et (b):  $a/h = 100$ . .....72

Figure II.11 : Maillage de la plaque en composites stratifiées. ....74

Figure II.12 : Variation de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  pour six types de plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $(n = 1; 2; 3; 4; 5; 10)$ . .....84

**Chapitre III :** Formulation mathématique des vibrations des plaques en matériaux composites.

Figure III.1 : Représentation de la plaque en composites stratifiées et des systèmes de coordonnées. ....87

Figure III.2 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h = 5$ . .....100

Figure III.3 : Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1/E_2 = 40$ . .....102

Figure III.4 : Effet du rapport la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque rectangulaire en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h=5$ ,  $E_1/E_2=40$  et  $n=1$ .....103

Figure III.5 : Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couche avec  $E_1/E_2=40$ .....105

Figure III.6 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches  $(-45^\circ/45^\circ)$  avec  $a/h=5$ .....107

Figure III.7 : Effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque rectangulaire en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $b/h=5$ ,  $E_1/E_2=40$  et  $n=1$ .....107

**Chapitre I :** Etude bibliographique des vibrations des plaques en matériaux composites.

Tableau I.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques....28

**Chapitre II :** Analyse mathématique et numérique des vibrations des plaques en matériaux composites.

Tableau II.1: Modèle de déplacement. ....62

Tableau II.2: caractéristiques des matériaux orthotropes.....62

Tableau II.3: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h = 5$ .....64

Tableau II.4: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1/E_2 = 40$  .....65

Tableau II.5: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à dix couches  $(-45^\circ / 45^\circ)_5$  avec  $E_1/E_2 = 40$  .....69

Tableau II.6: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches  $(-45^\circ / 45^\circ)_1$  .....71

**Chapitre III :** Formulation mathématique des vibrations des plaques en matériaux composites.

Tableau III.1: Modèle de déplacement. ....98

Tableau III.2: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h = 5$ .....99

Tableau III.3: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1/E_2 = 40$  .....101

Tableau III.4: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à dix couches des  $(-45^\circ / 45^\circ)_5$  avec  $E_1/E_2 = 40$  .....104

Tableau III.5: Les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques  $(-45^\circ / 45^\circ)_1$  .....106

## Abréviations

---

CLPT: Classical laminate plate theory.

FSDT: First-order shear deformation theory.

TSDT: Third-order shear deformation theory.

HSDT: Higher-order shear deformation theory.

ESDT: exponential shear deformation theory.

RESDT: refined exponential shear deformation theory.

RPT : Refined plate Theory.

MEF : La méthode des éléments finis.

Quadrangle à 4 nœuds : Élément rectangulaire à quatre nœuds.

Quadrangle à 8 nœuds : Élément rectangulaire à huit nœuds.

Quadrangle à 9 nœuds : Élément rectangulaire à neuf nœuds.

ddl : Degré de liberté.

# **Introduction générale**

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés comme alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifique, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions. Pour ces raisons, les experts avaient prévu depuis les années 1970 une généralisation rapide de leur emploi par des remplacements principaux des matériaux métalliques traditionnels. Ainsi on utilise le plus souvent ces matériaux composites dans les domaines de l'aérospatial, du naval. Du fait que les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermiques est très limitée [1]

L'utilisation de ces matériaux composites dans un environnement inchangé (les sollicitations extérieures demeurent les mêmes qu'auparavant) nécessite une meilleure connaissance possible de leur comportement mécanique surtout en terme vibratoire. Le comportement mécanique est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures. En effet, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue.

Dans le domaine de la mécanique de l'aéronautique, de la construction navale et de l'automobile, les problèmes des vibrations des structures sont l'une des préoccupations actuelles. Les vibrations sont également présentées dans les machines tournantes [2; 3].

Les plaques constituent une partie essentielle de la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile. Ces composants structurels, dans de nombreux cas, sont soumis à des vibrations. Le contrôle des vibrations de telles structures pose fréquemment un problème important dont la détermination des caractéristiques dynamiques sous différentes conditions de renforcement et de configuration est nécessaire. Il est maintenant bien connu que, pour l'analyse des vibrations des plaques, les effets de déformation de cisaillement sont importants en particulier pour les plaques épaisses ou même pour les plaques minces vibrant à des modes plus élevés. Plusieurs théories des plaques d'ordre élevé, ont été développées pour évaluer les déformations de cisaillement transverse des plaques stratifiées. La théorie des plaques classiques (CPT) ne tient pas compte des effets de cisaillement transverse, la théorie de Reissner a été la première théorie qui intègre l'effet de cisaillement transverse.

Dans ce travail de recherche, une étude du comportement mécanique des plaques en matériaux composites sera apportée,

Deux objectifs seront visés à travers cette thèse.

Le premier objectif principal de ce travail a été de définir un modèle analytique basé sur la théorie raffinée de déformation de cisaillement non-polynomiale pour l'analyse mathématique et numérique des vibrations libres des plaques en matériaux composites stratifiées et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles des plaques proposés dans la littérature. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnues pour la théorie définie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Cette théorie raffinée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description exponentielle des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement transversale nulle sur les bords libres.

Le second objectif de cette thèse est la formulation mathématique des vibrations libre des plaques en matériaux composites stratifiées. Une nouvelle théorie raffinée des plaques sera proposée. Le principe des travaux virtuels sera utilisé pour déterminer les équations d'équilibre. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant les équations aux valeurs propres.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux composites stratifiés ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre sera consacré à une étude bibliographique sur les vibrations des plaques en matériaux composites. Cette partie est subdivisée en six sections dont une introduction, des généralités sur les matériaux composites, la cinématique des solides, les théories des plaques, les vibrations des structures et enfin une conclusion avec positionnement du problème.

Le second chapitre sera dédié à des analyses mathématique et numérique des vibrations des plaques en matériaux composites basée sur une théorie raffinée de déformation de cisaillement non-polynomiales.

Le troisième chapitre une formulation mathématique des vibrations des plaques en matériaux composites est présentée. Cette formulation est basée sur une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé impliquant seulement quatre variables, contrairement aux théories du premier ordre ou d'ordre élevé à cinq variables utilisées pour l'analyse des plaques en matériaux composites. Enfin, une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

**Chapitre I**  
**Etude bibliographique des**  
**vibrations des plaques en**  
**matériaux composites**

## **I.1 Introduction**

La technologie moderne a besoin de matériaux qui présentent à la fois une grande rigidité, une bonne résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Aucun matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire d'utiliser les matériaux composites. L'étude des matériaux composites est primordiale pour mieux maîtriser le bon comportement mécanique de la pièce constituée par tel ou tel matière. L'amélioration du comportement mécanique du matériau composite vis-à-vis des différentes sollicitations, en fonction du problème posé et du besoin technologique spécifique est un chemin assez long d'une recherche qui doit mener au terminus d'une révolution technologique prometteuse.

La stratification est un procédé qui permet d'assurer la cohésion entre plusieurs couches des matériaux composites superposés. Les structures stratifiées en matériaux composites sont largement utilisées dans l'industrie et dans les nouveaux champs de technologie. L'analyse vibratoire a connu un regain d'intérêt pour les besoins technologique de conception et dimensionnement des structures. L'utilisation très répandue de structures en plaques stratifiées exige une investigation afin de développer une conception précise et confiante.

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures et les prémunir de la fatigue et la rupture précoce, il est indispensable de contrôler leur comportement vibratoire.

Dans ce chapitre on abordera les généralités sur les matériaux composites et leurs constantes mécaniques les caractérisent ainsi que les différents types de composites. On présentera aussi la cinématique des solides, la théorie des plaques et certaines notions sur les vibrations des plaques.

## **I.2 Généralités sur les matériaux composites**

### **I.2.1 Introduction**

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques aux matériaux de renfort : la rigidité, la résistance à la rupture, la dureté, etc.

Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques du composite tel que: le comportement thermique, la tenue à la température, la tenue au feu, la résistance à l'abrasion, les propriétés électriques, etc.

Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : les caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible et une bonne compatibilité avec les résines ainsi qu'une facilité de mise en œuvre, faible coût, etc.

### **I.2.2 Définition**

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces [4]. Je m'intéresse plus particulièrement dans ce travail aux composites stratifiée croisé antisymétrique et équilibré antisymétrique.

### **I.2.3 Bref historique**

Historiquement, la notion de renfort fibreux est très ancienne. Il y a des références bibliques à des briques d'argile de paille renforcés dans l'Égypte ancienne.

Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au 19<sup>ème</sup> siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). La résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du 20<sup>ème</sup> siècle.

Le premier bateau en fibre de verre a été construit en 1942 ; des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les avions et les composants électriques à ce moment.

L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950.

Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970.

Dupont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, et les industries biomédicales.

Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 1990, l'accent est mis sur le développement des

matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température.

Les applications des composite comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des aéronefs et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids [5].

## I.2.4 Les constituants des matériaux composites

### I.2.4.1 Les matrices

Pour lier les fibres ensemble, on utilise généralement des matrices qui se classent comme suit (Figure I.1) : La matrice est l'un des constituants de base des matériaux composites, elle a pour rôle de :

- donner la forme désirée au produit,
- assurer la cohésion des fibres renforts pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble,
- répartir les charges mécaniques et les contraintes encaissées,
- apporter la tenue chimique de la structure,
- protéger les renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques).

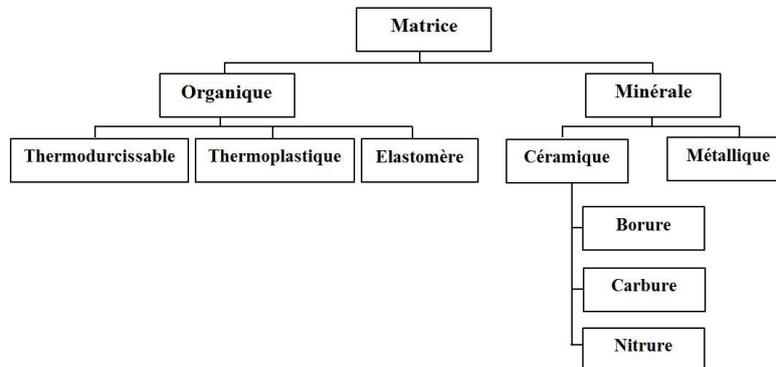


Figure I.1: Différentes familles des matrices.

On utilise généralement des matrices qui se classent en trois grandes catégories : les résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques et les matrices métalliques [6].

### I.2.4.2 Les renforts

Les renforts peuvent être utilisés sous différentes formes : particules ou fibres. Une particule ne possède aucune dimension privilégiée, elle est utilisée généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Les fibres se présentent sous plusieurs

formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes, etc.) et c'est leur arrangement et leur orientation qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites.

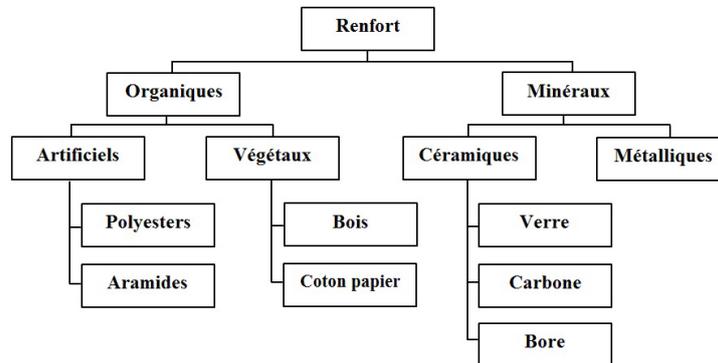


Figure I.2: Différents matériaux des renforts.

La figure I.2 présente les familles des renforts, parmi les plus utilisées on peut citer : Fibres de verre, Fibres de carbone, Fibres de bore, Fibres aramides [6].

#### I.2.4.3 L'interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

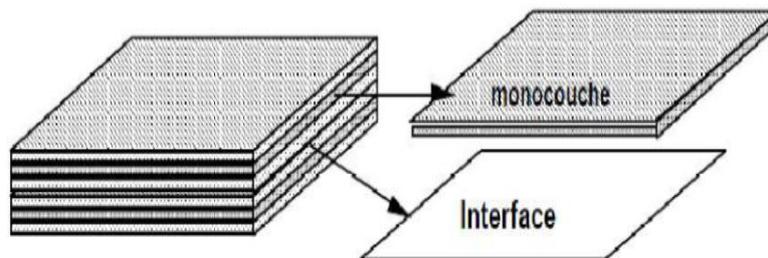


Figure I.3: Interface [7].

### I.2.5 Architecture des matériaux composites

#### I.2.5.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

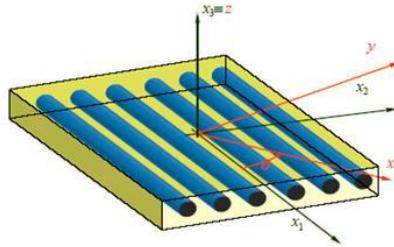


Figure I.4: Structure d'un matériau monocouche [8].

### I.2.5.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I.5).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

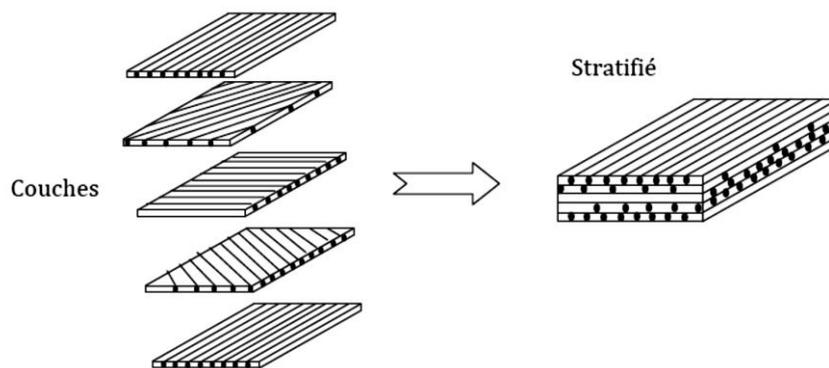


Figure I.5: Constitution d'un stratifié [1].

- **Désignation des structures stratifiées**

Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par

exemple, un stratifié de type  $(90^\circ, 0^\circ)_{2s}$  est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ , puis par symétrie de deux groupes de plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

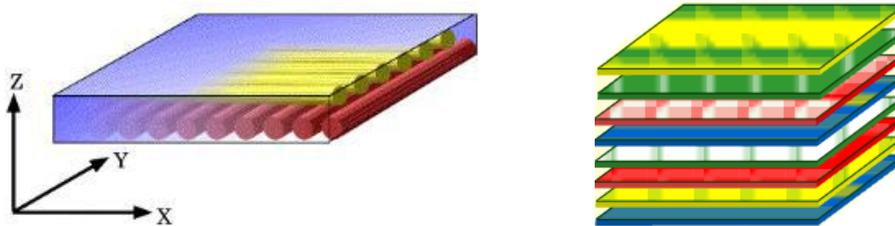


Figure I.6: Désignation d'un stratifié [9].

### I.2.5.3 Sandwich

Les matériaux sandwich résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Figure I.7). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique [1].

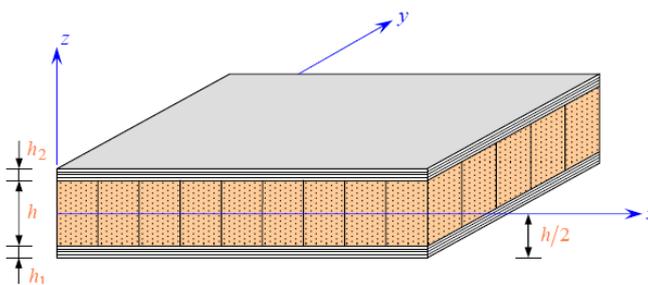


Figure I.7: Constitution d'un sandwich [10].

### I-2.6 Comportement mécanique des matériaux composites stratifiés

Le comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysé par la théorie des plaques stratifiées, prenant en compte le cisaillement transverse qui est basé sur une évaluation des champs des déplacements qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Cette déformée ne restant toutefois pas normale à la déformée du plan moyen.

La théorie des plaques sandwiches considère que seule l'âme du matériau sandwich est soumise à une déformation en cisaillement transverse. La théorie des stratifiés avec cisaillement transverse et la théorie des plaques sandwiches sont les outils qui peuvent être utilisés usuellement pour analyser le comportement élastique des structures en matériaux composites : soit par une approche analytique ou par une analyse par éléments finis [9].

### I.2.6.1 Loi de mélange

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée.

Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme [11]. En désignant par des indices  $m$  et  $f$  respectivement pour la matrice et la fibre on écrit que :

$E_L$ : en sens long :

$$E_L = V_m \cdot E_m + V_f \cdot E_f \quad (I.1)$$

$E_T$ : en sens transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (I.2)$$

$V_m$ : fraction volumique de matrice.

$V_f$ : fraction volumique de fibre.

$$V_m + V_f = 1 \quad (I.3)$$

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients  $E_f$  et  $V_f$ .

Matrice: comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients  $E_m$  et  $V_m$ .

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = V_m \cdot \varepsilon_{Tm} + V_f \cdot \varepsilon_{Tf} \quad (I.4)$$

Chacune des déformations latérales  $\varepsilon_{Tm}$  et  $\varepsilon_{Tf}$  s'expriment en fonction de la déformation longitudinale  $\varepsilon_L$ , qui est supposée être la même pour les deux phases,  $\varepsilon_{Tm} = \nu_{LTm} \cdot \varepsilon_L$  et

$\varepsilon_{Tf} = \nu_{LTf} \cdot \varepsilon_L$ . Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = V_m \cdot \nu_m + V_f \cdot \nu_f \quad (I.5)$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (I.6)$$

### I.2.6.2 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (I.7)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $C$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$ .

### I.2.6.3 Matériaux anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

### I.2.6.4 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un plan de symétrie du matériau. La loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

### I.2.6.5 Matériaux orthotropiques

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

### I.2.6.6 Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe  $\vec{e}_1$ . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat.

Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

### I.2.6.7 Matériaux isotropes

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope, dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2}$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

## I.2.7 Avantages et inconvénients des matériaux composites

### I.2.7.1 Avantages

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. Grace à ces matériaux présentent de nombreux avantages telle que :

- Gain de masse ;
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;
- Grande résistance à la fatigue ;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;

- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole, etc. [12].

### I.2.7.2 Inconvénients

- Vieillessement sous l'action de l'eau et de la température;
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes;
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs [12].

## I.3 Cinématique des solides

### I.3.1 Introduction

Dans cette partie sont exposées les principales méthodes permettant d'obtenir les équations générales d'équilibre d'une structure.

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements.

Généralement on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance. La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction.

A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des plaques peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants. D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

Par ailleurs, la résolution des problèmes hyperstatiques, qui constituent l'essentiel des structures habituelles, fait appel aux calculs de déplacements.

Le déplacement de la section d'une plaque peut être :

- une translation
- une rotation

Dans le cas d'une plaque horizontale fléchie dans le plan  $(\vec{ox}, \vec{oy})$ , l'axe des  $\vec{ox}$  étant confondu avec l'axe longitudinal, et l'axe des  $\vec{oy}$  étant confondu avec l'axe transversale de la plaque, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir

le plan  $(\vec{ox}, \vec{oy})$ , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe  $\vec{oz}$  (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la plaque [1].

### I.3.2 Principe général d'équilibre

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit en équilibre sont :

- les sommes des projections de toutes les forces sur trois axes passant par un point quelconque et non situés dans un même plan doivent être nulles;
- les sommes des moments par rapport à chacun des trois axes doivent être nulles.

Pour une structure, la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer comme un tout (corps rigide), autrement dit elle est en équilibre.

Soient  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère trirectangle et  $F_x, F_y$  et  $F_z$  les projections sur les axes  $\vec{ox}, \vec{oy}$  et  $\vec{oz}$  d'une force quelconque. Les conditions d'équilibre s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Les équations (I.13) sont appelées équations d'équilibre de la statique.

Dans le cas d'un système plan  $(\vec{ox}, \vec{oy})$  par exemple, le système d'équations (I.13) se réduit à :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M / \Delta = 0 \quad (\text{I.14})$$

Où

$\Delta$  : est un axe quelconque perpendiculaire au plan  $(\vec{ox}, \vec{oy})$ .

Notons que les équations d'équilibre de la statique sont écrites en travaillant sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire non déformée ; autrement dit les déformations sont négligées [1].

### I.3.3 Relations contraintes-efforts

Les efforts résultants et les moments agissant sur un élément de plaque sont:

#### I.3.3.1 Efforts normaux internes

Le champ de résultante en membrane est donné par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(p) dz \quad (\text{I.15})$$

Où

$\sigma(M)$  : est la matrice des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\tau_{xy}$  de la plaque, soit :

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (\text{I.16})$$

Les composantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont schématisées symboliquement sur la figure I.8.

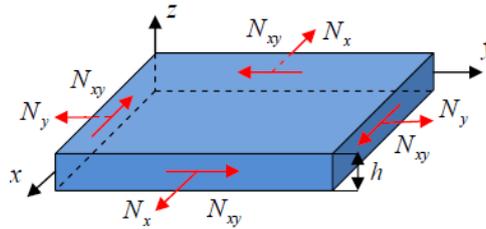


Figure I.8: Schématisation des efforts normaux appliqués sur une plaque [13].

### I.3.3.2 Efforts de cisaillement

Les efforts de cisaillement sont définis de même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (\text{I.17})$$

Les composantes sont schématisées symboliquement par la figure I.9.

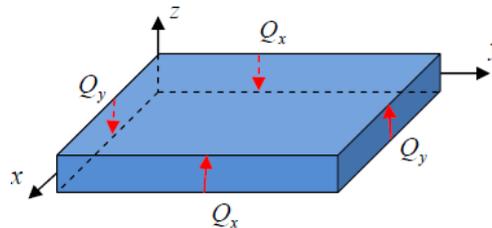


Figure I.9: Schématisation des efforts de cisaillement appliqués sur une plaque [13].

### I.3.3.3 Moment de flexion et moment de torsion

Les relations fondamentales des plaques font également intervenir les moments résultants des contraintes appliquées sur élément plaque, ces moments sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (\text{I.18})$$

Les composantes  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont schématisées symboliquement sur la figure I.10.

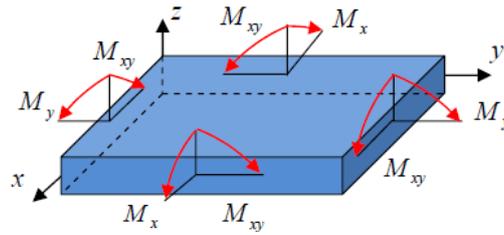


Figure I.10: Schématisation des moments de flexion et de torsion appliqués sur une plaque [13].

### I.3.4 Relations fondamentales de la mécanique des milieux continus

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'une structure élastique sont données par la forme élémentaire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} \quad (\text{I.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho \ddot{X}_x \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + f_y &= \rho \ddot{X}_y \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + f_z &= \rho \ddot{X}_z \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur une structure (champ de gravité, le champ magnétique...) sont  $f_x, f_y$  et  $f_z$  et si le repère choisi est galiléen, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit localement suivant les axes  $\vec{ox}, \vec{oy}$  et  $\vec{oz}$  [10].

$f_x, f_y$  et  $f_z$  : sont les forces volumiques appliquées en un point  $M$ .

$\ddot{X}_i$  : sont les composantes d'un vecteur d'accélération en un point  $M$ .

$\rho$  : La masse volumique.

## I.4 Théories des plaques

### I.4.1 Introduction

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces

[14]. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin [15] à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

#### I.4.2 Définition d'un milieu continu

C'est un domaine qui ne présente aucune rupture dans le temps et dans l'espace occupé par un solide dont la répartition de la matière elle se caractérise par des fonctions continues et dérivables sur les trois coordonnées [16].

#### I.4.3 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur est plus petite par rapport aux deux autres dimensions, et qui possède généralement un plan moyen ou plan de symétrie.

Une plaque peut être constituée d'un seul matériau, comme les plaques classiques ou de plusieurs matériaux, comme les plaques composites (stratifiées ou sandwichs).

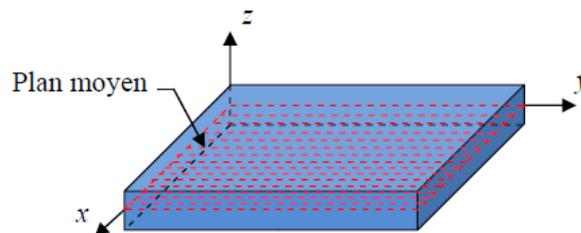


Figure I.11: géométrie d'une plaque [13].

#### I.4.4 Hypothèses

Dont l'axe est perpendiculaire aux faces. On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(\vec{ox}, \vec{oy})$  d'équation  $z = 0$ .
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan:  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan:  $z = +h/2$ .

On se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope.

Si les faces ne sont pas planes, on parle de coque.

On sépare l'étude en deux parties : pour l'étude de la flexion, on considère que les charges

sont perpendiculaires aux faces, donc que les forces sont de la forme :  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$

Et que les couples sont de la forme :  $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour les charges situées dans le plan des faces, on parle de voile ou de membrane [16].

#### I.4.5 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff

La théorie classique des plaques est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ).

Cette théorie est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure I.12), ce qui revient à négliger les effets de déformation de cisaillement transverse.

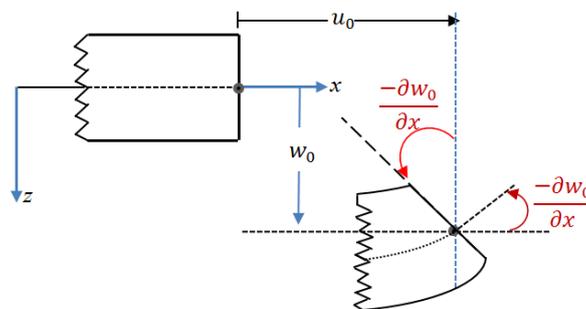


Figure I.12: Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff [17].

##### I.4.5.1 Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- ❖ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- ❖ Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. la déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- ❖ la contrainte transversale normale est égale à zéro :  $\sigma_{zz} = 0$

### I.4.5.2 Champ des déplacements

Lorsque les déformations de cisaillement transverses sont négligées  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ . A partir de cette dernière relation, il est possible d'écrire le déplacement de n'importe quel point  $(x, y)$  de la plaque sous la forme :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (I.21)$$

Où

$(u_0, v_0, w_0)$  : sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque  $z = 0$ .

### I.4.5.3 Champ des déformations

On en déduit le champ des déformations correspondant :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (I.22)$$

Le champ des déformations en membrane représentés par un vecteur  $\varepsilon^0$  à trois composantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (I.23)$$

Ainsi que le champ de courbure représenté par un vecteur  $\{k\}$  à trois composantes :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (I.24)$$

#### I.4.5.4 Limitation

La théorie classique des plaques (CLPT) néglige la déformation de cisaillement dans ses hypothèses cinématiques. Puisque ce modèle ne tient pas en compte de l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses [17].

#### I.4.6 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement.

Cette théorie des plaques est souvent appelée la théorie des plaques de Reissner-Mindlin depuis qu'elle a été développée par Reissner [18] et Mindlin [15].

Elle peut être considérée comme une extension du travail de Timoshenko [19] qui était la première à examiner à la fois les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres.

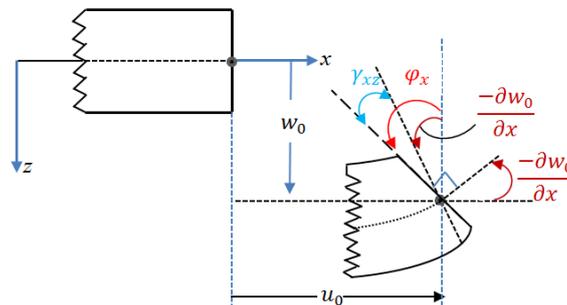


Figure I.13 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [17].

#### I.4.6.1 Hypothèses

- ❖ Les points d'un segment normal à la surface moyenne initiale restent sur un segment dans la configuration déformée, mais ce segment de droite n'est plus perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

- ❖ Les contraintes de cisaillement transverses sont supposées constantes à travers l'épaisseur de la plaque
- ❖ la contrainte transversale normale est égale à zéro :  $\sigma_{zz} = 0$

#### I.4.6.2 Champ des déplacements

Le déplacement du point  $M$  à la cote  $z$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y, t) + z \varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y, t) + z \varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{array} \right. \quad (I.25)$$

Où

$(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  : sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $\overline{oy}$  et  $\overline{ox}$ , respectivement.

#### I.4.6.3 Champ des déformations

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

- le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (I.26-a)$$

D'où :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{array} \right\} - z \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (I.26-b)$$

- le champ des déformations en cisaillement transverse

$$\{\gamma_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.27})$$

#### I.4.6.4 Limitation

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) suppose que des contraintes de cisaillement restent constantes à travers l'épaisseur. Ce qui peut être qu'une approximation, car nous savons que sur les surfaces supérieure et inférieure les contraintes de cisaillement seront généralement nulles. Ensuite, la question devient : quelle est la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque ?

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.28})$$

Supposant que les équations constitutives du champ de déplacement de cette théorie (I.25) impliquent que lors des déformations de flexion  $u_0 = v_0 = 0$ , les contraintes sont :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = zC_{11}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + zC_{12}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_{xy} = zC_{66}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

Pour l'élasticité linéaire, l'équilibre dans la direction  $x$  est régie par :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.30})$$

La substitution de l'équation (I.29) dans l'équation (I.30) donne :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -z \left[ C_{11} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + C_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (\text{I.31})$$

L'expression à l'intérieur des parenthèses ne dépend pas de  $z$  si les  $C_{ij}$  sont constants à travers l'épaisseur. Par conséquent, pour un matériau qui est homogène à travers l'épaisseur, l'intégration de l'équation (I.31) par rapport à  $z$  donne :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0 - \frac{1}{2} z^2 \left[ C_{11} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + C_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (\text{I.32})$$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement transversale  $\sigma_{xz}$  suit une distribution parabolique.

Elle se compose d'un terme constant  $\sigma_{xz}^0$  plus le terme  $z^2$ . Ainsi, lorsque les propriétés des matériaux restent constantes à travers l'épaisseur,  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  suivent, à la fois, une distribution parabolique à travers l'épaisseur[6].

#### I.4.7 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de déformation de cisaillement transverse. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction de cisaillement. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [20- 24].

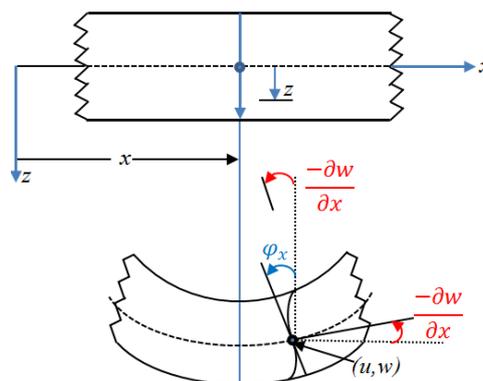


Figure I.14: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [17].

### I.4.7.1 Hypothèses

- ❖ Les contraintes de cisaillement transversales sont supposées suivre une variation parabolique à travers l'épaisseur de la plaque
- ❖ Les contraintes sont disparaître sur les surfaces supérieure et inférieure.
- ❖ la contrainte transversale normale est égale à zéro :  $\sigma_{zz} = 0$

### I.4.7.2 Champ des déplacements

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, y, t) - f(z) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial}{\partial y} w_0(x, y, t) - f(z) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{array} \right. \quad (I.33)$$

Où

$(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$ : sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $\overline{oy}$  et  $\overline{ox}$ , respectivement,  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) sont obtenus en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$ . Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy [25] est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (I.34)$$

Touratier [26] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (I.35-a)$$

L'écriture équivalente :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{h} z\right)^{2n+1} \quad (\text{I.35-b})$$

L'écriture équivalente par développement limité de Taylor:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \frac{\pi^8}{9} \cdot \frac{z^8}{h^8} - \frac{\pi^{10}}{11} \cdot \frac{z^{10}}{h^{10}} + \dots \right) \quad (\text{I.35-c})$$

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé développée par Karama [27] est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{I.36-a})$$

L'écriture équivalente par développement limité de Taylor:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \frac{\pi^8}{9} \cdot \frac{z^8}{h^8} - \frac{\pi^{10}}{11} \cdot \frac{z^{10}}{h^{10}} + \dots \right) \quad (\text{I.36-b})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de Touratier [26] ne permet qu'un développement en puissance impair.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé développée par Ait Atmane [28] est obtenue en prenant:

$$f(z) = \frac{ch\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \frac{h}{\pi} \cdot sh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{ch\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \quad (\text{I.37})$$

Dans la littérature, on trouve plusieurs approches pour la fonction  $f(z)$ , citons :  
L'approche d'Ambartsumyan [29] avec:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{I.38})$$

L'approche de Reissner [18]:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{I.39})$$

### I.4.7.3 Champ des déformations

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

- le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40-a})$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40-b})$$

- le champ des déformations en cisaillement transverse

$$\{\gamma_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

### I.4.7.4 Limitation

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [17]

### I.4.8 Théorie des plaques stratifiées

La théorie des stratifié a été développée au début des années 1960. Cette théorie est basé sur les déformations, de cisaillement, de flexion et de torsion que subit un élément de stratifié fin lors de la mise en charge de la structure. Les notations utilisées sont reportées sur la Figure I.15. Le stratifié est constitué de  $n$  couches, numérotées de la face inférieure à la face

supérieur. La surface moyenne est choisie comme plan de référence  $(\vec{ox}, \vec{oy})$  et l'axe  $\vec{oz}$  dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche  $k$  est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure ( $h_{k-1}$ ) et de sa face supérieure ( $h_k$ ).

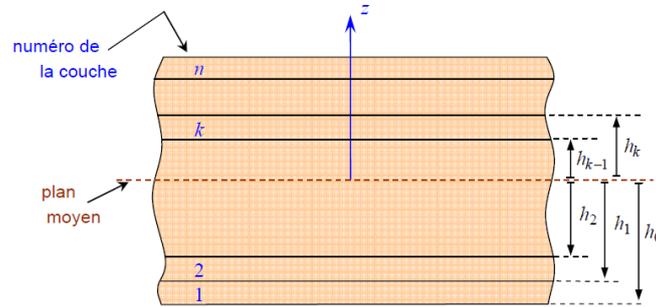


Figure I.15:Élément de stratifié [10].

La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que les théories des plaques, hypothèses que nous avons développées dans les paragraphes précédents.

Le tableau I-1 donne les différentes fonctions de cisaillement et une comparaison entre les différents modèles [17].

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de $\gamma_{xz}$ et $\gamma_{yz}$ suiv ant $z$	Coefficient De correction de cisaillement	Domaine devalidité
<b>CPT, Kirchoff</b> (1850 a) [30] et(1850 b)[31]	Théorie classique des plaques	0	//	//	Plaques minces
<b>FSDT, Mindlin</b> (1951)[15]	Théorie de déformation des plaques du 1 <sup>er</sup> ordre	$z$	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
<b>Ambartsumian</b> [29]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
<b>Reissner</b> [18]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>PSDPT, Levinson</b> [32], <b>Reddy</b> [25]	Théorie de Déformation parabolique des plaques	$z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>TSDPT, Touratier</b> [26]	Théorie de Déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

<b>Shimpi</b> [33]	Théorie raffinée des plaques	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>ESDPT, Karama et al.</b> [27]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Aydogdu</b> [34]	Théorie de Déformation Exponentielle des plaques	$f(z) = z \cdot \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Ait Atmane et al.</b> [28]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{ch\left(\frac{\pi}{2}\right)z - \frac{h}{\pi} sh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{ch\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>El meiche, Tounsi et al.</b> [35]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(\pi/h)\sin(\pi z/h) - z}{ch(\pi/2) - 1}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

**Tableau I.1: Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques.**

## I.5 Vibrations des plaques

### I.5.1 Introduction

Pratiquement tous les phénomènes physiques peuvent être décrits mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles applicables dans l'espace modélisé (volume, temps,...), avec des conditions établies aux limites de l'espace considéré. Pour la résolution de ce système, deux voies sont possibles : analytique ou numérique.

Les solutions analytiques consistent à résoudre directement les équations différentielles au moyen des techniques mathématiques habituelles telles que la séparation des variables, les solutions analogues ou les transformées de Fourier et de Laplace.

A la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, les fonctions d'Airy ont permis la résolution d'un certain nombre de problème d'élasticité, en particulier les problèmes de champs singuliers en point de fissures. L'avantage de ces solutions est qu'elles restent valables indépendamment des valeurs numériques des paramètres du système (géométrie, matériaux et charges) [10].

Dans un problème dynamique la charge et la réponse varient avec le temps, donc un problème dynamique n'a pas qu'une solution. Il faut déterminer une succession de solution correspondant à tous les instants qui présentent un intérêt dans l'histoire de la réponse.

Si une plaque est soumise à une charge  $F(t)$  les déplacements correspondent à de accélérations qui produisent des forces d'inerties opposées à ces mêmes accélérations.

Les forces d'inerties, qui supposent du sort aux accélérations de la structure, constituent la caractéristique les plus importantes des problèmes dynamiques [36]

### **I.5.2 Degrés de liberté**

En général la réponse dynamique d'une structure ne pourra pas être exprimée de manière précise par un modèle à un seul degré de liberté. L'expression de la réponse faisant intervenir aussi bien l'histoire de déplacement que son amplitude, le comportement résultant ne peut être représenté qu'à l'aide de plusieurs coordonnées de déplacement ; c'est à dire que le système doit comporter plusieurs degré de liberté [36]

### **I.5.3 Types de forces appliquées sur une structure**

#### **I.5.3.1 Forces extérieures**

On peut les diviser en deux catégories : forces volumiques et forces surfaciques

- **Forces volumiques**

Sont des forces à distance sur tout le volume du structure, elles s'expriment en force par unité de volume  $[N/m^3]$  par exemple on peut citer les forces de gravitation, les forces magnétiques et les forces d'inertie.

- **Forces surfaciques**

Sont des forces de contact réparties sur toute la surface d'inertie, elles s'expriment en force par unité de surface  $[N/m^2]$ .

#### **I.5.3.2 Forces intérieures**

En appliquant sur une structure un système de forces extérieurs ce qui entraîne une répartition des particules élémentaires à chaque force élémentaire correspond une contrainte ce qui va créer un système de force interne [37].

### **I.5.4 Formulation énergétique des plaques**

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des plaques en composites stratifiées. Cette formulation associée aux conditions aux limites permet, dans le cadre de calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche des solutions approchée du comportement

vibratoire des plaques en composites stratifiées. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement vibratoire des plaques en composites à l'aide des éléments finis.

#### I.5.4.1 Energie de déformation

L'énergie de déformation d'une plaque élastiques'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz
 \end{aligned} \tag{I.42}$$

Où

$\rho$  : est la masse volumique.

#### I.5.4.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'une plaque est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz \tag{I.43}$$

#### I.5.4.3 Travail des actions exercées sur le stratifié

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure de la plaque. La variation du travail de ces actions'écrit :

$$W = \iint \left[ \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] \delta w_0 dx dy \tag{I.44}$$

Pour les plaques en composites stratifiés  $\sigma_{zz} = 0$

Soit en introduisant les charges (forces)  $q$  définies en :

$$W = \iint q \delta w_0 dx dy \tag{I.45}$$

Pour les vibrations libres :  $q = 0$ .

### I.5.5 Formulation du problème général de la dynamique des structures

Dans la plupart des cas une étude approchée ne faisant intervenir qu'un nombre limité de degré de liberté procurera une précision suffisante et le problème pourra donc être réduit à la détermination de l'histoire dans le temps des seules composantes de déplacements choisis.

Il y a plusieurs méthodes pour la formulation des équations du mouvement d'un système dynamique [38].

#### I.5.5.1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe d'Alembert

Les équations du mouvement sont des expressions de deuxième loi de Newton.

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{X}(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.46-a})$$

$\vec{F}(t)$  : est le vecteur de la force appliquée

$\vec{X}(t)$  : est le vecteur de position de la masse

On peut écrire l'équation (I.46-a) sous la forme :

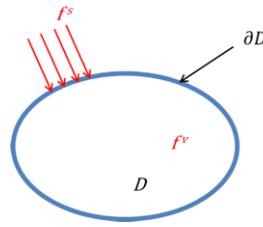
$$\vec{F}(t) - m\vec{\ddot{X}}(t) = \vec{0} \quad (\text{I.46-b})$$

$m\vec{\ddot{X}}(t)$  : est la force d'inertie, s'oppose à l'accélération de la masse (des efforts de contraintes élastiques internes s'opposant aux déplacements, des forces visqueuses s'opposant aux vitesses et des charges extérieures). Dans de nombreux problèmes simples, la manière la plus directe et la plus pratique pour formuler les équations du mouvement consiste à écrire directement le genre d'expression de l'équilibre [38].

#### I.5.5.2 Principe des travaux virtuels

Pour une structure complexe, l'écriture directe de l'équilibre de toutes les forces agissantes sur le système peut s'avérer difficile dans ce cas on peut formuler les équations du mouvement en utilisant le principe des travaux virtuels.

Considérons un domaine  $D$  sur lequel est appliqué un ensemble de sollicitations extérieures, en tout point de ce domaine représenté par le terme  $f^V$  homogène à une densité volumique de forces, ainsi qu'un ensemble de sollicitations appliquées à la frontière  $\partial D$  du domaine, représenté par le terme  $f^S$  homogène à une densité surfacique de force, comme illustre par la figure I.16.



**Figure I.16: Principe des travaux virtuels [39].**

Le Principe des travaux virtuels (PTV) exprime le fait que pour tout champ de déplacement virtuel  $X^*(M)$ , la somme des travaux de tous les efforts considérés est nulle dans le cas statique :

$$W_{ext}(X^*) + W_{int}(X^*) = 0, \forall X^* \quad (\text{I.47-a})$$

Les expressions des travaux  $W_{ext}(X^*)$  et  $W_{int}(X^*)$  sont données par :

$$W_{int}(X^*) = - \int_D \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* dV \quad (\text{I.47-b})$$

$$W_{ext}(X^*) = \int_D f_i^V \cdot X_i^* dV + \int_D f_i^S \cdot X_i^* dS \quad (\text{I.47-c})$$

Où

$\varepsilon^*(M)$  : est le tenseur des déformations virtuelles associée au déplacement virtuel  $X^*(M)$

### I.5.5.3 Principe de Hamilton

Le principe variationnel le plus généralement applicable est le principe de Hamilton, que l'on peut exprimer entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (\text{I.48})$$

Ou :

$T$  : est l'énergie cinétique totale du système.

$U$  : est l'énergie potentielle du système (déformations + forces conservatives extérieures).

$W$  : Travail effectué par les forces non conservatives agissent sur le système (amortissement, autres charges extérieures).

$\delta$  : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré.

### **I.5.6 Résolution mathématique du système vibratoire**

Dans le cas d'une structure déformable en mouvement l'équation différentielle partielle d'équilibre dynamique est obtenue en utilisant l'un des formulations du problème général de dynamique. La solution exacte de ces équations est recherchée selon les conditions aux limites. Les conditions imposées aux frontières d'une structure permettent d'aboutir à des solutions uniques des équations du mouvement

#### **I.5.6.1 Solutions exactes**

Les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". La plupart d'entre elles impliquent des conditions aux limites simplement appuyées et nécessitent un champ cinématique imposé à la plaque ce qui est difficile à reproduire expérimentalement. Leur importance est cependant cruciale puisque ce sont des méthodes exactes qui permettent le plus souvent d'évaluer la qualité des modèles des plaques, basés sur des hypothèses simplificatrices [40].

Les premières solutions exactes ont été données pour des plaques en flexion cylindrique composée de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 Lévy [41] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique, pour des cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque.

Pagano [42-44] présente une solution pour le cas statique, Srinivas [45-47] et Kulkarni [48] ont présenté une solution dans le cas dynamique. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour. Par la suite une autre méthode permettant de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques a été présentée par Reddy et al. [49] pour le cas statique. Par contre Noor [50] a présenté une méthode dans le cas dynamique. Dans ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

Certaines méthodes comme par exemple la procédure de Navier sont capables de fournir un champ cinématique proche de la solution. Ceci permet alors d'obtenir des résultats avec une très bonne précision avec un système de taille réduite. Par ailleurs le choix de la méthode de discrétisation est généralement étroitement lié au cas étudié. Par exemple, dans sa version classique, la méthode de Rayleigh-Ritz pour les modèles de plaque n'est pas adaptée aux structures non rectangulaires. Par contre, la méthode des éléments finis, avec un choix

judicieux de formulation de l'élément permet de modéliser des structures bien plus complexes. La méthode éléments finis est donc un élément essentiel de la simulation [40].

- **Procédure de Navier**

Cette méthode est similaire et très utilisée dans la plupart des solutions exactes puisque la qualité des résultats obtenus est uniquement liée à la qualité du modèle cinématique et non à la méthode de discrétisation. Il est adapté à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée.

Cette méthode est utilisée pour simuler une plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale et les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante.

Cette méthode peut être adaptée à un grand nombre de cas d'étude et est communément implémentée dans le but de tester un modèle. Cette méthode ne permet en aucun le calcul de cas pratiques. Elles sont donc réservées à l'étude de cas académiques [40].

- **Méthode de Rayleigh-Ritz**

Cette méthode permet en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait qu'avec un choix de base de projection adapté, les dérivées successives des fonctions de la base sont simples à obtenir et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base.

La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base. Parmi celles-ci, nous pouvons mentionner la base présentée par Beslin [51] qui est particulièrement adaptée aux calculs de vibrations pour diverses conditions aux limites [40].

- **Méthode des éléments finis**

L'utilisation de cette méthode est très répandue dans le milieu industriel. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles couplées à des modèles physiques, elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Cependant il ya certaines limites pour des modèles faisant intervenir des dérivées successives des variables. Contrairement aux méthodes de Navier ou de Rayleigh-Ritz, l'utilisation des dérivés multiples des fonctions de formes nécessitent l'implémentation d'éléments dont les dérivées

des fonctions de forme sont continues entre les éléments. Une autre limite est le verrouillage des plaques en cisaillement. En effet, certains modèles de plaques nécessitent un degré d'interpolation inférieur pour les cisaillements transverses par rapport à la flèche. Cette contrainte, bien que théoriquement mineure, peut aussi rendre l'implémentation de ces modèles de plaque plus complexe [40].

### ❖ Définition des éléments iso-paramétriques

A chaque élément réel, on associe un élément de référence (figure I.17).

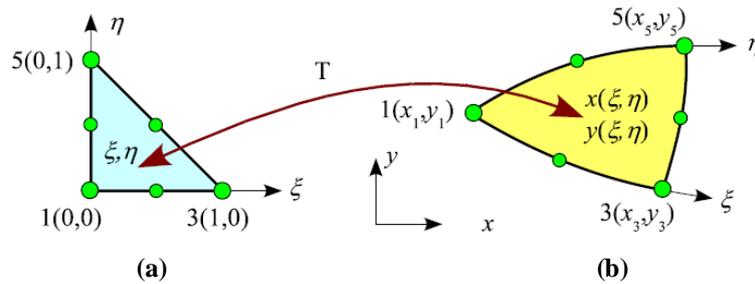


Figure I.17 : Transformation géométrique ((a): Élément de référence, (b): Élément réel) [52].

### ❖ Représentation de la géométrie

La transformation géométrique (figure I.17) qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel possède les propriétés suivantes :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (\text{I.49-a})$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (\text{I.49-b})$$

Ou :

$n$  : est le nombre de nœuds de l'élément.

$\xi$  et  $\eta$  : sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence.

$x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  : sont les coordonnées d'un point de l'élément réel.

$x_i$  et  $y_i$  : sont les coordonnées du  $i^{\text{e}}$  nœud de l'élément.

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme

La matrice jacobéenne de la transformation est :

$$\begin{aligned}
[J(\xi, \eta)] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ x_i & y_i \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{I.50}$$

Elle est nodale : un nœud de l'élément de référence devient un nœud de l'élément réel (les deux éléments possèdent donc le même nombre de nœuds) :

$$x_i = x(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) x_j, \quad y_i = y(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) y_j, \quad i = 1, \dots, n \tag{I.51}$$

Où

$(\xi_i, \eta_i)$  : sont les coordonnées du nœud  $i^e$  de l'élément de référence. On en déduit :

$$N_j(\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{I.52}$$

Une frontière de l'élément de référence devient une frontière de l'élément réel.

Elle est bijective : le déterminant de la matrice jacobéenne ne doit pas changer de signe sur l'élément. Nous imposerons la condition :

$$\det |J(\xi, \eta)| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} > 0 \tag{I.53}$$

Ce qui implique que l'élément de référence et l'élément réel soient numérotés dans le même sens (en général positif) [52].

## ❖ Bibliothèque d'éléments

## 1°- Elément triangulaire à trois nœuds T3

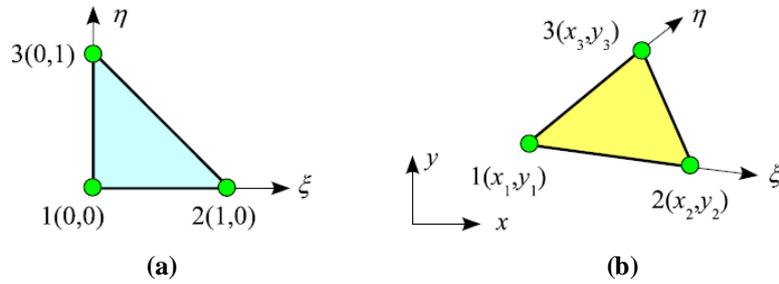


Figure I.18: Triangle à 3 nœuds ((a): Elément de référence, (b): Elément réel) [52].

Les fonctions d'interpolation pour cet élément sont données par :

$$[G] = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta] \quad (\text{I.54})$$

Et

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.55})$$

On a :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (\text{I.56})$$

Alors, les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi - \eta) \\ N_2 &= 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_3 &= \xi(2\xi - 1) \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

## 2° - Elément triangulaire à six nœuds T6

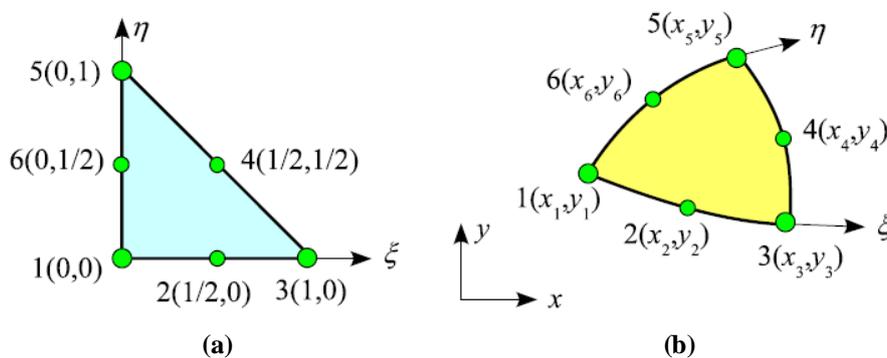


Figure I.19: Triangle à 6 nœuds ((a): Elément de référence, (b): Elément réel) [52].

Pour ce type d'élément, on définit les deux matrices  $[G]$  et  $[C]$  comme suit:

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta\xi \quad \eta^2] \quad (\text{I.58})$$

Et

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{I.59})$$

On a :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \quad (\text{I.60})$$

Alors, les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi - \eta) \\ N_2 &= 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_3 &= \xi(2\xi - 1) \\ N_4 &= 4\xi\eta \\ N_5 &= \eta(2\eta - 1) \\ N_6 &= 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

### 3° - Élément triangulaire à dix nœuds T10

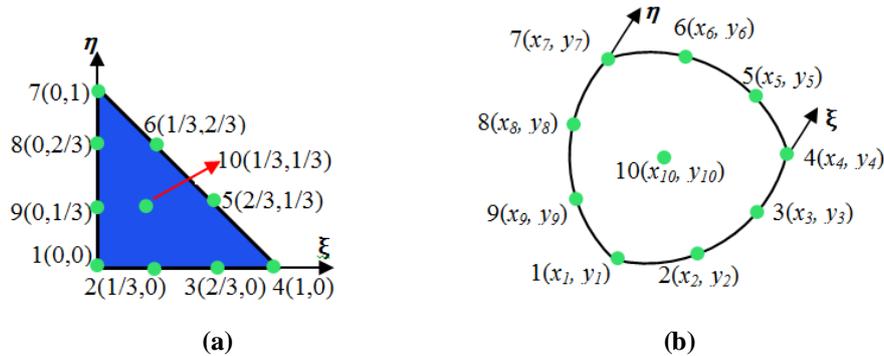


Figure I.20: Triangle à 10 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel) [52].

Pour l'élément triangulaire à dix nœuds, on définit la matrice des fonctions d'interpolation :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10}] \quad (\text{I.62})$$

Où

$$[G] = [1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \eta\xi \ \eta^2 \ \xi^3 \ \eta \cdot \xi^2 \ \xi \cdot \eta^2 \ \eta^3] \quad (\text{I.63})$$

Et

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \quad (I.64)$$

Soit,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi-\eta)(2-3\xi-\eta)(1-3\xi-3\eta) \\ N_2 &= \frac{9}{2}\xi(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta) \\ N_3 &= \frac{9}{2}\xi(1-\xi-\eta)(3\xi-1) \\ N_4 &= \frac{1}{2}\xi(3\xi-1)(3\xi-2) \\ N_5 &= \frac{9}{2}\xi\eta(3\xi-1) \\ N_6 &= \frac{9}{2}\xi\eta(3\eta-1) \\ N_7 &= \frac{1}{2}\eta(9\eta^2-9\eta+2) \\ N_8 &= \frac{9}{2}\eta(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta) \\ N_9 &= \frac{9}{2}\eta(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta) \\ N_{10} &= 27\xi\eta(1-\xi-\eta) \end{aligned} \quad (I.65)$$

#### 4° - Élément rectangulaire à quatre nœuds Q4 (interpolation linéaire)

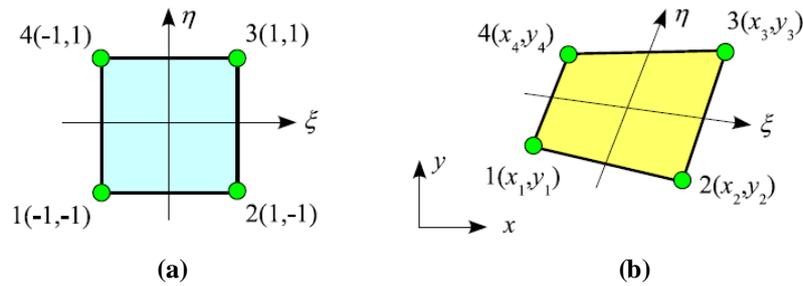


Figure I.21: Quadrangle à 4 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel) [52].

Pour l'élément rectangulaire Q4, la matrice des fonctions d'interpolation est donnée par :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{I.66})$$

Où

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \eta\xi] \quad (\text{I.67})$$

Par suite, on peut définir la matrice [C] :

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.68})$$

Soit

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

#### 5° - Élément rectangulaire à huit nœuds Q8 (interpolation quadratique)

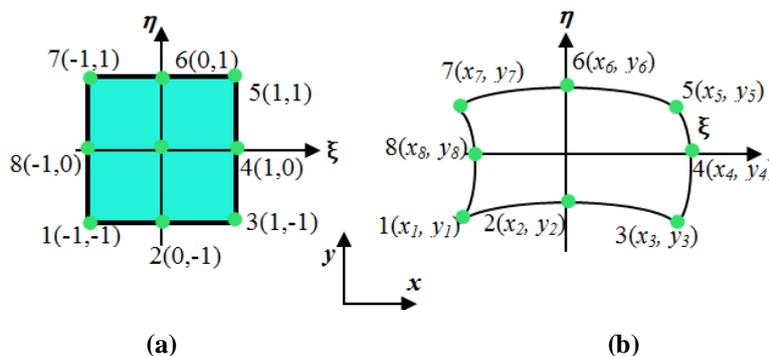


Figure I.22: Quadrangle à 8 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel).

En utilisant un élément paramétrique bidimensionnel à 8 nœuds (Figure.I.22), Les fonctions d'interpolation sont données par les relations suivantes :

$$[N]=[G]\cdot[C]^{-1}[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \quad (I.70)$$

Où

$$[G]=\begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \eta\xi & \eta^2 & \eta\cdot\xi^2 & \xi\cdot\eta^2 \end{bmatrix} \quad (I.71)$$

Et

$$[C]=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.72)$$

### 6° - Élément rectangulaire à neuf nœuds Q9 (interpolation quadratique)

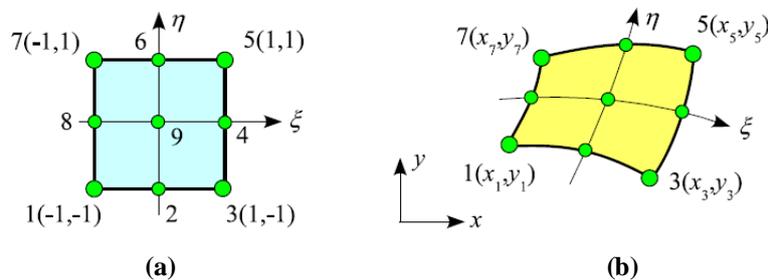


Figure I.23: Quadrangle à 9 nœuds ((a): Élément de référence, (b): Élément réel) [52].

Pour l'élément rectangulaire Q9, la matrice des fonctions d'interpolation est donnée par :

$$[N]=[G]\cdot[C]^{-1}[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9] \quad (I.73)$$

Où

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \eta\xi & \eta^2 & \eta \cdot \xi^2 & \xi \cdot \eta^2 & \xi^2 \cdot \eta^2 \end{bmatrix} \quad (I.74)$$

Et

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.75)$$

### I.5.6.2 Valeurs propres

Considérant les équations différentielles partielles du mouvement vibratoire libre ( $q = 0$ ) de la plaque en composite stratifiée. La solution vibratoire harmonique de ces équations est recherchée par la méthode de séparation des variables d'espaces et du temps selon les conditions aux limites. La recherche des valeurs propres du système conservatif associé se fait en cherchant les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles le déterminant de la matrice du système  $([k] - \omega^2 [m])$  est nul.

Après la simplification des équations différentielles, le système différentiel des vibrations libres peut alors s'écrire :

$$([k] - \omega^2 [m])\{X\} = \{0\} \quad (I.76)$$

$[k]$ : est la matrice de la rigidité globale obtenue par assemblage les matrices élémentaires.

$[M]$ : est la matrice masse obtenue par assemblage élémentaire.

$\{X\}$  : est le vecteur global de déplacements.

Les scalaires  $\omega$  sont les valeurs propres de la matrice noyau  $[k]$ . Cette équation est appelée équation aux pulsations propres du système oscillant. En classant ces solutions par ordre croissant on peut écrire :

$$\omega_1 < \omega_2 \dots \dots \dots < \omega_p < \dots \dots \dots \omega_n \quad (I.77)$$

A chaque pulsation propre  $\omega_p$  correspond une solution particulière du système différentiel

## I.6 Conclusion et position du problème

Cette étude bibliographique nous a permis d'avoir une vision d'ensemble sur le comportement vibratoire des plaques en composites stratifiées soumises à des diverses sollicitations dynamiques. Les propriétés mécaniques et/ou physiques (la rigidité, la masse volumique,...) sont des fonctions de différents constituants d'une structure en composites stratifiées. L'étude de la réponse dynamique sera plus complexe. Il va de soi qu'une meilleure compréhension du comportement dynamique de ces types de structures complexes dépend du mode d'élaboration.

A travers de cette synthèse bibliographique, nous remarquons que la majorité des travaux sur le comportement vibratoire des plaques en composites stratifiées, se concentrent sur les théories des plaques avec prise en compte du cisaillement transverse et avec plus de cinq degré de liberté, utilisant des fonctions intégrables. Peu des travaux ont été réalisés sur les théories utilisant des fonctions non intégrables où les constantes de rigidité deviennent très complexes. Pour faciliter le problème on se base sur les écritures équivalentes en utilisant les développements limités de Taylor. La question qui se pose est : À quel degré de polynôme doit-on aller?

L'objectif de notre travail s'inscrit dans la compréhension du phénomène des vibrations et de la maîtrise du comportement vibratoire des plaques en composites stratifiées à travers les théories des plaques avec prise en compte du cisaillement transverse. Deux axes de recherche principaux seront développés : le premier axe concerne la fonction de forme pour éviter l'utilisation de l'écriture équivalente et le deuxième concerne la théorie elle-même afin de diminuer les degrés de liberté.

- ❖ Une nouvelle écriture des constantes de rigidité en utilisant une fonction de forme non polynomiale (exponentielle) avec une théorie raffinée à quatre inconnus sera développée au chapitre II.
- ❖ Au chapitre III, nous proposons une nouvelle théorie raffinée à quatre variables avec une fonction de forme non linéaire.

# **Chapitre II**

## **Analyse mathématique et numérique des vibrations des plaques en matériaux composites**

## II.1 Introduction

Aujourd'hui, les matériaux composites sont utilisés dans presque toutes les phases du travail de la structure, de l'artisanat spatial aux navires, des ponts et des dômes sur les bâtiments civiques. L'augmentation significative de l'utilisation des structures en matériaux composites nécessite le développement des méthodes mathématiques rigoureuses capables de modéliser, de concevoir et d'optimiser le composite dans n'importe quel ensemble de conditions [27]. En raison des degrés élevés d'anisotropie et de la faible rigidité dans le cisaillement transverse des plaques, l'hypothèse de Kirchhoff en tant que théorie classique n'est plus adéquate. L'hypothèse indique que la normale au plan médian d'une plaque reste droite et normale après déformation en raison des effets négligeables du cisaillement transverse. Les fréquences de vibration libre calculées à l'aide de la théorie classique des plaques minces sont plus élevées que celles obtenues par la théorie des plaques de Mindlin et dans lesquelles les effets de cisaillement transverse et d'inertie rotative sont inclus [53].

La théorie classique des plaques (CLPT), qui n'introduit pas les effets de déformation de cisaillement transverse, donne des résultats raisonnables pour les plaques minces. Afin de surmonter le problème rencontré dans le CLPT, des théories de déformation de cisaillement tenant compte l'effet de déformation de cisaillement transverse ont été proposées. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) considère la distribution linéaire des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. De nombreuses recherches sur les vibrations libres des plaques en composites stratifiées ont été réalisées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) [54-56]. Pour franchir les limites de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT); la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été recommandées. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) a été largement utilisée pour étudier le comportement vibratoire des structures en matériaux composites.

Shimpi [33] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables contenant seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq inconnus minimum pour les autres théories. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Récemment Thai [57] et Kim [58] et Hadji et al. [59] ont adapté la théorie raffinée de la RPT (Refined Plate

Theory) avec succès, au flambage des plaques orthotropes et aux vibrations libres des plaques respectivement stratifiées et sandwiches [17].

Dans cette analyse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour les analyses mathématique et numérique des vibrations libres des plaques en composites stratifiées et en utilisant une fonction de gauchissement exponentielle. La nouveauté de cette analyse est de créer des formules mathématiques sous forme de séries non polynomiales pour calculer les constantes de rigidité des plaques en composites stratifiées et éviter l'utilisation du développement limité de Taylor. Les équations du mouvement dérivent du principe de Hamilton. Les solutions mathématique et numérique pour les plaques en composites stratifiées croisées antisymétriques et équilibrées antisymétriques simplement appuyées sont déterminées en utilisant la technique de Navier. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant les équations aux valeurs propres. Les résultats obtenus par la présente analyse sont comparés avec des solutions dérivées d'autres modèles connus de la littérature.

## II.2 Analyse mathématique du problème

Considérons une plaque en composites stratifiées d'épaisseur totale  $h$ , de longueur  $a$  et de largeur  $b$ . Cette dernière est constituée de  $n$  couches élastiques orthotropes. Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont suivant le plan  $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ , et l'axe  $\vec{Oz}$  est dirigé selon l'épaisseur. Les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$  et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$ ; comme représenté dans la figure II.1.

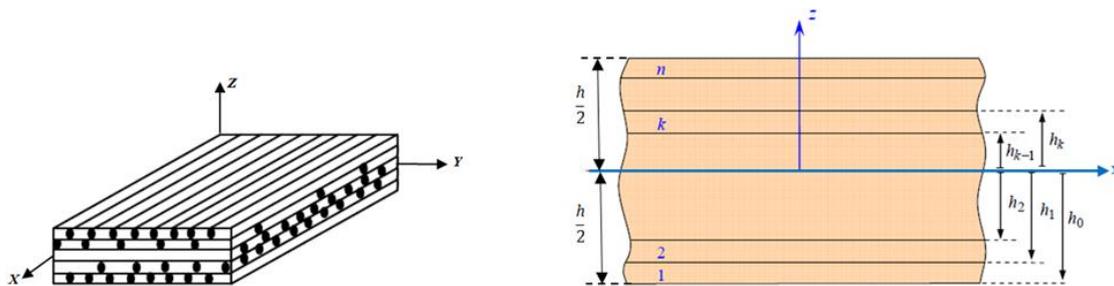


Figure II.1: Représentation de la plaque en composites stratifiées et des systèmes de coordonnées.

### II.2.1 Théorie raffinée de déformation de cisaillement exponentielle des plaques en composites stratifiées

Contrairement aux autres théories de déformations de cisaillement, le nombre d'inconnus de la présente théorie est seulement de quatre inconnus. En plus, cette théorie ne nécessite pas un coefficient de correction de cisaillement et satisfait aux conditions de contraintes de cisaillement transversales nulles aux bords de la plaque.

### II.2.1.1 Hypothèses de la présente théorie

Les hypothèses retenues pour la présente théorie s'énoncent comme suit :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, par conséquent les contraintes générées sont infinitésimales;
- Le déplacement transversal « $w$ » comprend deux composantes, une de flexion « $w_b$ » et l'autre de cisaillement « $w_s$ », ces dernières sont fonction des coordonnées  $x, y,$  et  $t$  seulement :

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{II.1})$$

- La contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

- Le déplacement  $u$  suivant la direction  $x$  et le déplacement  $v$  suivant la direction  $y$  se composent de trois termes : extension, flexion et cisaillement :

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{II.2})$$

Les composantes de la flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  sont données par :

$$u_b = z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent à l'aide du déplacement  $w_s$  une variation parabolique des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  et par conséquent les contraintes de cisaillement transversales  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

L'expression de  $u_s$  et  $v_s$  est donnée par:

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.4})$$

Où

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.5})$$

$f(z)$ : est la fonction de gauchissement représenté la variation des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. Cette fonction permet de satisfaire les contraintes de cisaillement transversales nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

### II.2.1.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses présentées dans la section précédente, le champ de déplacement est obtenu en utilisant les équations (II.1) à (II.5) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, y, t) - f(z) \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial}{\partial y} w_b(x, y, t) - f(z) \frac{\partial}{\partial y} w_s(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

Les équations non-polynomiales des déplacement-déformation sont formulées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{array} \right\} + f(z) \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = g(z) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{array} \right\} \quad (\text{II.7})$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{II.8})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = 1 - \left( 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) e^{-2 \left( \frac{z}{h} \right)^2} \quad (\text{II.9})$$

### II.2.2 Relations constitutive

Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations dans le repère principal  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (II.10), les constantes de rigidité peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

La relation contrainte-déformation pour la couche  $k$  des stratifiées dans le repère local du stratifié est exprimée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{II.12})$$

Où

$\bar{Q}_{ij}^{-k}$ : Les constantes de rigidité du stratifiée dans le repère local des stratifiés.

Les équations constitutives de chaque couche élastique des stratifiées dans le repère local

$(O_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$  doivent être transformées au repère principal des stratifiés  $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

La relation de la transformation des stratifiées du repère local vers le repère principal est donné par l'équation (II.13):

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

❖ Pour un matériau composite stratifié croisé antisymétrique  $(0^\circ / 90^\circ)_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Les constantes de rigidité selon les axes principaux du stratifié sont donnée par :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11}^0 &= Q_{11} & \bar{Q}_{11}^{90} &= Q_{22} \\
 \bar{Q}_{12}^0 &= Q_{12} & \bar{Q}_{12}^{90} &= Q_{12} \\
 \bar{Q}_{22}^0 &= Q_{22} & \bar{Q}_{22}^{90} &= Q_{11} \\
 \bar{Q}_{44}^0 &= Q_{44} & \bar{Q}_{44}^{90} &= Q_{55} \\
 \bar{Q}_{55}^0 &= Q_{55} & \bar{Q}_{55}^{90} &= Q_{44} \\
 \bar{Q}_{66}^0 &= Q_{66} & \bar{Q}_{66}^{90} &= Q_{66} \\
 \bar{Q}_{16}^0 &= \bar{Q}_{26}^0 = \bar{Q}_{45}^0 = 0 & \bar{Q}_{16}^{90} &= \bar{Q}_{26}^{90} = \bar{Q}_{45}^{90} = 0
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

❖ Pour un matériau composite stratifié équilibré antisymétrique  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Les constantes de rigidité selon les axes principaux du stratifié sont donnée par :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q_{11}^{\pm 45}} &= \overline{Q_{22}^{\pm 45}} = \frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 \overline{Q_{12}^{\pm 45}} &= \frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 \overline{Q_{16}^{\pm 45}} &= \overline{Q_{26}^{\pm 45}} = \frac{1}{4}(Q_{11} - Q_{22}) \\
 \overline{Q_{16}^{-45}} &= \overline{Q_{26}^{-45}} = \frac{1}{4}(Q_{22} - Q_{11}) \\
 \overline{Q_{66}^{\pm 45}} &= \frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + Q_{66}) \\
 \overline{Q_{44}^{\pm 45}} &= \overline{Q_{55}^{\pm 45}} = \frac{1}{2}(Q_{44} + Q_{55}) \\
 \overline{Q_{45}^{\pm 45}} &= \frac{1}{2}(Q_{55} - Q_{44})
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

### II.2.3 Formulation des équations du mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement. Le principe peut être déclaré sous forme analytique [60; 61], l'équation du mouvement pour une plaque en composites stratifiées s'écrit comme ci-dessus:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta K) dt = 0 \tag{II.16}$$

Où

$t$  : est le temps.

$t_1$  et  $t_2$  : sont respectivement les temps initial et final.

$\delta U$  : est la variation virtuelle de l'énergie de déformation.

$\delta K$  : est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

#### II.2.3.1 Variation de l'énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque en composites stratifiées peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \iiint \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dx dy dz \\
 &= \iint \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\
 &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.18-a})$$

$$(S_{yz}^s, S_{xz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{yz}, \tau_{xz}) g(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{yz}, \tau_{xz}) g(z) dz \quad (\text{II.18-b})$$

Donc la variation de l'énergie de déformation de la plaque en composites stratifiées prend la forme:

$$\begin{aligned} \delta U = & \frac{1}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 + \left( \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right) \delta w_b \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} \right) \delta w_s \right\} dx dy \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (II.18) dans (II.10), les efforts résultants dans la plaque en composites stratifiées peuvent être reliés aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S^S = A^S \gamma^S \quad (\text{II.20})$$

Où

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, M^b = \begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix}, M^s = \begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix}, S^S = \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Et

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}, k^b = \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}, k^s = \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \gamma^S = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{II.23-a})$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{II.23-b})$$

$$A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{II.23-c})$$

Où

$(A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$  : sont définies comme étant les rigidités de la plaque en composites stratifiées et sont données par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, f(z), z^2, zf(z), (f(z))^2) dz, (i, j = 1, 2, 6),$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (g(z))^2 dz, (i, j = 4, 5) \quad (\text{II.24})$$

### Cas d'une plaque en matériau composites stratifiées antisymétriques

Toutes les constantes de rigidité sont calculées par la fonction de gauchissement exponentielle:

- **Pour un stratifié croisé antisymétrique  $(0^\circ / 90^\circ)_n$**

Les constantes de la rigidité en membrane  $A_{ij}$

$$A_{16} = A_{26} = A_{45}^s = 0$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{h}{2} (Q_{11} + Q_{22})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \frac{h}{2} (Q_{44} + Q_{55}) \quad (\text{II.25})$$

$$A_{12} = hQ_{12}$$

$$A_{66} = hQ_{66}$$

Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-flexion/torsion  $B_{ij}$

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0 \\ B_{11} &= -B_{22} = \left(\frac{h^2}{8n}\right)(Q_{22} - Q_{11}) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-cisaillement  $B_{ij}^s$

$$\begin{aligned} B_{12}^s &= B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = 0 \\ B_{11}^s &= -B_{22}^s = \left(\frac{h}{2}\right)^2 (Q_{22} - Q_{11}) \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}n} = 1 \\ (-1)^{n-1} - e^{-\frac{1}{2}} + 2(-1)^{n-1+i} \sum_{i=1}^{n-1} e^{-2\left(\frac{i}{2n}\right)^2} \quad n \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Les constantes de la rigidité en flexion  $D_{ij}$

$$\begin{aligned} D_{16} &= D_{26} = 0 \\ D_{11} &= D_{22} = \frac{h^3}{24}(Q_{11} + Q_{22}) \\ D_{12} &= \frac{h^3}{12}Q_{12} \\ D_{66} &= \frac{h^3}{12}Q_{66} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Les constantes de la rigidité de couplage en flexion-cisaillement  $D_{ij}^s$

$$\begin{aligned} D_{16}^s &= D_{26}^s = 0 \\ D_{12}^s &= 0.0622599276 \cdot Q_{12} h^3 \\ D_{66}^s &= 0.06225992760 \cdot Q_{66} h^3 \\ D_{11}^s &= D_{22}^s = \frac{Q_{11} + Q_{22}}{3} \left(\frac{h}{16n}\right)^3 \left[ (8n)^2 e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 \sum_{i=0}^{4n-1} (2i)^2 e^{-2\left(\frac{2i}{16n}\right)^2} + 4 \sum_{i=0}^{4n-1} (2i+1)^2 e^{-2\left(\frac{2i+1}{16n}\right)^2} \right] n \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Les constantes de la rigidité en cisaillement  $H_{ij}^s$

$$\begin{aligned} H_{16}^s &= H_{26}^s = 0 \\ H_{12}^s &= 0.0473780095 \cdot Q_{12} h^3 \\ H_{66}^s &= 0.0473780095 \cdot Q_{66} h^3 \\ H_{11}^s &= H_{22}^s = \frac{Q_{11} + Q_{22}}{3} \left(\frac{h}{16n}\right)^3 \left[ (8n)^2 e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 \sum_{i=0}^{4n-1} (2i)^2 e^{-4\left(\frac{2i}{16n}\right)^2} + 4 \sum_{i=0}^{4n-1} (2i+1)^2 e^{-4\left(\frac{2i+1}{16n}\right)^2} \right] n \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

▪ Pour un stratifié équilibré antisymétrique  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$

Les constantes de la rigidité en membrane  $A_{ij}$

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = 0 \\
 A_{11} &= A_{22} = \frac{h}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 A_{12} &= \frac{h}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 A_{66} &= \frac{h}{4}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + Q_{66}) \\
 A_{44}^s &= A_{55}^s = \frac{h}{2}(Q_{44} + Q_{55}) \\
 A_{45}^s &= \frac{h}{2}(Q_{55} - Q_{44})
 \end{aligned} \tag{II.31}$$

Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-flexion/torsion  $B_{ij}$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0 \\
 B_{16} &= B_{26} = \frac{h^2}{16n}(Q_{11} - Q_{22})
 \end{aligned} \tag{II.32}$$

Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-cisaillement  $B_{ij}^s$

$$\begin{aligned}
 B_{11}^s &= B_{22}^s = B_{12}^s = B_{66}^s = 0 \\
 B_{16}^s &= B_{26}^s = \frac{h^2}{8}(Q_{11} - Q_{22}) \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-\frac{1}{2}n} = 1 \\ (-1)^{n-1} - e^{-\frac{1}{2}} + 2(-1)^{n-1+i} \sum_{i=1}^{n-1} e^{-2\left(\frac{i}{2n}\right)^2} \quad n \geq 2 \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{II.33}$$

Les constantes de la rigidité en flexion  $D_{ij}$

$$\begin{aligned}
 D_{16} &= D_{26} = 0 \\
 D_{11} &= D_{22} = \frac{h^3}{48}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 D_{12} &= \frac{h^3}{48}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 D_{66} &= \frac{h^3}{48}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + Q_{66})
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

Les constantes de la rigidité de couplage en flexion-cisaillement  $D_{ij}^s$

$$\begin{aligned}
 D_{16}^s &= D_{26}^s = 0 \\
 D_{11}^s &= D_{22}^s = 0.0622599276 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 D_{12}^s &= 0.0622599276 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 D_{66}^s &= 0.0622599276 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + Q_{66})
 \end{aligned} \tag{II.35}$$

Les constantes de la rigidité en cisaillement  $H_{ij}^s$

$$\begin{aligned}
 H_{16}^s &= H_{26}^s = 0 \\
 H_{11}^s &= H_{22}^s = 0.0473780095 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 H_{12}^s &= 0.0473780095 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 H_{66}^s &= 0.0473780095 \cdot h^3 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + Q_{66})
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

### II.2.3.2 Variation de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique de la plaque en composites stratifiées peut être calculée comme suit:

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}] \rho dV \\
 &= \iint \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta\dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta(\dot{w}_b + \dot{w}_s)] - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
 &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) - I_3 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad \left. + I_4 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) + I_5 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{II.37}$$

Où

L'indice  $\dot{\phantom{x}}$  (point supérieur) indique par convention la dérivée par rapport à la variable de temps  $t$ .

$\rho$  : est la densité massique du matériau en composite stratifié.

$I_i$  : sont les moments des inerties par rapport au plan moyen  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$  de l'élément de plaque en composites stratifiées localisé au point  $(x, y)$  et ayant des côtés égaux à l'unité.

$$\begin{aligned}
 (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ 1, z, z^2, f(z), (f(z))^2, zf(z) \right] \rho dz \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ 1, z, z^2, f(z), (f(z))^2, zf(z) \right] \rho^{(k)} dz
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_3 = 0 \\
 I_0 &= \rho h \\
 I_2 &= \rho \frac{h^3}{12} \\
 I_4 &= 0.0473780095 \cdot \rho h^3 \\
 I_5 &= 0.0622599276 \cdot \rho h^3
 \end{aligned} \tag{II.39}$$

### II.2.3.3 Equations du mouvement

Les équations du mouvement de la plaque en composites stratifiées peuvent être décrites par le critère de l'équilibre dynamique. Supposons que l'état d'équilibre dynamique de la plaque en composites stratifiées sans chargement (vibration libre).

Substituant les relations  $\delta U$  et  $\delta K$  des équations (II.19) et (II.37) dans l'équation (II.16) et en intégrant par partie et en séparant les coefficients  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ . Les équations du mouvement à l'équilibre dynamique pour une plaque en composites stratifiées librement oscillante sont données par les équations (II.40) :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right) - I_3 \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) \tag{II.40-a}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \tag{II.40-b}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \tag{II.40-c}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.40-d})$$

Les équations du mouvement en termes de composantes de déplacement ( $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$ ) peuvent être obtenues par la substitution de l'équation (II.20) dans l'équation (II.40). Les équations résultantes sont celles de dynamique basées sur la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement et prennent les formes suivantes :

$$\left[ A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] + \left[ A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] - \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right] - \left[ B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \right] = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right) - I_3 \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) \quad (\text{II.41-a})$$

$$\left[ A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] + \left[ A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] - \left[ B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right] - \left[ B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \right] = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \quad (\text{II.41-b})$$

$$\left[ B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right] + \left[ B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right] - \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] - \left[ D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} + D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.41-c})$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right] + \left[ B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
 & \left. + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right] - \left[ D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} \right. \\
 & \left. + D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] - \left[ H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 4H_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 4H_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} + H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] \quad (\text{II.41-d}) \\
 & - \left[ A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \\
 & - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

### **Cas d'une plaque en composites stratifiées antisymétriques**

Les équations du mouvement à l'équilibre dynamique pour une plaque en composites stratifiées antisymétriques librement oscillante sont déduites comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.42}) \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_4 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \\
 & - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Les équations du mouvement en termes de composantes des déplacements ( $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$ ) de ce cas d'étude peuvent être obtenues comme suit :

- **Pour un stratifié croisé antisymétrique ( $0^\circ / 90^\circ$ )<sub>n</sub>**

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (\text{II.43-a})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} + B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_0 \ddot{v}_0 \quad (\text{II.43-b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{11} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \left[ \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11}^s \left[ \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.43-c})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \left[ \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11} \left[ \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - A_{44}^s \left[ \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_4 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.43-d})$$

▪ **Pour un stratifié équilibré antisymétrique ( $-45^\circ / 45^\circ$ )<sub>n</sub>**

$$\left[ A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] + \left[ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] - \left[ 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right] - \left[ 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \right] = I_0 \ddot{u}_0 \quad (\text{II.44-a})$$

$$\left[ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right] + \left[ A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] - \left[ B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \right] - \left[ B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \right] = I_0 \ddot{v}_0 \quad (\text{II.44-b})$$

$$\begin{aligned} & \left[ 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right] + \left[ B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right] - \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] \\ & - \left[ D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.44-c})$$

$$\begin{aligned} & \left[ 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right] + \left[ B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right] - \left[ D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \left. + D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right] - \left[ H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] - \left[ A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right] \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_4 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.44-d})$$

### II.2.4 Solutions mathématiques pour les stratifiés antisymétriques

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte de l'équation (II.42). Les conditions aux limites suivantes sont retenues pour la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement.

- **Pour un stratifié croisé antisymétrique  $(0^\circ / 90^\circ)_n$**

$$\begin{aligned}
 v_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_b(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_s(0, y) &= 0 \\
 v_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_b(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_s(a, y) &= 0 \\
 N_x(0, y) = M_b^x(0, y) = M_s^x(0, y) = N_x(a, y) = M_b^x(a, y) = M_s^x(a, y) &= 0 \\
 u_0(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, 0) &= 0 \\
 u_0(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, b) &= 0 \\
 N_y(x, 0) = M_b^y(x, 0) = M_s^y(x, 0) = N_y(x, b) = M_b^y(x, b) = M_s^y(x, b) &= 0
 \end{aligned} \tag{II.45-a}$$

- **Pour un stratifié équilibré antisymétrique  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$**

$$\begin{aligned}
 u_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_b(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_s(0, y) &= 0 \\
 u_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_b(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_s(a, y) &= 0 \\
 N_{xy}(0, y) = M_b^x(0, y) = M_s^x(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_b^x(a, y) = M_s^x(a, y) &= 0 \\
 v_0(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, 0) &= 0 \\
 v_0(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, b) &= 0 \\
 N_{xy}(x, 0) = M_b^y(x, 0) = M_s^y(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_b^y(x, b) = M_s^y(x, b) &= 0
 \end{aligned} \tag{II.45-b}$$

La solution approximative suivante satisfait l'équation différentielle et les conditions aux limites choisies comme un développement en double série de Fourier:

$$\begin{pmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{ml} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{ml} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{bml} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{sml} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad \text{Croisé antisymétrique} \tag{II.46-a}$$

$$\begin{pmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{ml} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ V_{ml} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{bml} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{sml} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad \text{Equilibré antisymétrique} \quad (\text{II.46-b})$$

Où

$U_{ml}, V_{ml}, W_{bml}$  et  $W_{sml}$  : sont des paramètres arbitraires à déterminer.

$\omega$  : est la fréquence propre du système.

$\alpha$  et  $\beta$  : sont exprimés par :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m\pi}{a} \\ \beta = \frac{l\pi}{b} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

En remplaçant l'équation (II.46) dans (II.42), nous aurons :

$$([S] - \omega^2 [m])\{X\} = \{0\} \quad (\text{II.48})$$

Où

$\{X\}$  : est un vecteur donné par :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} U_{ml} \\ V_{ml} \\ W_{bml} \\ W_{sml} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

$[S]$  : est une matrice symétrique donnée par :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

$[m]$  : est une matrice symétrique donnée par :

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

$S_{ij}$  et  $m_{ij}$  : sont défini par:

- **Pour un stratifié croisé antisymétrique  $(0^\circ / 90^\circ)_n$**

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66} \\
 S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\
 S_{13} &= -\alpha^3 B_{11} \\
 S_{14} &= -\alpha^3 B_{11}^s, \\
 S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{11} \\
 S_{23} &= \beta^3 B_{11}, \\
 S_{24} &= \beta^3 B_{11}^s \\
 S_{33} &= (\alpha^4 + \beta^4)D_{11} + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) \\
 S_{34} &= (\alpha^4 + \beta^4)D_{11}^s + 2\alpha^2\beta^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s), \\
 S_{44} &= (\alpha^4 + \beta^4)H_{11}^s + 2\alpha^2\beta^2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) + A_{44}^s(\alpha^2 + \beta^2)
 \end{aligned} \tag{II.52-a}$$

- **Pour un stratifié équilibré antisymétrique  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$  :**

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66} \\
 S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\
 S_{13} &= -(3\alpha^2\beta B_{16} + \beta^3 B_{26}) \\
 S_{14} &= -(3\alpha^2\beta B_{16}^s + \beta^3 B_{26}^s) \\
 S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{11} \\
 S_{23} &= -(\alpha^3 B_{16} + 3\alpha\beta^2 B_{26}) \\
 S_{24} &= -(\alpha^3 B_{16}^s + 3\alpha\beta^2 B_{26}^s) \\
 S_{33} &= (\alpha^4 + \beta^4)D_{11} + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) \\
 S_{34} &= (\alpha^4 + \beta^4)D_{11}^s + 2\alpha^2\beta^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \\
 S_{44} &= (\alpha^4 + \beta^4)H_{11}^s + 2\alpha^2\beta^2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) + A_{44}^s(\alpha^2 + \beta^2)
 \end{aligned} \tag{II.52-b}$$

Et

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= m_{22} = I_0 \\
 m_{33} &= I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2) \\
 m_{34} &= I_0 + I_5(\alpha^2 + \beta^2) \\
 m_{44} &= I_0 + I_4(\alpha^2 + \beta^2)
 \end{aligned} \tag{II.52-c}$$

Pour les solutions du problème aux valeurs propres non-triviales de l'équation (II.49) le déterminant doit être nul:

$$\det([S] - \omega^2 [m]) = 0 \tag{II.53}$$

### II.2.5 Résultats et discussions

Dans ce chapitre ; le but est de démontrer la précision de la présente méthode développée pour la réponse dynamique et la corrélation entre cette présente théorie contenant un champ de déplacement avec quatre inconnus seulement et des distributions exponentielles des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque en composites stratifiées antisymétriques et les théories classiques des plaques , du premier ordre , du troisième ordre, d'ordre élevé et exponentielle est établie à travers des cas d'étude de deux matériaux 1 et 2 que nous développerons. La description des différents modèles des déplacements est présentée dans le tableau II.1.

Modèles	Théorie	Variables inconnues
CLPT	Théorie classique des plaques	3
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre [54]	5
TSDT	Théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre [25]	5
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé [62]	12
ESDT	Théorie de déformation de cisaillement exponentielle [27]	5
Présente	Théorie de déformation de cisaillement raffinée exponentielle (RESDT)	4

**Tableau II.1: Modèle de déplacement.**

Les propriétés des matériaux utilisés sont données par le tableau II-2.

Matériau 1 [63]				Matériau 2 [64]			
E <sub>1</sub> / E <sub>2</sub>	G <sub>12</sub> = G <sub>13</sub>	G <sub>23</sub>	v <sub>12</sub>	E <sub>1</sub> / E <sub>2</sub>	G <sub>12</sub> = G <sub>13</sub>	G <sub>23</sub>	v <sub>12</sub>
variable	0,6 E <sub>2</sub>	0,5 E <sub>2</sub>	0,25	variable	0,5 E <sub>2</sub>	0,35 E <sub>2</sub>	0,3

**Tableau II.2: caractéristiques des matériaux orthotropes.**

Pour la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) le coefficient de correction de cisaillement de 5/6 est considéré. Toutes les couches ont la même épaisseur, la

même densité massique et même caractéristiques des matériaux orthotropes selon les axes principaux des matériaux.

Les réponses vibratoires des plaques stratifiées antisymétriques nous permettent de déterminer les fréquences adimensionnelles.

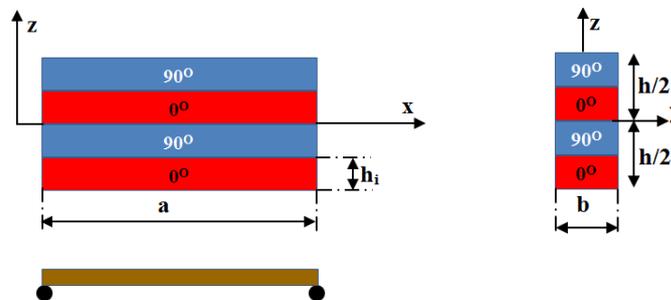
Les influences des paramètres tels que le rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$ , le rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et le degré d'orthotropie  $n$  sur les vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques sont examinées à partir des deux matériaux 1 et 2 .

Les résultats trouvés en utilisant le présent modèle sont comparés aux résultats obtenus par divers modèles des plaques et de solutions exactes de théorie de l'élasticité 3D.

Pour des raisons pratiques et pour uniformiser la lecture de nos résultats avec ceux de la littérature, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées.

$$\bar{\omega} = \omega^2 \frac{(b^2 / h)}{\sqrt{\rho / E_2}} \quad (\text{II.54})$$

**II.2.5.1 Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques (matériau 1)  $(0^\circ / 90^\circ)_n$  simplement appuyée**



**Figure II.2 : Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques  $(0^\circ / 90^\circ)_n$  (cas d'un degré d'orthotropie  $n = 2$ ).**

➤ **Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h=5$  :**

Nous étudions les effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques et ceux de Noor [63] pour les solutions exactes dans le tableau II.3.

$n$	Théorie	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
1	Exact (*)	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	FSDT	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
	TSDT	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	ESDT	6.2224	7.0066	7.8584	8.5630	9.1661
	Présent	6.2363	7.0168	7.8664	8.5641	9.1630
2	Exact (*)	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	FSDT	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
	TSDT	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	ESDT	6.5034	8.1939	9.6201	10.5261	11.1628
	Présent	6.5212	8.2046	9.6263	10.5266	11.1602
3	Exact (*)	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	FSDT	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
	TSDT	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	ESDT	6.5595	8.4195	9.9313	10.8756	11.5314
	Présent	6.5631	8.4216	9.9337	10.8708	11.5291
5	Exact (*)	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	FSDT	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
	TSDT	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	ESDT	6.5885	8.5229	10.0881	11.0522	11.7180
	Présent	6.5945	8.5230	10.0916	11.0540	11.7096

(\*) Valeurs prises de Noor [63].

**Tableau II.3: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h=5$ .**

Le tableau II.3 montre une bonne concordance entre les théories de déformations de cisaillement et la présente théorie développée (RESDT). On peut observer que les résultats calculés par la théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) sont plus proches des résultats obtenus par la présente théorie (RESDT).

La figure II.3 montre l'influence du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques à deux couches  $(0^\circ/90^\circ)_1$  et dix couches  $(0^\circ/90^\circ)_5$  avec  $a/h=5$ .

Ce résultat montre que lorsque le degré d'orthotropie  $n$  augmente, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  sera identique.

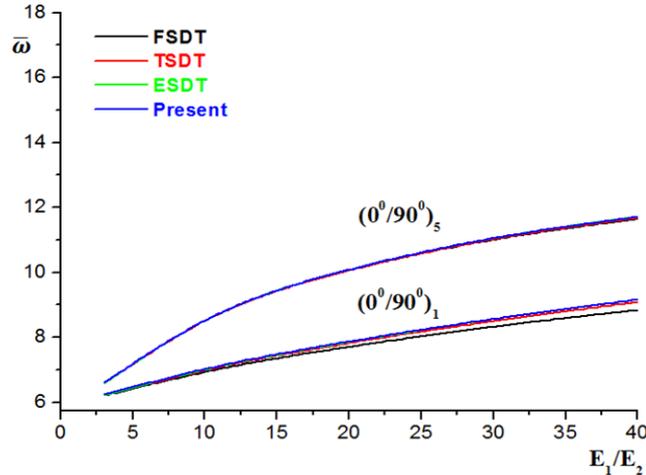


Figure II.3 : Effets du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a / h = 5$ .

➤ Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2 = 40$ :

Nous étudions les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques dans le tableau II.4.

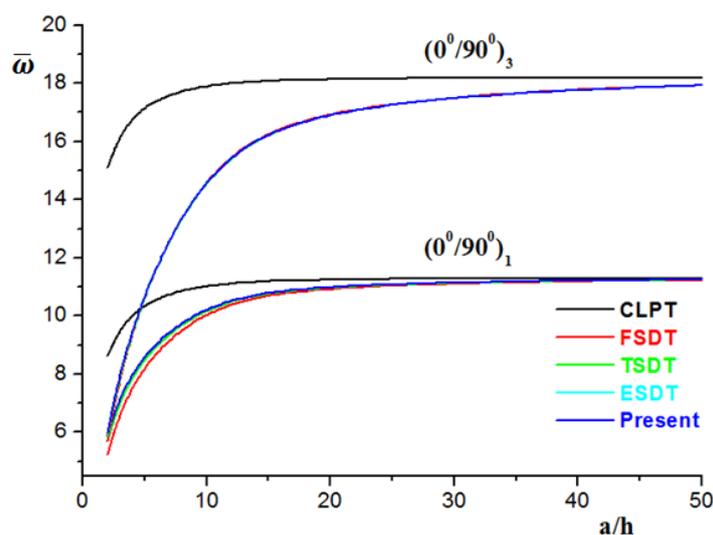
$n$	Théorie	$a/h$					
		2	4	10	20	50	100
1	CLPT	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
	FSDT	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	TSDT	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	ESDT	5.8948	8.4561	10.5964	11.1132	11.2764	11.3005
	Présent	5.8873	8.4541	10.5956	11.1127	11.2790	11.3066
2	CLPT	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3083
	FSDT	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	TSDT	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	ESDT	5.8129	9.7362	14.8338	16.5683	17.1840	17.2781
	Présent	5.8104	9.7356	14.8337	16.5688	17.1864	17.2807
3	CLPT	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
	FSDT	5.6992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	TSDT	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	ESDT	5.9888	10.0323	15.4702	17.3787	18.0646	18.1699
	Présent	5.9735	10.0305	15.4690	17.3787	18.0633	18.1677

<b>5</b>	CLPT	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457
	FSDT	5.7140	10.0628	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	TSDT	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	ESDT	6.0889	10.1854	15.7847	17.7784	18.4991	18.6099
	Présent	6.0781	10.1823	15.7846	17.7790	18.5000	18.6128

**Tableau II.4: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1 / E_2 = 40$ .**

Les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  calculées par les différentes théories des plaques comparées à ceux obtenues par la présente théorie sont présentées dans le tableau II.4. On remarque que les résultats obtenus par notre théorie (RESDT) et la théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) sont en bon accord.

La figure II.4 montre les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques à deux couches  $(0^\circ/90^\circ)_1$  et six couches  $(0^\circ/90^\circ)_3$  avec  $E_1 / E_2 = 40$ . Ce résultat montre que lorsque le rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  augmente, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  augmente et les valeurs obtenues sont les mêmes pour toutes les théories, ce résultat confirme qu'on est en présence de plaques minces. Lorsque le degré d'orthotropie  $n$  augmente les valeurs obtenues sont identiques sauf pour les valeurs obtenues par la théorie classique qui ne tient pas compte de l'effet de déformation de cisaillement transverse.



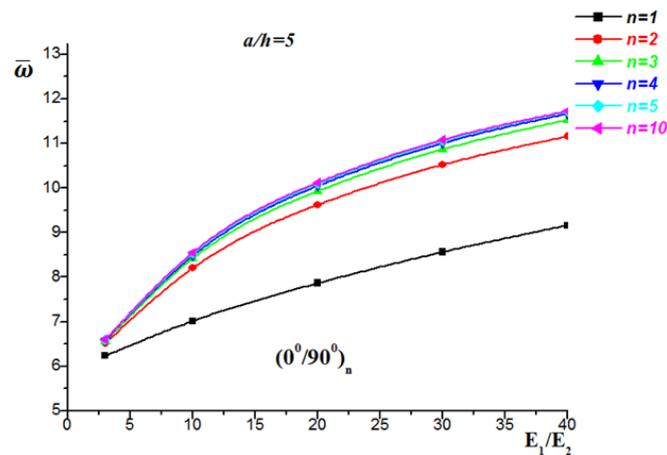
**Figure II.4 : Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1 / E_2 = 40$ .**

Pour des rapports de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  inférieurs à 10, l'effet de déformation de cisaillement transverse est très important ceci démontre qu'on est en présence de plaques épaisses, au-delà d'une valeur de  $a/h=10$  et pour les degrés d'orthotropie élevés, les valeurs de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  sont presque constantes et identiques pour toutes les théories exception faite pour la théorie classique qui ne prend pas en compte l'effet de déformation de cisaillement transverse.

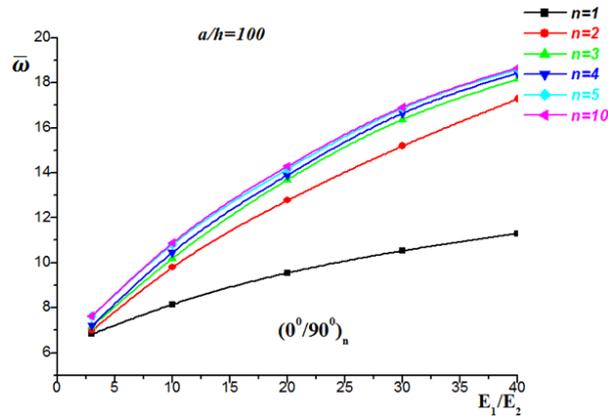
Lorsque le degré d'orthotropie augmente, la différence entre les valeurs de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  obtenues par les théories (RESDT, FSDT, TSDT et ESDT) diminue de manière significative sauf pour la théorie classique (CLPT).

- **Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour deux types de plaques épaisses ( $a/h=5$ ) et minces ( $a/h=100$ ):**

L'influence du rapport d'orthotrope  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  est présentée sur la figure II.5.



(a)



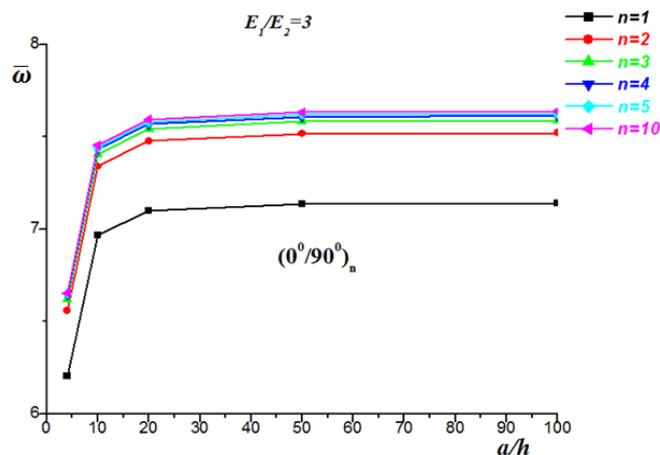
(b)

Figure II.5 : Effets du rapport d’orthotropie  $E_1 / E_2$  et du degré d’orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de deux plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques  $(0^\circ / 90^\circ)_n$  avec (a):  $a / h = 5$  et (b):  $a / h = 100$ .

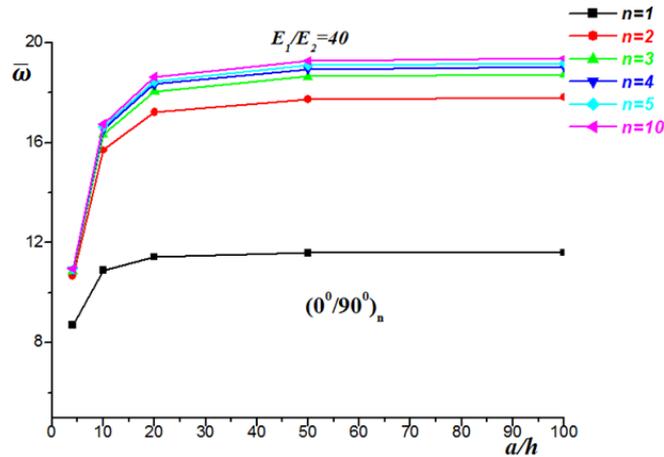
L’analyse de la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d’orthotropie  $E_1 / E_2$  pour deux types de plaques épaisses et minces pour les mêmes valeurs du degré d’orthotropie (1; 2; 3; 4; 5; 10) montre que l’augmentation du degré d’orthotropie produit une augmentation de la fréquence adimensionnelle. On remarque que les fréquences adimensionnelles sont beaucoup plus importantes pour les plaques minces que pour les plaques épaisses et ceci est dû à l’effet de cisaillement transverse qui est plus significatif pour les plaques épaisses.

- Effets du rapport de la longueur sur l’épaisseur  $a / h$  et du degré d’orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour deux types de plaques faiblement orthotropes ( $E_1 / E_2 = 3$ ) et fortement orthotropes ( $E_1 / E_2 = 40$ ) :

Les effets du rapport de la longueur sur l’épaisseur  $a / h$ , et du degré d’orthotropie  $n$  sur les vibrations libre des plaques en composites stratifiées est illustré dans la figure II.6.



(a)



(b)

Figure II.6: Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de deux plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques  $(0^\circ/90^\circ)_n$  avec (a):  $E_1/E_2 = 3$  et (b):  $E_1/E_2 = 40$ .

La figure II.6 montre que la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  des vibrations libres augmente quand le rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et le degré d'orthotropie  $n$  augmentent. Lorsque le rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  augmente, la fréquence adimensionnelle augmente, et elle est d'autant plus importante pour les plaques fortement orthotropes ( $E_1/E_2 = 40$ ).

**II.2.5.2 Cas d'une plaque en composites stratifiées équilibrées antisymétriques (matériau 2)  $(-45^\circ/45^\circ)_n$  simplement appuyée**

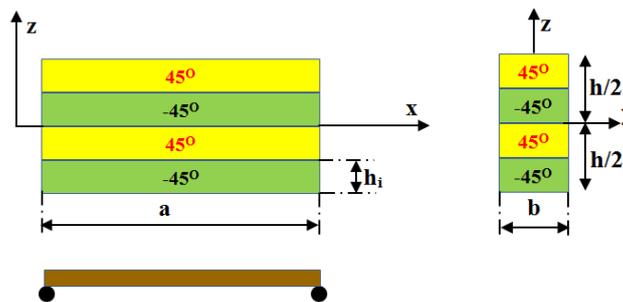


Figure II.7 : Cas d'une plaque en composites stratifiées équilibrées antisymétriques  $(-45^\circ/45^\circ)_n$  cas d'un degré d'orthotropie  $n = 2$ ).

➤ **Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2 = 40$  et un degré d'orthotropie  $n = 5$ :**

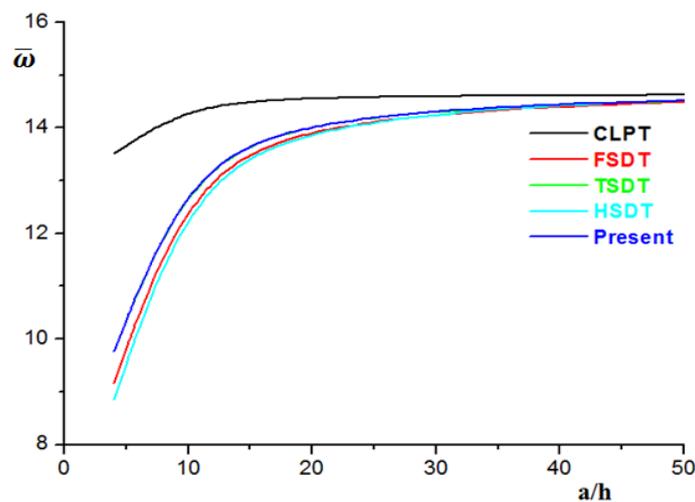
Nous étudions l'effet du rapport de longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les fréquences adimensionnelles prévues en utilisant divers modèles des plaques sont représentées dans le tableau II.5.

$a/h$	Théorie	$\bar{\omega}$
<b>5</b>	TSDT	10.1537
	FSDT	10.1288
	CLPT	15.4661
	<b>Present</b>	<b>10.1648</b>
<b>10</b>	TSDT	13.6078
	FSDT	13.614
	CLPT	15.846
	<b>Present</b>	<b>13.6177</b>
<b>100</b>	TSDT	15.9482
	FSDT	15.9484
	CLPT	15.9775
	<b>Present</b>	<b>15.9544</b>

**Tableau II.5:** les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à dix couches de  $(-45^\circ / 45^\circ)_5$  avec  $E_1/E_2 = 40$ .

Le tableau II.5 montre que les résultats obtenus par la présente théorie sont proches des valeurs obtenues par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT).

L'influence du rapport  $a/h$  sur la fréquence adimensionnelle d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches  $(-45^\circ / 45^\circ)$  avec  $E_1/E_2 = 40$  est présentée sur la figure II.8.



**Figure II.8 :** Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches avec  $E_1/E_2 = 40$ .

➤ **Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un degré d'orthotropie  $n=1$ :**

Nous avons examiné les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les fréquences adimensionnelles calculées en utilisant divers modèles des plaques sont représentées dans le tableau II.6.

$a/h$	Théorie	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
4	CLPT	6.9251	8.7950	10.6314	12.1586	13.5059
	FSDT	6.0665	7.2169	8.1185	8.7213	9.1609
	TSDT	6.0861	7.3470	8.4152	9.1752	9.7594
	HSDT <sup>(a)</sup>	6.1223	7.2647	8.0490	8.5212	8.8426
	Présent	6.0843	7.3488	8.4191	9.1847	9.7654
10	CLPT	7.2699	9.3444	11.3406	12.9888	14.4392
	FSDT	7.0700	8.9324	10.6265	11.9456	13.0439
	TSDT	7.0739	8.9660	10.7151	12.0971	13.2631
	HSDT <sup>(a)</sup>	7.1056	8.9893	10.6412	11.8926	12.9115
	Présent	7.0682	8.9795	10.7233	12.0973	13.2714
20	CLPT	7.3228	9.4304	11.4525	13.1203	14.5873
	FSDT	7.2694	9.3173	11.2517	12.8208	14.1790
	TSDT	7.2705	9.3266	11.2772	12.8659	14.2463
	HSDT <sup>(a)</sup>	7.3001	9.3265	11.2975	12.8422	14.1705
	Présent	7.2804	9.3477	11.2866	12.8693	14.2498
50	CLPT	7.3378	9.4548	11.4844	13.1577	14.6295
	FSDT	7.3291	9.4362	11.4511	13.1077	14.5608
	TSDT	7.3293	9.4377	11.4553	13.1153	14.5724
	HSDT <sup>(a)</sup>	7.3583	9.4377	11.5074	13.1566	14.6012
	Présent	7.3250	9.4390	11.4601	13.1211	14.5773
100	CLPT	7.3400	9.4583	11.4889	13.1631	14.6356
	FSDT	7.3378	9.4537	11.4806	13.1505	14.6183
	TSDT	7.3378	9.4540	11.4816	13.1524	14.6212
	HSDT <sup>(a)</sup>	7.3666	9.5123	11.5385	13.2035	14.6668
	Présent	7.3415	9.4583	11.4832	13.1591	14.6216

<sup>(a)</sup> Valeurs prises de Swaminathan et Patil [62]

**Tableau II.6: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches  $(-45^\circ / 45^\circ)_1$ .**

Les résultats obtenus par la théorie proposée (RESDT) pour les plaques épaisses en composites stratifiées équilibrées antisymétriques avec des valeurs plus élevées du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sont considérablement différents à ceux obtenus par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) [62].

L'influence du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couche ( $-45^\circ/45^\circ$ ) avec  $a/h=5$  est donnée par la figure II.9.

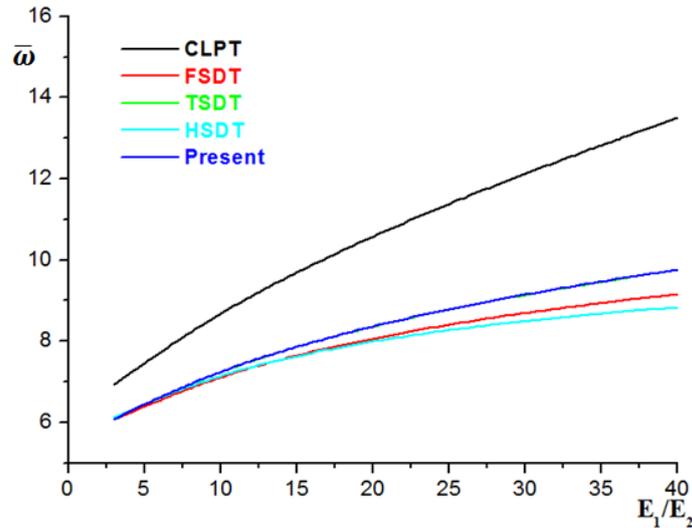
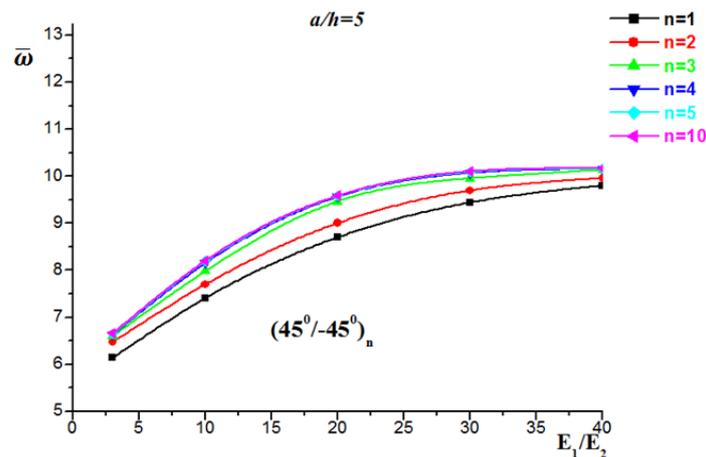


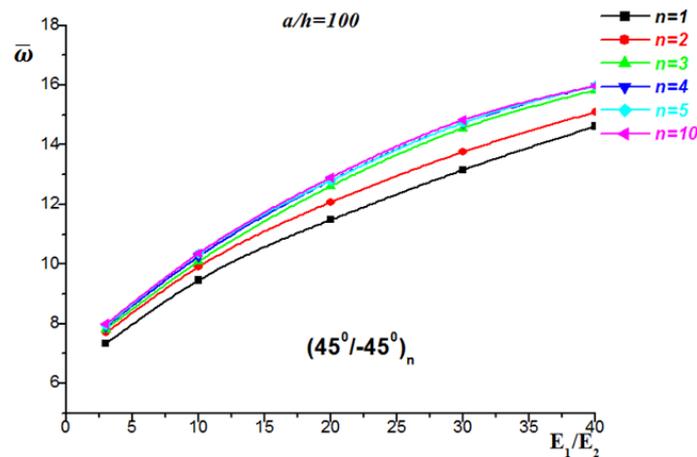
Figure II.9 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques avec  $n=1$  et  $a/h=5$ .

- Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour deux types de plaques épaisses ( $a/h=5$ ) et minces ( $a/h=100$ ):

L'influence du rapport d'orthotrope  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  est présentée sur la figure II.10.



(a)



(b)

**Figure II.10.** Effets du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de deux plaques carrées en composites stratifiées équilibrées antisymétriques  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$  avec (a):  $a/h = 5$  et (b):  $a/h = 100$ .

La fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'orthotrope  $E_1 / E_2$  pour deux types de plaques épaisses et minces et pour un même degré d'orthotropie (1; 2; 3; 4; 5; 10) augmente de la même façon. Pour les plaques minces, les valeurs de les fréquences adimensionnelles sont plus importante que dans le cas des plaques épaisses et ceci pour les mêmes valeurs des rapports d'orthotropie et degré d'orthotropie.

## II.3 Analyse numérique du problème par la méthode des éléments finis

### II.3.1 Introduction

La modélisation par la méthode des éléments finis consiste d'une part à déterminer les déplacements des points de la structure sous diverses sollicitations, et d'autre part à bien formuler la variation de l'énergie, ce qui permet de déduire les contraintes et les déformations. Ainsi, les chercheurs ont étudié le choix du champ des déplacements, ainsi que la formulation de la variation de l'énergie. L'effet du cisaillement transverse est également pris en considération [65; 66]. L'analyse du comportement dynamique des structures en matériaux composites a été développée récemment dans un ouvrage de synthèse développé par Berthelot [67]. Les vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques en tenant compte des déformations de cisaillement transverse ont été étudiées par Reddy [68] en utilisant la méthode des éléments finis. L'auteur a également dérivé un ensemble d'équations d'équilibre à variation constante pour les modèles cinématiques initialement proposés par Levinson [69] et Murthy [70; 71]. Des solutions mathématiques et numériques par la méthode des éléments finis pour les vibrations et le flambage des plaques en composites

stratifiées ont été trouvées en utilisant diverses théories des plaques pour prédire le comportement des plaques en composites stratifiées. En utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, les solutions par la méthode des éléments finis pour l'analyse des vibrations libres des plaques en composites stratifiées ont été obtenues par Shankara [72].

### II.3.2 Représentation iso-paramétrique

Les formulations iso-paramétrique est utilisée pour la tâche du point de vue calcul numérique. Ainsi, toutes les approximations faites sur l'élément réel seront remplacées par des approximations sur l'élément de référence, les dérivées des coordonnées cartésiennes  $x, y$  remplacées par les dérivées des coordonnées iso-paramétrique  $\xi, \eta$ .

Les coordonnées  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  d'un point quelconque  $(\xi, \eta)$  sont définies par :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases} \quad (II.55)$$

La figure II.11 représente le maillage de la plaque en composites stratifiées selon l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec quatre degré de liberté.

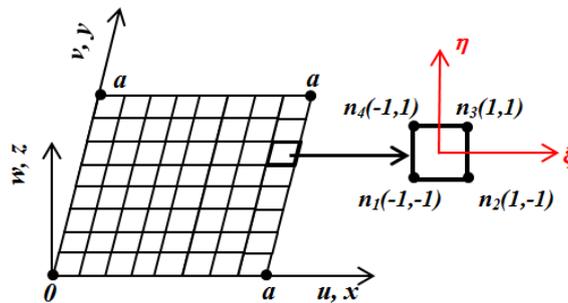


Figure II.11 : Maillage de la plaque en composites stratifiées.

Où

$(x_i, y_i)$  : sont les coordonnées du nœud  $i$ .

Les fonctions d'interpolation quadratique sont données par :

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (II.56)$$

Le problème du comportement des matériaux composite stratifiés tenant en compte du cisaillement transverse est alors un problème à quatre degrés de liberté  $(u_0, v_0, w_b, w_s)$ .

Dans le cas où la structure est maillée suivant des éléments des stratifiés à quatre nœuds (figure II.11), le champ des déplacements en membrane, en flexion et en cisaillement en un point est exprimé par interpolation en fonction de ces degrés de liberté aux quatre nœuds suivant :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = N_1(x, y)u_0^1(t) + N_2(x, y)u_0^2(t) + N_3(x, y)u_0^3(t) + N_4(x, y)u_0^4(t) \\ v_0(x, y, t) = N_1(x, y)v_0^1(t) + N_2(x, y)v_0^2(t) + N_3(x, y)v_0^3(t) + N_4(x, y)v_0^4(t) \\ w_b(x, y, t) = N_1(x, y)w_b^1(t) + N_2(x, y)w_b^2(t) + N_3(x, y)w_b^3(t) + N_4(x, y)w_b^4(t) \\ w_s(x, y, t) = N_1(x, y)w_s^1(t) + N_2(x, y)w_s^2(t) + N_3(x, y)w_s^3(t) + N_4(x, y)w_s^4(t) \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

Où

$u_0^i, v_0^i, w_b^i$  et  $w_s^i$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$  : sont respectivement les déplacements généralisés des nœuds  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$ .

$N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  : sont les fonctions d'interpolation.

Pour l'élément paramétrique bidimensionnel à 4 nœuds (Figure.II.11), on définit la matrice des fonctions d'interpolation  $[N]$ :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{I.58})$$

Avec :

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \eta\xi] \quad (\text{I.59})$$

Par suite, on peut définir la matrice  $[C]$ :

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.60})$$

Alors la matrice inversible de la matrice  $[C]$  est donnée par :

$$[C]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.61})$$

Donc la matrice des fonctions d'interpolation  $[N]$  prend la forme:

$$\begin{aligned}
 [N] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \eta\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1-\xi-\eta+\eta\xi}{4} & \frac{1+\xi-\eta-\eta\xi}{4} & \frac{1+\xi+\eta+\eta\xi}{4} & \frac{1-\xi+\eta-\eta\xi}{4} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{I.62}$$

On peut ainsi écrire les fonctions d'interpolation par les coordonnées iso-paramétriques par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \tag{II.63}$$

Il en résulte que le champ des déplacements généralisés dans l'élément peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\
 & * \begin{bmatrix} u_0^1 & v_0^1 & w_b^1 & w_s^1 & u_0^2 & v_0^2 & w_b^2 & w_s^2 & u_0^3 & v_0^3 & w_b^3 & w_s^3 & u_0^4 & v_0^4 & w_b^4 & w_s^4 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{II.64}$$

L'équation (II.66) peut s'écrire pour l'élément  $e$  sous la forme :

$$X(x, y, t) = N_e(x, y) \cdot X_e(t) \tag{II.65}$$

Où

$X(x, y, t)$  : est le vecteur des déplacements en membrane, en flexion et en cisaillement

$N_e(x, y)$  : est la matrice des fonctions de forme de l'élément  $e$ .

$X_e(t)$  : est le vecteur des degrés de liberté de l'élément  $e$ .

$$[N_e] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{II.66}$$

### II.3.3 Justification du choix de l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec quatre degré de liberté

Des recherches récentes ont montré que les éléments rectangulaires à quatre nœuds sont les plus efficaces pour le traitement des problèmes de plaques (isotropes, orthotropes et anisotropes). Les éléments rectangulaires à huit et à neuf nœuds (interpolation quadratique) donnent aussi de bons résultats pour ce type de problème, cependant ces derniers se détériorent avec l'introduction de la distorsion dans le maillage ou lorsque les nœuds internes sont légèrement décalés de leur position initiale. L'utilisation des éléments rectangulaire à 4 nœuds est une condition nécessaire pour éviter le phénomène du verrouillage numérique (ou blocage en cisaillement transverse) [3].

### II.3.4 Comportement mécanique des plaques en composites stratifiées

Pour le comportement mécanique d'une plaque en composites stratifiées, le champ des déformations est donné par l'équation (II.7).

Il s'agit ici de trouver la matrice  $[B_e]$  reliant les déformations  $\{\varepsilon_i\}$  de l'élément  $e$  à ses déplacements nodaux  $\{u_n\}$ . Cette relation est exprimée par :

$$[B_e] = [L] \cdot [N_e] \quad (II.67)$$

Ou

$[L]$  : est ici en fonction de  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$ .

$N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  : sont en fonction de  $\xi$  et  $\eta$ .

La définition d'une matrice dite jacobienne s'impose. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} [J(\xi, \eta)] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (II.68)$$

Avec :

$$[J(\xi, \eta)] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (\eta-1)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & (\eta-1)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ (\xi-1)x_1 + (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (\xi-1)x_4 & (\xi-1)y_1 + (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (\xi-1)y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

$|J|$  : est le déterminant de la matrice jacobienne. Il est donné par :

$$|J| = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \quad (\text{II.70})$$

Dou :

$$|J| = \frac{1}{16} [(\eta-1)(\xi-1)y_1x_1 + (1-\eta)(\xi-1)y_1x_2 + (1+\eta)(\xi-1)y_1x_3 - (1+\eta)(\xi-1)y_1x_4 \\ + (\eta-1)(1+\xi)y_2x_1 + (1-\eta)(1+\xi)y_2x_2 + (1+\eta)(1+\xi)y_2x_3 - (1+\eta)(1+\xi)y_2x_4 \\ + (\eta-1)(1+\xi)y_3x_1 + (1-\eta)(1+\xi)y_3x_2 + (1+\eta)(1+\xi)y_3x_3 - (1+\eta)(1+\xi)y_3x_4 \\ + (\eta-1)(\xi-1)y_4x_1 + (1-\eta)(\xi-1)y_4x_2 + (1+\eta)(\xi-1)y_4x_3 - (1+\eta)(\xi-1)y_4x_4 \\ + (1-\eta)(\xi-1)xy_1 + (\eta-1)(\xi-1)xy_2 - (1+\eta)(\xi-1)xy_3 + (1+\eta)(\xi-1)xy_4 \\ + (1-\eta)(1+\xi)x_2y_1 + (\eta-1)(1+\xi)x_2y_2 - (1+\eta)(1+\xi)x_2y_3 + (1+\eta)(1+\xi)x_2y_4 \\ + (1-\eta)(1+\xi)x_3y_1 + (\eta-1)(1+\xi)x_3y_2 - (1+\eta)(1+\xi)x_3y_3 + (1+\eta)(1+\xi)x_3y_4 \\ + (1-\eta)(\xi-1)x_4y_1 + (\eta-1)(\xi-1)x_4y_2 - (1+\eta)(\xi-1)x_4y_3 + (1+\eta)(\xi-1)x_4y_4] \quad (\text{II.71})$$

$\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  : sont respectivement les vecteurs abscisses et cordonnées des nœuds.

On a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

Où

$[J]^{-1}$  : est l'inverse de la matrice Jacobienne.

On peut ainsi effectuer le calcul de  $[B_e]$  :

$$[B_e] = [A] \cdot \begin{bmatrix} \eta-1 & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta & 0 \\ \xi-1 & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & \eta-1 & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta \\ 0 & \xi-1 & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

On peut défini la matrice  $[A]$  comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Les coefficients de la matrice  $[A]$  sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0 \\
 a_{11} &= a_{33} = \frac{1}{4} [(\eta - 1)x_1 + (1 - \eta)x_2 + (1 + \eta)x_3 - (1 + \eta)x_4] \\
 a_{12} &= a_{34} = \frac{1}{4} [(\eta - 1)y_1 + (1 - \eta)y_2 + (1 + \eta)y_3 - (1 + \eta)y_4] \\
 a_{23} &= a_{31} = \frac{1}{4} [(\xi - 1)x_1 + (1 + \xi)x_2 + (1 + \xi)x_3 + (\xi - 1)x_4] \\
 a_{24} &= a_{32} = \frac{1}{4} [(\xi - 1)y_1 + (1 + \xi)y_2 + (1 + \xi)y_3 + (\xi - 1)y_4]
 \end{aligned} \tag{II.75}$$

En considérant l'équation (II.66), les déformations : en membrane  $\varepsilon_m$ , en flexion  $k$  et en cisaillement transverse  $\gamma_s$  peuvent donc être exprimées par :

$$\begin{cases} \varepsilon = B_m(x, y)u_e(t) \\ k = B_k(x, y)u_e(t) = [B_k^b(x, y) + B_k^s(x, y)]u_e(t) \\ \gamma_s = B_s(x, y)u_e(t) \end{cases} \tag{II.76}$$

Où

$B_i$  : est la matrice dérivée de la matrice des fonctions de forme.

$k$  : est la matrice de courbure.

Pour le comportement en membrane, la matrice  $B_m$  est obtenue comme suit :

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{II.77}$$

Pour le comportement en flexion les matrices  $B_k^b$  et  $B_k^s$  sont exprimées par :

$$B_k^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_4}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.78})$$

Et

$$B_k^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & -0 & -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & -0 & -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

Pour le comportement en cisaillement transverse la matrice  $\gamma^s$  est exprimée par :

$$\gamma^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

### II.3.5 Formulation de l'énergie

#### II.3.5.1 Energie de déformation

L'énergie de déformation de l'élément fini  $e$  d'un stratifié est déterminée par l'expression (II.81):

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx dy dz \quad (\text{II.81})$$

On peut définir aussi l'énergie de déformation de l'élément fini  $e$  d'un stratifié par:

$$U_e = \iint_e \left[ \{N_i\} \cdot \{\varepsilon_i\} + \{M_i^b\} \cdot \{k_i^b\} + \{M_i^s\} \cdot \{k_i^s\} + \{S_i^s\} \cdot \{\gamma_i^s\} \right] dx dy \quad (\text{II.82})$$

Ou

$$\begin{cases} N(x, y, z, t) = A \cdot \varepsilon(x, y, t) + B \cdot k^b(x, y, t) + B^s \cdot k^s(x, y, t) \\ M^b(x, y, z, t) = B \cdot \varepsilon(x, y, t) + D \cdot k^b(x, y, t) + D^s \cdot k^s(x, y, t) \\ M^s(x, y, z, t) = B^s \cdot \varepsilon(x, y, t) + D^s \cdot k^b(x, y, t) + H^s \cdot k^s(x, y, t) \\ S^s(x, y, z, t) = A^s \gamma^s(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

On peut aussi écrire les résultantes et les moments sous la forme:

$$\begin{cases} N(x, y, z, t) = [A \cdot B_m(x, y) + B \cdot B_k^b(x, y) + B^s \cdot B_k^s(x, y)] u_e(t) \\ M^b(x, y, z, t) = [B \cdot B_m(x, y) + D \cdot B_k^b(x, y) + D^s \cdot B_k^s(x, y)] u_e(t) \\ M^s(x, y, z, t) = [B^s \cdot B_m(x, y) + D^s \cdot B_k^b(x, y) + H^s \cdot B_k^s(x, y)] u_e(t) \\ S^s(x, y, z, t) = [A^s \cdot B_k^s(x, y)] u_e(t) \end{cases} \quad (\text{II.84})$$

Donc son expression peut être réduite à :

$$U_e = \frac{1}{2} X_e^T G_e X_e \quad (\text{II.85})$$

Où

$G_e$  : est la matrice de rigidité de l'élément  $e$  exprimée par :

$$G_e = \iint \left\{ \begin{aligned} & \left\{ [B_m(x, y)]^t \cdot A \cdot B_m(x, y) + [B_k^b(x, y)]^t \cdot B \cdot B_k^b(x, y) + [B_k^s(x, y)]^t \cdot B^s \cdot B_k^s(x, y) \right\} \\ & + \left\{ [B_m(x, y)]^t \cdot B \cdot B_m(x, y) + [B_k^b(x, y)]^t \cdot D \cdot B_k^b(x, y) + [B_k^s(x, y)]^t \cdot D^s \cdot B_k^s(x, y) \right\} \\ & + \left\{ [B_m(x, y)]^t \cdot B^s \cdot B_m(x, y) + [B_k^b(x, y)]^t \cdot D^s \cdot B_k^b(x, y) + [B_k^s(x, y)]^t \cdot H^s \cdot B_k^s(x, y) \right\} \\ & + \left\{ [B_k^s(x, y)]^t \cdot A^s \cdot B_k^s(x, y) \right\} \end{aligned} \right\} dx dy \quad (\text{II.86})$$

L'énergie de déformation de la structure est ensuite obtenue par l'assemblage sur l'ensemble des éléments.

Soit :

$$U = \frac{1}{2} X^T G X \quad (\text{II.87})$$

Où

$G$  : est la matrice de rigidité globale de la structure. Elle est construite par l'assemblage des matrices de rigidité relatives de chacun des éléments. Ces matrices sont appelées matrices de rigidité élémentaires.

Soit :

$$G = \sum_e G_e \quad (\text{II.88})$$

### II.3.5.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un élément fini  $e$  est donnée par :

$$K_e = \frac{1}{2} \iiint_e \rho_e \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (\text{II.89})$$

Où

$\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$  et  $\frac{\partial w}{\partial t}$  : sont les vitesses de déplacements du plan moyen de l'élément  $e$ .

$\rho_e$  : est la masse volumique de l'élément  $e$ .

D'où l'expression de l'énergie cinétique de l'élément  $e$  :

$$K_e = \frac{1}{2} \dot{X}_e^T M_e \dot{X}_e \quad (\text{II.90})$$

En introduisant la matrice masse de l'élément  $e$  :

$$M_e = \frac{1}{2} \iiint_e N_e^T \rho_e N_e dx dy dz \quad (\text{II.91})$$

L'énergie cinétique de la structure est obtenue par l'assemblage sur l'ensemble des éléments.

Soit :

$$K = \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X} \quad (\text{II.92})$$

Où

$M$  : est la matrice de masse globale.

Soit :

$$M = \sum_e M_e \quad (\text{II.93})$$

### II.3.6 Formulation par la méthode des éléments finis de l'équation de la dynamique vibratoire

L'équation de la dynamique vibratoire d'une structure est obtenue en supposant que l'énergie totale est stationnaire.

Soit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X} - \frac{1}{2} X^T G X \right) dt = 0 \quad (\text{II.94})$$

L'équation de la dynamique vibratoire d'une structure en l'absence de charges extérieures est obtenue en écrivant que l'énergie totale est stationnaire, ce qui conduit à l'équation usuelle :

$$M\ddot{X} + KX = 0 \tag{II.95}$$

Où

$\ddot{X}$  : est la matrice accélération de la structure en composites stratifiées.

Les solutions recherchées pour cette équation, dans le cas des vibrations libres, sont de types harmoniques.

### II.3.7 Résultats et discussions

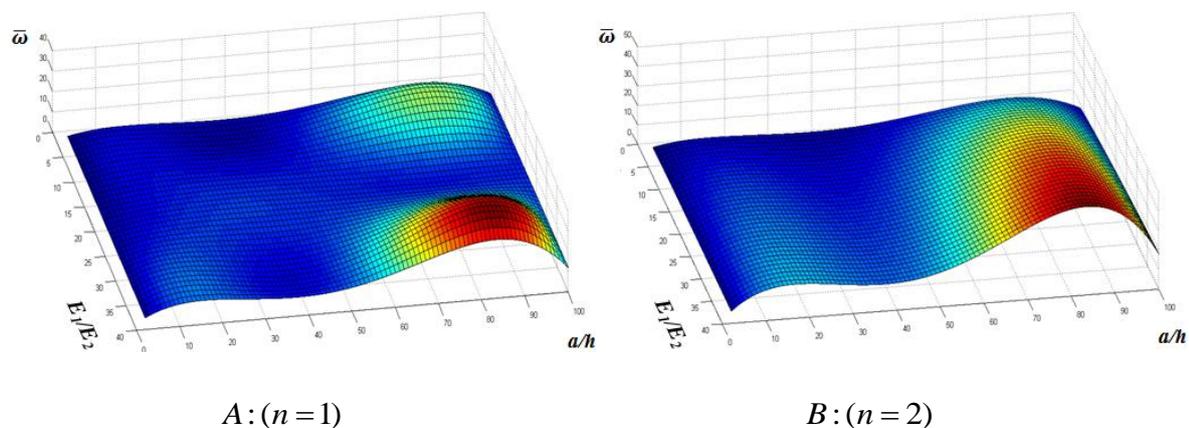
#### II.3.7.1 Cas d'une plaques en composites stratifiées croisées antisymétrique (matériau

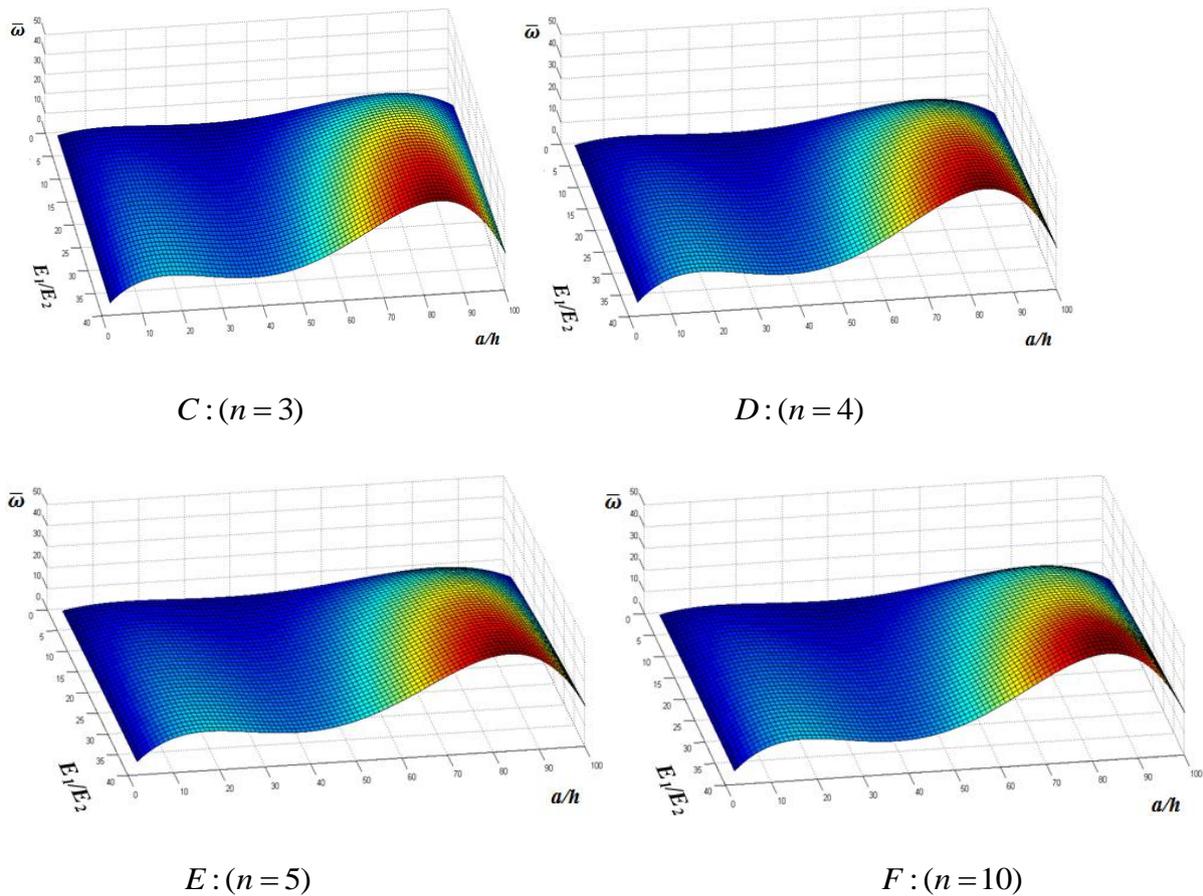
##### 1)(0° / 90°)<sub>n</sub> simplement appuyée

Toutes les couches sont censées avoir les mêmes caractéristiques d'épaisseur, et densité massique du matériau orthotrope dans les axes principaux.

- **Effets du couplage du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$ , du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  :**

Considérons une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques, de forme carrée, nous avons étudié le couplage des effets, du rapport de longueur sur l'épaisseur  $a/h \in [2,100]$ , du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2 \in [3,40]$  et du degré d'orthotropie ( $n = 1; 2; 3; 4; 5; 10$ ). sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques par la méthode des éléments finis sont présents dans la figure II.12.





**Figure II.12 : Variation de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$  et du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a / h$  pour six types de plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $(n = 1; 2; 3; 4; 5; 10)$ .**

### II.3.7.2 Discussions

Les fréquences adimensionnelles sont calculées par la méthode des éléments finis et sont représentées sur les figures II.12.

La fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  croît avec l'augmentation des rapports d'orthotropie  $E_1 / E_2$ , de la longueur sur l'épaisseur et du degré d'orthotropie. Lorsque le degré d'orthotropie dépasse 5, ce dernier n'a aucune influence sur la variation de la fréquence adimensionnelles (voir figures E, F). Ces résultats montrent que les plaques minces sont plus rigides que pour les plaques épaisses du fait de l'effet de cisaillement transverse qui est beaucoup plus important dans les plaques épaisses.

Les plaques fortement orthotropes sont beaucoup plus rigides que les plaques faiblement orthotropes.

#### II.4 Conclusion

- Dans cette partie de l'étude, nous avons développé une théorie raffinée de déformation de cisaillement exponentielle pour les vibrations libres des plaques simplement appuyées en composites stratifiées antisymétrique,
- Cette théorie tient compte d'une distribution exponentielle des contraintes à travers l'épaisseur et vérifie les conditions de frontières (surfaces supérieure et inférieure de la plaque) et sans l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement,
- Dans cette théorie, la fonction de gauchissement a été développée sous la forme de séries non-polynomiales n'utilisant pas le développement limité de Taylor,
- Les fréquences adimensionnelles sont fortement influencées par la variation du rapport d'orthotropie, du degré d'orthotropie et de l'épaisseur de la plaque (rapport de la longueur sur l'épaisseur),
- L'effet du cisaillement influe fortement sur la rigidité des plaques.

# **Chapitre III**

## **Formulation mathématique des vibrations des plaques en matériaux composites**

### III.1 Introduction

Généralement les matériaux composites sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie civile, mécanique et spatiale grâce à leur grande rigidité, leur résistance et aussi à leur faible masse volumique et leur coût de maintenance [73-76].

La théorie classique des plaques (CPT) néglige l'effet de déformation de cisaillement transverse et elle est valable uniquement pour l'étude des plaques minces [25]. Cette théorie sous-estime les flèches et surestime les fréquences pour les plaques modérément épaisses. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances de cette théorie.

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) prend le champ de déplacement comme une variation linéaire au niveau du plan moyen. Cette théorie a été largement utilisée pour l'étude des vibrations libres des plaques [54; 56]. Cette théorie ne vérifie pas les états d'équilibre aux faces inférieure et supérieure des plaques et nécessite des facteurs de correction de cisaillement pour corriger la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur.

La valeur du coefficient de correction de cisaillement est influencée non seulement par la stratification et les paramètres géométriques, mais également par les conditions de chargement et les conditions de frontière.

De nombreuses théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ne prenant pas en compte le coefficient de correction de cisaillement ont été proposées pour l'analyse des plaques [77-80]. Une revue des diverses théories basées sur la déformation de cisaillement transverse des plaques en composites stratifiées a été donnée par plusieurs auteurs [81-84].

Récemment un nouveau modèle simplifié de la théorie de déformation de cisaillement a été développé par Mantari [85] pour les plaques en composites stratifiées et sandwichs.

Dans ce chapitre une formulation mathématique est développée où un nouveau champ de déplacement pour les vibrations libres des plaques en composites stratifiées est proposé. Dans ce modèle la cinématique utilise des limites d'intégrales indéterminées avec seulement quatre variables et les équations du mouvement sont tirées à partir du principe de Hamilton.

La technique de Navier nous a permis d'obtenir les solutions analytiques pour les plaques en composites stratifiées croisées antisymétriques et équilibrées antisymétriques sur appuis simples.

Les influences des paramètres tels que le rapport d'orthotropie, le rapport de la longueur sur l'épaisseur, le rapport de la largeur sur la longueur et le degré d'orthotropie sur les fréquences adimensionnelles des plaques en composites stratifiées sont examinées.

Les résultats numériques obtenus sont discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité des hypothèses de la théorie proposée dans le cas de l'étude des vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques.

### III.2 Formulation mathématique

Considérons une plaque en composites stratifiées, composée de  $n$  couches élastiques orthotropes, de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées  $x, y, z$ . Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$  et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $\vec{Ox}$ , et  $\vec{Oy}$ , comme indiqué dans la figure.III.1.

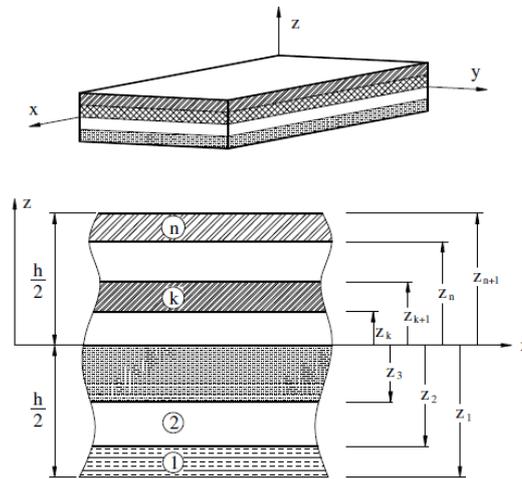


Figure III.1 : Représentation de la plaque en composites stratifiées et des systèmes de coordonnées.

#### III.2.1 Cinématique

Dans cette partie, des hypothèses de simplification sont adoptées à la nouvelle théorie raffinée à quatre variables existantes de sorte que le nombre d'inconnus soit réduit. Le champ de déplacement est exprimé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Où

$u, v$  et  $w$  : sont les déplacements dans les directions  $x, y, z$ .

$u_0, v_0, w_0, \phi_x$  et  $\phi_y$  : sont les cinq déplacements généralisés.

$f(z)$  : est la fonction de gauchissement représente une variation des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. Cette fonction permet de satisfaire les contraintes de cisaillement transversales nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

A partir de cette hypothèse nous avons défini :  $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y, t) dx$  et  $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y, t) dy$ .

La cinématique de la théorie proposée peut être exprimée sous une forme plus simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

Où

$u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t)$  et  $\theta(x, y, t)$  : sont les inconnues des déplacements de la surface moyenne de la plaque en composites stratifiées.

$k_1, k_2$  : sont deux constantes dépendent de la géométrie.

Dans ce travail, les intégrales utilisées sont indéterminées et la fonction de gauchissement pour la nouvelle théorie raffinée à quatre variables est obtenue par la relation (III.3):

$$f(z) = z \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

Le champ des déformations associé au champ des déplacements de l'équation (II.2) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_x^0 \\ \mathcal{E}_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{array} \right\} + f(z) \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = g(z) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} \quad (\text{III.4})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5-a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5-b})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{5}{4} - 5 \frac{z^2}{h^2} \quad (\text{III.6})$$

Les intégrales utilisées dans les relations ci-dessus seront résolues par la solution de Navier et peuvent être exprimées par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.7-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}$$

Où

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.7-b})$$

$$\int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Où

$A'$  et  $B'$  : sont deux paramètres définis selon le type de la solution utilisée.

Dans ce cas  $A'$  et  $B'$  sont exprimés par:

$$\begin{cases} A' = -\frac{1}{\alpha^2} \\ B' = -\frac{1}{\beta^2} \end{cases} \quad (\text{III.8-a})$$

Où

$$\begin{cases} k_1 = \alpha^2 \\ k_2 = \beta^2 \end{cases} \quad (\text{III.8-b})$$

Où

$\alpha$  et  $\beta$  : sont définis dans l'expression des solutions des déplacements de Navier.

### III.2.2 Equations constitutives

On considère que le plan de symétrie de chaque couche élastique est parallèle au plan  $(\overline{Ox}, \overline{Oy})$ , les équations constitutives peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont respectivement les composants des contraintes et des déformations dans le repère principal  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$Q_{ij}$  : sont les constantes de rigidité du matériau dans le repère principal définies par la relation (III.10).

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où

$E_1$  et  $E_2$  : sont les modules de Young dans les directions principales  $\overline{ox}$  et  $\overline{oy}$ .

$\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  : sont les coefficients de Poisson.

$G_{12}, G_{13}$  et  $G_{23}$  : sont les modules de cisaillement.

La relation contrainte-déformation pour la couche  $k$  des stratifiées dans le repère local est exprimée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.11})$$

Où

$\bar{Q}_{ij}^{-k}$  : sont les constantes de rigidité du matériau dans le repère local du stratifié.

Les équations constitutives de chaque couche élastique des stratifiés dans le repère local  $(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  doit être transformées aux repère principal du stratifié  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

La relation de la transformation des stratifiés au repère local vers le repère principal est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{-k} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12}^{-k} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{16}^{-k} &= Q_{11} \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + Q_{12} (\cos \theta_k \sin^3 \theta_k - \cos^3 \theta_k \sin \theta_k) - Q_{22} \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \\ &\quad - 2Q_{66} \cos \theta_k \sin \theta_k (\cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k) \\ \bar{Q}_{26}^{-k} &= Q_{11} \cos \theta_k \sin^3 \theta_k + Q_{12} (\cos^3 \theta_k \sin \theta_k - \cos \theta_k \sin^3 \theta_k) - Q_{22} \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ &\quad + 2Q_{66} \cos \theta_k \sin \theta_k (\cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k) \\ \bar{Q}_{22}^{-k} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{44}^{-k} &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k \\ \bar{Q}_{45}^{-k} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \bar{Q}_{55}^{-k} &= Q_{55} \cos^2 \theta_k + Q_{44} \sin^2 \theta_k \\ \bar{Q}_{66}^{-k} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où

$\theta_k$  : est l'angle formé par les axes du repère principal des stratifiés avec les axes du repère local de chaque couche.

### III.2.3 Equations du mouvement

En utilisant le principe de Hamilton ; les équations du mouvement pour une plaque en composites stratifiées sont :

$$\int_0^t (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où

$t$  : est le temps.

$\delta U$  : est la variation virtuelle de l'énergie de déformation de la plaque en composites stratifiées.

$\delta K$  : est la variation virtuelle de l'énergie cinétique de la plaque en composites stratifiées.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque en composites stratifiées est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Où

$A$  : est la surface transversale de la plaque en composites stratifiées.

$N, M$  et  $S$  : sont les résultantes des efforts et des moments définis comme suit:

$$\left( N_i, M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z)) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy) \quad (\text{III.15-a})$$

Et

$$\left( S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III.15-b})$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque en composites stratifiées peut être calculée comme suit:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho dV \\
&= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
&+ J_1 \left( (k_1 A') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left( \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\
&+ I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( (k_1 A')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\
&\left. - J_2 \left( (k_1 A') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Où

L'indice  $\dot{\phantom{x}}$  (point supérieur) indique par convention la dérivée par rapport à la variable de temps  $t$ .

$\rho$  : est la densité massique du matériau en composite stratifié.

$(I_i, J_i$  et  $K_i)$  : sont les moments des inerties par rapport au plan moyen  $(\vec{ox}, \vec{oy})$  de l'élément de plaque en composites stratifiées localisé au point  $(x, y)$  et ayant des côtés égaux à l'unité.

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, z, z^2) dz \tag{III.17-a}$$

Et

$$(J_1, J_2, K_2) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (f(z), z f(z), (f(z))^2) dz \tag{III.17-b}$$

Substituant les relations  $\delta U$  et  $\delta K$  des équations. (II.14) et (II.16) dans l'équation (II.13) et en intégrant par partie et en séparant les coefficients  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$  et  $\delta w_s$ ; On obtient les équations du mouvement à l'équilibre dynamique de la plaque en composites stratifiées librement oscillante qui sont données par les équations (III-18):

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
& - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
\delta \theta : \quad & -k_1 M_x^S - k_2 M_y^S - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^S}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^S}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^S}{\partial y} = -J_1 \left( k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
& - K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.18}$$

En remplaçant l'équation (III.11) dans l'équation (III.15) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque en composites stratifiées ; les résultantes des efforts et des moments sont exprimées par les équations (III-19):

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^S \\ M_y^S \\ M_{xy}^S \end{array} \right\} &= \left[ \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^S \\ k_y^S \\ k_{xy}^S \end{array} \right\} \\
& \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} D_{11}^S & D_{12}^S & D_{16}^S \\ D_{12}^S & D_{22}^S & D_{26}^S \\ D_{16}^S & D_{26}^S & D_{66}^S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^S \\ k_y^S \\ k_{xy}^S \end{array} \right\} \\
& \left[ \begin{array}{ccc} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} D_{11}^S & D_{12}^S & D_{16}^S \\ D_{12}^S & D_{22}^S & D_{26}^S \\ D_{16}^S & D_{26}^S & D_{66}^S \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} H_{11}^S & H_{12}^S & H_{16}^S \\ H_{12}^S & H_{22}^S & H_{26}^S \\ H_{16}^S & H_{26}^S & H_{66}^S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} k_x^S \\ k_y^S \\ k_{xy}^S \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{III.19-a}$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{yz}^S \\ S_{xz}^S \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} A_{44}^S & A_{45}^S \\ A_{45}^S & A_{55}^S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} \tag{III.19-b}$$

Où les composants de la rigidité sont calculés par les relations (III-20) :

$$(A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^S, D_{ij}, D_{ij}^S, H_{ij}^S) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij} (1, z, f(z), z^2, z f(z), (f(z))^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \tag{III.20-a}$$

$$A_{ij}^S = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij} (g(z))^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \tag{III.20-b}$$

L'équation (III.18) peut être exprimée en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_0$  et  $\theta$ ) en remplaçant les résultantes des efforts et des moments des équations (III.19) dans les équations (III.18) on obtient les équations du mouvement (III-21):

$$\begin{aligned}
& A_{11}d_{11}u_0 + 2A_{16}d_{12}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 + A_{26}d_{22}v_0 + A_{16}d_{11}v_0 \\
& - (B_{11}d_{111}w_0 + 3B_{16}d_{112}w_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + B_{26}d_{222}w_0) \\
& + (k_1A' + k_2B')B_{66}^S d_{122}\theta + (k_1B_{11}^S + k_2B_{12}^S) d_1\theta + (k_1A' + k_2B')B_{16}^S d_{112}\theta \\
& - (k_1B_{16}^S + k_2B_{26}^S)d_2\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + A'J_1k_1d_1\ddot{\theta},
\end{aligned} \tag{III.21-a}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11}d_{16}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + A_{26}d_{22}u_0 + A_{66}d_{22}v_0 + 2A_{26}d_{12}v_0 + A_{22}d_{22}v_0 \\
& - (B_{16}d_{111}w_0 + 3B_{26}d_{122}w_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + B_{22}d_{222}w_0) \\
& + (k_1A' + k_2B')B_{66}^S d_{112}\theta + (k_2B_{22}^S + k_1B_{12}^S) d_2\theta + (k_1A' + k_2B')B_{26}^S d_{122}\theta \\
& + (k_1B_{16}^S + k_2B_{26}^S)d_1\theta = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + B'J_1k_2d_2\ddot{\theta},
\end{aligned} \tag{III.21-b}$$

$$\begin{aligned}
& (B_{11}d_{111}u_0 + 3B_{16}d_{112}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + B_{26}d_{222}u_0) \\
& + (B_{16}d_{111}v_0 + 3B_{26}d_{122}v_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0) \\
& - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 - 4D_{16}d_{1112}w_0 - 4D_{26}d_{1222}w_0 \\
& + (k_1D_{11}^S + k_2D_{12}^S) d_{11}\theta + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^S d_{1122}\theta + (k_1D_{12}^S + k_2D_{22}^S) d_{22}\theta + 2(k_1D_{16}^S + k_2D_{26}^S) d_{12}\theta \\
& + (k_1A' + k_2B')D_{16}^S d_{1112}\theta + (k_1A' + k_2B')D_{26}^S d_{1222}\theta = I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) \\
& - I_2\nabla^2\ddot{w}_0 + J_2(A'k_1d_{11}\ddot{\theta} + B'k_2d_{22}\ddot{\theta})
\end{aligned} \tag{III.21-c}$$

$$\begin{aligned}
& - ((k_1A' + k_2B')B_{66}^S d_{122}u_0 + (k_1B_{11}^S + k_2B_{12}^S) d_1u_0 + (k_1A' + k_2B')B_{16}^S d_{112}u_0 - (k_1B_{16}^S + k_2B_{26}^S)d_2u_0) \\
& - ((k_1A' + k_2B')B_{66}^S d_{112}v_0 + (k_2B_{22}^S + k_1B_{12}^S) d_2v_0 + (k_1A' + k_2B')B_{26}^S d_{122}v_0 + (k_1B_{16}^S + k_2B_{26}^S)d_1v_0) \\
& + (k_1D_{11}^S + k_2D_{12}^S) d_{11}w_0 + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^S d_{1122}w_0 + (k_1D_{12}^S + k_2D_{22}^S) d_{22}w_0 + 2(k_1D_{16}^S + k_2D_{26}^S) \\
& d_{12}w_0 + (k_1A' + k_2B')D_{16}^S d_{1112}w_0 + (k_1A' + k_2B')D_{26}^S d_{1222}w_0 - H_{11}^S k_1\theta - H_{22}^S k_2\theta - 2H_{12}^S k_1k_2\theta \\
& - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^S d_{1122}\theta - 2(k_1A' + k_2B')(H_{16}^S + H_{26}^S)d_{12}\theta + A_{44}^S (k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^S (k_1A')^2 d_{11}\theta \\
& + 2A_{45}^S k_1k_2 A'B'd_{12}\theta = -J_1(k_1A'd_1\ddot{u}_0 + k_2B'd_2\ddot{v}_0) - K_2((k_1A')^2 d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2 d_{22}\ddot{\theta}) \\
& + J_2(k_1A'd_{11}\ddot{w}_0 + k_2B'd_{22}\ddot{w}_0)
\end{aligned} \tag{III.21-d}$$

Où

$d_{ij}, d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  : sont les opérateurs différentiels donnés par :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \text{ et } d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad (i, j, l, m = 1, 2).$$

### III.3 Solutions exactes pour les stratifiés antisymétriques

La solution exacte des équations différentielles partielles (Equation III.21 a-d) pour les plaques rectangulaires simplement appuyées sont calculées par la méthode de Navier.

- Pour les plaques en composites stratifiées croisées antisymétriques ; les composantes de rigidité suivants sont nulles :

$$A_{16} = A_{26} = B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (\text{III.22-a})$$

$$B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = A_{45}^s = 0$$

- Pour les plaques en composites stratifiées équilibrées antisymétriques ; les composantes de rigidité suivants sont nulles :

$$A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (\text{III.22-b})$$

$$B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0$$

Les conditions aux limites retenues pour la présente théorie de déformation de cisaillement développée sont données par les équations (III-23):

- Pour un stratifié croisé antisymétrique  $(0^\circ / 90^\circ)_n$

$$v_0(0, y) = w_0(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_0(0, y) = \int \theta(0, y) dx = 0$$

$$v_0(a, y) = w_0(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_0(a, y) = \int \theta(a, y) dx = 0$$

$$N_x(0, y) = M_b^x(0, y) = M_s^x(0, y) = N_x(a, y) = M_b^x(a, y) = M_s^x(a, y) = 0 \quad (\text{III.23-a})$$

$$u_0(x, 0) = w_0(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, 0) = \int \theta(x, 0) dx = 0$$

$$u_0(x, b) = w_0(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, b) = \int \theta(x, b) dx = 0$$

$$N_y(x, 0) = M_b^y(x, 0) = M_s^y(x, 0) = N_y(x, b) = M_b^y(x, b) = M_s^y(x, b) = 0$$

- Pour un stratifié équilibré antisymétrique  $(-45^\circ / 45^\circ)_n$

$$\begin{aligned}
 u_0(0, y) = w_0(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_0(0, y) = \int \theta(0, y) dx = 0 \\
 u_0(a, y) = w_0(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} w_0(a, y) = \int \theta(a, y) dx = 0 \\
 N_{xy}(0, y) = M_b^x(0, y) = M_s^x(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_b^x(a, y) = M_s^x(a, y) = 0 \\
 v_0(x, 0) = w_0(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, 0) = \int \theta(x, 0) dx = 0 \\
 v_0(x, b) = w_0(x, b) = \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, b) = \int \theta(x, b) dx = 0 \\
 N_{xy}(x, 0) = M_b^y(x, 0) = M_s^y(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_b^y(x, b) = M_s^y(x, b) = 0
 \end{aligned} \tag{III.23-b}$$

En se basant sur le procédé de Navier, les solutions des déplacements utilisées respectant les conditions de frontière des plaques en composites stratifiées simplement appuyées sont données par les équations (III-24):

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad \text{Croisé antisymétrique} \tag{III.24-a}$$

Et

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad \text{Équilibré antisymétrique} \tag{III.24-b}$$

Où

$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ , et  $X_{mn}$  : sont des coefficients arbitraires.

$\omega$  : est la fréquence propre du système.

$\alpha, \beta$  : sont exprimé par :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m\pi}{a} \\ \beta = \frac{n\pi}{b} \end{cases} \tag{III.25}$$

Substituant l'équation (III.24) dans l'équation (III.21), la solution de Navier des stratifiés croisés antisymétriques et équilibrés antisymétriques peut être écrite par le système différentielle donné par:

$$\left( \begin{array}{cccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{array} \right) - \omega^2 \left( \begin{array}{cccc} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{array} \right) \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (\text{III.26})$$

### III.4 Résultats et discussions

Dans cette partie; on vérifie les hypothèses émises de la nouvelle théorie raffinée à quatre variables développée pour les réponses dynamiques et faire une comparaison entre les résultats obtenus à partir de cette théorie et les théories classiques des plaques, du premier ordre, du troisième ordre, d'ordre élevé est établie à travers des applications sur deux matériaux 1 et 2 que nous développerons. La description des différents modèles des déplacements est présentée dans le tableau III.1.

Model	Théorie	Variables inconnues
CLPT	Théorie classique des plaques	3
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre [54]	5
TSDT	Théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre [25]	5
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé [62]	12
Présent	La nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement	4

**Tableau III.1: Modèle de déplacement.**

Les propriétés des matériaux utilisés dans ces applications ont été données par le tableau II-2 du chapitre II.

Les réponses vibratoires des plaques en stratifiées croisées antisymétriques et équilibrées antisymétriques nous permettent de déterminer les fréquences adimensionnelles.

Les influences des paramètres tels que le rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$ , le rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$ , le rapport de largeur sur la longueur  $a/b$  et le degré d'orthotropie  $n$  sur les vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques sont examinées à partir des deux matériaux 1 et 2.

Les résultats trouvés en utilisant la présente théorie sont comparés aux résultats obtenus par divers modèles des plaques et de solutions exactes de théorie de l'élasticité 3D.

### III.4.1 Cas d'une plaque en composites stratifiées croisées antisymétriques (matériau 1)

$(0^\circ/90^\circ)_n$  simplement appuyée (voir figure 2 chapitre II).

- **Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h=5$  :**

Nous étudions les effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques et ceux de Noor [63] pour les solutions exactes dans le tableau III.2.

$n$	Théorie	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
<b>1</b>	Exact <sup>(*)</sup>	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	TSDT	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	FSDT	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
	Présent	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
<b>2</b>	Exact <sup>(*)</sup>	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6789
	TSDT	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	FSDT	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
	Présent	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
<b>3</b>	Exact <sup>(*)</sup>	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
	TSDT	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	FSDT	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
	Présent	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
<b>5</b>	Exact <sup>(*)</sup>	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	TSDT	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	FSDT	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
	Présent	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730

<sup>(\*)</sup>Valeurs prises de Noor [63].

**Tableau III.2: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h=5$ .**

Le tableau III.2 montre une bonne concordance entre les théories de déformations de cisaillement et la présente théorie développée. Les résultats calculés par la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la théorie proposée sont les plus proches.

La figure III.2 montre l'influence du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la fréquence adimensionnelle pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques à deux couches  $(0^\circ/90^\circ)_1$  et dix couches  $(0^\circ/90^\circ)_5$  avec  $a/h=5$ . Ce résultat montre que lorsque le degré d'orthotropie  $n$  augmente, la fréquence adimensionnelle sera identique et les valeurs obtenues sont les mêmes pour toutes les théories sauf pour les valeurs obtenues par la théorie classique qui ne tient pas compte de l'effet de la déformation de cisaillement transverse.

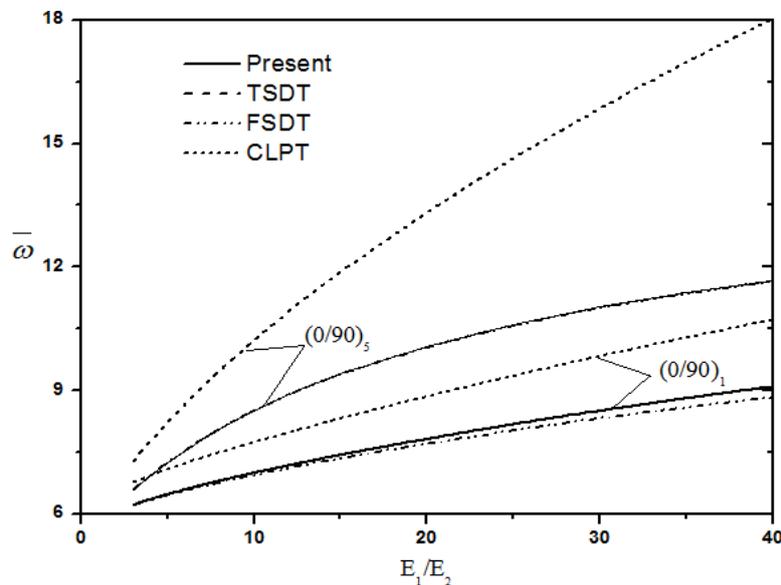


Figure III.2 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h=5$ .

- **Effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2 = 40$ :**

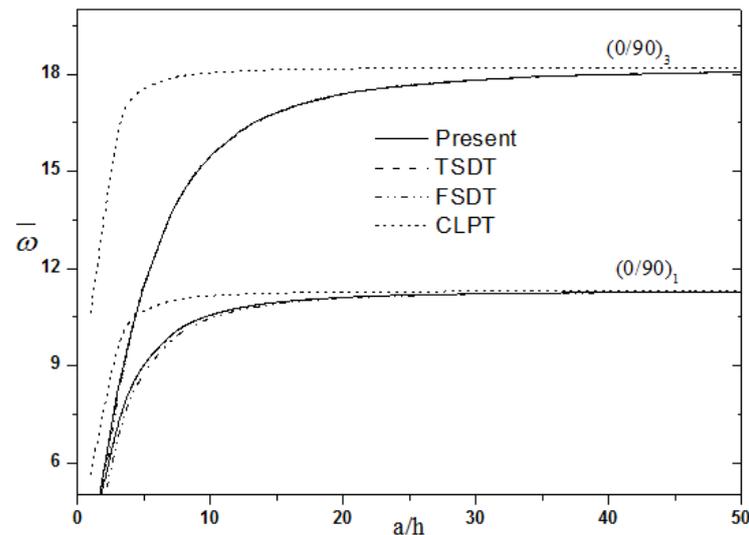
Nous étudions les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques dans le tableau III.3.

$n$	Théorie	$a/h$					
		2	4	10	20	50	100
<b>1</b>	TSDT	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	FSDT	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	CLPT	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
	Présent	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
<b>2</b>	TSDT	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	FSDT	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	CLPT	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3082
	Présent	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
<b>3</b>	TSDT	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	FSDT	5.5992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	CLPT	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
	Présent	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
<b>5</b>	TSDT	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	FSDT	5.7140	10.0628	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	CLPT	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457
	Présent	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097

**Tableau III.3: les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1/E_2 = 40$ .**

Les fréquences adimensionnelles calculées par les différentes théories des plaques comparées à ceux obtenues par la présente théorie sont présentées dans le tableau III.3. On remarque que les résultats obtenus par la théorie proposée et la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) sont en bon accord.

La figure III.3 montre les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du degré d'orthotropie  $n$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour des plaques carrées en composites stratifiées croisées antisymétriques à deux couches  $(0^\circ/90^\circ)_1$  et six couches  $(0^\circ/90^\circ)_3$ , avec  $E_1/E_2 = 40$ .



**Figure III.3 :** Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $E_1/E_2 = 40$ .

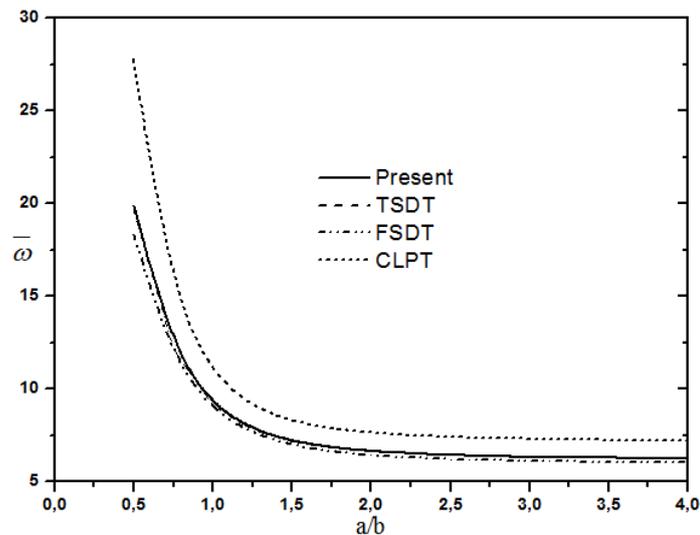
Ce résultat montre que lorsque le rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  augmente, la fréquence adimensionnelle augmente et les valeurs obtenues sont les mêmes pour toutes les théories, ce résultat confirme qu'on est en présence de plaques minces. Lorsque le degré d'orthotropie  $n$  augmente les valeurs obtenues sont identiques sauf pour les valeurs obtenues par la théorie classique qui ne tient pas compte de l'effet de la déformation de cisaillement transverse.

Pour des rapports de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  inférieur à 10, l'effet de déformation de cisaillement transverse est très important ceci démontre qu'on est en présence de plaques épaisses, au-delà d'une valeur de  $a/h = 10$  et pour les degrés d'orthotropie élevés, les valeurs de la fréquence adimensionnelle sont presque constantes et identiques pour toutes les théories exception faites pour la théorie classique qui ne prend pas en compte l'effet de déformation de cisaillement transverse.

Lorsque le degré d'orthotropie augmente, la différence entre les valeurs de la fréquence adimensionnelle obtenues par les théories (actuelle, FSDT, TSDT) diminue de manière significative sauf pour la théorie classique (CLPT).

- **Effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h=5$ , un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2=40$  et un degré d'orthotropie  $n=1$  :**

Nous étudions l'effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques dans la figure III.4.



**Figure III.4 : Effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque rectangulaire en composites stratifiées croisées antisymétriques avec  $a/h=5$ ,  $E_1/E_2=40$  et  $n=1$ .**

Une première observation tirée à la lecture de la figure III-4, l'influence du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  est important pour les plaques épaisses où l'effet de déformation de cisaillement transverse est plus important.

Lorsque le rapport  $a/b$  augmente, la différence des valeurs calculées de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  entre la théorie actuelle et la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) diminue de manière significative.

### III.4.2 Cas d'une plaque en composites stratifiés équilibrés antisymétriques (matériau 2) $(-45^\circ / 45^\circ)_n$ simplement appuyée (voir figure 7 chapitre II).

- **Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2 = 40$  et un degré d'orthotropie  $n = 5$ :**

Nous étudions l'effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$ . Les fréquences adimensionnelles prévues en utilisant divers modèles des plaques sont représentées dans le tableau III.4.

$a/h$	Théorie	$\bar{\omega}$
<b>5</b>	TSDT	10.1537
	FSDT	10.1288
	CLPT	15.4661
	Présent	10.1537
<b>10</b>	TSDT	13.6078
	FSDT	13.614
	CLPT	15.846
	Présent	13.6078
<b>100</b>	TSDT	15.9482
	FSDT	15.9484
	CLPT	15.9775
	Présent	15.9482

**Tableau III.4:** les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée à dix couches des stratifiées équilibrés antisymétriques  $(-45^\circ / 45^\circ)_5$  avec  $E_1/E_2 = 40$ .

Le tableau III.4 montre que les résultats obtenus par la théorie actuelle sont proches de valeurs obtenues par la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT).

L'influence du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrés antisymétriques à deux couches  $(-45^\circ / 45^\circ)$  avec  $E_1/E_2 = 40$  est présentée sur la figure III.5.

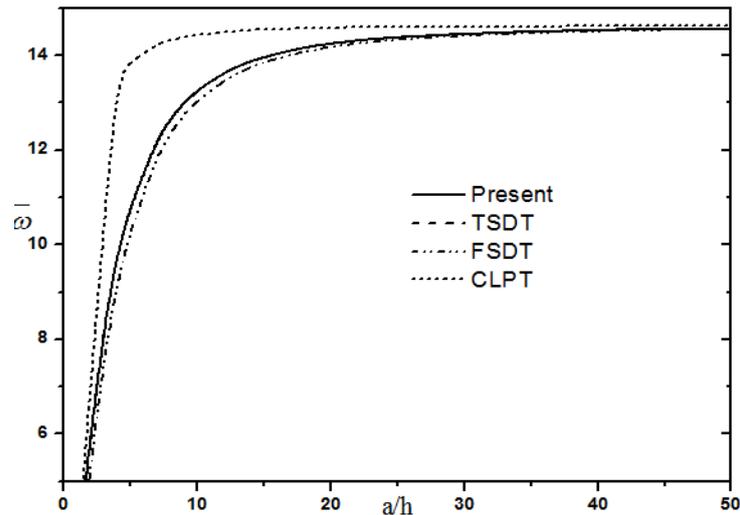


Figure III.5 : Effet du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiés équilibrés antisymétriques à deux couche avec  $E_1/E_2 = 40$ .

- Effets du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  et du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un degré d'orthotropie  $n=1$ :

Les effets du rapport de la longueur sur l'épaisseur  $a/h$  et du rapport d'orthotrope  $E_1/E_2$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  sont examinés. Les fréquences adimensionnelles calculées en utilisant diverses théories des plaques sont données dans le tableau III.5.

$E_1/E_2$	$a/h$	Théorie				
		Présent	HSST <sup>(a)</sup>	TSDT	FSDT	CLPT
<b>3</b>	4	6.0861	6.1223	6.0861	6.0665	6.9251
	10	7.0739	7.1056	7.0739	7.0700	7.2699
	20	7.2705	7.3001	7.2705	7.2694	7.3228
	50	7.3293	7.3583	7.3293	7.3291	7.3378
	100	7.3378	7.3666	7.3378	7.3378	7.3400
<b>10</b>	4	7.3470	7.2647	7.3470	7.2169	8.7950
	10	8.9660	8.9893	8.9660	8.9324	9.3444
	20	9.3266	9.3265	9.3266	9.3173	9.4304
	50	9.4377	9.4377	9.4377	9.4362	9.4548
	100	9.4540	9.5123	9.4540	9.4537	9.4583
<b>20</b>	4	8.4152	8.0490	8.4152	8.1185	10.6314
	10	10.7151	10.6412	10.7151	10.6265	11.3406
	20	11.2772	11.2975	11.2772	11.2517	11.4525
	50	11.4553	11.5074	11.4553	11.4511	11.4844
	100	11.4816	11.5385	11.4816	11.4806	11.4889

<b>30</b>	4	9.1752	8.5212	9.1752	8.7213	12.1586
	10	12.0971	11.8926	12.0971	11.9456	12.9888
	20	12.8659	12.8422	12.8659	12.8208	13.1203
	50	13.1153	13.1566	13.1153	13.1077	13.1577
	100	13.1524	12.2035	13.1524	13.1505	13.1631
<b>40</b>	4	9.7594	8.8426	9.7594	9.1609	13.5059
	10	13.2631	12.9115	13.2631	13.0439	14.4392
	20	14.2463	14.1705	14.2463	14.1790	14.5873
	50	14.5724	14.6012	14.5724	14.5608	14.6295
	100	14.6212	14.6668	14.6212	14.6183	14.6356

<sup>(a)</sup> Valeurs prises de Swaminathan et Patil [62].

**Tableau III.5: Les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques  $(-45^\circ / 45^\circ)_1$ .**

Pour les valeurs élevées du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$ , on constate que les résultats obtenus par la théorie proposée pour les plaques en composites stratifiées épaisses sont différents à ceux obtenus par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) [62].

Les inconnues dans la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont au nombre de douze et elles ne sont que cinq pour la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), Théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). On peut conclure que la théorie proposée contenant quatre variables, est non seulement précise mais également simple pour prédire les fréquences adimensionnelles des plaques en composites stratifiées antisymétriques.

L'influence du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couche  $(-45^\circ / 45^\circ)$  avec  $a/h = 5$  est donnée par la figure III.6.

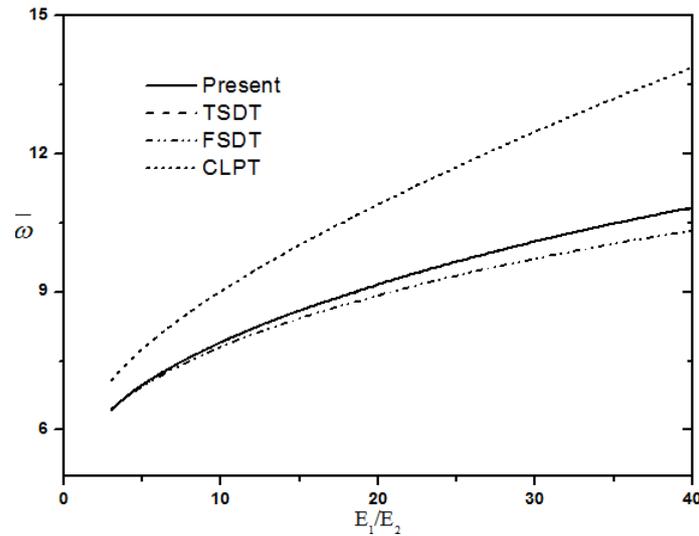


Figure III.6 : Effet du rapport d'orthotropie  $E_1 / E_2$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque carrée en composites stratifiées équilibrées antisymétriques à deux couches ( $-45^\circ / 45^\circ$ ) avec  $a / h = 5$ .

- **Effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  pour un rapport de la largeur sur l'épaisseur  $b/h = 5$ , un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2 = 40$  et un degré d'orthotropie  $n = 1$  :**

L'effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  est examiné. Les résultats numériques sont présentés et comparés à ceux obtenus par les différentes théories des plaques dans la figure III.7.

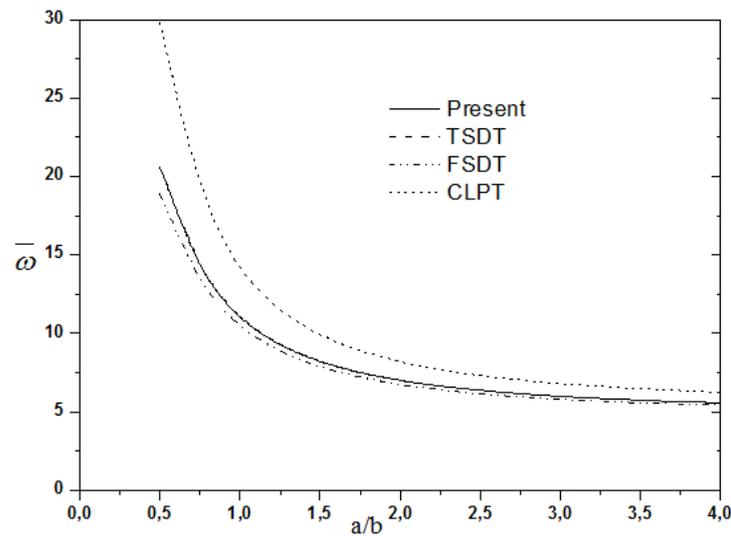


Figure III.7 : Effet du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles d'une plaque rectangulaire en composites stratifiées équilibrées antisymétriques avec  $b/h = 5$ ,  $E_1/E_2 = 40$  et  $n = 1$ .

La figure III.7 montre l'influence du rapport de la longueur sur la largeur  $a/b$  sur les fréquences adimensionnelles est considérable pour les plaques épaisses où l'effet de déformation de cisaillement transverse est plus important. On remarque que lorsque le rapport  $a/b$  augmente, la différence entre la présente théorie et la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) diminue de manière significative.

### III.5 Conclusion

- Dans cette formulation, nous avons proposé une version originale de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSST) pour les vibrations libres des plaques simplement appuyées en composites stratifiées antisymétriques,
- Cette théorie tient compte d'une distribution non linéaire des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions de contraintes de cisaillement transversales nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans employer le facteur de correction de cisaillement,
- Les hypothèses de simplification de la nouvelle théorie proposée en réduisant le nombre d'inconnus ce qui implique une réduction des équations du mouvement rendant l'utilisation de cette théorie simple et efficace,
- Dans cette théorie proposée le temps de calcul est réduit, ce qui est une amélioration sur le coût informatique et numérique en raison du nombre de degrés de liberté réduit.

# **Conclusion générale et Perspectives**

- Une théorie raffinée de déformation de cisaillement exponentielle pour les vibrations libres des plaques simplement appuyées en matériaux composites stratifiées antisymétriques a été développée,
- Cette théorie tient compte d'une distribution exponentielle des contraintes à travers l'épaisseur et vérifie les conditions de frontières (surfaces supérieure et inférieure de la plaque) et sans l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement,
- Dans cette théorie, la fonction de gauchissement a été développée sous la forme de séries non-polynomiales n'utilisant pas le développement limité de Taylor,
- Une formulation mathématique d'une version originale de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) pour les vibrations libres des plaques simplement appuyées en composites stratifiées antisymétriques a été proposée,
- Cette formulation tient compte d'une distribution non linéaire des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions de contraintes de cisaillement transversales nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans employer le facteur de correction de cisaillement,
- Les hypothèses de simplification de la nouvelle théorie proposée en réduisant le nombre d'inconnus ce qui implique une réduction des équations du mouvement rendant l'utilisation de cette théorie simple et efficace,
- Dans ces théories proposées le temps de calcul est réduit, ce qui est une amélioration sur le coût informatique et numérique en raison du nombre de degrés de liberté réduit,
- Les effets de la variation des divers paramètres tel que (le degré d'orthotropie, le rapport d'orthotropie, le rapport de la longueur sur l'épaisseur et le rapport de la longueur sur la largeur) sur les vibrations libres des plaques en composites stratifiées antisymétriques sont pris en compte. Les résultats obtenus par les théories développées comparés à ceux obtenus par les autres théories sont en bon accord avec un temps de calcul réduit,
- Les fréquences adimensionnelles sont fortement influencées par la variation du rapport d'orthotropie, du degré d'orthotropie et de l'épaisseur de la plaque (rapport de la longueur sur l'épaisseur),

- L'effet du cisaillement influe fortement sur la rigidité des plaques.

### **Perspectives**

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ouvrent la voie à nombreux axes de recherches :

Les résultats présentés nous ont permis de valider les méthodes numériques pour le cas des vibrations libres. En perspectives, il est envisagé :

- Le développement de ces théories pour les vibrations amorties et/ou forcées des plaques en matériaux composites est souhaitable.
- La prise en compte d'autres paramètres tels que les effets thermiques, hygrothermiques, thermomécaniques, pression distribué sur la face supérieure de la plaque et la force centrifuge sur les vibrations est envisageable.
- Le développement des éléments finis type coques cylindriques multicouches dans le domaine linéaire et des coques sphériques de forme arbitraire en tenant compte des courbures, afin de modéliser des structures en composites de géométrie plus complexe.

# Références bibliographiques

- [1] Bennai Riadh «Contribution à l'étude de la vibration et la stabilité des structures fonctionnellement graduées» Thèse de Doctorat de Université Hassiba Ben Bou Ali de Chlef, 2016.
- [2] Assarar Mustapha «Etude expérimentale et modélisation du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs» Thèse de Doctorat de Université Maine, 2007.
- [3] Bouyaya Lynda «Analyse numérique du comportement dynamique de structures composites a renforcement fibreux» Thèse de Doctorat de l'université de Mentouri Constantine, 2011.
- [4] Saidi Hayat « Analyse de l'influence du cisaillement transverse et des déformations normales sur le comportement thermomécanique des plaques FGM» Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2015.
- [5] Isaac M. Daniel and Ori Ishai, "Engineering Mechanics of Composite Materials ", Oxford university press (1994).
- [6] Kettaf Fatima Zohra «Contribution à l'étude du voilement des plaques composites» Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2016.
- [7] F. Laurin : Introduction générale sur les matériaux composites, ONERA, par [www.univ.ubs.fr](http://www.univ.ubs.fr),2013.
- [8] Mecheb Ismail «Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique» Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2008.
- [9] Benatta Mohamed Atef «Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé» Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2010.
- [10] Zine ali «Modélisation d'une plaque rectangulaire en composite en vibration sous effet thermique avec variation linéaire d'épaisseur» Mémoire de Magister de l'Ecole Nationale Doctorale de la Mécanique & Ingénierie des Systèmes, de l'université de M'hamed Bougara-Boumerdes, 2011.
- [11] E. Lolive. «Analyse du comportement non linéaire de poutres en matériaux composites sandwichs avec âme en mousse» Thèse de doctorat de l'université de Nantes, 2000.
- [12] Ait Atmane H. « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- [13] Aguib Salah «Identification des propriétés dynamiques et simulation du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites adaptatifs » Thèse de Doctorat de l'université de M'hamed Bougara-Boumerdes, 2014.

- [14] A. E. H. Love, On the small free vibrations and deformations of elastic shells, Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N° 17 p. 491–549.
- [15] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31–38.
- [16] Calcul statique linéaire pour coques, Guide de validation des progiciels de calcul de structure, ICAB.
- [17] Bachir Bouiadjra Rabbab «Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques» Thèse de Doctorat de l'université des Sciences et Techniques d'Oran, 2015.
- [18] E. Reissner, " The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J ApplMech Trans ASME, vol. 12, pp. A69A77 (1945).
- [19] S.P. Timoshenko, " Sur la stabilité des systèmes élastiques", Ann des Points et Chaussees, vol. 13, pp. 496566 ; vol. 16, pp. 73132 (1913).
- [20] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833.
- [21] Anisotropic plate : Rapport technique, NASA. Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380.
- [22] Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502.
- [23] Reddy. J.N, (1984). —A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752.
- [24] Kant.T, K. Swaminathan, (2002). —Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite Structure; 56 (4): 329-344.
- [25] Reddy. J.N, (1997). —Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton.
- [26] Touratier. M, (1991). —An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916.
- [27] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546.

- [28] Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). —Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [29] S.A.Ambartsumyan, "Theory of anisotropic plate", Technomic PublishingCo (1969).
- [30] Kirchhoff, G.R. (1850 a), "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88.
- [31] Kirchhoff,G.R. (1850 b), "Uber die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe", *Poggendorffs Annalen.*, 81, 258–264.
- [32] Levinson, M. (1980), "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, 343–350.
- [33] Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137–146.
- [34] Aydogdu, M. (2009), "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94–101.
- [35] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia (2011), E.A., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247.
- [36] Chorfi Sofiane «analyse des plaques orthotropes minces sous l’effet des conditions extérieures» Mémoire de Magister de l’Ecole Nationale Doctorale de la Mécanique de Construction, de l’université Mentouri Constantine, 2010.
- [37] Bonnet, M., Constantinescu, A., Bui, H.D. Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité. *Journal Mécanique & Industries* 4 (2003) 687–697.
- [38] R.W Clough, J Penzin « dynamique des structures » Tome 1.
- [39] Romain Brault «Étude du comportement mécanique des matériaux composites par corrélation volumique : Application à l'analyse des effets du cisaillement transverse» Thèse de Doctorat de l’université de Toulouse, 2013.
- [40] Alexis Castel «Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants» Thèse de Doctorat de l’université de Bourgogne, 2013.
- [41] Maurice Lévy « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3.3 (1877), p. 219–306.
- [42] N. J. Pagano. « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». en. In : *Journal of Composite Materials* 3.3 (juil. 1969), p. 398–411. ISSN : 0021- 9983, 1530-793X.

- [43] N. J. Pagano « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.1 (jan. 1970), p. 20– 34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.
- [44] N. J. Pagano « Influence of Shear Coupling in Cylindrical. Bending of Anisotropic Laminates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.3 (juil. 1970), p. 330–343. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.
- [45] S. Srinivas, Akella Kameswara RAO et C. V. Joga RAO. « Flexure of Simply Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates ». en. In : *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 49.8 (1969), p. 449–458. ISSN : 1521-4001.
- [46] S. Srinivas et A.K. Rao. « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.11 (nov. 1970), p. 1463–1481. ISSN : 0020-7683.
- [47] S. Srinivas, C.V. Joga Rao et A.K. Rao. « An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 12.2 (juin 1970), p. 187–199. ISSN : 0022-460X.
- [48] S. V. Kulkarni et N. J. Pagano « Dynamic characteristics of composite laminates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 1 (1972), p. 127–143.
- [49] K. J. Reddy, K. Vijayakumar et K. S. Nagaraja. « New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates ». In : *AIAA Journal* 29.11 (nov. 1991), p. 1960–1966. ISSN : 0001-1452, 1533-385X.
- [50] Ahmed K. Noor et W. Scott Burton « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 59.4 (1992), p. 868. ISSN : 00218936.
- [51] O. Beslin et J. Nicolas. « A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (1997), p. 633–655. ISSN : 0022-460X.
- [52] Yves Debard «Méthode des éléments finis : élasticité plane » Université du Mans Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle 24 mars 2006 29 mars 2011.
- [53] Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, **49**(6), 629-640.
- [54] Whitney, J.M. and Pagano, N.J. (1970), “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *J. Appl. Mech.—T ASME*, **37**(4), 1031-1036.

- [55] Noor, A.K. and Burton, W.S. (1989), "Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates", *Compos. Struct.* **11**(3), 183-204.
- [56] Khdeir, A.A. (1989a), "Comparison between shear deformable and Kirchhoff theories for bending, buckling and vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates", *Compos. Struct.*, **13**(3), 159-172.
- [57] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 626–633.
- [58] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- [59] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.
- [60] Reddy, J.N. (2002), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc.
- [61] Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 17(1), 69-81.
- [62] Swaminathan, K. and Patil, S. (2008), "Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angleply plates", *Compos. Struct.*, **82**(2), 209-216.
- [63] Noor, A.K. (1973), "Free vibrations of multilayered composite plates", *AIAA J*, **11**(7), 1038-1039.
- [64] Noor, A.K. and Burton, W.S. (1990), "Three-dimensional solutions for anti symmetrically laminated anisotropic plates", *J. Appl. Mech.—T ASME*, **57**(1), 182-188.
- [65] Y.M., G.S. Ramtekkar and A.H. Shah, Dynamic analysis of laminated composite plates using a layerwise mixed finite element model, *Compos Struct*, 59, 237-249, 2003.
- [66] Zou, G.P., M. Naghipour and F. Taheri, A nondestructive method for evaluating natural frequency of glued-laminated beams reinforced with GRP, *Nondestructive Testing and Evaluation*, 19, 53-65, 2003.
- [67] Berthelot J-M, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures", 2<sup>ème</sup> Edition, Masson, Paris, 1996.
- [68] J. N. Reddy, "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method," *J. of Sound and Vibration*, **66** (4), 565-576 (1979).

- [69] M. Levinson. An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communication*, vol. 7, pages 343-350, 1980.
- [70] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. *Rapport technique*, NASA, 1981.
- [71].J. N. Reddy and A. A. Khdeir, “Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories,” *AIAAJ*, 27(12), 1808-1817 (1989).
- [72].C. A. Shankara and N. G. Iyengar, “A C0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates,” *J. of Sound and Vibration*, **191** (5), 721-738 (1996).
- [73] Khandan, R., Noroozi, S., Sewell, P. and Vinney, J. (2012), “The development of laminated composite plate theories: A review”, *J. Mater. Sci.*, **47**(16), 5901-5910.
- [74] Grover, N., Singh, B.N. and Maiti, D.K. (2013), “Analytical and finite element modeling of laminated composite and sandwich plates: An assessment of a new shear deformation theory for free vibration response”, *Int. J. Mech. Sci.*, **67**, 89-99.
- [75] Guo, Y., Nagy, A.P. and Grdal, Z. (2014), “A layerwise theory for laminated composites in the framework of isogeometric analysis”, *Compos. Struct.*, **107**, 447-457.
- [76] Mahapatra, T.R., Kar, V.R. and Panda, S.K. (2016), “Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment”, *Int. J. Struct. Stabil. Dyn.*, **16**(3), 1450105.
- [77] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, **39**(9), 2489-2508.
- [78] Akavci, S.S. and Tanrikulu, A.H. (2015), “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Compos. Part B*, **83**, 203-215.
- [79] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.
- [80] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **20**(2), 227-249.
- [81] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2015), “On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results”, *Compos. Struct.*, **129**, 177-201.

- [82] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1143-1165.
- [83] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 409-423.
- [84] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**(4), 423-431.
- [85] Mantari, J.L. and Ore, M. (2015), “Free vibration of single and sandwich laminated composite plates by using a simplified FSDT”, *Compos. Struct.*, **132**, 952-959.