
N° d'ordre :.....

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES - SIDI BEL ABBES

FACULTE DES TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée et soutenue par

Asmaa Fahsi

Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Différents Chargements

M ^r . BENYOUCEF Samir	Professeur	UDL-SBA	Président
M ^r . BOURADA Mohamed	MC A	UDL-SBA	Directeur de la thèse
M ^r . TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Co-encardeur
M ^r . HOUARI Mohammed Sid ahmed	MC A	U. MASCARA	Examineur
M ^r . KACI Abdelhakim	MC A	UDL-SAIDA	Examineur
M ^r . YEGHNEM Redha	MC A	U. SAIDA	Examineur

Année universitaire : 2017-2018

Dédicace

*À ma chère mère,
À mon père,
À mon défunt frère,
À mes deux frères,
À ma sœur,
À mon marie et mes enfants
Abdelilah et Mouayad
À mon oncle habib
Et à tous qui me sont chers.*

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse et directeur du laboratoire Mr. Mohamed BOURADA pour m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant, pour son soutien moral et scientifique efficace et constant, pour sa disponibilité et son écoute.

Je remercie infiniment mon Co-encadreur Pr. Abdelouahed TOUNSI pour son encouragement continu, sa disponibilité, ses conseils pendant ces dernières années, et surtout pour son grand cœur et sa bonne foi en moi.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et acceptation de faire partie de ce jury, d'examiner et de rapporter mon travail.

Je ne serai pas reconnaissante si j'oublie de remercier Pr. Abbas ADDA BEDIA, Mr. Samir BENYOUCEF et Mr. Mohamed BACHIR BOUIADJRA, pour leurs conseils qui ont été très bénéfiques pour moi.

Je remercie aussi mon oncle et mon enseignant Mr. Bouazza FAHSI, pour son encouragement et précieuses orientations pendant toute la période de l'élaboration de ce travail.

Sans oublier l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à ma famille, mes frères **et ma sœur** qui m'ont toujours encouragé. Et je n'oublierai pas ma mère et mon mari qui m'ont apporté toujours leurs soutiens sans faille ; ainsi une partie de cette thèse leurs revient.

Sommaire

1	<i>Dédicace</i>	II
2	Remerciements.....	III
3	Sommaire.....	IV
4	Liste des Figures.....	VII
5	Liste des Tableaux.....	IX
6	Liste des Notations	X
7	Résumé.....	XI
8	Abstract.....	XII
9	ملخص:	XIII
I.	Introduction Générale.....	12
I.	Introduction Générale.....	13
I.	Chapitre 1. Généralités sur les Matériaux FGM.....	17
I.	Chapitre 1. Généralités sur les Matériaux FGM.....	18
I.1	Introduction :	18
I.2	Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	18
I.3	Histoire et Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	21
I.4	Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation).....	23
I.4.1.	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM (loi de puissance) :	24
I.4.2.	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	26
I.4.3.	Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	27
I.5	Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	28
I.6	Conclusion	30
II.	Chapitre II. Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM.....	31
II.	Chapitre II. Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM.....	32

II.1	Introduction.....	32
II.2	Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés :.....	32
II.2.1.	Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)	33
II.3	Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT).....	34
II.3.1.	Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT).....	36
II.4	Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés.....	39
II.5	Des études rapportées sur des plaques FGMs.....	41
II.5.1.	Analyse statique thermo-élastique des plaques FGMs.....	42
II.5.2.	Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs.....	44
II.6	Théorie De L'élasticité 3D.....	47
II.7	Influence des défauts initiaux sur le comportement du flambement.....	49
II.8	Conclusion	51
III.	Chapitre III. Modèle et développement analytique	52
III.	Chapitre III. Modèle et développement analytique	53
III.1	Introduction.....	53
III.2	Géométrie de la plaque :.....	53
III.3	Formulations théoriques.....	54
III.3.1.	Cinématique.....	54
III.3.2.	Les équations Constitutives	56
III.4	Flambement mécanique.....	62
III.5	Flambement thermique	63
III.5.1.	Augmentation uniforme de la température (UTR).....	63
III.5.2.	Répartition linéaire de la température à travers l'épaisseur (LTD).....	64
III.5.3.	Répartition non linéaire de la température à travers l'épaisseur (NTD)	64
III.6	Conclusion	66
IV.	Chapitre IV. Résultats et discussion.....	67
IV.	Chapitre IV. Résultats et discussion.....	68

IV.1	Introduction.....	68
IV.2	Résultats numériques et discussions.....	68
IV.3	Comparaisons pour le flambement mécanique.....	69
IV.3.1.	Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle IV.3.1 69	
IV.4	Comparaisons pour le flambement thermique	74
IV.4.1	Effet de l'indice de puissance sur la charge critique du flambement non dimensionnelle	
IV.4.2	Effet du rapport d'épaisseur sur la température critique du flambement	
IV.5	Conclusion.....	80
I.	Conclusion Générale	81
II.	Conclusion Générale	82
IV.	Références	84

Liste des Figures

Figure I-1 : Illustration de la hiérarchie des matériaux composites	19
Figure I-2 : Exemples des FGMs naturels et autres conçus par l'homme.....	20
Figure I-3 : Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées Yin et.al [2].	22
Figure I-4 : Les champs potentiels de l'application des FGMs.	23
Figure I-5 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.....	24
Figure I-6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	25
Figure I-7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	27
Figure I-8 : Variation du module de Young de la plaque E-FGM	27
Figure I-9 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels koizumi[6].	29
Figure I-10 : La distribution composante des matériaux [8]	29
Figure II-1 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [13].....	34
Figure II-2 : Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin [13].....	35
Figure II-3 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [12].	37
Figure II-4 : Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenue par le modèle développé par Yin et al [44] et le modèle de Mori-Tanaka.	41
Figure II-5 : Flambement local d'une poutre en « L »	50
Figure III-1 : Système des coordonnées et la géométrie des plaques FG appuyées sur une fondation élastique.....	54
Figure IV-1 : Effet de l'indice de gradient sur la charge critique du flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG carrée reposant sur des fondations élastiques. ($a/h=10, \bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 10$).	78
Figure IV-2 : Effet du rapport côté-épaisseur sur $\frac{\Delta T}{T_{cr}}$ d'une plaque FG carrée reposant sur des fondations élastiques. ($a/h = 20, \bar{K}_w = 10, \bar{K}_s = 10, k = 1$).	79

Liste des Tableaux

Tableau IV-1 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \tilde{N} d'une plaque carrée homogène et simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/h = 1000, \chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).	69
Tableau IV-2 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \hat{N} d'une plaque homogène simplement soutenue reposant sur des fondations élastiques($\chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).	70
Tableau IV-3 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement soutenue reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 1, \chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).	72
Tableau IV-4 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 1, \chi_1 = 0, \chi_2 = -1$).	72
Tableau IV-5 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 1, \chi_1 = -1, \chi_2 = -1$).	73
Tableau IV-6 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous UTR.	75
Tableau IV-7 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous LTD.	76
Tableau IV-8 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous NTD.	77

Liste des Notations

- a, b : la longueur et la largeur de la plaque.
- $E(z), Ec, Em$: les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal.
- h : l'épaisseur de la plaque.
- $K(z), Kc, Km$: la conductivité thermique du FGM, céramique, métal.
- m, n : le nombre des demi-ondes dans les deux directions x et y.
- $Ni, Mi, Si, (Qi a supprimé)$: les résultantes des contraintes.
- $f(z)$: fonction de forme.
- $g(z)$: fonction de cisaillement
- Fx, Fy : les forces planes de bords.
- T : la température.
- u, v, w, θ : les composantes du déplacement.
- x, y, z : les coordonnées cartésiennes rectangulaires.
- $\alpha(z), \alpha c, \alpha m$: les coefficients d'expansion thermique du FGM, céramique, métal.
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: les déformations de cisaillement.
- ϵ_x, ϵ_y : les déformations normales.
- ΔT_{cr} : le changement dans la température critique de flambement.
- ν : le coefficient de Poisson.
- σ_x, σ_y : les contraintes normales.
- $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$: les contraintes de cisaillement.
- k_w, k_s : les coefficient de fondations.

Résumé

Ce travail présente une théorie simple et raffinée de la déformation du cisaillement du n ème ordre pour les comportements de flambement mécanique et thermique des plaques fonctionnellement graduées (FG) reposant sur des bases élastiques. La théorie de la déformation par cisaillement raffinée proposée a un nouveau champ de déplacement qui comprend des termes intégrés indéterminés et ne contient que quatre inconnus. Les équations de gouvernance sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Une méthodologie de solution analytique de type Navier est également présentée pour les plaques FG simplement soutenues reposant sur une base élastique qui prédit une solution précise. La précision du modèle actuel est vérifiée en comparant les résultats calculés avec ceux obtenus par la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur (HSDT). En outre, les résultats démontrent que la théorie proposée peut atteindre la même précision des HSDT existants qui ont plus de nombre de variables.

Mots-clés: Flambement; Plaque fonctionnellement graduée; base élastique; Théorie des plaques.

Abstract

This work presents a simple and refined n th-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling behaviors of functionally graded (FG) plates resting on elastic foundation. The proposed refined n th-order shear deformation theory has a new displacement field which includes undetermined integral terms and contains only four unknowns. Governing equations are obtained from the principle of minimum total potential energy. A Navier type analytical solution methodology is also presented for simply supported FG plates resting on elastic foundation which predicts accurate solution. The accuracy of the present model is checked by comparing the computed results with those obtained by classical plate theory (CPT), first-order shear deformation theory (FSDT) and higher-order shear deformation theory (HSDT). Moreover, results demonstrate that the proposed theory can achieve the same accuracy of the existing HSDTs which have more number of variables.

Keywords: Buckling; Functionally graded plate; Elastic foundation; Plate theory.

ملخص:

تقدم هذه ورقة نظرية بسيطة ومكررة من تشوه قصي من درجة "n" سلوك التواء ميكانيكي وحراري لوحات متدرجة وظيفيا تستريح على اسس مرنة. نظرية تشوه قصي مكرر مقترحة ديها مجال جديد لنزوح الذي يتضمن شروط غير محددة متكاملة ويحتوي على أربعة مجاهيل فقط. ويتم حصول على معادلات شاملة من مبدأ الحد الأدنى مجموع طاقة كامنة. ايضا منهجية من حل تحليلي نوع نافيير واردة لوحات متدرجة وظيفيا مدعومة ببساطة وتستريح على قاعدة مرنة تعطي حل محدد. يتم تحقق من دقة نموذج جاي من لال مقارنة نتائج محسوبة مع تلك التي حصل عليها نظرية كلاسيكية لوحات "CPT"، نظرية تشوه قصي من درجة الأولى "FSDT" ونظرية تشوه قصي العليا "HSDT". وبالإضافة إلى ذلك، تظهر نتائج أن نظرية مقترحة يمكن أن تصل إلى نفس الدقة موجودة التي ديها أكثر عدد من متغيرات.

كلمات مفتاحية: تواء، وحة متدرجة وظيفيا، قاعدة مرنة، نظرية صفائح.

Introduction Générale

Introduction Générale

Dans le monde industriel, l'évolution se fait de façon continue afin d'avoir une meilleure optimisation sur la qualité et le prix des concepts technologiques. Et c'est la raison pour laquelle le laboratoire de recherche doit impérativement être lié au secteur de l'industrie puisque la recherche scientifique permet l'avancée des techniques industrielles en permettant de concevoir des procédés nouveaux pour le développement de l'industrie.

L'étude du matériau est primordiale pour mieux maîtriser la bonne tenue de la pièce constituée par telle ou telle matière ; c'est le chemin d'une recherche qui amène au terminus d'une révolution technologique prometteuse ; puisque la recherche dans cette discipline technologique tente à améliorer le statut du chercheur d'une part, et développer un effort pour améliorer le comportement du matériau vis-à-vis des différentes sollicitations, en fonction du problème posé ; c'est-à-dire en dépendance du besoin technologique spécifique.

Du fait que les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermiques est très limitée ; donc, le soucis des chercheurs est orienté vers la recherche de matériaux avec un rapport résistance/poids assez élevé ; donc des matériaux, composé de plus d'une matière, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliqués dans le domaine de génie civil. Ces matériaux sont appelés matériaux composites qui sont venus apporter quelques solutions à ces limites.

Ce type de matériau est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes et disposé sous forme de stratifié dont l'association aboutit à un assemblage avec des performances supérieures à celles des composants pris séparément.

Cependant, l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et des contraintes à ce niveau. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, un décollement entre les couches dus à un passage brusque dans la composante matérielle. Une technique a été élaborée par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles ; il consiste à utiliser un matériau à gradient évalué, sa signification originale est FGM : Functionaly Graded Material.

Les FGMs ont été initialement conçus comme matériaux de barrière thermique pour des applications structurales en aérospatiale et dans des réacteurs de fusion. Ils sont maintenant mis au point pour un usage général en tant que des

composants structurels dans des environnements à température extrêmement élevée. La capacité de prédire la réponse des plaques FGMs et coques lorsqu'elles sont soumises à des charges thermiques et mécaniques est d'un intérêt primordial à l'analyse structurale.

Ils sont souvent fabriqués à partir d'un mélange de céramiques et de métaux pour atteindre l'exigence importante des caractéristiques matérielles [1]. La réponse du flambement des structures FG sous différents types de chargement est importante pour les applications pratiques et a suscité un intérêt considérable.

Lanhe [2] a étudié de manière analytique le problème du flambement thermique d'une plaque FG avec une épaisseur modérée et des conditions de contours simplement supportées en fonction de la FSDT. Sohn et Kim ont traité les stabilités des panneaux FG soumis à des charges thermiques et aérodynamiques combinées. Le FSDT a été utilisé pour simuler des charges aérodynamiques supersoniques agissant sur les panneaux. [3] a proposé un HSDT global bidimensionnel pour la stabilité thermique des plaques faites de FGM. Il a déterminé les températures critiques de flambement d'une plaque FG simplement soutenue sous des températures réparties uniformément et linéairement. [4] ont discuté le comportement de flambement des plaques FG sous des charges mécaniques et thermiques avec une géométrie arbitraire, y compris des plaques contenant des trous carrés et circulaires au centre, via la méthode sans élément kp-Ritz. [5] ont étudié le flambement des plaques FG épaisses avec une imperfection géométrique initiale sous une charge thermique. Par la procédure de Galerkin, les équations résultantes ont été résolues pour obtenir des solutions analytiques de différence critique de température de flambement. [6] ont présenté une théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse du flambement des plaques FG soumises à des charges thermiques. [7] ont proposé une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich FG. [8] ont étudié la réponse non linéaire des plaques de FG sous des charges thermiques en utilisant une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale efficace. [9] ont examiné la réponse au flambement thermique des plaques sandwich FG en proposant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique.

Récemment, les recherches des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sont identifiées comme un domaine intéressant. [10] ont étudié les réponses de flambement et post-flambement des plaques FG épaisses soutenues par des fondations élastiques et soumises à des charges compressives, thermiques et thermomécaniques. [11] ont présenté une solution exacte pour le flambement

thermique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques avec diverses conditions limites. [12] ont proposé une théorie raffinée efficace et simple pour le flambement et la vibration libre de plaques sandwich exponentiellement graduées dans différentes conditions limites. [13] ont présenté une théorie de déformation de cisaillement raffinée du n ème ordre pour les réactions de flambement mécanique et thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique. [14] ont étudié le post-flambement des plaques épaisses faites en matériau fonctionnellement gradué reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges compressives, thermiques et thermomécaniques. [15] ont étudié la stabilité thermique des plaques sandwich FG en utilisant une simple théorie de la déformation du cisaillement. [16] ont examiné la réponse du flambement thermique des plaques sandwich FG avec des conditions limites bloquées.

Le présent travail traite la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre ([17]). On utilise principalement les idées derrière la nouvelle FSDT [18] que les auteurs incluent des termes intégrés indéterminés pour modéliser l'effet de gauchissement des théories de la déformation du cisaillement. Le but de ce travail est de développer la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre avec le champ de déplacement modifié à son optimisation. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement. Les équations de gouvernance sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Des solutions analytiques pour la réponse mécanique et thermique du flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sont déterminées.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à donner une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs), l'histoire de leur développement, applications des ces structures ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives et une comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.

Le deuxième chapitre rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur le comportement de post flambement des plaques à gradient de propriétés (FGMs), suivie par quelques problèmes ainsi que les différentes théories des plaques majoritairement employées pour les modéliser.

Le troisième chapitre, nous avons développé un modèle analytique du comportement de flambement mécanique et thermique de la plaque FGM en assumant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs basés sur la fonction de loi de puissance.

Le dernier chapitre est consacré pour les résultats des études comparatives réalisées et les commentaires sur les résultats.

A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

Chapitre I.

Généralités sur les Matériaux FGM

Chapitre 1. Généralités sur les Matériaux FGM

I.1 Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M "); un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Compte tenu de l'augmentation significative de l'activité de recherche et de publications dans les FGMs et les structures au cours des dernières années, le présent chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets qui sont les plus pertinents pour les structures FGMs. En raison de la croissance extensive des connaissances en FGMs dans les deux dernières décennies, il est prudent de réduire l'examen à un niveau acceptable en se concentrant sur les problèmes des plaques FGMs seulement.

I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Dans le développement de notre société et de la culture, les matériaux ont joué un rôle essentiel. L'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurelles, etc.

La structure de développement d'un matériau moderne est illustrée sur la **Figure I.1**. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont des matériaux de pointe dans la famille des composites d'ingénierie, constitués en deux ou plusieurs phases de composition continue et variable Koizumi [19]. Ces matériaux avancés avec des gradients de la composition, de la structure et/ou des propriétés spécifiques dans une direction préférée et/ou une orientation, sont caractéristiquement supérieurs aux matériaux homogènes constitués de différents composants similaires.

Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la matière, varie en douceur et de façon continue dans des directions préférées dans les FGMs. Les FGMs ont été développés en combinant les matériaux d'ingénierie de pointe sous la forme de particules, de fibres, ou des plaquettes.

Dans le processus continué d'améliorer la performance structurelle, les FGMs sont développés pour adapter l'architecture matérielle à l'échelle microscopique et pour optimiser certaines propriétés fonctionnelles des structures. Ces matériaux gagnent des larges applications dans diverses branches de l'ingénierie et de la technologie en vue d'en faire usage approprié dans la meilleure façon que possible. Cela a été possible grâce à la recherche et au développement dans le domaine de la mécanique des FGMs pour les technologies modernes des composants spéciaux nucléaires, vaisseau spatial, éléments de structure et les revêtements de barrière thermique à haute température, etc.

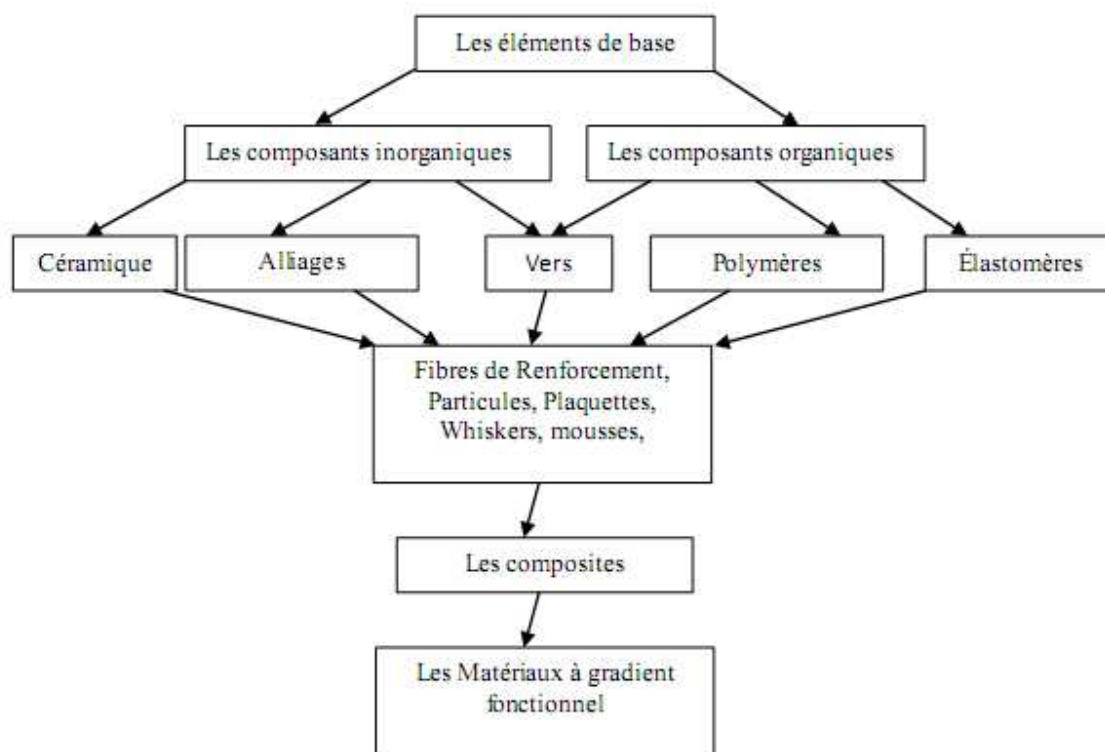


Figure I-1 : Illustration de la hiérarchie des matériaux composites

Bien que le concept des FGMs, et notre capacité à les fabriquer, semble être une invention de l'ingénierie de pointe, le concept n'est pas nouveau. Ces sortes de matériaux ont été présentes dans la nature. Quelques exemples de FGMs naturels ont été inclus dans la **Figure I.2** pour illustration. Les os ont une classification fonctionnelle. Même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. Les constituants des FGMs modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériau isotrope, bien que tous les nombre de configurations chimiquement et spatialement compatibles soient possibles. Ces composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie comme le magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène, l'acier, etc. et les céramiques structurales avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.



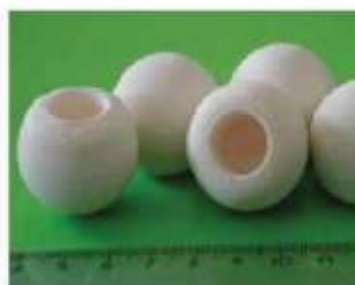
a. L'os



b. Roquette résiliente



c. Bambou



d. Remplacement des hanches biocompatible

Figure I-2 : Exemples des FGMs naturels et autres conçus par l'homme.

I.3 Histoire et Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. Avant cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la **figure I.3** Yin et.al [20] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

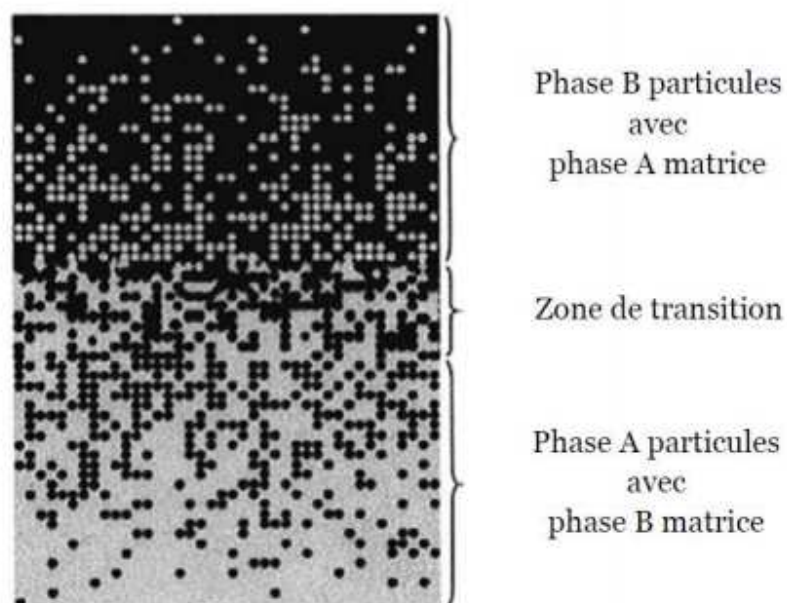


Figure I-3 : Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées Yin et.al [20].

Plus tard, ses applications ont été développées pour les éléments des usines chimiques, des générateurs d'énergie solaire, échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires et les systèmes de combustion à haute efficacité. Le concept des FGMs a été appliqué avec succès dans les revêtements de barrière thermique où les exigences visées sont d'améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion.

Deux systèmes de matériaux de recherche importants dans la technologie de fabrication des FGMs sont : alumine Al_2O_3 [21] et zircon ZrO_2 [4], des couches de protection en céramique extérieur sur un substrat de pose Ni-superaliage 'NiCrAlY'. Par conséquent, les revêtements ont été déposés par diverses techniques métallurgiques. Les FGMs peuvent également trouver des applications dans les techniques de communication et d'information.

Comme une dernière observation concernant Les FGMs, on peut noter que ce concept de matériaux à gradient fonctionnel a démontré que la composition graduelle micro / macro structurelle peut non seulement rejeter les effets indésirables tels que la concentration de contrainte, mais peut aussi générer une

fonction unique sans pareille Krell [22]. Le concept des FGMs est applicable à divers domaines, comme illustré sur la **Figure I.4**.

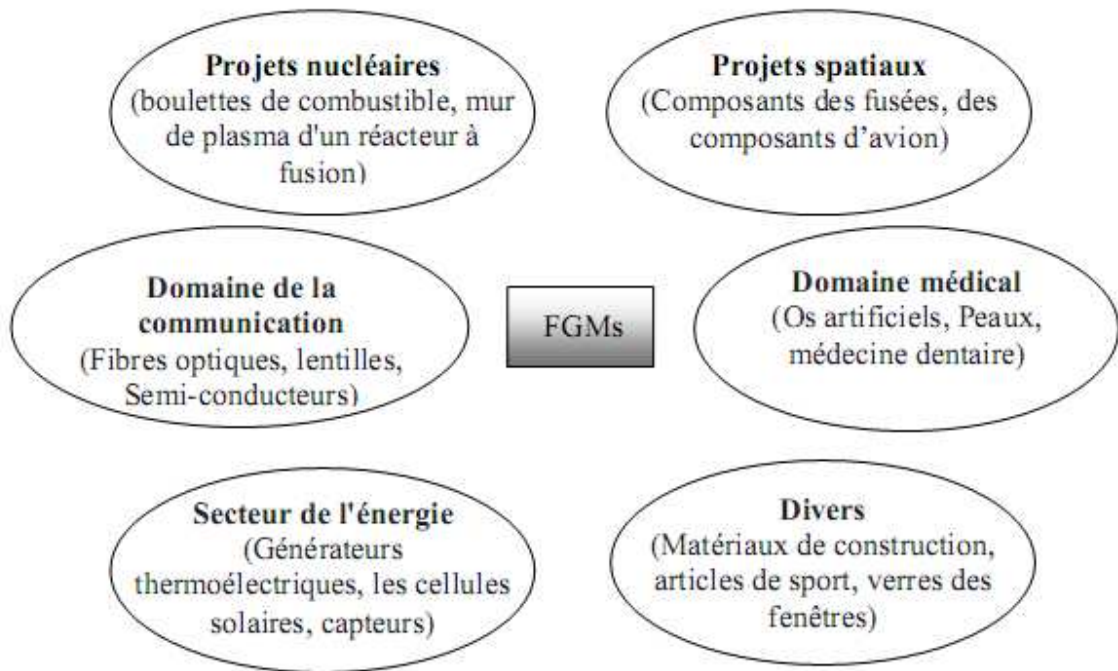


Figure I-4 : Les champs potentiels de l'application des FGMs.

I.4 Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)

Les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales.

Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des

matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.5.a);

2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.5.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

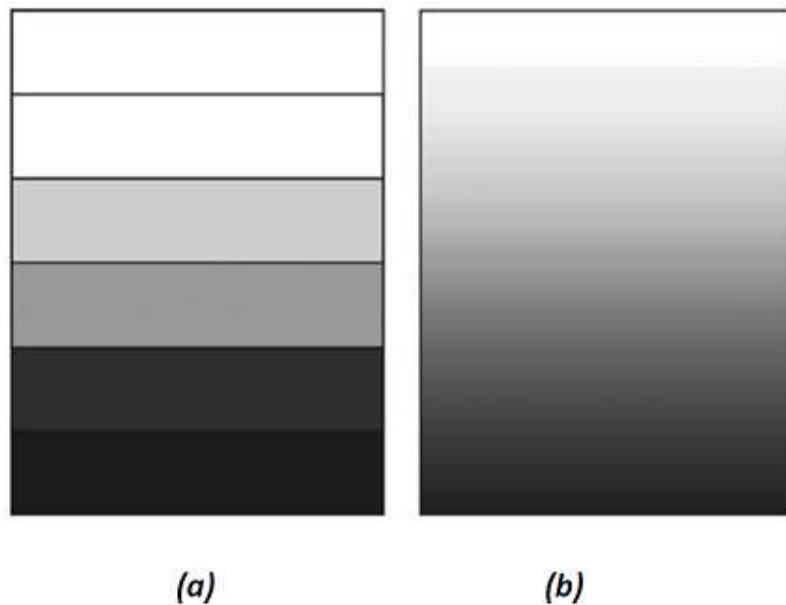


Figure I-5 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM (loi de puissance) :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance [23] sous la forme :

$$V(z) = \left[\frac{(z + h/2)}{h} \right]^p \quad (I-1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation de la fraction volumique des phases en termes de p est représentée sur la figure I.6, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

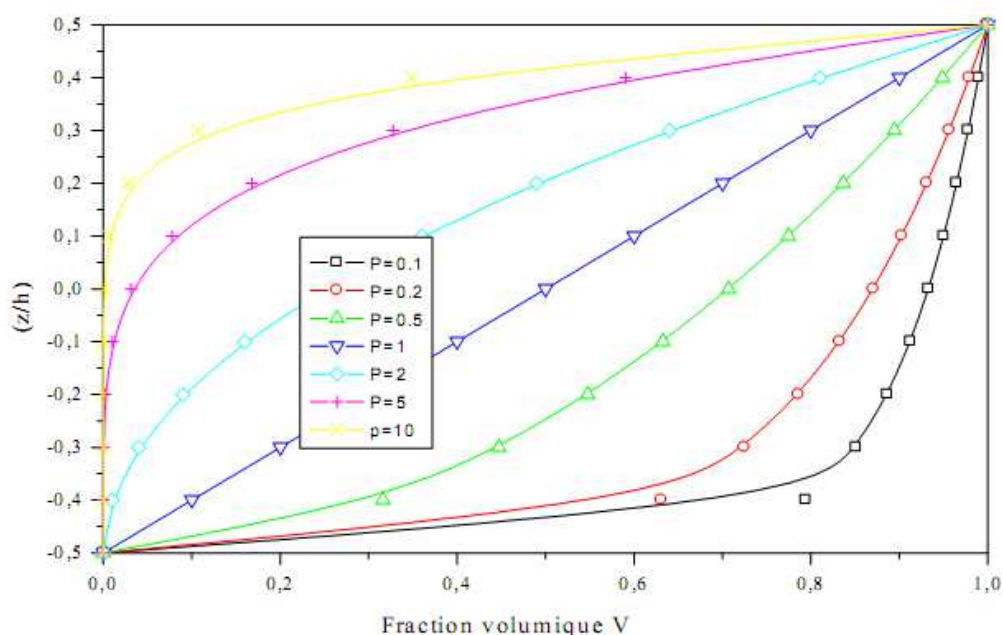


Figure I-6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [23]. Par conséquent, Chung et chi [24] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Cette distribution appelée la fonction sigmoïde. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. 3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3.a) et (I.3.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

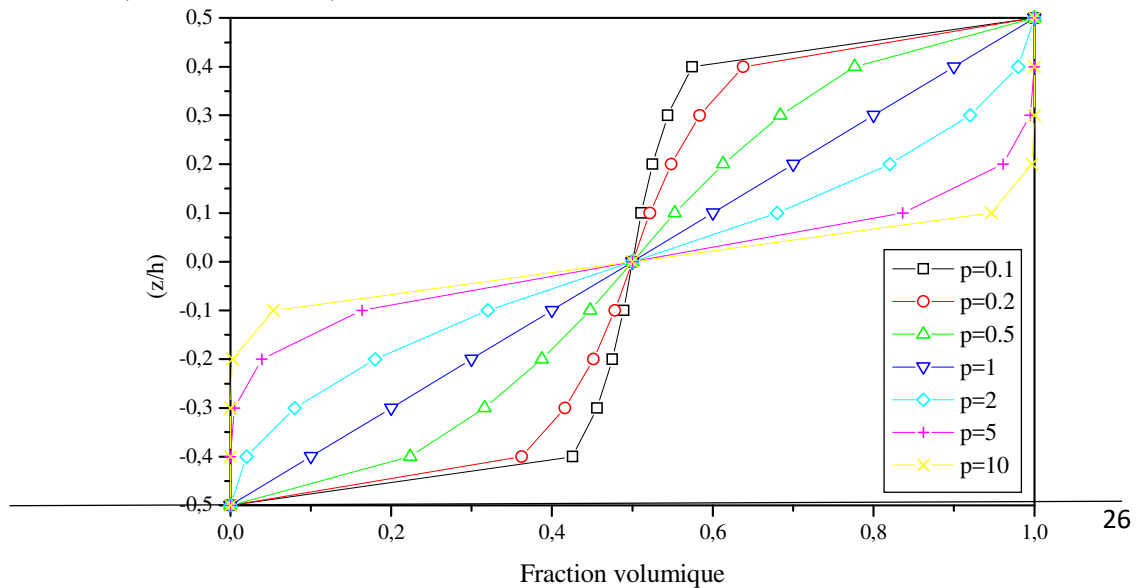


Figure I-7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.4.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [23]. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $P(z)$ à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$S(z) = A.e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (I.5.a)$$

Avec :

$$A = S_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

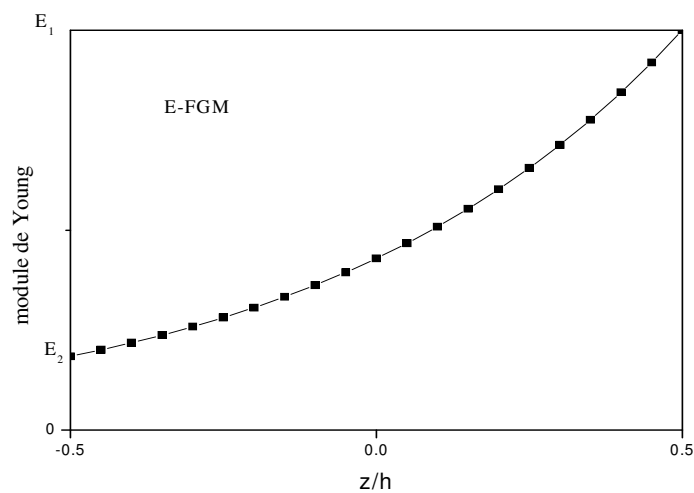


Figure I-8 : Variation du module de Young de la plaque E-FGM

I.5 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.9) koizumi[25]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente boch[26].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

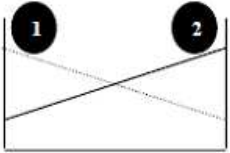
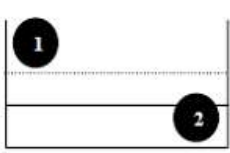
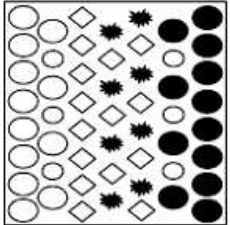
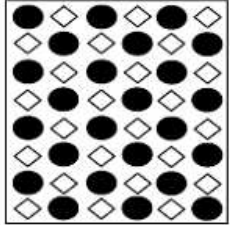
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ★</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I-9 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels koizumi[24].

Yoshihisa (2004) [27] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I.10).

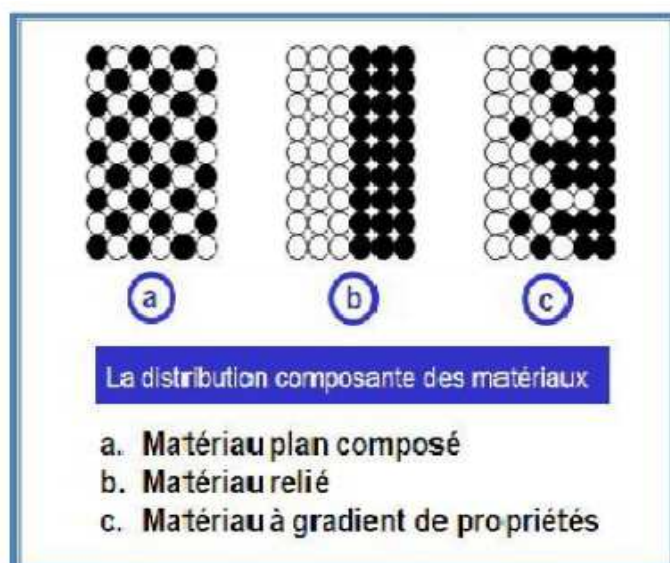


Figure I-10 : La distribution composante des matériaux [26]

Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en terme de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II

Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM

Chapitre II. Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM

II.1 Introduction

Ce chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont reflétées dans ce chapitre. La revue est consacrée à des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des plaques à gradient fonctionnel sous chargement mécanique et thermique.

Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la plaque (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel. En outre, un examen approfondi de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité en trois dimensions (3D) et une formulation unifiée est également présentée.

II.2 Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés :

Une plaque est un élément de structure avec des dimensions en plan qui sont grandes par rapport à son épaisseur et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion, en plus celle de membrane. Des théories de plaque sont développées en supposant que la forme du champ de déplacement ou le champ de contrainte en tant que combinaison linéaire des fonctions inconnues et la coordonnée dans l'épaisseur exprimée généralement sous la forme :

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^n z^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (1)$$

Où φ_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du déplacement ou de la contrainte, (x, y) sont les coordonnées en plan, z est la coordonnée dans l'épaisseur, t représente le temps et φ_i^j sont des fonctions à déterminer. Le facteur temps ne sera pas considéré ici. Il existe de nombreuses théories de la plaque avec différentes formes de la formule (1) qui cherchent une expression de φ_i^j . Une critique sur les modèles de plaques peut être trouvée dans Ghugal et Shimpi [28], et Tung [29].

Afin d'étudier le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriété, quatre modèles de plaques sont utilisés pour ce matériau sont brièvement présentés : le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT), le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT), le modèle de plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT) et le modèle de plaque basé sur la théorie sinusoidale de la déformation de cisaillement (SSDT).

II.2.1. Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)

Le modèle de plaque basé sur la théorie classique de la plaque (CPT) satisfait l'hypothèse de Love-Kirchhoff avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à la surface moyenne avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse de love-Kirchhoff néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion et de la membrane. Une description détaillée des modèles de plaques, y compris le modèle actuel peut être trouvée dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [30], Reddy [31, 32].

Sur la base des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de ce modèle de la plaque développée dans la forme (2) est donné par l'équation suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (2.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (2.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (2.c)$$

Où (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ($z = 0$), Figure II.1.

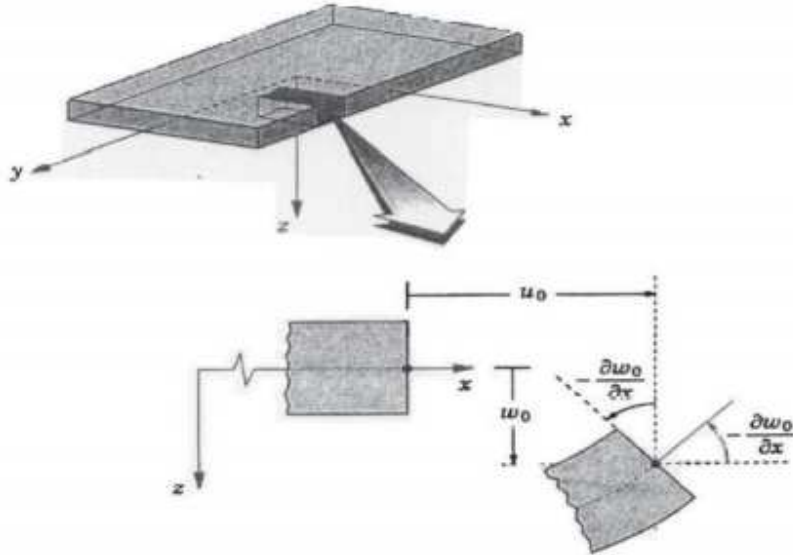


Figure II-1 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [31]

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les plaques épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des plaques fonctionnellement graduées (FGPs) à l'aide du modèle de plaque classique de Love - Kirchhoff ont été étudiées par He et al. [33].

II.3 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT)

Contrairement au modèle classique, ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont assumées constantes dans l'épaisseur de la plaque. Le modèle nécessite donc un facteur de correction pour calculer l'effort de cisaillement transverse. Les premières études sur la théorie de premier ordre de la déformation de cisaillement de la plaque (FSDT) peuvent être trouvées dans [34, 35], [36] qui ont conduit au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Les études sur ce modèle peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger [30],

Reddy [31], Miara et Podio-Guidugli [37]. La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la plaque est à l'état de normalité détendue,

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (3.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (3.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (3.c)$$

Où (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements dans la surface moyenne et les rotations autour de l'axe y et x , respectivement, Figure II.2. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des plaques classique décrite dans la section précédente en remplaçant $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$,

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique.

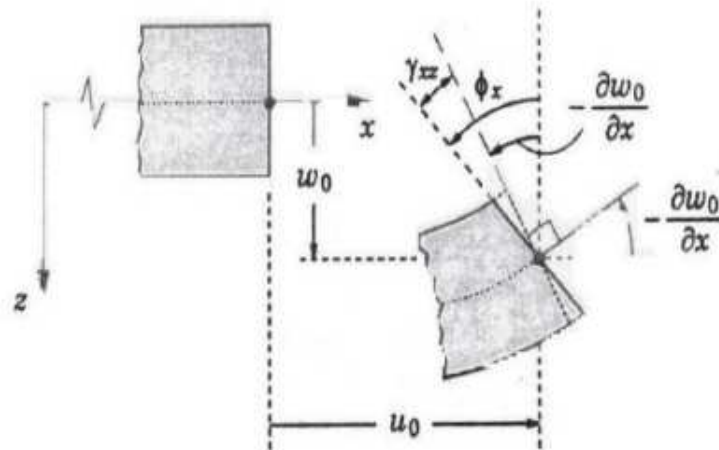


Figure II-2 : Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin [31].

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse des matériaux à gradient de propriété en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation [38], [39]. Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Pratiquement, une correction de cisaillement transverse du modèle de la plaque homogène a été prise.

En outre, afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des plaques ont été développées. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de la plaque à ordre élevé pour les matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans la section suivante, nous allons rappeler deux modèles de plaques basés sur des théories de la déformation de cisaillement à ordre élevé utilisés pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) : un modèle de la plaque basé sur la théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (TSDT) proposé par Reddy [31, 32] et un modèle de la plaque basé sur la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) étudié par Zenkour [40, 41, 42].

II.3.1. Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT)

Les théories de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevé ont été développées ces dernières années, d'abord pour l'analyse de plusieurs problèmes isothermes et ensuite déployées pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la plaque. Contrairement à la CPT et FSDT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section. Par conséquent, les effets de la déformation de cisaillement transversal et la déformation normale transversale sont pris en compte. Ces modèles ne nécessitent pas de facteurs de correction. Les références sur ces modèles peuvent être trouvées dans ([43], [44], [45], [46], [35], [47, 48], [31], [49], [40]). Nous présentons ici deux modèles de plaques utilisés pour

l'analyse du comportement des matériaux à gradient de propriété (FGMs). Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (4.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (4.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (4.c)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, la figure II.3. $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

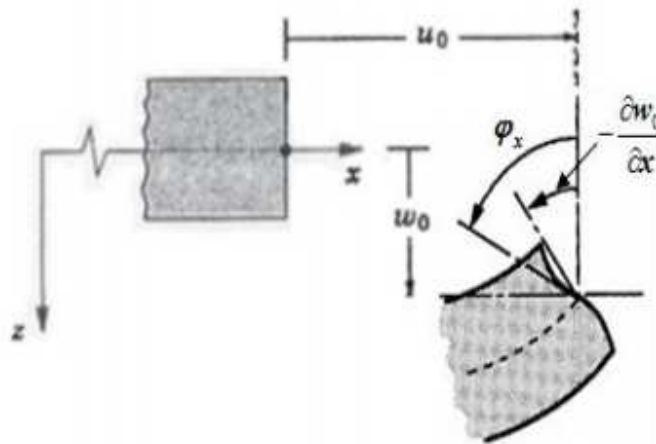


Figure II-3 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [12].

Les déplacements de la théorie des déformations de cisaillement à ordre élevé de Reddy (TSDT) [31, 32] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (5)$$

La théorie du troisième ordre de cisaillement (TSDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la plaque, a été proposée par Reddy (voir [31, 32]). Elle ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. La théorie du troisième ordre a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs ([50], [51], [52]).

La théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDT) de Zenkour [40, 41], [42] est obtenu par l'hypothèse :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (6)$$

Où le champ de déplacement qui en résulte est basé sur celui de la théorie classique en ajoutant le terme $\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_\alpha$ à la composante de déplacement dans le plan u_α .

Ce modèle de plaque a été également utilisé pour étudier le comportement des plaques

FGMs par Zenkour [53, 54, 55]. Comme pour la TSDT, pas de facteurs de correction de cisaillement transversal utilisés dans cette théorie.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [55] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (7)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. [56] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (8)$$

II.4 Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure.

Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [58] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent, le modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations de la fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références (Reuter) [59]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures

squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et al [60] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [61] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogènes mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant compte de l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publiée [62]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans figure II.3, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [63] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérés exacts. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

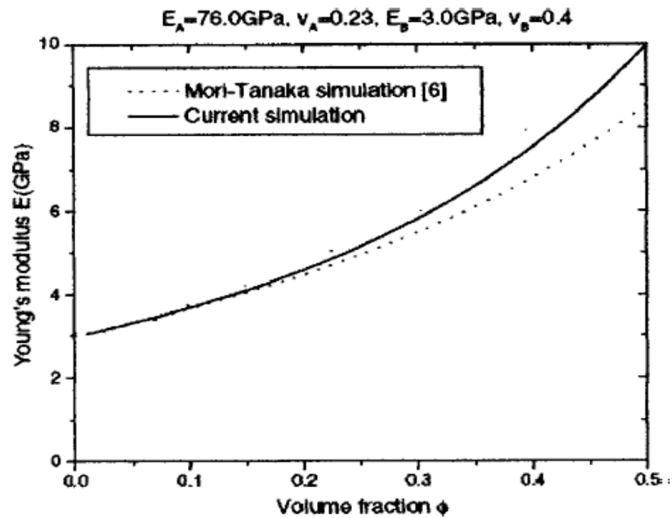


Figure II-4 : Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenue par le modèle développé par Yin et al [62] et le modèle de Mori-Tanaka.

II.5 Des études rapportées sur des plaques FGMs

Pagano [63] et [64], Srinivas Rao et [65] et Srinivas et al. [66] ont développé les solutions exactes des plaques stratifiées simplement appuyées à l'aide de la théorie de l'élasticité 3D. Leurs solutions de référence se sont avérées très utiles pour évaluer l'exactitude des diverses théories approximatives 2D des plaques de différents chercheurs [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73] et [74]. Leurs méthodes sont valables pour les plaques et coques stratifiées, où les propriétés des matériaux sont constantes par morceaux, mais ne s'applique pas à trouver des solutions aux problèmes des plaques avec inhomogénéité continue des propriétés des matériaux tels que les FGMs. Le concept des FGMs a été proposé en 1984 par des spécialistes des matériaux japonais [75]. Les changements continus de la composition, la microstructure, la porosité, etc. de ces matériaux conduisent à des gradients de propriétés telles que la résistance mécanique, la conductivité thermique, la résistance à la rupture etc. Suresh et Mortensen [76] ont fourni une excellente introduction aux principes fondamentaux des FGMs. Ils ont publié une revue de la littérature très détaillée de la technologie des FGMs. Depuis, de nombreux chercheurs ont tenté diverses méthodes numériques et analytiques pour étudier les réponses mécaniques, thermiques et dynamiques des structures en FGMs. Birman et Byrd [77] ont documenté une revue de la littérature exhaustive de l'évolution de

la recherche en FGMs portant sur les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des FGMs. Plusieurs sujets pertinents à la théorie et les applications des FGM sont reflétées dans cet exposé synoptique. Ici la revue de la littérature est axée sur les travaux de recherche dans le domaine des analyses statiques thermo-élastiques, vibrations et la stabilité des plaques fonctionnellement graduées (FGMs) publiés depuis 1998.

II.5.1. Analyse statique thermo-élastique des plaques FGMs

Un examen de l'état actuel de la technique dans les études analytiques et numériques statiques thermo-élastiques des plaques FGMs est présenté. L'intégration d'un système de protection thermique (céramique) et d'un support de charge mécanique (métallique) en une seule construction est une caractéristique souhaitable de FGM. Le système en FGM pour une application particulière doit présenter sa capacité à résister à des charges thermiques et mécaniques simultanément.

Le comportement thermo-élastique des plaques rectangulaires en FG (céramique-métal) a été présenté à l'aide d'un élément fini : plaques rectangulaires isoparamétriques en quatre nœuds par Praveen et Reddy [78] sur la base de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre premier (FOSDT), y compris les effets non linéaires de Von Karman. Cette formulation prend en compte les déformations de cisaillement transversales, l'inertie de rotation et les rotations modérément grandes de la plaque FGM. La formulation de Praveen et Reddy pour les plaques rectangulaires en FGMs a été étendue par Reddy et al. [79] pour les plaques circulaires et annulaires en FGMs en flexion. Ils ont développé des relations exactes entre les solutions de flexion usant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre premier (FOSDT) et la théorie classique de la plaque (CPT). La formulation adoptée par Praveen et Reddy en 1998 a été étendue par Reddy [80] pour étudier le comportement statique des plaques rectangulaires en FGMs en basant sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT).

Tous les deux, le comportement non linéaire des plaques en FGMs à la flexion et au flambement ont été examinés par Shen et ses collaborateurs. En particulier, la flexion non linéaire des plaques rectangulaires minces en FGMs bloquées le long

d'une paire de bords opposés et avec des conditions différentes de l'autre paire de bords a été étudiée par Yang et Shen [81]. Ils ont utilisé la théorie non-linéaire de Von Karman dans cette étude. Une fondation élastique a été incluse dans l'étude. L'analyse a été étendue par les mêmes auteurs [82] pour les plaques à déformation de cisaillement, géométriquement non linéaires soumises à des charges thermomécaniques et dans différentes conditions aux limites à l'aide de TOSDT de Reddy. Autres articles de ce groupe de recherche portant sur divers aspects des réponses thermomécaniques des plaques en FGMs sont inclus en [83]. Shen [84] a également présenté les réponses post-flambement des plaques FGMs simplement appuyées soumises à l'action combinée des charges de la plaque (CPT). La formulation adoptée par Praveen et Reddy en 1998 a été étendue par Reddy [80] pour étudier le comportement statique des plaques rectangulaires en FGMs en basant sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT). Mian et Spencer [85] ont présenté un ensemble de solutions exactes mécaniques, électriques et thermiques des matériaux fonctionnellement gradués. Huang et al. [86] ont présenté les solutions d'élasticité 3D exactes des plaques épaisses FGMs reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak et considérée comme une condition à la limite. Les effets de la rigidité de la fondation, les charges, et l'indice de gradation de la matière sur la réponse mécanique des plaques sont étudiés dans le présent article. Le même problème en utilisant la théorie d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement (HOSDT) et la relation générale de Von Karman est présenté par Shen et Wang [87] pour l'analyse non-linéaire de la flexion. Les caractéristiques de flexion non linéaire sont fortement influencées par la rigidité de la fondation, l'élévation de la température, la déformation de cisaillement transversal, la nature des conditions aux limites dans le plan et la quantité des charges de compression initiales.

Zhang et Zhou [88] ont analysé les plaques minces FGMs en se basant sur le concept physique de la surface neutre en utilisant la théorie classique des plaques CPT (en supposant qu'il n'y a pas d'effet de couplage étirement/flexion dans les équations constitutives dans les cas de problèmes de petites et grandes déformations). Certaines solutions analytiques classiques telles que la flexion, vibrations, le flambement et la flexion non linéaire sont présentées dans ledit article. Les auteurs ont souligné que la théorie de la plaque physique neutre de

surface mince a plus de mérites dans l'application de l'ingénierie, car elle est plus facile et plus simple que la théorie de la plaque stratifiée classique basée sur la surface moyenne géométrique. Fares et al. [89] ont présenté une théorie 2D des plaques FGMs en utilisant une approche variationnelle mixte. Cette théorie compte un champ de déplacements, dans lequel les déplacements dans le plan varient de façon linéaire à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que le déplacement hors du plan est une fonction du second degré de la coordonnée de l'épaisseur. Ils ont montré l'influence de la contrainte normale transversale à la flexion et à la vibration des plaques FGMs.

Abdelaziz et al. [90] ont étudié la réponse de flexion de la plaque FG sandwich en utilisant la théorie de la plaque raffinée à deux variables (RPT) développée à l'origine par Shimpi [91] pour les plaques isotropes, et a été étendue par Shimpi et Patel [92] pour les plaques orthotropes.

II.5.2. Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs

Les sections précédentes résument quelques-uns des travaux importants dans l'analyse statique thermo-élastique de plaques de FGMs; cette section présentera un aperçu de l'ensemble de la littérature disponible sur la dynamique des plaques FGMs spécifiquement les vibrations et les analyses modales des plaques FGMs.

Cheng et Batra [93] ont étudié le flambement et la vibration d'une plaque polygonale en FGMs à l'état d'équilibre simplement appuyée sur une fondation élastique et soumise à des charges hydrostatiques uniformes dans le plan sur la base de la théorie TSDT de Reddy. La réponse dynamique des plaques rectangulaires FGMs initialement stressées a été étudiée par Yang et Shen [94]. Les propriétés du matériau de la plaque sont supposées être classés dans l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance et régie par la règle classique de mélange. La plaque a été autorisée à se reposer sur une fondation élastique et être soumise à des contraintes dans le plan uni-axiale ou bi-axial, bien que les deux ou aucune de ces caractéristiques doit être incluse. Yang et Shen [95] ont étendu leur précédente analyse aux plaques épaisses de FGMs dans des environnements thermiques. Ils ont développé une théorie générale de la plaque (moins le cas d'une fondation élastique) lorsque la réponse de la plaque peut être semi-analytiquement

déterminée sous des charges et des conditions aux limites générales, y compris le cas d'une plaque initialement stressée. Yang et al. [96] ont en outre présenté une grande analyse de vibration des plaques précontraintes en FGMs en basant sur la théorie TSDT de Reddy. Quelques autres publications traitant le même sujet sont Yang et al. [97], et Yang et Huang [98].

Javaheri et Eslami [99], [100] et [101] ont étudié le flambement thermique et mécanique des plaques rectangulaires en FGMs basant sur les théories de plaque classique et d'ordre supérieur. Les équations d'équilibre gouvernantes et de stabilité pour les plaques FGMs sont calculées en utilisant l'approche variationnelle, identiques aux équations des plaques homogènes. Ils ont étudié le comportement de flambement des plaques en FGMs simplement appuyées soumis à des conditions de chargement dans le plan avec une composition linéaire des matériaux constitutifs et des plaques homogènes. L'analyse de flambement de la plaque FGMs reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été faite par Yang et al [102]. En tenant compte que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de base étant comme des variables aléatoires indépendantes. La plaque a été modélisée dans cette étude par la théorie de déformation de premier ordre (FOST), et la solution du problème a été menée en utilisant la procédure de perturbation du premier ordre pour tenir compte du caractère aléatoire du problème. Le flambement et la vibration libre des panneaux FGMs sandwich en céramique-métal simplement appuyés ont été présentés par Zenkour [103] étendant son travail précédent de l'analyse statique sur ces panneaux.

Hoang et Nguyen [104] ont présenté une approche analytique pour étudier la stabilité des plaques FGMs sous des charges dans le plan de compression, thermiques et combinées à l'aide de la théorie classique des plaques (CPT). La non-linéarité géométrique et de l'imperfection géométrique initiale, les deux sont prises en compte de manière appropriée dans cette étude. Les propriétés des matériaux indépendantes de la température sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple en loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants. Les expressions explicites pour les courbes charge post-flambement -déflexion ont été obtenues en résolvant les équations régissant par la procédure de Galerkin. Les effets de l'indice de fraction volumique, la géométrie de la plaque, les conditions aux limites dans le plan, et l'imperfection sur le

comportement post-flambement de la plaque ont été étudiés dans le présent article. En outre, les mêmes auteurs, Nguyen Hoang [104], suivant une méthodologie similaire, ont présenté une étude analytique sur le comportement du flambement et post-flambement des plaques FGMs épaisses reposant sur des fondations élastiques et soumises au plan à des charges de compression, thermiques et thermomécaniques. Cette analyse a été menée pour montrer les effets des propriétés matérielles et géométriques, les conditions aux limites dans le plan, la rigidité de la fondation et l'imperfection sur la capacité de chargement des plaques FGMs en flambement et post-flambement.

Le comportement du flambement et post-flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) comme une branche importante des structures des solides est d'un grand intérêt dans la conception et a attiré l'attention des chercheurs au cours des dernières années. Tung et Duc [5] ont développé une solution analytique simple pour prédire le comportement du flambement et post-flambement des plaques FG minces. Duc et Tung [10] ont présenté une étude analytique sur les réponses des plaques FG épaisses en flambement et post-flambement reposantes sur des fondations élastiques et soumises au plan à des charges de compression, charges thermiques et thermomécaniques. Bourada et al. [105] ont présenté une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich FG. Bachir Bouiadjra et al. [6] ont présenté une théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement des plaques FG. Bachir Bouiadjra et al. [8] ont étudié le comportement du flambement thermique non linéaire des plaques FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale efficace. Ait Amar Meziane et al. [12] ont développé une théorie raffinée efficace et simple pour étudier les réponses au flambement et à la vibration libre des plaques sandwich exponentiellement graduées dans diverses conditions aux limites. Khalfi et al. [106] ont présenté une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques FG solaires reposant sur une fondation élastique.

Bennai et al. [107] ont développé une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement et de déformation normale pour la vibration libre et le flambement des poutres sandwich FG sous différentes conditions aux limites. Ces

constituants structurels tels que les plaques appuyées sur une fondation élastique trouvent souvent des applications dans la construction nucléaire, mécanique, aéronautique, et des structures de génie civil (Houari et al, [108]; Bessaim et al, [109]; Hebali et al, [110]; Zidi et al, [111]; Fekrar et al, [112]; Bousahla et al, [113]; Ramu et Mohanty, [114]; Hamidi et al, [115]; Ait Yahia et al., [116]; Mahi et al., [117]). Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs modèles de fondations ont été développés. Le plus simple est le modèle de Winkler ou le modèle à un seul paramètre (Winkler) [118] qui modélise la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux. Ce modèle a été amélioré par Pasternak [119] en prenant en compte un ressort de cisaillement qui simule les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle Winkler. Le modèle Pasternak ou le modèle à deux paramètres est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structurelles de la fondation et sera utilisé ici pour simuler les interactions entre la plaque et la fondation. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des effets de la fondation élastique pour une meilleure compréhension de la réponse du post-flambement des structures telles que les plaques et les coques.

II.6 Théorie De L'élasticité 3D

Le développement de solutions exactes de la théorie de l'élasticité 3D est très utile pour évaluer l'exactitude et la validité des modèles ESL. Mian et Spencer [120] ont établis des solutions exactes pour les plaques FG et les composites laminés. Ootao et Tanigawa [121] ont développé des solutions exactes 3D pour les problèmes de contraintes thermiques des plaques FG simplement appuyées sous transfert partiel de chaleur. Cheng et Batra [122] ont dérivé des solutions exactes pour l'analyse de la flexion 3D des plaques elliptiques FG encadrées sous chargements thermiques en utilisant une méthode de développement asymptotique. Reddy et Cheng [123] ont également adopté la méthode de développement asymptotique pour obtenir des solutions exactes pour l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées sous sollicitations thermiques. Au lieu d'utiliser la méthode de développement asymptotique, Vel et Batra [124] ont adopté une méthode des séries de puissance pour dériver les solutions exactes de l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées soumises à des charges thermiques

et mécaniques. Vel et Batra [125] ont étendu leur travail antérieur (2002) pour analyser les problèmes transitoires de conduction de chaleur des plaques FG simplement appuyées soumises à la température en fonction du temps ou le flux étendu sur les surfaces supérieure et inférieure. Alibeigloo [126] a effectué l'analyse de la flexion 3D des plaques FG sous sollicitations thermiques et mécaniques. Des solutions précises pour la température, la contrainte et le déplacement sont obtenus pour les plaques simplement appuyées en utilisant la méthode de l'état de l'espace. Des solutions précises pour les vibrations 3D libres et forcées des plaques FG simplement appuyées ont été fournies par Vel et Batra [127] en utilisant la méthode des séries de puissance. Des solutions précises pour les fréquences naturelles, les déplacements et les contraintes sont comparés à celles prédites par les modèles ESL. Vel [128] a étendu le travail précédent (2004) pour les coques FG. Uymaz et Aydogdu [129] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev. Li et al. [130] ont effectué l'analyse de la vibration libre 3D des plaques sandwich FG encastées et simplement appuyées. Les fréquences naturelles de deux types de plaques sandwich FG, à savoir la plaque sandwich avec des faces FG et un noyau homogène et la plaque sandwich avec des faces homogènes et un noyau FG, sont obtenus en utilisant la méthode de Ritz avec les polynômes de Chebyshev. Amini et al. [131] ont suivi la même méthode de Li et al. [132] pour dériver la fréquence naturelle et les formes de mode pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG reposant sur une fondation élastique avec des conditions aux limites arbitraires. Li et al. [130] et Malekzadeh [133] ont également étudié la vibration libre 3D des plaques FG reposant sur une fondation élastique, mais ont utilisé des approches différentes. Li et al. [132] ont adopté la méthode de l'état de l'espace pour dériver des solutions exactes pour la fréquence naturelle des plaques simplement appuyées, alors que Malekzadeh [133] a utilisé la solution DQM et la solution des séries pour obtenir des solutions semi-analytiques pour la fréquence naturelle des plaques type Levy. La DQM a également été adoptée par Malekzadeh et al. [133] pour étudier la réponse de la vibration libre 3D des plaques annulaires FG en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Les solutions 3D exactes de la vibration libre des plaques rectangulaires FG avec des conditions aux limites générales ont également

été fournies par Jin et al. [135] en utilisant la méthode de Rayleigh Ritz. Reddy et Kant [136] ont présenté une solution analytique pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG simplement appuyées en utilisant la méthode des séries de puissance.

Kim et Na [137] ont étudié le comportement du flambement thermique 3D des plaques FG sous élévation de température uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur au moyen d'un élément solide de 18 nœuds. Pour éviter le blocage du cisaillement et pour maintenir la stabilité cinématique des structures minces, une formulation assumée de déformation mixte a été employée. Na et Kim [138] ont amélioré leur travail antérieur (2004) en tenant compte de l'augmentation de la température en fonction du temps. Na et Kim [139] ont étendu leur travail antérieur (2005) aux plaques sandwich FG avec des faces homogènes et un noyau en FG. Na et Kim [139] ont employés la méthode des éléments finis pour étudier le post flambement thermique 3D des plaques FG sous élévation de température uniformes ou non uniforme. Un élément solide de 18 nœuds basé sur la relation de Green-Lagrange a été développé pour tenir compte de la grande déformation. Le schéma d'itération de Newton-Raphson a été utilisé pour déterminer le chemin d'équilibre post flambement. Na et Kim [139] ont étendu leur travail antérieur (2006) pour étudier la flexion non linéaire 3D des plaques FG soumises à des charges de pressions uniformes et à des charges thermiques.

II.7 Influence des défauts initiaux sur le comportement du flambement

Rivello [140] montre sur des poutres que les défauts initiaux n'ont pas d'influence sur la valeur asymptotique du flambement (Figure II.5). Par contre, la déflexion initiale due aux différents défauts induit des moments de flexion secondaires et donc une augmentation non linéaire des contraintes dans la structure. Il se peut donc que la rupture ait lieu bien avant le niveau de flambement théorique. La difficulté est alors de savoir si la rupture est due à de la flexion ou à du flambement puisque les deux phénomènes sont couplés. Les défauts initiaux peuvent être de deux natures. Ils peuvent être le résultat d'imperfections dues à des aléas de fabrication, mais peuvent également être le résultat d'un montage d'essai désaxé par exemple. Dans ce dernier cas, des moments locaux sont

introduits et conduisent à des défauts géométriques avant chargement. D'un point de vue pratique, un léger excentrement dans le chargement, un montage hyperstatique qui induit des flexions locales ou simplement des défauts de fabrication conduisent au même phénomène et à l'apparition d'une flexion induite au cours du chargement. Industriellement, la meilleure façon de prendre en compte l'effet des défauts initiaux est alors de les représenter.

Pour des cas assez simples, des modèles mathématiques existent et peuvent être utilisés. Néanmoins, lorsque la tâche s'avère plus complexe, des modèles numériques sont souvent utiles.

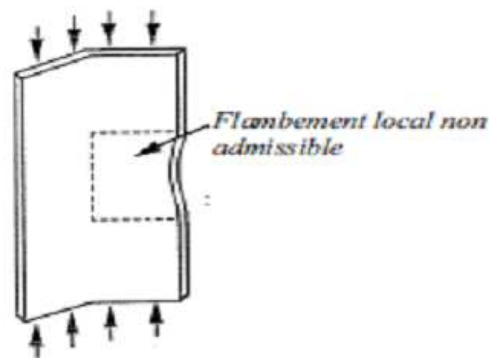


Figure II-5 : Flambement local d'une poutre en « L »

En effet, la déflexion initiale introduit de la flexion au cours du chargement, ce qui engendre un comportement non linéaire important. L'étude de Weingarten et al [141] permet tout de même de montrer que l'influence des défauts initiaux sur le niveau effectif du flambement est d'autant plus importante que les épaisseurs sont faibles. Dans certains cas extrêmes (défauts importants sur de très faibles épaisseurs), la rupture en essais peut avoir lieu à 25% de la charge théorique du flambement.

II.8 Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants. Dans ce chapitre un examen des différentes recherches menées dans la littérature pour la contrainte, la vibration libre et des analyses de flambement des plaques FGMs a été présenté. Un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes dans le domaine d'intérêt courant mettant en évidence la littérature la plus pertinente disponible aux ingénieurs de recherche qui étudient les structures en plaques FGMs. L'utilisation des modèles théoriques 2D qui maintenant semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D doit être poursuivie dans l'intérêt de coût de calcul et des analyses performantes.

Chapitre III.

Modèle Et Développement Analytique

Chapitre III. Modèle et développement analytique

III.1 Introduction

Le but de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

En ce chapitre on va présenter une formulation analytique pour étudier la réponse de flambement des plaques FGM épaisses simplement appuyées sur des fondations élastiques de type Pasternak et soumises au plan à des charges de mécanique et thermiques. La théorie du n ème ordre de la déformation du cisaillement Xiang et al, [18] est utilisée pour établir les équations de gouvernement prenant en compte la non-linéarité géométrique et l'imperfection géométrique initial. Les équations de gouvernance sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Des solutions analytiques pour la réponse mécanique et thermique du flambement des plaques FG reposant sur des bases élastiques sont déterminées. Des exemples numériques sont proposés pour démontrer l'exactitude de la théorie actuelle.

III.2 Géométrie de la plaque :

Considérons une plaque FG rectangulaire simplement appuyée de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur h reposant sur une fondation élastique. Les coordonnées x , y et z sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement, comme il est montré dans la figure III.1. La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles varient doucement à travers l'épaisseur de la plaque.

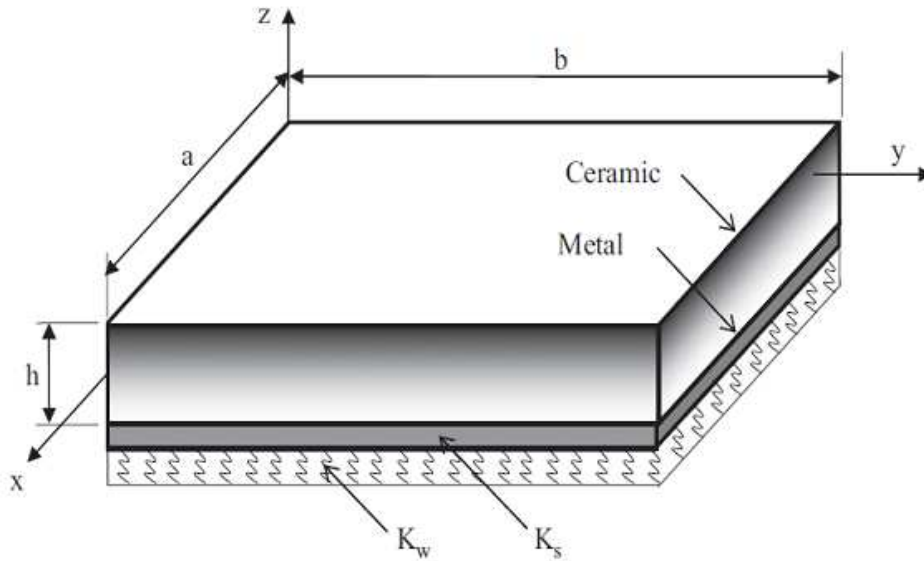


Figure III-1 : Système des coordonnées et la géométrie des plaques FG appuyées sur une fondation élastique

III.3 Formulations théoriques

III.3.1. Cinématique

Dans ce chapitre on traite la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre Xiang et al, [18]. En outre, on utilise principalement les idées derrière la nouvelle FSDT Mantari et Granados, [19] que les auteurs incluent des termes intégrés indéterminés pour modéliser l'effet de gauchissement des théories de la déformation du cisaillement. Dans le présent travail, on combine cette idée pour développer la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre avec le champ de déplacement modifié à son optimisation. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement. Dans ce travail, d'autres suppositions simplifiées sont adoptées dans la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre afin que le nombre de variables soit réduit. La cinématique de la théorie classique de la déformation du cisaillement du n ème ordre est donnée par Xiang et al, [18] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^n \left(\phi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right) \quad (1a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^n \left(\phi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1c)$$

Où $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ et u_0, v_0, w_0, ϕ_x et ϕ_y sont cinq fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque; Et h c'est l'épaisseur de la plaque. En considérant cela $\phi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\phi_y = \int \theta(x, y) dy$, le champ de déplacement de la nouvelle théorie raffinée peut être exprimé sous une forme plus simple (Chikh et al., [142]; Bourada et al., [143]; Merdaci et al., [144]; Hebali et al., [145]) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (2b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2c)$$

avec

$$f(z) = z - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^n \quad (3)$$

On peut observer que le champ de déplacement dans l'équation (2) n'utilise que quatre inconnues (u_0, v_0, w_0 and θ). Les souches non nulles associées à la cinématique dans l'équation (2) sont :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

Ou :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (5a) \\
 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{Bmatrix},
 \end{aligned}$$

Et :

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5b)$$

Les intégrales apparaissant dans les expressions ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (6)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisé, dans ce cas via Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (7)$$

III.3.2. Les équations Constitutives

Les propriétés matérielles de la plaque FG sont supposées être classées selon la règle des mélanges comme Sugano, [146]. La variation de la loi de puissance simple du métal pur à la face inférieure ($z = -h/2$) à la céramique pure à la face supérieure ($z = +h/2$) en fonction de la fraction volumique des constituants est supposée par (Praveen et Reddy, [147]; Bousahla et al., [148]; Al-Basyouni et Al., [149], Ait Yahia et al., [150], Ait Atmane et al., [151], Hadji et al., [152], Hassaine Daouadji et Hadji, [153], Bounouara et al., [154], Ahouel et al., [155], Boukhari Et al., [156], Houari et al., [157], Bellifa et al., [158]). Les caractéristiques mécaniques

et thermiques des FGM sont obtenues à partir de la fraction volumique des constituants du matériau. Nous supposons que les caractéristiques matérielles telles que le module de Young (E), la conductivité thermique (K), le coefficient de dilatation thermique (α) et le rapport de Poisson (ν) peuvent être obtenus par Yaghoobi et Torabi, [11]:

$$E(z) = E_M + (E_C - E_M) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (8a)$$

$$K(z) = K_M + (K_C - K_M) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (9b)$$

$$\alpha(z) = \alpha_M + (\alpha_C - \alpha_M) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad \nu(z) = \nu = \text{constant} \quad (9c)$$

Où k est l'exposant de loi de puissance et M et C sont les indices désignent respectivement les composants métalliques et en céramique. La valeur de k égale à zéro et à l'infini représente une plaque entièrement en céramique et en métal, respectivement.

Il convient de noter que, contrairement à la FSDT, cette théorie n'exige pas de facteurs de correction de cisaillement. En outre, les relations constitutives d'une plaque FG peuvent être écrites comme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)T(z) \\ \varepsilon_y - \alpha(z)T(z) \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Où $T(z)$ est la différence de température par rapport à la référence et C_{ij} ($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$) est la rigidité élastique de la plaque FG donnée par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (10)$$

Les équations d'équilibre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sous charges thermomécaniques peuvent être déterminées sur la base de l'énergie stationnaire potentielle Reddy, [159]. Les équations d'équilibre sont déduites comme suit

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0 + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0 \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Où K_w est le module de réaction de la sous-couche (coefficient élastique de la fondation) et K_s est le module de cisaillement de la sous-couche (rigidité de la couche de cisaillement).

En utilisant des relations constitutives, les résultats des contraintes et des moments sont exprimés comme suit :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{12}$$

Lors de la substitution de l'équation (4) dans l'équation (9) et les résultats ultérieurs dans l'équation (12) les résultats de contraintes sont déterminés sous la forme de matrice comme suit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^0 \\ \mathcal{E}_y^0 \\ \mathcal{Y}_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \\ 0 \\ M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

Où les composants de rigidité sont donnés comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (14a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (14b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (14c)$$

L'effort et le moment résultant $N_x^T = N_y^T$; $M_x^{bT} = M_y^{bT}$ et $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ au chargement thermique sont définis par

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (15)$$

Afin d'obtenir les équations de stabilité et d'étudier la réponse de flambement mécanique et thermique de la plaque FG reposant sur une fondation élastique, on utilise le critère d'équilibre adjacent Brush and Almroth, [160]. En employant cette approche, les équations gouvernantes de stabilité sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} - K_w w_0^1 + K_s \nabla^2 w_0^1 + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} &= 0 \\ \delta \theta : -k_1 M_x^{s1} - k_2 M_y^{s1} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Où N_x^0 , N_{xy}^0 et N_y^0 sont les forces de pré-flambement. L'équation (16) peut être écrite en termes de déplacements ($u_0^1, v_0^1, w_0^1, \theta^1$) en remplaçant le stress résultant de l'équation (13). Pour la plaque FG reposant sur une fondation élastique, les équations gouvernantes équation (16) prend la formule suivante

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^3} \\
 & B_{12}^s B' k_2 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x \partial y^2} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x \partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{12} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial y^2} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^s A' k_1 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^2 \partial y} \\
 & B_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial y^3} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^2 \partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{17b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial y^3} + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^4} \\
 & - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial y^4} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^4} + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + D_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial y^4} + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} - K_w w_0^1 + K_s \nabla^2 w_0^1 \\
 & + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{17c}$$

$$\begin{aligned}
 & - B_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x^3} - B_{12}^s \left(A' k_1 \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} + B' k_2 \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} \right) - B_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial y^3} \\
 & - D_{66} \left((A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) + D_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^4} + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & D_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial y^4} + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^s (A' k_1)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^4} - 2H_{12}^s A' k_1 B' k_2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s (B' k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial y^4} \\
 & - H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s (A' k_1)^2 \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial x^2} + A_{44}^s (B' k_2)^2 \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{17d}$$

III.2.3. Solution analytique

La méthode de la solution Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées en tant que produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations gouvernantes et les conditions limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ \theta^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer. α et β sont définis comme suit:

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (19)$$

En remplaçant l'équation (18) dans l'équation (17), la solution fermée de la charge de flambement peut être obtenue à partir de

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Où :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\ a_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \alpha(B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2) \\ a_{14} &= -\alpha(B_{11}^s A' k_1 \alpha^2 + B_{12}^s B' k_2 \beta^2 + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2) \\ a_{22} &= -\alpha^2 A_{66} - \beta^2 A_{22} \\ a_{23} &= \beta(B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2) \\ a_{24} &= -\beta(B_{22}^s B' k_2 \beta^2 + \alpha^2 (B_{12}^s A' k_1 + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2))) \\ a_{33} &= -\alpha^2 (D_{11}\alpha^2 + (2D_{12} + 4D_{66})\beta^2) - D_{22}\beta^4 - K_w - K_s (\alpha^2 + \beta^2) \alpha^2 \\ a_{34} &= D_{11}^s A' k_1 \alpha^4 + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2 \alpha^2 + D_{22}^s B' k_2 \beta^4 + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2 \alpha^2 \end{aligned} \quad (21)$$

En utilisant la technique de condensation pour éliminer les déplacements axiaux U_{mn} et V_{mn} , l'équation (20) peut être réécrite comme

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{33} + N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2 & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= a_{33} - \frac{a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{34} &= a_{34} - \frac{a_{14}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{24}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{43} &= a_{34} - \frac{a_{13}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{23}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{44} &= a_{44} - \frac{a_{14}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{24}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{aligned} \quad (23)$$

Le système de l'équation homogène (22) a une solution non triviale uniquement pour des valeurs discrètes de la charge de flambement. Pour une solution non triviale, le déterminant des coefficients (W_{mn}, X_{mn}) doit être égal à zéro

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{33} + N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2 & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

L'équation obtenue peut être résolue pour la charge de flambement. Ceci donne la relation suivante pour la charge de flambement

$$N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2 = \frac{\bar{a}_{34} \bar{a}_{43} - \bar{a}_{33} \bar{a}_{44}}{\bar{a}_{44}} \quad (25)$$

III.4 Flambement mécanique

Dans cette partie, une plaque rectangulaire simplement soutenue reposant sur une fondation élastique avec longueur a et largeur b est considérée en appliquant un chargement axial dans deux directions $N_x^0 = \chi_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \chi_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$. En employant l'équation (25), on détermine l'expression suivante pour la charge du flambement mécanique :

$$N_{cr}(m, n) = \frac{1}{\chi_1 \alpha^2 + \chi_2 \beta^2} \frac{\bar{a}_{34} \bar{a}_{43} - \bar{a}_{33} \bar{a}_{44}}{\bar{a}_{44}} \quad (26)$$

La charge critique de flambement est la valeur minimale du déterminant pour les valeurs de m et n .

III.5 Flambement thermique

Dans ce cas, une plaque rectangulaire soumise à des charges thermiques est considérée. Pour obtenir la température de flambement critique, il faut déterminer les charges thermiques pré-flambement. Par conséquent, en résolvant la forme de la membrane des équations d'équilibre et en utilisant la technique proposée par Meyers et Hyer [161], on constate que la charge de pré-flambement résultant de la plaque FG exposée à la variation de température dans l'épaisseur est Yaghoobi et Torabi, [11]

$$N_x^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T(z) dz, \quad N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T(z) dz, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (27)$$

Dans cet article, pour examiner l'effet du type de variation de température considéré dans l'épaisseur sur la réponse de flambement de stabilité de la plaque FG reposant sur une fondation élastique, trois types de chargement thermique dans l'épaisseur de la plaque sont pris.

III.5.1. Augmentation uniforme de la température (UTR)

On suppose que la température uniforme initiale de la plaque FG est T_i , et la température est uniformément élevée jusqu'à une valeur finale T_f telle que la plaque flambe. Ainsi, le changement de température est Yaghoobi et Torabi, [11]

$$T(z) = T_f - T_i = \Delta T \quad (28)$$

En employant les équations (25), (27) et (28), l'équation suivante pour la charge de flambement thermique est déduite

$$\Delta T(m, n) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{44}} \frac{1}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z)}{1-\nu} dz} \quad (29)$$

III.5.2. Répartition linéaire de la température à travers l'épaisseur (LTD)

La distribution de température linéaire suivante dans l'épaisseur de la plaque FG est considérée Yaghoobi et Torabi, [11]

$$T(z) = \frac{\Delta T}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right) + T_M, \quad \Delta T = T_C - T_M \quad (30)$$

De manière identique à la procédure UTR, l'expression suivante pour la charge de flambement thermique est déduite

$$\Delta T(m, n) = \frac{1}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)}{1-\nu} dz} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{44}} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) T_M}{1-\nu} dz \right) \quad (31)$$

III.5.3. Répartition non linéaire de la température à travers l'épaisseur (NTD)

Le champ de température considéré comme uniforme sur la surface de la plaque mais variant dans le sens de l'épaisseur en raison de la conduction de la chaleur. Dans ce cas, la variation de température dans l'épaisseur peut être déterminée en résolvant l'équation de transfert de chaleur stationnaire comme Yaghoobi et Torabi, [11]

$$\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{dT(z)}{dz} \right) = 0, \quad T\left(\frac{h}{2}\right) = T_C \quad \text{and} \quad T\left(-\frac{h}{2}\right) = T_M \quad (32)$$

L'équation différentielle (32) peut être facilement résolue en utilisant les séries polynomiales. Ainsi, la variation de température dans l'épaisseur de la plaque est déterminée comme

$$T(z) = T_M + \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right) \Delta T \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k i + 1} \left(\frac{(K_M - K_C) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k}{K_M} \right)^i \right)}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k i + 1} \left(\frac{(K_M - K_C)}{K_M} \right)^i \right)}, \quad \Delta T = T_C - T_M \quad (33)$$

En suivant la procédure indiquée à la section III.4.1, nous pouvons déterminer le ΔT . Inutile de dire que la plus faible valeur parmi tous ces ΔT pour chaque m et n est connue comme la différence critique de température de flambement ΔT_{cr} .

III.6 Conclusion

Dans le présent travail, on combine cette idée pour développer la théorie de la déformation du cisaillement du n ème ordre avec le champ de déplacement modifié à son optimisation. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier. Une étude comparative du travail réalisé avec les solutions existantes ont permis la validation des solutions acquises.

Chapitre IV.

Résultats et discussion

Chapitre IV. Résultats et discussion

IV.1 Introduction

Dans cette section, les exemples numériques sont examinés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie proposée dans le calcul des forces de flambement mécanique et thermique. Les solutions analytiques sont déterminées en utilisant la méthode Navier pour les plaques FG simplement supportées reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak. Des charges critiques de flambement sont déterminées et la comparaison est effectuée avec les résultats existants.

IV.2 Résultats numériques et discussions

Dans cette section et pour les résultats numériques, on suppose une plaque Al / Al₂O₃ en aluminium (comme métal) et en alumine (comme céramique). Avec les propriétés suivantes : Le module de Young, la conductivité thermique et le coefficient de dilatation thermique sont :

- $E_M = 70 \text{ GPa}$, $\alpha_M = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $K_M = 204 \text{ W/mK}$, et ceux de l'alumine sont
- $E_C = 380 \text{ GPa}$, $\alpha_C = 7.4 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $K_C = 10.4 \text{ W/mK}$, respectivement.

Le rapport de Poisson de la plaque est considéré comme constant dans l'épaisseur et égale à 0,3 (Duc et Tung, [10]; Yaghoobi et Torabi, [11]). Pour plus de commodité, les quantités non dimensionnelles suivantes sont utilisées pour présenter les résultats numériques sous forme de tableaux :

$$\bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D_C}, \quad \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{D_C}, \quad \hat{N} = \frac{N_{cr} b^2}{D_C}, \quad \bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_M h^3}, \quad \tilde{N} = \frac{N_{cr} a^2}{\pi^2 D_C}, \quad D_C = \frac{E_C h^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$D_M = \frac{E_M h^3}{12(1-\nu^2)}$$

IV.3 Comparaisons pour le flambement mécanique

Les charges critiques de flambement non dimensionnelles \tilde{N} de la plaque carrée homogène et mince, simplement appuyée, sans ou reposant sur des fondations élastiques sont données dans le tableau VI.1.

Tableau IV-1 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \tilde{N} d'une plaque carrée homogène et simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/h = 1000$, $\chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).

Theory	(\bar{K}_w, \bar{K}_s)			
	(0,0)	(0,100)	(100,0)	(100,100)
CPT (Lam et al., 2000)	4.00000	18.92 ^a	5.027	19.17 ^a
FSDT (Akhavan et al., 2009)	3.99998	18.9151 ^a	5.02658	19.1717 ^a
FSDT (Sobhy, 2013)	3.99998	18.91506 ^a	5.02658	19.17171 ^a
(Yaghoobi and Fereidoon, 2014) $n = 3$	3.99990	18.91400 ^a	5.02650	19.17200
Present $n = 3$	3.99999	18.91513 ^a	5.02659	19.17178 ^a
Present $n = 5$	3.99999	18.91514 ^a	5.02659	19.17179 ^a
Present $n = 7$	3.99999	18.91514 ^a	5.02659	19.17179 ^a
Present $n = 9$	3.99999	18.91514 ^a	5.02659	19.17179 ^a

^a Le mode de la plaque est $(m, n) = (2, 1)$

Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par Lam et al. [162] basés sur CPT, Akhavan et al. [163] et sobhy [164] basés sur FSDT et Yaghoobi et Fereidoon [13] basés sur RPT. Il est mentionné que les solutions de Lam et al. [162] sont déduites via la fonction de Green. Un bon accord est observé entre la théorie proposée et celle publiée.

En outre, le tableau IV.2 démontre les charges du flambement non dimensionnelles \hat{N} de la plaque homogène simplement supportée sous compression plane ($\chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).

Tableau IV-2 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \hat{N} d'une plaque homogène simplement soutenue reposant sur des fondations élastiques ($\chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).

a/b	(\bar{K}_w, \bar{K}_s)	Théorie	a/h			
			5	10	100	1000
0.5	(0,0)	FSDT (*)	54.3207	59.6629	61.6641	61.6848
		FSDT (**)	54.0859	59.5887	61.6633	61.6848
		RPT (***) $n = 3$	54.0737	59.5856	61.6633	61.6848
		Present $n = 3$	54.0737	59.5856	61.6633	61.6848
		Present $n = 5$	54.2031	59.6265	61.6637	61.6848
		Present $n = 9$	54.4901	59.7136	61.6647	61.6848
	(100,10)	FSDT (*)	144.6952	150.1910	152.1930	152.2130
		FSDT (**)	144.6140	150.1170	152.1920	152.2130
		RPT (***) $n = 3$	144.6022	150.1141	152.1918	152.2133
		Present $n = 3$	144.6022	150.1141	152.1918	152.2133
		Present $n = 5$	144.7315	150.1549	152.1922	152.2133
		Present $n = 9$	145.0185	150.2421	152.1931	152.2133
	(1000,100)	FSDT (*)	643.5000 ^b	686.1710 ^a	704.3860 ^a	704.5890 ^a
		FSDT (**)	641.380 ^b	685.567 ^a	704.378 ^a	704.589 ^a
		RPT (***) $n = 3$	640.9782 ^b	685.5369 ^a	704.3775 ^a	704.5888 ^a
		Present $n = 3$	640.9782 ^b	685.5369 ^a	704.3775 ^a	704.5888 ^a
		Present $n = 5$	642.1623 ^b	685.8694 ^a	704.3819 ^a	704.5888 ^a
		Present $n = 9$	646.0620 ^b	686.6014 ^a	704.3910 ^a	704.5889 ^a
1	(0,0)	FSDT (*)	32.4414	37.4477	39.457	39.4782
		FSDT (**)	32.2398	37.3753	39.4562	39.4782
		RPT (***) $n = 3$	32.2276	37.3721	39.4562	39.4782
		Present $n = 3$	32.2276	37.3721	39.4562	39.4782
		Present $n = 5$	32.3387	37.4120	39.4566	39.4782
		Present $n = 9$	32.5932	37.4977	39.4576	39.4782
	(100,10)	FSDT (*)	55.0289 ^a	67.5798	69.5891	69.6103
		FSDT (**)	54.6116 ^a	67.5074	69.5883	69.6103
		RPT (***) $n = 3$	54.5692 ^a	67.5042	69.5883	69.6103
		Present $n = 3$	54.5692 ^a	67.5042	69.5883	69.6103
		Present $n = 5$	54.7998 ^a	67.5441	69.5887	69.6103
		Present $n = 9$	55.4045 ^a	67.6299	69.5897	69.6103
	(1000,100)	FSDT (*)	174.9760 ^b	204.6510 ^a	211.9610 ^a	212.0140 ^a
		FSDT (**)	174.391 ^b	204.416 ^a	211.928 ^a	212.014 ^a
		RPT (***) $n = 3$	174.2676 ^b	204.4040 ^a	211.9285 ^a	212.0145 ^a
		Present $n = 3$	174.2676 ^b	204.4040 ^a	211.9285 ^a	212.0145 ^a

a/b	(\bar{K}_w, \bar{K}_s)	Théorie	a/h			
			5	10	100	1000
		Present $n = 5$	174.5952 ^b	204.5334 ^a	211.9302 ^a	212.0145 ^a
		Present $n = 9$	175.7258 ^b	204.8204 ^a	211.9340 ^a	212.0145 ^a
2	(0,0)	FSDT (*)	19.2255 ^b	32.4414 ^a	39.3930 ^a	39.4776 ^a
		FSDT (**)	19.0400 ^b	32.2398 ^a	39.3897 ^a	39.4775 ^a
		RPT (***) $n = 3$	18.9794 ^b	32.2276 ^a	39.3896 ^a	39.4775 ^a
		Present $n = 3$	18.9794 ^b	32.2276 ^a	39.3896 ^a	39.4775 ^a
		Present $n = 5$	19.0850 ^b	32.3387 ^a	39.3914 ^a	39.4775 ^a
		Present $n = 9$	19.5382 ^b	32.5932 ^a	39.3952 ^a	39.4776 ^a
	(100,10)	FSDT (*)	22.7476 ^c	37.5182 ^b	45.0262 ^a	45.1108 ^a
		FSDT (**)	22.6778 ^c	37.8581 ^b	45.0229 ^a	45.1108 ^a
		RPT (***) $n = 3$	22.5785 ^c	37.8358 ^b	45.0228 ^a	45.1108 ^a
		Present $n = 3$	22.5785 ^c	37.8358 ^b	45.0228 ^a	45.1108 ^a
		Present $n = 5$	22.6248 ^c	37.9967 ^b	45.0246 ^a	45.1108 ^a
		Present $n = 9$	23.1299 ^c	38.3858 ^b	45.0284 ^a	45.1108 ^a
	(1000,100)	FSDT (*)	–	72.8290 ^c	85.0953 ^b	85.2563 ^b
		FSDT (**)	52.2276 ^d	72.4117 ^c	85.0889 ^b	85.2562 ^b
		RPT (***) $n = 3$	50.0214 ^d	72.3694 ^c	85.0887 ^b	85.2562 ^b
		Present $n = 3$	50.0214 ^d	72.3694 ^c	85.0887 ^b	85.2562 ^b
		Present $n = 5$	49.9604 ^d	72.5999 ^c	85.0921 ^b	85.2562 ^b
		Present $n = 9$	50.4899 ^d	73.2046 ^c	85.0994 ^b	85.2563 ^b

(*) (Akhavan et al., [155]); (**) (Sobhy, [156]); (***) (Yaghoobi and Fereidoon, [13])

^a Le mode de la plaque est $(m, n) = (2, 1)$.

^b Le mode de la plaque est $(m, n) = (3, 1)$.

^c Le mode de la plaque est $(m, n) = (4, 1)$.

^d Le mode de la plaque est $(m, n) = (5, 1)$.

Les résultats calculés basés sur le modèle proposé sont comparés à ceux d'Akhavan et al. [163] et Sobhy [164] basé sur FSDT, et Yaghoobi et Fereidoon [13] basés sur RPT. Un excellent accord peut être observé pour différentes valeurs des coefficients de fondation \bar{K}_w et \bar{K}_s , le rapport d'aspect a/b , et le rapport d'épaisseur h/a .

Les tableaux IV.3-5 calculent les charges critiques du flambement non dimensionnelles \bar{N} de la plaque carrée Al / Al₂O₃ simplement appuyée pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance k et des coefficients de base \bar{K}_w et \bar{K}_s .

Tableau IV-3 : Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement soutenue reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 10, \chi_1 = -1, \chi_2 = 0$).

(\bar{K}_w, \bar{K}_s)	Théorie	k					
		0	0.5	1	2	5	10
(0,0)	TSDT (*)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
	Present $n = 3$	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
	Present $n = 5$	18.5983	12.1337	9.3476	7.2744	6.0593	5.4700
	Present $n = 7$	18.6224	12.1468	9.3578	7.2855	6.0780	5.4869
	Present $n = 9$	18.6409	12.1569	9.3657	7.2938	6.0911	5.4999
(100,10)	TSDT (*)	21.3379	14.8823	12.0985	10.0224	8.7947	8.2122
	Present $n = 3$	21.3379	14.8823	12.0985	10.0224	8.7947	8.2122
	Present $n = 5$	21.3577	14.8930	12.1069	10.0337	8.8187	8.2294
	Present $n = 7$	21.3817	14.9062	12.1172	10.0448	8.8373	8.2463
	Present $n = 9$	21.4003	14.9163	12.1251	10.0532	8.8504	8.2592
(1000,100)	TSDT (*)	40.6477 ^a	31.4605 ^a	27.4319 ^a	24.3470 ^a	22.3602 ^a	21.4516 ^a
	Present $n = 3$	40.6477 ^a	31.4605 ^a	27.4319 ^a	24.3470 ^a	22.3602 ^a	21.4516 ^a
	Present $n = 5$	40.7120 ^a	31.4960 ^a	27.4600 ^a	24.3845 ^a	22.4373 ^a	21.5053 ^a
	Present $n = 7$	40.7922 ^a	31.5405 ^a	27.4950 ^a	24.4222 ^a	22.4982 ^a	21.5593 ^a
	Present $n = 9$	40.8547 ^a	31.5750 ^a	27.5222 ^a	24.4506 ^a	22.5415 ^a	21.6010 ^a

(*) (Thai and Kim, [165])

^a Le mode de la plaque est $(m, n) = (2, 1)$.

Tableau IV-4 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 10, \chi_1 = 0, \chi_2 = -1$).

(\bar{K}_w, \bar{K}_s)	Théorie	k					
		0	0.5	1	2	5	10
(0,0)	TSDT (*)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
	Present $n = 3$	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
	Present $n = 5$	18.5983	12.1337	9.3476	7.2744	6.0593	5.4700
	Present $n = 7$	18.6224	12.1468	9.3578	7.2855	6.0780	5.4869
	Present $n = 9$	18.6409	12.1569	9.3657	7.2938	6.0911	5.4999
(100,10)	TSDT (*)	21.3379	14.8823	12.0985	10.0224	8.7947	8.2122
	Present $n = 3$	21.3379	14.8823	12.0985	10.0224	8.7947	8.2122
	Present $n = 5$	21.3577	14.8930	12.1069	10.0337	8.8187	8.2294
	Present $n = 7$	21.3817	14.9062	12.1172	10.0448	8.8373	8.2463
	Present $n = 9$	21.4003	14.9163	12.1251	10.0532	8.8504	8.2592
(1000,100)	TSDT (*)	40.6477 ^e	31.4605 ^e	27.4319 ^e	24.3470 ^e	22.3602 ^e	21.4516 ^e
	Present $n = 3$	40.6477 ^e	31.4605 ^e	27.4319 ^e	24.3470 ^e	22.3602 ^e	21.4516 ^e
	Present $n = 5$	40.7120 ^e	31.4960 ^e	27.4600 ^e	24.3845 ^e	22.4373 ^e	21.5053 ^e
	Present $n = 7$	40.7922 ^e	31.5405 ^e	27.4950 ^e	24.4222 ^e	22.4982 ^e	21.5593 ^e
	Present $n = 9$	40.8547 ^e	31.5750 ^e	27.5222 ^e	24.4506 ^e	22.5415 ^e	21.6010 ^e

(*) (Thai and Kim, [165]), ^a Le mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$.

Tableau IV-5 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques ($a/b = 1, a/h = 10, \chi_1 = -1, \chi_2 = -1$).

(\bar{K}_w, \bar{K}_s)	Méthode	k					
		0	0.5	1	2	5	10
(0,0)	TSDT (*)	9.2893	6.0615	4.6695	3.6315	3.0177	2.7264
	Present $n = 3$	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264
	Present $n = 5$	9.2992	6.0668	4.6738	3.6372	3.0297	2.7350
	Present $n = 7$	9.3112	6.0734	4.6789	3.6427	3.0390	2.7435
	Present $n = 9$	9.3205	6.0785	4.6829	3.6469	3.0455	2.7499
(100,10)	TSDT (*)	10.6689	7.4411	6.0492	5.0112	4.3973	4.1061
	Present $n = 3$	10.6689	7.4411	6.0492	5.0112	4.3973	4.1061
	Present $n = 5$	10.6788	7.4465	6.0535	5.0169	4.4093	4.1147
	Present $n = 7$	10.6909	7.4531	6.0586	5.0224	4.4187	4.1231
	Present $n = 9$	10.7001	7.4581	6.0625	5.0266	4.4252	4.1296
(1000,100)	TSDT (*)	23.0860	19.8582	18.4663	17.4283	16.8144	16.5232
	Present $n = 3$	23.0860	19.8582	18.4663	17.4283	16.8144	16.5232
	Present $n = 5$	23.0959	19.8636	18.4705	17.4339	16.8264	16.5318
	Present $n = 7$	23.1079	19.8702	18.4757	17.4395	16.8357	16.5402
	Present $n = 9$	23.1172	19.8752	18.4796	17.4437	16.8423	16.5467

Les charges critiques du flambement non dimensionnelles calculées sont comparées à celles fournies par Thai et Kim [165]. Il convient de noter que les résultats donnés par Thai et Kim [165]) étaient basés sur TSDT avec cinq variables indépendantes.

Dans ces tableaux, trois cas de chargement différents sont supposés, et six valeurs arbitraires de l'indice de la loi de puissance k sont considérées. Trois combinaisons de coefficients de base \bar{K}_w et \bar{K}_s sont également prises en considération.

On peut observer que les résultats calculés à l'aide du modèle proposé sont en excellent accord avec ceux rapportés par Thai et Kim [165] pour tous les types de chargement, l'indice de la loi de puissance et les coefficients de fondation. Il faut signaler que, dans cet exemple, les coefficients de fondation sans dimension \bar{K}_w et \bar{K}_s sont $K_w a^4 / D_M$ et $K_s a^2 / D_M$ respectivement.

IV.4 Comparaisons pour le flambement thermique

Afin de vérifier les solutions de stabilité thermique déterminées dans ce travail, la différence de la température critique du flambement ΔT_{cr} , pour les plaques FG reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak pour l'UTR, LTD et NTD, est présentée respectivement dans les tableaux VI.6-8.

Tableau IV-6 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous UTR.

k	Théorie	$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (0,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,10)$		
		$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$
0	CPT ^(a)	6.83964	1.70991	0.42748	7.01519	1.7538	0.43845	10.48019	2.62005	0.65501
	FSDT ^(b)	5.58069	1.61862	0.42153	5.75623	1.66251	0.43251	9.22123	2.52876	0.64907
	HSDT ^(a)	5.58344	1.61868	0.42154	5.75899	1.66257	0.43251	9.22398	2.52882	0.64907
	TPT ^(a)	5.58556	1.61882	0.42154	5.76109	1.6627	0.43252	9.2261	2.52896	0.64908
	RPT ^(c) $n = 3$	5.58344	1.61868	0.42154	5.75898	1.66257	0.43251	9.22398	2.52882	0.64907
	Present $n = 3$	5.58344	1.61868	0.42154	5.75898	1.66257	0.43251	9.22398	2.52882	0.64907
	Present $n = 5$	5.60269	1.62041	0.42165	5.77823	1.66429	0.43263	9.24323	2.53055	0.64919
	Present $n = 9$	5.64677	1.62412	0.42191	5.82231	1.66801	0.43288	9.28731	2.53426	0.64944
1	CPT ^(a)	3.17751	0.79438	0.19859	3.34112	0.83528	0.20882	6.57068	1.64267	0.41067
	FSDT ^(b)	2.67039	0.75837	0.19626	2.834	0.79928	0.20649	6.06356	1.60667	0.40834
	HSDT ^(a)	2.67153	0.7584	0.19627	2.83515	0.7993	0.20649	6.0647	1.60669	0.40835
	TPT ^(a)	2.67241	0.75845	0.19627	2.83603	0.79935	0.20649	6.06558	1.60674	0.40834
	RPT ^(c) $n = 3$	2.67153	0.75840	0.19627	2.83514	0.79930	0.20649	6.06470	1.60669	0.40834
	Present $n = 3$	2.67153	0.75840	0.19627	2.83514	0.79930	0.20649	6.06470	1.60669	0.40834
	Present $n = 5$	2.67951	0.75908	0.19631	2.84312	0.79999	0.20654	6.07268	1.60738	0.40839
	Present $n = 9$	2.69776	0.76056	0.19641	2.86137	0.80146	0.20664	6.09094	1.60885	0.40848
5	CPT ^(a)	2.90629	0.72657	0.18164	3.13305	0.78326	0.19582	7.60938	1.90234	0.47559
	FSDT ^(b)	2.35948	0.68678	0.17905	2.58625	0.74347	0.19322	7.06257	1.86255	0.47299
	HSDT ^(a)	2.27501	0.67931	0.17854	2.50179	0.736	0.19271	6.9781	1.85508	0.47248
	TPT ^(a)	2.27131	0.67895	0.17851	2.49808	0.73564	0.19268	6.9744	1.85472	0.47245
	RPT ^(c) $n = 3$	2.27501	0.67931	0.17854	2.50178	0.73600	0.19271	6.97810	1.85508	0.47248
	Present $n = 3$	2.27501	0.67931	0.17854	2.50178	0.73600	0.19271	6.97810	1.85508	0.47248
	Present $n = 5$	2.30466	0.68201	0.17872	2.53144	0.73871	0.19290	7.00775	1.85779	0.47267
	Present $n = 9$	2.34556	0.68559	0.17897	2.57233	0.74228	0.19314	7.04865	1.86136	0.47291
10	CPT ^(a)	2.9877	0.74693	0.18673	3.24365	0.81091	0.20273	8.29575	2.07394	0.51848
	FSDT ^(b)	2.36822	0.70108	0.18373	2.62416	0.76507	0.19972	7.67626	2.02809	0.51548
	HSDT ^(a)	2.27678	0.69269	0.18314	2.53273	0.75668	0.19914	7.58483	2.0197	0.5149
	TPT ^(a)	2.27551	0.69254	0.18313	2.53146	0.75653	0.19913	7.58356	2.01955	0.51489
	RPT ^(c) $n = 3$	2.27679	0.69269	0.18314	2.53273	0.75668	0.19914	7.58483	2.01970	0.51490
	Present $n = 3$	2.27679	0.69269	0.18314	2.53273	0.75668	0.19914	7.58483	2.01970	0.51490
	Present $n = 5$	2.29950	0.69488	0.18330	2.55544	0.75886	0.19929	7.60754	2.02189	0.51505
	Present $n = 9$	2.34110	0.69867	0.18356	2.59704	0.76266	0.19956	7.64914	2.02568	0.51531

^(a) (Zenkour and Sobhy, [166])

^(b) (Yaghoobi and Torabi, [11])

^(c) (Yaghoobi and Fereidoon, [13])

Tableau IV-7 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous LTD.

k	Théorie	$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (0,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,10)$		
		$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$
0	CPT ^(a)	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.8669	20.95037	5.23009	1.30002
	FSDT ^(b)	11.15138	3.22725	0.83307	11.50246	3.31502	0.85501	18.43246	5.04752	1.28814
	HSDT ^(a)	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	TPT ^(a)	11.16112	3.22764	0.83309	11.5122	3.31541	0.85503	18.4422	5.04791	1.28816
	RPT ^(c) $n = 3$	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	Present $n = 3$	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	Present $n = 5$	11.19537	3.23082	0.83331	11.54645	3.31859	0.85525	18.47646	5.05109	1.28838
	Present $n = 9$	11.28354	3.23824	0.83381	11.63462	3.32601	0.85575	18.56463	5.05852	1.28888
1	CPT ^(a)	5.94993	1.48045	0.36308	6.25678	1.55716	0.38226	12.31372	3.0714	0.76082
	FSDT ^(b)	4.99885	1.41292	0.35871	5.3057	1.48964	0.37789	11.36263	3.00387	0.75645
	HSDT ^(a)	5.00099	1.41297	0.35871	5.30784	1.48968	0.37789	11.36477	3.00391	0.75645
	TPT ^(a)	5.00264	1.41307	0.35872	5.30948	1.48978	0.37789	11.36642	3.00402	0.75645
	RPT ^(c) $n=3$	5.00099	1.41297	0.35871	5.30784	1.48968	0.37789	11.36477	3.00391	0.75645
	Present $n = 3$	5.00099	1.41297	0.35871	5.30784	1.48968	0.37789	11.36477	3.00391	0.75645
	Present $n = 5$	5.01595	1.41426	0.35880	5.32280	1.49097	0.37798	11.37974	3.00520	0.75654
	Present $n = 9$	5.05019	1.41702	0.35898	5.35703	1.49374	0.37816	11.41397	3.00797	0.75672
5	CPT ^(a)	4.99396	1.24204	0.30405	5.3843	1.33962	0.32845	13.08936	3.26588	0.81002
	FSDT ^(b)	4.05274	1.17354	0.29959	4.44308	1.27113	0.32399	12.14814	3.19739	0.80555
	HSDT ^(a)	3.90735	1.16069	0.29871	4.2977	1.25827	0.3231	12.00275	3.18453	0.80467
	TPT ^(a)	3.90098	1.16006	0.29866	4.29132	1.25765	0.32306	11.99637	3.18391	0.80462
	RPT ^(c) $n = 3$	3.90735	1.16069	0.29871	4.29770	1.25827	0.32310	12.00275	3.18453	0.80467
	Present $n = 3$	3.90735	1.16069	0.29871	4.29770	1.25827	0.32310	12.00275	3.18453	0.80467
	Present $n = 5$	3.95839	1.16534	0.29903	4.34873	1.26293	0.32342	12.05379	3.18919	0.80499
	Present $n = 9$	4.02878	1.17149	0.29945	4.41913	1.26907	0.32385	12.12418	3.19534	0.80541
10	CPT ^(a)	5.28555	1.31474	0.32204	5.7391	1.42813	0.35039	14.69174	3.66629	0.90993
	FSDT ^(b)	4.18778	1.2335	0.31672	4.64132	1.34688	0.34506	13.59396	3.58504	0.9046
	HSDT ^(a)	4.02576	1.21864	0.31568	4.4793	1.33203	0.34403	13.43194	3.57019	0.90357
	TPT ^(a)	4.0235	1.21837	0.31566	4.47705	1.33176	0.34401	13.42969	3.56992	0.90355
	RPT ^(c) $n = 3$	4.02576	1.21864	0.31568	4.47930	1.33203	0.34403	13.43194	3.57019	0.90357
	Present $n = 3$	4.02576	1.21864	0.31568	4.47930	1.33203	0.34403	13.43194	3.57019	0.90357
	Present $n = 5$	4.06600	1.22251	0.31596	4.51954	1.33589	0.34430	13.47218	3.57405	0.90384
	Present $n = 9$	4.13972	1.22923	0.31642	4.59326	1.34261	0.34477	13.54590	3.58077	0.90431

^(a) (Zenkour and Sobhy, [166])

^(b) (Yaghoobi and Torabi, [11])

^(c) (Yaghoobi and Fereidoon, [13])

Tableau IV-8 : Comparaison de la différence de température critique du flambement $\Delta T_{cr} \times 10^{-3}$ de la plaque FG carrée reposant sur une fondation élastique sous NTD.

k	Théorie	$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (0,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,0)$			$(\bar{K}_w, \bar{K}_s) = (10,10)$		
		a/h = 5	a/h = 10	a/h = 20	a/h = 5	a/h = 10	a/h = 20	a/h = 5	a/h = 10	a/h = 20
0	CPT ^(a)	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.8669	20.95037	5.23009	1.30002
	FSDT ^(b)	11.15138	3.22725	0.83307	11.50246	3.31502	0.85501	18.43246	5.04752	1.28814
	HSDT ^(a)	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	TPT ^(a)	11.16112	3.22764	0.83309	11.5122	3.31541	0.85503	18.4422	5.04791	1.28816
	RPT ^(c) n = 3	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	Present n = 3	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	Present n = 5	11.19537	3.23082	0.83331	11.54645	3.31859	0.85525	18.47646	5.05109	1.28838
	Present n = 9	11.28354	3.23824	0.83381	11.63462	3.32601	0.85575	18.56463	5.05852	1.28888
1	CPT ^(a)	8.25905	2.055	0.50399	8.68499	2.16148	0.53061	17.09257	4.26338	1.05608
	FSDT ^(b)	6.93886	1.96127	0.49792	7.36479	2.06775	0.52454	15.77238	4.16965	1.05002
	HSDT ^(a)	6.94183	1.96133	0.49792	7.36777	2.06781	0.52455	15.77535	4.16971	1.05002
	TPT ^(a)	6.94412	1.96147	0.49793	7.37005	2.06796	0.52455	15.77763	4.16985	1.05003
	RPT ^(c) n = 3	6.94183	1.96133	0.49792	7.36777	2.06781	0.52455	15.77535	4.16971	1.05002
	Present n = 3	6.94183	1.96133	0.49792	7.36777	2.06781	0.52455	15.77535	4.16971	1.05002
	Present n = 5	6.96261	1.96312	0.49805	7.38854	2.06960	0.52467	15.79612	4.17150	1.05014
	Present n = 9	7.01012	1.96696	0.49830	7.43606	2.07344	0.52492	15.84364	4.17534	1.05040
5	CPT ^(a)	6.24563	1.55334	0.38026	6.73381	1.67538	0.41077	16.37004	4.08444	1.01304
	FSDT ^(b)	5.06851	1.46768	0.37468	5.55669	1.58972	0.40519	15.19291	3.99878	1.00745
	HSDT ^(a)	4.88668	1.4516	0.37357	5.37486	1.57364	0.40408	15.01109	3.9827	1.00635
	TPT ^(a)	4.87871	1.45082	0.37352	5.36688	1.57286	0.40403	15.00311	3.98192	1.00629
	RPT ^(c) n = 3	4.88668	1.45160	0.37357	5.37486	1.57364	0.40408	15.01109	3.98270	1.00635
	Present n = 3	4.88668	1.45160	0.37357	5.37486	1.57364	0.40408	15.01109	3.98270	1.00635
	Present n = 5	4.95051	1.45742	0.37398	5.43869	1.57946	0.40449	15.07492	3.98852	1.00675
	Present n = 9	5.03855	1.46511	0.37450	5.52672	1.58715	0.40501	15.16295	3.99621	1.00728
10	CPT ^(a)	6.10899	1.51957	0.37221	6.6332	1.65062	0.40497	16.98057	4.23746	1.05169
	FSDT ^(b)	4.8402	1.42567	0.36606	5.3644	1.55672	0.39882	15.71178	4.14356	1.04553
	HSDT ^(a)	4.65293	1.40849	0.36486	5.17714	1.53954	0.39763	15.52451	4.12639	1.04434
	TPT ^(a)	4.65033	1.40818	0.36484	5.17453	1.53923	0.3976	15.52191	4.12608	1.04432
	RPT ^(c) n = 3	4.65293	1.40849	0.36486	5.17714	1.53954	0.39763	15.52451	4.12639	1.04434
	Present n = 3	4.65293	1.40849	0.36486	5.17714	1.53954	0.39763	15.52451	4.12639	1.04434
	Present n = 5	4.69944	1.41296	0.36518	5.22365	1.54401	0.39794	15.57102	4.13086	1.04465
	Present n = 9	4.78465	1.42073	0.36572	5.30885	1.55178	0.39848	15.65623	4.13862	1.04519

^(a) (Zenkour and Sobhy, [166])

^(b) (Yaghoobi and Torabi, [11])

^(c) (Yaghoobi and Fereidoon, [13])

On peut déduire des tableaux VI.6-8 qu'il existe un très bon accord entre la théorie actuelle (avec quatre variables) et d'autres théories des plaques d'ordre supérieur (avec cinq variables). Les différences significatives entre les résultats des théories de la plaque de déformation du cisaillement et celles du CPT sont attribuables à l'effet de déformation du cisaillement négligé par le CPT. En outre, un excellent accord est démontré entre le modèle actuel et le RPT pour toutes les valeurs de k et a/h .

IV.4.1 Effet de l'indice de puissance sur la charge critique du flambement non dimensionnelle

Dans la figure IV.1, on examine l'influence de l'indice de la loi de puissance (k) sur les charges critiques du flambement non dimensionnelles \bar{N} d'une plaque FG carrée reposant sur des fondations élastiques.

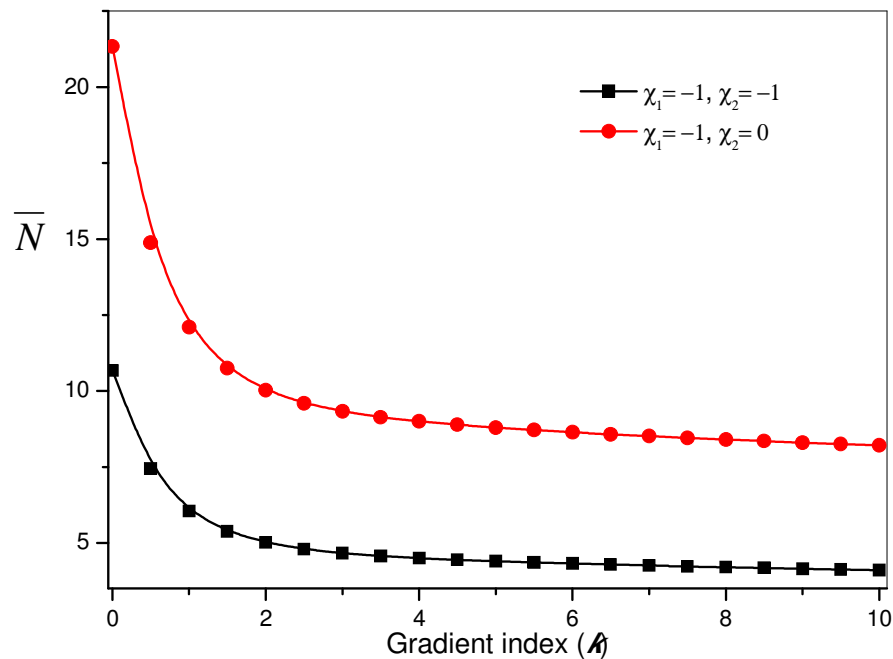


Figure IV-1 : Effet de l'indice de gradient sur la charge critique du flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque FG carrée reposant sur des fondations élastiques. ($a/h=10, \bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 10$).

On peut déduire de cette figure que la charge critique du flambement non dimensionnelle diminue initialement, puis la variation des courbes n'est pas significative en augmentant la valeur de l'indice de la loi de puissance.

IV.4.2 Effet du rapport d'épaisseur sur la température critique du flambement

Figure IV.2 montre la variation de ΔT_{cr} par rapport à la variation de a/h pour les trois types de charges thermiques.

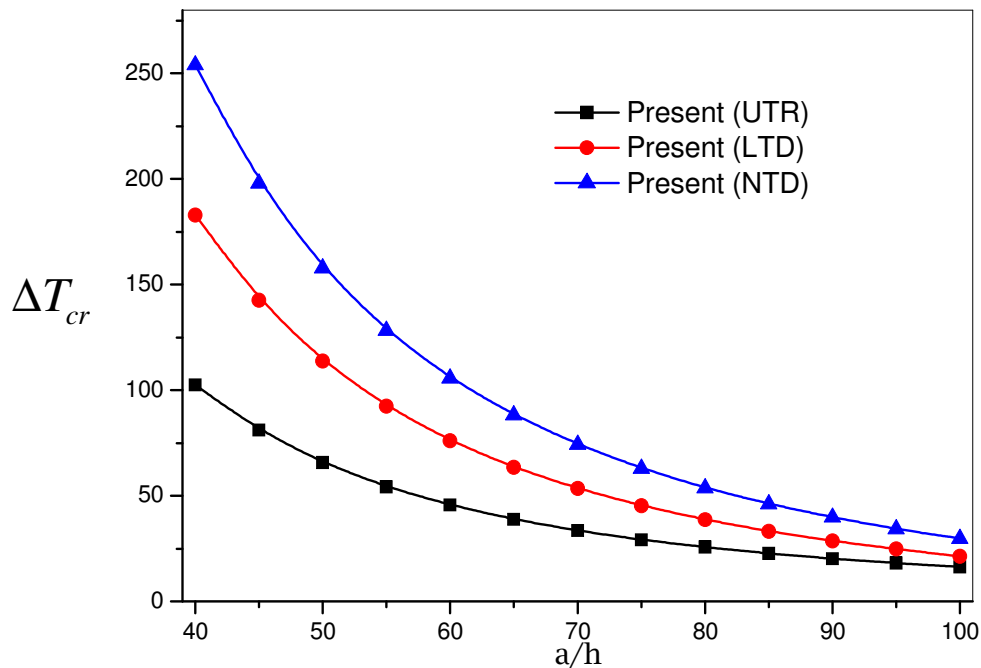


Figure IV-2 : Effet du rapport côté-épaisseur sur ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée reposant sur des fondations élastiques. ($a/h = 20$, $\bar{K}_w = 10$, $\bar{K}_s = 10$, $k = 1$).

A partir de cette figure, on peut remarquer que la plus forte valeur ΔT_{cr} de NTD est comparable à deux autres charges thermiques. De plus, en augmentant le rapport entre coté et épaisseur de la plaque, ΔT_{cr} diminue.

IV.5 Conclusion

Une théorie efficace et simple de la déformation du cisaillement du n ème ordre est proposée et appliquée dans le présent document pour l'étude de la stabilité des plaques FG reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak. En proposant d'autres hypothèses simplifiantes aux HSDT classiques, en considérant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnues et des équations gouvernantes de la théorie actuelle sont réduits à un seul, et donc, rendant cette théorie simple et efficace à utiliser. En utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale, les équations gouvernantes différentielles sont obtenues et les solutions analytiques basées sur la procédure de la solution Navier sont également déterminées. Divers exemples numériques sont examinés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité du modèle développé. Les résultats prouvent que la théorie proposée peut être comparable aux HSDT classiques avec un plus grand nombre de variables. Dans le cas général, les résultats calculés par $n=3$ sont en accord avec les HSDT conventionnels avec un plus grand nombre de variables. De plus, il est conclu également que l'indice de loi de puissance, les conditions aux limites, l'imperfection et la température ont une influence significative sur la réponse des plaques.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en science et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail est d'étudier la stabilité des plaques FG reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak, En proposant d'autres hypothèses simplifiantes aux HSDT classiques, en considérant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnus et des équations gouvernantes de la théorie actuelle sont réduits à un seul, et donc, rendre cette théorie simple et efficace à utiliser. En utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale, les équations gouvernantes différentielles sont obtenues et les solutions analytiques basées sur la procédure de la solution Navier sont également déterminées. Les propriétés matérielles sont supposées dépendantes de la température et varient à travers l'épaisseur selon une distribution de puissance en termes des fractions volumiques des constituants. Comparés aux résultats trouvés dans la littérature, ces théories ont montré leur efficacité comme les autres théories à ordre élevé pour L'étude analytique des plaques FGM épaisses.

Afin d'étudier l'influence du chargement mécanique et thermique sur le comportement de la stabilité des plaques tout en étudiant l'évolution de la fréquence, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse de la stabilité des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température. Pour valider ces théories, nous les avons comparés avec HSDT classiques avec un plus grand nombre de variables.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq

inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes d'instabilité des plaques FGM.

Deuxièmement, on a utilisé le principe de l'énergie potentielle totale minimale, les équations gouvernantes différentielles sont obtenues pour les plaques FG sur fondation élastique. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur où un excellent accord a été observé. L'étude paramétrique menée a démontrée que la géométrie de la plaque représentée par les rapports d'épaisseur, le type de la charge mécanique et thermique, le paramètre de la non linéarité thermique ainsi que les paramètres de fondation ont une très grande influence sur la température critique de flambement.

Dans l'application de la technologie, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir les paramètres de matériau appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne remet pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à un champ de température élevé.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dûs à la température.

Finalement, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans la thématique du développement de nouvelles théories de plaques et poutres pour le calcul des structures en matériaux FGM soumis à des différents types de chargements.

Références

- [1] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel Compos. Struct.*, 18(4), 1063-1081.
- [2] Lanhe, W. (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”, *Compos Struct*, **64**, 211–218.
- [3] Matsunaga, H. (2009), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **90**, 76–86.
- [4] Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M. (2009), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*, **90**, 161–171.
- [5] Tung, H.V., Duc, N.D. (2010) “Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Composite Structures*, 92, 1184–1191.
- [6] Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012) “Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *Journal of Thermal Stresses*, 35, 677–694.
- [7] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.
- [8] Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013) “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 547 – 567.
- [9] Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M. and Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, **15**(4), 399-423.
- [10] Duc, N.D., Tung, H.V. (2011) “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, 93, 2874–2881.

-
- [11] Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *Journal of Thermal Stresses*, **36**, 869–894.
- [12] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014) “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318.
- [13] Yaghoobi, H., Fereidoon, A. (2014), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Composites: Part B*, 62, 54–64.
- [14] Bakora, A., Tounsi, A. (2015), “Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, **56(1)**, 85-106.
- [15] Boudarba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, **58(3)**, 397-422.
- [16] Abdelhak, Z., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions”, *Smart Structures and Systems*, **18(2)**, 267 – 291.
- [17] Xiang, S, Jin, Y.X, Bi, Z.Y, Jiang, S.X, Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos Struct*, **93**, 2826–232.
- [18] Mantari, J.L., Granados, E.V. (2015), “A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates”, *Thin-Walled Structures*, **90**, 150–158.
- [19] Koizumi M. The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater* 1993;34:3–10.
- [20] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

-
- [21] Finot M, Suresh S. Small and large deformation of thick and thin-film multilayers: effect of layer geometry, plasticity and compositional gradients. *J Mech Phys Solids* 1996;44:683–721.
- [22] Krell T, Schulz U, Peters M, Kaysser WA. Graded EB-PVD alumina–zirconia thermal barrier coatings-an experimental approach. *Mater Sci Forum* 1999;311:396–401.
- [23] Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of functionally graded materials*. 1st ed. London: IOM Communications; 1998.
- [24] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [25] Koizumi.M, FGM activities in Japan, *Composites*, 28(1-2):1-2.1997
- [26] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986.
- [27] **Yoshihisa Uchida. Proprieties** of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B,Vol. 39-B, 2004.
- [28] Ghugal, Y. M., Shimpi 2002. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *J. Reinf. Plast. Compos.* 21 775-813.
- [29] Tung, N. V., 2004. Modélisation globale et local des structures multicouches par éléments finis de plaque. Ph.D. thesi, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [30] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959. *Theory of plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- [31] Reddy, J., 1997. *Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis*. CRC Press, Boca Raton.
- [32] Reddy, J., 1999. *Theory and analysis of Elastic Plates*. Taylor Francis, Philadelphia.
- [33] He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashankera, S., Liew, K. M., 2001. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *Int. J. Solids Struct.* 38, 1641-1655.

-
- [34] Reissner, E., 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* 13, 69-77.
- [35] Reissner, E., 1975. On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. *Int. J. Solids Struct.* 11, 569-573.
- [36] Mindlin, R. D., 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31-38.
- [37] Miara, B., Podio-Guidugli, P., 2006. Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343, 375-678.
- [38] Praveen, G. N., Reddy, J. N., 1998. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Int. J. Solids Struct.* 35, 4457-4476.
- [39] Croce, L. D., Venini, P., 2004. Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 705-725.
- [40] Zenkour, A. M., 2003. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermomechanical loading. *Compos. Struct.* 65, 367-379.
- [41] Zenkour, A. M., 2004a. Bending of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plates theories. *J. Eng. Math.* 50, 75-93.
- [42] Zenkour, A. M., 2004b. Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mech.* 171, 171-187.
- [43] Hildebrand, F. B., Reissner, E., Thomas, G. B., 1949. Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. No.* 1833.
- [44] Naghdi, P. M., 1957. On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math.* 14, 369-380.
- [45] Liberscu, L., 1967. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int. J. Solids Struct.* 3, 53-68.
- [46] Nelson, R. B., Lorch, D. R., 1974. A refined theory for laminated orthotropic plates. *J. Appl. Mech.* 41, 177-183.
- [47] Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977a. A high-order theory of plate deformation, Part I : Homogeneous plates. *J. Appl. Mech.*, 663-668.

-
- [48] Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977b. A high-order theory of plate deformation, Part I : Laminated plates. *J. Appl. Mech.*, 669-676.
- [49] Kant, T., Swaminathan, K., 2002. Analytical solution for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on the higher order refined theory. *Compos. Struct.* 56, 329-344.
- [50] Reddy, J. N., 2000. Analysis of functionally graded materials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47, 663-684.
- [51] Cheng, Z. Q., Batra, R. C., 2000b. Three-dimensional thermoelastic deformations of functionally graded elliptic plates. *J. Sound Vibr.* 31, 97-106.
- [52] Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, Martins, P. A. L. S., 2004. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos. Struct.* 193, 705-725.
- [53] Zenkour, A. M., 2005a. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 2- buckling and free vibration. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5243-5258.
- [54] Zenkour, A. M., 2005b. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 1- Deflection and stresses. *Int. J. Solids Struct.* 42. 5224-5242.
- [55] Zenkour, A. M., 2006. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. *Appl. Math. Modelling* 30. 67-84.
- [56] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [57] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [58] J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations," *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.
- [59] T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [60] J. R. Cho., D.Y. Ha, Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196, 2001.

-
- [61] R. Pal, New Models for Effective Young's modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523. 2005.
- [62] H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Mater*; 52 (12):3535–3543, 2004.
- [63] Pagano NJ. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J Compos Mater* 1969;3(3):398–411.
- [64] Pagano NJ. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J Compos Mater* 1970;4(1):20–34.
- [65] Srinivas S, Rao AK. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic plates and laminates. *Int J Solids Struct* 1970;6:1463–81.
- [66] Srinivas S, Joga Rao CV, Rao AK. An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 1970;12:187–99.
- [67] Pandya BN, Kant T. Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations. *Int J Solids Struct* 1988;24(12):1267–86.
- [68] Pandya BN, Kant T. Flexure analysis of laminated composites using refined higher-order Co plate bending elements. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1988;66:173–98.
- [69] Pandya BN, Kant T. Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model. *Compos Sci Technol* 1988;32:137–55.
- [70] Kant T, Menon MP. Estimation of interlaminar stresses in fibre reinforced composite cylindrical shells. *Comput Struct* 1991;38(2):131–47.
- [71] Kant T, Manjunatha BS. On accurate estimation of transverse stresses in multilayer laminates. *Comput Struct* 1994;50(3):351–65.
- [72] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates, theory and analysis*. 1st ed. New York: CRC Press; 1997.
- [73] Kant T, Swaminathan K. Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories. *J Sound Vib* 2001;241(2):319–27.
-

-
- [74] Kant T, Swaminathan K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Compos Struct* 2002;56:329–44.
- [75] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B* 1997;28:1–4.
- [76] Suresh, S., Mortensen, A., 1998 *Fundamentals of functionally graded materials : Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. Press, Cambridge.
- [77] Birman V, Byrd LW. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *ASME Appl Mech Rev* 2007;60:195–216.
- [78] Praveen GN, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998;35:4457–71.
- [79] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur j Mech A/Solids* 1999;18:185–99.
- [80] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 2000;47:663–84.
- [81] Yang J, Shen H-S. Non-linear analysis of FGM plates under transverse and inplane loads. *Int J Non-Linear Mech* 2003;38:467–82.
- [82] Yang J, Shen H-S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites Part B* 2003;34:103–15.
- [83] Shen H-S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *Int J Mech Sci* 2002;44:561–84.
- [84] Shen H-S. Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings. *Int J Solids Struct* 2005;42:6101–21.
- [85] Mian AM, Spencer AJM. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J Mech Phys Solids* 1998;46(12):2283–95.
- [86] Huang ZY, Lu CF, Chen WQ. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations. *Compos Struct* 2008;85(95):104.

-
- [87] Shen H-S, Wang Z-X. Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations. *Compos Struct* 2010;92:2517–24.
- [88] Zhang D-G, Zhou Y-H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput Mater Sci* 2008;44:716–20.
- [89] Fares ME, Elmarghany MKh, Atta D. An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91:296–305.
- [90] Abdelaziz HH, Atmane HA, Mechab I, Boumia L, Tounsi A, Abbas ABE. Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory. *Chin J Aeronaut* 2011;24:434–48.
- [91] Shimpi RP. Refined plate theory and its variants. *AIAA J* 2002;40(1):137–46.
- [92] Shimpi RP, Patel HG. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43(22–23):6783–99.
- [93] Cheng ZQ, Batra RC. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J Sound Vib* 2000;229:879–95.
- [94] Yang J, Shen H-S. Dynamic response of functionally graded rectangular thin plates. *Compos Struct* 2001;54:497–508.
- [95] Yang J, Shen H-S. Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environments. *J Sound Vib* 2002;255(3):579–602.
- [96] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory. *Comput Mech* 2004;33:305–15.
- [97] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos Sci Technol* 2005;65:1165–75.
- [98] Yang J, Huang X-L. Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2007;196:2619–30.
- [99] Javaheri R, Eslami MR. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM J* 2002;82:277–83.
- [100] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J* 2002;40(1):162–9.
-

[101] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *J Therm Stresses* 2003;25:603–25.

[101] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Stochastic analysis of computationally graded plates with system randomness under static Loading. *Int J Solids Struct* 2006;47:1519–41.

[102] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* 2005;42:5243–58.

[103] Hoang VT, Nguyen DD. Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Compos Struct* 2010;92:1184–91.

[104] Nguyen DD, Hoang VT. Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct* 2011;93:2874–81.

[105] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2015) “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 14(1), 5-33.

[106] Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014) “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Method.*, 11(5), 135007.

[107] Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015) “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel and Composite Structures*, 19(3), 521-546.

[108] Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013) “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, 76, 467-479.

[109] Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013) “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15, 671–703.

[110] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014) “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.

-
- [111] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014) “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.
- [112] Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014) “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, 49(4), 795-810.
- [113] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014) “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Method.*, 11(6), 1350082.
- [114] Ramu, I., Mohanty, S.C. (2015) “Free vibration and dynamic stability of functionally graded material plates on elastic foundation”, *Defence Science Journal*, 65(3), 245 – 251.
- [115] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015) “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [116] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015) “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- [117] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015) “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39(9), 2489-2508.
- [118] Winkler, E. (1867) “Die lehre von der elasticitaet und festigkeit”, Prague: Prag Dominicus.
- [119] Pasternak, P.L. (1954) “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu I Arkhitekture*, 1, 1–56.
- [120] Mian AM, Spencer AJM. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J Mech Phys Solids* 1998;46(12):2283–95.
-

[121] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *J Therm Stresses* 1999;22:35–55.

[122] Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. (2000), “Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories”, *Arch. Mech.*, 52, 143-158.

[123] J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.

[124] S. S.Vel., R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433, 2002.

[125] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct* 2003;40:7181–96.

[126] ALIBEGLOO

[127] Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound. Vib.*, 272, 703-730.

[128] Vel, S.S. (2010). Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells. *Composite Structures*, 92(8), 2712-2727.

[129] Uymaz et Aydogdu 2007]: Uymaz, B. et Aydogdu, M., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions", *Composites of reinforced Plastics and Composites*, (2007), 26, 1847 -1863.

[130] Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 498-515.

[131] Amini, M.H., Soleimani, M. et Rastgoo, A., "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation", *Smart Mater Struct*, (2009), 18, 1-9.

[132] Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment", *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 733-750.

-
- [133] Malekzadeh, P., "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Composite Structures*, (2009), 367-373.
- [134] Malekzadeh 2010 "An analytical solution for a plane thermal stress problem in nonhomogeneous multiply connected regions", *JSME Int J, Ser A*, **33**, 136–144.
- [135] Jin et al. (2014)
- [136] Reddy et Kant (2014) "Three-Dimensional Elasticity Solution for Free Vibrations of Exponentially Graded Plates" *Journal of Engineering Mechanics* Volume 140 Issue 7 - July 2014
- [137] K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004, "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials", *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.
- [138] Na, K.S. et Kim, J.H., (2005), "Three Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials", *AIAA Journal*, 47, 1605-1612.
- [139] Na. K. S et Kim. J. H (2006), "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method", *Finite Elem. Anal. Des*, 42, 749-756.
- [140] Rivello, R.M., "Theory and analysis of flight structures" éditions McGraw-Hill, New York, 1969.
- [141] Weingarten, V.I, Morgan, E.J, and Seide, P., "Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical Shells under axial Compression", *AIAA Journal*, 3, (3), 500-505, 1965.
- [142] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Structures Systems*, 19(3), 289-297.
- [143] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A. (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel Compos. Struct.*, **21**(6), 1287-1306.
- [144] Merdaci, S., Tounsi, A. and Bakora, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct.*, **22**(4), 713-732.

-
- [145] Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A. and Kaci, A. (2016), “A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(3), 473-495.
- [146] Sugano, Y. (1990), “An analytical solution for a plane thermal stress problem in nonhomogeneous multiply connected regions”, *JSME Int J, Ser A*, **33**, 136–144.
- [147] Praveen, GN, Reddy, JN. (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic metal plates”, *Int J Solids Struct*, **35**, 4457–4476.
- [148] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(6), 1350082.
- [149] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.
- [150] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct.*, **19**(2), 369-384.
- [151] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.
- [152] Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2015), “A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities”, *Geomechanics and Engineering*, **9**(3), 361 – 372.
- [153] Hassaine Daouadji, T., Hadji, L. (2015), “Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates”, *Geomechanics and Engineering*, **9**(5), 631 – 644.
- [154] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(2), 227-249.
- [155] Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable

nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(5), 963-981.

[156] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.

[157] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three -unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(2), 257-276.

[158] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**(1), 265-275.

[159] Reddy, JN. (1984), “Energy principles and variational methods in applied mechanics”, New York: John Wiley.

[160] Brush, DO, Almroth, BO. (1975), “Buckling of bars, plates, and shells”, New York: McGraw-Hill.

[161] Meyers, C.A., Hyer, M.W. (1991), "Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates", *J Therm Stresses*, **14**, 519–540.

[162] Lam, K.Y., Wang, C.M., He, X.Q. (2000), "Canonical exact solutions for Levy-plates on two parameter foundation using Green's functions", *Eng Struct*, **22**, 364–378.

[163] Akhavan, H., Hashemi Sh.H., Taher, H.R.D., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh. (2009), "Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis", *Comput Mater Sci*, **44**, 968–978.

[164] Sobhy, M. (2013), "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Compos Struct*, **99**, 76–87.

[165] Thai, H.T., Kim, S.E. (2013), "Closed-form solution for bucking analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation", *Int J Mech Sci*, **75**, 34–44.

[166] Zenkour, A.M., Sobhy, M. (2011), "Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory", *J Therm Stresses*, **34**, 1119–1138.