

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

BP 89 SBA 22000-ALGERIE-

TEL/FAX 048-77-66-20

THESE

Présentée par

BOUKHALFA Fatima

Pour obtenir le diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

Spécialité: Mathématiques

Option : Systèmes dynamiques et applications

Intitulée

Les modèles mathématiques en épidémiologie

Soutenue le : 07-12-2017

Devant le jury composé de :

Président : **Soufiane MOKEDDEM Prof. UNIV. S.B.A**

Examineurs: **Mohammed HELAL, MCA UNIV. S.B.A**
Ghouti DJELLOULI, MCA UNIV. Saida

Directeur de thèse : **Abdelkader LAKMECHE, Prof. UNIV. S.B.A**

Dédicaces

A mon père et ma mère,
dont le sacrifice pour moi est sans limite.

A mon mari,
pour son encouragement.

A mes chers frères,
pour leur affection.

A mes très chères copines de la promotion,
pour leur aide et leur soutien moral.

A mes amis(es),
qui ont tant fait pour moi.

Aux familles Boukhalfa et Etchiali,
qui ont tant attendu ce jour-là.

Remerciements

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse *Pr. Abdelkader LAKMECHE* pour m'avoir donné la chance de travailler sur un sujet tout aussi intéressant que passionnant, pour m'avoir appris à être plus autonome et pour son suivi permanent enrichi de beaucoup d'encouragements.

J'aimerais remercier *Dr. Mohamed HELAL* pour son aide, ses conseils et sa disponibilité permanente et d'avoir pris connaissance de ce travail et d'en être examinateur.

Au *Pr. Soufiane MOKEDDEM*, je suis très sensible à l'honneur que vous me faites en acceptant d'être le président du jury de cette thèse.

Mes remerciements les plus respectueux vont aussi au *Dr. Ghouti DJELLOULI* qui m'a fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être examinateur. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à *Mr. B. MEBKHOUT* pour son aide durant toute ma formation, ses conseils et son savoir faire, tant sur le plan théorique que pratique.

Je tiens à remercier aussi, tous les membres du Département de Mathématiques de l'université Djillali Liabes de sidi Bel Abess, ainsi que le département de l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen.

Table des matières

Introduction générale	6
1 La leishmaniose viscérale	10
1.1 Introduction	10
1.2 La leishmaniose viscérale	10
1.3 L'espèce en cause	11
1.4 Cycle biologique	12
1.5 La transmission	15
1.5.1 Vectorielle	15
1.5.2 Les autres modes	15
1.6 La répartition géographique	15
1.7 Le diagnostic de la leishmaniose	16
1.8 Le traitement de la leishmaniose :	17
2 Préliminaires	18
2.1 Rayon spectral	18
2.2 Théorème des fonctions implicites	19
2.3 La méthode de Lyapunov-Schmidt	20
2.4 Sur les équations différentielles	22
2.4.1 Les équations différentielles ordinaires	22
2.4.2 Stabilité des équilibres	24
2.5 Stabilité au sens de Lyapunov	26

2.5.1	Les équations différentielles impulsives	30
3	Etude d'un modèle mathématique sur la Leishmaniose viscérale	34
3.1	Introduction	34
3.2	Existence, positivité et bornitude	35
3.2.1	Existence	35
3.2.2	Positivité	36
3.2.3	Bornitude	36
3.3	Taux de reproduction de base	37
3.4	Les points d'équilibres	38
3.5	Etude de la stabilité locale des points d'équilibres	39
3.6	Conclusion	42
4	Analyse d'un modèle mathématique sur la Leishmaniose	43
4.1	Introduction	43
4.2	Le cas où la population totale est constante	46
4.2.1	L'analyse de la bifurcation	47
4.2.2	La stabilité globale	50
4.3	La population totale est non constante	55
4.4	Les simulations numériques	58
4.4.1	Cas : $\beta = \delta$	58
4.4.2	Cas : $\beta < \delta$	60
4.4.3	Cas : $\beta > \delta$	60
4.5	Conclusions	62
5	Etude d'un modèle mathématique avec impulsion sur la leishmaniose viscérale	64
5.1	Introduction	64
5.2	Existence et stabilité exponentielle du point d'équilibre trivial E_f	68
5.3	L'analyse de la bifurcation de la solution périodique non triviale	74

5.4	Conclusion	82
5.5	Annexe	84
5.5.1	Calcul des premières dérivées de Φ	84
5.5.2	La deuxième dérivée de Φ_2 et Φ_3	88
5.5.3	La première dérivée de Z^*	107
5.5.4	La deuxième dérivée de z_2^*	110
5.5.5	La première dérivée de ω	112
5.5.6	La deuxième dérivée de ω	113
	Perspectives	118
	Bibliographie	124

Introduction

Les systèmes dynamiques sont très répondeurs en modélisation en science appliquées (mathématiques appliquées, physique, biologie, ...

Dans cette thèse, nous nous intéressons à certains modèles épidémiologiques.

L'épidémiologie théorique des maladies transmissibles est devenue une discipline à part entière, distincte de la démographie théorique et de l'écologie théorique, et offre un terrain fertile en applications et en thèmes de recherche pour les mathématiques.

Nous illustrons ceci, en montrant comment les modèles peuvent stimuler la réflexion sur des problèmes épidémiologiques et devenir des outils d'aide à la décision en santé publique.

La modélisation épidémiologique a pour but essentiel de comprendre et contrôler, dans la mesure du possible, la propagation d'une maladie infectieuse transmissible.

Elle consiste en gros à construire un modèle mathématique qui permet de rendre compte la dynamique de la maladie en question.

A titre d'exemple, nous allons citer le modèle classique *SIR*, où la population est divisé en trois compartiments, à savoir les susceptibles *S*, les infectés *I* et les immunisés *R*.

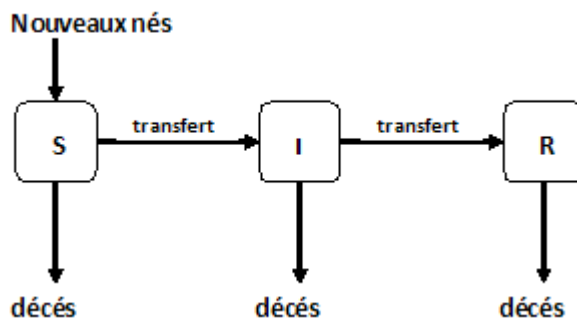


FIGURE 1 – Diagramme de transfert du modèle *SIR*.

Un individu dans le compartiment S est complètement susceptible, c'est-à-dire il peut contacter la maladie, il est alors transféré au compartiment I , à la fin de sa période d'infectiosité, qui elle dépend de la maladie, l'individu rejoint le compartiment R des individus ayant acquis une immunité contre la maladie en question.

Le cadre général est donc celui des modèles continus, en temps continu, construits à partir de systèmes d'équations différentielles. De plus, les modèles étudiés ici sont tous des systèmes autonomes, c'est-à-dire que la fonction d'évolution du système ne dépend pas du temps.

Les différentes connaissances dont on dispose en ce qui concerne la maladie sont ensuite utilisées pour déterminer les taux de transfert entre les différents compartiments.

La modélisation mathématique des phénomènes de la biologie et de la médecine est très importante pour comprendre et trouver des méthodes de contrôle afin d'arrêter ou au moins de réduire l'effet négatif des maladies (voir [1]-[15]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à un modèle de leishmaniose zoonotique viscérale (ZVL) développé dans [15]. Cette maladie est causée par une infection à leishmania chagasi et transmise généralement par le phlébotome. ZVL est un problème majeur de santé publique. Au Brésil, les chiens domestiques sont les principaux réservoirs, l'analyse biologique est développée dans [23].

Cette thèse est consacrée à l'étude d'un modèle mathématique pour une population des chiens (D) atteints d'une maladie infectieuse (la Leishmaniose), pour cela on considère un modèle SEIRQ. Dans ce cas là, la population est divisée en cinq compartiments S , L , I , R et Q .

Le modèle étudié est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R, \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{CIR}{D} - \delta Q \end{array} \right. \quad (1)$$

Soit l'individu dans le compartiment S est susceptible, et il peut contracter la maladie par contact avec ceux du compartiment I , il est alors transféré au compartiment L qui contient les individus infectés mais pas encore infectieux, après une période de latence, qui dépend de la maladie, un individu dans L devient infectieux à son tour et il est transféré au compartiment I , à la fin de sa période d'infectiosité, qui elle aussi dépend de la maladie. Soit l'individu est dans le compartiment R , qui deviendrait infecté et non infectieux après un contact avec les infectieux et rejoint le compartiment Q .

Cette thèse est composée de cinq chapitres, d'une conclusion avec perspectives, et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous définissons la maladie étudiée (la leishmaniose viscérale), le cycle biologique et sa transmission, la répartition géographique ainsi que le diagnostique et le traitement.

Le deuxième chapitre, contient les définitions, certains théorèmes classiques, et la procédure de Lyapunov-Schmidt. Ces rappels sont utiles pour la suite de cette thèse.

La version de la procédure de Lyapunov-Schmidt présentée ici diffère légèrement de celle donnée dans [37]. La version donnée ici est basée sur la décomposition de l'espace en somme directe de l'espace propre et son complémentaire. Cette procédure de Lyapunov-Schmidt est plus naturelle, et beaucoup plus pratique pour étudier les bifurcations d'états stables.

Dans le chapitre trois, nous faisons l'étude et l'analyse locale du modèle mathématique sur la Leishmaniose Viscérale dans le cas d'une population constante. Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité globale du point d'équilibre moyennant la fonction de Lyapunov.

Dans le dernier chapitre, nous considérons un système d'équations différentielles impulsives, le modèle est composé du modèle (1) plus les impulsions qui sont décrites par des équations discrètes. Ces équations représentent l'abattage des chiens infectés.

Nous terminons cette thèse par des conclusions, perspectives et une bibliographie.

Chapitre 1

La leishmaniose viscérale

1.1 Introduction

La leishmaniose est une maladie chronique à manifestation cutanée ou viscérale, due à un protozoaire parasite (une leishmanie), c'est à dire un organisme microscopique qui se reproduit dans certaines cellules de l'organisme, et qui touche principalement le chien qu'on appelle "Réservoirs".

Cette maladie est très répandue dans différentes régions du monde, elle est en effet transmise par un insecte bien particulier, qu'on connaît comme vecteur et qui ne vit que dans certaine région du globe. L'aire de répartition de la maladie dépend donc directement de l'aire de répartition de cet insecte. L'habitude de l'insecte est de piquer l'animal, il pourrait piquer l'homme (zoonose) [38].

1.2 La leishmaniose viscérale

La leishmaniose viscérale également connue sous le nom de Kala-azar ou fièvre noire, est la forme la plus grave de leishmaniose, il s'agit d'une maladie causée par un parasite du genre *Leishmania*.

Le parasite migre dans les viscères comme le foie, la rate et la moelle osseuse et en l'absence de traitement, aboutit presque toujours à la mort du hôte [39].

Les principaux symptômes essentiels de cette maladie : un amaigrissement progressif du chien, l'anémie, des ongles anormalement longs l'hépatomégalie (gros foie) et la splénomégalie (grosse rate).



FIGURE 1.1 – Chien infecté

1.3 L'espèce en cause

Plusieurs espèces de *Leishmania* sont connues pour provoquer la forme viscérale de la maladie. Dans l'ancien monde (l'Afrique, l'Asie et l'Europe) les espèces responsables sont *L. donovani* et *L. infantum*, et dans le nouveau monde (l'Amérique du sud) l'espèce en cause est *L. chagasi*.

1.4 Cycle biologique

Il se déroule entre deux hôtes, un vertébré (homme, chien, rongeur...) et un insecte vecteur, le phlébotome.



FIGURE 1.2 – Phlébotome

La leishmaniose viscérale est transmise par un insecte vecteur (phlébotome), ce sont des créatures minuscules, 2 ou 3 millimètres de long, que l'on trouve dans les régions tropicales ou tempérées du monde entier. Les larves de phlébotome se développent dans la matière organique chaude et humide, aussi les vieux troncs d'arbres, les murs de maison ou les ordures.

Le phlébotome femelle adulte est un suceur de sang, qui s'alimente habituellement la nuit sur sa proie ensommeillée. Quand la mouche pique un vertébré atteint de *L.donovani*, l'agent pathogène est ingéré avec le sang de la proie, à ce moment le protozoaire se présente sous la plus petite de ses deux formes, appelée amastigotes, non mobile, ronde de seulement trois à sept micromètres de diamètre [39].

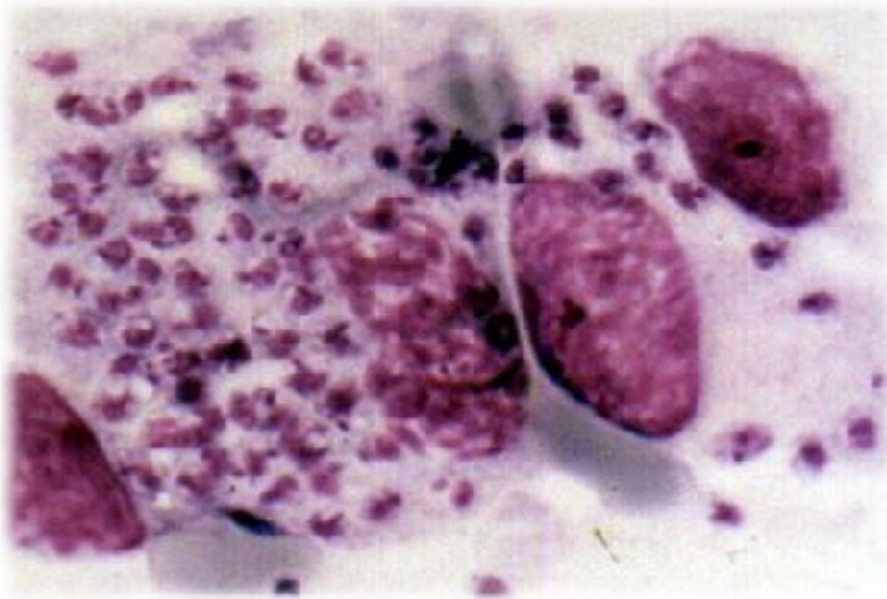


FIGURE 1.3 – Amastigote

Dans l'estomac du phlébotome, les amastigotes se transforment rapidement en une deuxième forme du *L. donovani* appelée promastigotes. Cette forme est fusiforme, sa taille est triple de celle de l'amastigote et elle possède un simple flagelle qui lui permet d'être mobile. Les promastigotes vivent à l'extérieur des cellules dans le tube digestif du phlébotome pendant quelques jours, se produisent par voie asexuée puis migrent vers les glandes salivaires.

C'est pour eux un moyen d'être transmis de nouveau à un mammifère hôte, car l'insecte injecte sa salive dans la proie quand elle pique, les promastigotes sont injectés dans la circulation sanguine de la proie avec la salive de l'insecte.

Une fois à l'intérieur de leur nouvelle hôte, chaque promastigote s'accroche à un macrophage à l'aide de ses flagelles, il est alors capturé vivant par la cellule sous l'action de phagocytose du macrophage. Une fois à l'intérieur, il se transforme à nouveau dans la forme la plus petite l'amastigote. Comme amastigote *L. donovani* peut seulement se

reproduire à l'intérieur d'une cellule et les amastigotes se multiplient dans la partie la plus hostile du macrophage, à l'intérieur des organites phagolysome, dont ils peuvent empêcher la réponse défensive normale. Lorsqu'ils se sont reproduit jusqu'à un certain niveau, *L. donovani* détruit la cellule hôte sous l'effet de pression de la masse des parasites. La cellule fille des protozoaires migre alors par la circulation sanguine pour trouver de nouveaux macrophages hôtes, à ce moment *L. donovani* provoque une infection et s'étend à tous les organes de l'hôte, en particulier à la rate et le foie.

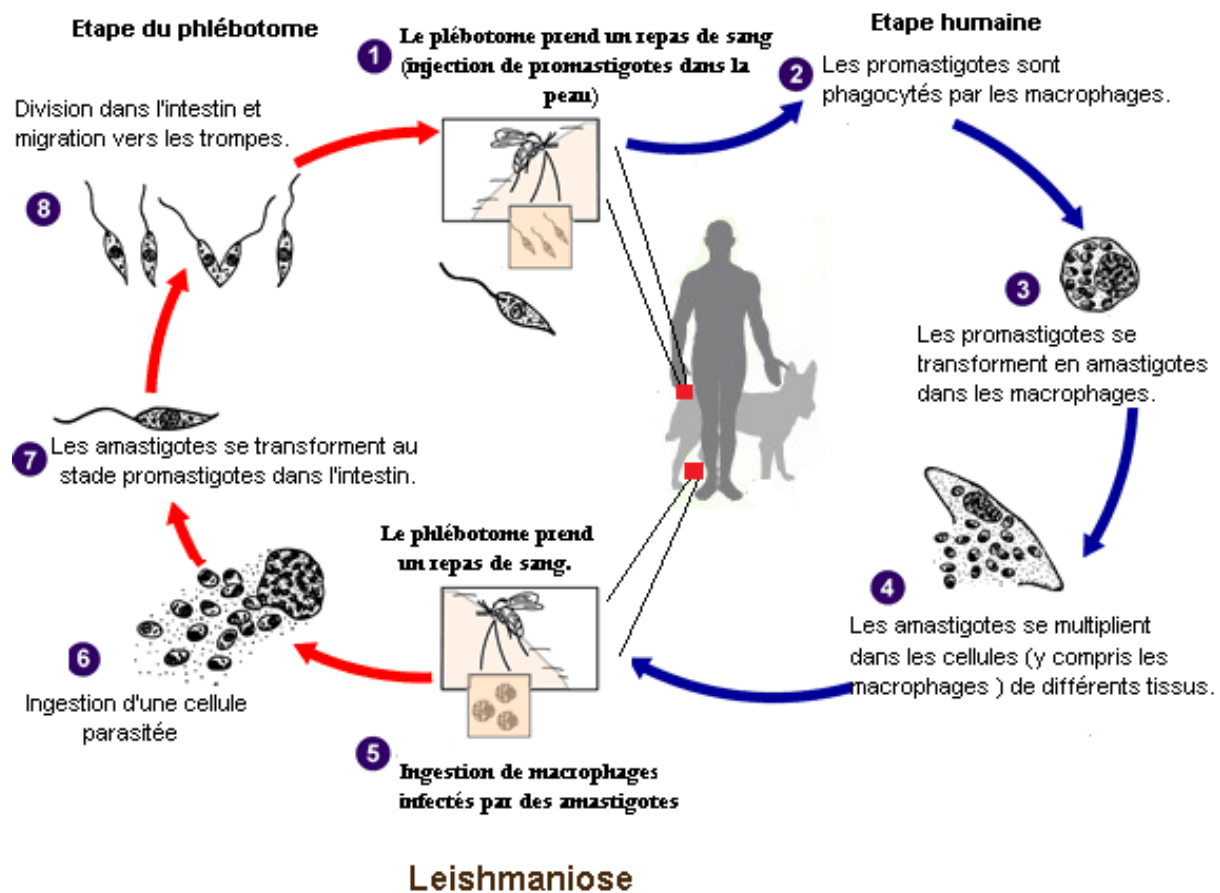


FIGURE 1.4 – Cycle parasitaire

1.5 La transmission

1.5.1 Vectorielle

C'est la plus importante, la présence du phlébotome conditionnant la répartition de la maladie.



FIGURE 1.5 – Transmission

1.5.2 Les autres modes

Chez les toxicomanes la transmission par échange de seringues a été démontré. Les voies transfusionnelles et congénitales jouent un rôle minime.

1.6 La répartition géographique

Cette maladie est répandue dans les zones intertropicales et tempérées chaudes, signalées dans 88 pays répartis en 5 foyers : méditerranéen, chinois, indien, africain et sud-américain.

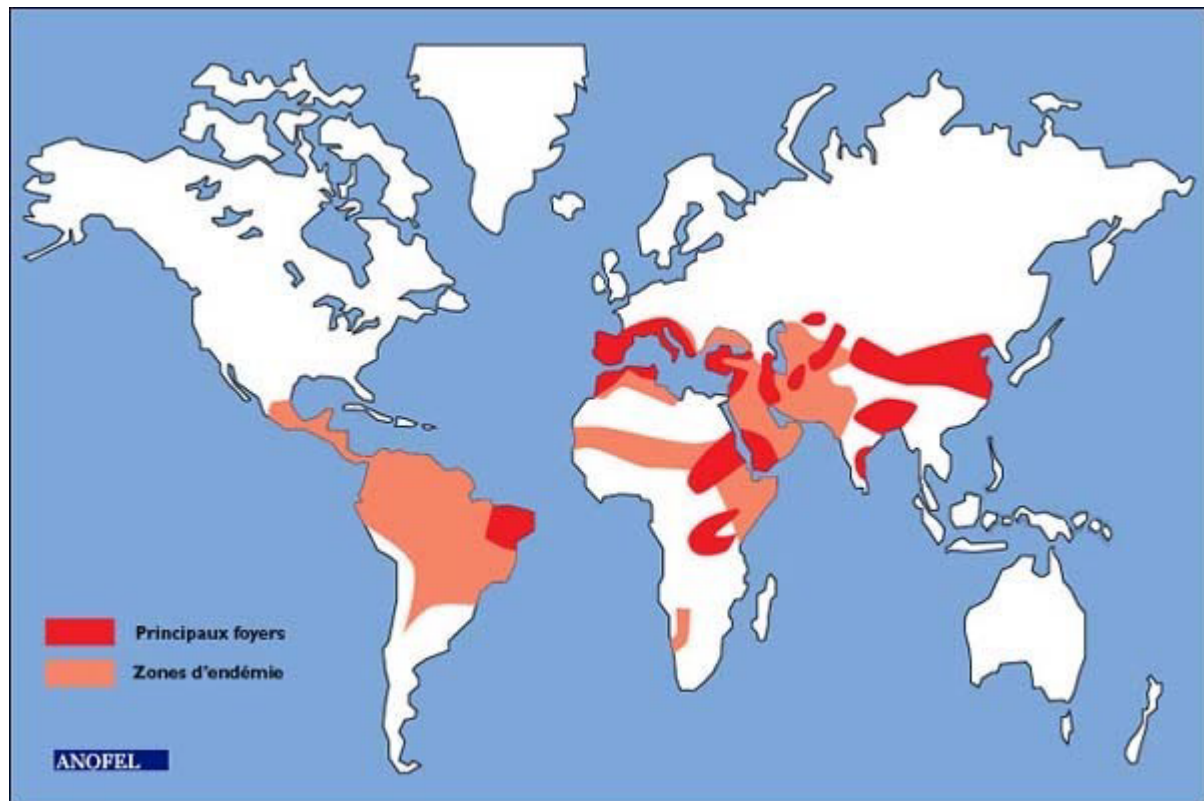


FIGURE 1.6 – Répartition géographique

1.7 Le diagnostic de la leishmaniose

Le vétérinaire va suspecter la leishmaniose lors de la présence de plusieurs symptômes et à condition que le chien vive ou ait séjourné dans les régions à risque. Ce diagnostic est parfois difficile car les signes de la maladie sont très variés et parfois discrets. Plusieurs examens sanguins permettent de confirmer le diagnostic. Dans certains cas complexes, des analyses de la peau ou de moelle osseuse permettent de mettre en évidence le parasite [38].

1.8 Le traitement de la leishmaniose :

Il existe un traitement spécifique pour cette maladie qui est réalisé sous forme d'injections, associé à la prise des comprimés. La durée du traitement est variable d'un chien à l'autre, il dure souvent très longtemps (12 mois minimum et parfois à vie), ce traitement est parfois mal supporté par le chien et doit être interrompu.

Le chien doit être suivi régulièrement par le vétérinaire traitant.

La lutte contre les insectes par des bombes ou des diffuseurs permet de les éviter.

Même si le risque de piqûre n'est pas totalement supprimé, il est conseillé d'utiliser le collier scalibor ou des pipettes d'Advantix, produits efficaces contre les phlébotomes, pour les chiens qui vivent et séjournent dans les régions à risque [39].



FIGURE 1.7 – Collier Scalibor

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous exposons les outils mathématiques dont nous aurons besoin dans la suite de cette thèse.

2.1 Rayon spectral

Définition 2.1.1 ([41])

Soit T un opérateur dans un espace de Banach de dimension finie X (i.e T est une matrice carrée). Alors l'ensemble $\sigma(T)$ est compact et il est composé des valeurs propres de T .

Définition 2.1.2

Soit M une matrice carrée à coefficients complexes, on appelle rayon spectral de M , et on note par $\rho(M)$ le plus grand module des valeurs propres de M .

Définition 2.1.3 ([41])

Le rayon spectral $\rho(M)$ d'une matrice M est le nombre

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}.$$

Définition 2.1.4 ([35])

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R} tel que $0 \in \Omega$ et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de classe C^1 sur $\Omega \setminus \{0\}$,

1. *V est dite définie positive si :*

- (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi-définie positive si :
- (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in U$.
4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

2.2 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est l'un des outils analytiques les plus importants pour la solution d'un problème non linéaire

$$F(x, y) = 0. \quad (2.1)$$

où $F : U \times V \rightarrow Z$ est une application, $U \subset X$ et $V \subset Y$ sont des ensembles ouverts, et X , Y et Z sont des espaces de Banach réels, il s'énonce comme suit :

Théorème 2.2.1 ([30])

Soit $(x_0, y_0) \in U \times V$ une solution de (2.1) telle que la dérivée de Fréchet de F par rapport à x en (x_0, y_0) est bijective, i.e

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0, \\ D_x F(x_0, y_0) : X &\rightarrow Z \text{ est borné} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec un inverse borné (théorème de Banach).

Supposons aussi que F et $D_x F$ sont continues :

$$\begin{aligned} F &\in C(U \times V, Z), \\ D_x F &\in C(U \times V, L(X, Z)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $L(X, Z)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de X dans Z muni de la norme de l'opérateur.

Alors il existe un voisinage $U_1 \times V_1$ dans $U \times V$ de (x_0, y_0) et une application $f : V_1 \rightarrow U_1 \subset X$ tel que :

$$\begin{aligned} f(y_0) &= x_0, \\ F(f(y), y) &= 0 \quad \forall y \in V_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

De plus, f est continue sur V_1 :

$$f \in C(V_1, X). \tag{2.5}$$

Enfin, chaque solution de (2.1) dans $U_1 \times V_1$ est de la forme $(f(y), y)$.

Pour la preuve voir [19]. En particulier, si

$$D_x F(x_0, y_0) : X \rightarrow Z \text{ est non bijective.} \tag{2.6}$$

La théorie de bifurcation peut être décrite brièvement par l'étude du problème (2.1) dans un voisinage de (x_0, y_0) où (2.6) est vérifiée.

2.3 La méthode de Lyapunov-Schmidt

La méthode de Lyapunov-Schmidt décrit la réduction de problème (2.1) à un problème ayant seulement comme dimension autant que celui obtenu de (2.6). Pour être plus précis, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2.3.1

Soient X et Z deux espaces de Banach, $U \subset X$ est un ouvert, une application continue $F : U \rightarrow Z$ est dite opérateur non-linéaire de Fredholm si elle est Fréchet différentiable sur U et si $DF(x)$ vérifie :

- $\dim N(DF(x)) < \infty$, où $N(DF(x))$ est le noyau de $DF(x)$.
- $\text{codim } R(DF(x)) < \infty$, où $R(DF(x))$ est l'image de $DF(x)$.
- $R(DF(x))$ est fermé dans Z .

L'entier $\dim N(DF(x)) - \text{co dim } R(DF(x))$ est appelé l'indice de Fredholm de $DF(x)$.

Nous considérons maintenant $F : U \times V \rightarrow Z$, $U \subset X$, $V \subset Y$, où

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0, \quad (x_0, y_0) \in U \times V, \\ F &\in C(U \times V, Z), \\ D_x F &\in C(U \times V, L(X, Z)) \text{ (voir (2.3)).} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous supposons que pour $y = y_0$ l'application F soit un opérateur non-linéaire de Fredholm par rapport à x ; i.e $F(\cdot, y_0) : U \rightarrow Z$ satisfait la définition (2.3.1). En particulier, observons que les espaces N et Z_0 définis ci-dessous sont de dimension finie.

Ainsi, il existe des sous espaces complémentaires fermés dans les espaces de Banach X et Z tels que

$$\begin{aligned} X &= N(D_x F(x_0, y_0)) \oplus X_0, \\ Z &= R(D_x F(x_0, y_0)) \oplus Z_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

(voir [22], p.553). A partir de ces décompositions, on définit les projections suivantes

$$\begin{aligned} P : X &\rightarrow N = N(D_x F(x_0, y_0)), \\ Q : Z &\rightarrow Z_0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

Par le théorème du graphe fermé (voir [51]), ces projections sont continues.

Puis, on obtient le théorème suivant

Théorème 2.3.1 ([30])

Il existe un voisinage $U_2 \times V_2$ de (x_0, y_0) dans $U \times V \subset X \times Y$ tel que le problème

$$F(x, y) = 0 \text{ pour } (x, y) \in U_2 \times V_2 \tag{2.10}$$

est équivalent à un problème de dimension finie

$$\begin{aligned} \Phi(v, y) &= 0 \text{ pour } (v, y) \in \tilde{U}_2 \times V_2 \subset N \times Y, \text{ où} \\ \Phi : \tilde{U}_2 \times V_2 &\rightarrow Z_0 \text{ est continue,} \\ \text{et } \Phi(v_0, y_0) &= 0, \quad (v_0, y_0) \in \tilde{U}_2 \times V_2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

La fonction Φ , appelée la fonction de bifurcation, est donnée par

$$\Phi(v, y) \equiv QF(v + \Psi(v, y), y),$$

où $\Psi : \tilde{U}_2 \times V_2 \rightarrow W_2 \subset X_0$.

Corollaire 2.3.1 ([30])

Dans la notation du théorème (2.3.1), si $F \in C^1(U \times V, Z)$, alors $\Psi \in C^1(\tilde{U}_2 \times V_2, X_0)$, $\Phi \in C^1(\tilde{U}_2 \times V_2, Z_0)$, et

$$\begin{aligned} \Psi(v_0, y_0) &= w_0, \\ D_v \Psi(v_0, y_0) &= 0 \in L(N, X_0), \\ D_v \Phi(v_0, y_0) &= 0 \in L(N, Z_0). \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.4 Sur les équations différentielles

2.4.1 Les équations différentielles ordinaires

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ un ensemble ouvert connexe. Nous noterons les points dans Ω par (t, x) où $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

A partir d'un point initial $(t_0, x_0) \in \Omega$, nous souhaitons construire une solution unique au problème à valeurs initiales :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

Pour cela, $x(t)$ doit être une fonction de classe C^1 sur un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant l'instant initial t_0 à valeurs dans \mathbb{R}^n tel que la courbe de solution satisfait

$$\{(t, x(t)) : t \in I\} \subset \Omega.$$

Une telle solution est appelée solution locale lorsque $I \neq \mathbb{R}$. Lorsque $I = \mathbb{R}$, la solution est appelée globale.

Le théorème d'existence de Cauchy-Peano**Théorème 2.4.1 ((Cauchy-Peano)[46])**

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue. Alors pour chaque point $(t_0, x_0) \in \Omega$ le problème à valeurs initiale (2.13) a une solution locale.

Le théorème d'existence de Picard

L'échec de l'unicité peut être corrigé en plaçant une restriction supplémentaire sur le champ de vecteurs f . Les définitions suivantes introduisent cette propriété clé.

Définition 2.4.1 ([46])

Soient $S \subset \mathbb{R}^m$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$.

La fonction f est dite continument Lipschitzienne sur S s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^m},$$

pour tous $x_1, x_2 \in S$.

Définition 2.4.2 ([46])

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ un ensemble ouvert. Une fonction continue $(t, x) \mapsto f(t, x)$ de Ω à \mathbb{R}^n est dite localement Lipschitzienne en x si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C_K \|x_1 - x_2\|,$$

pour chaque $(t, x_1), (t, x_2) \in K$. S'il existe une constante pour laquelle l'inégalité est satisfaite pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$, alors f est continument Lipschitzienne en x .

Lemme 2.4.1 ([46])

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , alors elle est localement Lipschitzienne en x .

Théorème 2.4.2 ((Picard)[46])

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ un ouvert. Supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et que $f(t, x)$ est continument localement Lipschitzienne en x . Soit $K \subset \Omega$ un ensemble quelconque compact.

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t_0, x_0) \in K$, le problème à valeurs initiale (2.13) a une unique solution définie sur l'intervalle $|t - t_0| < \delta$.

Théorème 2.4.3 ((Unicité) [46])

Supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les hypothèses du théorème de Picard. Pour $j = 1, 2$, soit $x_j(t)$ les solutions de $x'(t) = f(t, x(t))$ dans un intervalle I_j . S'il existe un point $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, alors $x_1(t) = x_2(t)$ sur l'intervalle $I_1 \cap I_2$. En outre, la fonction

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in I_1 \\ x_2(t), t \in I_2 \end{cases}$$

définit une solution sur l'intervalle $I_1 \cup I_2$.

2.4.2 Stabilité des équilibres

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times O$ pour certain ensemble ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les hypothèses du théorème de Picard.

Définition 2.4.3

Un point $\bar{x} \in O$ est appelé un point d'équilibre (point singulier ou point critique) si $f(t, \bar{x}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.14}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (2.14).

Définition 2.4.4 ([10])

L'équilibre x^* de (2.14) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.14) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon.$$

Définition 2.4.5 ([10])

L'équilibre x^* de (2.14) est dit instable, s'il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, tel qu'il existe une solution $x(t)$ de (2.14) vérifiant

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|x(t) - x^*\| \geq \varepsilon.$$

Définition 2.4.6 ([10])

L'équilibre x^* de (2.14) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.14) on a

$$\|x(0) - x^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Cas d'un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.15}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (avec $s = 1, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice A et x^* le point d'équilibre du système linéaire (2.15).

Théorème 2.4.4 ([10])

- (i) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles nulles ou négatives alors l'équilibre x^* est stable.
- (ii) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.
- (iii) Si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle positive alors l'équilibre x^* est instable.

Considérons le système (2.14), on note par $J_f(x^*) := \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$, la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* .

Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.16}$$

où $A = J_f(x)$ s'appelle le linéarisé ou l'approximation linéaire du système non linéaire

(2.14) en x^* .

L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x^* de (2.14). Plus précisément on a :

Théorème 2.4.5 ([10])

1. Si $x = 0$ est asymptotiquement stable (c'est à dire si toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative) pour (2.16) alors x^* l'est pour (2.14).
2. Si $x = 0$ est instable (c'est à dire qu'il existe au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive) pour (2.16) alors x^* est instable pour (2.14).
3. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* pour (2.14).

2.5 Stabilité au sens de Lyapunov

1. Stabilité des équilibres

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.17)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $0 \in \Omega$, et $f(0) = 0$.

Soient $x^* = 0$ un point d'équilibre de (2.17), et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues.

On note par

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x),$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f [11]. Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie ([11]) de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (2.17) on a

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Théorème 2.5.1 (Stabilité au sens de Lyapunov [11])

L'origine du système (2.17) est stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :

- (i) $V(x)$ est définie positive,
- (ii) $V'(x)$ est semi-définie négative.

Une telle fonction est dite **fonction de Lyapunov**

Preuve. Puisque V est définie positive dans Ω , il existe une sphère de rayon $r > 0$ contenue dans Ω telle que

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 && \text{pour } x \neq 0 \text{ et } |x| < r, \\ \dot{V}(x) &\leq 0 && \text{pour } |x| \leq r. \end{aligned}$$

Soit x la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ pour $x(0) = x_0$, (f est supposée localement lipschitzienne), alors par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution existe pour $0 \leq t < t^*$ avec $t^* > 0$. Cette solution peut être continuée pour $t \geq t^*$, et on note par t_1 la plus grande valeur de t pour laquelle la solution existe.

Il y a deux possibilités, soit $t_1 = \infty$ ou bien $t_1 < \infty$.

On peut montrer pour $|x_0|$ suffisamment petit que $t_1 = \infty$.

En effet, par la définition de la dérivée

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \quad \text{pour } 0 \leq t < t_1.$$

On peut intégrer cette équation, ce qui donne

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq 0,$$

puisque \dot{V} est définie négative. Ceci veut dire que $0 < V(x(t)) \leq V(x_0)$ pour $0 \leq t < t_1$.

Soit ε telle que $0 < \varepsilon \leq r$, et soit S la sphère fermée avec un rayon intérieur ε et un

rayon extérieur r . Par continuité de V , et puisque S est fermée, $\mu = \min_{x \in S} V(x)$ existe et il est strictement positif. Puisque $V(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow 0$, on peut choisir δ avec $0 < \delta < \mu$ telle que pour $|x_0| \leq \delta$, on ait $V(x_0) < \mu$ alors que $0 < V(x(t)) \leq V(x_0) < \mu$ pour $0 \leq t < t_1$. Puisque μ est la valeur minimale de V dans S , ceci donne $|x(t)| < \varepsilon$ pour $0 \leq t < t_1$.

S'il existe t_2 telle que $|x(t_2)| = \varepsilon$, alors quand $t = t_2$ on a aussi, par la définition de μ , $\mu \leq V(x(t_2)) < V(x_0) < \mu$, ce qui est impossible. On conclue alors que $t_1 = \infty$. Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il y a un $\delta > 0$ telle que pour $|x_0| < \delta$, on a $|x(t)| < \varepsilon$ pour $t \geq 0$, d'où la stabilité de l'origine est stable au sens de Lyapunov.

Théorème 2.5.2 (Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov [11])

L'origine du système (2.17) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :

- (i) $V(x)$ est définie positive,
- (ii) $V'(x)$ est définie négative.

2. Ensemble ω -limite

Soit le système autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit $x(t)$ une solution définie pour tout $t \geq 0$.

L'ensemble ω -limite de x est l'ensemble de tous les points d'accumulation de $x(t)$, pour $t \rightarrow \infty$.

$$\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \in \mathbb{R} : t_k \rightarrow +\infty, \exists x \in \mathcal{C}^1 : x(t_k) \rightarrow y\}.$$

Les points de l'ensemble ω -limite ont la propriété que tous leurs voisinages seront visités par la solution $x(t)$, même après un temps arbitrairement long, (les ensembles

α -limites sont définis de la même manière mais pour $t_k \rightarrow -\infty$).

L'ensemble ω -limite d'un point x peut être vide.

Théorème 2.5.3 (Lyapunov [27])

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système autonome définie sur Ω dans \mathbb{R}^n , soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable. Si pour une certaine solution $x(t)$, la dérivée \dot{V} de la fonction $t \rightarrow V(x(t))$ satisfait l'inégalité $\dot{V} \geq 0$, alors $\omega(x) \cap \Omega$ est contenu dans l'ensemble $\{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$.

Preuve. Si $y_0 \in \omega(x) \cap \Omega$, il existe une suite $t_k \rightarrow \infty$ avec $x(t_k) \rightarrow y_0$. Puisque $\dot{V} \geq 0$ le long de l'orbite de x , on a $\dot{V}(y_0) \geq 0$ par continuité, supposons que $\dot{V}(y_0) = 0$ n'est pas vérifiée alors $\dot{V}(y_0) > 0$, puisque la valeur de V ne décroît jamais le long de l'orbite de y avec $y(0) = y_0$, ceci implique que

$$V(y(t)) > V(y_0) \quad \text{pour } t > 0. \quad (2.18)$$

La fonction $V(x(t))$ est aussi strictement croissante, puisque V est continue, $V(x(t_k))$ converge vers $V(y_0)$ alors

$$V(x(t)) \leq V(y_0), \quad (2.19)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, de $x(t_k) \rightarrow y_0$ il s'en suit que $x(t_k + t) \rightarrow y(t)$ d'où

$$V(x(t_k + t)) > V(y(t)),$$

Donc par (2.18)

$$V(x(t_k + t)) > V(y_0).$$

pour k suffisamment grand, c'est une contradiction avec (2.19).

Théorème 2.5.4 (Castillo-Chavez)

On considère le système d'équations différentielles ordinaires avec un paramètre ϕ

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \phi), f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n; f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

0 est un point d'équilibre, et on a pour toute valeur de ϕ ,

$$f(0, \phi) = 0.$$

Soit les hypothèses :

A1 : $A = D_x f(0, 0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0))$, 0 est une valeur propre de A et les autres valeurs propres sont à parties réelles négatives.

A2 : La matrice A admet un vecteur propre W non négatif à droite de 0, et un vecteur propre V non négatif à gauche de 0.

Soient f_k les équations correspondantes au système et

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n V_k W_i W_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0),$$

$$b = \sum_{k,i=1}^n V_k W_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial C}(0, 0).$$

La stabilité locale du système autour de 0 est déterminée par le signe de a et b , $a < 0$, $b > 0$ donc le point est localement asymptotiquement stable.

2.5.1 Les équations différentielles impulsives

Notions de base sur les équations différentielles impulsives

Dans cette partie, on introduit les définitions de base et les théorèmes d'équations différentielles impulsives. Les références [4], [2] et [34] sont très riches en détail sur ce thème.

Les équations différentielles avec impulsions [52]

Prenons un processus d'évolution décrit par

- (i) un système d'équations différentielles

$$x' = f(t, x) \tag{2.20}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert et \mathbb{R}_+ la demie ligne réelle positive,

- (ii) Les ensembles $M(t), N(t) \subset \Omega$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$,
- (iii) L'opérateur $A(t) : M(t) \rightarrow N(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$.

Soit $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ toute solution de (2.20) à partir de (t_0, x_0) . Le processus se déroule comme suit : le point $P_t = (t, x(t))$ commence du point de départ $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ et se déplace le long de la courbe $\{(t, x) : t = t_0, x = x(t)\}$ jusqu'à l'instant $t_1 > t_0$, au cours duquel le point P_t rencontre l'ensemble $M(t)$. En $t = t_1$, l'opérateur $A(t)$ transfère le point au $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, où $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. Ensuite, le point P_t continue son mouvement le long de la courbe de $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ en tant que solution de (2.20) à partir de $P_{t_1} = (t_1, x_1^+)$ jusqu'à ce qu'il atteigne l'ensemble $M(t)$ une deuxième fois à un instant appelé $t_2 > t_1$. Puis, le point $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$ est transféré au point $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t_2)$, où $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. Comme précédemment, le point P_t continue à aller de l'avant avec $X(t) = x(t, t_2, x_2^+)$ comme solution de (2.20) à partir de (t_2, x_2^+) . Ainsi, le processus d'évolution continue vers l'avant tant que la solution de (2.20) existe.

On appelle l'ensemble des relations (i), (ii), et (iii), qui caractérisent le processus d'évolution ci-dessus, un système différentiel impulsif. La courbe décrite par le point P_t est appelée la courbe intégrale, et la fonction $x = x(t)$, qui définit cette courbe est une solution du système.

Les instants $t = t_k$ pour lesquels le point P_t touche l'ensemble $M(t)$ sont appelés les instants de l'effet impulsif. Nous supposons que la solution $x(t)$ du système différentiel impulsif est continue à gauche en t_k , $k = 1, 2, \dots$, soit $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$.

Soit l'ensemble $M(t) = \{M_k = (t_k, x), x \in \Omega, k \in \mathbb{N}^*\}$ représente une suite de plans, où $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$.

Soit A_k l'opérateur définit par

$$A_k : \Omega \rightarrow \Omega, x \mapsto A_k x = x + I_k(x),$$

où $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$. Par conséquent, l'ensemble $N(t)$ est également défini pour $t = t_k$ et $N(k) = A(k)M(k)$. Avec ce choix de $M(t)$, $N(t)$ et $A(t)$, un modèle mathématique d'un système impulsif simple dans lequel les impulsions se produisent à des instants fixes peut être décrit par

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ \Delta x &= I_k(x), t = t_k, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$ et $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$.

On voit immédiatement que toute solution $x(t)$ de (2.21) satisfait

- (i) $x'(t) = f(t, x(t)), t \in (t_k, t_{k+1}]$,
- (ii) $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k))$, $t = t_k, k \in \mathbb{N}$

Existence et unicité des solutions[52]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, et $\alpha < \beta$. Supposons que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tau_k < \tau_{k+1}, \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \tau_k = \pm\infty.$$

On considère l'équation différentielle impulsive avec des moments fixes

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), t \neq \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(x), t = \tau_k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.22}$$

avec la condition initiale

$$x(t_0^+) = x_0 \tag{2.23}$$

Définition 2.5.1

Une fonction $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de (2.22) si :

- (a) $(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \Omega$ pour $t \in (\alpha, \beta)$,
- (b) pour $t \in (\alpha, \beta)$, $t \neq \tau_k$, $k \geq 1$, la fonction $\varphi(t)$ est différentiable et $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t))$
- (c) la fonction $\varphi(t)$ est continue à gauche dans (α, β) et si $t \in (\alpha, \beta)$, $t = \tau_k$ et $t \neq \beta$, alors $\varphi(t^+) = \varphi(t) + I_k(\varphi(t))$ et pour chaque $j \geq 1$ et certain $\delta > 0$, $s \neq \tau_j$ pour $t < s < t + \delta$.

Définition 2.5.2

Chaque solution $\varphi(t)$ de (2.22) qui est définie dans un intervalle (t_0, β) et satisfait la condition $\varphi(t_0^+) = x_0$ est dite une solution du problème à valeurs initiale (2.22), (2.23).

Si le problème à valeurs initiales (2.22), (2.23) a une solution unique, nous noterons cette solution par $x(t; t_0, x_0)$.

Théorème 2.5.5 ([34])

Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue dans les ensembles $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times \Omega$, ($k \in \mathbb{Z}$), et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \Omega$, il existe une limite finie de $f(t, y)$ quand $(t, y) \rightarrow (\tau_k, x)$, $t > \tau_k$. Alors, pour chaque $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, il existe $\beta > t_0$ et une solution $x : (t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème à valeurs initiales (2.22), (2.23).

Si, en outre, la fonction f est localement Lipschitzienne par rapport à x dans $\mathbb{R} \times \Omega$, alors cette solution est unique.

Chapitre 3

Etude d'un modèle mathématique sur la Leishmaniose viscérale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à un modèle de Leishmaniose Viscérale zoonotique (ZVL) développé dans [15] et [23]. On va étudier la dynamique locale, il sera possible d'obtenir la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique lorsque la population totale des chiens est constante. On considère le modèle proposé dans [15] où la population totale des chiens D est divisée en deux catégories : des chiens toujours infectieux (qui deviennent infectieux) et des chiens jamais infectés. Les chiens toujours infectieux peuvent être non infectés S , latents (infectés mais pas infectieux L), ou infectieux I , les chiens jamais infectieux ne sont pas infectés R ou infectés Q . Le modèle épidémiologique qu'on va étudier est donné par le système d'équations différentielles

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R, \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{CIR}{D} - \delta Q \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0, L(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0, Q(0) \geq 0. \quad (3.2)$$

Les paramètres α , β , δ , C et σ sont positifs, d'où α est la proportion des chiens qui naissent susceptibles, β est le taux de natalité des chiens, C est la capacité vectorielle, δ est le taux de mortalité des chiens et σ est le taux des individus exposés qui deviennent infectés.

3.2 Existence, positivité et bornitude

3.2.1 Existence

Soit $u = (S, L, I, R, Q)^T$. Le système(3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = g(u(t)), \\ u(0) = (S_0, L_0, I_0, R_0, Q_0)^T, \end{array} \right.$$

avec

$$g(u) = \begin{pmatrix} \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S \\ \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L \\ \sigma L - \delta I \\ (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R \\ \frac{CIR}{D} - \delta Q \end{pmatrix}.$$

La fonction g est localement Lipschitzienne, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence locale des solutions est assurée.

3.2.2 Positivité

Puisque le second membre des équations du système (3.1) sont des polynomes, alors le système (3.1) est quasipositif, si la condition

$$u \geq 0, u_k = 0 \Rightarrow g_k(u) \geq 0,$$

où $g = (g_1, \dots, g_k)$ pour tout $k = 1, \dots, 5$. Donc les solutions de (3.1), (3.2) avec condition initiale $u(0) \in R_+^5$ restent dans R_+^5 pour tout t positif.

3.2.3 Bornitude

Tout d'abord, on montre que la solution de système (3.1) est bornée.

Soit $(S(t), L(t), I(t), R(t), Q(t))$ la solution de (3.1) avec conditions initiale (3.2), et $[0, T)$ l'intervalle maximale d'existence de solution.

On pose

$$D(t) = S(t) + L(t) + I(t) + R(t) + Q(t),$$

alors

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} + \frac{dQ}{dt}.$$

On obtient

$$\frac{dD}{dt} = (\beta - \delta)D(t).$$

Donc, on a

$$D(t) = D(0)e^{(\beta - \delta)t}.$$

Pour $\beta \leq \delta$, il s'ensuit que la population totale des chiens est bornée et $0 < D(t) \leq D(0)$.

3.3 Taux de reproduction de base

On note par f le taux d'apparition des nouveaux infectés dans chaque compartiment, et v le taux de transfert des individus qui entrent et qui sortent dans chaque compartiment.

Les compartiments infectés sont L et I .

Donc,

$$f(L, I) = \begin{pmatrix} \frac{CIS}{D} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$v(L, I) = \begin{pmatrix} -(\sigma + \delta)L \\ \sigma L - \delta I \end{pmatrix}.$$

On note par F and V les jacobiniennes de f et v par rapport à (L, I) , alors on a

$$F(E^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{CS^*}{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V(E^*) = \begin{pmatrix} -(\sigma + \delta) & 0 \\ \sigma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Le taux de reproduction de base est défini par $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}(E^*))$, où E^* est le point d'équilibre endémique.

Ainsi,

$$-FV^{-1}(E^*) = \begin{pmatrix} \frac{C\alpha\beta\sigma}{\delta^2(\sigma+\delta)} & \frac{C\alpha\beta}{\delta^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, \mathcal{R}_0 est donné par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{C\alpha\beta\sigma}{\delta^2(\sigma + \delta)}.$$

3.4 Les points d'équilibres

Dans ce qui suit, on suppose que $\beta = \delta$, voir que la population totale D est constante.

Alors le système(3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \alpha\delta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\delta D - \frac{CIR}{D} - \delta R, \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{CIR}{D} - \delta Q. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Théorème 3.4.1

On pose $\beta = \delta$. Alors le système (3.3) admet un unique point d'équilibre trivial $E_f = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0)$ appelé le point d'équilibre sans maladie. En outre, pour $\mathcal{R}_0 > 1$, le système (3.3) admet un autre point d'équilibre E^ qui est appelé un point d'équilibre endémique.*

Preuve:

Selon le système (3.3), les points d'équilibres satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\delta D - \frac{CIS}{D} - \delta S = 0, \\ \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L = 0, \\ \sigma L - \delta I = 0, \\ (1 - \alpha)\delta D - \frac{CIR}{D} - \delta R = 0, \\ \frac{CIR}{D} - \delta Q = 0. \end{array} \right.$$

(i) Pour $I = 0$, le point d'équilibre sans maladie est donné par :

$$E_f = (S^0, L^0, I^0, R^0, Q^0) = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0).$$

Cet équilibre correspond à un état dans lequel il n'y a pas de chiens infectieux et donc une éradication complète de la maladie.

(ii) Pour $I \neq 0$, on montre que le système (3.3) admet un autre point d'équilibre

$$\begin{aligned} & \text{qui est un point d'équilibre endémique donné par : } (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*) \\ & = \left(\frac{\delta D(\sigma + \delta)}{C\sigma}, \frac{\alpha\delta D}{\sigma + \delta} - \frac{\delta^2 D}{\sigma C}, \frac{\sigma\alpha\beta D}{\delta(\sigma + \delta)} - \frac{\delta D}{C}, (1 - \alpha)\frac{D\delta(\sigma + \delta)}{C\alpha\sigma}, (1 - \alpha)\left(D - \frac{D\delta(\sigma + \delta)}{C\alpha\sigma}\right) \right) \text{ si } \frac{C\alpha\sigma}{\delta(\sigma + \delta)} > \\ & 1, \text{ correspond à } \mathcal{R}_0 > 1. \text{ Donc, le système (3.3) a un point d'équilibre endémique} \\ & E^* = (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*) \text{ si } \mathcal{R}_0 > 1. \end{aligned}$$

□

3.5 Etude de la stabilité locale des points d'équilibres

Pour examiner la stabilité asymptotique locale de ces points d'équilibres on calcule leurs linéarisations, on fait l'étude pour $\mathcal{R}_0 < 1$ et $\mathcal{R}_0 > 1$.

Théorème 3.5.1

Pour le système (3.3)

(i) Si $\mathcal{R}_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie E_f est localement asymptotiquement stable. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors E_f est instable.

(ii) Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors E^* est localement asymptotiquement stable.

Preuve:

La matrice de linéarisation du système (3.3) est

$$\mathcal{J}_{(S,L,I,R,Q)} = \begin{pmatrix} -\frac{CI}{D} - \delta & 0 & -\frac{CS}{D} & 0 & 0 \\ \frac{CI}{D} & -(\sigma + \delta) & \frac{CS}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{CR}{D} & -\frac{CI}{D} - \delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{CR}{D} & \frac{CI}{D} & -\delta \end{pmatrix}.$$

(i) Au point d'équilibre sans maladie $E_f = (S^0, L^0, I^0, R^0, Q^0)$, on obtient la matrice jacobienne

$$\mathcal{J}(E_f) = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & -C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma + \delta) & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha)C & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)C & 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique au point E_f est donnée par

$$(-\delta - \lambda)^3[\lambda^2 + (2\delta + \sigma)\lambda + \sigma\delta + \delta^2 - \sigma C\alpha] = 0.$$

La valeur propre $\lambda = -\delta$ est de multiplicité 3, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\sigma - 2\delta < 0, \text{ et}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \sigma\delta + \delta^2 - \sigma C\alpha = \delta(\sigma + \delta)(1 - \mathcal{R}_0).$$

Alors les cinq valeurs propres de la jacobienne $\mathcal{J}(E_f)$ sont négatives si $\mathcal{R}_0 < 1$. Donc le point d'équilibre sans infection E_f est localement asymptotiquement stable.

Pour $\mathcal{R}_0 > 1$, il existe une valeur propre positive, donc le point d'équilibre sans maladie E_f est instable.

Ce modèle à un paramètre de seuil, connu sous le nom du taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 , tel que si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors le point d'équilibre sans maladie E_f est localement asymptotiquement stable, et la maladie ne peut pas envahir la population, par contre si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre E_f est instable et l'invasion est possible.

(ii) La matrice jacobienne du système (3.3) au point $E^* = (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*)$ est

$$\mathcal{J}(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{CI^*}{D} - \delta & 0 & -\frac{CS^*}{D} & 0 & 0 \\ \frac{CI^*}{D} & -(\sigma + \delta) & \frac{CS^*}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{CR^*}{D} & -\frac{CI^*}{D} - \delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{CR^*}{D} & \frac{CI^*}{D} & -\delta \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique au point E^* est donnée par :

$$(\lambda + \delta) \left(\frac{CI^*}{D} + \delta + \lambda \right) \left[\lambda^3 + \left(\frac{C\alpha\sigma}{\sigma + \delta} + 2\delta + \sigma \right) \lambda^2 + \frac{2\delta + \sigma}{\sigma + \delta} C\alpha\sigma \lambda + C\alpha\delta\sigma - \delta^2 (\sigma + \delta) \right] = 0.$$

D'après les conditions du critère de Routh-hurwitz, on a

$$a_1 = \frac{C\alpha\sigma}{\sigma + \delta} + 2\delta + \sigma > 0,$$

$$a_2 = \frac{2\delta + \sigma}{\sigma + \delta} C\alpha\sigma > (2\delta + \sigma)\delta > 0,$$

$$a_3 = C\alpha\delta\sigma - \delta^2 (\sigma + \delta) > 0,$$

et

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &> \left[\frac{C\alpha\sigma}{\sigma + \delta} + 2\delta + \sigma \right] (2\delta + \sigma)\delta - C\alpha\delta\sigma + \delta^2 (\sigma + \delta), \\ &> \frac{C\alpha\delta\sigma(\delta + \delta + \sigma)}{\sigma + \delta} + \delta(2\delta + \sigma)^2 - C\alpha\delta\sigma + \delta^2 (\sigma + \delta), \\ &> \frac{\delta^2 C\alpha\sigma}{(\sigma + \delta)} + \delta(2\delta + \sigma)^2 + \delta^2 (\sigma + \delta). \end{aligned}$$

Alors $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Donc, le point d'équilibre endémique E^* est localement asymptotiquement stable si il est biologiquement significatif, *i.e.* si $\mathcal{R}_0 > 1$.

□

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié un modèle mathématique sur la Leishmaniose cité dans [15], on a analysé la stabilité des points d'équilibres sans maladie et endémique par rapport au taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 dans le cas $\delta = \beta$.

Il est important de voir la stabilité globale et des simulations numériques pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 4

Analyse d'un modèle mathématique sur la Leishmaniose

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier un modèle mathématique sur la Leishmaniose viscérale zoonotique (ZVL), le modèle est inspiré de, [15] et [23]. La leishmaniose viscérale zoonotique (ZVL) est causée par *Leishmania infantum* est une maladie des humains et des chiens domestiques (le réservoir) transmise par un phlébotome insecte. Selon l'organisation mondiale de la santé, la leishmaniose est l'une des maladie qui touche les pays en développement les plus pauvres, 350 millions des gens sont considérés à risque de contacter la leishmaniose (voir [50]).

De nombreux travaux ont examinés des modèles mathématiques sur ZVL, on peut citer [15]-[47], où le comportement de l'infection, et la stabilité du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique sont étudiés.

Suivant le chapitre précédent et [15], au moment t , on suppose la population des chiens de taille $D(t)$, elle est divisée en deux catégories, les chiens qui sont toujours infectieux et les chiens jamais infectés. La catégorie des chiens qui sont toujours infectieux est divisée en trois compartiments qui sont susceptibles (non infectés),

des chiens latents (infectés mais non infectieux) et des chiens infectés, avec des tailles (des nombres) désignées par $S(t)$, $L(t)$ et $I(t)$ respectivement. La catégorie des chiens non infectés est divisée en deux compartiments qui sont des chiens non infectés et des chiens infectés, avec des tailles désignées par $R(t)$ et $Q(t)$ respectivement (figure 4.1). La somme $S(t) + L(t) + I(t) + R(t) + Q(t)$ est la population totale $D(t)$. On suppose que le taux de mortalité naturel δ est le même dans tous les compartiments. La proportion α des chiens qui naissent susceptibles à la maladie LVZ est $0 < \alpha < 1$. Par conséquent, le flux de naissance dans la classe des susceptibles est $\alpha\beta D(t)$ et dans la classe des résistance est $(1 - \alpha)\beta D(t)$ où β est le taux de natalité naturel des chiens. Les chiens latents deviennent infectieux et rentrent dans la classe des infectés avec un taux σ . La force de l'infection est $CI(t)/D(t)$, où C est la capacité vectorielle de la population des insectes qui transmettent l'infection entre les chiens. Et de même, elle est notée par $CI(t)S(t)/D(t)$ (resp. $CI(t)R(t)/D(t)$) pour le contact entre les chiens infectieux et susceptibles (resp. infectieux et non infectés).

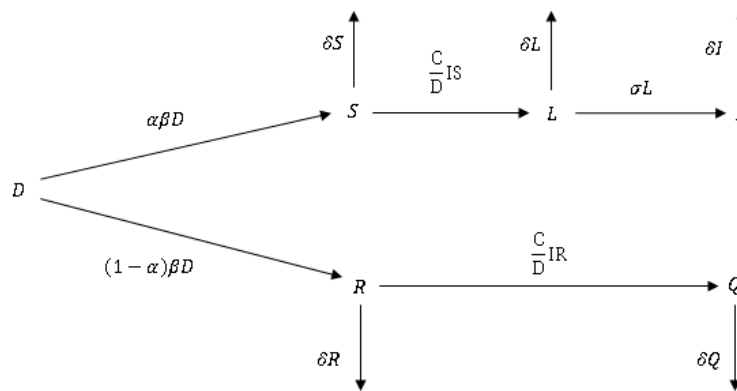


FIGURE 4.1 – Compartmental model

D'après les hypothèses ci-dessus, on obtient un modèle épidémiologique formé par

le système d'équations différentielles ordinaires suivantes ([14])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R, \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{CIR}{D} - \delta Q \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0, L(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0 \text{ et } Q(0) \geq 0. \quad (4.2)$$

D'après le système (4.1), la population totale des chiens $D(t) = S(t) + L(t) + I(t) + R(t) + Q(t)$ peut être déterminée par une équation différentielle $\frac{dD}{dt} = (\beta - \delta)D$ où $D(t) = D_0 e^{(\beta - \delta)t}$, avec $D_0 = D(0)$.

Donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta < \delta, \\ D_0 & \text{si } \beta = \delta, \\ \infty & \text{si } \beta > \delta. \end{cases}$$

Dans le chapitre précédent, le cas de la population constante (*i.e.* $\beta = \delta$), d'après (4.1) et (4.2) la stabilité locale des points d'équilibres est assurée. Par conséquent, le point d'équilibre sans maladie $E_f = (S^0, L^0, I^0, R^0, Q^0) = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0)$ est localement asymptotiquement stable pour $\mathcal{R}_0(\delta) = \frac{C\alpha\sigma}{\delta(\sigma + \delta)} < 1$, et instable pour $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$.

Pour $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, il existe un point d'équilibre endémique $E^* = (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*) = \left(\frac{\alpha D}{\mathcal{R}_0(\delta)}, \frac{\delta^2 D(\mathcal{R}_0(\delta) - 1)}{\sigma C}, \frac{\delta D(\mathcal{R}_0(\delta) - 1)}{C}, \frac{(1 - \alpha)D}{\mathcal{R}_0(\delta)}, \frac{(1 - \alpha)D(\mathcal{R}_0(\delta) - 1)}{\mathcal{R}_0(\delta)} \right)$ qui est localement asympto-

tiquement stable. Dans ce chapitre, on va étudier la stabilité globale des points d'équilibre du système (4.1) en construisant une fonction de Lyapunov convenable et en utilisant le principe de l'invariance de LaSalle quand $\delta = \beta$. On va encore analyser le cas critique $\mathcal{R}_0(\delta) = 1$. Après, on va considérer le cas où $\beta \neq \delta$. Des simulations numérique sont données à la fin de ce chapitre pour illustrer nos résultats.

4.2 Le cas où la population totale est constante

Les résultats sont donnés par les théorèmes 4.2.1 et 4.2.2.

Théorème 4.2.1

Le cas où $\beta = \delta$. Le système (4.1) admet les points d'équilibres suivants :

- *Un point d'équilibre sans maladie $E_f = (S^0, L^0, I^0, R^0, Q^0) = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0)$, il existe toujours.*
- *si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, le système (4.1) admet un unique point d'équilibre positif $E^* = (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*) = \left(\frac{\alpha D}{\mathcal{R}_0}, \frac{\delta^2 D(\mathcal{R}_0 - 1)}{\sigma C}, \frac{\delta D(\mathcal{R}_0 - 1)}{C}, \frac{(1 - \alpha)D}{\mathcal{R}_0}, \frac{(1 - \alpha)D(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right)$, on l'appelle encore un point d'équilibre endémique.*

Théorème 4.2.2

Soit $\beta = \delta$.

- *Si $\mathcal{R}_0(\delta) < 1$, le point d'équilibre sans maladie (DFE) E_f de (4.1) est localement asymptotiquement stable. Si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, E_f est instable.*
- *Si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, le point d'équilibre endémique E^* de (4.1) est localement asymptotiquement stable.*

Les quatre premières équations de (4.1) sont indépendantes de Q , par conséquent la dernière équation de (4.1) peut être négligée mais sans perdre de généralités. Donc,

le système (4.1) est réduit à

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R \end{cases} \quad (4.3)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0, L(0) \geq 0, I(0) \geq 0 \text{ et } R(0) \geq 0 \quad (4.4)$$

et

$$D(t) = D_0 e^{(\beta - \delta)t}.$$

La région d'étude considéré pour (4.3) est donnée par

$$\tilde{\Gamma}_D := \{(S, L, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S + L + I + R \leq D\}.$$

il est positivement invariant pour chaque solution de (4.3) dans $\tilde{\Gamma}_D$ pour tout $t \geq 0$.

Soit $\tilde{E}_f = (S^0, 0, 0, R^0)$ et $\tilde{E}^* = (S^*, L^*, I^*, R^*)$ les points d'équilibres de (4.3).

4.2.1 L'analyse de la bifurcation

Le cas $\mathcal{R}_0(\delta) = 1$ correspond à $C = C_1 = \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\alpha\sigma}$.

Démontrer la bifurcation pour $\mathcal{R}_0(\delta) = 1$, revient à utiliser la méthode de la variété centre illustrée dans Castillo-Chavez et Song [16].

Pour cette raison, on fait un changement de variable.

Posant $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sachant que $x_1 = S$, $x_2 = L$, $x_3 = I$, $x_4 = R$.

D'après (4.3), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \alpha\beta D - \frac{C_{x_3x_1}}{D} - \beta x_1 = f_1(x, C), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_{x_3x_1}}{D} - (\sigma + \beta) x_2 = f_2(x, C), \\ \frac{dx_3}{dt} = \sigma x_2 - \beta x_3 = f_3(x, C), \\ \frac{dx_4}{dt} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{C_{x_3x_4}}{D} - \beta x_4 = f_4(x, C). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

La matrice jacobienne du système (4.3) autour du point d'équilibre sans maladie pour $C = C_1$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & -C_1\alpha & 0 \\ 0 & -(\sigma + \delta) & C_1\alpha & 0 \\ 0 & \sigma & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha)C_1 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -\delta$ avec multiplicité deux, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -\sigma - 2\delta$. Zéro est une valeur propre simple de A et les autres valeurs propres sont de parties réelles négatives.

Le vecteur propre à droite $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ sachant que $AW = \lambda_2 W$ (correspond à la valeur propre zéro) est $W = (-\frac{\sigma + \delta}{\delta}, 1, \frac{\sigma}{\delta}, -(1 - \alpha)\frac{C_1\sigma}{\delta^2})^T$ et le vecteur propre à gauche $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ sachant que $VA = \lambda_2 V$ et $V \cdot W = 1$ est $V = (0, \frac{\delta}{\sigma + 2\delta}, \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\sigma(\sigma + 2\delta)}, 0)$.

Soit

$$a = \sum_{k,i,j=1}^4 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1)$$

et

$$b = \sum_{k,i=1}^4 v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial C} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1).$$

Les deuxièmes dérivées partielles de f_2 et f_3 sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{C}{D}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial C} &= \frac{x_3}{D}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial C} = \frac{x_1}{D}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_4 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_4 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_4 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_4^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial x_j} &= 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} a &= v_2 \sum_{i,j=1}^4 w_i w_j \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &\quad + v_3 \sum_{i,j=1}^4 w_i w_j \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &= 2v_2 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &= -2 \frac{\sigma(\sigma+\delta)}{\delta(\sigma+2\delta)} < 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b &= v_2 \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial C} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &\quad + v_3 \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial C} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &= v_2 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial C} (\alpha D, 0, 0, (1-\alpha)D, C_1) \\ &= \frac{\alpha \sigma}{2\delta + \sigma} > 0. \end{aligned}$$

Pour $a < 0$ et $b > 0$, d'après les résultats du théorème 4.1 dans Castillo-Chavez et Song [16] on déduit le résultat suivant.

Théorème 4.2.3

La bifurcation transcritique autour de $\mathcal{R}_0(\delta) = 1$.

Quand C traverse C_1 , le point d'équilibre sans maladie \tilde{E}_f change de stabilité de stable vers instable. Par ailleurs, le point d'équilibre négatif instable \tilde{E}^* pour $C < C_1$, devient positif et localement asymptotiquement stable pour $C > C_1$ (figure 4.2).

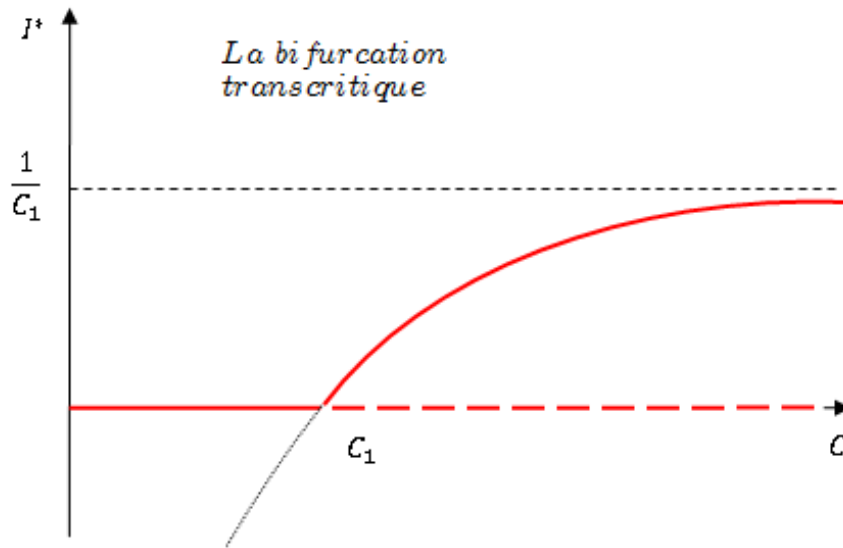


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation pour (4.3)

4.2.2 La stabilité globale

Dans cette section, on va étudier la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre sans maladie E_f et le point d'équilibre endémique E^* . On a le théorème suivant :

Théorème 4.2.4

- Si $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$, alors \tilde{E}_f est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_D$.
- Si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, alors \tilde{E}^* est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_D \setminus \tilde{\Lambda}_D$ d'où $\tilde{\Lambda}_D = \{(S, 0, 0, R) \in \mathbb{R}_+^4 \mid 0 \leq S + R \leq D\}$.

Preuve:

Pour étudier la stabilité globale, on réduit le système (4.3) à

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \alpha\delta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L - \delta I. \end{cases} \quad (4.6)$$

S , L et I sont indépendants de R , on étudie le système (4.6) dans l'ensemble fermé

$$\tilde{\Omega}_D = \{(S, L, I) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus 0 \leq S + L + I \leq D\}.$$

- En utilisant la fonction de Lyapunov, on démontre que le point d'équilibre sans maladie \tilde{E}_f est globalement asymptotiquement stable.

On pose

$$V_1(S, L, I) = \frac{1}{2S^0}(S - S^0)^2 + L + \frac{\sigma + \delta}{\sigma}I + \frac{1}{2}(S - S^0 + L + I)^2.$$

$V_1(S, L, I) \geq 0$ et $V_1(S, L, I) = 0$ si et seulement si $(S, L, I) = (S^0, 0, 0)$.

Calculons les dérivées de V_1 , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{S^0}(S - S^0)\frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{\sigma + \delta}{\sigma}\frac{dI}{dt} + (S - S^0 + L + I)\left(\frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dI}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{S^0}(S - S^0)\left(\alpha\delta D - \frac{CIS}{D} - \delta S\right) + \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L \\ &\quad + \frac{\sigma + \delta}{\sigma}(\sigma L - \delta I) + (S - S^0 + L + I)(\alpha\delta D - \delta S - \delta L - \delta I) \\ &= \left(\frac{S - S^0}{S^0}\right)\left(-\frac{CIS}{D} - \delta(S - S^0)\right) + \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L \\ &\quad + \frac{\sigma + \delta}{\sigma}(\sigma L - \delta I) - \delta(S - S^0 + L + I)^2 \\ &= -\frac{\delta}{S^0}(S - S^0)^2 + \left(2S - \frac{S^2}{S^0} - S^0\right)\frac{C}{D}I + \left(S^0\frac{C}{D} - \delta\frac{\sigma + \delta}{\sigma}\right)I - \delta(S - S^0 + L + I)^2. \end{aligned}$$

On peut montrer que les coefficients du terme I dans la dernière équation sont négatifs. En effet, sachant que $S^0 = \alpha D$ et $\mathcal{R}_0(\delta) = \frac{C\sigma\alpha}{\delta(\delta + \sigma)}$, on a $S^0\frac{C}{D} - \delta\frac{\sigma + \delta}{\sigma} = \frac{C\alpha(\mathcal{R}_0(\delta) - 1)}{\mathcal{R}_0(\delta)}$, qui est négatif pour $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$. De plus, on a $2S - \frac{S^2}{S^0} - S^0 \leq 0$ pour tout $S \geq 0$.

Par conséquent, pour $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$ on a $\frac{dV_1}{dt}(S, I, L) \leq 0$ pour tout $(S, L, I) \in \tilde{\Omega}_D$.
Et $\frac{dV_1}{dt} = 0$ si et seulement si $(S, L, I) = (S^0, 0, 0)$.

Alors, le seul ensemble invariant contenant dans $\tilde{\Omega}_D$ est $\{\tilde{E}_f\}$. Donc, le théorème de LaSalle implique la convergence des solutions (S, L, I) vers $(S^0, 0, 0)$ si les valeurs initiales sont dans $\tilde{\Omega}_D$.

On outre, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0 \text{ sachant que pour } t > A_\epsilon \text{ on a } |I(t)| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$, d'après la quatrième équation du système (4.3) on a

$$-(\epsilon \frac{C}{D} + \delta)R + (1 - \alpha)\delta D \leq \frac{d}{dt}R(t) \leq -(-\epsilon \frac{C}{D} + \delta)R + (1 - \alpha)\delta D.$$

Après intégration entre A_ϵ et t on obtient

$$\frac{(1 - \alpha)\delta D}{\epsilon \frac{C}{D} + \delta} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) \leq \frac{(1 - \alpha)\delta D}{-\epsilon \frac{C}{D} + \delta}$$

pour tout ϵ sachant que $0 < \epsilon < \frac{D}{C}\delta$. Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = (1 - \alpha)D = R^0$.

Par conséquent, pour $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$ le point d'équilibre sans maladie \tilde{E}_f est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_D$.

– Soit

$$V_2(S, L, I) = \frac{\delta D}{CS^*}(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}) + \frac{\delta D}{CS^*}(L - L^* - L^* \ln \frac{L}{L^*}) + (I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*})$$

pour $(S, L, I) \in \tilde{\Gamma}_D \setminus \tilde{\Lambda}_D$.

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{\delta D}{CS^*} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \frac{dS}{dt} + \frac{\delta D}{CS^*} \left(1 - \frac{L^*}{L}\right) \frac{dL}{dt} + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{dI}{dt} \\
&= \frac{\delta D}{CS^*} \left(-\frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 - \frac{CS^*}{DS} (I - I^*) (S - S^*) - \frac{C}{D} (S - S^*) I \frac{S - S^*}{S}\right) \\
&\quad + \frac{\delta D}{CS^*} \left(\frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta)L - \frac{L^*}{L} \frac{CIS}{D} + L^*(\sigma + \delta)\right) \\
&\quad + (\sigma L - \delta I - \frac{I^*}{I} \sigma L + I^* \delta) \\
&= \frac{\delta D}{CS^*} \left(-\frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 + \frac{CS^{*2}}{D} \frac{I}{S} - \frac{CS^{*2}I^*}{DS} - \frac{C}{D} IS - \frac{C}{D} S^{*2} \frac{I}{S} + 2\frac{C}{D} S^* I\right) \\
&\quad + \frac{\delta D}{CS^*} \left(\frac{C}{D} IS - (\sigma + \delta)L - \frac{CL^*}{D} \frac{IS}{L} + L^*(\sigma + \delta)\right) \\
&\quad + \sigma L - \delta I - \frac{I^*}{I} \sigma L + I^* \delta \\
&= -\frac{\delta D}{CS^*} \frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 + \delta I^* - \frac{\delta S^* I^*}{S} - \frac{\delta}{S^*} IS + \delta I \\
&\quad + \frac{\delta}{S^*} IS - \frac{\delta D}{CS^*} (\sigma + \delta)L - \frac{\delta L^*}{S^*} \frac{IS}{L} + \frac{\delta D}{CS^*} L^*(\sigma + \delta) \\
&\quad + \sigma L - \delta I - \frac{I^*}{I} \sigma L + I^* \delta \\
&= -\frac{\delta D}{CS^*} \frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 + 2\delta I^* - \frac{\delta S^* I^*}{S} + \left(\sigma - \frac{\delta D}{CS^*} (\sigma + \delta)\right) L \\
&\quad - \frac{\delta L^*}{S^*} \frac{IS}{L} + \frac{\delta D}{CS^*} L^*(\sigma + \delta) - \frac{I^*}{I} \sigma L.
\end{aligned}$$

Comme $S^* = \frac{D\delta(\sigma+\delta)}{C\sigma}$ et $L^* = \frac{\delta}{\sigma} I^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{\sigma}{\sigma+\delta} \frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 + 3\delta I^* - \frac{\delta S^* I^*}{S} - \frac{\delta L^*}{S^*} \frac{IS}{L} - \frac{I^*}{I} \sigma L \\
&= -\frac{\sigma}{\sigma+\delta} \frac{\delta}{S} (S - S^*)^2 - \delta I^* \left(\frac{S}{S^*} \frac{\delta}{\sigma} \frac{I}{L} + \frac{S^*}{S} + \frac{\sigma}{\delta} \frac{L}{I} - 3\right)
\end{aligned}$$

qui est négative si le terme $\left(\frac{S}{S^*} \frac{\delta}{\sigma} \frac{I}{L} + \frac{S^*}{S} + \frac{\sigma}{\delta} \frac{L}{I} - 3\right)$ est positif.

Posons $u = \frac{S^*}{S}$ et $v = \frac{\sigma}{\delta} \frac{L}{I}$ et considérons la fonction

$$h(u, v) = u + v + \frac{1}{vu} - 3.$$

En calculant la première dérivée de h , on obtient $\frac{\partial h(u,v)}{\partial u} = 1 - \frac{1}{u^2 v}$ et $\frac{\partial h(u,v)}{\partial v} = 1 - \frac{1}{uv^2}$. De plus $\frac{\partial h(1,1)}{\partial u} = 0$ et $\frac{\partial h(1,1)}{\partial v} = 0$, alors $(1, 1)$ est un point critique de h . La deuxième dérivée de h nous donne, $\frac{\partial^2 h(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{u^2 v^2}$, $\frac{\partial^2 h(u,v)}{\partial u^2} = \frac{2}{vu^3}$ et $\frac{\partial^2 h(u,v)}{\partial v^2} = \frac{2}{uv^3}$.

On obtient

$$Hess(h)(1, 1) = \left(\frac{\partial^2 h(1, 1)}{\partial u \partial v} \right)^2 - \frac{\partial^2 h(1, 1)}{\partial u^2} \frac{\partial^2 h(1, 1)}{\partial v^2} = -3.$$

On a $Hess(h)(1, 1) < 0$ et $\frac{\partial^2 h(1, 1)}{\partial u^2} > 0$, donc la fonction h admet un point minimum $(u, v) = (1, 1)$.

De plus, $h(1, 1) = 0$ et $h \geq 0$ ce qui implique que le terme $(\frac{S}{S^*} \frac{\delta}{\sigma} \frac{I}{L} + \frac{S^*}{S} + \frac{\sigma}{\delta} \frac{L}{I} - 3)$ est positif, donc $\frac{d}{dt} V_2(S, L, I) \leq 0$.

La fonction V_2 est une fonction de Lyapunov pour le système (4.6), et $\frac{d}{dt} V_2(S, L, I) = 0$ si est seulement si $S = S^*$ et $\sigma L = \delta I$. D'après la première équation du système (4.6) pour $S = S^*$ on obtient $I = I^*$.

Donc $L = L^*$ et le point d'équilibre (S^*, L^*, I^*) est le seul point qui satisfait $\frac{d}{dt} V_2(S, L, I) = 0$.

Par conséquent, le seul ensemble invariant contenu dans $\tilde{\Omega}_D$ est $\{\tilde{E}^*\}$, donc le théorème de LaSalle implique la convergence de la solution (S, L, I) vers (S^*, L^*, I^*) pour toutes valeurs initiales dans $\tilde{\Omega}_D \setminus \tilde{\Sigma}_D$ où

$$\tilde{\Sigma}_D := \{(S, 0, 0) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus 0 \leq S \leq D\}.$$

De plus, en utilisant la procédure précédente, on peut montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R^*$. Donc pour $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$ le point d'équilibre endémique \tilde{E}^* est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_D \setminus \tilde{\Lambda}_D$.

□

Remarque 4.2.1

Si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$ et la condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0)) \in \tilde{\Gamma}_D$ avec $(S(0), L(0), I(0)) \in \tilde{\Sigma}_D$, alors la solution de (4.3) converge vers le point d'équilibre sans maladie \tilde{E}_f .

Corollaire 4.2.1

– Si $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$, alors E_f est globalement asymptotiquement stable dans $\Gamma_D := \{(S, L, I, R, Q) \in \mathbb{R}^5 \setminus S + L + I + R + Q = D\}$.

- Si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, alors E^* est globalement asymptotiquement stable dans $\Gamma_D \setminus \Lambda_D$ où $\Lambda_D := \{(S, 0, 0, R, Q) \in \mathbb{R}_+^5 \mid 0 \leq S + R + Q \leq D\}$. De plus, si la condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0)) \in \Lambda_D$ alors la solution de (4.1) converge vers le point d'équilibre sans maladie E_f .

4.3 La population totale est non constante

On pose les nouvelles variables suivantes

$$s = \frac{S}{D}, \quad l = \frac{L}{D}, \quad i = \frac{I}{D}, \quad r = \frac{R}{D} \text{ et } q = \frac{Q}{D}.$$

On obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} s' = \alpha\beta - C i s - \beta s, \\ l' = C i s - (\sigma + \beta)l, \\ i' = \sigma l - \beta i, \\ r' = (1 - \alpha)\beta - C i r - \beta r, \\ q' = C i r - \beta q \end{array} \right. \quad (4.7)$$

avec les conditions initiales

$$s(0) \geq 0, \quad l(0) \geq 0, \quad i(0) \geq 0, \quad r(0) \geq 0 \text{ et } q(0) \geq 0. \quad (4.8)$$

A partir de l'homogénéité de (4.1), on remarque que la population totale D ne figure plus dans (4.7). De plus, on observe que les quatres premières équations de (4.7) ne dépendent pas de q et $s + l + i + r + q = 1$, par conséquent on peut négliger la

dernière équation mais sans perdre de généralités. Donc, on réduit le système (4.7) à

$$\left\{ \begin{array}{l} s' = \alpha\beta - C is - \beta s, \\ l' = C is - (\sigma + \beta)l, \\ i' = \sigma l - \beta i, \\ r' = (1 - \alpha)\beta - C ir - \beta r. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

On fait l'étude du système (4.9) dans l'ensemble fermé

$$\tilde{\Gamma}_1 = \{(s, l, i, r) \in \mathbb{R}_+^4 \mid 0 \leq s + l + i + r \leq 1\}.$$

L'ensemble $\tilde{\Gamma}_1$ est positivement invariant.

On remarque que (4.9) est équivalent à (4.3) pour $D = 1$ et $\delta = \beta$. Le taux de reproduction de base est donné par

$$\mathcal{R}_0(\beta) = \frac{C\alpha\sigma}{\beta(\sigma + \beta)}.$$

A partir du théorème 4.2.4 et la remarque 4.2.1 on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.3.1

- (i) Si $\mathcal{R}_0(\beta) \leq 1$, alors $e_f = (s^0, l^0, i^0, r^0) = (\alpha, 0, 0, 1 - \alpha)$ est le seul point d'équilibre de (4.9), nommé encore le point d'équilibre sans maladie, il est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_1$.
- (ii) Si $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$, alors e_f est instable et il existe un unique point d'équilibre endémique $e^* = (s^*, l^*, i^*, r^*) = \left(\frac{\alpha}{\mathcal{R}_0}, \frac{\beta^2(\mathcal{R}_0 - 1)}{\sigma C}, \frac{\beta(\mathcal{R}_0 - 1)}{C}, \frac{(1 - \alpha)}{\mathcal{R}_0}, \frac{(1 - \alpha)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right)$ de (4.9), qui est globalement asymptotiquement stable dans $\tilde{\Gamma}_1 \setminus \tilde{\Lambda}_1$.
- (iii) Si $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$, alors pour toute condition initiale $(s(0), l(0), i(0), r(0)) \in \tilde{\Lambda}_1$, la solution de (4.9) converge vers le point d'équilibre sans maladie e_f .

D'après le théorème 4.3.1, on déduit les résultats suivants :

Corollaire 4.3.1

Si $\beta < \delta$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$.

Corollaire 4.3.2

Soit $\beta > \delta$.

(i) Si $\mathcal{R}_0(\beta) \leq 1$, alors pour toute condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) \in$

Γ_{D_0} on a $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$.

(ii) Si $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$, alors pour toute condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) \in$

$\Gamma_{D_0} \setminus \Lambda_{D_0}$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = +\infty$.

(iii) Si $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$, alors pour toute condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) \in$

Λ_{D_0} on a $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$

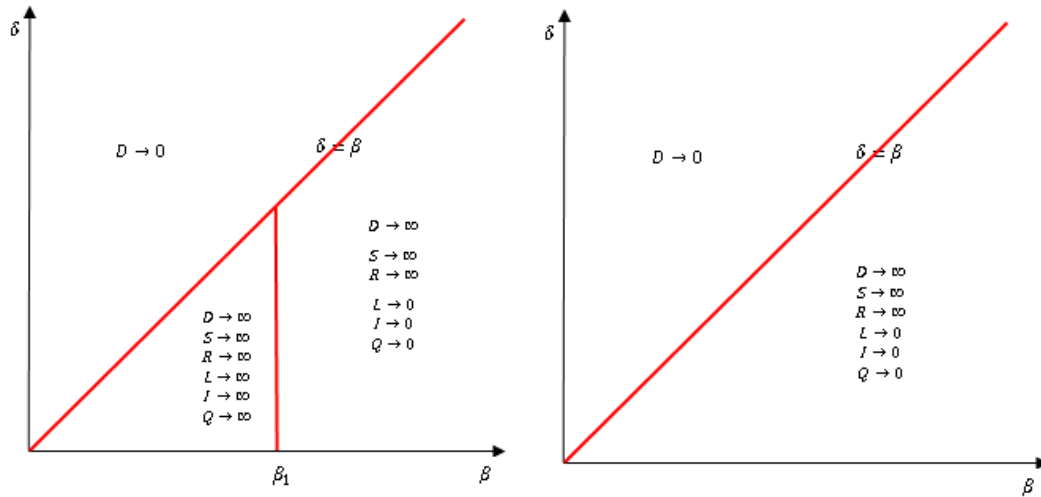


FIGURE 4.3 – Diagramme de bifurcation pour le système (4.1).

Dans la figure gauche, la condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) \in \Gamma_{D_0} \setminus \Lambda_{D_0}$, où $\beta > \delta$ et $\beta > \beta_1 = \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4C\sigma\alpha}}{2}$ la maladie disparaît alors que la population totale augmente exponentiellement. Bien que la maladie se propage (c'est-à-dire, que le nombre de personnes infectées augmente en nombre total) lorsque $\beta_1 < \beta$. Dans la figure à droite, les conditions initiales $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) \in \Lambda_{D_0}$ alors, chaque fois que $\beta > \delta$ la maladie disparaît alors que la population totale augmente exponentiellement. Notez que lorsque $\beta < \delta$, la population totale diminue exponentiellement.

Remarque 4.3.1

Dans les résultats ci-dessus, on peut voir que le comportement asymptotique de la population totale et les compartiments d'infection dépend des valeurs des taux de

naissance et de mortalité et des conditions initiales (figure 4.3).

4.4 Les simulations numériques

Dans cette section on donne des simulations numériques pour notre modèle. Les valeurs des paramètres utilisés sont inspirées de [15] et [23] (voir le tableau 4.1).

paramètre	valeur (cas : $\beta = \delta$)	valeur (cas : $\beta < \delta$)	valeur (cas : $\beta > \delta$)
α	0.43	0.43	0.43
β	0.0011	0.0011	0.00167
δ	0.0011	0.00167	0.0011
σ	0.0050	0.0050	0.0050
D_0	50	50	50

TABLE 4.1 – Valeurs des paramètres pour (4.1).

Nous discutons les résultats de simulation du système(4.1) en fonction des valeurs de β et δ .

4.4.1 Cas : $\beta = \delta$

- (1) Quand $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$, le point d'équilibre sans maladie E_f est globalement asymptotiquement stable dans Γ_D (voir figure 4.4).

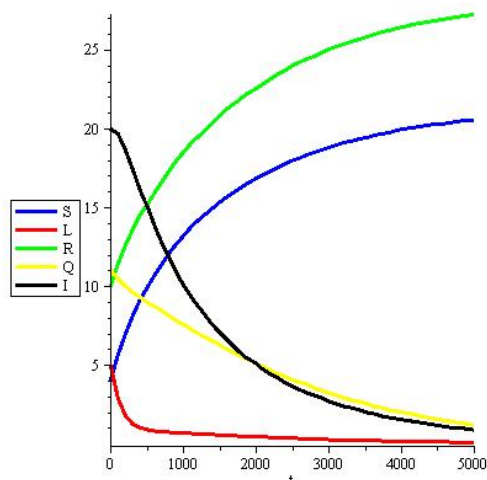


FIGURE 4.4 – Les résultats de simulations pour $\mathcal{R}_0(\delta) = 0.4806$, $C = 0.0015$ et condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (4, 5, 20, 10, 11)$

- (2) Quand $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$, le point d'équilibre endémique E^* est globalement asymptotiquement stable dans $\Gamma_D \setminus \Lambda_D$ et si la condition initiale est dans Λ_D , la solution tend vers le point d'équilibre sans maladie E_f (voir figure 4.5).

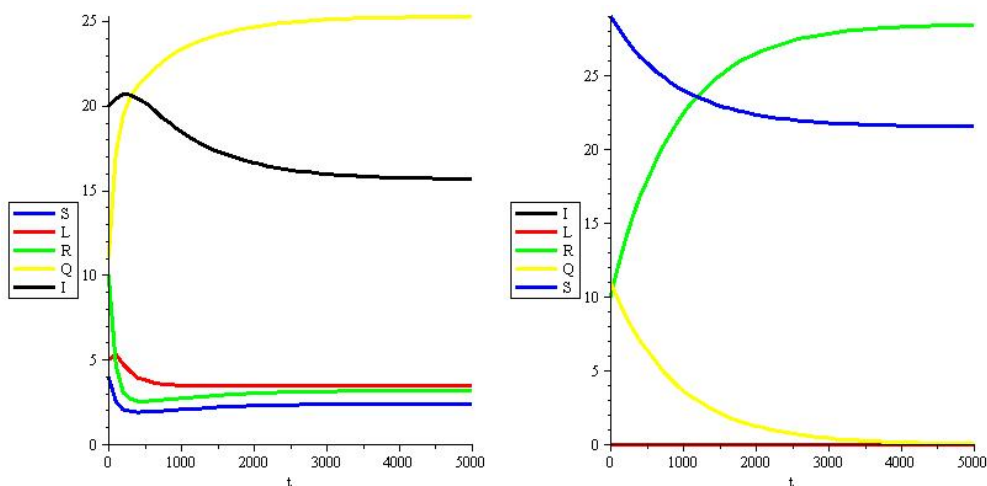


FIGURE 4.5 – Les résultats de simulations pour $\mathcal{R}_0(\delta) = 8.9076$, $C = 0.0278$ et condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (4, 5, 20, 10, 11)$ (resp. $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (29, 0, 0, 10, 11)$) figure gauche (resp. figure droite).

4.4.2 Cas : $\beta < \delta$

Dans ce cas là, on a une extinction de la population totale des chiens (voir figure 4.6).

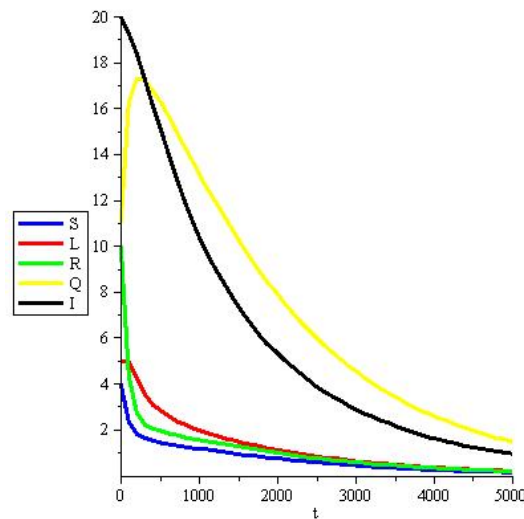


FIGURE 4.6 – Les résultats de simulations pour $\mathcal{R}_0(\beta) = 5.3659$, $C = 0.0278$ et condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (4, 5, 20, 10, 11)$.

4.4.3 Cas : $\beta > \delta$

- (1) Quand $\mathcal{R}_0(\beta) \leq 1$ (i.e. $\beta > \beta_1$), la maladie disparaît lorsque $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = I(t) = Q(t) = 0$, et la population totale des chiens augmente de façon exponentielle, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = S(t) = R(t) = \infty$ (voir figure 4.7).

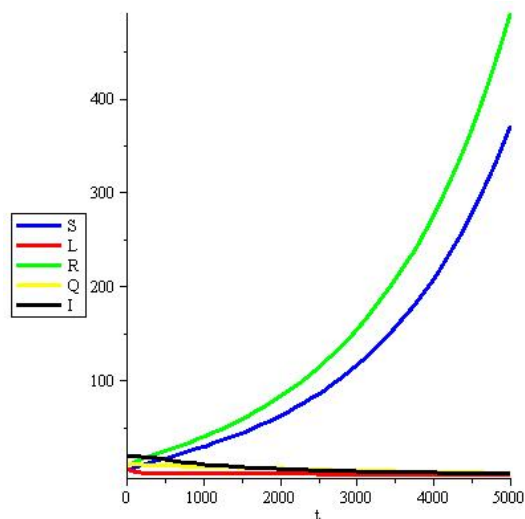


FIGURE 4.7 – Les simulations des résultats pour $\mathcal{R}_0(\beta) = 0.2895$, $C = 0.0015$ et condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (4, 5, 20, 10, 11)$.

- (2) Quand $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$ (i.e. $\beta < \beta_1$), tous les compartiments de D augmentent et on a $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = I(t) = Q(t) = S(t) = R(t) = \infty$ si la condition initiale est dans $\Gamma_D \setminus \Lambda_D$. La maladie disparaît si la condition initiale est dans Λ_D , dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = I(t) = Q(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = S(t) = R(t) = \infty$ (voir figure 4.8).

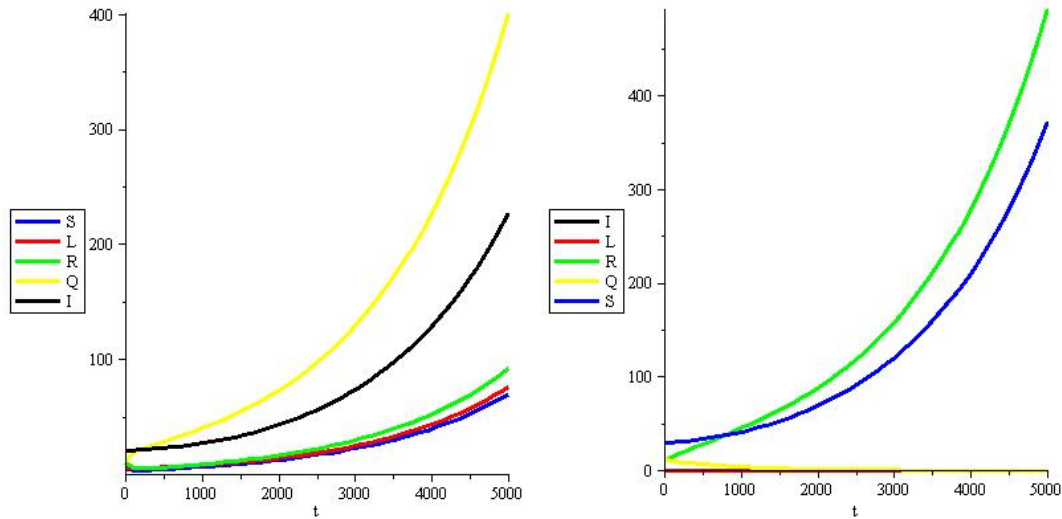


FIGURE 4.8 – Les simulations de résultats pour $\mathcal{R}_0(\delta) = 5.3659$, $C = 0.0278$ et condition initiale $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (4, 5, 20, 10, 11)$ (resp. $(S(0), L(0), I(0), R(0), Q(0)) = (29, 0, 0, 10, 11)$) figure gauche (resp. figure droite).

4.5 Conclusions

Nous avons étudié un modèle mathématique ZVL considéré dans [15] et [23] où nous avons pris en considération seulement la population constante des chiens. Dans ce chapitre nous avons étudié les deux cas où D est constante ou non constante, nos résultats principaux sont donnés dans le théorème 4.2.3, théorème 4.2.4 et théorème 4.3.1.

En réalité, dans le cas d'une population des chiens constante, nous avons analysé la bifurcation du point d'équilibre sans maladie E_f à l'équilibre endémique E^* (théorème [4.2.3]), où la stabilité est transmise de E_f à E^* , la bifurcation est étudiée par rapport à la force d'infection C , cela est possible pour $C = C_1$ correspondant au nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0(\delta) = 1$. Dans le théorème [4.2.4], nous avons trouvé les fonctions de Lyapunov pour démontrer la stabilité globale des points d'équilibres \tilde{E}_f et \tilde{E}^* . Ces résultats nous permettent de trouver un domaine de stabilité asymptotique E_f et E^* (corollaire [4.2.1]). Dans le cas de la population des chiens non constante, nous avons transformé (4.1) à un nouveau modèle (4.7)

équivalent à (4.1) par le moyen de la fraction des sous-classes de la population des chiens D . Nous avons obtenu des résultats intéressants concernant le comportement de chaque sous-classe de D (corollaires [4.3.1] et [4.3.2]). Nos résultats nous permettent de déterminer le cas où l'infection va à l'extinction ou à la persistance en fonction des valeurs des paramètres. En fait, les taux de natalités et de mortalités β et δ sont importants pour le comportement de la taille de la population totale D , qui reste constant pour des valeurs égales des taux de natalités et de mortalités. Si $\beta < \delta$ la population totale passe à zéro (figure 4.6). Au contraire, si $\beta > \delta$ alors la population totale explose, dans ce cas le comportement de l'infection dépend de la valeur du nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0(\beta)$ et dans les domaines de la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique. En fait, pour $\mathcal{R}_0(\beta) \leq 1$ les compartiments d'infection vont à l'extinction (figure 4.7), mais pour $\mathcal{R}_0(\beta) > 1$ les comportements de I et L dépendent du domaine des conditions initiales, plus précisément l'infection disparaît seulement pour $I(0) = L(0) = 0$ (figure 4.8). Si les taux de natalité et de mortalité sont égaux alors le comportement des compartiments d'infection va à l'extinction pour $\mathcal{R}_0(\delta) \leq 1$ (figure 4.4). L'infection persiste si $\mathcal{R}_0(\delta) > 1$ pour toutes les conditions initiales telles que $I(0) \neq 0 \neq L(0)$ (figure 4.5). De plus, nos résultats sont illustrés par des simulations numériques intéressante pour chaque cas.

Ce travail pourrait être poursuivi, par exemple pour voir dans quels cas nous devons utiliser le contrôle de la maladie afin de réduire l'infection ou l'éradiquer. Nous pouvons aussi considérer l'interaction avec la population des chiens infectés et les population des insectes et d'humains afin d'obtenir un modèle plus global.

Chapitre 5

Etude d'un modèle mathématique avec impulsion sur la leishmaniose viscérale

5.1 Introduction

La théorie et les applications des équations différentielles impulsives se sont développées très rapidement à la fin du siècle dernier. Les équations impulsives sont largement appliquées aux processus d'évolution avec une perturbation à court terme. Dans la vie réelle, de nombreux phénomènes présentent des effets impulsifs, tels que des phénomènes biologiques, des modèles en médecine, des modèles de contrôle optimum en économie, en pharmacocinétique et en système à fréquence modulée, les effets impulsifs dans le modélisme épidémiologique sont principalement décrits comme la vaccination impulsive pour les personnes, la naissance saisonnière et l'enlèvement de certains animaux, etc.

Dans ce chapitre, nous présentons une brève introduction aux travaux réalisés par [15] et [23].

La somme $S + L + I + R + Q$ est la population totale D . On suppose que le

taux de mortalité naturelle δ est le même dans tous les compartiments. La proportion α des chiens qui naissent susceptibles à la maladie LVZ est $0 < \alpha < 1$. le flux de naissance dans la classe des susceptibles est $\alpha\beta D(t)$ et dans la classe des résistances est $(1 - \alpha)\beta D(t)$ où β est le taux de natalité naturel des chiens [15] et [23], on considère que $\beta = \delta$, la population D est non constante et D tend vers zero ou l'infini pour $\delta > \beta$ ou $\delta < \beta$ respectivement. Les chiens latents deviennent infectieux et rentrent dans la classe des infectés avec un taux σ . La force de l'infection est $CI(t)/D(t)$, où C est la capacité vectorielle de la population des insectes qui transmettent l'infection entre les chiens. Et de même, elle est notée par $CI(t)S(t)/D(t)$ (resp. $CI(t)R(t)/D(t)$) pour le contact entre les chiens infectieux et susceptibles (resp. infectieux et non infectés). Suivant les hypothèses ci-dessus, le modèle épidémiologique obtenu est formé par les équations différentielles suivantes (voir[15])

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = \alpha\beta D - \frac{CIS}{D} - \delta S, \\ \dot{L} = \frac{CIS}{D} - (\sigma + \delta) L, \\ \dot{I} = \sigma L - \delta I, \\ \dot{R} = (1 - \alpha)\beta D - \frac{CIR}{D} - \delta R, \\ \dot{Q} = \frac{CIR}{D} - \delta Q \end{array} \right. \quad (5.1)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0, L(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0 \text{ et } Q(0) \geq 0. \quad (5.2)$$

Dans le chapitre 3, d'après (5.1), (5.2) la stabilité locale des deux points d'équilibres est étudiée. En fait, le point d'équilibre sans maladie $E_f = (S^0, L^0, I^0, R^0, Q^0) = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0)$ est localement asymptotiquement stable pour $\mathcal{R}_0(C) = \frac{C\alpha\sigma}{\delta(\sigma + \delta)} <$

1, et instable pour $\mathcal{R}_0(C) > 1$. Pour $\mathcal{R}_0(C) > 1$, le point d'équilibre endémique $E^* = (S^*, L^*, I^*, R^*, Q^*) = \left(\frac{\alpha D}{\mathcal{R}_0(\delta)}, \frac{\delta^2 D(\mathcal{R}_0(\delta)-1)}{\sigma C}, \frac{\delta D(\mathcal{R}_0(\delta)-1)}{C}, \frac{(1-\alpha)D}{\mathcal{R}_0(\delta)}, \frac{(1-\alpha)D(\mathcal{R}_0(\delta)-1)}{\mathcal{R}_0(\delta)} \right)$ existe et il est localement asymptotiquement stable.

Dans ce chapitre, on va se débarrasser des chiens infectés en utilisant l'abattage des chiens touchés par la Leishmaniose Zoonotique. Comme dans [15] la fraction θ des chiens infectés sont abattus périodiquement afin de réduire ou d'éradiquer la maladie dans la population des chiens. On obtient le modèle suivant pour $t = t_i$

$$\dot{x}_1(t) = F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_3(t) = F_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_4(t) = F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_5(t) = F_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (5.7)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \alpha\beta D - \frac{Cx_1x_3}{D} - \delta x_1, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{Cx_1x_3}{D} - (\sigma + \delta)x_2, \\ F_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \sigma x_2 - \delta x_3, \\ F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (1 - \alpha)\beta D - \frac{Cx_3x_4}{D} - \delta x_4, \\ F_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{Cx_3x_4}{D} - \delta x_5, \end{aligned}$$

et pour $t = t_i = i\tau$

$$x_1(t_i^+) = \Theta_1(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)), \quad (5.8)$$

$$x_2(t_i^+) = \Theta_2(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)), \quad (5.9)$$

$$x_3(t_i^+) = \Theta_3(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)), \quad (5.10)$$

$$x_4(t_i^+) = \Theta_4(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)), \quad (5.11)$$

$$x_5(t_i^+) = \Theta_5(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)), \quad (5.12)$$

où

$$\Theta_1(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)) = x_1(t_i),$$

$$\Theta_2(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)) = x_2(t_i),$$

$$\Theta_3(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)) = (1 - \theta)x_3(t_i),$$

$$\Theta_4(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)) = x_4(t_i),$$

$$\Theta_5(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), x_5(t_i)) = x_5(t_i),$$

Les variable sont :

$x_1 = S$: taux des chiens infectieux,

$x_2 = L$: taux des chiens latents (infectés mais non infectieux),

$x_3 = I$: taux des chiens infectieux,

$x_4 = R$: taux des chiens jamais infectieux sont des chiens non infectés,

$x_5 = Q$: taux des chiens jamais infectieux sont des chiens infectés, et

τ : est le terme du premier contrôle, c'est la période entre deux contrôles.

On obtient le système d'équations différentielles avec impulsion ([9], [31], [32] et [33]). Pour avoir plus de détails sur les équations différentielles impulsive, on peut voir ([8], [7] et [20]).

Modèles impulsifs de la dynamique de population étudiés au cours des trentes dernières années, on peut citer les modèles suivants [9], [31] et [49].

Notre objectif est d'étudier (5.3)-(5.12), plus spécifiquement l'étude de l'existence de solutions périodiques positives et leurs stabilités afin d'obtenir des conditions d'éradication de la maladie.

Le point d'équilibre sans maladie E_f existe toujours après l'utilisation de la théorie d'impulsion mais le point d'équilibre endémique E^* disparaît, on aura éventuellement des solutions périodiques de (5.3)-(5.12) comme un nouvel point d'équilibre du modèle contrôlé par des impulsions comme dans [9], [31], [32] et [33].

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la stabilité du point d'équilibre sans maladie pour (5.3)-(5.12) qui correspond à l'éradication de la maladie par l'abattage des chiens. Si on trouve des solutions périodiques en utilisant l'analyse de la bifurcation comme dans [9], [31] et [33], donc la stabilité du point d'équilibre sans maladie disparaît et le point d'équilibre endémique s'installe.

Ce chapitre est organisé comme suit, dans la section suivante nous étudions l'existence et la stabilité de l'équilibre, dans la section trois nous analysons la bifurcation de solutions périodiques non triviales. Enfin, la conclusion est donnée dans la dernière section.

5.2 Existence et stabilité exponentielle du point d'équilibre trivial E_f

On peut montrer que $\zeta(t) := \zeta_0 = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0) = E_f$ est un point d'équilibre constant de (5.3)-(5.12), il est encore appelé la solution triviale.

Pour étudier la stabilité de ζ on utilise la même approche de processus du point fixe citée dans [9], [31], [32] et [33].

Puisque la solution de (5.3)-(5.7) existe dans \mathbb{R}_+ et non négative alors on a

$$X(t) = \Phi(t, X_0), t \geq 0 \tag{5.13}$$

où $X(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(t)$, $X(0) = X_0 = (\alpha D, 0, 0, (1 - \alpha)D, 0)$ et Φ est le flot associé à (5.3)-(5.12). Puisque les chiens d'abattage sont utilisés périodiquement avec une période $\tau > 0$ alors les solutions de (5.3)-(5.12) pour $t \in (0, \tau)$ sont données par (5.13).

Le terme $X(\tau^+)$ exprime l'état de la population après l'abattage, $X(\tau^+) = \Theta(X(\tau)) = \Theta(\Phi(\tau, X_0))$.

Pour avoir une solution périodique, on doit avoir $X(\tau^+) = X_0$ sachant que $X_0 = \Theta(\Phi(\tau, X_0))$.

Soit Ψ l'opérateur défini par

$$\Psi(\tau, X_0) = \Theta(\Phi(\tau, X_0)), \quad (5.14)$$

et on désigne par $D_X \Psi$ la dérivée de Ψ par rapport à X . Alors $X = \Phi(\cdot, X_0)$ est la solution τ -périodique de (5.3)-(5.12) si et seulement si

$$\Psi(\tau, X_0) = X_0, \quad (5.15)$$

i.e. X_0 est un point fixe de $\Psi(\tau, \cdot)$, et il est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral $\rho(D_X \Psi(\tau, \cdot))$ est strictement inférieur à 1 ([36]).

On a

$$D_X \Psi(\tau, X_0) = D_X \Theta(\Phi(\tau, X_0)) \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\tau, X_0).$$

Alors pour $X_0 = \zeta_0$ et $\tau = \tau_0$ on a

$$\begin{aligned}
D_X \Psi(\tau_0, X_0) &= D_X \Theta(\Phi(\tau_0, X_0)) \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\tau_0, X_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le point d'équilibre ζ est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral est inférieur à un. On a

$$\begin{aligned}
\det(D_X \Psi(\tau_0, \zeta_0) - \mu I) &= \left(\frac{\partial \Phi_1(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} - \mu \right) \left(\frac{\partial \Phi_4(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} - \mu \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial \Phi_5(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} - \mu \right) \chi(\mu)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\chi(\mu) &= \mu^2 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) + (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \right) \mu \\
&\quad + (1 - \theta) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \right).
\end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants.

Théorème 5.2.1

Le point d'équilibre $\zeta = E_f$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_j}(\tau_0, \zeta_0) \right| < 1 \text{ pour } j = 1, 4, 5$$

et $|\mu_{\pm}| < 1$ d'où

$$\mu_{\pm} = \frac{\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) + (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

et

$$\Delta = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) - (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \right)^2 + 4(1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0).$$

En utilisant l'équation variationnelle $\frac{d}{dt}(D_X \Phi(t, \zeta_0)) = \frac{\partial F}{\partial X}(\zeta_0) \frac{\partial \Phi}{\partial X}(t, \zeta_0)$, on obtient les résultats suivants

Lemme 5.2.1

Pour tous $0 < t \leq \tau$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} = \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5} = e^{-\delta t} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= \frac{\alpha C e^{-\delta t} \left(2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma}{2} t} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma}{2} t} \right)}{2\sigma\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} < 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} &= \frac{e^{-\delta t} \left(4\sigma\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)^2 e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma}{2} t} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)^2 e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma}{2} t} \right)}{4\sigma\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} < 0, \\ \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= \frac{e^{-\delta t} \left((\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma}{2} t} + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma}{2} t} \right)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} &= \frac{-\sigma e^{-\delta t} \left(e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma}{2} t} - e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma}{2} t} \right)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} &= \frac{e^{-\delta t} \left((\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma}{2} t} + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma}{2} t} \right)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= \frac{\alpha C}{\sigma} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} > 0, \quad \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = \frac{(1-\alpha)}{2\alpha} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = \frac{(1-\alpha)}{2\alpha} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} < 0, \\ \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= \frac{-(1-\alpha)}{4\alpha} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} > 0, \quad \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = \frac{-(1-\alpha)}{2\alpha} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} > 0, \quad \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{4, 5\}, \\ \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 4, 5\}, \quad \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\}, \\ \text{et } \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_i} &= 0, \quad i \in \{1, 4\}. \end{aligned}$$

Preuve: L'expression de Φ est donnée dans l'annexe subsection 5.5.1. \square

Proposition 5.2.1

Pour tous $\tau_0 > 0$ on a $0 < \mu_- < \mu_+$.

Preuve: Puisque $\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) > 0$ alors $\Delta > 0$. De plus le terme constant de χ est positif;

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) = e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0},$$

alors il existe deux racines positives de χ , $\mu_+ > \mu_- > 0$. □

Théorème 5.2.2

(a) Si $\mathcal{R}_0(C) \leq 1$ (i.e. $C \leq \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$), alors la solution triviale ζ est exponentiellement stable pour tout $\tau_0 > 0$.

(b) Si $\mathcal{R}_0(C) > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$), alors il existe $\tau_0^* > 0$ sachant que la solution triviale ζ est exponentiellement stable pour tout $\tau_0 < \tau_0^*$.

Preuve: L'inégalité $\mu_+ < 1$ est équivalente à

$$\sqrt{\Delta} < H_1(\tau_0), \tag{5.16}$$

où

$$H_1(\tau_0) := 2 - \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)(1-\theta)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0} - \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)(1-\theta)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta = & \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma))^2 + 16\sigma\alpha C(1-\theta)}{4\sigma(\sigma+4\alpha C)} \right) e^{-(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta)\tau_0} \\ & + \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma))^2 + 16\sigma\alpha C(1-\theta)}{4\sigma(\sigma+4\alpha C)} \right) e^{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta)\tau_0} \\ & + \left(\frac{2(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma))(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)) - 32\sigma\alpha C(1-\theta)}{4\sigma(\sigma+4\alpha C)} \right) \\ & \times e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0}. \end{aligned}$$

On a

$$H_1'(\tau_0) = \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})(1-\theta)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} \\ - \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})(1-\theta)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0}$$

(a) Cas 1 : Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ (i.e. $C \leq \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$), alors $H_1'(\tau_0) > 0$. De $H_1(0) = \theta$ on a $H_1(\tau_0) > 0$ pour tout $\tau_0 > 0$.

(b) Cas 2 : Si $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$), alors $H_1'(\tau_0) = 0$ si est seulement si

$$\tau_0 = \tau_0^1 : = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \\ \times \ln \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})(1-\theta)})}{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})(1-\theta)})} \right).$$

De plus, $H_1'(\tau_0) > 0$ pour tout $\tau_0 < \tau_0^1$ et $H_1'(\tau_0) < 0$ pour tout $\tau_0 > \tau_0^1$. Puisque $\lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} H_1(\tau_0) = -\infty$, il existe $\tau_0^2 > \tau_0^1$ tel que $H_1(\tau_0^2) = 0$ et $H_1(\tau_0) > 0$ pour tout $\tau_0 < \tau_0^2$.

Pour $C \leq \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$ (cas 1) ou $C > \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$ et $\tau_0 < \tau_0^2$ (cas 2), l'inégalité (5.16) est équivalente à $H_2(\tau_0) > 0$ où

$$H_2(\tau_0) = (H_1(\tau_0) - \sqrt{\Delta})(H_1(\tau_0) + \sqrt{\Delta}) \\ = 4 + 4(1-\theta)e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0} - \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})(1-\theta)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} \\ - 2 \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})(1-\theta)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0}.$$

On a

$$H_2'(\tau_0) = \left(-4(\sigma+2\delta)(1-\theta) + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})(1-\theta)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \right) \\ \times e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma+(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})(1-\theta)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\ \times e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} \right) e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0}.$$

Soit $H_2'(\tau_0) = e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0} H_3(\tau_0)$ où

$$H_3(\tau_0) = -4(\sigma + 2\delta)(1 - \theta) + (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma + 2\delta) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma)(1 - \theta)}{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)}} \right) \\ \times e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0} - (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma - 2\delta) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma)(1 - \theta)}{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)}} \right) \\ \times e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0}$$

On a

$$H_3'(\tau_0) = -4\sigma\alpha \left(C - \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\sigma\alpha} \right) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma)(1 - \theta)}{2\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0} \\ - 4\sigma\alpha \left(C - \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\sigma\alpha} \right) \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} - \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma)(1 - \theta)}{2\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)}} \right) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma + 4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0}$$

(a) Cas 3 : Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ (i.e. $C \leq \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\alpha\sigma}$), alors $H_3'(\tau_0) > 0$. De $H_3(0) = 4(\sigma + \delta)\theta > 0$ on a $H_3(\tau_0) > 0$ pour tout $\tau_0 > 0$.

(b) Cas 4 : Si $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\alpha\sigma}$) et $\tau_0 < \tau_0^2$, alors $H_3'(\tau_0) < 0$ et puisque $\lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} H_3(\tau_0) = -\infty$ il existe $\tau_0^3 > 0$ tel que $H_3(\tau_0^3) = 0$ (resp. $H_2'(\tau_0^3) = 0$), $H_3(\tau_0) > 0$ (resp. $H_2'(\tau_0) > 0$) pour $\tau_0 < \tau_0^3$ et $H_3(\tau_0) < 0$ (resp. $H_2'(\tau_0) < 0$) pour $\tau_0 > \tau_0^3$. D'après $H_2(0) = 0$ et $\lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} H_2(\tau_0) = -\infty$, il existe $\tau_0^* \in (\tau_0^3, \tau_0^2)$ tel que $H_2(\tau_0) > 0$ pour $\tau_0 < \tau_0^*$.

Par conséquent, si $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\alpha\sigma}$) on a $\mu_+ < 1$ pour $\tau_0 < \tau_0^*$ et $\mu_+ = 1$ pour $\tau_0 = \tau_0^*$. \square

5.3 L'analyse de la bifurcation de la solution périodique non triviale

Dans cette section, on va analyser la bifurcation des solutions périodiques non triviales du système (5.3) – (5.12) de ζ à $\tau_0 = \tau_0^*$.

Ce cas est possible pour $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma + \delta)}{\alpha\sigma}$) (voir théorème 5.2.2)

Soit $\bar{\tau}$ et \bar{X} tel que $\tau = \tau_0^* + \bar{\tau}$ et $X = \zeta_0 + \bar{X}$.

L'équation (5.15) est équivalente à

$$M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0, \quad (5.17)$$

où $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = (M_1(\bar{\tau}, \bar{X}), \dots, M_5(\bar{\tau}, \bar{X})) = \zeta_0 + \bar{X} - \Psi(\tau_0 + \bar{\tau}, \zeta_0 + \bar{X})$.

Si $(\bar{\tau}, \bar{X})$ est un zéro de M , alors $(\zeta_0 + \bar{X})$ est un point fixe de $\Psi(\tau_0^* + \bar{\tau}, \cdot)$.

Soit

$$D_X M(\bar{\tau}, \bar{X}) = \begin{pmatrix} a & b & c & * & * \\ * & d & e & * & * \\ * & f & g & * & * \\ * & h & i & j & * \\ * & k & l & * & m \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Pour $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (0, (0, 0, 0, 0, 0))$, on a

$$D_X M(0, (0, 0, 0, 0, 0)) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & * & * \\ * & d_0 & e_0 & * & * \\ * & f_0 & g_0 & * & * \\ * & h_0 & i_0 & j_0 & * \\ * & k_0 & l_0 & * & m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & 1 - \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \Theta_4}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Theta_4}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} & 1 - \frac{\partial \Theta_4}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \Theta_5}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Theta_5}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_3} & 0 & 1 - \frac{\partial \Theta_5}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_5} \end{pmatrix} (\tau_0^*, \zeta_0).$$

Alors $a_0 = 1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $b_0 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $c_0 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $d_0 = 1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}$,

$e_0 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\tau_0^*, \zeta_0)$,

$f_0 = -(1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $g_0 = 1 - (1 - \theta) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $h_0 = -\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2}(\tau_0^*, \zeta_0)$, $i_0 =$

$$-\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3}(\tau_0^*, \zeta_0), j_0 = 1 - \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4}(\tau_0^*, \zeta_0), k_0 = -\frac{\partial\Phi_5}{\partial x_2}(\tau_0^*, \zeta_0), l_0 = -\frac{\partial\Phi_5}{\partial x_3}(\tau_0^*, \zeta_0), \text{ et } m_0 = 1 - \frac{\partial\Phi_5}{\partial x_5}(\tau_0^*, \zeta_0).$$

On a $\mu_+ = 1$ si est seulement si $\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}(\tau_0, \zeta_0) + (1 - \theta)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}(\tau_0, \zeta_0) \pm \sqrt{\Delta} = 2$, tel que

$$d_0 g_0 - e_0 f_0 = 0. \quad (5.19)$$

Soit $e_0 = \frac{\sigma G_1(\tau_0)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}$, $f_0 = \frac{(1-\theta)\alpha C G_1(\tau_0)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}$, $d_0 = \frac{G_2(\tau_0)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}$ et $g_0 = \frac{G_3(\tau_0)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}$, dont

$$G_1(\tau_0) = e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} - e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0},$$

$$G_2(\tau_0) = 2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0}, \text{ et}$$

$$G_3(\tau_0) = 2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} - (1-\theta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0}.$$

Alors on obtient

Proposition 5.3.1

Soit $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$).

- (a) Pour tout $\tau_0 > 0$ on a $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$, $e_0 < 0$, $f_0 < 0$, $h_0 > 0$, $i_0 > 0$, $j_0 > 0$, $k_0 < 0$, $l_0 < 0$ et $m_0 > 0$.
- (b) Il existe $\hat{\tau}_0 > 0$ tel que $d_0 = 0$ pour $\tau_0 = \hat{\tau}_0$, $d_0 > 0$ pour $\tau_0 < \hat{\tau}_0$ et $d_0 < 0$ pour $\tau_0 > \hat{\tau}_0$.
- (c) Il existe $\tilde{\tau}_0 > 0$ tel que $g_0 = 0$ pour $\tau_0 = \tilde{\tau}_0$, $g_0 > 0$ pour $\tau_0 < \tilde{\tau}_0$ et $g_0 < 0$ pour $\tau_0 > \tilde{\tau}_0$.

Preuve: Pour $C > \frac{\delta(\delta+\sigma)}{\sigma\alpha}$ on a

- (a) On a $G_1(\tau_0) < 0$ pour tout $\tau_0 > 0$, alors $f_0 < 0$ et $e_0 < 0$ pour tout $\tau_0 > 0$. Les signes de a_0 , b_0 , c_0 , h_0 , i_0 , j_0 , k_0 , l_0 et m_0 peuvent être déduits des signes de $\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(\tau_0^*, \zeta_0)$.
- (b) $G_2'(\tau_0) = \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})}{2} e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}\tau_0} - \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})}{2} \right) \times e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0}$

alors $G'_2(\tau_0) = 0$ si est seulement si

$$\tau_0 := \tau_1^{**} = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \ln \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma+2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma)}{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma-2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma)} \right).$$

De $G_2(0) = 0$ alors il existe $\hat{\tau}_0 > 0$ tel que $G_2(\hat{\tau}_0) = 0$, $G_2(\tau_0) > 0$ pour $\tau_0 \in (0, \hat{\tau}_0)$ et $G_2(\tau_0) < 0$ pour $\tau_0 \in (\hat{\tau}_0, +\infty)$.

$$(c) \frac{G'_3(\tau_0)}{(1-\theta)e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma-2\delta}{2}\tau_0}} = \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma+2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma)}{2} e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}\tau_0} - \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma-2\delta)}{2}$$

alors $G'_3(\tau_0) = 0$ si est seulement si

$$\tau_0 := \tau_2^{**} = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \ln \left(\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma+2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma)}{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma-2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma)} \right).$$

D'après $G_3(0) = 0$ alors il existe $\tilde{\tau}_0 > 0$ tel que $G_3(\tilde{\tau}_0) = 0$, $G_3(\tau_0) > 0$ pour $\tau_0 \in (0, \tilde{\tau}_0)$ et $G_3(\tau_0) < 0$ pour $\tau_0 \in (\tilde{\tau}_0, +\infty)$.

□

Comme $e_0 f_0 > 0$ puis de (5.19) on a $d_0 g_0 > 0$, c'est à dire $\tau_0 < \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$ ou $\tau_0 > \max(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$.

Proposition 5.3.2

- (a) Si $C > \max\left(\frac{\delta(\delta+\sigma)}{\sigma\alpha}, \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}\right)$ alors $d_0 < g_0$, c'est à dire $\hat{\tau}_0 < \tilde{\tau}_0$.
- (b) Si $\theta < \frac{\sigma}{\sigma+\delta}$ et $\frac{\delta(\delta+\sigma)}{\sigma\alpha} < C < \frac{\delta+\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta}$ donc on a $g_0 < d_0$, c'est à dire $\tilde{\tau}_0 < \hat{\tau}_0$.
- (c) Si $\theta < \frac{\sigma}{\sigma+\delta}$ et $\frac{\delta+\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta} < C < \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}$ alors on a un cas indéterminé.

Preuve: Soit $2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(d_0 - g_0) = G_4(\tau_0)$ où

$$G_4(\tau_0) = - \left(2\sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)\theta \right) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+\sigma+2\delta}{2}\tau_0} + \left(2\sigma - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)\theta \right) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}-\sigma-2\delta}{2}\tau_0}.$$

- (a) Pour $2\sigma - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)\theta \leq 0$ (i.e. $C \geq \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}$) on a $G_4(\tau_0) < 0$, donc pour $C > \max\left(\frac{\delta(\delta+\sigma)}{\sigma\alpha}, \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}\right)$ on a $d_0 < g_0$ (i.e. $\hat{\tau}_0 < \tilde{\tau}_0$).
- (b) Si $\theta < \frac{\sigma}{\sigma+\delta}$ et $\frac{\delta(\delta+\sigma)}{\sigma\alpha} < C < \frac{\delta+\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta}$ on a $G_4(\tau_0) = 0$ si est seulement si $\tau_0 := \tau_0^{**} = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \ln \left(\frac{2\sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)\theta}{2\sigma - (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)\theta} \right)$, $G_4(\tau_0) < 0$ pour $\tau_0 < \tau_0^{**}$ et $G_4(\tau_0) > 0$ pour $\tau_0 > \tau_0^{**}$. C'est à dire $d_0 < g_0$ pour $\tau_0 < \tau_0^{**}$ et $d_0 > g_0$ pour $\tau_0 > \tau_0^{**}$. Puisque $\tau_0^{**} < \tau_1^{**}$, on obtient $\tilde{\tau}_0 < \hat{\tau}_0$.

□

On a $M(0, (0, 0, 0)) = 0$. Soit $D_X M(0, (0, 0, 0)) = E$, alors $\dim \ker(E) = \text{co dim } \mathcal{R}(E) =$

1. Désignons par P_1 et P_2 les projecteurs de $\ker(E)$ et $\mathcal{R}(E)$ respectivement, tel que $P_1 + P_2 = Id_{\mathbb{R}^5}$, $P_1 \mathbb{R}^5 = \text{span}\{Y_0\} = \ker(E)$, avec $Y_0 = (q_1, q_2, 1, q_4, q_5)$,

$$q_1 = \frac{e_0 b_0}{d_0 a_0} - \frac{c_0}{a_0}, q_2 = -\frac{e_0}{d_0}, q_4 = \frac{e_0 h_0}{d_0 j_0} - \frac{i_0}{j_0}, q_5 = \frac{e_0 k_0}{d_0 m_0} - \frac{l_0}{m_0} \text{ et}$$

$$P_2 \mathbb{R}^5 = \text{span}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\} = \mathcal{R}(E).$$

Alors $(I - P_1) \mathbb{R}^5 = \text{span}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ et

$$(I - P_2) \mathbb{R}^5 = \text{span}\{(0, 0, 1, 0, 0)\}.$$

L'équation (5.17) est équivalente à

$$\begin{cases} M_1(\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z) = 0, \\ M_2(\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z) = 0, \\ M_3(\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z) = 0, \\ M_4(\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z) = 0, \\ M_5(\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z) = 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

où $Z = (z_1, z_2, 0, z_4, z_5)$, $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (\bar{\tau}, \gamma Y_0 + Z)$ et $(\gamma, z_1, z_2, z_4, z_5) \in \mathbb{R}^5$.

A partir des deux premières et deux dernières équations de (5.20), on a

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_2} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_4} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_5} \\ \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_2} & \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_4} & \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_5} \\ \frac{\partial M_4(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_4(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_2} & \frac{\partial M_4(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_4} & \frac{\partial M_4(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_5} \\ \frac{\partial M_5(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_5(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_2} & \frac{\partial M_5(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_4} & \frac{\partial M_5(0, (0, 0, 0, 0, 0))}{\partial z_5} \end{pmatrix} \\ & = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & j_0 & 0 \\ 0 & k_0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} = a_0 d_0 j_0 m_0 \neq 0. \end{aligned}$$

A partir du théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction continue Z^* , tel que

$$Z^*(\bar{\tau}, \gamma) = (z_1^*(\bar{\tau}, \gamma), z_2^*(\bar{\tau}, \gamma), 0, z_4^*(\bar{\tau}, \gamma), z_4^*(\bar{\tau}, \gamma)), Z^*(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$M_i(\bar{\tau}, (q_1\gamma + z_1^*(\bar{\tau}, \gamma), q_2\gamma + z_2^*(\bar{\tau}, \gamma), \gamma, q_4\gamma + z_4^*(\bar{\tau}, \gamma), q_5\gamma + z_5^*(\bar{\tau}, \gamma))) = 0, \quad (5.21)$$

pour $i = 1, 2, 4, 5$, avec γ et $\bar{\tau}$ sont assez petits.

On a $q_1 < 0$, $q_2 > 0$, $q_4 < 0$ et $q_5 > 0$ pour $\tau_0 < \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$.

De plus, on trouve $\frac{\partial Z^*}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = \frac{\partial Z^*}{\partial \gamma}(0, 0)$ (voir l'annexe, subsection 5.5.3).

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0$ si est seulement si

$$\omega(\bar{\tau}, \gamma) = M_3(\bar{\tau}, (q_1\gamma + z_1^*(\bar{\tau}, \gamma), q_2\gamma + z_2^*(\bar{\tau}, \gamma), \gamma, q_4\gamma + z_4^*(\bar{\tau}, \gamma), q_5\gamma + z_5^*(\bar{\tau}, \gamma))) = 0. \quad (5.22)$$

L'équation (5.22) est appelée l'équation déterminée, elle détermine le nombre de solutions périodiques de (5.3)-(5.12) (voir [12]).

Pour résoudre (5.22) on a besoin du développement de Taylor de ω près $(\bar{\tau}, \gamma) = (0, 0)$. On obtient $\omega(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial \omega(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \omega(0, 0)}{\partial \gamma} = 0$ (voir l'annexe, subsection 5.5.5).

Soit $\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \omega(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2}$, $\mathcal{B} = \frac{\partial^2 \omega(0, 0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma}$ et $\mathcal{C} = \frac{\partial^2 \omega(0, 0)}{\partial \gamma^2}$. Il est démontré que $\mathcal{A} = 0$ (voir l'annexe, subsection 5.5.6). Par conséquent

$$\omega(\bar{\tau}, \gamma) = \mathcal{B}\bar{\tau}\gamma + \mathcal{C}\frac{\gamma^2}{2} + o(|\gamma|^2 + |\bar{\tau}|^2),$$

où

$$\mathcal{C} = -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ 2q_1q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} + 2q_1 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + q_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + 2q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0, 0)}{\partial \gamma^2} \right\}$$

et

$$\mathcal{B} = -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \right\}.$$

Proposition 5.3.3

Pour $\tau_0 < \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$ (voir l'annexe, subsection 5.5.2 et 5.5.4) on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} e^{-\delta s} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds > 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\sigma C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} e^{-\delta s} \left(\frac{e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} - 1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds > 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} &= \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} &= \frac{\sigma C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} - 1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} &= \frac{2C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} &= \frac{2\sigma C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} - 1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds > 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\sigma C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} - 1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds > 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} &= \frac{2C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\
&\quad \times \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} &= \frac{2\sigma C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}(s-t)} \left(\frac{e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} - 1}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds < 0. \\
\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} &= \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_2} \frac{1}{d_0} \\
&\quad \times \left(2q_1 q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} + 2q_1 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + q_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + 2q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) < 0, \\
q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} &= -\frac{2\sigma \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0} + \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta)\sigma}{2d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0} \\
&\quad + \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta)\sigma}{2d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0} > 0, \\
\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} &= \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_2} \frac{1}{d_0} \left\{ q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \right\} > 0, \text{ et}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} &= \frac{4\delta \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{4d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0} \\
&\quad - \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})}{4d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})}{4d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} > 0.
\end{aligned}$$

Preuve: Les signes de $\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ peuvent être déduits des signes de $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\tau_0^*, \zeta_0)$.

Soit $q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} = \frac{\sigma e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0}}{2d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} G_5(\tau_0)$ où

$$\begin{aligned}
G_5(\tau_0) &= (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} - 2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
G_5'(\tau_0) &= -\frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})}{2} e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})}{2} e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} > 0
\end{aligned}$$

et $G_5(0) = 0$ alors $G_5(\tau_0) > 0$. C'est à dire $q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} > 0$ et $\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} > 0$.

Soit $q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} = \frac{e^{-(\sigma+2\delta)\tau_0}}{4d_0 \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} G_6(\tau_0)$ où

$$\begin{aligned}
G_6(\tau_0) &= -(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma) e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta)(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma) e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + 4\delta \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
G_6'(\tau_0) &= \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma})}{2} e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta}}{2}\tau_0} \\
&\quad + \frac{(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)-\sigma-2\delta})(\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma})}{2} e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)+\sigma+2\delta}}{2}\tau_0} > 0
\end{aligned}$$

et $G_6(0) = 0$ alors $G_6(\tau_0) > 0$, c'est à dire $q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} > 0$.

□

D'après la proposition précédente on a $\mathcal{C} > 0$ et $\mathcal{B} < 0$ pour $\tau_0 < \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$. Posons $\bar{\tau} := \eta\gamma$ alors $\omega(\eta\gamma, \gamma) = \frac{\gamma^2}{2}g(\eta, \gamma)$ où $g(\eta, \gamma) = 2\mathcal{B}\eta + \mathcal{C} + o_\gamma(1 + \eta^2)$. Alors $\frac{\partial g}{\partial \eta}(\eta, 0) = 2\mathcal{B}$ et $g(\eta, 0) = 2\mathcal{B}\eta + \mathcal{C}$. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour g si $\mathcal{B} \neq 0$ et $\eta_0 = -\frac{\mathcal{C}}{2\mathcal{B}}$. On trouve la fonction $\eta(\gamma)$ tel que pour γ est assez petit $g(\eta(\gamma), \gamma) = 0$ et $\eta(0) = \eta_0 = -\frac{\mathcal{C}}{2\mathcal{B}}$.

Alors, $\omega(\eta(\gamma)\gamma, \gamma) = 0$ pour γ assez petit.

En conclusion on a le théorème suivant.

Théorème 5.3.1

Soit $\mathcal{R}_0 > 1$ (i.e. $C > \frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}$). Si $\tau_0 = \tau_0^* \in (0, \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0))$ alors on a une bifurcation supercritique de la solution périodique non triviale de (5.3)-(5.12) avec une période $\tau(\gamma) = \tau_0^* + \bar{\tau}(\gamma)$ à partir de $\zeta_0 + \gamma Y_0 + Z^*(\bar{\tau}(\gamma), \gamma)$ pour tout $\gamma(> 0)$ assez petit où $\bar{\tau}(\gamma) = -\frac{c}{2B}\gamma + o(\gamma)$.

Lemme 5.3.1

Soit $C > \max\left(\frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}, \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}\right)$. Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, on a $\tau_0^* \in (0, \hat{\tau}_0)$.

Preuve:

On a $\mu_+ = 1$ si et seulement si $(1 - \theta) = \frac{2d_0\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{G_7(\tau_0)} := G(\tau_0)$ où

$$\begin{aligned} G_7(\tau_0) = & \left((\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma)e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0} \right. \\ & + (\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma)e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0} d_0 \\ & \left. + 2\alpha C \left(e^{-\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} + \sigma + 2\delta}{2}\tau_0} - e^{\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)} - \sigma - 2\delta}{2}\tau_0} \right) \right) e_0. \end{aligned}$$

D'après l'unicité de la solution τ_0^* (cas 2, Théorème 5.2.2), pour chaque $\theta \in (0, 1)$ on a un unique $\bar{\tau}_0^* \in (0, \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0))$ tel que $\theta = 1 - G(\bar{\tau}_0^*)$ donc on a $\tau_0^* = (G|_{(0, \min(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0))})^{-1}(1 - \theta)$. De plus $\tau_0^* \rightarrow \hat{\tau}_0$ pour $\theta \rightarrow 1$ et $\tau_0^* \rightarrow 0$ pour $\theta \rightarrow 0$. \square

Théorème 5.3.2

Soit $C > \max\left(\frac{\delta(\sigma+\delta)}{\alpha\sigma}, \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1-\theta}{\theta^2}\right)$ et $\tau_0^* \in (0, \hat{\tau}_0)$ donc on a une bifurcation supercritique des solutions périodique non triviale de (5.3)-(5.12) avec une période $\tau(\gamma) = \tau_0^* + \bar{\tau}(\gamma)$ à partir de $\zeta_0 + \gamma Y_0 + Z^*(\bar{\tau}(\gamma), \gamma)$ pour tout $\gamma(> 0)$ assez petit où $\bar{\tau}(\gamma) = -\frac{c}{2B}\gamma + o(\gamma)$.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point un modèle impulsif pour lutter contre la maladie en tuant des chiens infectieux, notre modèle s'inspire de [courtenay et tous

les auteurs]. En l'absence du contrôle, le modèle est étudié dans le chapitre quatre où l'existence du point d'équilibre trivial E_f et du point d'équilibre endémique E^* , qui n'existe que lorsque le nombre du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 > 1$. Le point d'équilibre trivial E_f est stable pour $\mathcal{R}_0 < 1$, mais pour $\mathcal{R}_0 > 1$ E_f est instable et E^* existe et il est stable. Le taux de reproduction \mathcal{R}_0 peut être exprimé par certains paramètres du modèle, nous traduisons \mathcal{R}_0 par la capacité vectorielle de transmission d'une infection entre les chiens C . En présence d'un contrôle des impulsions E^* disparaît, nous avons seulement E_f qui est exponentiellement stable pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et $\tau_0 > 0$. Pour $\mathcal{R}_0 > 1$ la stabilité exponentielle de E_f est possible pour $\tau_0 < \tau_0^*$ où $\tau_0^* (> 0)$ est la période critique pour laquelle la bifurcation des solutions périodiques positives non triviales peuvent apparaître, τ_0^* dépend de l'amplitude du contrôle θ . Nous concluons que l'éradication de la maladie est possible pour la période de contrôle τ_0 moins qu'une valeur critique $\tau_0^* = (1 - G_{(0, \tilde{\tau}_0)})^{-1}(\theta)$, si $\tau_0 = \tau_0^*$ nous avons une bifurcation de solutions périodiques positives non triviales qui correspondent à la persistance de la population de chiens infectieux qui est la maladie n'est pas éradiquée (ceci est possible pour certaines valeurs des paramètres du modèle).

5.5 Annexe

5.5.1 Calcul des premières dérivées de Φ

Pour tout $t \in (0, \tau)$, on a $\frac{d}{dt}D_X(\Phi(t, \zeta_0)) = \frac{\partial F}{\partial X}(\zeta_0) \frac{\partial \Phi}{\partial X}(t, \zeta_0)$ avec la condition initiale $D_X(\Phi(0, \zeta_0)) = I_{\mathbb{R}^5}$, où

$$\frac{d}{dt}D_X(\Phi(t, \zeta_0)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\delta & 0 & -\alpha C & 0 & 0 \\ 0 & -(\delta + \sigma) & \alpha C & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha)C & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)C & 0 & -\delta \end{pmatrix},$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X}(t, \zeta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} & \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cauchy Lipschitz (unicité de la solution) on obtient que

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{4, 5\},$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 4, 5\}, \quad \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 4, 5\}, \quad \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\},$$

$$\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, 4\}. \text{ De plus, on a}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1}, \quad (5.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2}, \quad (5.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3}, \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2}, \quad (5.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3}, \quad (5.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2}, \quad (5.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3}, \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2}, \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3}, \quad (5.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) = \frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4}, \quad (5.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2}, \quad (5.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3}, \quad (5.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5} \right) = \frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5}. \quad (5.35)$$

D'après (5.23), (5.32) et (5.35) on obtient $\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} = \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_5} = e^{-\delta t}$.

D'après (5.26) et (5.28) on a $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma - \delta & \alpha C \\ \sigma & -\delta \end{pmatrix} = PVP^{-1},$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma+2\delta-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\alpha C} & \frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\alpha C} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} & \frac{-\alpha C}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \\ \frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} & \frac{\alpha C}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tV}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\sigma+2\delta-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_3(t) & k_4(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$k_1(t) = \frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}, \quad k_2(t) = \frac{-\alpha C+\alpha Ce^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}},$$

$$k_3(t) = \frac{-\sigma+\sigma e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \text{ and } k_4(t) = \frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}+(\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right), \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} &= e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right). \end{cases}$$

D'après (5.27) et (5.29) on a $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \left(\frac{-\alpha C}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\alpha C e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right), \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \left(\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right). \end{cases}$$

D'après (5.24) on a $\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{\frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1}t} \frac{\partial \Phi_1(0, \zeta_0)}{\partial x_2} + \int_0^t e^{\frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1}(t-s)} \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds$,

alors

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{-\delta t} \left(\frac{-2\alpha^2 C^2 (e^{-\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} + \frac{2\alpha^2 C^2 (e^{-\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} \right).$$

D'après (5.25) on a $\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = e^{\frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1}t} \frac{\partial \Phi_1(0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \int_0^t e^{\frac{\partial F_1(\zeta(t))}{\partial x_1}(t-s)} \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds$,

alors $\frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = e^{-\delta t} \left(\frac{-\alpha C(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})(e^{-\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} + \frac{\alpha C(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})(e^{-\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} \right)$.

D'après (5.30) on a $\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{\frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4}t} \frac{\partial \Phi_4(0, \zeta_0)}{\partial x_2} + \int_0^t e^{\frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4}(t-s)} \frac{\partial F_4(\zeta(s))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds$,

alors

$$\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{-\delta t} \left(\frac{-\alpha(1-\alpha)C^2 (e^{-\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} + \frac{\alpha(1-\alpha)C^2 (e^{-\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} \right).$$

D'après (5.31) on a $\frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} = e^{\frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4}t} \frac{\partial \Phi_4(0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \int_0^t e^{\frac{\partial F_4(\zeta(t))}{\partial x_4}(t-s)} \frac{\partial F_4(\zeta(s))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds$,

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} &= -(1-\alpha)C \\ &\times e^{-\delta t} \left(\frac{(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})(e^{-\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} - \frac{(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})(e^{-\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} \right). \end{aligned}$$

D'après (5.33) on a $\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{\frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_5}t} \frac{\partial \Phi_5(0, \zeta_0)}{\partial x_2} + \int_0^t e^{\frac{\partial F_5(\zeta(t))}{\partial x_5}(t-s)} \frac{\partial F_5(\zeta(s))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} ds$,

alors

$$\frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} = e^{-\delta t} \left(\frac{\alpha(1-\alpha)C^2 (e^{-\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma + \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} - \frac{\alpha(1-\alpha)C^2 (e^{-\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} - 1)}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(\sigma - \sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})} \right).$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$. D'après (5.36)-(5.37) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{tA-sA} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_2(\zeta(s))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

Où

$$e^{tA} = e^{-\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} & \frac{-\alpha C}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\alpha C e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \\ \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} & \frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}t}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} e^{-\delta s} \left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} e^{-\delta s} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} ds. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial^2 \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4^2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5^2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{tA-sA} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_2(\zeta(s))}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\ \quad \times \left(\frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \\ \quad \times \left(\frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial^2 \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4^2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5^2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = 0$, alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) = \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \quad (5.40)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial^2 \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_4^2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(t))}{\partial x_5^2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = 0$, donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \quad (5.41)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = 0$. D'après (5.40)-(5.41) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = e^{A(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t)-A(s)} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(s))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{(-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)})e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \left(2 \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) ds \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_3^2} = \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \left(2 \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_3} \right) ds. \end{cases}$$

avec condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} = 0$, alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \quad (5.47)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} = 0$. D'après (5.46)-(5.47) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial^2 \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4^2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5^2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

avec condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \quad (5.48)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} = 0$, donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \quad (5.55)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} = 0$. D'après (5.54)-(5.55) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

avec condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = e^{A(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t)-A(s)} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} &= \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{-\sigma+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)} \right) \left(2 \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2^2} &= \frac{C}{D} \int_0^t e^{\frac{\sigma+2\delta+\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}}{2}(s-t)} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} + \frac{\sigma e^{-\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}(s-t)}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4\alpha C)}} \right) \left(2 \frac{\partial \Phi_1(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(s, \zeta_0)}{\partial x_2} \right) ds. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_5} \frac{\partial^2 \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_4} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4^2} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_1(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_3 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial \Phi_4(t, \zeta_0)}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(t))}{\partial x_5^2} \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_4} \right) \frac{\partial \Phi_5(t, \zeta_0)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

avec condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} = 0$, alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \right) = \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \quad (5.56)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} = 0$, donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \right) = \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \quad (5.65)$$

avec la condition initiale $\frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} = 0$.

D'après (5.64)-(5.65) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \right) &= \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} + \frac{\partial F_2(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \right) &= \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} + \frac{\partial F_3(\zeta(t))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_2(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(t, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.5.3 La première dérivée de Z^*

Soit $\eta(\bar{\tau}) = \tau_0 + \bar{\tau}$, $\eta_1(\bar{\tau}, \gamma) = x_1^0 + q_1 \gamma + z_1^*(\bar{\tau}, \gamma)$, $\eta_2(\bar{\tau}, \gamma) = q_2 \gamma + z_2^*(\bar{\tau}, \gamma)$, $\eta_3(\bar{\tau}, \gamma) = \gamma$,
 $\eta_4(\bar{\tau}, \gamma) = x_4^0 + q_3 \gamma + z_4^*(\bar{\tau}, \gamma)$ et $\eta_5(\bar{\tau}, \gamma) = q_4 \gamma + z_5^*(\bar{\tau}, \gamma)$.

D'après (5.21) on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_1 - \Theta_1 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_2 - \Theta_2 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_4 - \Theta_4 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_5 - \Theta_5 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_1(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0, \\ \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0, \\ \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_4(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0, \\ \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_5(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + b_0 \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ d_0 \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ j_0 \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + h_0 \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ m_0 \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + k_0 \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \end{array} \right.$$

C'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \\ \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \end{array} \right. \quad (5.66)$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \gamma}(\eta_1 - \Theta_1 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma}(\eta_2 - \Theta_2 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma}(\eta_4 - \Theta_4 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma}(\eta_5 - \Theta_5 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_1(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0, \\ & \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0, \\ & \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_4(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0, \\ & \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_5(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) a_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) d_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) j_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) m_0 = 0. \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} = 0, \\ \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} = 0, \\ \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} = 0, \\ \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} = 0. \end{cases} \quad (5.67)$$

5.5.4 La deuxième dérivée de z_2^*

D'après (5.21) on a

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2} (\eta_2 - \Theta_2 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4^2} \left(\frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \left(\frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial^2 z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right\} = 0. \end{array} \right.$$

On obtient $d_0 \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} = 0$, c'est à dire $\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} = 0$.

De la même manière, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\eta_2 - \Theta_2 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4^2} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_5} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{\partial^2 z_4^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{\partial^2 z_5^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{d_0} \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_2} \left\{ 2q_1 q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} + 2q_1 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + q_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + 2q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} \right\}.$$

Suivant les mêmes étapes, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} (\eta_2 - \Theta_2 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))(0, 0) = 0.$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} - \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2(\Phi(\tau_0, \zeta_0))}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{d'_0 j'_0}{c'_0 a'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{d'_0 l'_0}{c'_0 g'_0} - \frac{f'_0}{g'_0} + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{d'_0 m'_0}{c'_0 i'_0} - \frac{h'_0}{i'_0} + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \left(-\frac{d'_0}{c'_0} + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_3} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_3} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4^2} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_4} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & \left. + \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial^2 z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma \partial \bar{\tau}} = \frac{1}{d_0} \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \left\{ q_2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \right\}.$$

5.5.5 La première dérivée de ω

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\tau}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_3 - \Theta_3 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)) \\ &= - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} \right). \end{aligned}$$

Au point $(\bar{\tau}, \gamma) = (0, 0)$ on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = - \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (\eta_3 - \Theta_3 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Au point $(\bar{\tau}, \gamma) = (0, 0)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(0, 0) &= 1 - \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right\} \\
&= 1 - \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ q_2 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3} \right\} \\
&= f_0 q_2 + g_0 = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $D_{(\bar{\tau}, \alpha)} \omega(0, 0) = (0, 0)$.

5.5.6 La deuxième dérivée de ω

Soit $\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \omega(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2}$, $\mathcal{B} = \frac{\partial^2 \omega(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma}$ et $\mathcal{C} = \frac{\partial^2 \omega(0,0)}{\partial \gamma^2}$.

Calcul de \mathcal{A} .

On a $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{\tau}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2} (\eta_3 - \Theta_3 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{\tau}^2} &= - \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau}^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} \frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} + \right. \\
&\quad 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau} \partial x_4} \frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial \bar{\tau} \partial x_5} \frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial z_1^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial z_2^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4^2} \left(\frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial z_4^*}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 z_4^*}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5^2} \left(\frac{\partial z_5^*}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5} \frac{\partial^2 z_5^*}{\partial \bar{\tau}^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Au point $(\bar{\tau}, \gamma) = (0, 0)$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{\tau}^2}(0, 0) = & -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau}^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_4} \frac{\partial z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_5} \frac{\partial z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_4} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1 \partial x_5} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_4} \frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_5} \frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4^2} \left(\frac{\partial z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_5} \frac{\partial z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 z_4^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \left(\frac{\partial z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \frac{\partial^2 z_5^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{A} = 0$.

Calcul de \mathcal{C} .

On a $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}(\eta_3 - \Theta_3 \circ \Phi(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5))$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = & -\sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1^2} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 z_1^*}{\partial \gamma^2} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2^2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 z_2^*}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3^2} \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3 \partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_3 \partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4^2} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4 \partial x_5} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_4} \left(\frac{\partial^2 z_4^*}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5^2} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_i(\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)}{\partial x_5} \left(\frac{\partial^2 z_5^*}{\partial \gamma^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Au $(\bar{\tau}, \gamma) = (0, 0)$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2}(0, 0) = & -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1^2} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_1} \left(q_1 + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5 \partial x_2} \left(q_2 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_4} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_5} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4^2} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4 \partial x_5} \left(q_4 + \frac{\partial z_4^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_4} \left(\frac{\partial^2 z_4^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5^2} \left(q_5 + \frac{\partial z_5^*(0,0)}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_5} \left(\frac{\partial^2 z_5^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ 2q_1 q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2 \partial x_1} + 2q_1 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_1} + q_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2^2} + 2q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3 \partial x_2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \gamma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Donc on obtenu le calcul de \mathcal{C} .

Alors

$$\mathcal{B} = -\frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3} \left\{ q_2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, \zeta_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \right\}.$$

Perspectives

Dans ce travail on a étudié un modèle mathématique sur la Leishmaniose Viscérale contenant un système d'équations différentielles impulsives. Cette étude a porté sur la stabilité des solutions périodiques triviales et la bifurcation des solutions périodiques non-triviales, pour se faire on a utilisé la méthode de la réduction de Lyapunov-Schmidt. Les résultats obtenus peuvent être appliqués à d'autres cas de l'épidémiologie ou des sciences appliquées en général.

Pour la continuité de cette recherche, on peut citer quelques pistes de recherche futures :

- Etude des modèles avec retard.
- Etude des modèles avec diffusion.
- Le cas des modèles contenant des équations différentielles fractionnaires.
- Le cas des modèles avec traitement.
- Le cas d'un modèle général décrivant l'évolution de la population humaine, la population des chiens et la population des insectes.

Bibliographie

- [1] P. Auger, C. Lett and J. C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, Fevrier 2010.
- [2] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations : Asymptotic Properties of the Solutions*, vol. of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, (1995).
- [3] D. Bainov and V. Covachev, *Impulsive Differential Equations with a Small Parameter*, vol. 24 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, (1994).
- [4] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Impulsive differential equations : periodic solutions and applications*, Longman Scientific and Technical, Essex, England, (1993).
- [5] D. D. Bainov, V. Lakshmikantham, and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, vol. 6 of Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific, Singapore, (1989).
- [6] D.D. Bainov and A. Dishliev, *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, Comp. Rend. Bulg. Scie., 42, (1989), 29-32.
- [7] D.D. Bainov and P.S. Simenov, *Systems with Impulse Effect Stability Theory and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester, (1989).
- [8] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Oscillation Theory of Impulsive Differential Equations*, International Publications, Orlando, Fla, USA, (1998).

- [9] A. Boudermine, M. Helal and A. Lakmeche, *Bifurcation of non trivial periodic solutions for pulsed chemotherapy model*, Journal of Mathematical Sciences and Applications, E- Notes, 2 (2014) 2, pp. 22-44.
- [10] T. A. Burton, *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, Academic Press, inc, 1985.
- [11] R.Chabour, B.Kalitine and R. Outbib, *Semi-definite Lyapunov functions stability and stabilization*, Springer-Verlag London Limited, Math. Control Signals Systems(1996) 95-106.
- [12] S. N. Chow And J. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer Verlag 1982.
- [13] D. N. C. C. Costa, C. T. Codeço, M. A. Silva and G. L. Werneck, *Culling dogs in scenarios of imperfect control : realistic impact on the prevalence of canine visceral leishmaniasis*, Neglected tropical diseases, 7 (2013) 8, 1-8.
- [14] O. Courtenay, D. W. Macdonald, R. Lainson, J. J. Shaw and C. Dye, *Epidemiology of canine leishmaniasis : a comparative serological study of dogs and foxes in Amazon Brazil*. Parasitology (1994) 109, 273279.
- [15] O. Courtenay, R. J. Quinnell, L. M. Garcez, J. J. Shaw and C. Dye, *Infectiousness in a Cohort of Brazilian Dogs : Why Culling Fails to Control Visceral Leishmaniasis in Areas of High Transmission*, The journal of infectious diseases, 186 (2002) 1314-1320.
- [16] C. C. Chavez and B.Song, *Dynamical models of tuberculosis and their applications*, Mathematical biosciences and engineering, 1 (2004) 2, 361-404.
- [17] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases : model building, analysis and interpretation*, Wiley, 2002.
- [18] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek and J.A.J. METZ, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in model for infectious diseases in heterogeneous population*, J. Math. Biol, 28 (1990) 365-382.
- [19] J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1964.

- [20] A. Dishliev and D.D. Bainov, *Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure*, International Journal of Theoretical Physics, 29, (1990), 655-676.
- [21] A. D'onofrio, *On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission*, Appl. Math. Lett., 18, (2005), 729-732.
- [22] N. Dunford et J. Schwartz , *Linear Operators, Part I : General Theory*, Wiley-Interscience, New York 1964.
- [23] C. Dye, *The logic of visceral leishmaniasis control*, Am J Trop Med Hyg. 55 (1996) 125-130.
- [24] I. M. ELmojtaba, J. Y. T. Mugisha and M. H. A. Hashim, *Mathematical analysis of the dynamics of visceral leishmaniasis in Sudan*, Applied mathematics and computation, 217 (2010) 6, 2567-2578.
- [25] I. M. ELmojtaba, J. Y. T. Mugisha and M. H. A. Hashim, *Vaccination model for visceral leishmaniasis with infective immigrants*, Mathematical Methods in the applied sciences, 36 (2013) 2, 216-226.
- [26] K. K. Gorahava, J. M. Rosenberger and A. Mubayi, *Optimizing insecticide allocation strategies based on houses and livestock shelters for visceral leishmaniasis control in Bihar, India*, Am. J. Trop. Med. Hyg., 93 (2015) 1, 114-122.
- [27] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and population Dynamics*, Cambridge university Press, 1998.
- [28] H. W. Hethcote, *The mathematical of infectious diseases*. SIAM Rev, 42 (2000) 4, 399-653.
- [29] H.W. Hethcote and P. van den Driessch, *Some epidemiological model with non-linear incidence*, J. Math. Bio, 29 (1991) 271-287.
- [30] H. Kielhfer , *Bifurcation Theory, An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*, Second Edition. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, Volume 156, 2012.

- [31] Aek. Lakmeche and O. Arino, *Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising in chemotherapeutic treatment*, Dynamics Cont. Discr. Impl. Syst., 7, (2000), 265-287.
- [32] Aek. Lakmeche and O. Arino, *Nonlinear mathematical model of pulsed-therapy of heterogenous tumor*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 2 (2001) 455-465.
- [33] Ah. Lakmeche, M. Helal and Aek. Lakmeche, *Pulsed chemotherapy treatment*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2 (2014) 1, pp. 127-148.
- [34] V.Lakshmikantham, D.D. Bainov et P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific Press, London 1989.
- [35] X. Liao, L. Wang, P. Yu, *Stability of Dynamical Systems. Elsevier, première édition, 2007,*
- [36] G. Iooss, *Bifurcation of maps and applications, Study of mathematics*, North Holland 1979.
- [37] T. Ma et S. Wang , *Bifurcation theory and applications*, Word scientific series on nonlinear science 53,USA, 2005.
- [38] P. MARTY, *Leishmaniose viscérale : épidémiologie, diagnostic et traitement*. La Lettre de linfectiologie, 2010, 25, 186-190.
- [39] P. MARTY, C. POMARES, G. MICHEL, P. DELAUNAY, B. FERRUA, E. ROSENTHAL. *Les leishmanioses viscérales méditerranéennes*. Bulletin de l'Académie Nationale de Médecine, 2011, 195, 181-188.
- [40] S. MICHELSON AND J. T. LEITH, *Unexpected equilibria resulting from differing growth rates of subpopulations within heterogeneous tumors*, Math. Biosci. 91, (1988), 119-129.
- [41] V. Müller, *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*, Institute of Mathematics Czech Academy of Sciences, 2000.

- [42] R. J. Quinnell, O. Courtenay, L. Garcez and C. DYE, *The epidemiology of canine leishmaniasis : transmission rates estimated from a cohort study in Amazonian Brazil*, *Parasitology* (1997), 115, 143156.
- [43] L. M. Ribas, V. L. Zaher, H. J. Shimozako and E. Massad, *Estimating the optimal control of zoonotic visceral leishmaniasis, by the use of a mathematical model*, *The scientific world journal*, Volume 2013 (2013), Article ID 810380, 1-6.
- [44] A. V. Roup and others, *Limit cycle analysis of the verge and foliot clock escapement using impulsive differential equations and poincar maps*, *Int. J. Control*, 76, (2003), 1685-1698.
- [45] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations, vol. 14 of World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A : Monographs and Treatises*, World Scientific, Singapore, (1995).
- [46] T. Sideris, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, Department of Mathematics University of California Santa Barbara, CA USA 2013.
- [47] A. Stauch, R. R. Sarkar, A. Picado, B. Ostyn, S. Sundar, S. Rijal, M. Boelaert, J. C. Dujardin and H. P. Duerr, *Visceral leishmaniasis in the indian subcontinent : modelling epidemiology and control*, *Neglected tropical diseases*, 5 (2011) 11, 1-8.
- [48] P. Van Den Driessche and J. Watmough, *Reproduction and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, *Math. Biosci.*, 180 (2002) 1-2, 29-48.
- [49] H. C. WEI, S. F. HWANG, J. T. LIN AND T. J. CHEN, *The role of initial tumor biomass size in a matemathical model of periodically pulsed chemotherapy*, *Computers and Mathematics with Applications* 61, (2011), 3117-3127.
- [50] WHO, *Control of the leishmaniases, Report of a meeting of the WHO expert committee on the control of leishmaniases, Geneva, 22-26 March 2010*, WHO Technical Report Series 949.
- [51] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th Ed. Springer-Verlag, Berlin 1980.

- [52] M. Zhién et L. Jia, *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA. 2009.

ملخص

في هذه الأطروحة درسنا نموذج رياضي من داء الليشمانيات الحشوي، درسنا الاستقرار المحلي والعالمي من نقطة التوازن. ثم قمنا بدراسة النموذج الرياضي مع معالجة في أوقات محددة دورية، درسنا استقرار حالة عدم وجود المرض بعد ذلك قمنا بدراسة حالة عودة المرض.

Le résumé

Dans cette thèse nous avons étudié un modèle mathématique sur la leishmaniose viscérale, nous avons étudié la stabilité locale et globale des points d'équilibres. Ensuite, on a étudié le modèle mathématique avec un traitement impulsif en des temps périodiques, nous avons étudié la stabilité de la solution triviale qui correspond à l'éradication de la maladie et nous avons étudié la bifurcation de la solution non triviale correspondant à la réapparition de la maladie.

Abstract

In this thesis we studied a mathematical model on Visceral Leishmaniasis, we studied the local and global stability of the equilibrium points. Then, we studied the mathematical model with an impulsive treatment in periodic time, we studied the stability of the trivial solution which corresponds to the eradication of the disease and we studied the bifurcation of the nontrivial solution corresponding to the reappearance of the disease.