

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE**

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : **BENAHMED Abdelkrim**

Intitulé de la thèse

**Contribution à l'étude du comportement mécanique  
des plaques composites en utilisant des théories  
d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable**

Composition du jury :

<b>Président</b>	<b>BOURADA Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Directeur de thèse</b>	<b>TOUNSI Abdelouahed</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Co-Directeur de thèse</b>	<b>BELAKHDAR Khalil</b>	<b>Pr</b>	<b>C U DE TAMARASSET</b>
<b>Examineur</b>	<b>FAHSI Bouazza</b>	<b>MCA</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>KACI Abdelhakim</b>	<b>MCA</b>	<b>U DE SAIDA</b>
<b>Examineur</b>	<b>BOUSAHLA Abdelmoumen Anis</b>	<b>MCA</b>	<b>CU DE RELIZANE</b>

**Année universitaire 2017-2018**



## Remerciement

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés. Je remercie Monsieur le Professeur **ADDA BEDIA El Abbas** de m'avoir accueilli dans ce laboratoire et de l'intérêt constant qu'il a accordé à cette thèse.

J'exprime mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, Monsieur **TOUNSI Abdelouahed** et Monsieur **BELAKHDAR Khalil** dont l'aide précieuse qui m'a été indispensable sur le plan scientifique. Je tiens également à les remercier pour la confiance et la sympathie qu'ils m'ont témoignées au cours de ces quatre années de thèse.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LMH, doctorants, permanents ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs et ont fait de ces quatre années une belle étape de ma vie.

Enfin, toutes les personnes qui ont apporté leur aide à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de mes remerciements.

## ملخص

في هذا العمل، تم تطوير نظرية تشوه القص القطعي شبه ثلاثي الأبعاد ذات كفاءة عالية وبسيطة لتحليل انحناء واهتزاز الصفائح المتدرجة وظيفيا والمستندة على اساسات ذات خصائص مطاطية. من أهم سمات هذه النظرية هو أنها تأخذ بعين الاعتبار تمدد سمك الصفائح المتدرجة وظيفيا، حيث ان هاته النظرية تحتوي على خمسة مجاهيل مثلما هو الحال بالنسبة لنظرية القص من الدرجة الأولى. القاعدة المرنة موصوفة من قبل نموذج باسترناك (بائنين من المعارف). ومن المفترض أن الخصائص المادية للوحة تختلف بشكل مستمر في اتجاه السمك باستعمال قانون اسي بسيط لحجم مكوناتها.

يتم الحصول على معادلات الحركة للوحات الصفائح المتدرجة السمكية ضمن مبدأ هاميلتون. يتم الحصول على حلول تحليلية لتحليل الانحناء والاهتزاز الحر للوحات مدعومة ببساطة. وتعطى النتائج العددية بالتفصيل ومقارنتها مع الأعمال القائمة مثل الحلول ثلاثية الأبعاد وتلك التي تنبأ بها نظريات لوحة أخرى.

ويمكن استنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فقط ولكن أيضا بسيطة في تنبؤ الانحناء والاستجابة للاهتزاز الحر من لوحات متدرجة وظيفيا تستريح على أساس مرن.

**الكلمات مفتاحية:** الانحناء؛ للاهتزاز الحر؛ الصفائح المتدرجة وظيفيا؛ الأساسات المرنة ؛ نظرية تشوه القص القطعي شبه ثلاثي الأبعاد.

## Résumé

Dans ce travail, une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D efficace et simple est développée pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques à gradation fonctionnelle (FG) reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres. La caractéristique la plus importante de cette théorie est qu'elle prend l'effet d'étirement en considération. La fondation élastique est décrite par le modèle de Pasternak (à deux paramètres). On suppose que les propriétés du matériau de la plaque varient continuellement dans le sens de l'épaisseur par une simple loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants.

Les équations de mouvement pour des plaques épaisses sont données par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques pour l'analyse des flexions et des vibrations libres sont présentées. Les résultats numériques sont donnés en détail et comparés aux travaux existants tels que les solutions d'élasticité tridimensionnelles et ceux prédits par d'autres théories des plaques.

On peut conclure que la théorie actuelle n'est pas seulement précise, mais aussi elle est simple à prévoir les réponses de flexion et de vibration libre des plaques en matériau à gradient fonctionnelle FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

**Mots-clés :** flexion ; vibration libre ; plaque à gradient fonctionnelle FGM ; théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique quasi-3D.

## Abstract

In this work, an efficient and simple quasi-3D hyperbolic shear deformation theory is developed for bending and vibration analyses of functionally graded (FG) plates resting on two-parameter elastic foundation. The significant feature of this theory is that, in addition to including the thickness stretching effect, it deals with only five unknowns as the first order shear deformation theory (FSDT). The foundation is described by the Pasternak (two-parameter) model. The material properties of the plate are assumed to vary continuously in the thickness direction by a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents.

The equations of motion for thick FG plates are obtained within the Hamilton's principle. Analytical solutions for the bending and free vibration analysis are obtained for simply supported plates. The numerical results are given in detail and compared with the existing works such as 3-dimensional solutions and those predicted by other plate theories.

It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the bending and free vibration responses of functionally graded plates resting on elastic foundation.

**Keywords:** bending; free vibration; functionally graded plate; elastic foundation; quasi-3D hyperbolic shear deformation theory.

**Table des matières**

ملخص II	
Résumé.....	III
Abstract .....	IV
Table des matières.....	V
Liste des Figures .....	VIII
Liste des Tableaux.....	XI
Liste des Notations.....	XII
Introduction Générale.....	1
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composite .....	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Avantages des matériaux composites .....	6
I.3. Utilisation des matériaux composites dans les structures .....	6
I.4. Les types de matériaux composites.....	7
I.4.1. Composites à renforts de particules .....	7
I.4.2. Composites à renforts de fibres .....	7
I.4.3. Composites à renforts de paillettes.....	8
I.4.4. Composites stratifiés. ....	8
I.5. Les matériaux composites et leur fondamentaux de base .....	9
I.5.1. Renforts .....	9
➤ Nature de la fibre.....	10
➤ Fibre de verre .....	10
➤ Fibre de carbone.....	10
➤ Fibre d'aramide (Kevlar).....	12
➤ Les fibres de bore.....	13
I.5.2. Matrices.....	13
➤ Matrices organiques ou résineuses.....	14
➤ Résines thermodurcissables (TD) .....	14
➤ Résines thermoplastiques (TP).....	14
➤ Matrices métalliques .....	15
➤ Matrices céramiques .....	15
I.5.3. Interfaces .....	16
➤ Charges – additifs.....	16
I.6. Les matériaux composites structuraux .....	16
I.6.1. Les monocouches .....	16
I.6.2. Les stratifiés .....	17

I.6.3.	Les sandwichs .....	17
I.7.	Qualités générales des matériaux composites .....	18
I.8.	Conclusion .....	19
Chapitre II : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés .....		21
II.1.	Introduction.....	21
II.2.	Définition et Historique des FGM .....	22
II.3.	Application des Matériaux FGM .....	25
II.4.	Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM.....	27
II.4.1.	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	27
II.4.2.	Coulage en bande (Tape casting) .....	28
II.4.3.	Compactage des couches (poudre d'empilement).....	28
II.4.4.	Coulée par centrifugation .....	29
II.4.5.	Projection plasma .....	29
II.4.6.	Dépôt physique en phase vapeur (PVD) .....	30
II.4.7.	Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) .....	31
II.4.8.	Dépôt par électrophorèse.....	33
II.5.	Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM.....	34
II.5.1.	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	35
II.5.2.	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	36
II.5.3.	Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	37
II.6.	Conclusion .....	38
Chapitre III : Généralités sur les Théories des Plaques FGM .....		39
III.1.	Introduction.....	39
III.2.	Définition des plaques.....	40
III.3.	Historique des plaques .....	40
III.4.	Les modèles analytiques des plaques FGM .....	41
III.4.1.	Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) .....	41
III.4.2.	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT) .....	43
III.4.3.	Les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	44
III.5.	Conclusion .....	50
Chapitre IV : Formulation Théorique de la Flexion et la Vibration Libre Des Plaques FGM par 3D HSDT .....		51
IV.1.	Introduction.....	51
IV.2.	Hypothèses de base .....	51
IV.3.	Équations de base.....	53
IV.4.	Solution forme fermée pour des plaques simplement appuyées .....	57
IV.5.	Conclusion .....	59



## Table des Matières

---

Chapitre V : Validation Et Discussion Des Résultats .....	60
V.1. Introduction.....	60
V.2. Résultats numériques .....	60
V.2.1. Analyse de flexion.....	61
V.2.2. Analyse des vibrations. ....	69
V.3. Conclusion .....	74
Conclusion générale .....	75
Référence bibliographique .....	77

## Liste des Figures

### Chapitre I

Fig. I. 1 Les différents types de composites.....	8
Fig. I. 2 Schéma typique d'un matériau composite.....	9
Fig. I. 3 Différents composants de matériau composite .....	9
Fig. I. 4 Organisation hexagonale du tissu des atomes de Carbone .....	11
Fig. I. 5 Microstructure vue au MEB d'un tissu de mèches avant imprégnation avec la résine. .....	11
Fig. I. 6 Principaux matériaux de renfort Les Différents Types de Renforts. ....	13
Fig. I. 7 Pli à Renforcement unidirectionnel .....	17
Fig. I. 8 Matériau composite stratifié.....	17

### Chapitre II

Fig. II. 1 Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996). ....	22
Fig. II. 2 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y., 1999). ....	24
Fig. II. 3 Différents types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001). ....	25
Fig. II. 4 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999). ....	26
Fig. II. 5 Schéma du processus de production de matériaux gradués par coulage (Marple B.R., 1997). ....	28
Fig. II. 6 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000). ...	30
Fig. II. 7 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997). ....	31
Fig. II. 8 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999). ....	32
Fig. II. 9 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991). ....	33
Fig. II. 10 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002). ....	34
Fig. II. 11 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG.....	35
Fig. II. 12 Variation de module de Young $E$ en fonction de $k$ dans une plaque P-FGM.....	36
Fig. II. 13 Variation de module de Young $E$ en fonction de $k$ dans une plaque S-FGM.....	37
Fig. II. 14 Variation de module de Young $E$ dans une plaque E-FGM.....	38

### Chapitre III

Fig. III. 1 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff (Reddy .J .N, 2004). ..... 42

Fig. III. 2 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin (Reddy .J .N, 2004)..... 44

Fig. III. 3 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé (Reddy .J .N, 2004). ..... 45

Fig. III. 4 Comparaison entre différentes théories ; a) Variation de  $\Psi_z$  des différents modèles ; b) Variation de  $\Psi'_z$  des différents modèles suivant l'épaisseur **Source spécifiée non valide..** (ATTIA A., 2015)..... 49

### Chapitre IV

Fig. IV. 1 La géométrie et les coordonnées de la plaque FG considérée reposant sur une base élastique ..... 53

### Chapitre V

Fig. V. 1 Effet du paramètre de module Winkler sur la fleche centrale sans dimension d'une plaque FGM carrée ( $k = 2, k_s = 10$ ) pour un rapport entre épaisseur et épaisseur..... 66

Fig. V. 2 Effet du module de cisaillement Pasternak sur la fleche centrale sans dimension d'une Plaque carré FGM ( $k = 2, k_w = 100$ ) Pour un rapport entre épaisseur et épaisseur ..... 66

Fig. V. 3 Variation de la contrainte axiale sans dimension ( $x$ )  $\sigma$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, k_s = 10, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Winkler..... 67

Fig. V. 4 Variation de la contrainte axiale sans dimension  $\sigma_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_w = 100, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Pasternak ..... 67

Fig. V. 5 Variation de la contrainte de cisaillement sans dimension ( $\tau_{xy}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_s = 10, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Winkler..... 68

Fig. V. 6 Variation de la contrainte de cisaillement sans dimension  $\tau_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_w = 100, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Pasternak ..... 68

## Liste des Figures

---

Fig. V. 7 La variation de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle  $\omega$  par rapport à la loi de puissance Indice  $k$  pour différentes valeurs du paramètre Winkler ( $a/b = 1, k_s = 10, a/h = 10$ )..... 72

Fig. V. 8 La variation de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle  $\omega$  par rapport à la loi de puissance Indice  $k$  pour différentes valeurs du paramètre Pasternak ( $a/b = 1, k_s = 100, a/h = 10$ )..... 73

## Liste des Tableaux

### Chapitre V

Tableau V. 1 Les Propriétés des matériaux de la plaque FGM.....	61
Tableau V. 2 Effet de la contrainte normale $\epsilon_z$ sur les contraintes sans dimension et le déplacement transversal pour la plaque carrée isotrope ( $a/h = 10$ ) soumise à une UDL	61
Tableau V. 3 Comparaison de la fleche non dimensionnelle $D103 w 0.5a, 0.5b, z = 0qa^4$ de la plaque carrée mince isotrope simplement supportée sous charge uniformément répartie ( $a/h = 100$ ) .....	61
Tableau V. 4 Comparaison de la fleche $D103 w 0.5a, 0.5b, z = 0qa^4$ d'une plaque carrée homogène simplement supportée uniformément chargée sur une fondation Winkler ( $a/h = 100$ ) .....	62
Tableau V. 5 Comparaison de la fleche $w$ d'une plaque carrée homogène sous charge uniformément répartie reposant sur la base élastique de Winkler ( $a/h = 20$ ) .....	63
Tableau V. 6 Comparaison des déplacements et des contraintes de la plaque rectangulaire Al / $Al_2O_3$ simplement soutenue sous charge uniformément répartie ( $a = 10h, b = 3a$ ).....	64
Tableau V. 7 Effet de l'exposant de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur les efforts sans dimension et des contraintes d'une plaque rectangulaire FGM sous charge sinusoïdale. ( $a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$ ) .....	65
Tableau V. 8 Fréquences naturelles $\omega = \omega h \rho/G$ d'une plaque isotrope avec $\nu = 0.3, a/h = 10$ et $a/b = 1$ .....	70
Tableau V. 9 Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles $\omega \pi^2 \omega = \omega a^2 \rho m h / D m$ de la plaque carrée isotrope simplement appuie $k_s = 10$ .....	70
Tableau V. 10 Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\omega = \omega a^2 h \rho m / E m$ d'une plaque carrée simplement soutenue ( $a = b = 10 h$ ) .....	71
Tableau V. 11 La fréquence naturelle non dimensionnelle $\omega = \omega h \rho m / E m$ de la plaque carrée FG par rapport aux paramètres de cisaillement et de Winkler, indice de loi de puissance et rapport épaisseur-longueur.....	72

### Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ \ ]$	Matrice
$\Gamma$	propriété matérielle
$V(z)$	Fraction volumique locale.
$\overline{\tau_{xy}}$	Contrainte de cisaillement
$\hat{\omega}$	Fréquence naturelle
$\bar{\omega}$	fréquence fondamentale
$g(z)$	fonction de forme
$f(z)$	fonction de forme
$w_b$	Déplacement transversal dû à la flexion
$w_s$	Déplacement transversal dû au cisaillement
$w_{,x}^b$	Rotation due à la flexion suivant x
$w_{,x}^s$	Rotation due au cisaillement suivant x
$G_{ij}$	Constantes élastiques
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur et la température
$\rho(z,T)$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur et la température
$k$	Indice de loi de puissance
$U_p$	énergie de déformation mécanique
$\nu$	Coefficient de Poisson
$k^b$	Champ des déformations en flexion
$k^s$	Champ des déformations en cisaillement
$K$	L'énergie cinétique
$d_{ij}$ et $d_{ijlm}$	opérateurs différentielles
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s,$ $D_{ij}^s, H_{ij}^s$	les composantes de rigidité
$u_0$	Déplacement de membrane ou du plan médium suivant l'axe x,

## Liste des notations

---

$v_0$	Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y,
$w_b$	Composantes de flexion du déplacement transversal,
$w_s$	Composantes de cisaillement du déplacement transversal,
$i, j$	Nombre naturelle
$A$	Longueur de la plaque
$B$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$\varphi$	Déplacement additionnel
$\omega$	fréquence
$\sigma_x \sigma_y \sigma_z$	Contraintes normales
$\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E_c$	Module de Young de la céramique
$N, M^b, M^s$	Résultantes des contraintes
$, S^s$ et $N_z$	
$I_0, I_1, J_1,$	Inerties de masse
$I_2, J_2, K_2$	

# **Introduction Générale**



### Introduction Générale

Les Matériaux à gradation fonctionnelle (FGMs) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et donc éliminer la concentration de contrainte trouvée dans les composites stratifiés. Un FGM typique est fabriqué à partir d'un mélange de deux phases de matériaux, de la céramique et du métal. La raison de l'utilisation croissante des (FGMS) dans divers secteurs aérospatial, automobile, civil et des structures mécaniques est que leurs propriétés matérielles peuvent être adapté à différentes applications et environnements de travail (Reddy J.N., 2000; Qian L.F., 2005; Bachir Bouiadjra R.et al., 2013; Attia A.et al., 2015; Hamidi A.et al., 2015; Darilmaz K., 2015; Ebrahimi F., 2015; Bouguenina O.et al., 2015; Akbas S.D., 2015; Arefi M., 2015) (Pradhan K.K., 2015; Kar V.R., 2015; Boudjerba B., 2016; Beldjelili Y., 2016; Ebrahimi F., 2016; Hadji L., 2016; Moradi-Dastjerdi R., 2016; Laoufi I.et al., 2016; Bousahla A.A., 2016; Ebrahimi F., 2016) (Trinh T.H.et al., 2016).

Des plaques reposant sur une fondation élastique peuvent être trouvées dans différents domaines d'ingénierie structurale deux paramètres du modèle de (Pasternak P.L., 1954) qui considère la déformation par cisaillement entre les ressorts avait été proposé pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation. Le modèle de (Winkler E., 1867) est un cas particulier du modèle Pasternak en fixant le module de cisaillement à zéro.

La réponse mécanique des plaques graduées fonctionnellement (FGs) reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak a été étudiée dans certains travaux de recherche. (Huang.et al., 2008) a utilisé une théorie 3D d'élasticité à l'étude FG Plaques épaisses sur un fond élastique. En se basant sur la théorie de l'élasticité 3D, (Malekzadeh P., 2009) a étudié la vibration libre des plaques FG reposant sur une base élastique. (Amini M.H.et al., 2009) a étudié la réponse en vibration libre 3D des plaques FG soutenues par des fondations élastiques. Utilisation de l'état d'approche spatiale, (Lü C.F.et al., 2009) propose des solutions exactes pour les vibrations libres des plaques épaisses FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. (Ait Atmane H., 2010) a analysé la vibration libre des plaques FG supportées par une fondation élastique en utilisant une nouvelle théorie de déformation hyperbolique par cisaillement et une procédure de Navier. En utilisant la théorie de la déformation par cisaillement parabolique, (Baferani A.H.et al., 2011) a établi une

méthode précise pour la vibration des plaques épaisses de FG soutenues par la fondation élastique. (Fallah A. et al., 2013) a étudié la vibration des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la méthode de Kantorovich étendue avec une solution en série de puissance infinie. (Sheikholeslami S.A., 2013) a utilisé la théorie de la cisaille de plus haut niveau et de la tôle de déformation normale avec une formulation analytique pour étudier le comportement de vibration libre des plaques FG simplement supportées reposant sur une base élastique. (Sobhy M., 2013) a étudié les réponses de vibration libre et de flambement de la plaque sandwich de matériau à gradient exponentiel supportée par la base élastique de Winkler-Pasternak. Une approche analytique basée sur la théorie des plaques de déformation à cisaillement de premier ordre est présentée par (Yaghoobi H., 2013) pour étudier le flambement thermomécanique de plaques sandwichs symétriques avec des feuilles de face FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. (Hadji L. et al., 2011) ont étudié l'analyse de la vibration libre de plaques rectangulaires en sandwich de matériau à gradient fonctionnel (FGM). La théorie présentée et qui varie uniformément et fortement similaire à la théorie des plaques classique dans de nombreux aspects. Elle n'exige pas le facteur de correction de cisaillement, qui donne lieu à la variation de contrainte transversale de cisaillement de sorte que les contraintes transversales de cisaillement varient paraboliquement à travers l'épaisseur pour satisfaire les conditions de surface libres pour la contrainte de cisaillement. (Benachour A. et al., 2011) a développé un modèle pour l'analyse libre de vibrations de plaques en matériaux fonctionnellement classés avec un gradient arbitraire. On obtient des solutions de forme fermée en utilisant la technique Navier, Et ensuite les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant les résultats des problèmes de valeurs propres. (El Meiche N. et al., 2011) a développé une théorie de la plaque déformable par cisaillement hyperbolique raffinée, pour le flambage et la vibration des plaques sandwichs FGM. (Tounsi A., 2013) ont étudié la réponse de flexion thermoélastique des plaques sandwichs FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée. (Zidi M. et al., 2014) a étudié la réponse de flexion de la plaque de matériau à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur une fondation élastique et soumise à un chargement hydro-thermo-mécanique. (Ait Amar Meziane M. et al., 2014) ont développé une théorie de déformation à cisaillement raffinée efficace et simple pour les analyses d'oscillation et de vibration des plaques sandwichs FGM supportées par des fondations élastiques en considérant différents types de conditions aux limites. (Khalfi Y. et al., 2014) ont examiné le comportement au flambement thermique des plaques solaires FG reposant sur une fondation élastique. (Hebali H. et al., 2014) a développé une nouvelle théorie

de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse de vibrations statiques et libres de plaques FG. (Mahi A.et al., 2015) a proposé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique pour l'analyse de flexion et de vibration libre des isotropes, Fonctionnellement classé, Sandwich et plaques composites stratifiées. (Saidi H.et al., 2016) Ont développé une théorie simple de déformation par cisaillement hyperbolique pour l'analyse vibratoire de plaques rectangulaires FG épaisses reposant sur des fondations élastiques. La propagation des ondes de plaques FG poreuses à l'aide de différentes théories de déformation à cisaillement (HSDT) est étudiée par (Ait Yahia S.et al., 2015). Ils ont conclu que les théories d'ordre supérieur peuvent prédire avec précision les caractéristiques de la vague des structures FG et il y a seulement une petite différence entre leurs résultats.

Aussi, de nombreux articles sont publiés concernant l'analyse des structures en FGM basées sur des théories d'ordre élevé HSDTs ( (Bourada M.et al., 2012; Belabed Z.et al., 2014; Bousahla A.A.et al., 2014; Bennai R.et al., 2015; Bellifa H.et al., 2016; Al-Basyouni K.S.et al., 2015; Ait Atmane H.et al., 2015; Bourada M., 2015; Merazi M.et al., 2015). Des théories supplémentaires de cisaillement et de déformation normale sont présentées dans la littérature (Ould Larbi L.et al., 2013; Hadji L.et al., 2014; Nedri K.et al., 2014; Draiche K.et al., 2014; Bennai R.et al., 2015; Akavci, 2015; Meradjah M.et al., 2015; Bakora A., 2015; Belkorissat I.et al., 2015; Bouchafa A.et al., 2015) (Sallai B.et al., 2015; Tagrara S.H.et al., 2015; Larbi Chaht F.et al., 2015; Zemri A.et al., 2015; Tebboune W.et al., 2015; Hadji L., 2015b; Nguyen K.T.et al., 2015; Mouaici F.et al., 2016; Boukhari A.et al., 2016; Chikh A.et al., 2016) (Barati M.R.et al., 2016; Bounouara F.et al., 2016). Ont présenté une théorie de déformation par cisaillement non locale pour la vibration libre de plaques à échelle nanométrique fonctionnellement calées reposant sur une fondation élastique. (Bourada F.et al., 2016) ont analysé le comportement au flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables. Récemment, (Tounsi A.et al., 2016) a présenté une nouvelle théorie des plaques non polynomiales de 3 inconnues pour le flambage et la vibration de la plaque sandwich de FG.

Selon les travaux de littérature, Le seul travail sur la fréquence naturelle des plaques FG supportées sur fondation élastique sur la base de la théorie de cisaillement de plus haut degré et de la théorie de la déformation normale semble être présenté par (Sheikholeslami S.A., 2013). Cette dernière théorie a six inconnues est encore plus compliquée que la première

théorie de la déformation par cisaillement (FSDT). Ainsi, le développement d'une théorie quasi-3D simple est nécessaire.

Le but de ce travail est de développer une théorie quasi-3D simple avec seulement cinq inconnues pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak, Pour ce fait, notre thèse est composée de cinq chapitres structurés comme suit :

Le premier chapitre est consacré sur la présentation des matériaux composites traditionnels de type matrice–renfort. Où nous avons donné les avantages, les utilisations des composites dans le domaine des structures, les différents composants d'un matériau composite.

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials FGM) sont présentés dans le second chapitre. Où nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

Le troisième chapitre, présente une revue des différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Le quatrième chapitre, a pour but de présenter les formulations théoriques de la flexion et la vibration libre des plaques FGM par 3D HSDT reposant sur une fondation élastique. Le champ de déplacement est choisi en fonction d'une variation hyperbolique de déplacements dans le plan et transversaux à travers l'épaisseur. La partition du déplacement transversal dans la flexion, le cisaillement et l'étirage conduit à une réduction du nombre d'inconnues, et par la suite, rendre la nouvelle théorie simple à utiliser en utilisant le principe de Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues.

Validation et discussion des résultats obtenus par la présente méthode sont illustrées dans le cinquième chapitre, une comparaison des résultats obtenus à celle de la littérature confirme la précision de la présente formulation.

Enfin, ce manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail et des perspectives décrivant des voies d'amélioration à poursuivre.

# **Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composite**

## Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composite

### I.1. Introduction

La réalisation d'une structure est nécessairement liée à la nature de ses constituants c'est-à-dire ses matériaux. De ce fait la technologie nouvelle exige de ses derniers qu'ils soient à la fois résistants, rigides, légers et surtout adaptables à des utilisations spécifiques. Rares sont les matériaux qui répondent d'une façon entière à ces exigences. Les matériaux traditionnels sont limités dans leurs champs d'actions de par leurs propriétés mécaniques et leurs techniques de mise en œuvre. La naissance de produits nouveaux tels que les matériaux composites ouvre un large éventail d'application, et répond à des utilisations bien spécifiques (l'élaboration du matériau se réalise selon la fonction avancée). (Benachour A., 2010).

L'art de l'ingénieur dans la conception et l'utilisation de matériaux ou de structures composites réside dans le fait de placer le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition spatiale).

Au sens strict du terme, il faut parler de matériau ou de structure composite dès lors qu'une pièce est composée de plusieurs types de constituants. Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériau pour obtenir des propriétés moyennes améliorées. (Mechab I., 2009) .

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de

nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes. (Draiche K., 2015)

Les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, etc....

## **I.2. Avantages des matériaux composites**

L'utilisation des matériaux composites apporte de nombreux avantages en termes de propriétés des matériaux. En effet, le but de leur fabrication est de profiter des bonnes propriétés de chaque matériau afin d'en former un qui sera mieux adapté à certaines applications. La combinaison de deux matériaux permet donc d'améliorer les propriétés d'un matériau, par exemple, la résistance, la rigidité, la conductivité, le poids, etc.... Ainsi, les composites permettront d'augmenter la performance de la structure dans laquelle ils seront inclus. Dans le cas d'une structure mince, le laminé composite de fibre permet une augmentation considérable de la résistance en traction et de la ductilité.

## **I.3. Utilisation des matériaux composites dans les structures**

Les matériaux composites ont de très nombreuses applications, surtout au niveau de l'aérospatiale, des objets sportifs tels que les bâtons de hockey, des voitures, des structures minces en béton, etc. Le but recherché le plus souvent est de remplacer un matériau traditionnel par un matériau composite est assurer une diminution de masse appréciable, et ce, pour une même rigidité de l'élément. D'autres applications visent plutôt une augmentation de la résistance générale des éléments. Le composite permet d'amincir le laminé, donc de diminuer la masse de la structure tout en assurant une rigidité minimale et une meilleure ductilité que celle de la structure non renforcée. L'utilisation des composites peut améliorer plusieurs propriétés du matériau. Dans le cas des bétons, l'utilisation des



composites permet d'améliorer les points faibles du béton comme la résistance à la traction et la ductilité.

#### **I.4. Les types de matériaux composites**

En général, le domaine des composites est très vaste et, ceux-ci peuvent être divisés en quatre types :

- composites à renforts de particules,
- composites à renforts de fibres,
- composites à renforts de paillettes,
- composites stratifiés.

##### **I.4.1. Composites à renforts de particules .**

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice. En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres. (Draiche K., 2015) (Beeby A.W., 1979).

##### **I.4.2. Composites à renforts de fibres**

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature. Il existe deux grands types de fibres ; les macros-fibres et les microfibrilles. Les macros-fibres ( $\approx 10$  mm de longueur et plus) qui sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibrilles ( $\approx 10$  mm de longueur et moins) qui sont ajoutées afin d'améliorer principalement la résistance à la traction. La longueur qui caractérise les fibres comme microfibrilles ou macro-fibres peut varier en fonction de la composition de la matrice.

Le rôle des fibres dans la structure est le même que celui des armatures, c'est-à-dire reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres limitent la formation, la propagation et la coalescence des microfissures au sein de la matrice. Les fibres cousent à la fois les fissures existantes en empêchant leur développement et, limitent la formation d'autres fissures en renforçant la matrice d'acier. (Draiche K., 2015) (Pierre P., 1998) (Beaudoin J.J., 1990).

#### I.4.3. Composites à renforts de paillettes.

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan. Les composites de fibres. (Draiche K., 2015).

#### I.4.4. Composites stratifiés.

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification (Draiche K., 2015).

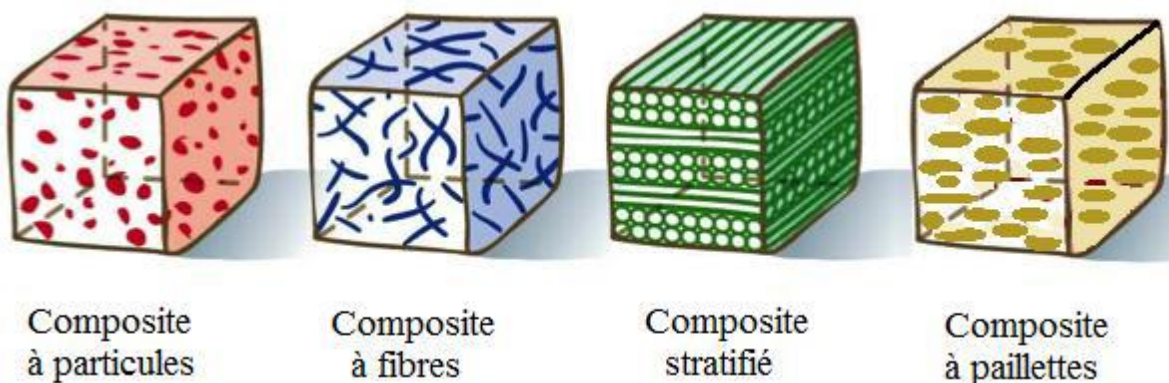


Fig. I. 1 Les différents types de composites

## I.5. Les matériaux composites et leur fondamentaux de base

En général les fondamentaux essentiels d'un matériau composite sont : le renfort, la matrice et l'interface. Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

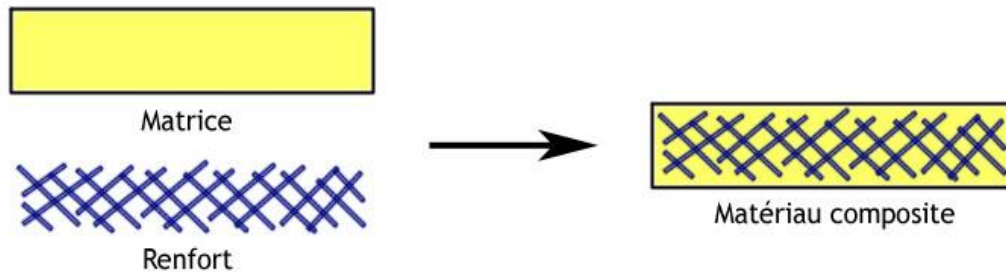


Fig. I. 2 Schéma typique d'un matériau composite

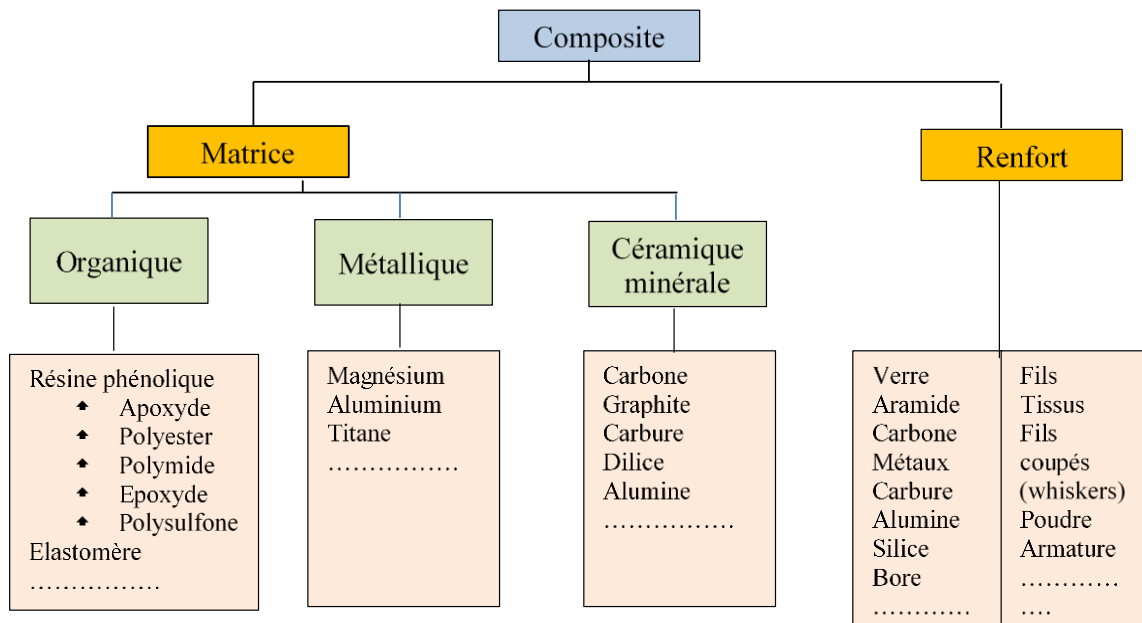


Fig. I. 3 Différents composants de matériau composite

### I.5.1. Renforts

Les renforts forment les armatures du matériau composite, ils aident à améliorer la résistance mécanique et la rigidité et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue. Ainsi les fibres sont constituées par plusieurs milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 25 µm.

Les renforts sont présents sous plusieurs formes : simple linéique, tissu surfacique simple, tissu complexe.

Les renforts sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,
- L'architecture du renfort.

➤ **Nature de la fibre**

La nature de la fibre importe beaucoup sur le produit final escompté, elle permet d'obtenir un matériau anisotrope avec un renforcement dans des directions préférentielles.

Les fibres peuvent être d'origine végétale, minérale ou artificielle. La concentration du renfort à l'intérieur du matériau est mesurée par sa fraction volumétrique(Vf).

Parmi les principales fibres on trouve les fibres de verre, les fibres de carbone et les fibres d'aramide (Kevlar).

➤ **Fibre de verre**

La fibre de verre est un filament de verre extrêmement fin (de l'ordre de 10 micromètres). Elle est obtenue à partir de silice et d'additifs.

Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- fibres R S pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD).

➤ **Fibre de carbone**

La fibre de carbone se compose de fibres ayant un diamètre moyen de l'ordre de 7 à 8 micromètres et constituée principalement d'atomes de carbone. Ces atomes sont arrangés dans des cristaux microscopiques selon une chaîne hexagonale comme le montre la figure I.4. Cet arrangement des cristaux rend la fibre extrêmement résistante. Plusieurs milliers de

fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil, qui peut être employé tel quel ou sous forme de tissu.

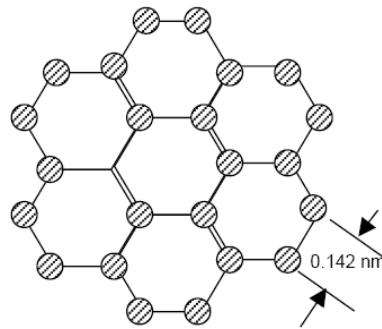


Fig. I. 4 Organisation hexagonale du tissu des atomes de Carbone

Il existe plusieurs présentations de laminés de fibres de carbone, comme les fibres orientées d'une manière unidirectionnelle ; les fibres assemblées dans des groupes de mèches, où les mèches peuvent être orientées d'une manière aléatoire (voir figure. I.3) ou peuvent être ordonnées comme un tissu (voir figure. I.4)

Quand on parlera d'un laminé, on parle d'un ensemble de couches qui peuvent être des couches avec des fibres unidirectionnelles ou des couches avec des fibres confinées par des tissus de mèches comme le montre la figure. I.4. Les fibres unidirectionnelles peuvent être commercialisées préalablement noyées dans leur résine d'une manière rigide.

Les laminés de tissus de fibre de carbone présentés sur le marché avec l'acronyme TFC, sont présentés comme un matériau flexible préalable à sa mise en place et postérieurement imbibé dans sa résine d'époxy.



Fig. I. 5 Microstructure vue au MEB d'un tissu de mèches avant imprégnation avec la résine.

➤ **Fibre d'aramide (Kevlar)**

La fibre aramide est issue de la chimie organique des polyamides aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température ; on la nomme souvent « Kevlar », qui est la marque de son créateur, Dupont de Nemours.

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre,
- D'un prix encore trop élevé : le prix plancher est encore de l'ordre de 50 euros/kg et certaines fibres comme la nouvelle fibre Zylon (PBO) peuvent atteindre 120euros/kg.

La production mondiale de fibres d'aramide atteint 40.000 tonnes/an, dont seulement 4.000 tonnes sont utilisées dans les composites.

Les fibres de polyéthylène à haute ténacité présentent les avantages suivants :

- Légèreté ( $d=0,95$  à comparer à celle de l'aramide  $d=1,44$ ) ;
- Haute capacité de conversion de l'énergie cinétique (par exemple celle d'un projectile) en énergie thermique.
- Les composites à fibres de polyéthylène restent encore marginaux ; ils se développent, en particulier, pour des applications balistiques et de blindage (gilets pare-balles de Arès, plaques de blindage, casques ONU). Leur champ d'application est limité par leurs principales faiblesses :
- Mauvaise résistance à la température (fluage dès 90°C ; l'aramide ne se dégrade qu'à 400°C)
- Mauvaise adhérence entre les fibres et la matrice.

Les principales marques sont : Dyneema de DSM (Pays Bas), Spectra aux Etats Unis.

➤ **Les fibres de bore**

Ce sont des filaments de tungstène avec un diamètre de  $12 \mu\text{m}$ , sert de catalyseur à la réaction de chlorure de bore et d'hydrogène  $1200^\circ\text{C}$ . Les fibres de bore obtenues ont un diamètre d'environ  $100 \mu\text{m}$  (la vitesse de croissance est de 1 micron par seconde).

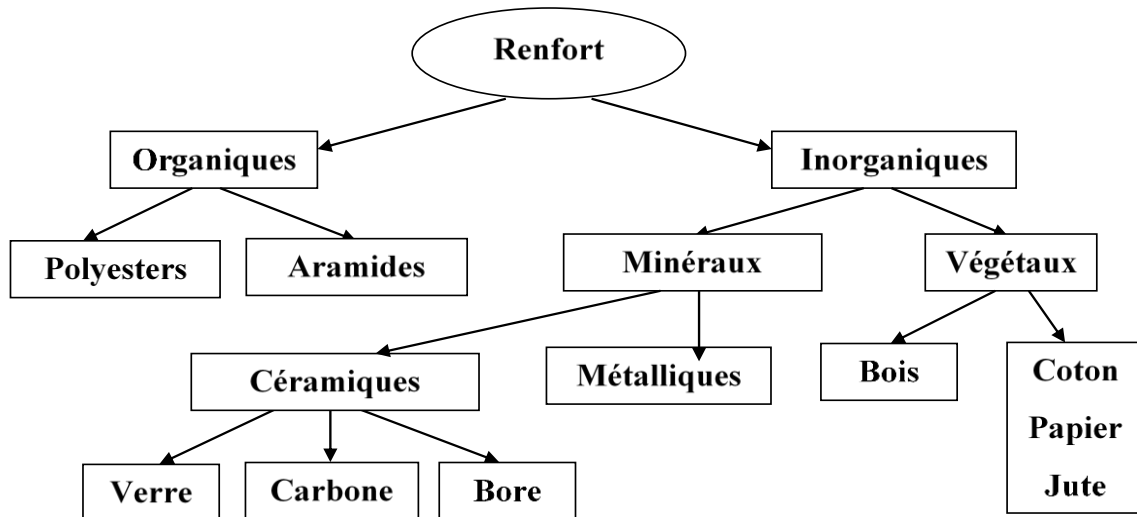


Fig. I. 6 Principaux matériaux de renfort Les Différents Types de Renforts.

### I.5.2. Matrices

Dans le composite la matrice ou bien la résine comme elle est appelée communément a pour rôle de maintenir les fibres entre elles toute en jouant le rôle de liant. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Pour obtenir des caractéristiques d'imprégnation plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

On peut classer les matériaux composites en fonction de leur nature, ils sont classés en trois grandes catégories : les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieures à  $300^\circ\text{C}$ , les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à  $600^\circ\text{C}$ , et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de  $1000^\circ\text{C}$ .

➤ **Matrices organiques ou résineuses**

Les pièces composites à matrice organique (CMO), en particulier de pièces structurales, sont utilisés dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les avantages potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc.

La fabrication des CMO emploie deux types de matrices: les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage) (Draiche K., 2015).

➤ **Résines thermodurcissables (TD)**

Les polymères thermodurcissables ont une forme de réseau tridimensionnel ; au cours de la polymérisation, ce réseau se ponte (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible.

- Les résines phénoliques qui sont obtenues par la polycondensation du phénol et du formol ; elles présentent une très bonne tenue au feu, sans fumée (d'où leur utilisation dans le ferroviaire). Elles sont fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à mettre en oeuvre.
- Les résines époxy (ou époxydes) constituent la résine type des composites HP.
- les polyuréthanes, ils ont une faible viscosité qui facilite un bon remplissage du moule.

➤ **Résines thermoplastiques (TP)**

À l'état vierge les thermoplastiques (TP) dévoilent de bonnes caractéristiques mécaniques. Des fibres courtes comme renforcement leur consacrent une tenue mécanique et thermique améliorée avec une bonne stabilité dimensionnelle. Néanmoins, le nom « composite » n'est pas traduit d'une manière uniforme, et certains industriels n'y incluent pas les thermoplastiques renforcés de fibres courtes qui représentent pourtant 90% des composites à matrice thermoplastique.



- Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont à base
- Les polyamides (PA) ;
- Les polytéréphtalates éthylénique (PET) ;
- Les butylénique (PBT) ;
- Les polycarbonates (PC) ;
- Les polyoxides de phénylène (PPO ou PPE) ;
- Les polyoxyméthylènes (POM) ;

➤ **Matrices métalliques**

On parle de composite à matrice métallique, Lorsqu'il s'agit d'une matrice métallique dans lequel on insère des fibres, des particules ou également des filaments qu'on appelle trichite. il y a des fibres courtes et des fibres continues mono filament ou multi filaments. La composition des fibres et des matrices varie d'un composite à l'autre et dépend surtout de l'application et du budget. Les composites CMM les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique.

➤ **Matrices céramiques**

Les céramiques sont utilisées principalement pour des applications demandant une résistance thermique extrême, lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

### **I.5.3. Interfaces**

Afin d'assurer une compatibilité entre le renfort et la matrice l'utilisation d'une couche d'interface est indispensable. Un apprêt spécifique comportant un agent collant est administré aux fibres destinées à la fabrication des composites recevoir il permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure une fonction de lubrification afin de les protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres.

#### ➤ **Charges – additifs**

Dans le domaine des matériaux composites on appelle communément une charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui est ajoutée à un polymère de base qui permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et d'améliorer l'aspect de surface ou bien simplement de réduire le prix de revient du matériau modifié. Au contraire des matériaux thermoplastiques, les matériaux thermodurcissables ont toujours renfermé des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Le choix d'une charge pour un polymère donné est caractérisé en fonction des modifications recherchées pour l'objet terminé. Mais d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matériaux plastiques devront avant tout satisfaire un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient.

### **I.6. Les matériaux composites structuraux**

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories : Les monocouches, Les stratifiés et Les sandwichs. Leur rigidité est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

#### **I.6.1. Les monocouches**

L'élément de base des structures composites ces les monocouches, ils sont constituées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). La variation des multitudes types de monocouches sont définis par la forme du renfort : fibres longues, fibres tissées, ou à fibres courtes.

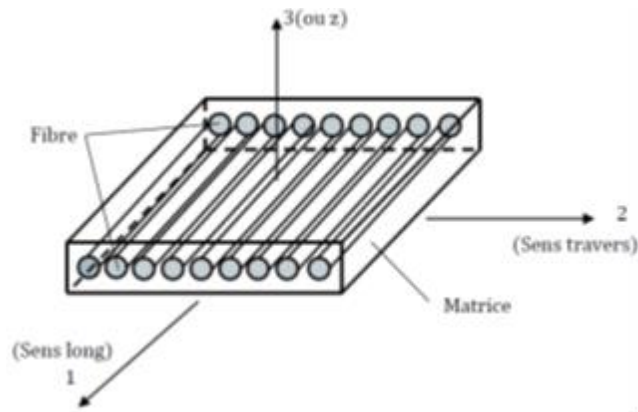


Fig. I. 7 Pli à Renforcement unidirectionnel

### I.6.2. Les stratifiés

La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir des structures composites stratifiées qui sont constituées de couches de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également désignées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. La résistance mécanique aux efforts est assurée par le renfort. La résine quant à elle assure la cohésion entre les renforts de sorte à distribuer les excitations mécaniques.

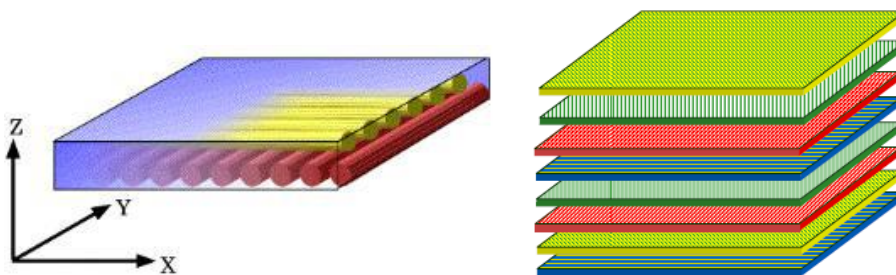


Fig. I. 8 Matériau composite stratifié

### I.6.3. Les sandwichs

La structure des composites sandwichs est constituée de deux peaux ou bien de couvercle en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible (figure I.5). Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble. Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire

d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces. La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice. L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure. Dans le domaine aéronautiques Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures sont légers et rigides ce qui en fait de très bon transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces dernières vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties. Généralement les matériaux composites ont un amortissement plus élevé que les métaux, mais celui-ci demeure insuffisant et il est nécessaire de trouver des solutions pour l'améliorer.

### **I.7. Qualités générales des matériaux composites**

Les matériaux composites ont plusieurs qualités parmi eux on peut citer :

- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bon comportement à la corrosion ;
- Résistance chimique, tenue électrique et une meilleure isolation thermique ;
- Amélioration de la tenue au feu ;
- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Les défauts principaux les plus courants qui rende le composite vulnérable sont :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois exagérés (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage ;

## **I.8. Conclusion**

En premier lieu une présentation rapide sur les matériaux composites nous a paru utile. Avec de nombreuses applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de réels concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. De leur importance, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi discuté sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

## **Chapitre II : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés**

## **Chapitre II : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés**

### **II.1. Introduction**

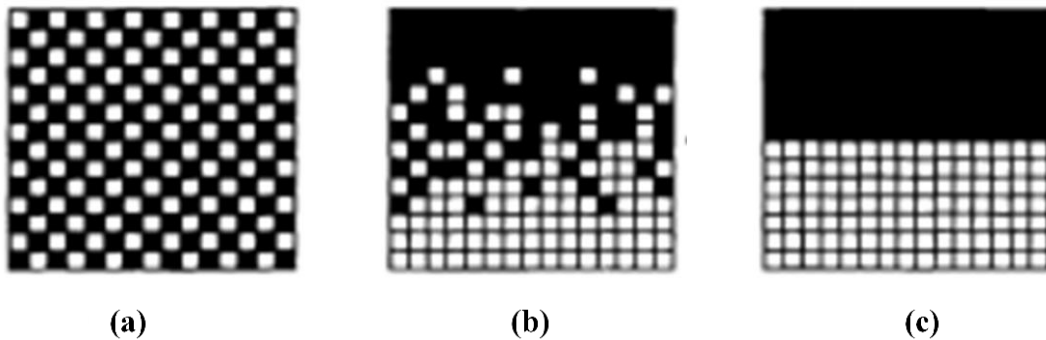
Les besoins et la demande de l'utilisation des matériaux performants dans tous les domaines au cours des dernières années sont devenus exigeants, les technologies modernes ont besoin de matériaux qui combinent à la fois une rigidité, une résistance mécanique et thermique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Les matériaux conventionnels ne peuvent pas résister aux environnements rudes auxquels sont confrontés, d'autres développements en science et technologie comptent beaucoup sur le développement de nouveaux matériaux qui peuvent résister aux conditions qui sont créées par les progrès technologiques ; c'est pourquoi, depuis un certain nombre d'années, on cherche à obtenir des matériaux combinant différentes propriétés, matériaux composites, pour les utiliser au sein de différents secteurs tel que l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, le génie civil, la médecine, etc...

Dans le développement de ces nouveaux matériaux, il existe deux approches. On est à développer un nouveau matériau qui diffère complètement de tous les matériaux présents. D'autre part est de développer de nouvelles fonctions pour les matériaux existants. Le développement des matériaux composites satisfaisant les deux approches ci-dessus. De nombreux nouveaux types de composite ont déjà été fabriqués conformément aux propriétés des matériaux exigées par la technologie actuelle.

Pour les applications industrielles, il est essentiel dans l'utilisation que toutes les parties de la matière présente des propriétés uniformes. Les exigences en matière composites conventionnels ne font pas exception. La plupart des efforts dans le développement des composites dans le passé a été mis en déterminant comment mélanger uniformément la matière dispersée dans la matrice. Par conséquent, d'un point de vue macroscopique, même les composites ont été considérées comme homogènes, car dans ces matériaux les propriétés mécaniques et d'autres caractéristiques se révèlent être homogènes, comme le montre la figure II.1.a. En revanche, des études sont également menées pour concevoir des matériaux qui ont deux propriétés différentes au sein du matériau donné. Ces matériaux composites sont hétérogènes qui sont caractérisés par différentes propriétés de matériaux sur des

surfaces ou des pièces séparées. Un exemple d'un composite ayant des fonctions différentes dans ses différentes surface est un matériau revêtu destiné à améliorer les caractéristiques de surface d'un matériau. Cependant, ces composites présentent des limites nettes inhomogènes, comme le montre la figure II.1.c.

La discontinuité aux caractéristiques du matériau mécaniques, physiques et chimiques à la frontière présente souvent diverses propriétés indésirables. Pour cette raison, une proposition visant à concevoir un nouveau matériau destiné à éliminer la limite macroscopique dans les matériaux stratifiés (Niino M.et al., 1987). Autrement dit, l'approche consiste à synthétiser des composites non homogènes, dans lesquels, les propriétés mécaniques, physiques et chimiques de la matière changent continuellement, et qui n'a pas de discontinuités dans le matériau. Ces matériaux sont appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM), figure. II-1.b. (Hirai T.et al., 1987; Koizumi M., 1993; Hirai T., 1996).



a) Composite homogène    b) Matériau à gradient de propriété    c) Composite stratifié

Fig. II. 1 Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996).

## II.2. Définition et Historique des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués, matériaux à gradient de propriété ou matériaux à gradient évalués (FGM) : sont des matériaux de type composite microscopiquement non homogènes, ils sont fabriqués généralement à partir de deux matériaux ou plus, le plus souvent un métal et une céramique, ou en changeant la microstructure d'un seul matériau.



Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont des matériaux composites avec un changement spatiale continu des propriétés (Koizumi M., 1994; Kawasaki A., 1997; Borchert R., 1999).

Les matériaux à gradient fonctionnelle (FGM) sont des matériaux composites dont la composition ou la structure contrôlée (Erdogan F., 1995; Yang Y.Y.et al., 1997; Kokini K.et al., 1997; Yang Z.et al., 2003) et il est donc possible de fabriquer des composants avec des propriétés locales souhaités (Carvalho O.et al., 2015).

Les matériaux fonctionnellement graduées (FGM) sont une classe de matériaux composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et d'alléger ainsi la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériel réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes.

Une structure à gradation fonctionnelle est définie comme " ceux dans lesquels les fractions volumiques de deux ou plusieurs matériaux sont varié continuellement selon une fonction exigent en fonction de la position le long de certaine dimension (s) de la structure à réaliser " (Reddy J.N., 2000).

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été introduits comme une classe de composite avancé qui compose de simple gradient continu ou discontinu dans la composition et de la microstructure (Siti Nur Sakinah J.et al., 2013).

Dans les formes les plus simples, deux ingrédients de matériaux différents changent progressivement de l'un à l'autre comme l'illustre la figure II.2.a. Les ingrédients matériels peuvent également changer de façon discontinue telle que la gradation progressive illustrée à la figure II.2.b. Ce type de structure peut également être considéré comme un FGM. Le FGM le plus traditionnel est obtenu par composition d'une céramique réfractaire à un métal. Il peut intégrer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, l'usure, l'oxydation, une haute ténacité, la capacité de liaison des métaux, sans contrainte thermique interne grave.

La première idée générale de gradients structurels a été avancé pour les composites et les matériaux polymères en 1972 (Bever M.B., 1972; Shen M., 1972). Différents modèles ont été proposés pour des gradients de composition, dans la concentration des fibres, et dans la

polymérisation pour obtenir des structures gradués. Cependant, il n'y avait aucune enquête réelle sur la façon de concevoir, fabriquer, et d'évaluer les structures de gradient progressives jusqu'aux années 1980 (Miyamoto Y.et al., 1999).

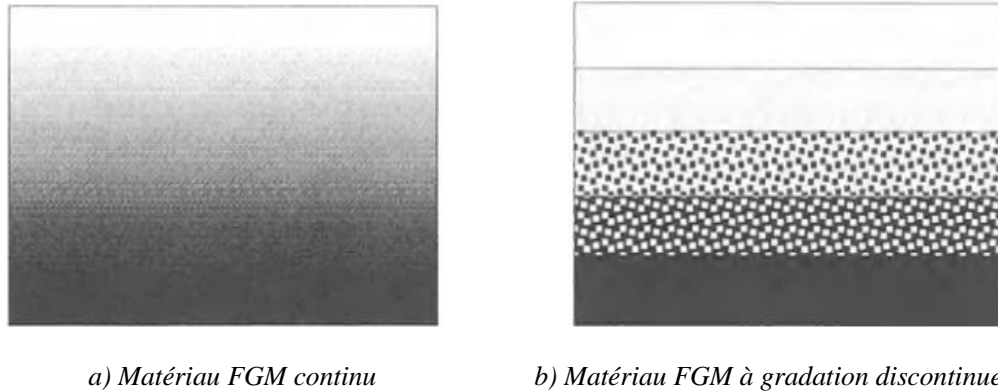


Fig. II. 2 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y.et al., 1999).

En 1985, l'utilisation du contrôle de la texture continue a été proposé afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser les contraintes thermique dans les revêtements céramiques et les articulations en cours d'élaboration pour le moteur de fusée réutilisable (Niino M.et al., 1984). Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pourrait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou composition. À l'heure actuelle, le concept de l'ingrédient matière a été introduit pour la conception de tels matériaux.

En 1986, ces types de matériaux ont été appelés matériaux à gradient fonctionnel, qui est devenu bientôt en abrégé FGM. En 1995, à la suite d'une discussion lors de la troisième Symposium international sur les FGM tenue à Lausanne en 1994, il a été décidé de changer le nom complet de matériaux à gradient fonctionnel, car il est plus précis à la fois descriptive et grammaticalement.

Les FGM ne sont pas des matériaux homogènes, il a été reconnu que, pour les créer, il faudrait une méthodologie de conception et de modélisation théorique ainsi que dans le traitement et l'évaluation des études approfondies. Par conséquent, en 1987, un programme de recherche de 5 ans, des études fondamentales sur la relaxation de la contrainte thermique,

a été lancé au Japon (Miyamoto Y., 1997). L'accent mis par le programme était de développer des formes pour une utilisation à haute température. Depuis 1989, les résultats de ces programmes de recherche et de développement ont été diffusés dans le monde entier par l'intermédiaire de papiers, des articles, des réunions internationales et des programmes d'échange. Un colloque international sur les FGM a lieu tous les 2 ans à compter de la première en 1990 à Sendai suivie par San Francisco, Lausanne. Aujourd'hui, le concept de la FGM étend sur une variété de domaines des matériaux à travers le monde (Hirai T., 1996).

En fonction de la nature du gradient, les matériaux fonctionnellement gradués FGM peuvent être groupés en catégories suivantes (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

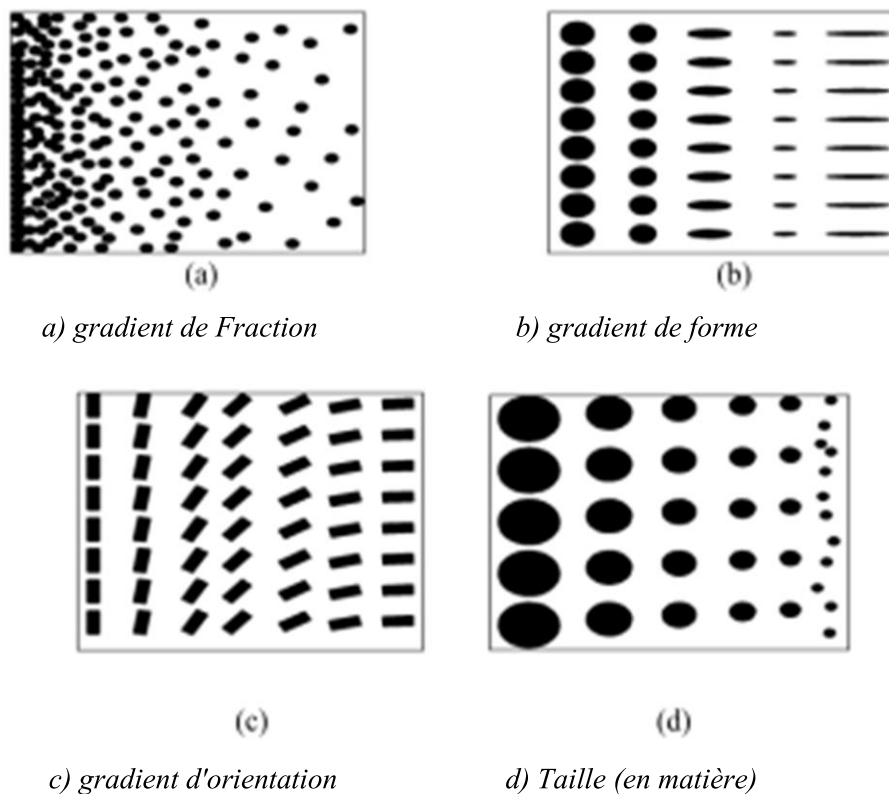


Fig. II. 3 Différentes types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

### II.3. Application des Matériaux FGM

En raison de leurs propriétés, les FGM sont potentiellement largement applicable dans de nombreux domaines, figure II.4.



Fig. II. 4 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM  
(Miyamoto Y.et al., 1999).

Les matériaux à gradient de propriété ont été élaborés autant que matériaux résistants à des grandes contraintes thermiques pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion (Hirai T., 1999; Uemura S., 2003).

Maintenant, ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères (BENATTA Mohamed A., 2011).

Le plus souvent les céramiques peuvent être utilisés comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques (Nguyen., 2004). Dans le domaine de transport comme composants de véhicules spatiaux, la protection du véhicule lors de choc, les moteurs de fusée, missiles furtifs (Miyamoto Y.et al., 1999), des sondes (Müller E.et al., 2003), des déclencheurs (Qiu J.et al., 2003), des outils de coupe (Cho J.R., 2002), des turbines et moteurs aéronautiques (Miyamoto Y.et al., 1999), des détecteurs photoélectriques (Paszkievicz B.et al., 2008) et des implants dentaires (Watari F.et al., 2004). Plusieurs revues traitent des divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières années. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans les FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et la rupture sous l'effet des contraintes thermiques (Shen H.S., 2009).

## II.4. Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM

Depuis 1980, des recherches sur les FGM ont été consacrées au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée (Hirai T., 1996). Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en deux étapes, la première c'est d'établir la structure non homogène dans l'espace, gradation, la deuxième c'est la transformation de cet matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel. Il ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie (BENATTA Mohamed A., 2011).

### II.4.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

La coulée en barbotine, est une technique utilisée pour la mise en forme de la céramique, un procédé typique pour la poudre empilé sous un courant induit par la pression. Une cavité dans un moule en plâtre de Paris est remplie d'une suspension contenant des particules d'un matériau céramique. Le liquide de suspension est absorbé par le moule par le biais des forces capillaires et les particules de céramique, qui sont généralement plus grands que les canaux capillaires, qui sont laissés sur les parois de la cavité du moule. Lorsque l'épaisseur de paroi souhaitée a été atteinte, la barbotine en excès est évacuée du moule et le corps vert est éliminé par séchage. La répétition de coulage en boues de compositions différentes peut être utilisée pour produire des MGF stratifiés. Un schéma de coulée à gradient dans laquelle un feuillet circule continuellement à travers le moule pendant l'étape de coulée est représenté sur la figure II.5 (Marple B.R., 1997). D'autres configurations sont également proposées par (Marple B.R., 1996). L'élément commun est la présence de plusieurs réservoirs contenant des suspensions de matériaux et d'être jeté. La composition de la barbotine introduite dans le moule est commandée pour correspondre à la composition souhaitée des piles étant déposé. Le glissement est diffusé en continu à travers le moule, et les suspensions des réservoirs sont ajoutées par des pompes de flux à des débits contrôlés par l'ordinateur. Le

mélange des suspensions est amélioré par l'utilisation des mélangeurs fixes, en forme de spirale pour créer une turbulence pendant l'écoulement à travers les tubes d'alimentation.

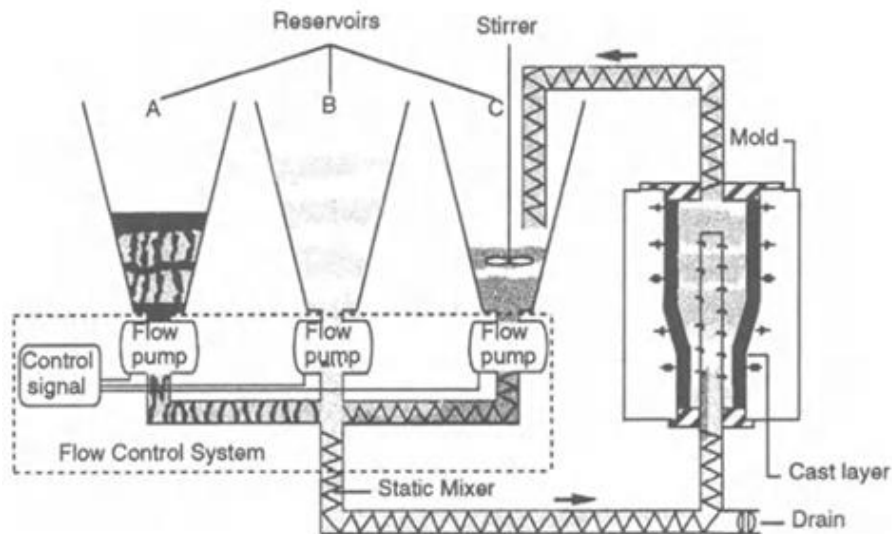


Fig. II. 5 Schéma du processus de production de matériaux gradués par coulage (Marple B.R., 1997).

#### II.4.2. Coulage en bande (Tape casting)

La méthode de coulage en bande (Tape casting) est favorisée, du fait de faire coller facilement de grands nombres de feuilles minces d'une épaisseur uniforme entre eux. D'une manière générale, ce procédé a été effectué dans un système non aqueux (Takemura M., 1990; Kawasaki A., 1990).

Le processus de coulage en bande a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM  $Al_2O_3$ -TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composants en céramique (Zeng Y.P.et al., 2000).

#### II.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple, un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec des compositions change dans la matrice compacté (Atarashiya K.et al., 1993) (Leushake U.et al., 1999). Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus

de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm<sup>2</sup>) en raison des limites des forces de compaction. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces sur des systèmes à gradient de propriétés (Kieback B.et al., 2003).

#### II.4.4. Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant (Zhang J.et al., 1998), ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg<sub>2</sub>Si, (Zhang J.et al., 1998)) et une densité plus élevée (Al<sub>3</sub>Ti, (Watanabe Y.et al., 1997)) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou extérieure du tube.

#### II.4.5. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieur à 100 µm, environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des tronçons solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé (Watremetz B., 2006).

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques de cette méthode sont l'isolation thermique et électrique, la résistance à l'usure et à la corrosion.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative (Omori M.et al., 1998). (Ichikawa K., 2000) a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique



transporteur gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est montrée par la figure II.6.

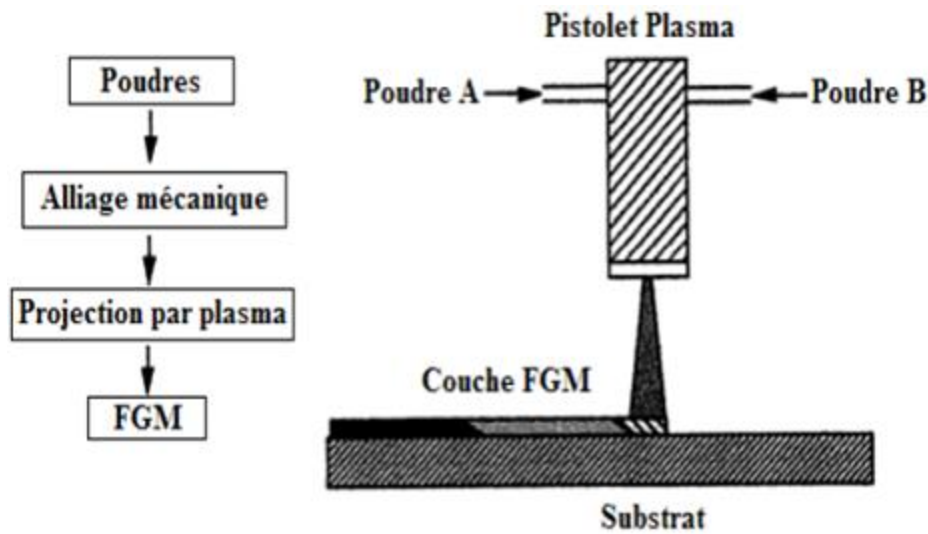


Fig. II. 6 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).

(La composition est graduée dans la direction plane).

#### II.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie nécessaire pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les avantages de PVD, les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie considérablement plus longue. L'équipement utilisé par PVD pour déposer les revêtements d'isolation thermiques, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. (Miyamoto Y.et al., 1999).

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source (Miyamoto Y.et al., 1999). Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.



Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à des environnements oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone y triée  $ZrO_2$ , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique (Mévrel R., 2009).

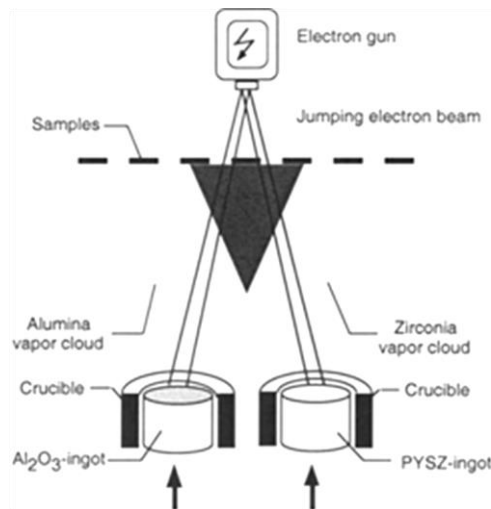


Fig. II. 7 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).

#### II.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), figure II.8, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma (Miyamoto Y.et al., 1999).

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces. Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz ( $CH_4$ - $SiCl_4$ - $H_2$ ) sont employés aux températures de dépôt entre 1400°C et 1500°C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

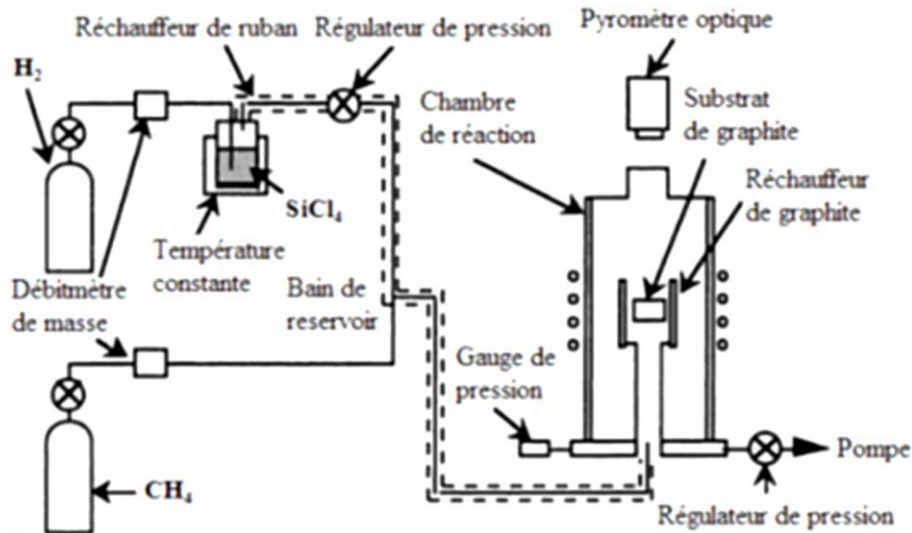


Fig. II. 8 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y. et al., 1999).

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces solide par chauffage d'une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite FGM composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi M. et al., 1990). Ce procédé peut être généralement appliqué pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki M. et al., 1991) Ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM PSZ/Mo. La figure II.9.

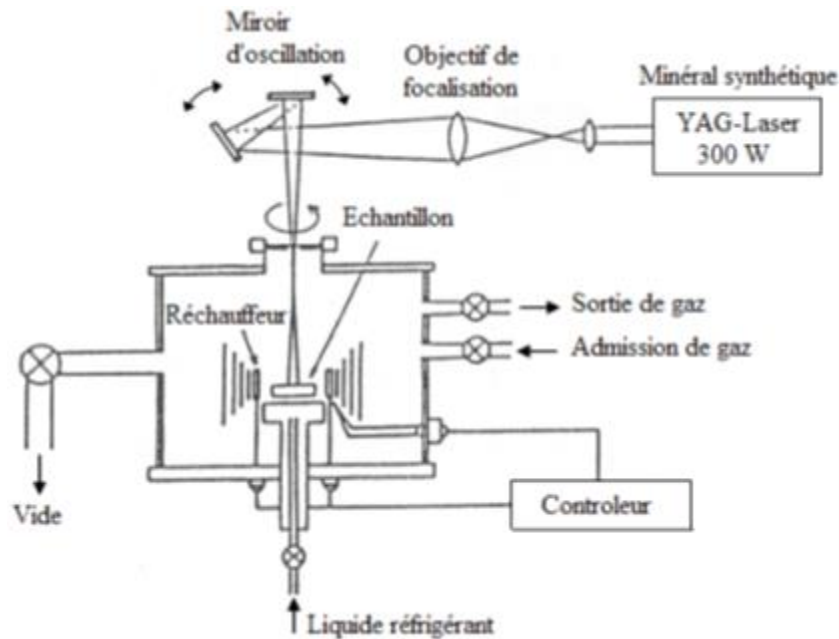


Fig. II. 9 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M. et al., 1991).

#### II.4.8. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'une des électrodes (Aldo R. et al., 2002). EPD permet la conception des matériaux FG en forme de plaque binaire en déposant une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$ , et le céramique-métal,  $WC/Co$  puisque la composition des couches est déterminée par la suite de la suspension au moment du dépôt, figure II.10.

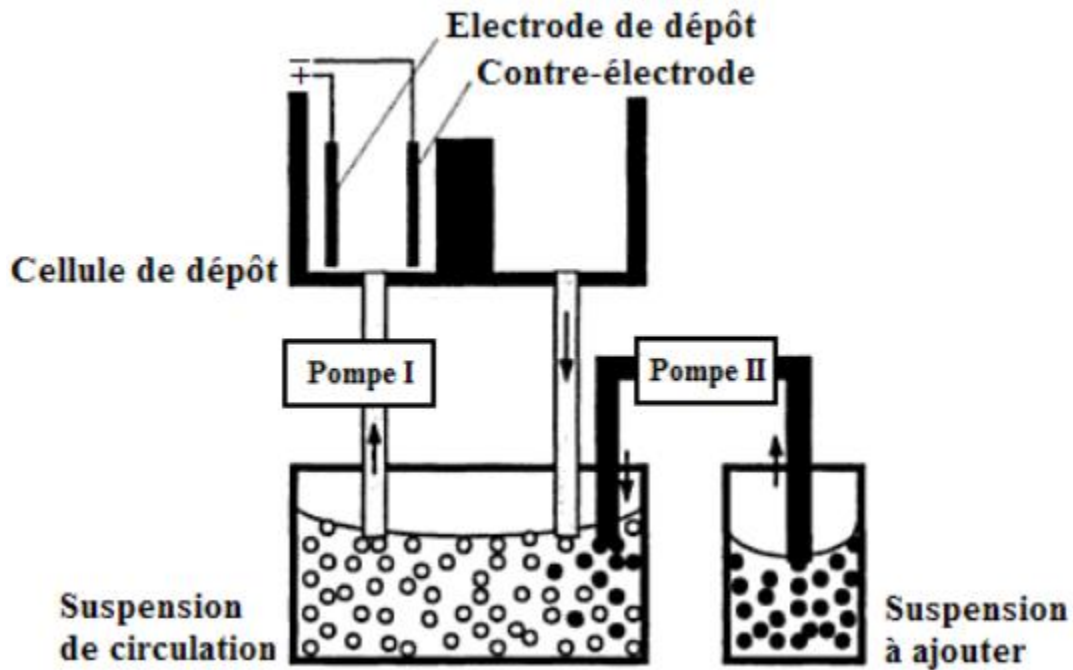


Fig. II. 10 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R. et al., 2002).

## II.5. Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés FGM consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure (HOUARI Mohammed S.A., 2011; BENATTA Mohamed A., 2011; KACI A., 2012).

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées  $x$  et  $y$  ; tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire au plan moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $K$ , la masse volumique  $\rho$  ou même le coefficient de Poisson  $\nu$ ,

la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E.et al., 2009), sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

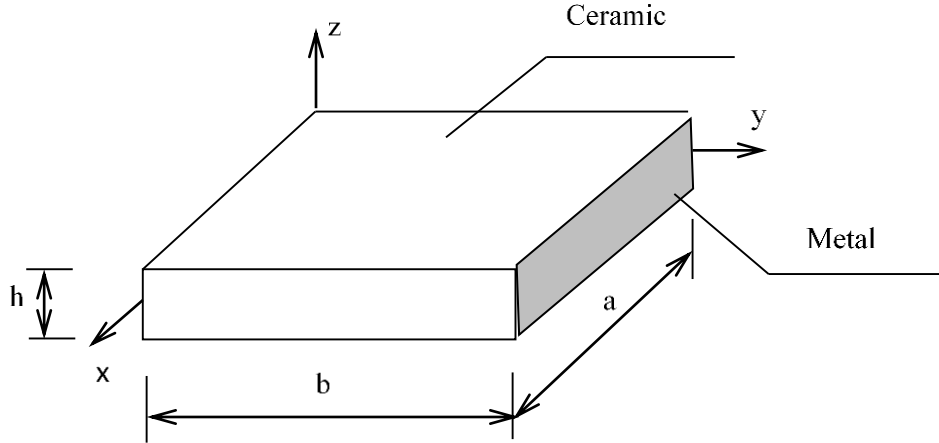


Fig. II. 11 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG.

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées  $x$  et  $y$  ; tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire au plan moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $K$ , la masse volumique  $\rho$  ou même le coefficient de Poisson  $\nu$ , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E.et al., 2009), sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ). Les propriétés de la plaque FGM changent dans la direction de l'épaisseur suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou avec une fonction sigmoïdes (S-FGM).

### II.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique d'une plaque P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0 \quad (\text{II.1})$$

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (\text{II.2})$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c) \quad (\text{II.3})$$

où  $k$  est le paramètre du matériel qui décrit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur  $h$ . En utilisant la loi de mélange, les propriétés des matériaux tels que le module d'élasticité  $E$  et de dilatation thermique  $\alpha$  sont supposés être fonction des matériaux constitutifs, figure II.12.

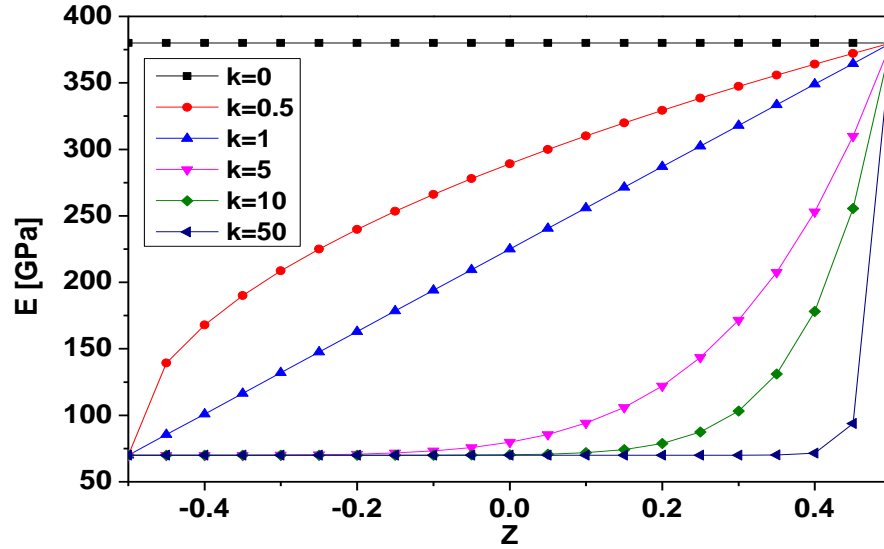


Fig. II. 12 Variation de module de Young  $E$  en fonction de  $k$  dans une plaque P-FGM.

### II.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple au composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais changent rapidement.

Par conséquent, Chung et Chi définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces (Chi Shyang-ho., 2003). Les deux fonctions sont définis par :

$$\begin{aligned} V_f^1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

En utilisant la loi de mélange, la propriété  $S$  de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$E(z) = \begin{cases} V_f^1(z)E_c + (1 - V_f^1(z))E_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)E_c + (1 - V_f^2(z))E_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} V_f^1(z)\alpha_c + (1 - V_f^1(z))\alpha_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)\alpha_c + (1 - V_f^2(z))\alpha_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où les indices  $\alpha_c$  et  $\alpha_m$  désignent respectivement la propriété de la céramique et le métal.

La figure II.13, montre que la variation du module de Young selon l'équation (II.5) a des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée Plaque S-FGM.

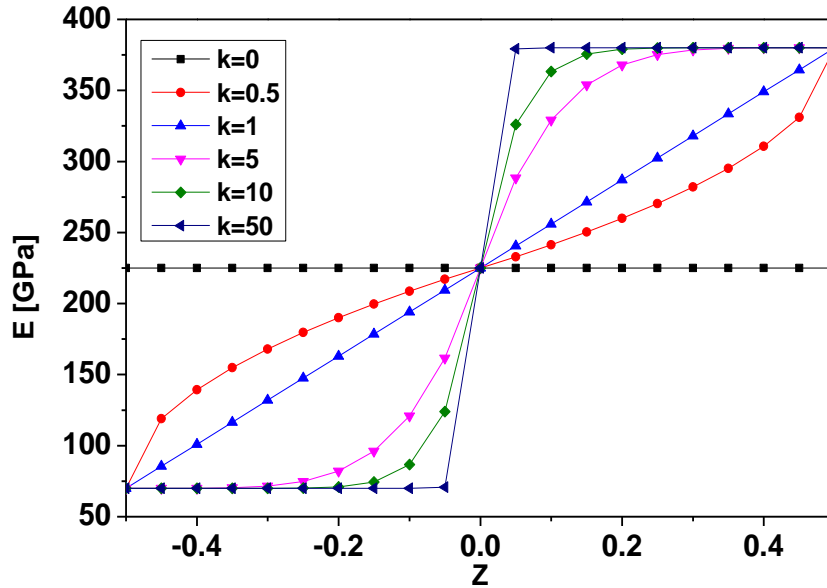


Fig. II. 13 Variation de module de Young  $E$  en fonction de  $k$  dans une plaque S-FGM.

### II.5.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale F., 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{II.7})$$

$$\alpha(z) = \alpha_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{II.8})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \text{ ou } B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad (\text{II.8 bis})$$

Selon la propriété du matériau cherchée.

La figure II.14, représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

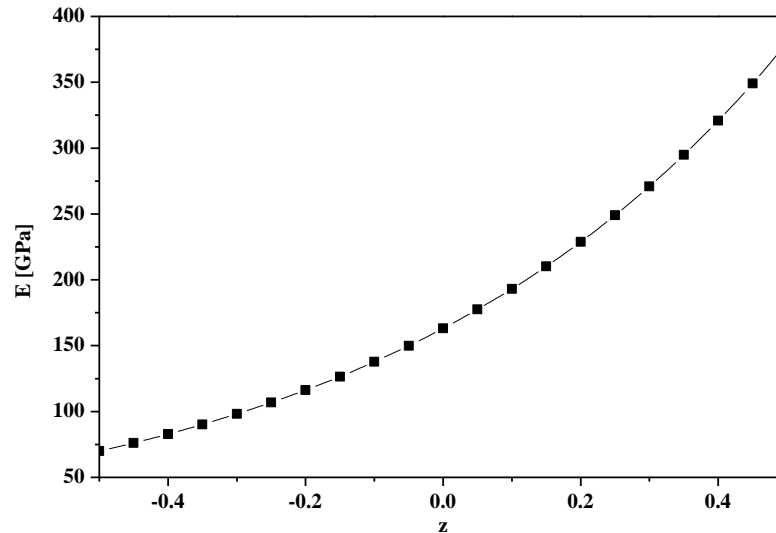


Fig. II. 14 Variation de module de Young  $E$  dans une plaque E-FGM.

## II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes unissent à la fois une rigidité, une résistance mécanique et thermique, une ténacité élevée et une grande légèreté, qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.



## **Chapitre III : Généralités Sur Les Théories Des Plaques FGM**

## Chapitre III : Généralités sur les Théories des Plaques FGM

### III.1. Introduction

De tous les temps, un des objectifs prioritaires dans la conception des structures a été de concevoir des structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. De nos jours, l'existence de matériaux performants et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de bien remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures minces et élancées pour lesquelles la stabilité peut devenir un problème primordial (BAGUET S., 2001).

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations.

Pour mieux connaître, le comportement statique et dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques composite qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, une caisse de voiture, une aile d'avion, parois d'une centrale nucléaire, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques minces, modérées et épaisses. Afin de résoudre les problèmes des structures en plaques FGM, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations ;
- Et les équations de compatibilité.

Dans ce chapitre nous allons présenter les principales théories des plaques utilisées dans la littérature pour étudier le comportement des plaques en matériau à gradient fonctionnel FGM.

### **III.2. Définition des plaques**

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (plan  $xy$ ) et par une épaisseur, notée  $h(x, y)$ , petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur, suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques.

Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique régnant le comportement :

- a) Les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée ;
- b) Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- c) plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

### **III.3. Historique des plaques**

Du point de vue historique, c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique CPT ou théorie de Love-Kirchhoff (Love A. E. H., 1888). La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, théorie des déformations du premier ordre, a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh 1877), (Timoshenko S., 1921), (Reissner E., 1945) et (Uflyand Y.S., 1948) (Mindlin R. D., 1951), cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exactes,  $K = \sqrt{5/6}$ . Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle

(théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque (BACHIR BOUIADJRA R., 2015).

On compte plusieurs centaines d'articles relatifs au sujet des plaques et coques, certains présentant l'état de l'art, et d'autres précisant des problèmes de stabilité qui intéressent les ingénieurs constructeurs. Permis ces articles, on peut citer ceux de (Timoshenko S., 1959), (Reddy J.N., 1997) (Reddy .J .N, 2004).

### III.4. Les modèles analytiques des plaques FGM

Depuis longtemps de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques FGM à partir de cinématiques où champs de contraintes plus raffinés. Nous présentons, dans ce qui suit, les principaux modèles.

#### III.4.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie classique des plaques CPT (Classical Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff.

Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, donc on parle d'une plaque mince.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, d'où :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen.
- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du plan neutre
- Une section droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, figure III.1, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).

- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ).

Basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où  $u_0, v_0, w_0$  les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).

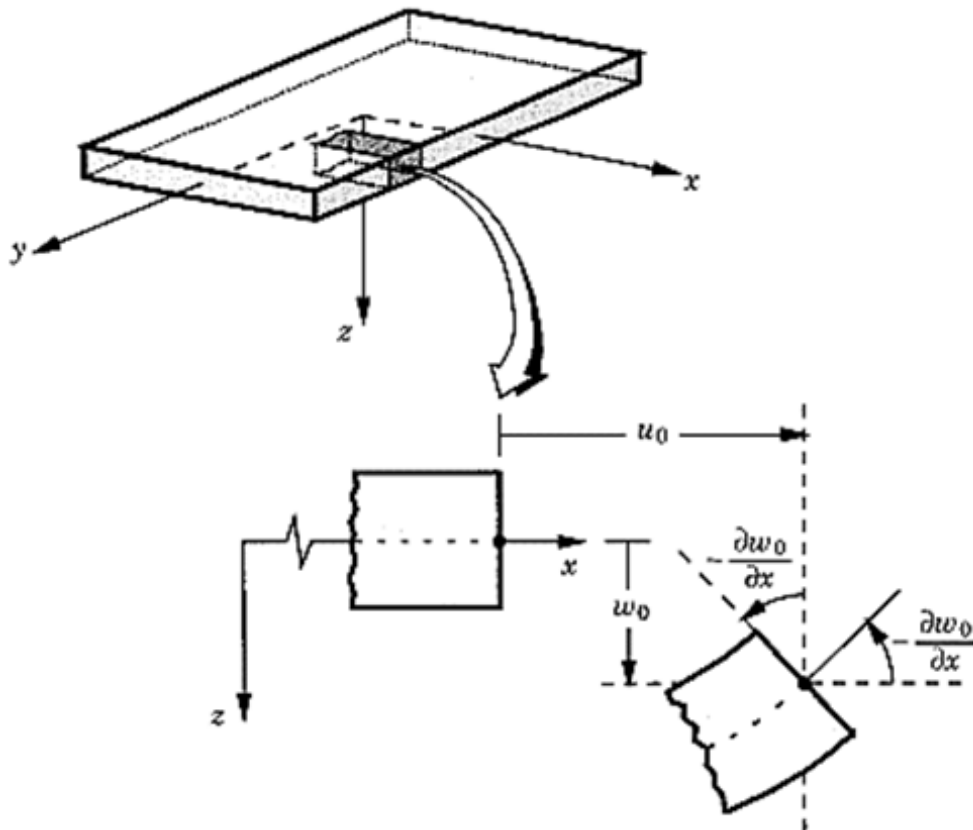


Fig. III. 1 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff (Reddy .J .N, 2004).

Les résultats obtenus par cette théorie sont imprécis pour les plaques épaisses, car ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse.

### III.4.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (First-Order Shear Deformation Plate Theory) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de Reissner-Mindlin, d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale ( $\sigma_z$ ) est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur  $K$  de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement (figure III.2) est exprimé sous la forme (Mindlin R. D., 1951).

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \Phi_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \Phi_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{III.2}$$

Où :

$u_0, v_0, w_0$  les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ), et  $\Phi_x, \Phi_y$  les rotations autour des axes  $y, x$ , respectivement.

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, les déformations transversales sont constantes en  $z$ , Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans

les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney J.M., 1973).

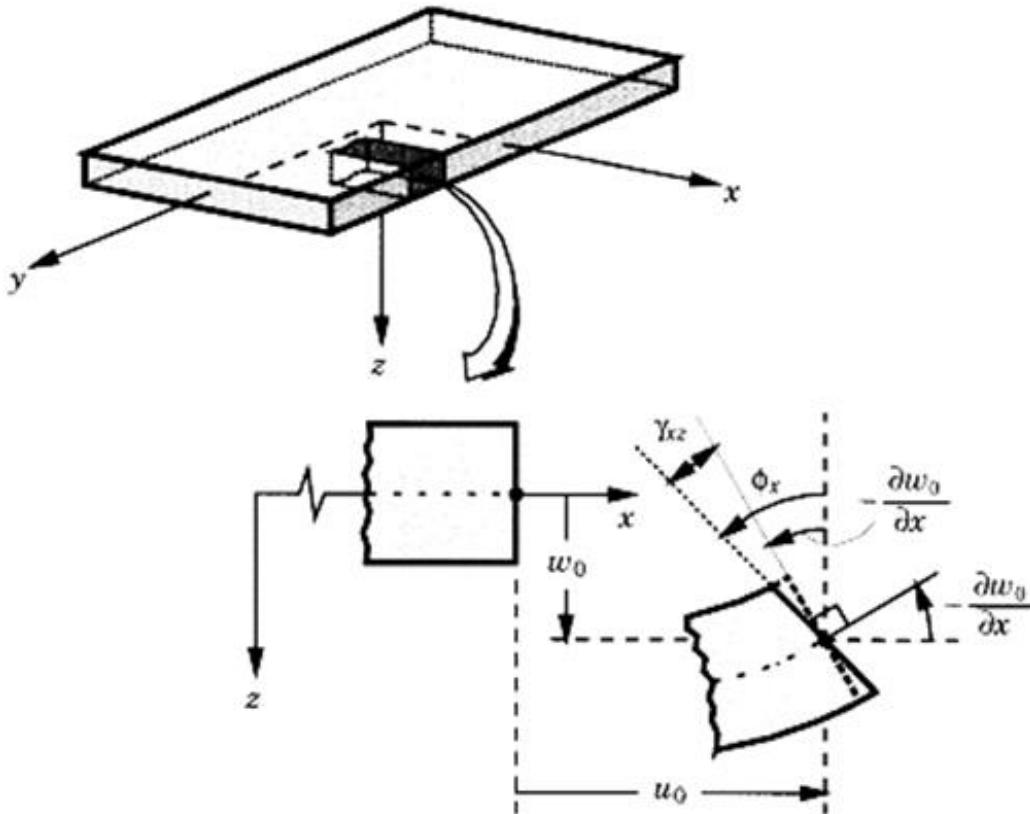


Fig. III. 2 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin (Reddy .J .N, 2004).

Les résultats obtenus par cette théorie dépendent essentiellement du choix empirique des coefficients correcteurs, donc l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

#### III.4.3. Les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Plusieurs recherches ont été proposées dans le contexte d'analyse des plaques épaisses, pour franchir les limites de la théorie classique et du premier ordre, on utilise la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé ou supérieur.

Le concept des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé est basé sur une distribution non linéaire de champ de déplacement dans l'épaisseur, figure III.3, donc on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nombreuses auteurs proposent des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on peut citer (Hildebrand F.B., 1949) ; (Naghdi P. M., 1957) ; (Reissner E., 1975) ; (Reddy J.N., 1984) ; (Kant T., 2002) ; (Liberscu L., 1967) ; (Whitney J.M., 1973) ; (Touratier M., 1991) ; (Nguyen., 2004).

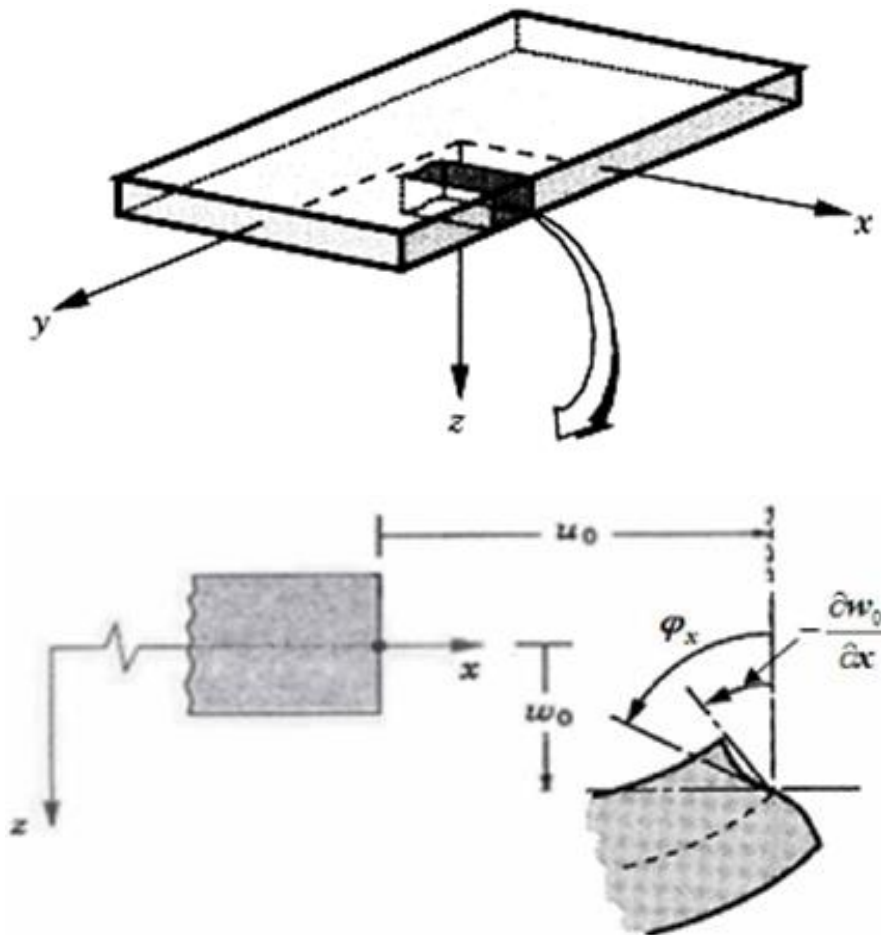


Fig. III. 3 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé (Reddy .J .N, 2004).

Nous avons introduit ici quelques modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Le champ de déplacement généralement s'écrit comme suit :



$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.3}$$

Où :

$u_0, v_0$  et  $w_0$  sont les composantes du champ de déplacement en membrane du plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).

$\varphi_x, \varphi_y$  sont les rotations autour des axes  $y, x$ , respectivement,  $\left( \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$ .

$\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par la supposition suivante ( $\Psi(z) = 0$ ), alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par ( $\Psi(z) = z$ ).

Une approche proposée par Ambartsumyan (1969) pour écrire le champ des déplacements de la théorie de déformation d'ordre supérieur est donnée comme suit :

$$\Psi(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)
 \tag{III.4}$$

Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé par l'utilisation d'une formule de forme polynomiale donné par Kaczkowski d'après (Reissner E., 1945) est :

$$\Psi(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4 z^2}{3 h^2} \right)
 \tag{III.5}$$

Le champ des déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) de (Reddy J.N., 1987) (Reddy J.N., 1999) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \quad III.6$$

Dans ce modèle le champ de déplacement membranaire est cubique. Le présent modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur de la plaque, les conditions aux limites sur les surfaces libres supérieur et inférieur sont satisfaites.

Daouadji et al (2012) proposent une distribution hyperbolique de champ de déplacement de la théorie d'ordre élevé (Daouadji T.H., 2012), la fonction permet de déterminer la distribution transversale des déformations et des contraintes le long de l'épaisseur, et donner comme suit :

$$\Psi(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \quad III.7$$

La comparaison de cette théorie avec celles de la littérature présente une bonne approximation surtout par rapport à ceux d'ordre élevé.

Une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite par Touratier (1991) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque (Touratier M., 1991).

Le modèle sinus (SSDT) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse de cet modèle s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{z}{h} \right) \quad III.8$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles sinusoïdales prennent une forme cosinusoïdale dans l'épaisseur. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy, (Reddy J.N., 1999).

Tounsi A. et ces collaborant (Tounsi A., 2013) ; (Benachour A., 2011) ; (Bourada M., 2012) ; (Zidi M., 2014) et (Khalfi Y., 2014) proposent une théorie raffiner à quatre variables pour analyser la flexion thermoélastique des plaques sandwich FGM, la vibration libre, le flambement thermique, le flambement thermique d'une plaques solaire en FGM reposante sur une fondation élastiques et la flexion des plaques en matériau à gradient de propriété FGM sous des sollicitations hydro-thermo-mécaniques. La fonction utilisée dans ces travaux est donnée comme suit :

$$\Psi(z) = z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad III.9$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développée par Ait Atmane et al (2010) est obtenue en prenant (Ait Atmane H., 2010) :

$$\Psi(z) = z \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad III.10$$

Cette théorie est développée pour étudier la vibration libre des plaques FG reposantes sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak.

Dans les figures III.4 et III.5, on présente la variation de la fonction de forme  $\Psi(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur, et la variation de la dérivée de la fonction de forme  $\Psi'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur de la plaque, on observe que les deux approches de Ambartsumyan et celle de Kaczkowski sont notablement loin des autres fonctions de forme, mais elles sont serves comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse en 3D.

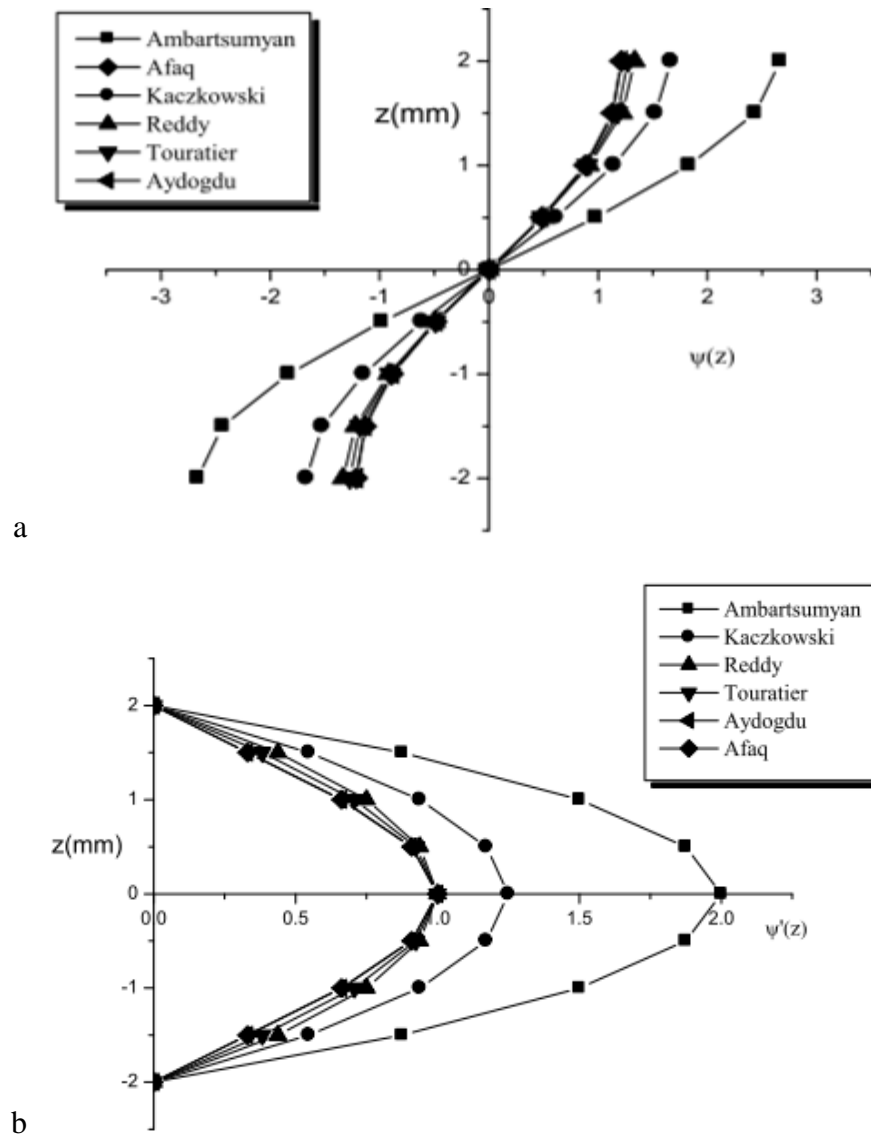


Fig. III. 4 Comparaison entre différentes théories ; a) Variation de  $\Psi(z)$  des différents modèles ; b) Variation de  $\Psi'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur. (ATTIA A., 2015).

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient posé lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .), mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

### III.5. Conclusion

Dans cette partie, nous avons donné un aperçu général sur les différentes théories des plaques à savoir la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (FSDT) qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse, pour avoir des résultats précis par cette théorie le plus souvent un coefficient de correction est utilisé.

Par la suite, on a présenté quelques approches utilisées pour développer le champ de déplacement en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse du comportement des plaques en matériau à gradient fonctionnelle FGM.

Dans ce qui suit, on utilise une nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique pour analyser la flexion et la vibration des plaques FGM reposants sur une fondation élastique.

**Chapitre IV : Formulation Théorique de  
la Flexion et la Vibration Libre Des  
Plaques FGM par 3D HSDT**

## **Chapitre IV : Formulation Théorique de la Flexion et la Vibration Libre Des Plaques FGM par 3D HSDT**

### **IV.1. Introduction**

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse de la flexion et la vibration libre d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés (FGM), reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, en utilisant une théorie hyperbolique quasi 3D de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), simple et efficace. On considère que les propriétés matérielles sont variées dans la direction de l'épaisseur de la plaque selon une simple loi de puissance, en se basant sur les relations contrainte-déformation et les conditions aux limites, l'équation d'équilibre est obtenue par l'utilisation du principe de Hamilton.

### **IV.2. Hypothèses de base**

Le champ de déplacement de la présente formulation est obtenu sur la base des hypothèses suivantes :

1. Le déplacement transversal est composé de trois éléments à savoir : la flexion, le cisaillement et les parties d'étirement des pièces;
2. Le déplacement dans le plan est décomposé en extension, flexion et cisaillement;
3. Les déplacements de flexion dans le plan sont similaires à celles données par la théorie classique des plaques (CPT);
4. les déplacements de cisaillement dans le plan donnent lieu à des variations hyperboliques des déformations de cisaillement et donc à des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement s'annulent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Sur la base de ces hypothèses, les relations de champ des déplacements suivants peuvent être obtenues :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z)\varphi(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{IV- 1}$$

Où :

$u_0$  et  $v_0$  désignent les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement d'un point sur le plan moyen de la plaque ;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal ;

$\varphi$  est le déplacement additionnel qui tient compte de l'effet du contrainte normal.

Les fonctions de forme  $f(z)$  et  $g(z)$  sont données comme suit :

$$f(z) = \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right)
 \tag{IV- 2}$$

Et

$$g(z) = 1 - f'(z)
 \tag{IV- 3}$$

Les déformations différentes de zéro associées au champ de déplacement dans l'équation (IV-1) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0
 \tag{IV- 4}$$

Où

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz}
 \tag{IV- 5}$$



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad IV- 6$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix}, \varepsilon_z^0 = \varphi$$

### IV.3. Équations de base

Dans notre étude, on considère les plaques à gradient fonctionnel FGM en céramique-métal reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak, figure IV.1. Le module de Young  $E$  et la masse volumique  $\rho$  de ces plaques sont présumés varier selon une distribution de puissance en termes de fractions volumiques des constituants comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^k \quad IV- 7a$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^k \quad IV- 7b$$

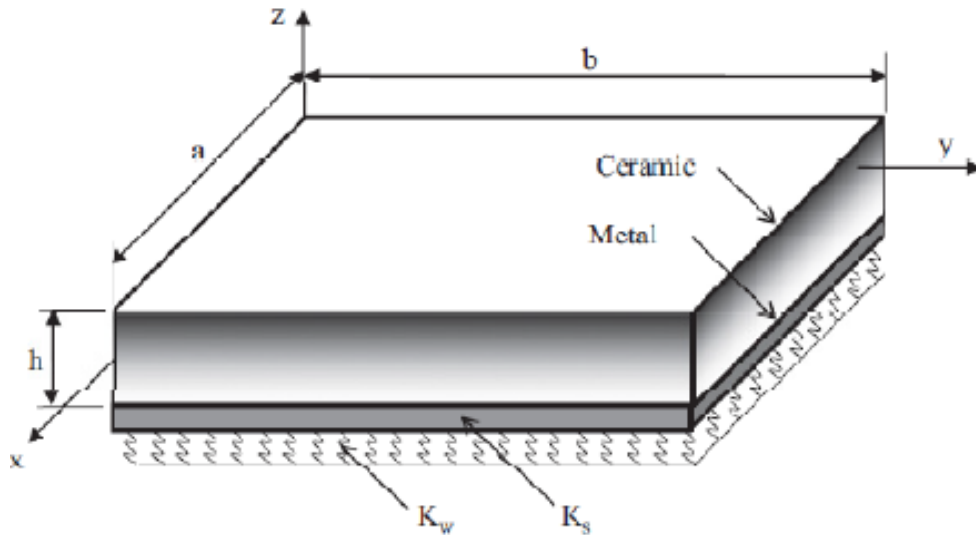


Fig. IV. 1 La géométrie et les coordonnées de la plaque FG considérée reposant sur une base élastique

Où les indices m et c indiquent les constituants métalliques et céramiques, respectivement ; et k est l'indice de loi de puissance. La valeur de k égal à zéro représente une plaque entièrement céramique, Où k aussi infini, il indique une plaque entièrement métallique.

Puisque les effets de la variation du coefficient de Poisson  $\nu$  sur la réponse des plaques FG sont très petites (Yang J.et al., 2005; Kitipornchai S.et al., 2006), Il est supposé être constant pour plus de commodité.

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FG peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{IV- 8}$$

Où :

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$  sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation.

Le calcul des constantes élastiques  $C_{ij}$  dépend de l'hypothèse de  $\varepsilon_z$  que nous considérons.

Si  $\varepsilon_z = 0$  les constantes élastiques de la contrainte planes réduites  $C_{ij}$  Sont définies comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12} = \nu C_{11} \quad \text{IV- 9a}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \text{IV- 9b}$$

SI  $\varepsilon_z \neq 0$  (Étirement d'épaisseur), les constantes élastiques  $C_{ij}$  sont tridimensionnelles, données par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad \text{IV- 10a}$$

Et

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad IV-10b$$

Où :

$$\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{ et } \mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \text{ sont les coefficients de Lamé.}$$

Considérant les composantes de déplacement de la présente théorie simple quasi-3D dans Eq (IV-1) et en utilisant le principe de Hamilton, Les équations de mouvement des plaques FG reposant sur une fondation élastique peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_{u_0} : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta_{v_0} : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ \delta_{w_b} : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} K_w w - K_w \nabla^2 w &= I_0 (\ddot{w}_b - \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\phi} \\ \delta_{w_s} : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + K_w w - K_s \nabla^2 w &= I_0 (\ddot{w}_b - \ddot{w}_s) \\ &\quad + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\phi} \\ \delta_{\phi} : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_1^s (\ddot{w}_b - \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\phi} \end{aligned} \quad IV-11$$

Dans les équations ci-dessus, des points au-dessus de chaque paramètre indiquent une dérivée partielle par rapport au temps. Les paramètres  $K_w$  et  $K_s$  sont les paramètres de Winkler et Pasternak pour la fondation élastique. De même, les résultantes des contraintes ( $N$ ,  $M^b$ ,  $M^s$ ,  $S^s$  et  $N_z$ ) Et les inerties de masse ( $I_0$ ,  $I_1$ ,  $J_1$ ,  $I_2$ ,  $J_2$ ,  $K_2$ ) sont les suivants:

$$(N_i, M_i^b, S_i^b) \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy), S_i^s \int_{-h/2}^{h/2} \tau_i g(z) dz, (i = xz, yz) \quad IV-12$$

$$\text{et } N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz ,$$

$$(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, g, z^2, zf, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad \text{IV- 13}$$

En remplaçant les équations (IV-12) et (IV-13) en (IV-11) et en utilisant les relations de contrainte-déformation, les équations de mouvement sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 + B_{11} d_{111} w_b + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s + L d_1 \varphi = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_b \\ - J_1 d_1 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad \text{IV- 14a}$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b \\ - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s + L d_2 \varphi \\ = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_b - J_1 d_2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad \text{IV- 14b}$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 \\ - D_{11} d_{111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s - L^a (d_{11} \varphi + d_{22} \varphi) \\ + K_w (w_b + w_s) - K_s \nabla^2 (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) \\ - I_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_b) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) + J_1^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad \text{IV- 14c}$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s d_{1111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{1222} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 \\ - D_{11}^s d_{1111} w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b \\ - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s - H_{22}^s d_{2222} w_s \\ + A_{44}^s d_{11} w_s + A_{55}^s d_{22} w_s + R (d_{11} \varphi + d_{22} \varphi) + A_{44}^s d_{11} \varphi + A_{55}^s d_{22} \varphi \\ + K_w (w_b + w_s) - K_s \nabla^2 (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) \\ - J_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_b) - K_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) + J_1^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad \text{IV- 14d}$$

$$\begin{aligned} L (d_{11} u_0 + d_{22} v_0) - L^a (d_{11} w_b + d_{22} w_b) + (R - A_{44}^s) d_{11} w_s + (R - A_{55}^s) d_{22} w_s + R^a \varphi \\ - A_{44}^s d_{11} \varphi - A_{55}^s d_{22} \varphi = J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad \text{IV- 14e}$$

Où :  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijkl} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2) \quad IV- 15$$

Les coefficients de rigidité utilisés dans les équations (IV-14) sont définis comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{pmatrix} = \int_{h/2}^{h/2} \lambda(z) (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{pmatrix} \frac{1-v}{2} \\ v \\ 1 \\ \frac{1-2v}{2} \end{pmatrix} dz \quad IV- 16a$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S) \quad IV- 16b$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \int_{h/2}^{h/2} \mu(z) [g(z)] dz, \quad IV- 16c$$

#### IV.4. Solution forme fermée pour des plaques simplement appuyées

Basé sur la procédure de Navier, les extensions suivantes de déplacements généralisés sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites simplement appuyées.

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{pmatrix} \quad IV- 17$$

Où :

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$  et  $\Phi_{mn}$  les paramètres inconnus doivent être déterminés,  $\omega$  est la fréquence propre associée à  $(m, n)$ th Mode propre, et  $\lambda = m \pi / a$  et  $\mu = n \pi / b$ .

En remplaçant l'équation (IV-17) dans les équations (IV-14), les solutions analytiques peuvent être obtenues par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad IV- 18$$

Dans lequel :

$$a_{11} = -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2)$$

$$a_{12} = -\lambda\mu(A_{11} + A_{66})$$

$$a_{13} = \lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2]$$

$$a_{14} = \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2]$$

$$a_{15} = L\lambda$$

$$a_{22} = -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2)$$

$$a_{23} = \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{12}\mu^2]$$

$$a_{24} = \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{11}^s\mu^2]$$

$$a_{25} = L\mu$$

$$a_{33} = -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + K_w + J_1\lambda^2 + J_2\mu^2)$$

$$a_{34} = -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + K_w + J_1\lambda^2 + J_2\mu^2)$$

$$a_{35} = L^a(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$a_{44} = -(H_{22}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + K_w + J_1\lambda^2 + J_2\mu^2)$$

$$a_{45} = -(A_{11}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2))$$

$$a_{55} = -(H_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R^a)$$

$$m_{11} = m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1, m_{24} = \mu J_1,$$

$$m_{33} = -(I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2))$$

$$m_{34} = -(I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2)), m_{44} = -(I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2)), m_{35} = m_{45} = -J_1^s, m_{55} = -K_2^s$$

#### **IV.5. Conclusion**

Le comportement en flexion et en vibration libre des plaques en matériaux à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak a été analysé en utilisant une nouvelle théorie hyperbolique quasi 3D de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), simple et efficace, les équations d'équilibre sont obtenus en se basant sur les relations contrainte-déformation et les conditions aux limites et résolus par l'utilisation du principe de Hamilton.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories.

# **Chapitre V : Validation Et Discussion Des Résultats**



## Chapitre V : Validation Et Discussion Des Résultats

### V.1. Introduction

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie dans la prédiction des réponses de flexion et de vibration libre des plaques isotropes et en matériau à gradient fonctionnelle simplement appuyées sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak.

### V.2. Résultats numériques

Les résultats numériques sont présentés en termes de contraintes non dimensionnelles et de déflexion. Les différents paramètres non dimensionnels utilisés sont :

$$\hat{w} = \frac{100E}{q_0 h S^4} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \hat{\sigma}_x = \frac{1}{q_0 S^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \hat{\sigma}_y = \frac{1}{q_0 S^2} \sigma_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right), \hat{\tau}_{xy} = \frac{1}{q_0 S^2} \tau_{xy} (0, 0, \bar{z}),$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{q_0 S} \tau_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, \bar{z} \right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 S} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right). S = a/h, \bar{z} = z/h$$

$$\bar{u}_x = \frac{100D}{q_0 a^4} u_x \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right), \bar{u}_z = \frac{100D}{q_0 a^4} u_z \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right), \bar{\sigma}_x = -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right),$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{q_0} \sigma_z \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy} \left( 0, 0, -\frac{h}{2} \right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{h}{2}, 0 \right), k_w = \frac{K_w a^4}{h^3},$$

$$k_s = \frac{K_s a^4}{h^3 \nu} = \frac{K_2 b^4}{h^3 \nu}, D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2).$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{1}{10 q_0} \tau_{xy} \left( 0, 0, -\frac{h}{3} \right), \tau_{xz}^* = \frac{1}{10 q_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega a^2}{\pi^2} \sqrt{\rho_c h / D_c}, D_c = E_c h^3 / 12 (1 - \nu^2)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}, \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

Tableau V. 1 Les Propriétés des matériaux de la plaque FGM

Propriétés	Métal	Céramique	
	AL	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ZrO <sub>2</sub>
$E$ (GPa)	66.2	380	117.0
$\nu$	1/3	1/3	1/3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2702	3800	

### V.2.1. Analyse de flexion

Pour l'analyse de flexion, On considère une plaque soumise à une charge uniformément répartie (UDL) et à une charge sinusoïdale.

Tableau V. 2 Effet de la contrainte normale  $\varepsilon_z$  sur les contraintes sans dimension et le déplacement transversal pour la plaque carrée isotrope ( $a/h = 10$ ) soumise à une UDL

Théorie	$\hat{w}$ (a/2, b/2,0)	$\hat{\sigma}_x$ (h/2)	$\hat{\sigma}_y$ (h/2)	$\hat{\tau}_{xy}$ (h/2)	$\bar{\tau}_{xy}(0,b/2,0)$	$\bar{\tau}_{yz}(b/2, 0,0)$
Présent $\varepsilon_z \neq 0$	4.625	0.302	0.302	0.197	0.481	0.502
Shimpi <i>et al.</i> (2003) $\varepsilon_z \neq 0$	4.625	0.302	0.302	0.195	0.505	0.505
Exact 3D (Srinivas <i>et al.</i> 1970a)	4.639	0.302	0.302	/	0.488	/

Tableau V. 3 Comparaison de la flèche non dimensionnelle  $\frac{D10^3 w(0.5a,0.5b,z=0)}{qa^4}$  de la plaque carrée mince isotrope simplement supportée sous charge uniformément répartie ( $a/h = 100$ )

$k_w$	$k_s$	$D10^3 w(0.5a,0.5b,z=0)/qa^4$			
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	(Benyoucef S . <i>et al.</i> , (2010))	3D (Huang. <i>et al.</i> , 2008)	(Lam K.Y. <i>et al.</i> , 2000)
1	1	3.8490	3.8550	3.8546	3.853
	3 <sup>4</sup>	0.7628	0.7630	0.7630	0.763
	5 <sup>4</sup>	0.1153	0.1153	0.1153	0.115
3 <sup>4</sup>	1	3.2067	3.2108	3.2105	3.210
	3 <sup>4</sup>	0.7316	0.7317	0.7317	0.732
	5 <sup>4</sup>	0.1145	0.1145	0.1145	0.115
5 <sup>4</sup>	1	1.4759	1.4765	1.4765	1.476
	3 <sup>4</sup>	0.5703	0.5704	0.5704	0.570
	5 <sup>4</sup>	0.1095	0.1095	0.1095	0.109

Comme premier exemple, Les déformations et les contraintes sans dimension d'une plaque isotrope carrée soumise à une UDL sont comparées dans le tableau V.2 avec ceux donnés par les solutions quasi-3D de (Shimpi R.P.et al., 2003), et la solution exacte réalisée par (Srinivas S.et al., 1970a). On peut voir dans ce tableau que les résultats sont en accord étroit.

Le second exemple pour valider la présente méthode pour des plaques reposant sur une fondation élastique, les résultats pour les déformations sans dimension d'une plaque isotrope épaisse sont comparés aux résultats publiés précédemment. Le tableau V.3 présente les flèches centrales d'une plaque carrée uniformément chargée, homogène, simplement supportée sur une fondation Winkler-Pasternak. Les résultats sont comparés à ceux de (Benyoucef S .et al., (2010)), la solution 3D (Huang.et al., 2008) et (Lam K.Y.et al., 2000). On peut voir que les résultats concordent étroitement.

Dans le troisième exemple, nous présentons dans le tableau V.4 les flèches d'une plaque carrée uniformément chargée, homogène, simplement supportée sur une fondation Winkler. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par (Benyoucef S .et al., (2010)), (Lam K.Y.et al., 2000) utilisant les fonctions de Green et Kobayashi et Sonoda (1989) en utilisant la méthode de la série Levy. On peut conclure qu'il existe un bon accord entre les résultats.

Tableau V. 4 Comparaison de la flèche  $\frac{D10^3 w (0.5a,0.5b,z = 0)}{qa^4}$  d'une plaque carrée homogène simplement supportée uniformément chargée sur une fondation Winkler ( $a / h = 100$ )

$k_w$	$\frac{D10^3 w (0.5a, 0.5b, z = 0)}{qa^4}$			
	Présente $\varepsilon z \neq 0$	(Benyoucef S .et al., (2010))	3D (Huang.et al., 2008)	(Lam K.Y.et al., 2000)
1	4.0472	4.053	4.053	4.052
$3^4$	3.344	3.348	3.349	3.347
$5^4$	1.505	1.506	1.507	1.506

Tableau V. 5 Comparaison de la flèche  $w$  d'une plaque carrée homogène sous charge uniformément répartie reposant sur la base élastique de Winkler ( $a / h = 20$ )

$k_w$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	(Zenkour A.M., 2012)	(Buczowski R., 2001)
0	4.1026	4.1149	4.1197
1	4.0917	4.1039	4.1088
$3^4$	3.3747	3.3813	3.3855
$5^4$	1.5107	1.5094	1.5114
$10^4$	0.1110	0.1108	0.1096
$15^4$	0.0196	0.0196	0.0191

Le tableau V.5 présente des résultats similaires à ceux indiqués dans le tableau V.4, mais pour  $a/h = 20$ . Les résultats obtenus sont comparés à ceux prévus par (Zenkour A.M., 2012) et (Buczowski R., 2001) selon la méthode des éléments finis. Un excellent accord est obtenu entre les différents résultats pour toutes les valeurs du paramètre Winkler.

Les résultats numériques sont présentés dans les tableaux V.6 – V.7 et les figures de V.1 à V.4 pour les plaques FG en utilisant la théorie actuelle. Les propriétés des matériaux des plaques FG sont listées dans le tableau V.1.

Le tableau V.6 donne une comparaison du déplacement et de contrainte de la présente méthode avec ceux de (Thai H.T., 2011) et (Zenkour A.M., 2013) dans lesquels l'effet d'étirement de l'épaisseur est négligé ( $\varepsilon_z = 0$ ).

Les résultats sont donnés pour une plaque rectangulaire FGM Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> soumise à une charge uniformément répartie en termes d'indice de puissance  $k$  et de paramètres de fondation élastique. Les résultats présentés dans le tableau V-6 montrent que les résultats donnés par (Thai H.T., 2011) et (Zenkour A.M., 2013) surestiment les flèches et les contraintes, Et cela est attribuable à l'effet d'étirement d'épaisseur, qui est négligé dans les théories développées par ces références.

Tableau V. 6 Comparaison des déplacements et des contraintes de la plaque rectangulaire  $Al / Al_2O_3$  simplement soutenue sous charge uniformément répartie ( $a = 10h, b = 3a$ ).

$k$	$k_w$	$k_s$	Théorie	$\bar{u}_x$	$\bar{u}_z$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0.5	0	0	Thai and Choi (2011)	0.3491	1.9345	0.2337	0.0941	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.34919	1.9345	0.23372	0.09415	7.68354
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.33498	1.90215	0.23941	0.09007	7.56253
	100	0	Thai and Choi (2011)	0.3358	1.8590	0.2242	0.0916	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.33586	1.85907	0.22424	0.09167	7.42978
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.32246	1.82955	0.22989	0.08774	7.31675
	100	100	Thai and Choi (2011)	0.3012	1.6640	0.1999	0.0850	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.30131	1.66399	0.19989	0.08503	6.76069
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.28991	1.64138	0.20536	0.08151	6.66745
2	0	0	Thai and Choi (2011)	0.6564	3.2266	0.4395	0.1766	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.65655	3.22672	0.43961	0.17666	6.91072
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.60340	3.07560	0.44695	0.16202	6.79513
	100	0	Thai and Choi (2011)	0.6156	3.0218	0.4105	0.1690	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.61576	3.02190	0.41060	0.16906	6.53895
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.56771	2.88981	0.41881	0.15538	6.44548
	100	100	Thai and Choi (2011)	0.5186	2.5364	0.3423	0.1501	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.51872	2.53642	0.34233	0.15020	5.63882
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.48189	2.44460	0.35187	0.13875	5.59033
5	0	0	Thai and Choi (2011)	0.7802	3.8506	0.5223	0.2103	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.78046	3.85174	0.52237	0.21044	6.14557
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.72061	3.69376	0.53104	0.19389	6.03129
	100	0	Thai and Choi (2011)	0.7230	3.5620	0.4816	0.1996	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.72323	3.56296	0.48167	0.19975	5.75485
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.66999	3.42857	0.49132	0.18445	5.66241
	100	100	Thai and Choi (2011)	0.5922	2.9046	0.3897	0.1740	—
			Zenkour and Sobhy (2013)	0.59231	2.90518	0.38971	0.17410	4.84302
			Present $\varepsilon z \neq 0$	0.55294	2.81786	0.40060	0.16159	4.79288

Un autre exemple est présenté dans le tableau V.7 pour la plaque FGM sous charge sinusoïdale. Les résultats de la méthode sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée développée par (Bouderba B.et al., 2013), La théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques classique (CPT) et ceci pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  et des paramètres de fondation élastiques. On peut voir qu'un excellent accord est obtenu pour toutes les valeurs de l'indice de puissance  $k$  et des paramètres de fondation  $K_w$  and  $K_s$ . De plus, on peut montrer que la déformation et les contraintes diminuent avec l'existence des fondations élastiques.

Tableau V. 7 Effet de l'exposant de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur les efforts sans dimension et des contraintes d'une plaque rectangulaire FGM sous charge sinusoïdale. ( $a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$ )

$k$	$k_w$	$k_s$	Théorie	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\tau_{xy}^*$	$-\tau_{xz}^*$	
0	0	0	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.67669	0.44410	0.85538	-0.38933	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.68131	0.42424	0.86240	-0.39400	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.68135	0.42148	0.86459	-0.30558	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.65704	0.42148	0.86459	-	
	100	0	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.40481	0.26567	0.51170	-0.23290	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.40523	0.25233	0.51296	-0.23435	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.40525	0.25070	0.51426	-0.18175	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.39652	0.25437	0.52183	-	
	0	0	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.084133	0.055215	0.10635	-0.048406
				Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.083654	0.052093	0.10589	-0.048377
				FSDPT <sup>(a)</sup>	0.083655	0.051750	0.10615	-0.037518
				CPT <sup>(a)</sup>	0.083277	0.053420	0.10959	-
100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.077649	0.050960	0.098154	-0.044675		
		Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.077197	0.048071	0.097724	-0.044643		
		FSDPT <sup>(a)</sup>	0.077198	0.047754	0.097959	-0.034622		
		CPT <sup>(a)</sup>	0.076875	0.049316	0.101160	-		
0.5	100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.079180	0.048733	0.080257	-0.038219	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.078729	0.045788	0.081728	-0.038066	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.078732	0.045460	0.081870	-0.029835	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.078463	0.046927	0.084506	-	
1	100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.079761	0.047891	0.071203	-0.035252	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.079321	0.044892	0.073054	-0.035023	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.079322	0.044575	0.073208	-0.027163	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.079069	0.046036	0.075608	-	
2	100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.080200	0.047581	0.065302	-0.032442	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.079758	0.044595	0.067185	-0.032215	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.079753	0.044297	0.067395	-0.024345	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.079503	0.045808	0.069690	-	
5	100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.080628	0.048596	0.062746	-0.030046	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.080150	0.045736	0.064125	-0.029922	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.080141	0.045462	0.064399	-0.022053	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.079892	0.047100	0.066720	-	
$\infty$	100	100	Present $\varepsilon z \neq 0$	0.081721	0.030345	0.058449	-0.026603	
			Bouderba <i>et al.</i> (2013)	0.081190	0.050559	0.058148	-0.026565	
			FSDPT <sup>(a)</sup>	0.081191	0.050227	0.058294	-0.020603	
			CPT <sup>(a)</sup>	0.080989	0.051956	0.060300	-	

\* Valeur donnés par (Bouderba B. et al., 2013)

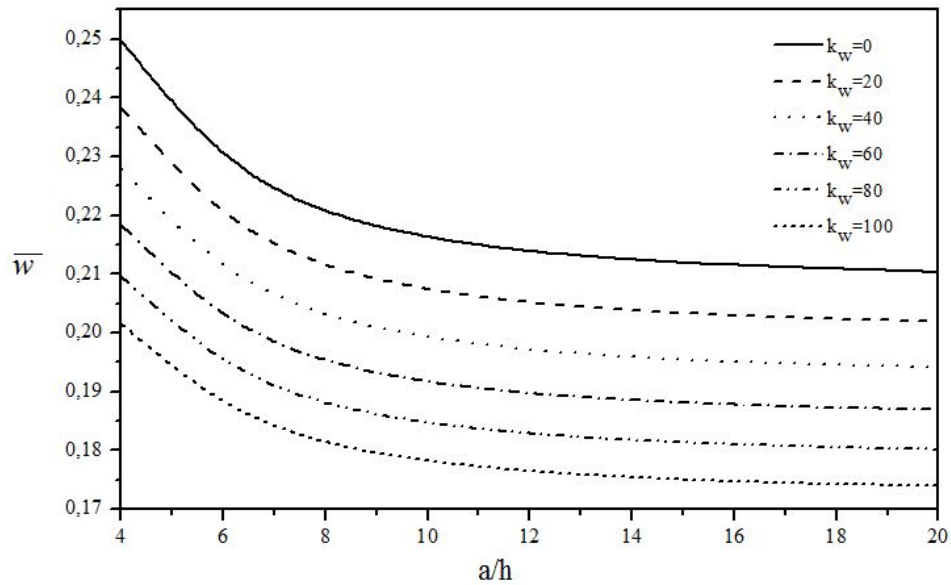


Fig. V. 1 Effet du paramètre de module Winkler sur la flèche centrale sans dimension d'une plaque FGM carrée ( $k = 2, k_s = 10$ ) pour un rapport entre épaisseur

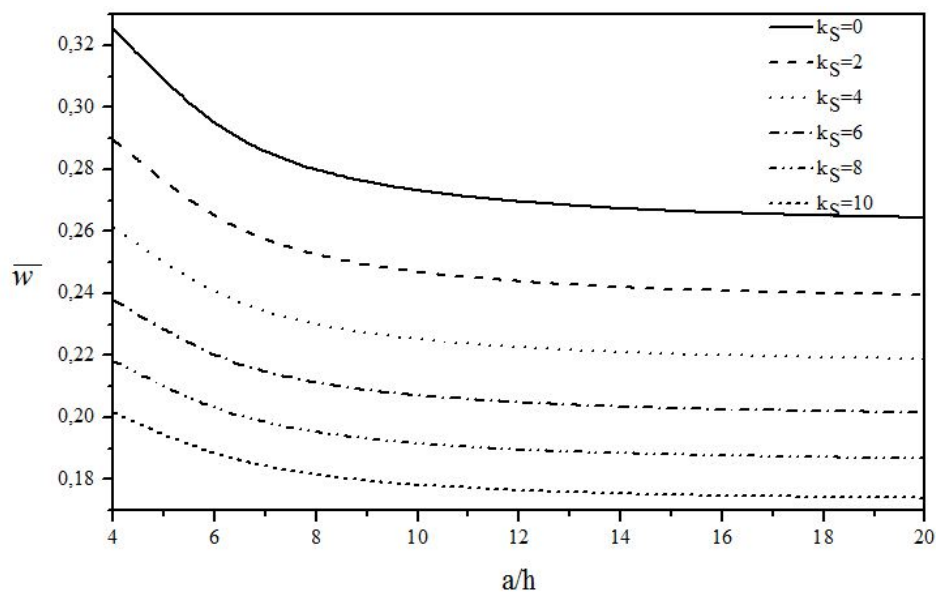


Fig. V. 2 Effet du module de cisaillement Pasternak sur la flèche centrale sans dimension d'une Plaque carré FGM ( $k = 2, k_w = 100$ ) Pour un rapport entre épaisseur

Figures. V.2 et V.3 montrent la flèche  $\bar{w}$  du centroïde de la plaque par rapport au rapport de l'épaisseur de la face à l'épaisseur  $a/h$  pour différentes valeurs de la rigidité de fondation de la plaque carrée FG ( $k = 2$ ). On voit que l'augmentation du rapport latéral-épaisseur  $a/h$  conduit à une diminution de la flèche centrale de la plaque FG. En outre, on voit à partir des figures V.2 et V.3 que lorsque le paramètre du module de fondation augmente, la flèche centrale de la plaque FG diminue. Cependant, pour les plaques minces, l'effet de la rigidité de fondation tend à devenir moins.

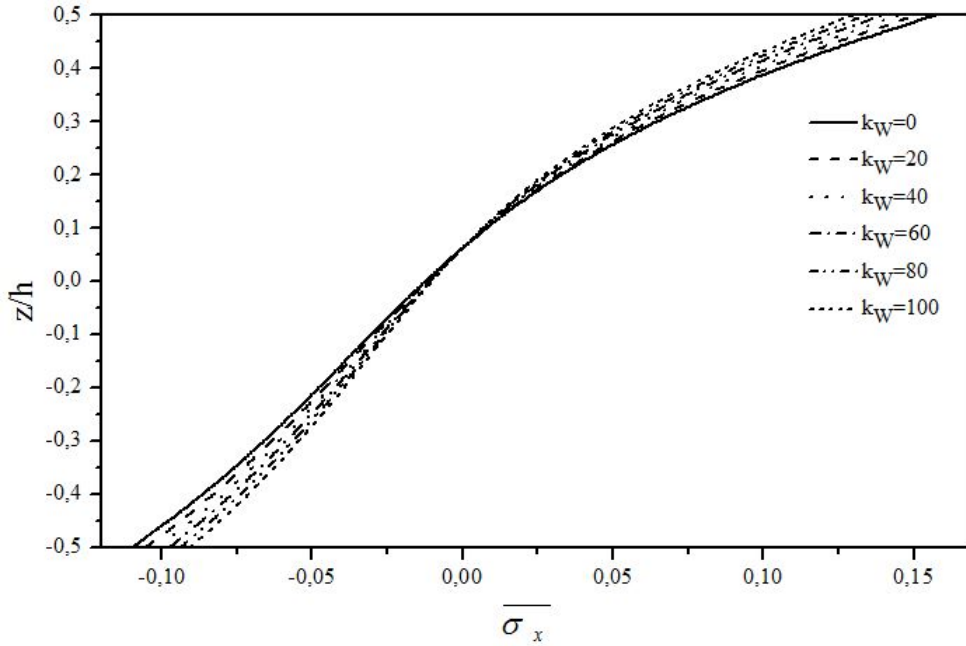


Fig. V. 3 Variation de la contrainte axiale sans dimension  $\overline{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, k_s = 10, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Winkler

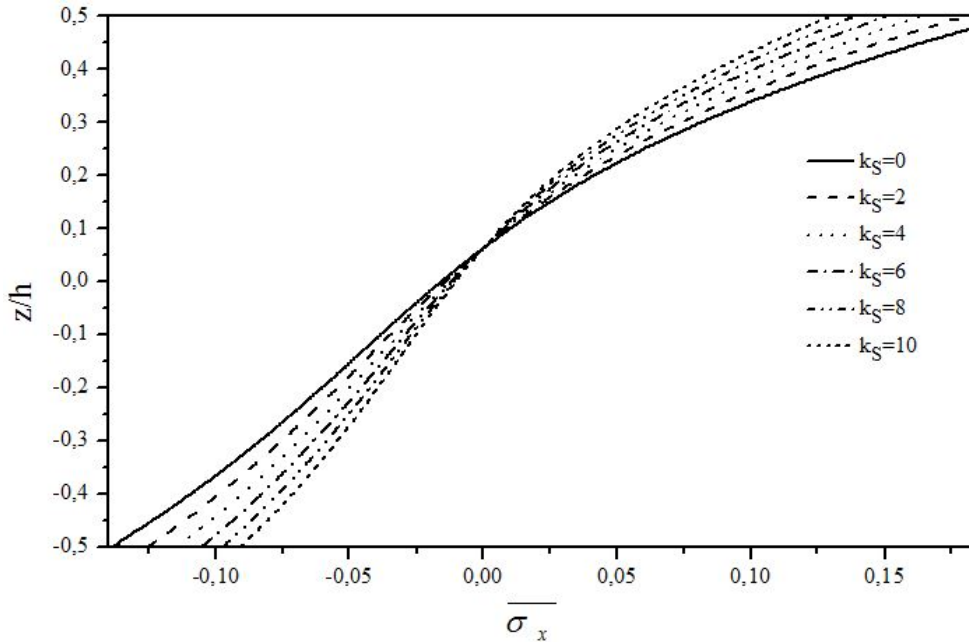


Fig. V. 4 Variation de la contrainte axiale sans dimension  $\overline{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_w = 100, a / h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Pasternak

Les variations de la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$  par l'épaisseur de la plaque FG sont représentées graphiquement sur les Fig. V.3 et V.4 pour différentes valeurs du paramètre de fondation élastique. On voit que les contraintes de compression maximales se produisent en un point proche de la surface supérieure et que les contraintes de traction maximales plaque FG. On observe que la contrainte normale augmente graduellement avec les valeurs de la rigidité de fondation. Cependant, l'effet du paramètre de module de cisaillement de Pasternak est plus



significatif que le paramètre de module de Winkler se produit, bien entendu, en un point proche de la surface inférieure de la

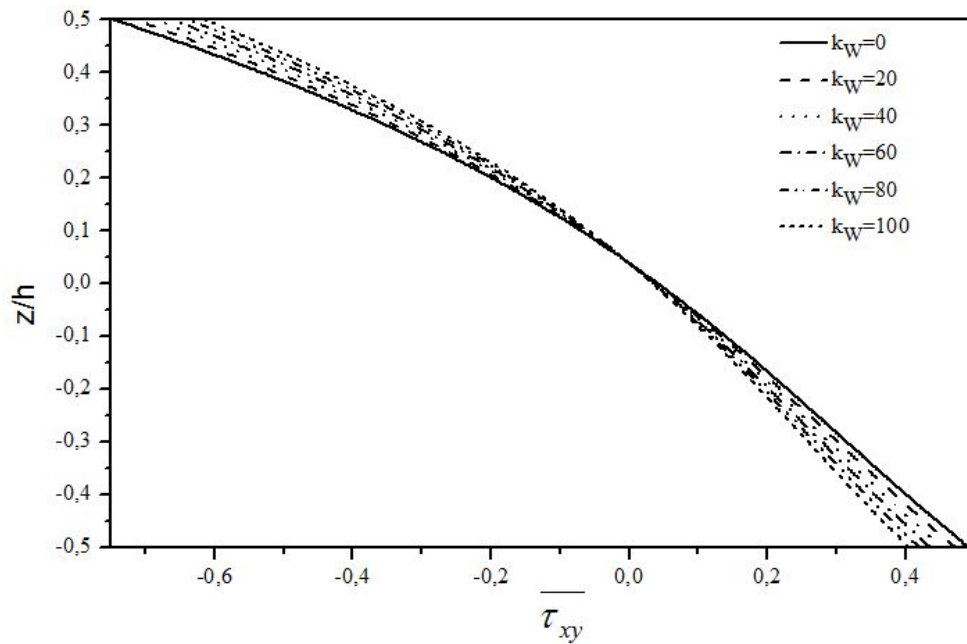


Fig. V. 5 Variation de la contrainte de cisaillement sans dimension ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_s = 10, a/h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Winkler

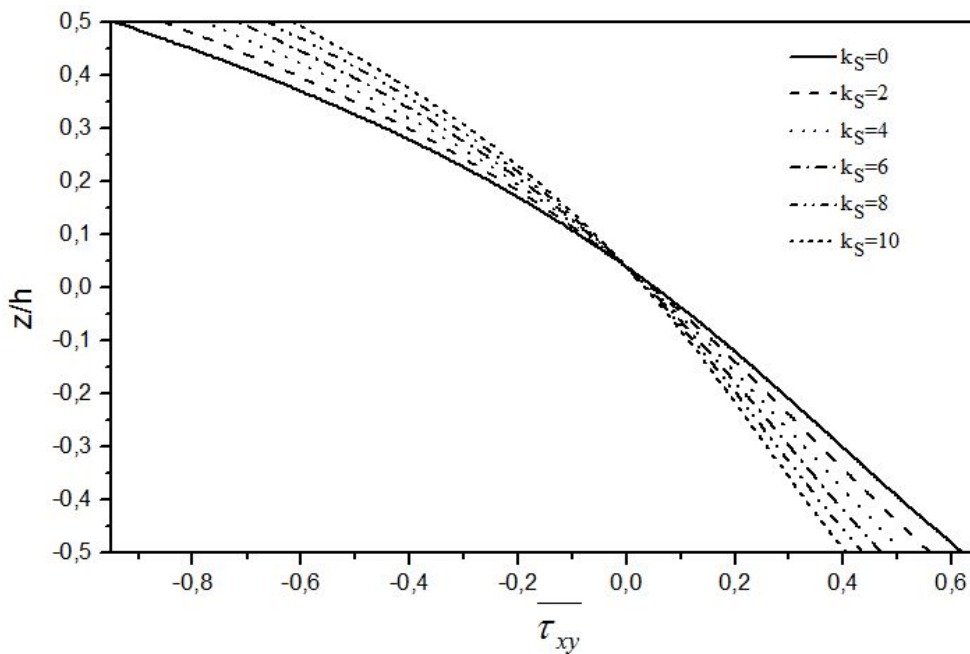


Fig. V. 6 Variation de la contrainte de cisaillement sans dimension ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2, K_w = 100, a/h = 10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de module Pasternak

Sur les figures V.5 et V.6, nous présentons l'évolution de la contrainte de cisaillement adimensionnelle  $\overline{\tau_{xy}}$  à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ( $k = 2$ ) pour différentes valeurs du paramètre de fondation élastique. Les résultats révèlent que les contraintes de compression maximales se produisent en un point proche de la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent en un point proche de la surface supérieure de la plaque FG.

Là encore, dans le cas d'un fond élastique de type Winkler, l'évolution de la contrainte de cisaillement sans dimension  $\overline{\tau_{xy}}$  est peu affectée par la variation du paramètre de cette fondation par rapport à celle de Pasternak.

### V.2.2. Analyse des vibrations.

Afin de vérifier la précision de la présente théorie dans la prédiction des réponses de vibration libre des plaques, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés dans cette section.

Dans le tableau V.8, les résultats calculés par la présente théorie de cisaillement supérieur et de déformation normale sont comparés avec ceux obtenus en utilisant la solution 3D de (Srinivas S., 1970b), La théorie de la déformation par cisaillement de l'ordre supérieur de (Reddy J.N., 1985) et la première théorie de la déformation par cisaillement de (Whitney J.M., 1970). Les comparaisons sont données pour une plaque carrée isotrope avec  $a/h = 10$ . On voit que la présente théorie qui tient compte à la fois du cisaillement transversal et de la déformation transversale normale, prédit les fréquences naturelles avec le même degré de précision que celui des solutions d'élasticité 3D (Srinivas S., 1970b) et Refs ( (Reddy J.N., 1985); (Whitney J.M., 1970)).

Le tableau V.9 montre la comparaison entre les trois premières fréquences non dimensionnelles de la plaque carrée simple supportée reposant sur la fondation élastique calculée à l'aide de la présente théorie et celles présentées dans Refs (Zhou D.et al., 2004) et (Matsunaga H., 2000), (Lü C.F.et al., 2009). On constate que les résultats de la présente théorie qui tiennent compte de l'effet d'étirement sont en excellent accord avec ceux de Refs ( (Zhou D.et al., 2004), (Matsunaga H., 2000), (Lü C.F.et al., 2009)) pour les premières fréquences. Cependant, pour les deux autres fréquences, la solution présentée dans Refs (

(Zhou D.et al., 2004), (Matsunaga H., 2000), (Lü C.F.et al., 2009)) sous-estime légèrement la fréquence par rapport à la présente théorie.

Tableau V. 8 Fréquences naturelles  $\hat{\omega} = (\omega h) \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque isotrope avec  $\nu = 0.3, a/h = 10$  et  $a/b = 1$

$M$	$n$	Present $\varepsilon_z \neq 0$	3D (Srinivas <i>et al.</i> 1970b)	Reddy and Phan (1985)	Whitney and Pagano (1970)
1	1	0.0932	0.0932	0.0931	0.0930
1	2	0.2229	0.2226	0.2222	0.2220
2	2	0.3425	0.3421	0.3411	0.3406
1	3	0.4178	0.4171	0.4158	0.4149
2	3	0.5248	0.5239	0.5221	0.5206
3	3	0.6904	0.6889	0.6862	0.6834
2	4	0.7528	0.7511	0.7481	0.7447
1	5	0.9294	0.9268	0.9230	0.9174
4	4	1.0924	0.9268	1.0847	1.0764

Tableau V. 9 Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles  $\tilde{\omega}/\pi^2 \tilde{\omega} = (\omega a^2 \sqrt{\rho_m h}/D_m)$  de la plaque carrée isotrope simplement appuyée ( $k_s = 10$ )

$a/h$ $k_w$	$\tilde{\omega}_{11}$				$\tilde{\omega}_{12}$				$\tilde{\omega}_{13}$				
	3D Ref <sup>(a)</sup>	HSDPT Ref <sup>(b)</sup>	Ref <sup>(c)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$	3D Ref <sup>(a)</sup>	HSDPT Ref <sup>(b)</sup>	Ref <sup>(c)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$	3D Ref <sup>(a)</sup>	HSDPT Ref <sup>(b)</sup>	Ref <sup>(c)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$	
0	2.2334	2.2334	2.2334	2.2383	4.4056	4.4056	4.4056	4.4220	7.2436	7.2436	7.2436	7.2864	
5	10	2.2539	2.2539	2.2539	2.2590	4.4150	4.4150	4.4150	4.4317	7.2487	7.2488	7.2488	7.2919
	10 <sup>2</sup>	2.4300	2.4300	2.4300	2.4377	4.4986	4.4986	4.4986	4.5182	7.2948	7.2948	7.2948	7.3412
	10 <sup>3</sup>	3.7111	3.7112	3.7111	3.7726	5.2285	5.2285	5.2285	5.2959	7.7191	7.7191	7.7191	7.8096

3D Ref<sup>(a)</sup> : (Zhou D.et al., 2004). Ref<sup>(b)</sup> : (Matsunaga H., 2000). Ref<sup>(c)</sup> : (Sheikholeslami S.A., 2013)

Un autre exemple pour vérifier la précision de la théorie proposée par rapport à la théorie tridimensionnelle de l'élasticité (Lü C.F.et al., 2009) et la théorie des plaques raffinées de (Thai H.T., 2011) est présenté dans le tableau V.10. Ce tableau présente les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la plaque carrée simplement supportée ( $a = b = 10h, k = 2,3$ ). On peut voir que les résultats de la théorie proposée concordent bien avec les solutions tridimensionnelles.

La fréquence naturelle non dimensionnelle  $\hat{\omega}$  des plaques carrées FG par rapport aux paramètres de cisaillement et de Winkler, l'indice de loi de puissance et le rapport épaisseur-longueur sont listés dans le tableau V.11. Ces résultats sont prédits par la théorie du cisaillement et de la déformation normale qui tient compte de l'effet d'étirement ainsi que des théories de Refs (Whitney J.M., 1970). Il y a une légère différence entre les résultats. Ceci est dû à l'effet d'étirement qui est pris en compte par la théorie présente et négligé par les deux autres.

La fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle des plaques FG carrées supportées simplement et l'indice de loi de puissance  $k$  pour diverses valeurs du paramètre de fondation de Winkler sont représentées graphiquement sur la Fig V.7 sur la base de la présente nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D. Le même paramètre non dimensionnel est représenté sur la Fig V.8 pour différentes valeurs du paramètre Pasternak.

Tableau V. 10 Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega} =$

$$\frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m} \text{ d'une plaque carrée simplement soutenue } (a = b = 10 h)$$

$k_w$	$k_s$	$a/h$		
		3D (Lü <i>et al.</i> 2009)	Thai and Choi (2011)	Present $\varepsilon_z \neq 0$
0	0	5.1295	5.2385	5.1638
	10	5.5560	5.6576	5.6059
	25	6.1404	6.2336	6.2103
10	0	5.1520	5.2605	5.1871
	10	5.5767	5.678	5.6274
	25	6.1591	6.2521	6.2297
100	0	5.3498	5.4548	5.3923
	10	5.7600	5.8584	5.8171
	25	6.3255	6.4164	6.4015
1000	0	7.0281	7.1116	7.1262
	10	7.3450	7.4257	7.4527
	25	7.7962	7.8734	7.9172

Tableau V. 11 La fréquence naturelle non dimensionnelle  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$  de la plaque carrée FG par rapport aux paramètres de cisaillement et de Winkler, indice de loi de puissance et rapport épaisseur-longueur

$k_w$	$k_s$	$a/h$	Indice de loi de puissance								
			$k = 0$			$k = 1$			$k = 2$		
			Ref <sup>(a)</sup>	Ref <sup>(b)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Ref <sup>(a)</sup>	Ref <sup>(b)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$	Ref <sup>(a)</sup>	Ref <sup>(b)</sup>	Present $\varepsilon_z \neq 0$
0	0	0.05	0.0291	0.0291	0.0291	0.0222	0.0227	0.0226	0.0202	0.0209	0.0207
		0.1	0.1135	0.1134	0.1136	0.0870	0.0891	0.0883	0.0789	0.0819	0.0807
		0.15	0.2459	0.2454	0.2461	0.1891	0.1939	0.1918	0.1711	0.1778	0.1748
		0.20	0.4169	0.4154	0.4174	0.3222	0.3299	0.3264	0.2906	0.3016	0.2965
0	100	0.05	0.0405	0.0406	0.0406	0.0377	0.0382	0.0380	0.0373	0.0380	0.0376
		0.1	0.1593	0.1599	0.1594	0.1482	0.1517	0.1497	0.1463	0.1508	0.14829
		0.15	0.3487	0.3515	0.3492	0.3236	0.3365	0.3295	0.3180	0.3351	0.3265
		0.20	0.5988	0.6080	0.6011	0.5509	0.5876	0.5699	0.5370	0.5861	0.5650
100	0	0.05	0.0298	0.0298	0.0298	0.0233	0.0238	0.0236	0.0214	0.0221	0.0218
		0.1	0.1163	0.1162	0.1164	0.0911	0.0933	0.0924	0.0836	0.0867	0.0854
		0.15	0.2521	0.2519	0.2524	0.1983	0.2036	0.2011	0.1817	0.1889	0.1855
		0.20	0.4281	0.4273	0.4286	0.3383	0.3476	0.3431	0.3092	0.3219	0.3158
100	100	0.05	0.0410	0.0411	0.0411	0.0384	0.0388	0.0386	0.0380	0.0386	0.0383
		0.1	0.1613	0.1619	0.1614	0.1506	0.1542	0.1521	0.1489	0.1535	0.1509
		0.15	0.3531	0.3560	0.3537	0.3288	0.3422	0.3349	0.3236	0.3412	0.3323
		0.20	0.6070	0.6162	0.6089	0.5598	0.5978	0.5794	0.5460	0.5970	0.5752

Ref<sup>(a)</sup> : (Sheikholeslami S.A., 2013); Ref<sup>(b)</sup> : (Baferani A.H.et al., 2011)

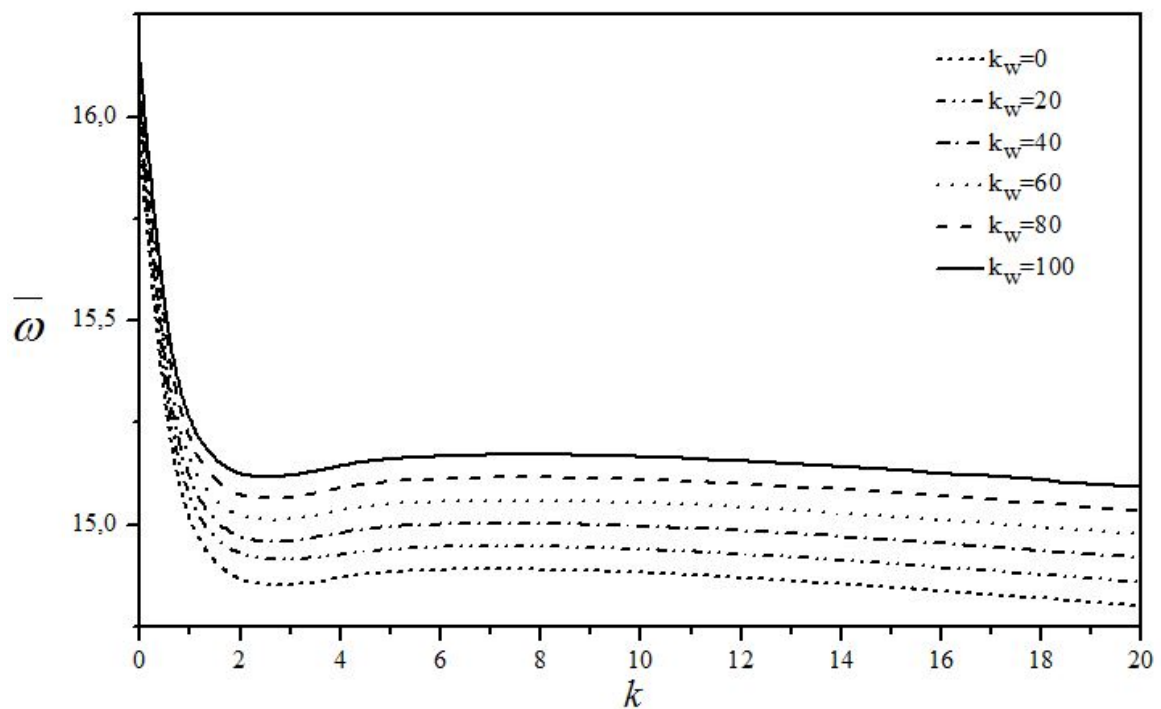


Fig. V. 7 La variation de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  par rapport à la loi de puissance Indice  $k$  pour différentes valeurs du paramètre Winkler ( $a/b = 1, k_s = 10, a/h = 10$ )

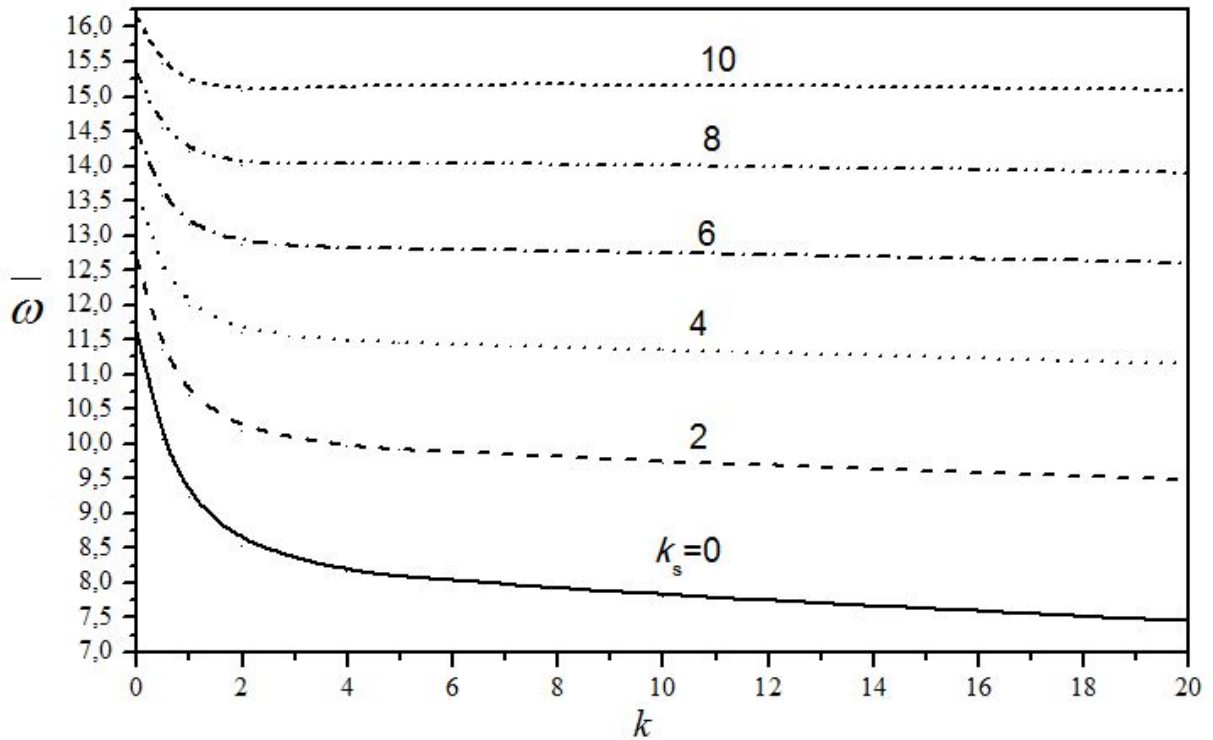


Fig. V. 8 La variation de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  par rapport à la loi de puissance Indice  $k$  pour différentes valeurs du paramètre Pasternak ( $a/b = 1, kh = 100, a/h = 10$ )

La fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle des plaques FG carrées supportées simplement et l'indice de loi de puissance  $k$  pour diverses valeurs du paramètre de fondation de Winkler sont représentées graphiquement sur la Fig V.7 sur la base de la présente nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D. Le même paramètre non dimensionnel est représenté sur la Fig V.8 pour différentes valeurs du paramètre Pasternak.

Il y a un changement rapide de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle pour les valeurs de l'indice de loi de puissance  $k$  inférieur à 2. Alors les courbes maintiennent un rythme plus ou moins constant mais restent proches les unes des autres ce qui montre que ce paramètre n'affecte pas trop la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle pour des valeurs de  $k$  supérieures à 2.

Dans le cas de la Fig V.9, il n'y a pas de changement soudain, mais les courbes restent à distance séparée. Ceci indique que ce paramètre influence la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle par rapport au paramètre Winkler. De plus, lorsque l'indice de loi de puissance  $k$  prend des valeurs supérieures à 4, La fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle garde des valeurs constantes, sauf lorsque  $k_s = 0$

### V.3. Conclusion

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi 3D pour la flexion et la vibration libre de plaques FG reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak est présentée. La théorie ne contient que cinq déplacements inconnus et satisfait aux conditions limites nulles de traction aux surfaces de la plaque sans nécessité de facteur de correction de cisaillement. Ainsi, un temps de calcul considérablement inférieur est atteint. La précision du présent travail est vérifiée en la comparant avec les solutions existantes et on a observé un excellent accord dans tous les cas. L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend une plaque plus rigide, et conduit ainsi à une réduction de la flèche et une augmentation de la fréquence. On peut donc dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement de flexion et de vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.

## **Conclusion Générale**



### Conclusion générale

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans une suite des travaux précédents menés au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'UDL de Sidi Bel Abbes.

La réponse de flexion et la vibration libre des plaques à gradient fonctionnel est analysée en utilisant une théorie quasi 3D de déformation en cisaillement hyperbolique, simple et efficace, avec seulement cinq inconnues, les relations contraintes-déformations ont été obtenus en utilisant un champ de déplacement en cisaillement hyperbolique, par la suite, les équations de mouvements de la plaque épaisse en matériau à gradient fonctionnel sont écrites à l'issue du principe d'Hamilton. Les contraintes et les déplacements des plaques reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, ont été étudiées à la flexion sous un chargement uniformément réparti, sinusoïdale et à la vibration libre.

Les contraintes et les déplacements non-dimensionnels sont calculés pour des plaques avec un mélange céramique-métal. Toutes les études comparatives ont montré que les flèches et les contraintes obtenues en utilisant la présente théorie (avec cinq inconnus) et d'autres théories de déformation de cisaillement à ordre élevé sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple à résoudre.

On peut conclure :

- Les déplacements et les contraintes obtenus par cette théorie sont plus précis en comparant à ceux de la littérature, notant que cette théorie prend en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur, mais les autres théories négligés le, ( $\varepsilon_z = 0$ ).
- Les déplacements et les contraintes normales augmentent avec l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ .
- Les contraintes tangentielles diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ .
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles sont plus grandes pour une plaque épaisse que pour la plaque mince.
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles diminuent si l'indice de puissance  $k$  augment.

La formulation et les techniques résultantes devraient être utiles pour d'autres études et devraient fournir aux ingénieurs la capacité de la conception des plaques à gradient fonctionnel pour des applications techniques spéciales, tel que les structures de lancement des stations spatiales, piste d'atterrissage des avions grands porteurs, sarcophage des centrales électriques.

Le présent travail peut être développé dans le future pour :

- Etudier différents comportements des plaques en matériaux à gradient de propriété que ce soit épaisses au minces, tel que le flambement thermique et mécanique et la vibration forcée.
- Analyser différentes formes des structures.
- Prendre en considération l'influence de la variation de la température sur les propriétés du matériau et leur comportement.

## **Références Bibliographiques**

### Références bibliographiques

**Ait Amar Meziane M., Abdelaziz H.H., Tounsi A., 2014.** "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions". [éd.] *J. Sandw. Struct. Mater.* 2014, Vol. 16, 3, pp. 293-318.

**Ait Atmane H., Tounsi A., Bernard F., Mahmoud S.R., 2015.** "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 19, 2, pp. 369-384.

**Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A., 2010.** "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design.* 2010, Vol. 6, (2), pp. 113-121.

**Ait Yahia S., Ait Atmane H., Houari M.S.A., Tounsi A., 2015.** "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories". [éd.] *Int. J. Mech.* 2015, Vol. 53, 6, pp. 1143-1165.

**Akavci, S.S. 2015.** "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation". [éd.] *Compos. Struct.* 2015, Vol. 108, pp. 667-676.

**Akbas S.D. 2015.** *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 19, (6), pp. 1421-1447.

**Al-Basyouni K.S., Tounsi A., Mahmoud S.R., 2015.** "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position". [éd.] *Compos. Struct.* 2015, Vol. 125, pp. 621-630.

**Aldo R., Boccaccini O., Van der Biest, Talbot Jan B., 2002.** "Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications". in *Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society*, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.

**Amini M.H., Soleimani M., Rastgoo A., 2009.** "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation". [éd.] *Smart Mater. Struct.* 2009, pp. 18(8), 1-9.

**Arefi M. 2015.** "Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 18, (3), pp. 659-672.

**Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., 1993.** "Functionally Gradient Materials". in: *Holt J.B, Koizumi .M, Hirai .T, Munir Z.A. American Ceramic Society, Westerville, OH*,. *Ceram. Trans.*, 1993, Vol. 34, 141-148.

**ATTIA A. 2015.** "Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique". *Thèse de Doctorat 3ème Cycle Université Djilali Liabes.* 2015.

**Attia A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., and Mahmoud S.R., 2015.** "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 18, (1), pp. 187-212.

**BACHIR BOUIADJRA R. 2015.** "Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques". *Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes.* 2015.

- Bachir Bouiadjra R., Adda Bedia E.A., and Tounsi A., 2013.** "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2013, Vol. 48, (4), pp. 547-567.
- Baferani A.H., Saidi A.R., Ehteshami H., 2011.** "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation". [éd.] *Compos. Struct.* 2011, pp. 93(7), 1842-1853.
- BAGUET S. 2001.** "Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique". *Thèse de Doctorat université Aix-Marseille II, France.* 2001.
- Bakora A., Tounsi A., 2015.** "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2015, Vol. 56, 1, pp. 85-106.
- Barati M.R., Zenkour A.M. Shahverdi H., 2016.** "Thermo-mechanical buckling analysis of embedded nanosize FG plates in thermal environments via an inverse cotangential theory". [éd.] *Compos. Struct.* 2016, Vol. 141, pp. 203-212.
- Beaudoin J.J. 1990.** "Handbook of fiber-reinforced concrete-principles, properties developments and applications". Noyes publication, U.S .A, p., [éd.] U.S .A., Noyes publication. 1990, p. 332.
- Beeby A.W. 1979.** "The prediction of crack widths in hardened concrete". [éd.] *The structural Engineer.* 1979, Vol. 57A, 1, pp. 9–17.
- Belabed Z., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., Anwar Bég O., 2014.** "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates". [éd.] *Compos.: Part B.* 2014, Vol. 60, pp. 274-283.
- Beldjelili Y., Tounsi A., and Mahmoud S.R., 2016.** "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory". *Smart Struct.Syst., Int. J.* 2016, Vol. 18, (4), pp. 755-786.
- Belkorissat I., Houari M.S.A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R., 2015.** "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 4, pp. 1063-1081.
- Bellifa H., Benrahou K.H., Hadji L., Houari M.S.A., Tounsi A., 2016.** "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position". [éd.] *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2016, Vol. 38, 1, pp. 265-275.
- Benachour A. 2010.** "Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques composites collées sous précontrainte". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2010.
- Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., and Ahmed M.S., 2011.** "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates whit arbitrary gradient". *Composite: Part B.* 2011, Vol. 42, 1386-1394.
- Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., Meftah S.A., 2011.** "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient". *Composites.* 2011, Vol. Part B, (42), pp. 1386–1394.

- BENATTA Mohamed A. 2011.** "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2011.
- Bennai R., Ait Atmane H., Tounsi A., 2015.** "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 19, 3, pp. 521-546.
- Bennoun M., Houari M.S.A., Tounsi A., 2016.** "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates". [éd.] *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2016, Vol. 23, 4, pp. 423-431.
- Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H. and Adda Bedia, E.A., (2010).** of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Mech. Compos.Mater., 46(4), 425-434.* (2010).
- Bever M.B., and Duwez P.E., 1972.** "Gradients in composite materials". *Mater. Sci. Eng.* 1972, Vol. 10, 1-8.
- Borchert R., Willert-Porada, M. 1999.** "An oxidation resistant metal-ceramic functionally graded material". *Proceedings of the 9 th World Ceramic Congress and Forum on New Materials CIMTEC.* Florence, 1999, Part C, 313-320.
- Bouchafa A., Bachir Bouiadjra M., Houari M.S.A., Tounsi A., 2015.** "Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation. [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 6, pp. 1493-1515.
- Bouderba B., Houari M.S.A., and Tounsi A., and Mahmoud S.R., 2016.** "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2016, Vol. 58, (3), pp. 397-422.
- Bouderba B., Houari M.S.A., Tounsi A., 2013.** "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2013, Vol. 14, 1, pp. 85-104.
- Bouguenina O., Belakhdar K., Tounsi A., and Adda Bedia E.A., 2015.** "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 19, (3), pp. 679-695.
- Boukhari A., Ait Atmane H., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R., 2016.** "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2016, Vol. 57, 5, pp. 837-859.
- Bounouara F., Benrahou K.H., Belkorissat I., Tounsi A., 2016.** "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2016, Vol. 20, 2, pp. 227-249.
- Bourada F., Amara K., and Tounsi A., 2016.** "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2016, Vol. 21, (6), pp. 1287-1306.
- Bourada F., Amara K., Tounsi A., 2016.** "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2016, Vol. 21, 6, pp. 1287-1306.

- Bourada M., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A., 2015.** "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 2, pp. 409-423.
- Bourada M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., 2012.** "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates". *J. Sandw. Struct. Mater.* 2012, Vol. 14, (1), pp. 5-33.
- Bourada M., Tounsi A., Houari, M.S.A., Adda Bedia E.A., 2012.** "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates". [éd.] *J. Sandw. Struct. Mater.* 2012, Vol. 14, 1, pp. 5-33.
- Bousahla A.A., Benyoucef S., Tounsi A., and Mahmoud S.R., 2016.** "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2016, Vol. 60, (2), pp. 313-335.
- Bousahla A.A., Houari M.S.A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., 2014.** "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates". [éd.] *Int. J. Computat. Method.* 2014, Vol. 11, 6.
- Buczkowski R., Torbacki W., 2001.** "Finite element modeling of thick plates on two-parameter elastic foundation". [éd.] *Int. J. Numer. Anal. Method. Geomech.* 2001, Vol. 25, 14, pp. 1409-1427.
- Carvalho O., Buciumeanu M., Madeira S., Soares D., Silva F.S., Miranda G., 2015.** "Optimization of AlSi-CNTs functionally graded material composites for engine piston rings". *Mater. Des.* 2015, Vol. 80, 163-173.
- Chi Shyang-ho., Chung Yen-Ling., 2003.** "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics.* 2003, Vol. 70 (10), 1227-1243.
- Chikh A., Bakora A., Heireche H., Houari M.S.A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., 2016.** "Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2016, Vol. 57, 4, pp. 617-639.
- Cho J.R., Park H.J., 2002.** "High strength FGM cutting tools: finite element analysis on thermoelastic characteristics". *J. Mater. Process. Technol.* 2002, 130-131: 351-356.
- Daouadji T.H., Hadj Henni A., Tounsi A., and Bedia El Abbes A., 2012.** "A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates". *Modelling and Simulation in Engineering.* 2012, Vol. 2012, pp. 1-10.
- Darılmaz K. 2015.** "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 18, (2), pp. 395-408.
- Delale F., Erdogan F., 1983.** "The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics.* 1983, Vol. 50 (3), 609-614.
- DRAICHE K. 2014.** "CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE LA VIBRATION DES PLAQUES COMPOSITES COMPORTANT DES PATCHS". *Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes.* 2014.
- Draiche K. 2015.** "Contribution a l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patchs". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2015.

- Draiche K., Tounsi A., Khalfi Y., 2014.** "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass". [éd.] *Int. J., Steel Compos. Struct.* 2014, Vol. 17, 1, pp. 69-81.
- Ebrahimi F., and Dashti S., 2015.** "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 19, (5), pp. 1279-1298.
- Ebrahimi F., and Habibi S., 2016.** "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2016, Vol. 20, (1), pp. 205-225.
- Ebrahimi F., and Salari E., 2016.** "Thermal loading effects on electro-mechanical vibration behavior of piezoelectrically actuated inhomogeneous size-dependent Timoshenko nanobeams". *Adv. Nano Res., Int. J.* 2016, Vol. 4, (3), pp. 197-228.
- El Meiche N., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E.A., 2011.** "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate". [éd.] *Int. J. Mech. Sci.* 2011, Vol. 53, (4), pp. 237-247.
- Erdogan F. 1995.** Fracture mechanics of functionally graded materials". *Compos. Eng.* 1995, Vol. 5, 753-770.
- Fallah A., Aghdam M.M., Kargarnovin M.H., 2013.** "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method". [éd.] 83(2) *Arch. Appl.Mech.* 2013, pp. 177-191.
- Gupta K.M. 2012.** "Materials Science". *Metallurgy and Engineering.* Umesh Publications. New Delhi, 2012.
- Hadji L., Adda Bedia E.A., 2015b.** "Analyse of the behavior of functionally graded beams based on neutral surface position". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2015b, Vol. 55, 4, pp. 703-717.
- Hadji L., Ait Atmane H., Tounsi A., Adda Bedia E.A., 2011.** "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory". [éd.] 32(7) *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.* 2011, pp. 925-942.
- Hadji L., Daouadji T.H., Tounsi A., and Bedia E.A., 2014.** "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam". [éd.] *Struct, Int. J, steel Compos.* 2014, Vol. 16, 5, pp. 507-519.
- Hadji L., Hassaine Daouadji T., Ait Amar Meziane M., Tlidji Y., and Adda Bedia E.A., 2016.** "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2016, Vol. 57, (2), pp. 315-325.
- Hamidi A., Houari M.S.A., Mahmoud S.R., and Tounsi A., 2015.** "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 18, (1), pp. 235-253.
- Hebali H., Tounsi A., Houari M.S.A., Bessaim A., Adda Bedia E.A., 2014.** "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates". [éd.] *ASCE J. Eng. Mech.* 2014, Vol. 140, 2, pp. 374-383.
- Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.G., 1949.** "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". *NACA T. N.* 1949, p. 1833.



- Hirai T. 1996.** Chapter 20, "Functional Gradient Materials". [éd.] P. Hassen and E.J. Kramer R.W. Chan. *Mater. Sci. and Tech.* 1996, Vol. 17B, 293-341.
- Hirai T., and Chen L., 1999.** "Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan". *Materials Science Forum.* 1999, 308-311, 509-514.
- Hirai T., Sasaki M., Niino M., 1987.** *J. Soc. Mater. Sci. Jpn.* 1987, Vol. 36, 1205-1211 (in Japanese).
- HOUARI Mohammed S.A. 2011.** "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2011.
- Huang., Z.Y., Lu., C.F. and Chen., W.Q., 2008.** "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations". [éd.] *Compos. Struct.* 2008, pp. 95-104.
- Ichikawa K. 2000.** "Functionally graded materials". *in the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts.* 2000, 264 p., Hardcover. .
- Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour, S.R. 2009.** "An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates". *Materials & Design.* 2009, Vol. 30, 3679-3685.
- KACI A. 2012.** "Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2012.
- Kant T., Swaminathan K., 2002.** "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". *Composite. Structure.* 2002, Vol. 56, (4), pp. 329-344.
- Kar V.R., and Panda S.K., 2015.** "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015, Vol. 18, (3), pp. 693-709.
- Kawasaki A., and Watanabe R., 1990.** "Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process". *In Proc. 1st. Int. symp. FGM.* edited by : Yamanouchi M., Koizumi M., 1990, 197-202.
- Kawasaki A., Watanabe, R. 1997.** "Concept and P/M Fabrication of Functionally Gradient Materials". *Ceramics International.* 1997, Vol. 23, 73-83.
- Khalfi Y., Houari M.S.A., Tounsi A., 2014.** "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation". *International Journal of Computational Methods.* 2014, Vol. 11(05).
- Khalfi Y., Houari M.S.A., Tounsi A., 2014.** "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation". *Int. J. Comput. Methods.* 2014, Vol. 11, (5), p. 1350077.
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H., 2003.** "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering.* 2003, Vol. A362, 81–105.
- Kitipornchai S., Yang J., and Liew K.M., 2006.** "Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments". *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.* 2006, Vol. 195, 9-12, pp. 1075-1095.
- Kobayashi H., Sonoda K., 1989.** "Rectangular Mindlin plates on elastic foundations". [éd.] *Int. J. Mech. Sci.* 1989, 31, pp. 679-692.

- Koizumi M. 1993.** "Ceramic Transactions Functionally Gradient Materials". *2nd Int.Symp. on Functionally Gradient Materials*. Society, American Ceramic, 1993, Vol. 34, 3-10.
- . **1994.** "The Concept of FGM", FGM-News". *Journal of the FGM-Forum, National Aerospace Laboratory, Nippon Oil Company*. Nippon Oil Company, 1994, Vol. 24, 3-6, pp. 3-6.
- Kokini K., Choules B.D., Takeuchi Y.R., 1997.** Thermal fracture mechanisms in ceramic thermal barrier coatings". *J. Therm. Spray Technol.* 1997, Vol. 6, 43-49.
- Lam K.Y., Wang C.M., He X.Q., 2000.** "Canonical exact solutions for Levy-plates on two parameter foundation using Green's functions". [éd.] *Eng. Struct.* 2000, Vol. 18, 2, pp. 364-378.
- Laoufi I., Ameur A., Zidi M., Adda Bedia E.A., and Bousahla A.A., 2016.** "Mechanical and hygro-thermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory". *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2016, Vol. 20, (4), pp. 889-912.
- Larbi Chaht F., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A., Anwar Bég O., Mahmoud S.R., 2015.** "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 16, 8, pp. 425-442.
- Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A., 1999.** "Functionally Graded Materials 1998". *Proceedings of the 5 International Symposium on FGM 1998*. in: Kaysser W.A, Trans Tech Publications, Switzerland, 1999, 13-18.
- Liberscu L. 1967.** "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68.
- Love A. E. H. 1888.** "On the small free vibrations and deformations of elastic shells". *Philosophical trans. of the Royal Society*. London, 1888, Vol. A, (17), pp. 491-549.
- Lü C.F., Lim C.W., and Chen W.Q., 2009.** "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations". *Mech. Adv. Mater. Struct., 16(8)*, 576-584. 2009.
- Mahi A., Adda Bedia E.A., Tounsi A., 2015.** "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates". [éd.] *Appl. Math. Model.* 2015, Vol. 39, 9, pp. 2489-2508.
- Malekzadeh P. 2009.** "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos. Struct., 89(3)*, 367-373. 2009.
- Marple B.R., and Boulanger J., 1996.** "Slip casting process and apparatus for producing graded materials". *Us. Patent*. 1996, Vol. 5, 498-383.
- Marple B.R., and Tuffe S., 1997.** "Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials". *ibid.* 1997, 159-166.
- Matsunaga H. 2000.** "Vibration and stability of thick plates on elastic foundations". [éd.] *J. Eng. Mech. (ASCE)*. 2000, Vol. 126, 1, pp. 27-34.
- Mechab I. 2009.** "Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2009.

**Meradjah M., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., 2015.** "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 3, pp. 793-809.

**Merazi M., Hadji L., Daouadji T.H., Tounsi A., Adda Bedia E.A., 2015.** "A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position". [éd.] *Int. J. Geomech.Eng.* 2015, Vol. 8, 3, pp. 305-321.

**Mévrel R. 2009.** "Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine. *PlastOx 2007 - Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité - Environnement.* 2009, 255-264.

**Mindlin R. D. 1951.** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *Journal of Applied Mechanics.* 1951, Vol. 18, pp. 31-38.

**Miyamoto Y. 1997.** "Applications of FGM in Japan, in *Functionally Graded Materials. Manufacture, Properties, and Applications.* Ceramic Transactions. Am. Ceram. Soc, 1997, Vol. 76, 171-189.

**Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B.H. Kawasaki A., Ford Renee G., 1999.** "*FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, Design, Processing and Applications*". [éd.] Miyamoto Y. Media New York : LLC, 1999.

**Moradi-Dastjerdi R. 2016.** "Wave propagation in functionally graded composite cylinders reinforced by aggregated carbon nanotube". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2016, Vol. 57, (3), pp. 441-456.

**Mouaici F., Benyoucef S., Ait Atmane H. Tounsi A., 2016.** "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory". [éd.] *Int.J. Wind Struct.* 2016, Vol. 49, 6, pp. 429-454.

**Müller E., Drasar C., Schilz J., and Kaysser W.A., 2003.** "Functionally graded materials for sensor and energy applications". *Materials Science and Engineering.* 2003, Vol. A362, 17-39.

**Naghdi P. M. 1957.** "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math.* 1957, Vol. 14, pp. 369-380.

**Nedri K., El Meiche N., Tounsi A., 2014.** "Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory". [éd.] *Compos,Mater. Mech.* 2014, Vol. 49, 6, pp. 641-650.

**Neubrand A. 2001.** "*Functionally graded materials*". In: Editors-in Chief:, K. H. J. B., Robert, W. C., Merton, C. F., Bernard, I., Edward, J. K., Subhash, M., Patrick, V. s.l. : *Encyclopedia of Materials: Science and Technology (Second Edition).* Elsevier, Oxford, 2001. pp. 3407-3413.

**Nguyen K.T., Thai T.H., Vo T.P., 2015.** "A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates". [éd.] *Int. J Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 1, pp. 91-120.

**Nguyen., Viet.Tung. 2004.** "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées.* ParisTech, France, 2004.

**Niino M., Hirai T. and Watanabe, R. 1987.** *J. Japan Soc. Comps. Mater.* 1987, Vol. 13, 257-264 (in Japanese).

- Niino M., Kumakawa A., Watanabe R., Doi Y. 1984.** "Fabrication of a high pressure thrust chamber by the eIP forming method". *20th Joint Propulsion Conference*. Joint Propulsion Conferences, 1984, 84-1227.
- Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T.,. 1998.** *J. Jpn. Inst. Met.* 1998, Vol. 62, 986-991.
- Ould Larbi L., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A.,. 2013.** "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams". [éd.] *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2013, Vol. 41, 4, pp. 421-433.
- Pasternak P.L. 1954.** "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants". *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture*, 1, Moscow: USSR. 1954, Vol. 1, 56. [In Russian].
- Paszkiwicz B., Paszkiwicz R, Wosko M., Radziejewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M.,. 2008.** "Functionally Graded semiconductor layers for devices application". *Vacuum*. 2008, Vol. 82, 389-394.
- Pierre P. 1998.** "Etude du comportement mécanique des composites cimentaires armés de microfibres d'acier". *Thèse de doctorat de l'Université Laval, Québec, Canada*. 1998.
- Pradhan K.K., and Chakraverty S.,. 2015.** "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2015, Vol. 53, (2), pp. 337-354.
- Qian L.F., and Batra R.C.,. 2005.** "Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin Method". *Computat. Mech.* 2005, Vol. 35, (3), pp. 214-226.
- Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H.,. 2003.** "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators". *Smart Materials and Structures*. 2003, Vol. 12, 115-121.
- Reddy J.N. 2004.** *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. 2nd Edition. Boca Raton : CRC Press, 2004.
- Reddy J.N. 1987.** "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates". *Commun. Appl. Numer. Methods*. 1987, Vol. 3, pp. 173-180.
- . **1984.** "A simple higher-order theory for laminated composite plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1984, Vol. 51, (4), pp. 745-752.
- . **2000.** "Analysis of functionally graded plated". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, Vol. 47, pp. 663-384.
- . **1997.** "Mechanics of Laminated Composites Plates and shells: Theory and Analysis". [éd.] second. 1997.
- . **1999.** "Theory and Analysis of Elastic plates". *Taylor & Francis, Philadelphia*. 1999.
- Reddy J.N., Phan N.D.,. 1985.** "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory". [éd.] *J. Sound Vib.* 1985, Vol. 98, pp. 157-170.
- Reissner E. 1975.** "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". *Int. J. Solids Structures*. 1975, Vol. 25, (5), pp. 495-502.

- . 1945. "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, 1945, Vol. 12, 69-77.
- Saidi H., Tounsi A., Bousahla A.A., 2016. "A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations". [éd.] *Int. J., Eng.* 2016, Vol. 11, 2, pp. 289-307.
- Sallai B., Hadji L., Hassaine Daouadji T., Adda Bedia E.A., 2015. "Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 19, 4, pp. 829-841.
- Schulz U., et al. 1997. "Graded design of EB-PVD thermal barrier coating systems". *AGARD 85th Structures and Materials Panel Meeting, Workshop 3, Thermal Barrier Coatings, Aalborg, Denmark.* 1997.
- Sheikholeslami S.A., Saidi A.R., 2013. "Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory". [éd.] *Compos.* 2013, Vol. 106, pp. 350-361.
- Shen H.S. 2009. "*Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*". s.l. : CRC Press, 2009. p. 280.
- Shen M., and Bever M.B., 1972. "Gradients in polymeric materials". *J. Mater. Sci.* 1972, Vol. 7, 741-746.
- Shimpi R.P., Arya H., Naik N.K., 2003. "A higher order displacement model for the plate analysis". [éd.] *J.Reinf. Plast. Compos.* 2003, Vol. 22, 22, pp. 1667-1688.
- Siti Nur Sakinah J., Faizal, M., Dewan, M. N., Shah, N. B. 2013. "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays.* 4 June 2013, Vol. 8(21), 828-840.
- Sobhy M. 2013. "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions". *Compos. Struct.* 2013, Vol. 99, pp. 76-87.
- Srinivas S., Joga C.V., Rao A.K., 1970a. "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates". [éd.] *Int. J. Solid. Struct.* 1970a, Vol. 6, 11, pp. 1463-1481.
- Srinivas S., Joga Rao C.V., Rao A.K., 1970b. "An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates". [éd.] *J. Sound Vib.* 1970b, Vol. 12, 2, pp. 187-199.
- Tagrara S.H., Benachour A., Bachir Bouiadjra M., Tounsi A., 2015. "On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams". [éd.] *Int. J. Steel Compos.Struct.* 2015, Vol. 19, 5, pp. 1259-1277.
- Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., 1990. "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique". *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan.* 1990, 129-134.
- Takemura M., and Tamura M. et al., 1990. "Mechanical and thermal properties of FGM fabricated by thin sheet lamination method". *In Proc. 1st. Int. symp. FGM,* edited by: Yamanouchi. M., Koizumi M., 1990, 97-100.

- Tebboune W., Benrahou K.H., Houari M.S.A., Tounsi A., 2015.** "Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 2, pp. 443-465.
- Thai H.T., Choi D.H., 2011.** "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation". [éd.] *Compos. Sci. Technol.* 2011, Vol. 71, 16, pp. 1850-1858.
- Timoshenko S. 1921.** "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars". *Philosophical Magazine.* 1921, Vol. 41, (46), pp. 744-746.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1959.** "*Theory of Plates and Shells*". second edition. New York, Amerique : McGraw-Hill Book Company, 1959.
- Tounsi A., Houari M.S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., 2013.** "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates". *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 24, (1), pp. 209-220.
- Tounsi A., Houari M.S.A., Bessaim A., 2016.** "A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2016, Vol. 53, 4, pp. 547-565.
- Tounsi A., Houari Mohammed S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., 2013.** "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates". *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 24, 209–220.
- Touratier M. 1991.** "An efficient standard plate theory". *Int. J. Eng. Sc.* 1991, Vol. 29, (8), pp. 901-916.
- Trinh, T.H., Nguyen, D.K., Gan, B.S. and Alexandrov S., 2016.** "Post-buckling responses of elastoplastic FGM beams on nonlinear elastic foundation". *Struct. Eng. Mech., Int. J.* 2016, Vol. 58, (3), pp. 515-532.
- Uemura S. 2003.** "The activities of FGM on new applications". *Materials Science Forum.* 2003, 423-425, 1-10.
- Uflyand Y.S. 1948.** "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates". 1948, Vol. 12, pp. 287-300.
- Watanabe Y., Yamanaka N., Fukui Y., Metallkd Z., 1997.** "Orientation of Al<sub>3</sub>Ti platelets in Al-Al<sub>3</sub>Ti functionally graded material manufactured by centrifugal method". 1997, Vol. 88 N° 09, 717–721.
- Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T., 2004.** "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology.* 2004, Vol. 64, 893-908.
- Watre Metz B. 2006.** "Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères". *Thèse de doctorat.* Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- Whitney J.M. 1973.** "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". *J. Applied Mechanics.* 1973, Vol. 40, pp. 302-304.



- Whitney J.M., Pagano N.J., 1970.** "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates". [éd.] *J. Appl.Mech.Mech.* 1970, Vol. 37, 4, pp. 1031-1036.
- Winkler E. 1867.** "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit". *Prag Dominicanus.* 1867.
- Yaghoobi H., and Yaghoobi P., 2013.** "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach". *Meccanica.* 2013, Vol. 48, (8), pp. 2019-2035.
- Yang J., Liew K.M., and Kitipornchai S., 2005.** "Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading". *Int. J. Mech. Sci.* 2005, Vol. 47, 10, pp. 1519-1541.
- Yang Y.Y., Munz D., Schaller W., 1997.** "Effect of the stress jump at the interface of a joint on the failure behavior". *Int. J. Fract.* 1997, Vol. 87, L113–L118.
- Yang Z., Zhang L., Shen Q., Gong D., 2003.** "Theoretical design of sedimentation applied to the fabrication of functionally graded materials". *Metall. Mater. Trans. B Process Metall. Mater. Process. Sci.* 2003, Vol. 34, 605-609.
- Yuki M., Murayama T., Irisawa T., 1991.** "Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating. *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan.* 1991, 203-208.
- Zemri A., Houari M.S.A., Bousahla A.A. Tounsi A., 2015.** "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory". [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2015, Vol. 28, 3, pp. 693-710.
- Zeng Y.P., Jiang D.L., Watanabe T., 2000.** "Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials". *Journal of the American Ceramic Society.* 2000, Vol. 83, N° 12, 2999-3003.
- Zenkour A.M., Sobhy M., 2013.** "Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations". [éd.] *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 29, 1, pp. 7-17.
- . 2012. "Elastic foundation analysis of uniformly loaded functionally graded viscoelastic sandwich plates". [éd.] *J. Mech.* 2012, Vol. 28, 3, p. 439452.
- Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q., 1998.** *Mater J. Sci. Lett.* 17. 1998, 1677-1679.
- Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., AU F.T.K., 2004.** "Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation". [éd.] *J. Numer. Meth. Eng.* 2004, Vol. 59, 10, pp. 1313-1334.
- Zidi M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., and Anwar Bég O., 2014.** "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory". *Aerospace Science and Technology.* 2014, Vol. 34, pp. 24-34.
- Zidi M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., Anwar Bég O., 2014.** "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory". [éd.] *Aerosp.Sci. Technol.* 2014, Vol. 34, pp. 24-34.

## ملخص

في هذا المذكرة ، تم تطوير نظرية تشوه القص القطعي شبه ثلاثي الأبعاد ذات كفاءة عالية وبسيطة لتحليل انحناء واهتزاز الصفائح المتدرجة وظيفيا والمستندة على أساسات ذات خصائص مطاطية. من أهم سمات هذه النظرية هو أنها تأخذ بعين الاعتبار تمدد سمك الصفائح المتدرجة وظيفيا، حيث ان هاته النظرية تحتوي على خمسة مجاهيل مثلما هو الحال بالنسبة لنظرية القص من الدرجة الأولى. القاعدة المرنة موصوفة من قبل نموذج باسترناك (بائنين من المعرفات). ومن المفترض أن الخصائص المادية للوحة تختلف بشكل مستمر في اتجاه السمك باستعمال قانون اسي بسيط لحجم مكوناتها.

يتم الحصول على معادلات الحركة للوحات الصفائح المتدرجة السميكة ضمن مبدأ هاميلتون. يتم الحصول على حلول تحليلية لتحليل الانحناء والاهتزاز الحر للوحات مدعومة ببساطة. وتعدى النتائج العددية بالتفصيل ومقارنتها مع الأعمال القائمة مثل الحلول ثلاثية الأبعاد وتلك التي تنبأ بها نظريات لوحة أخرى. ويمكن استنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فقط ولكن أيضا بسيطة في تنبؤ الانحناء والاستجابة للاهتزاز الحر من لوحات متدرجة وظيفيا تستريح على أساس مرن.

**الكلمات مفتاحية:** الانحناء؛ للاهتزاز الحر؛ الصفائح المتدرجة وظيفيا؛ الأساسات المرنة ؛ نظرية تشوه

## Résumé

Dans ce travail, une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D efficace et simple est développée pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques à gradation fonctionnelle (FG) reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres. La caractéristique la plus importante de cette théorie est qu'elle n'affecte pas l'effet d'étirement. La fondation élastique est décrite par le modèle de Pasternak (à deux paramètres). On suppose que les propriétés du matériau de la plaque varient continuellement dans le sens de l'épaisseur par une simple loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement pour des plaques épaisses sont données par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques pour l'analyse des flexions et des vibrations libres sont présentées. Les résultats numériques sont donnés en détail et comparés aux travaux existants tels que les solutions d'élasticité tridimensionnelles et ceux prédits par d'autres théories des plaques. On peut conclure que la théorie actuelle n'est pas seulement précise, mais aussi elle est simple à prévoir les réponses de flexion et de vibration libre des plaques en matériau à gradient fonctionnelle FGM reposent sur une fondation élastique à deux paramètres.

**Mots-clés :** flexion ; vibration libre ; plaque à gradient fonctionnelle FGM ; théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique quasi-3D.

## Abstract

In this work, an efficient and simple quasi-3D hyperbolic shear deformation theory is developed for bending and vibration analyses of functionally graded (FG) plates resting on two-parameter elastic foundation. The significant feature of this theory is that, in addition to including the thickness stretching effect, it deals with only five unknowns as the first order shear deformation theory (FSDT). The foundation is described by the Pasternak (two-parameter) model. The material properties of the plate are assumed to vary continuously in the thickness direction by a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The equations of motion for thick FG plates are obtained within the Hamilton's principle. Analytical solutions for the bending and free vibration analysis are obtained for simply supported plates. The numerical results are given in detail and compared with the existing works such as 3-dimensional solutions and those predicted by other plate theories. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the bending and free vibration responses of functionally graded plates resting on elastic foundation.

**Keywords:** Bending; Free vibration; Functionally graded plate; Elastic foundation; Quasi-3D hyperbolic shear deformation theory.