

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme : **BENCHOHRA Mamia**

Intitulé de la thèse

Etude de la réponse mécanique des structures en matériaux composites avancés en utilisant un modèle de déplacement d'ordre élevé

Soutenu le :... /... /2017

Composition du jury :

Président	Dr.FEKRAR Abdelkader	MCA	U.D.L SBA
Directeur de thèse	Dr.BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Co-Directeur de thèse	Pr.TOUNSI ABDELOUAHED	Pr	U.D.L SBA
Examineur	Dr.DRAICHE Kada	MCA	U.de Tiaret
Examineur	Dr.HEBALI Habib	MCA	U.de Tiaret
Examineur	Dr.BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	C U DE RELIZANE

Année universitaire 2017-2018

DEDICACES

À la mémoire de mon très cher père.

À mon très cher mari.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbes.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon directeur de thèse **Mr BOURADA MOHAMED** maître de conférence classe A de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant.

Le tiens à témoigner toute ma gratitude à M^r le professeur **ADDA BEDIA E. A** pour son aide.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M^r le professeur **TOUNSI A** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés, son amabilité et son rigueur scientifique, son encouragements constants et son amical soutien ma grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **FEKRAR Abdelkader**, **BOUSSAHLA Abdelmoumen**, **DRAICHE Kada**, et **HEBALI Habib** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à ma famille, mon mari, mon frère, mes sœurs, ma belle-mère, mes belles-sœurs, mes nièces et mes neveux ainsi qu'à la mémoire de mon beau-père qui m'ont toujours encouragée. Et je n'oublierai pas ma mère qui m'apporte toujours son soutien sans faille.

Ainsi une partie de cette thèse leur revient.

Résumé

Dans ce travail, les plaques épaisses fonctionnellement graduées, sont étudiés en proposant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale quasi-3D. La théorie proposée considère à la fois les effets de l'étirement de l'épaisseur et de cisaillement transverse tout en respectant les conditions aux limites aux niveaux des faces supérieurs et inférieurs de la plaque sans l'utilisation de coefficient de correction de cisaillement. L'avantage du modèle proposé peut se voir dans son champ de déplacement où on trouve un nombre inférieur des variables et des équations de mouvement comparativement aux autres modèles quasi-3D. De plus, les résultats trouvés sont en bon corrélation avec ce de la littérature. Cet avantage est dû à l'utilisation des termes d'intégrale au champ de déplacement. En utilisant le principe d' Hamilton les équations de mouvement sont obtenues. Les solutions analytiques pour les problèmes statiques et dynamiques sont obtenues pour les plaques simplement appuyée.

Des exemples numériques sont proposés pour vérifier l'efficacité et la précision de la théorie développée.

Mots clés : Théorie quasi-3D ; Vibration ; Flexion ; Plaque Fonctionnellement.

Abstract

In this work, a new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded (FG) plates is proposed. The theory considers both shear deformation and thickness-stretching influences by a trigonometric distribution of all displacements within the thickness, and respects the stress-free boundary conditions on the upper and lower faces of the plate without employing any shear correction coefficient. The advantage of the proposed model is that it possesses a smaller number of variables and governing equations than the existing quasi-3D models, but its results compare well with those of 3D and quasi-3D theories. This benefit is due to the use of undetermined integral unknowns in the displacement field of the present theory. By employing the Hamilton principle, equations of motion are obtained in the present formulation. Closed-form solutions for bending and free vibration problems are determined for simply supported plates. Numerical examples are proposed to check the accuracy of the developed theory.

Keywords: Quasi 3D theory; Bending; Vibration; Functionally graded plate.

Table des matières

ملخص.....	1
RESUME.....	2
ABSTRACT.....	3
LISTE DES FIGURES.....	4
LISTE DES NOTATIONS.....	6
Introduction générale	8
Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués FGMs	
I.1. Introduction	12
I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient évalué	12
I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM	16
I.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté).....	16
I.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique)	18
I.4. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)	19
I.4.1 Estimation auto-consistante	20
I.4.2 Le schéma de Mori-Tanaka	20
I.4.3 Le modèle des sphères composites assemblées	21
I.4.4 Le modèle des cylindres composites assemblés.....	21
I.4.5 Les modèles micromécaniques	21
I.5 Domaines d'applications.....	22

I.5.1 l'aérospatial	22
I.5.2 La médecine	22
I.5.3 L'énergie	23
I.6. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM	23
I.6. 1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	24
I.6. 2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	25
I.6. 3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	26
I.7. Avantages et inconvénients des FGMs	27
I.7.1. Avantages des FGM	27
I.7.2. Inconvénients des FGM	28
I.8. Conclusion	28

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

II.1. Introduction	31
II-2 Modèles classiques	31
II-2.1 Premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres.....	31
II-2.1.1 Principe de Saint venant.....	31
II-2.1.2 Principe de Navier Bernoulli généralisé.....	31
II.2.2 Les modèles analytiques des plaques FGM	33
II.2.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	33
II.2.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	34
II.2.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	36
II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	38
II.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....	40
II.5 Conclusion.....	40

Chapitre III: Formulation Théorique De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epais

III.1 Introduction.....	42
III.2. formulations théoriques.....	42
III.3. solutions analytiques	49
III.4. Conclusion.....	51

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1. Introduction	53
IV.2. Résultats numériques.....	53
IV.2.1. Résultats pour le problème de flexion	53
IV.2.2. Résultats pour le problème de la vibration libre	59
IV.3. Conclusions.....	63
Conclusion générale	65
Références bibliographiques	67

Liste des figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués FGMs

Figure I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	13
Figure. I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin H.M., Sun L.Z., et Paulino G.H. 2004, Paulino G.H., Jin Z.H., et Dodds Jr. R.H. 2003).....	14
Figure. I.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite) (Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., et Kawasaki T. 2004).	15
Figure. I.4 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro chiota 1996).....	19
Figure. I.5 : Deux phases matérielles avec (a) microstructure squelettique, et (b) microstructure particulaire.....	21
Figure I.6 : Géométrie d'une plaque FGM.....	23
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	25
Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	26
Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	27

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

FigureII.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	34
Figure II-2 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy. J.N, (1997)	35
Figure II-3. Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy. J.N, 1997).....	36

Chapitre IV : Résultats et discussions

Figure. IV-1 : la variation de la fonction exponentielle $v(z)$ à travers l'épaisseur de la plaque rectangulaire	59
---	----

Figure. IV-2: Variation of dimensionless displacement and stresses through the thickness of plates ($a/h = 4, p = 0.5$).....62

Liste des notations

G	Module de cisaillement
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion

S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Introduction générale

Introduction générale

Des études théoriques sur la réponse mécanique des éléments des structures fabriqués à partir des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont pris une grande importance par les chercheurs scientifiques. Cela est dû à l'énorme potentiel des FGM dans diverses applications d'ingénierie telles que l'aérospatiale, la mécanique, le génie civil, l'automobile, l'électricité, et le domaine biomédical, etc (Celebi et al, 2016; Kar et Panda, 2015). Bien que les FGMs soient fondamentalement utilisés pour un environnement à haute température, son comportement à l'état ambiant est également nécessaire pour leur sécurité et leur fiabilité.

Étant donné que les effets de la déformation de cisaillement sont très considérés dans les FGM, des modèles de déformation de cisaillement tels que la théorie de la déformation de cisaillement de 1^{er} ordre (FSDT) et les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) doivent être utilisés. La théorie de 1^{er} ordre FSDT (Nguyen et al., 2008; Zhao et al., 2009; Hosseini-Hashemi et al., 2010; Hosseini-Hashemi et al., 2011a; Irschik, 1993; Nosier et Fallah, 2008; Saidi et al., 2011; Yang et al., 2009; Meksi et al., 2015; Mantari et Granados, 2015; Hadji et al., 2016; Bellifa et al., 2016) produit des résultats raisonnables, mais nécessite un coefficient de correction de cisaillement qui est difficile à évaluer correctement en raison de sa dépendance à plusieurs paramètres tel que les conditions aux limites et les conditions de chargement. Les théories d'ordre élevé HSDT Reddy, 2000; Ferreira et al., 2005; Pradyumna and Bandyopadhyay, 2008; Hosseini-Hashemi et al., 2011b; Xiang et al., 2008; Boudarba et al., 2013; Tounsi et al., 2013; Ait Amar Meziane et al., 2014; Zidi et al., 2014; Ait Yahia et al., 2015; Mahi et al., 2015 n'ont pas besoin d'un coefficient de correction de cisaillement, mais leurs équations d'équilibres sont plus compliquées que celles de la FSDT. **Il est d'indiquer** que l'influence de l'étirement de l'épaisseur est négligée ($\varepsilon_z = 0$) dans la FSDT et dans les HSDTs en considèrent généralement une **flèche constante** à travers l'épaisseur de la plaque. Bien que cette supposition soit justifiable pour des structures **FG modérément épaisses, mais elle n'est pas approprié pour les structures FG épaisses** (Qian et al. 2004). L'importance de l'influence de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG a été démontrée dans l'article présenté par Carrera et al. (2011).

Les théories quasi-3D sont des théories d'ordres élevés HSDT dans lesquelles la flèche est présentée comme une distribution d'ordre supérieur à travers l'épaisseur de la plaque, et par

Introduction générale

conséquent L'influence de l'étirement de l'épaisseur est incorporée. On peut trouver plusieurs modèles quasi-3D développés dans la littérature. Par exemple, Kant and Swaminathan (2002) a développé une théorie quasi-3D en exprimant toutes les composantes de déplacement par une variation cubique à travers l'épaisseur. Les théories de déformation de cisaillement proposées par Chen et al. (2009), Talha et Singh (2010), Reddy (2011), et Neves et al. (2013) sont basés sur une distribution cubique des déplacements dans le plan et une répartition **quadratique** de la flèche. Ferreira et al. (2011), Bousahla et al. (2014), et Hamidi et al. (2015) ont utilisés des fonctions trigonométriques pour le déplacement en plan et transversal. Neves et al (2012ab) ont utilisé des fonctions sinusoidales Neves et al (2012a) et hyperboliques Neves et al (2012b) pour les déplacements dans le plan, tandis que le déplacement transversal est modélisé par les fonctions polynomiales. Les théories développées par Hejali et al (2014), Belabed et al. (2014), et Bennoun et al. (2016) sont basées sur une variation hyperbolique de toutes les composantes de déplacement. Récemment, une formulation généralisée est proposée par Mantari et Guedes Soares (2012a) dans laquelle de nombreux modèles quasi-3D hybrides avec six variables peuvent être obtenus. Bien que les modèles quasi-3D hybrides de Mantari et Guedes Soares, (2012a) contiennent six variables, elles sont encore plus compliquées que la FSDT. Ainsi, une simple théorie quasi 3D est nécessaire pour les travaux futurs.

Le présent ouvrage vise à proposer une théorie quasi-3D simple avec seulement cinq variables pour la statique et la réponse dynamique des plaques FG. Le champ de déplacement est présenté en fonction d'une variation sinusoidale pour tous les déplacements. En considérant des termes d'intégrales dans les déplacements dans le plan, le nombre de variables de la théorie est réduit, ce qui permet d'économiser du temps de calcul. Sur la base du principe d'Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues et résolues pour résoudre des problèmes de flexion et de dynamiques d'une plaque simplement appuyée. Des exemples numériques sont proposés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle quasi-3D.

Ce travail sera donc présenté selon l'organisation qui suit :

- Le premier chapitre donne un aperçu détaillé sur les matériaux à des gradients évalués appelés « FGMs ».
- Dans le deuxième chapitre, une attention particulière sera portée aux auteurs ayant travaillé sur les différentes théories des plaques.
- Le troisième chapitre sera consacré à présenter une nouvelle théorie quasi-3D.

Introduction générale

- Dans le quatrième chapitre on présentera les résultats obtenus. Ils seront comparés avec d'autres résultats déjà publiés par d'autres auteurs. Cette comparaison nous a permis la validation de nos résultats.
- Ce travail s'achèvera en présentant une conclusion générale qui résumera notre travail incluant les perspectives pour des travaux futurs.

*Généralités Sur Les
Matériaux FGM*

I.1. Introduction :

Les matériaux à des gradients évalués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été défini au 21ème siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace par exemple pose alors le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme functionally graded materials (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures des plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient évalué :

Un matériau à gradient évalué c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables.

Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métal et de céramique (figure I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté doivent être élevés.

En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grand gradient de la température.

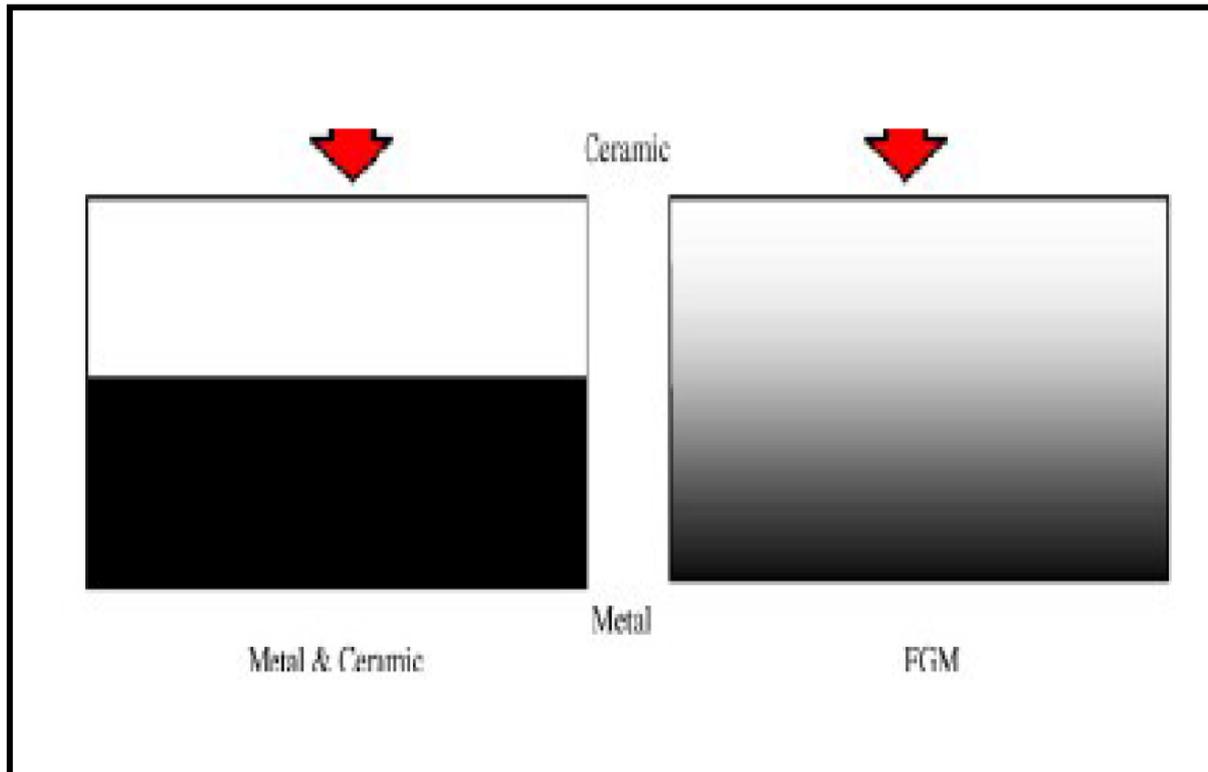


Figure I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de "Matériaux à Gradient Evalué " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Hirai T. et Chen L. 1999, Chan S.H. 2001, Uemura S. 2003).

Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.2 (Yin H.M., Sun L.Z., et Paulino G.H. 2004, Paulino G.H., Jin Z.H., et Dodds Jr. R.H. 2003) où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique.

C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

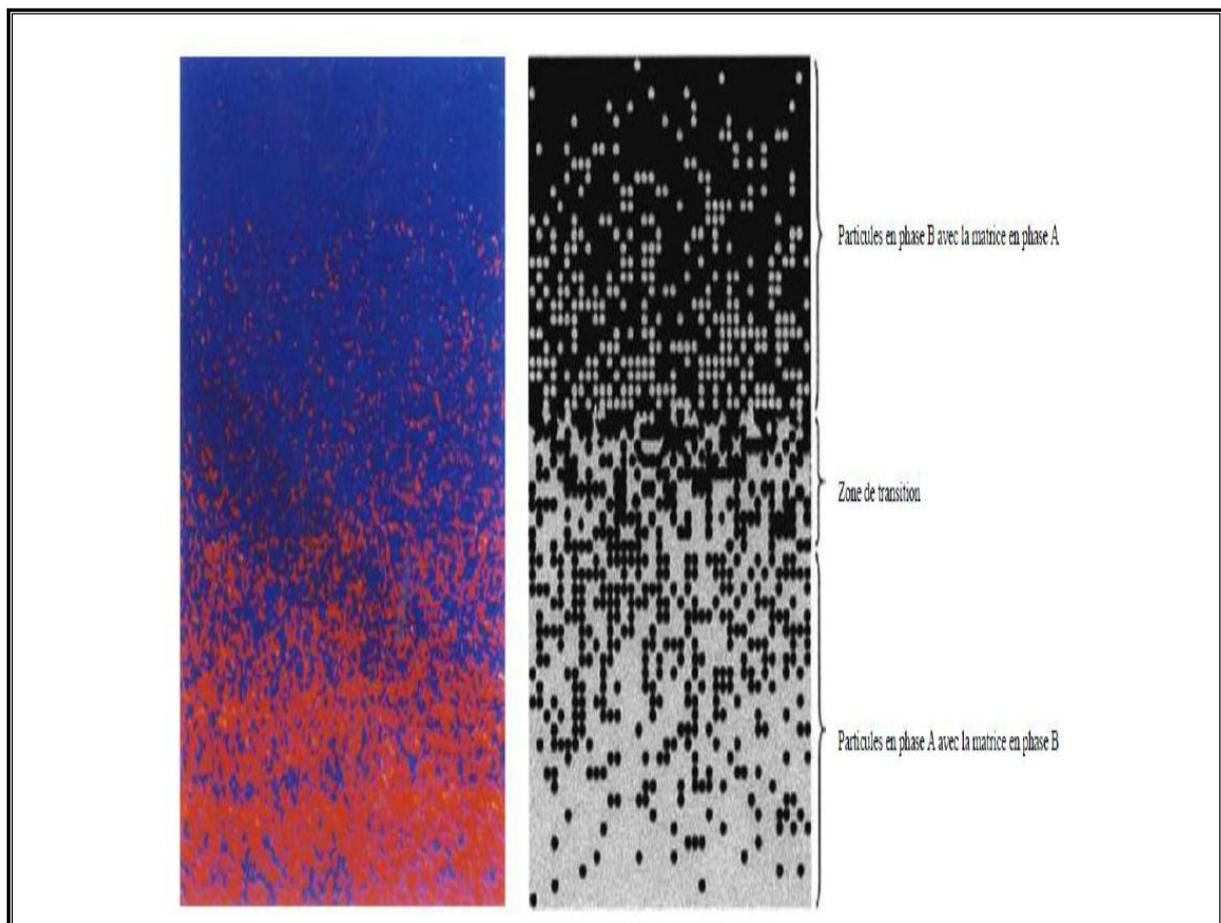


Figure. I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin H.M., Sun L.Z., et Paulino G.H. 2004, Paulino G.H., Jin Z.H., et Dodds Jr. R.H. 2003).

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc... (Viet.Tung. Nguyen 2004).

D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapportée dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes (Müller E., Drašar C., Schilz J., et Kaysser W.A. 2003), des déclencheurs (Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., et Du H. 2003), des armures métal/céramique (Liu L.-S., Zhang Q.-J., et Zhai P.-C. 2003), des détecteurs photoélectriques (Paszkiwicz B., Paszkiwicz R., Wosko M., Radziejewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., et Tlaczala M. 2008) et des implants dentaires (Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., et Kawasaki T. 2004).

Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités pendant les deux dernières décennies (Fuchiyama T. et Noda N. 1995, Markworth A.J., Ramesh K.S., et Parks W.P. 1995, Tanigawa Y. 1995, Noda N. 1999, Paulino G.H., Jin Z.H., et Dodds Jr. R.H. 2003). Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques (Hui- shen 2009).

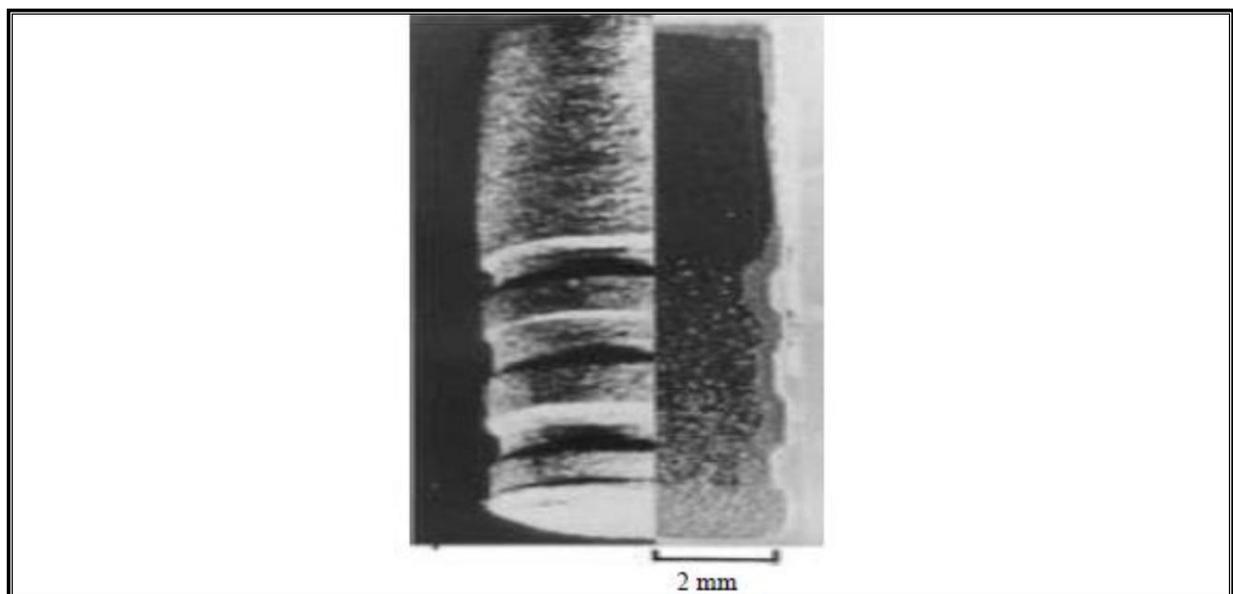


Figure. I.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite) (Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., et Kawasaki T. 2004).

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen (Shen 2004).

Récemment, Birman et Byrd (Birman V. et Byrd L.W. 2007) ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient évalué.

I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM :

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch. P Chartier . Huttepain. M 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

1.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) :

La véritable lancée de ce matériau à commencer en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie.

L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ».

Le souci été de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
2. Ténacité du matériau côté basse température.
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau (Abdizadeh H 1997).

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté hautes températures) et des métaux (côté basse température).

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD, PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation.

Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr3C2/Ni, TiB2/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par un forte lampe en xénon et une méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Les petites chambres de combustion pour des moteurs fusées faites de formations SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO₂/Ni par jet de plasma/galvano ont subis des essais de combustion au laboratoire aérospatial national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au-delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série.

À nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés (Ichiro chiota 1996). Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

1.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoioniques et thermoélectriques.

Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La figure. I.4 montre ce programme continu.

Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de ~2000°K à ~300°K.

La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

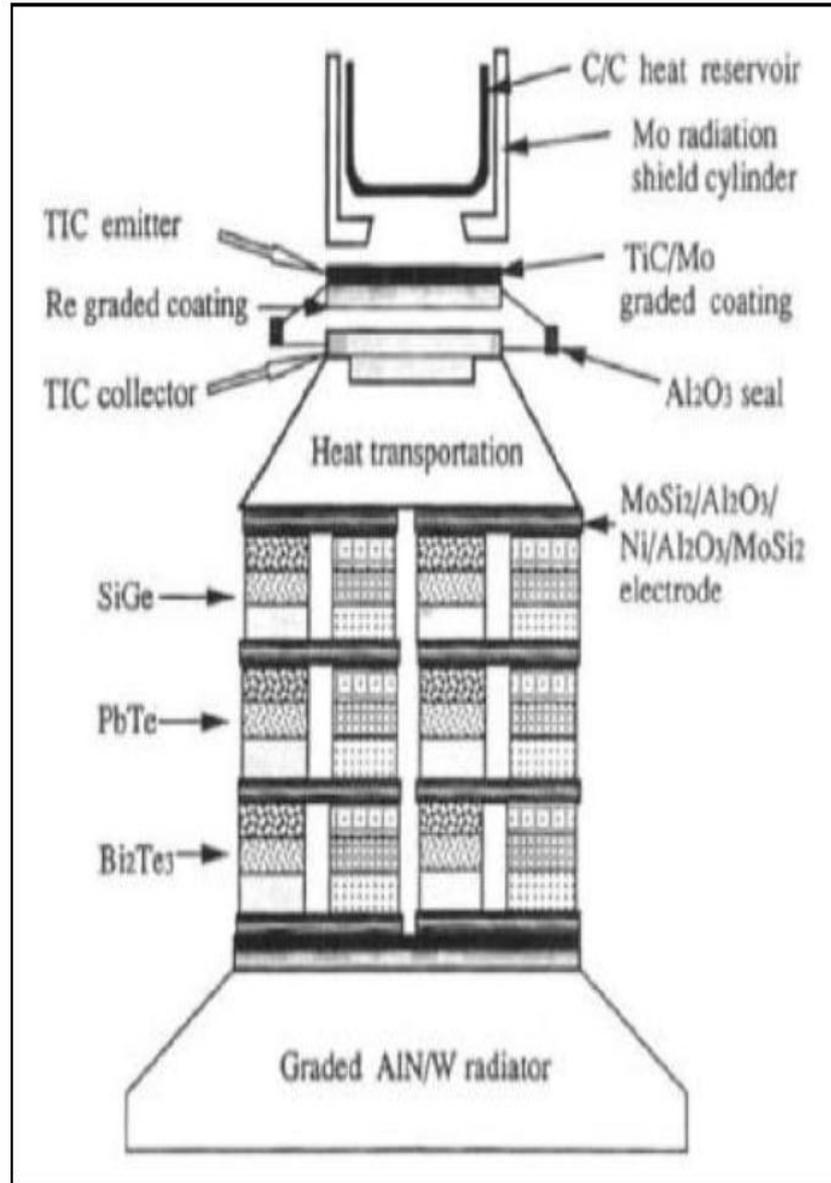


Figure. I.4 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro chiota 1996).

I.4. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)

La fabrication des FGMs peut être considérée par le mélange de deux phases distinctes de matériaux, par exemple, un mélange distinct d'un métal et une céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules peut ne pas être disponible. Ainsi, les propriétés effectives des matériaux FG, module d'élasticité, module de cisaillement, la densité, etc. sont en cours d'évaluation sur la base seulement de la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Plusieurs modèles micromécaniques ont été développés au cours des années afin de déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes.

Les approches analytiques, les méthodes d'éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des FGMs. Les sujets les plus importants de la modélisation des FGMs sont : les déformations élastiques, les contraintes élastiques, déformation plastique et la déformation au fluage à température élevée, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques disponibles dans la littérature pour la modélisation des FGMs sont présentées dans les sections suivantes.

1.4.1 Estimation auto-consistante :

Cette méthode décrit ces estimations par la solution d'un problème élastique dans laquelle une inclusion ellipsoïdale est noyée dans une matrice possédant les propriétés effectives du matériau composite. Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau dont les propriétés effectives sont ceux du composite. Cette méthode ne fait pas de distinction entre la matrice et la phase de renforcement et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans lequel les rôles des phases sont inter-changés.

Elle est donc particulièrement adaptée pour la détermination des modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure squelettique interconnecté comme le montre la Fig. 5a. Il s'agit d'une méthode d'analyse rigoureuse applicable à des matériaux composites à deux phases isotropes (Hill R. A 1965, Hashin Z 1968, Bhaskar K, Varadan TK 2001).

1.4.2 Le schéma de Mori-Tanaka :

Un tel procédé fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée ont une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue comme illustré sur la Fig. 5b. Cette méthode suppose une petite particule sphérique noyée dans une matrice. La phase de la matrice (désignée par l'indice 1), est supposée être renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière (désignée par l'indice 2).

K_1 , G_1 et V_1 représente le module de compressibilité, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase matrice, respectivement, tandis que K_2 , G_2 et V_2 représentent les propriétés matérielles et la fraction volumique correspondant a la phase particulière. Il convient de noter que $V_1 + V_2 = 1$.

La densité de la masse effective à un point peut être donné par la règle de mélange ($\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$) (Mori T, Tanaka T 1973, Benveniste Y. 1987).

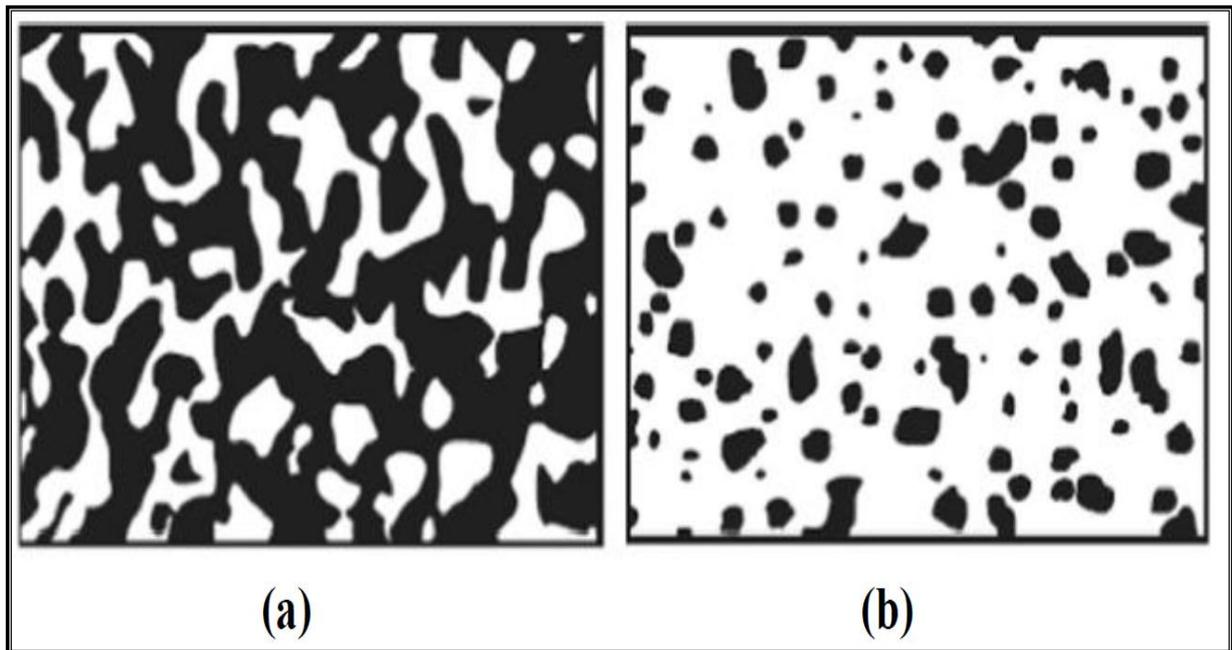


Figure. I.5 : Deux phases matérielles avec (a) microstructure squelettique, et (b) microstructure particulaire.

1.4.3 Le modèle des sphères composites assemblées :

Dans ce modèle, les propriétés effectives des matériaux composites isotropes ont été déterminées de façon analytique, qui est basée sur l'hypothèse simplificatrice dont le matériau composite est rempli d'un assemblage fractale de sphères enrobées dans une matrice sphérique concentrique de diamètres différents, tels que ces sphères remplissent complètement le volume du composite (Hashin Z. 1962, Hashin Z. 1964).

1.4.4 Le modèle des cylindres composites assemblés :

Ce modèle est utilisé pour les composites orthotropes et nécessite à la fois que la fibre de renfort et la matrice sont isotropes, tandis que les volumes représentatifs élémentaires (RVEs) de la microstructure est transversalement isotrope dans des plans matériels qui sont perpendiculaires à la direction des fibres (Hashin Z. 1964, Hashin Z. 1979).

1.4.5 Les modèles micromécaniques :

Ces modèles des volumes représentatifs élémentaires (RVEs) peuvent être construits par des simulations en éléments finis (EF) pour les matériaux composites isotropes ou orthotropes. Les méthodes impliquant les modèles EF tentent de simuler avec précision la microstructure réaliste du RVE, et déterminer la réponse thermomécanique due aux charges appliquées de telle sorte

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

que les propriétés des matériaux effectives peuvent être calculées pour différentes fractions de volume des constituants.

C'est peut-être la méthode la plus précise, puisque la microstructure considérée est directement modélisée par des éléments finis en trois dimensions. Malheureusement, un inconvénient de cette méthode est que plusieurs modèles doivent être construits afin de déterminer les propriétés des matériaux pour différentes fractions de volume de la matière constitutive; même si cela peut être allégé avec un logiciel approprié qui permet d'automatiser le processus (Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V. 1997 et, Caruso JJ, Charnis CC. 1986).

I.5 Domaines d'applications :

Les FGMs (Functionally Graded Materials) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux.

Les FGMs les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques (L.Marin, 2005).

Le potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles. Quelques-unes d'entre elles sont accentuées ci-dessous :

I.5.1 l'aérospatial :

Les FGMs peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend appropriés pour l'usage. Si la technique de traitement est améliorée, les FGMs sont prometteurs et peuvent être employés dans des secteurs plus larges d'espace.

I.5.2 La médecine :

Des tissus vivants comme des os et des dents sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement évalués de la nature, un matériau compatible est nécessaire qui servira comme bio-tissu d'origine. Le candidat idéal pour cette application est le FGM.

Les FGMs ont un large éventail d'application en chirurgie dentaire, et les applications orthopédiques pour les dents et le remplacement de l'os.

1.5.3 L'énergie :

Les FGMs sont employés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés en tant qu'enduit protecteurs sur des lames de turbine dans les turbomoteurs (M. Niino, K. Kisara et M. Mori 2005).

I.6. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Un matériau FGM peut être défini par la variation des fractions volumiques.

Considérant une plaque rectangulaire (Fig I.4), .Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne du plan est dans la direction d'épaisseur.

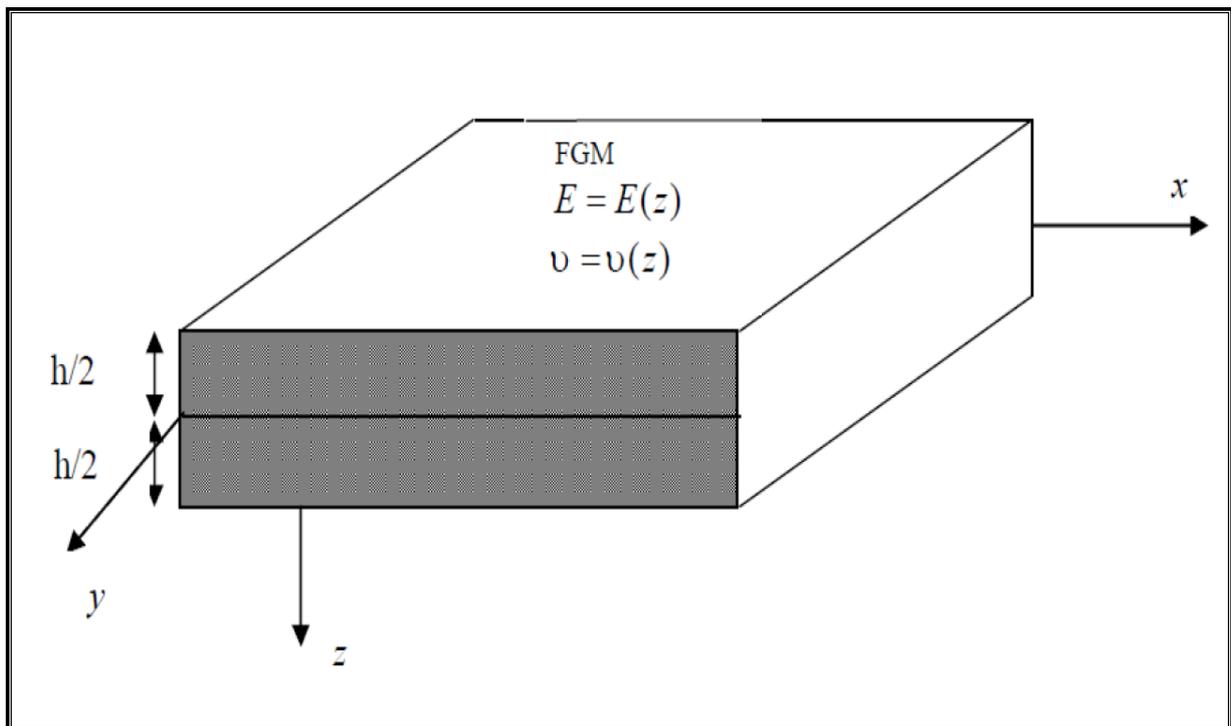


Figure I.6 : Géométrie d'une plaque FGM.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Les propriétés matérielles, module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Cependant, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

L'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque est constant. Cependant, le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi.

La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

1.6. 1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une fonction de loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où: E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface du métal (surface inférieure : $z = -h/2$) et de la surface du céramique supérieure : $z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7 ci-dessous :

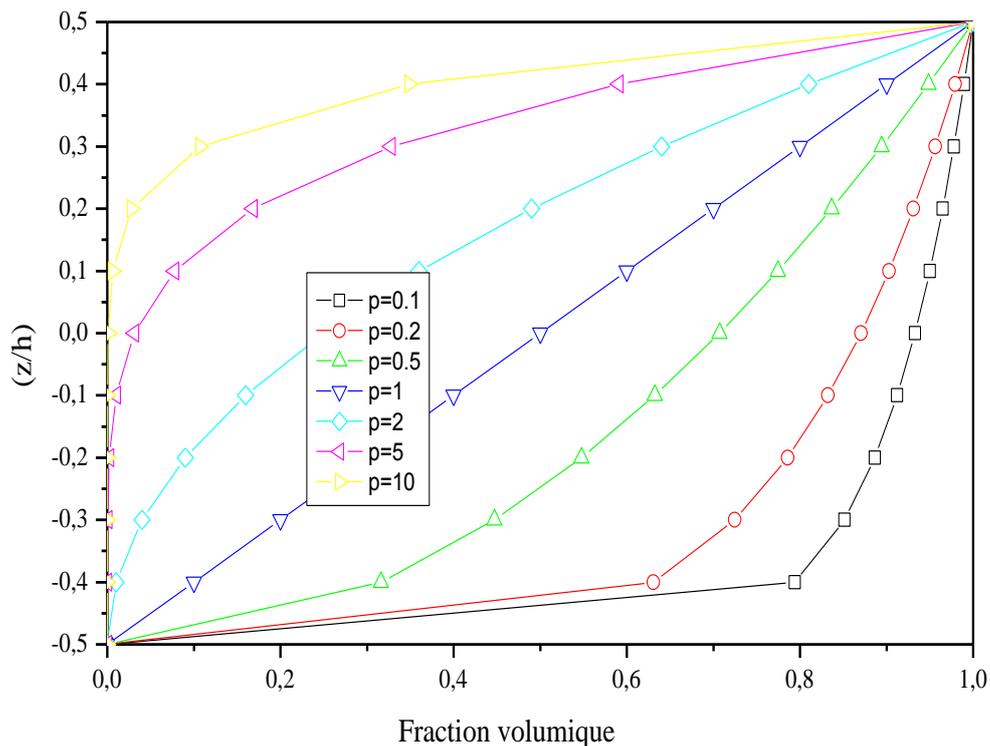


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

On distingue clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

1.6. 2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement (G. Bao., L. Wang 1995). Par conséquent, (Chi . Shyang-ho. , Chung Yen-Ling, 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

Et en utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé comme suit :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1-V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1-V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

La figure I.8 montre la variation de la fraction volumique d'une plaque S-FGM.

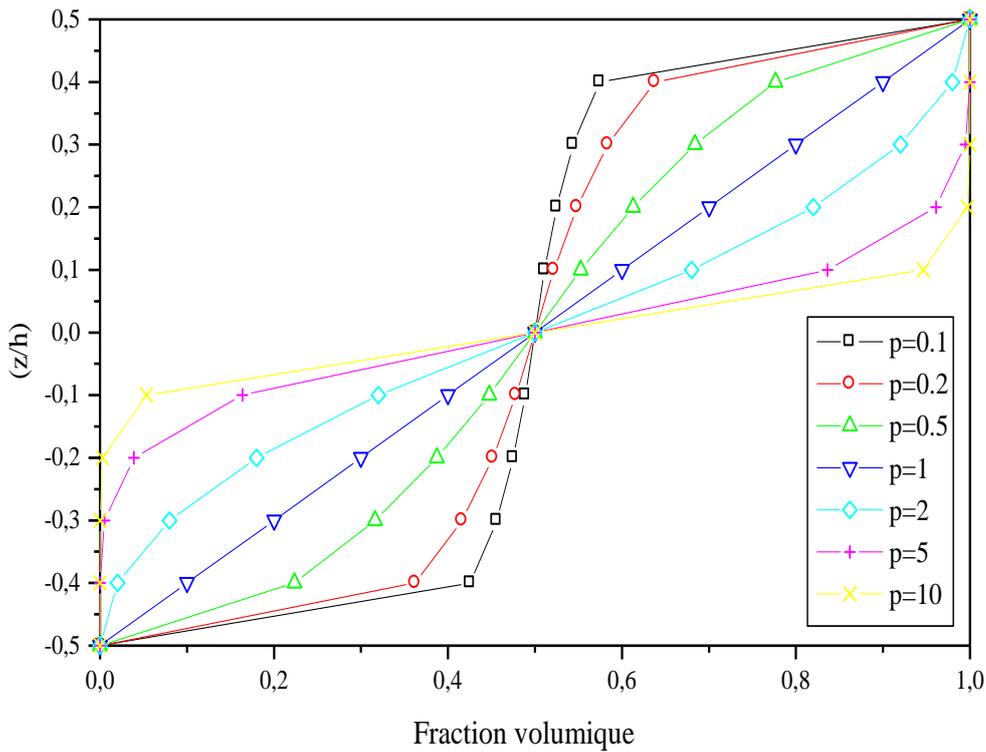


Figure I.8: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

1.6. 3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

La fonction exponentielle est la plus utilisée pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM. Elle s'écrit de la forme suivante :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La figure I.9 ci-dessous représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

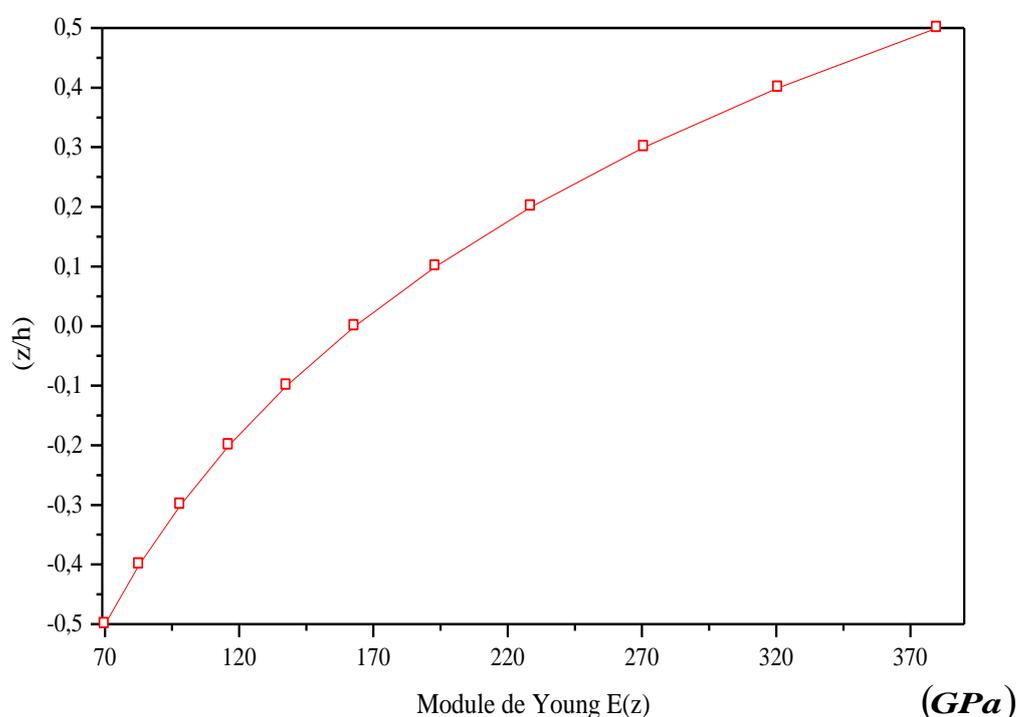


Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7. Avantages et inconvénients des FGMs :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

I.7.1. Avantages des FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement (Narottam.P et al, 2011) et beaucoup d'autres soulignent divers avantages

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple métal _ céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- ✓ Suppression de **délaminage**.

1.7.2. Inconvénients des FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T1) et une céramique avec une température de fusion (T2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T1 \ll T2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique.

Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (Narottam.P et al, 2011).

I.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leur développement, leurs propriétés, leurs avantages et inconvénients ainsi que leurs domaines d'application.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradients Evalués FGMs

Dans le chapitre suivant, on exposera une revue bibliographique sur les différentes théories rencontrées dans la littérature pour l'étude de la déformation de cisaillement, ainsi qu'un aperçu des études rapportées sur des plaques en FGMs.

*Les Différentes
Théories Des
Plaques*

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons des modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

On trouve dans la littérature une synthèse complète sur les différents modèles existants de type poutres en élasticité tridimensionnelle ou de type plaques (Noor. A. K & W. S. Burton 1989, Kapania. R. K. & S. Raciti 1989, Kant. T & K. Swaminathan 2000, Carrera. E.2000).

La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (**par exemple faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module de cisaillement d'élasticité longitudinale des peaux dans le cas des structures sandwich**) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description du cisaillement transverse (Nguyen. T. K., K. Sab., G. Bonnet, 2007).

II-2 Modèles classiques

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur (Reissner. E & Y.Stavesky 1961, Yang. P.C, C.H.Norris & Y.Starsky 1966) où les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées et la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation.

II-2.1 Premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres

II-2.1.1 Principe de Saint venant

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de force, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin le point d'application des charges.

II-2.1.2 Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul.

Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties.

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial.

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, vis-à-vis la distance des deux sections infiniment voisines.
- Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre.

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambement), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff (Kirchhoff. G, 1950) qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces.

La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin Reissner (Reissner.E, 1945), qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

Elle conduit, de par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transverse constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion.

Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transverse y sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes.

Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre Topdar (Topdar. P, A .H. Sheikh et N.Dhang 2003), auquel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces.

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

Certes, les facteurs de correction du cisaillement transverse, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications.

Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre élevé à 3. Elle a donné des résultats précis mais fut abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres (Whitney, J.M, 1969).

D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

II.2.2 Les modèles analytiques des plaques FGM

II.2.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love (1888) sont les suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation (figure II.1), La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

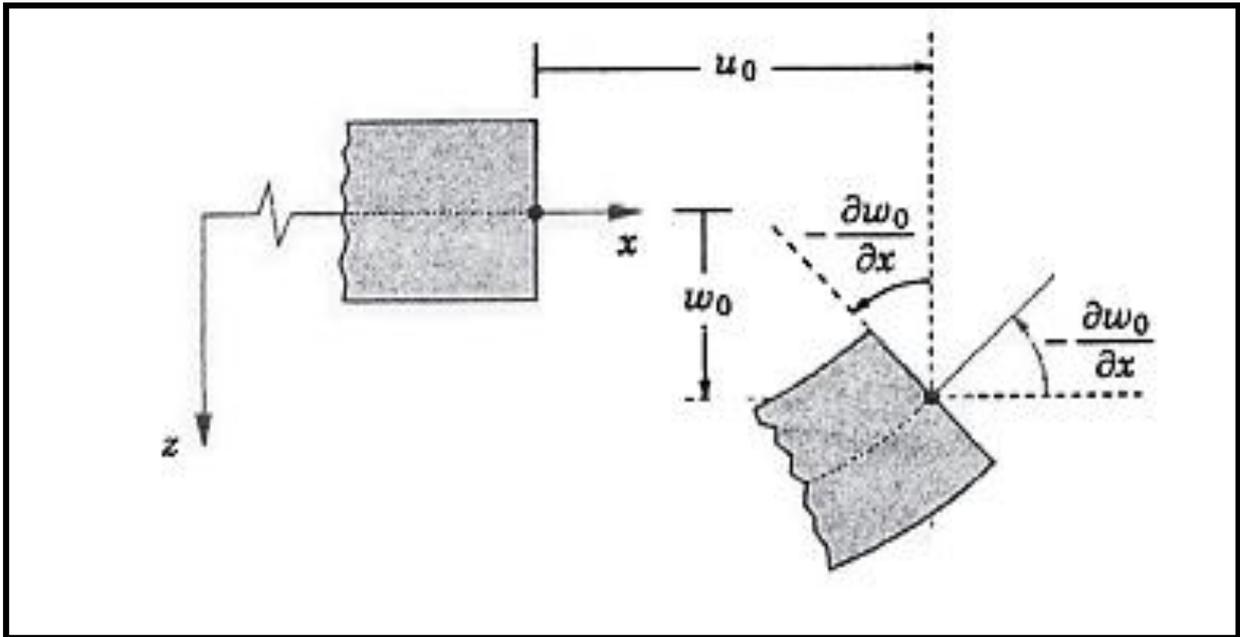
Ce modèle de plaque peut être référé à (Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, 1959), et (Reddy. J.N 1997 et 1999).

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}$$

II.1

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$)



FigureII.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff .

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.2.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff).

Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

II.2

Où (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements dans la surface moyenne et les rotations autour de l'axe y et x , respectivement, Figure II.2. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des plaques classique décrite dans la section précédente

en remplaçant $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

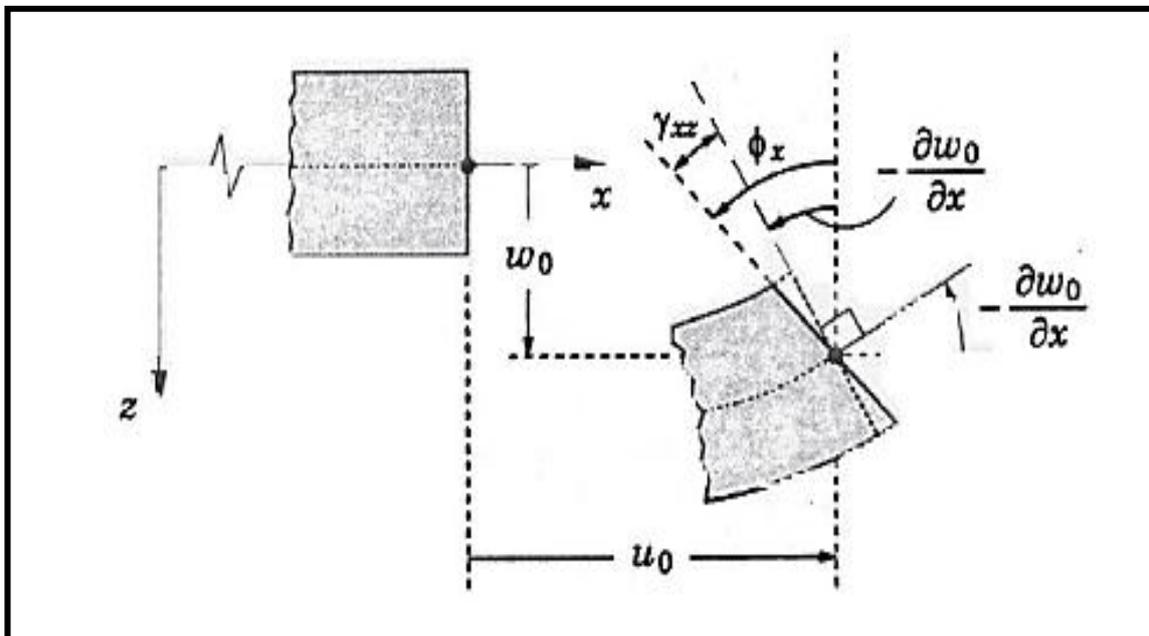


Figure II-2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy. J.N, (1997)).

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

II.2.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction.

Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hilderband, F.B, Reissner, E, Thomas, G.G 1949, Naghdi.P.M, 1957, Reissner. E 1975, Reddy. J.N 1984 et, Kant.T, K. Swaminathan, 2002).

Plusieurs modèles de plaque ont été introduits, utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

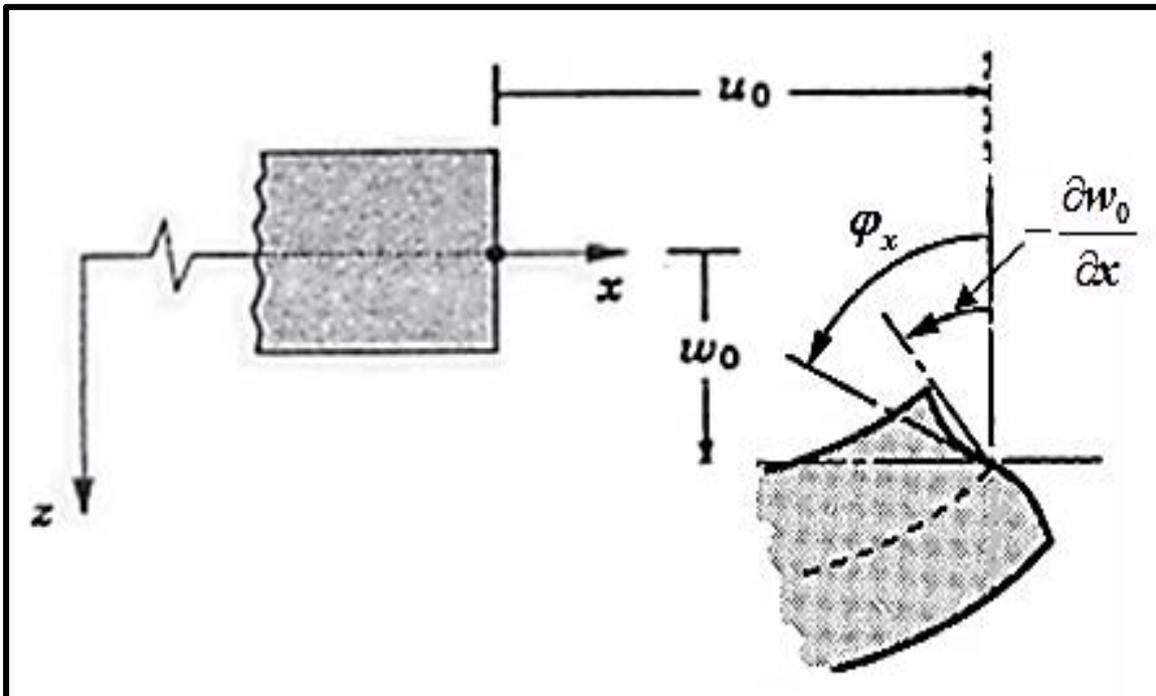


Figure II-3. Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy. J.N, 1997).

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{II.3}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (Reddy. J.N, 1997 et, 1999), sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)\tag{II.4}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Il donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (M. Touratier 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\tag{II.5}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad \text{II.6}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. 2010 est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad \text{II.7}$$

II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$.

Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II-3) (M. Touratier 1991, Whitney. J.M, 1973, Nelson. R.B & D.R.Lorch, 1974 et, Lo. K.H & R.M.Christensen, 1977). Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan. S.A, 1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

- L'approche de Reissner (Reissner.E, 1945), Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

- L'approche de Reddy (Reddy J.N. 1987), Levinson et Murthy (Murthy. M.V.V, 1981) avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Plaques

Dans le modèle de Reddy (Reddy J.N. 1987), **le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle** donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (M. Touratier 1991) avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II.8}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad \text{II.9}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. On obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur. Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (Reddy. J.N, 1984).

Récemment, Afaq et al (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{II.10}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

II.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi (Shimpi, R.P. 2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane et al. 2010 ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM.

Récemment Thai et Kim (Thai, H.-T. et Kim, S.-E. 2010 et 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwiches respectivement.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

*Formulation Théorique De La Flèche
Et La Vibration Des Plaques
FG Epais*

III.1 Introduction

La présente étude vise à proposer une théorie quasi-3D simple avec seulement cinq variables pour la flexion et la réponse dynamique des plaques FG, avec un champ de déplacement en fonction d'une variation sinusoïdale.

En considérant l'utilisation des termes d'intégrales au champ de déplacement, le nombre de variables de la théorie est réduit, ce qui permet d'économiser le temps de calcul. Sur la base du principe d'Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues et résolues pour résoudre des problèmes de flexion et de dynamiques d'une plaque simplement appuyée.

III.2. formulations théoriques

La cinématique de la théorie quasi-3D en considérants une distribution sinusoïdale pour toutes les composantes de déplacement est généralement donnée par:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t) \quad \text{III-1a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t) \quad \text{III-1b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\varphi_z(x, y, t) \quad \text{III-1c}$$

Où $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ et φ_z sont les six déplacements inconnus du plan médian de la plaque, et $f(z)$ est une fonction de forme indique la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Dans ce travail, la fonction de forme choisie est la fonction sinusoïdale donnée par Touratier (Touratier, M. 1991) comme :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{III-2}$$

Avec h est l'épaisseur de la plaque. En considérant que $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$, la cinématique de la théorie quasi-3D proposée peut s'exprimer sous une forme simple comme :

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaisses

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{III-3a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad \text{III-3b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad \text{III-3c}$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. On peut observer que la cinématique dans l'équation (III-3) utilise seulement cinq inconnues (u_0 , v_0 , w_0 , θ et φ_z). Les contraintes non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation. (III-3) sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad \text{III-4}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \text{III-5a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad \text{III-5b}$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad \text{III-5c}$$

On peut observer à partir de l'équation (III-4) que les contraintes de cisailment transversales (γ_{xz} , γ_{yz}) sont **nuls** sur les surfaces supérieure ($z = h/2$) et inférieure ($z = -h/2$) de la plaque.

Un coefficient de correction de cisailment n'est pas donc nécessaire.

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une procédure de type de Navier et peuvent être exprimées comme suit :

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaissees

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{III-6}$$

Où les coefficients A' et B' sont considérés selon le type de solution utilisée, dans ce cas par la méthode Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad \text{III-7}$$

Où α et β sont définis dans l'expression (III-25b).

Les relations constitutives d'une plaque FG peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{III-8}$$

Où C_{ij} sont les constantes élastiques tridimensionnelles définies par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{III-9a}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{III-9b}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \text{III-9c}$$

Avec $E(z)$ et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson d'une plaque FG.

Dans ce travail, deux méthodes d'homogénéisation sont utilisées pour calculer le module de Young : (1) la distribution exponentielle, et (2) le schéma de Mori-Tanaka.

Pour la distribution exponentielle, le module de Young est donné par (Belabed et al 2014, Zenkour et al 2007).

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaisses

$$E(z) = E_0 e^{p(0.5+z/h)} \quad \text{III-10}$$

Où $E_b = E_0$ et $E_t = E_0 e^p$ présentent les module de Young des surfaces inférieure et supérieure de la plaque FG respectivement. E_0 est le module de Young de la plaque homogène, et p est un coefficient variable non négatif (la loi de puissance) qui contrôle la variation de la matière dans l'épaisseur de la plaque.

Pour le schéma de Mori-Tanaka, le module de Young est donné comme (Benveniste (1987), Mori et Tanaka, (Mori T, Tanaka, K. 1973).

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \frac{V_c}{1 + V_m \left(\frac{E_c}{E_m} - 1 \right) \frac{1 + \nu}{3 - 3\nu}} \quad \text{III-11}$$

Où les indices m et c désignent respectivement les constituants métalliques et céramiques, G est le module de cisaillement. Les fractions de volume de la phase métallique V_m et de la phase céramique V_c sont définies par :

$$V_m = 1 - V_c \quad \text{et} \quad V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad \text{III-12}$$

La densité effective $\rho(z)$ est déterminée en utilisant la distribution donnée par la loi des mélanges de Voigt comme (Reddy, J.N. 2000) :

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) V_c \quad \text{III-13}$$

Le principe d'Hamilton est employé ici pour déduire les équations du mouvement. Le principe peut être exprimé analytiquement comme :

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad \text{III-14}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation, δV est la variation du travail externe effectué par la charge extérieure appliquée à la plaque, δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est exprimée explicitement par :

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaissees

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\
 &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\
 &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0
 \end{aligned} \tag{III-15}$$

Où A est la surface supérieure de la plaque, et les résultantes des efforts, N , M et S sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy); \\
 N_z &= \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz
 \end{aligned} \tag{III-16}$$

En substituant de l'équation (III-4) dans l'équation (III-8), et les résultats trouvés dans l'équation (III-16), peuvent être écrites en termes de déplacements généralisés $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$ comme :

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{array} \right\} \tag{III-17a}$$

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaissees

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III-17b}$$

Où

$$(A_{ij}^s, A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad \text{III-18a}$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) C_{ij} dz \quad \text{III-18b}$$

Le travail virtuel des charges extérieures s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA \quad \text{III-19}$$

Où q est la charge transversale appliquée.

La variation de l'énergie cinétique est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] + J_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z) \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + K_0 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z) \right\} dA \quad \text{III-20} \end{aligned}$$

$\rho(z)$ est la masse volumique exprimée par l'équation (III-13) ; et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques qui sont définies par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad \text{III-21a}$$

$$(J_0, J_1, J_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (g, f, z f) \rho(z) dz \quad \text{III-21b}$$

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaissees

$$(K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (g^2, f^2) \rho(z) dz \quad \text{III-21c}$$

Les équations de mouvement peuvent être déduites en remplaçant δU , δV et δK des équations (III-15), (III-19) et, (III-20) dans l'équation (III-14), intégrant par parties et en collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$, et $\delta \varphi_z$:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_0 \ddot{\varphi}_z \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ \delta \varphi_z : -N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad \text{III-22}$$

En remplaçant l'équation (III-17) par l'équation (III-22), les équations de mouvement de la théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D de cette étude peut être écrite en termes de déplacements $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$ comme suit:

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 + X_{13} d_{11} \varphi_z - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_{11} \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad \text{III-23a}$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + X_{23} d_{22} \varphi_z - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_{22} \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_{22} \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_{22} \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad \text{III-23b}$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z \\ - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta \\ + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) \\ - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad \text{III-23c}$$

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaisses

$$\begin{aligned}
 & - (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_2 v_0 \\
 & - k_1 Y_{13}^s \varphi_z - k_2 Y_{23}^s \varphi_z + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2 (D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 \\
 & - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2 H_{12}^s k_1 k_2 \theta - ((k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta \\
 & + A_{44}^s (k_2 B') d_{22} \varphi_z + A_{55}^s (k_1 A') d_{11} \varphi_z = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) \\
 & - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta})
 \end{aligned}$$

III-23d

$$\begin{aligned}
 & - X_{13} d_1 u_0 - X_{23} d_2 v_0 - Z_{33} \varphi_z + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 \\
 & + (A_{44}^s - Y_{23}^s) (k_2 B') d_{22} \theta + (A_{55}^s - Y_{13}^s) (k_1 A') d_{11} \theta + A_{44}^s d_{22} \varphi_z + A_{55}^s d_{11} \varphi_z = J_0 \ddot{\varphi}_z + K_0 \ddot{w}_0
 \end{aligned}$$

III-23e

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentiels.

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2).$$

III-24

III.3. solutions analytiques

Dans cette partie, une plaque rectangulaire simplement appuyée est considérée avec une longueur a et une largeur b , sous une charge transversale q . En utilisant la procédure de la solution de Navier, les expressions des déplacements ($u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$) sont prises:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix}$$

III-25a

Avec :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b$$

III-25b

Où $i = \sqrt{-1}$, ($U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$) sont les amplitudes maximales des déplacements, et ω la fréquence des vibrations. La charge transversale q est également exprimée par la série double de sinus de Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

III-25c

Chapitre III: Formulations Théoriques De La Flèche Et La Vibration Des Plaques FG Epaisses

Pour le cas d'une charge répartie sinusoïdale, le coefficient $Q_{mn} = q_0$ indique l'intensité de la charge au centre de la plaque. En remplaçant les équations (III-25) dans les équations (III-23), les solutions analytiques peuvent être déterminées par :

$$\left(\begin{array}{ccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{array} \right) - \omega^2 \left(\begin{array}{ccccc} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m_{35} & 0 & m_{55} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{III-26}$$

Où

$$\begin{aligned} s_{11} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 A_{66}, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\ s_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) + \alpha\beta^2 B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'), \quad s_{15} = -\alpha X_{13}, \quad s_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\ s_{23} &= -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \quad s_{24} = -\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta(k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \\ s_{25} &= -\beta X_{23}, \quad s_{33} = \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\ s_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \\ s_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23}, \\ s_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s \\ s_{45} &= k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s, \quad s_{55} = \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33} \\ m_{13} &= -\alpha I_1, \quad m_{11} = m_{22} = I_0, \quad m_{14} = \alpha k_1 A' J_1, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = \beta k_2 B' J_1, \\ m_{33} &= I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \\ m_{44} &= K_2((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2), \quad m_{35} = J_0, \quad m_{55} = K_0 \end{aligned}$$

III-27

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution des problèmes de vibration libre ainsi que de la flexion par une nouvelle théorie de déformation du cisaillement sinusoïdal quasi-3D avec cinq variables, appliquée sur les plaques en FGM simplement appuyée.

Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion, et de la vibration des plaques FG simplement appuyées. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature.

IV.2. Résultats numériques

IV.2.1. Résultats pour le problème de flexion

Considérons une plaque FG simplement appuyée soumise à des charges sinusoïdales. Le module de Young $E(z)$ est considéré comme variant exponentiellement dans l'épaisseur de la plaque (équation III-10). La variation de la fonction exponentielle $V(z) = e^{p(0.5+z/h)}$ à travers l'épaisseur de la plaque est démontrée dans la figure IV-1 pour différentes valeurs de p . Le coefficient de Poisson de la plaque est supposé être constant à travers l'épaisseur et égal à $\nu = 0.3$. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont :

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \frac{10E_0h^3}{q_0a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{w}(z) &= \frac{10E_0h^3}{q_0a^4} u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\sigma}_x(z) &= \frac{h^2}{q_0a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{\sigma}_y(z) &= \frac{h^2}{q_0a^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{10h^2}{q_0a^2} \tau_{xy}(0, 0, z), & \bar{\tau}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \\ & & \bar{\tau}_{yz}(z) &= \frac{h}{q_0a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right) \end{aligned} \quad \text{IV-1}$$

Les déplacements et les contraintes non dimensionnels sont présentés dans les tableaux IV-1, IV-2, IV-3 et IV-4 pour différentes valeurs du rapport b/a , du rapport d'épaisseur a/h , et du paramètre matériel p . Les répartitions des déplacements et des contraintes non dimensionnelles à travers l'épaisseur sont également présentées dans la figure IV-2 pour une plaque épaisse en FGM avec $a/h = 4$ et $p = 0.5$.

Les résultats calculés sont comparés aux solutions exactes 3D (Zenkour, A. 2007), et quasi-3D (Zenkour, A. (2007), Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013), Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012a), Thai, H.T., Vo, T.P., Bui, T.Q., Nguyen, T.K. (2014). Il convient de noter que les solutions quasi 3D (Zenkour, A. (2007), Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013)) sont basées

Chapitre IV : Résultats Et Discussions

sur une variation trigonométrique des déplacements en plan et transversal, tandis que les solutions quasi 3D (Mantari, J.L., Guedes Soares, C. 2012a) sont basés sur une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation parabolique du déplacement transversal dans l'épaisseur. En outre, les résultats de HSDT (Mantari et Guedes Soares 2012b) sont également donnés pour démontrer l'importance d'introduire l'influence de l'étirement dans l'épaisseur.

La solution HSDT ((Mantari and Guedes Soares 2012b) est basée sur une variation trigonométrique des déplacements dans le plan et un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur (c'est-à-dire que l'effet d'étirement d'épaisseur est négligé $\varepsilon_z = 0$

On constate que les résultats calculés sont en excellent accord avec les solutions 3D et quasi 3D, en particulier celles de Mantari et Guedes Soares (Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013) et, Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012a)). La théorie quasi-3D proposée donne les mêmes résultats à ceux de la théorie quasi-3D sinusoidale (Zenkour, A. 2007).

Il convient de noter que la théorie proposée est encore plus simple que la théorie quasi-3D sinusoidale (Zenkour, A. 2007), car, dans la théorie actuelle, seuls cinq inconnus sont utilisés alors que dans la théorie de Zenkour (Zenkour, A. 2007), on retrouve six inconnus. Puisque la présente théorie quasi-3D et les autres théories quasi-3D introduisent l'influence de l'étirement d'épaisseur, leurs résultats sont très proches les uns aux autres. Cependant, le HSDT (Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012b)), qui néglige cet effet, fournit des résultats inexacts et surestime légèrement le déplacement transversal, en particulier pour les plaques très épaisses c'est-à-dire $a/h = 2$ (voir les tableaux IV-1 et, IV-3).

Les erreurs dans la HSDT sont réduites avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h . En général, la théorie quasi-3D proposée est très précise et comparable à la solution 3D, même dans le cas des plaques très épaisses $a/h = 2$.

Il faut indiquer que la théorie proposée se compose de cinq inconnues, tandis que le nombre de variables dans la HSDT (Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012b)) et les autres théories quasi 3D (Mantari et Guedes Soares, 2013 et 2012a ; Zenkour, A. (2007)) est cinq et six, respectivement. Par conséquent, on peut conclure que la théorie quasi-3D développée n'est pas seulement plus précise que la HSDT ayant les mêmes cinq inconnues, mais aussi comparable aux théories quasi-3D possédant plus de variables.

Chapitre IV : Résultats Et Discussions

Tableau IV-1: les flèches non dimensionnelles $\bar{w}(0)$ des plaques ($a/h = 2$).

b/a	Théorie	P					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
6	3D (Zenkour, 2007)	1.6377	1.4885	1.3518	1.2269	1.0593	0.8261
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.6294	1.4731	1.3307	1.2010	1.0282	0.7906
	Quasi-3D ^(a)	1.6365	1.4795	1.3364	1.2062	1.0333	0.7939
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.6367	1.4796	1.3365	1.2063	1.0327	0.7939
	Présente	1.6294	1.4731	1.3307	1.2010	1.0282	0.7906
	HSDT ^(b)	1.7347	1.5688	1.4182	1.2815	1.1003	0.8500
5	3D (Zenkour, 2007)	1.6095	1.4601	1.3261	1.2035	1.0391	0.8102
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.5983	1.4449	1.3052	1.1780	1.0086	0.7754
	Quasi-3D ^(a)	1.6053	1.4513	1.3109	1.1832	1.0135	0.7787
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.6054	1.4513	1.3110	1.1833	1.0130	0.7787
	Présente	1.5983	1.4449	1.3052	1.1780	1.0086	0.7754
	HSDT ^(b)	1.7025	1.5397	1.3919	1.2576	1.0798	0.8340
4	3D (Zenkour, 2007)	1.5515	1.4101	1.2807	1.1624	1.0035	0.7824
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.5435	1.3954	1.2605	1.1376	0.9740	0.7487
	Quasi-3D ^(a)	1.5504	1.4017	1.2661	1.1427	0.9788	0.7520
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.5505	1.4018	1.2662	1.1428	0.9783	0.7520
	Présente	1.5435	1.3954	1.2605	1.1376	0.9740	0.7487
	HSDT ^(b)	1.6458	1.4885	1.3455	1.2157	1.0437	0.8060
3	3D (Zenkour, 2007)	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6962
	Quasi-3D ^(a)	1.4421	1.3037	1.1776	1.0628	0.9104	0.6993
	Quasi-3D ^(c)	1.4419	1.3035	1.1774	1.0626	0.9096	0.6991
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.4422	1.3038	1.1777	1.0629	0.9098	0.6993
	Présente	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6962
2	3D (Zenkour, 2007)	1.1945	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
	Quasi-3D ^(a)	1.1941	1.0795	0.9750	0.8799	0.7538	0.5786
	Quasi-3D ^(c)	1.1938	1.0793	0.9748	0.8797	0.7530	0.5785
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.1942	1.0796	0.9751	0.8800	0.7532	0.5786
	Présente	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
1	3D (Zenkour, 2007)	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
	3D (Zenkour, 2007)	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
	Quasi-3D ^(a)	0.5779	0.5224	0.4718	0.4257	0.3649	0.2794
	Quasi-3D ^(c)	0.5776	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0.2792
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.5780	0.5225	0.4719	0.4258	0.3642	0.2794
1	Présente	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
	HSDT ^(b)	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079

^(a) Mantari et Guedes Soares (2013)

^(b) Mantari et Guedes Soares (2012a)

^(c) Mantari et Guedes Soares (2012c)

Chapitre IV : Résultats Et Discussions

Tableau IV- 2: les flèches non dimensionnelles $\bar{w}(0)$ des plaques ($a/h = 4$).

b/a	Théorie	P					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
6	3D (Zenkour, 2007)	1.1714	1.0622	0.9633	0.8738	0.7550	0.5919
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.1668	1.0551	0.9535	0.8611	0.7382	0.5697
	Quasi-3D ^(a)	1.1703	1.0583	0.9563	0.8636	0.7403	0.5713
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.1703	1.0583	0.9563	0.8636	0.7403	0.5713
	Présente	1.1668	1.0551	0.9535	0.8611	0.7382	0.5697
	HSDT ^(b)	1.1920	1.0789	0.9767	0.8844	0.7623	0.5955
5	3D (Zenkour, 2007)	1.1459	1.0391	0.9424	0.8548	0.7386	0.5790
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.1414	1.0321	0.9327	0.8423	0.7221	0.5573
	Quasi-3D ^(a)	1.1448	1.0352	0.9355	0.8448	0.7242	0.5588
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.1448	1.0352	0.9354	0.8448	0.7242	0.5588
	Présente	1.1414	1.0321	0.9327	0.8423	0.7221	0.5573
	HSDT ^(b)	1.1663	1.0556	0.9556	0.8653	0.7458	0.5825
4	3D (Zenkour, 2007)	1.1012	0.9985	0.9056	0.8215	0.7098	0.5564
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.0968	0.9918	0.8963	0.8094	0.6939	0.5355
	Quasi-3D ^(a)	1.1001	0.9948	0.8989	0.8118	0.6959	0.5370
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.1001	0.9948	0.8989	0.8118	0.6959	0.5370
	Présente	1.0968	0.9918	0.8963	0.8094	0.6939	0.5355
	HSDT ^(b)	1.1211	1.0147	0.9186	0.8317	0.7169	0.5599
3	3D (Zenkour, 2007)	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
	Quasi-3D ^(a)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
	Quasi-3D ^(c)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
	Présente	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
2	3D (Zenkour, 2007)	0.8153	0.7395	0.6707	0.6085	0.5257	0.4120
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
	Quasi-3D ^(a)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
	Quasi-3D ^(c)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
	Présente	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
1	3D (Zenkour, 2007)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.3490	0.3167	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805
	Quasi-3D ^(a)	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
	Quasi-3D ^(c)	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697
	Présente	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
	HSDT ^(b)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785

^(a) Mantari et Guedes Soares (2013)

^(b) Mantari et Guedes Soares (2012a)

^(c) Mantari et Guedes Soares (2012c)

Chapitre IV : Résultats Et Discussions

Tableau IV-3: les contraintes non dimensionnelles $\bar{\sigma}(h/2)$ des plaques ($a/h = 2$).

b/a	Théorie	P					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
6	3D (Zenkour, 2007)	0.2943	0.3101	0.3270	0.3451	0.3746	0.4305
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2912	0.3118	0.3339	0.3573	0.3955	0.4679
	Quasi-3D ^(a)	0.2763	0.2954	0.3159	0.3378	0.3737	0.4416
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2759	0.2951	0.3155	0.3374	0.3730	0.4411
	Présente	0.2912	0.3118	0.3339	0.3573	0.3955	0.4679
	HSDT ^(b)	0.2187	0.2345	0.2512	0.2690	0.2980	0.3498
5	3D (Zenkour, 2007)	0.2967	0.3128	0.3299	0.3483	0.3782	0.4350
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2935	0.3144	0.3366	0.3603	0.3988	0.4719
	Quasi-3D ^(a)	0.2789	0.2983	0.3191	0.3412	0.3776	0.4461
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2786	0.2980	0.3187	0.3408	0.3768	0.4456
	Présente	0.2935	0.3144	0.3366	0.3603	0.3988	0.4719
	HSDT ^(b)	0.2219	0.2378	0.2548	0.2729	0.3024	0.3549
4	3D (Zenkour, 2007)	0.3008	0.3173	0.3349	0.3537	0.3844	0.4426
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2974	0.3186	0.3412	0.3653	0.4045	0.4786
	Quasi-3D ^(a)	0.2834	0.3032	0.3243	0.3469	0.3839	0.4537
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2830	0.3028	0.3239	0.3465	0.3832	0.4532
	Présente	0.2974	0.3186	0.3412	0.3653	0.4045	0.4786
	HSDT ^(b)	0.2272	0.2435	0.2610	0.2795	0.3097	0.3634
3	3D (Zenkour, 2007)	0.3081	0.3252	0.3436	0.3633	0.3953	0.4562
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
	Quasi-3D ^(a)	0.2912	0.3118	0.3337	0.3571	0.3954	0.4673
	Quasi-3D ^(c)	0.2920	0.3118	0.3337	0.3582	0.3963	0.4688
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2909	0.3127	0.3333	0.3567	0.3947	0.4668
	Présente	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
2	3D (Zenkour, 2007)	0.3200	0.3385	0.3583	0.3796	0.4142	0.4799
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5092
	Quasi-3D ^(a)	0.3042	0.3261	0.3495	0.3743	0.4148	0.4905
	Quasi-3D ^(c)	0.3049	0.3269	0.3503	0.3752	0.4155	0.4918
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.3040	0.3259	0.3492	0.3740	0.4142	0.4901
	Présente	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5092
1	3D (Zenkour, 2007)	0.2539	0.2723	0.2919	0.3128	0.3469	0.4064
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.3103	0.3292	0.3495	0.3713	0.4067	0.4741
	Quasi-3D ^(a)	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
	Quasi-3D ^(c)	0.2924	0.3147	0.3383	0.3633	0.4041	0.4785
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2927	0.3149	0.3385	0.3636	0.4039	0.4790
	Présente	0.2924	0.3146	0.3382	0.3632	0.4034	0.4783
	HSDT ^(b)	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
		0.2943	0.3101	0.3270	0.3451	0.3746	0.4305

^(a) Mantari et Guedes Soares (2013)

^(b) Mantari et Guedes Soares (2012a)

^(c) Mantari et Guedes Soares (2012c)

Chapitre IV : Résultats Et Discussions

Tableau IV-4: les contraintes non dimensionnelles $\bar{\sigma}(h/2)$ des plaques ($a/h = 4$).

b/a	Théorie	P					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
6	3D (Zenkour, 2007)	0.2181	0.2321	0.2470	0.2628	0.2886	0.3373
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2369	0.2520	0.2683	0.2857	0.3144	0.3699
	Quasi-3D ^(a)	0.2127	0.2255	0.2393	0.2544	0.2795	0.3294
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2121	0.2249	0.2387	0.2537	0.2787	0.3285
	Présente	0.2369	0.2520	0.2683	0.2857	0.3144	0.3699
	HSDT ^(b)	0.2010	0.2149	0.2298	0.2455	0.2711	0.3192
5	3D (Zenkour, 2007)	0.2206	0.2348	0.2498	0.2659	0.2920	0.3413
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2391	0.2545	0.2710	0.2886	0.3176	0.3737
	Quasi-3D ^(a)	0.2152	0.2283	0.2424	0.2577	0.2832	0.3337
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2147	0.2277	0.2418	0.2570	0.2825	0.3328
	Présente	0.2391	0.2545	0.2710	0.2886	0.3176	0.3737
	HSDT ^(b)	0.2037	0.2178	0.2329	0.2488	0.2747	0.3235
4	3D (Zenkour, 2007)	0.2247	0.2392	0.2546	0.2710	0.2977	0.3482
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2429	0.2586	0.2754	0.2934	0.3230	0.3800
	Quasi-3D ^(a)	0.2196	0.2330	0.2475	0.2633	0.2894	0.3411
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2190	0.2324	0.2469	0.2626	0.2887	0.3402
	Présente	0.2429	0.2586	0.2754	0.2934	0.3230	0.3800
	HSDT ^(b)	0.2082	0.2226	0.2380	0.2544	0.2808	0.3307
3	3D (Zenkour, 2007)	0.2319	0.2469	0.2629	0.2800	0.3077	0.3602
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2493	0.2656	0.2831	0.3017	0.3323	0.3911
	Quasi-3D ^(a)	0.2272	0.2414	0.2666	0.2731	0.3004	0.3540
	Quasi-3D ^(c)	0.2286	0.2429	0.2583	0.2749	0.3024	0.3563
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2267	0.2408	0.2560	0.2725	0.2997	0.3532
	Présente	0.2496	0.2656	0.2831	0.3017	0.3323	0.3911
2	3D (Zenkour, 2007)	0.2431	0.2591	0.2762	0.2943	0.3238	0.3797
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
	Quasi-3D ^(a)	0.2395	0.2550	0.2715	0.2894	0.3187	0.3756
	Quasi-3D ^(c)	0.2407	0.2563	0.2730	0.2909	0.3204	0.3776
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2391	0.2545	0.2710	0.2888	0.3181	0.3749
	Présente	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
1	3D (Zenkour, 2007)	0.2247	0.2399	0.2562	0.2736	0.3018	0.3588
	Quasi-3D (Zenkour, 2007)	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
	Quasi-3D ^(a)	0.2237	0.2391	0.2554	0.2729	0.3014	0.3556
	Quasi-3D ^(c)	0.2244	0.2398	0.2563	0.2738	0.3024	0.3567
	Quasi-3D (Thai et al., 2014)	0.2235	0.2398	0.2551	0.2726	0.3010	0.3551
	Présente	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
	HSDT ^(b)	0.2164	0.2316	0.2477	0.2649	0.2927	0.3451

^(a) Mantari et Guedes Soares (2013)

^(b) Mantari et Guedes Soares (2012a)

^(c) Mantari et Guedes Soares (2012c)

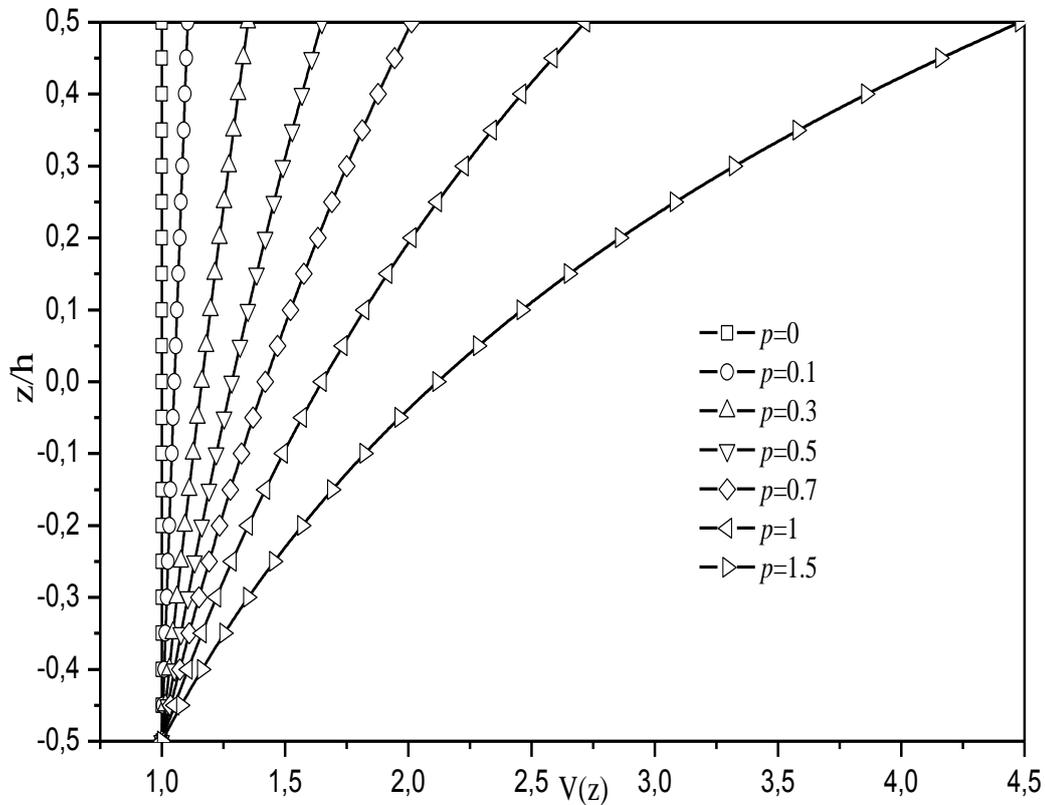


Figure. IV-1: la variation de la fonction exponentielle $v(z)$ à travers l'épaisseur de la plaque rectangulaire

IV.2.2. Résultats pour le problème de la vibration libre

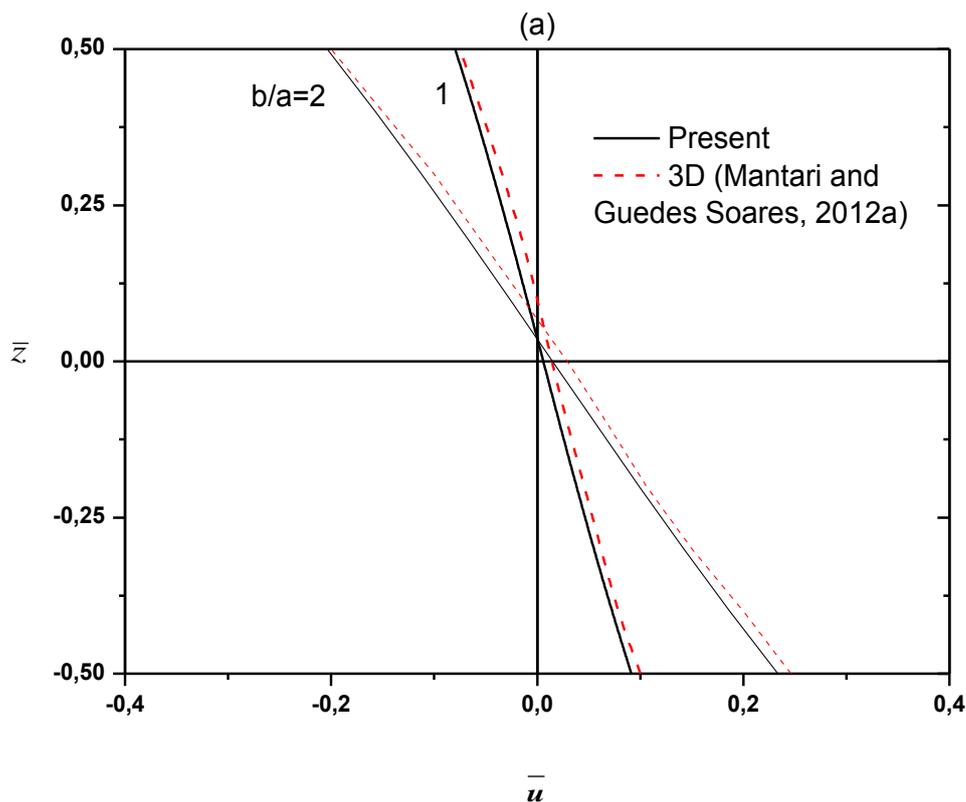
La précision de la théorie quasi-3D développée est également vérifiée grâce à l'analyse dynamique. Considérons une plaque Al / ZrO₂ simplement appuyée, fabriquée à partir d'un mélange de métal (Al) et de céramique (ZrO₂). Le module de Young et la densité du métal sont respectivement $E_m = 70\text{GPa}$ et $\rho_m = 2702\text{kg/m}^3$, et ceux de la céramique sont respectivement $E_c = 200\text{GPa}$ and $\rho_c = 5700\text{kg/m}^3$. Le coefficient de Poisson est considéré comme constant et égal à 0,3. Le module de Young est estimé à l'aide de la distribution de la loi de puissance avec le schéma de Mori-Tanaka (l'équation III-11). Cependant, la densité effective $\rho(z)$ est déterminée en utilisant la variation de la loi de puissance avec la règle des mélanges de Voigt comme indiqué dans l'équation (l'équation III-13).

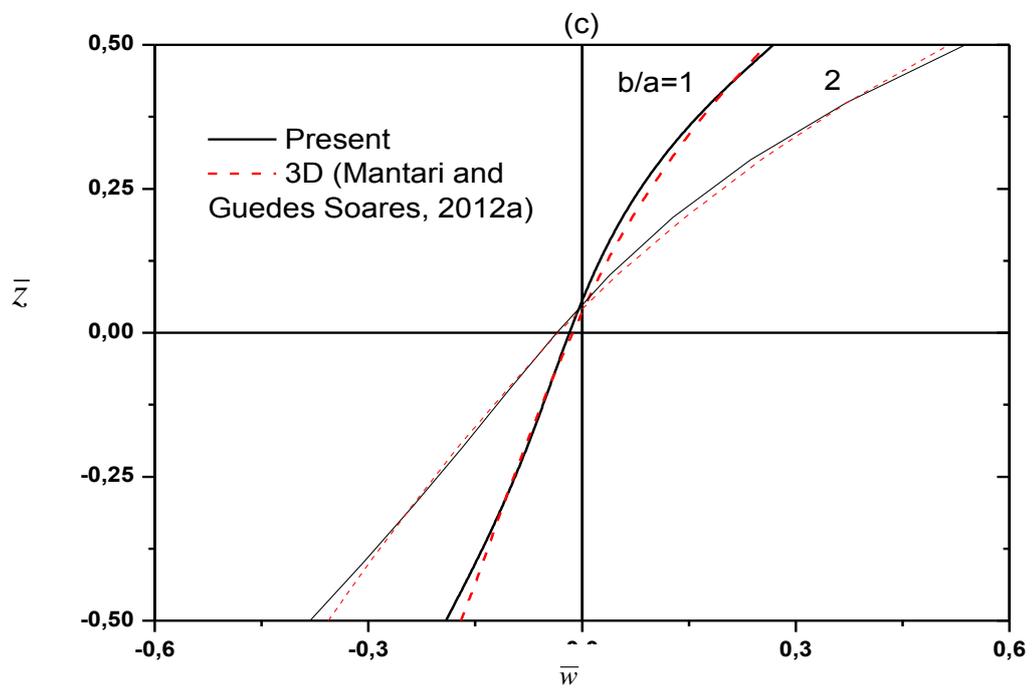
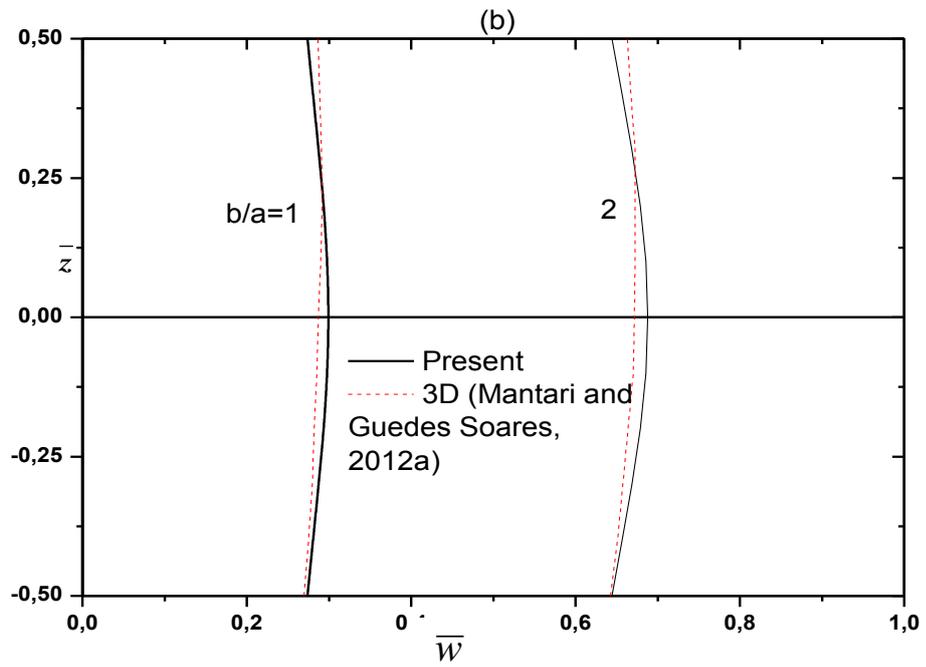
Chapitre IV : Résultats Et Discussions

Le tableau IV-5 présente la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques carrées pour différentes valeurs d'épaisseur et de l'indice matériel. La fréquence non dimensionnelle est définie par $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$.

Les résultats de la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D proposée, sont comparés aux résultats de la HSDT de Benachour et al. 2011 et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D de Matsunaga, H. 2008, Neves et al (2012a et, 2012b), Belabed et al 2014, Alijani et Amabili 2014 et la solution exacte tridimensionnelle de Vel et Batra (Vel, S.S., Batra, R.C. 2004).

On constate dans le tableau IV-5 que les résultats de la théorie quasi-3D proposée sont en bon accord avec les résultats obtenus par d'autres théories quasi-3D. La petite différence entre les résultats de la théorie de la déformation du cisaillement 2D et quasi-3D est due à la négligence de l'effet d'étirement de l'épaisseur.





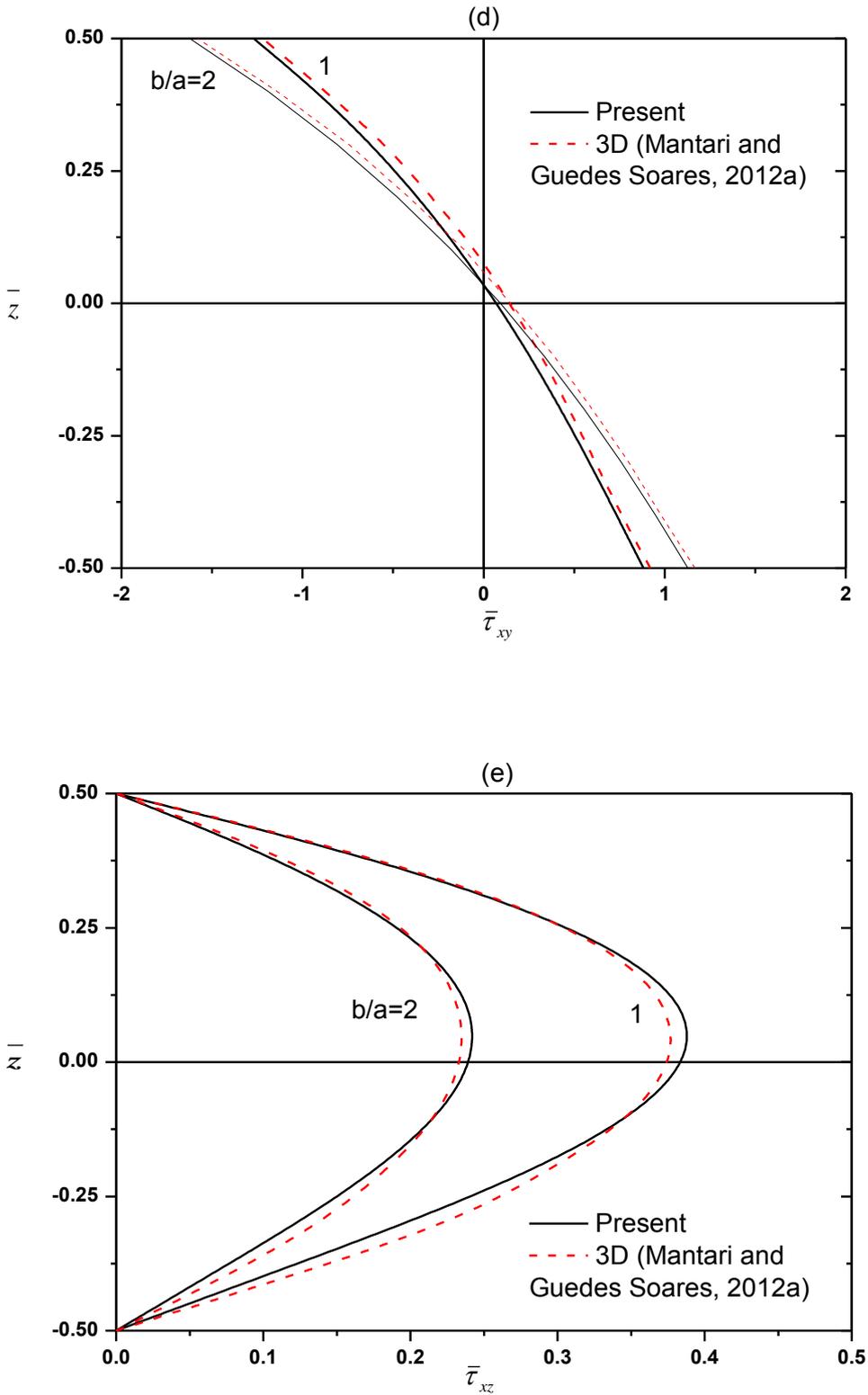


Figure. IV-2: la variation des déplacements et des contraintes non dimensionnelles à travers l'épaisseur de la plaque ($a/h = 4, p = 0.5$).

Tableau IV-5: la comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}$

Méthodes	ε_z	$p = 0$		$p = 1$			$a/h = 5$		
		$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
Benachour et al. (2011)	=0	4.6220	5.7600	5.6750	6.1800	6.3200	5.6225	5.6375	5.6650
Matsunaga (2008)	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.7123	6.1932	6.3390	5.6599	5.6757	5.7020
Neves et al. (2012)	$\neq 0$	–	–	5.4825	5.9600	6.1200	5.4950	5.5300	5.5625
Belabed et al. (2014)	$\neq 0$	4.6591	5.7800	5.4800	5.9700	6.1200	5.5025	5.5350	5.5625
Alijani and Amabili (2014)	$\neq 0$	4.6606	5.7769	5.4796	5.9578	6.1040	5.4919	5.5279	5.5633
Vel and Batra (2004)	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.4806	5.9609	6.1076	5.4923	5.5285	5.5632
Présente	$\neq 0$	4.6743	5.7874	5.4921	5.9788	6.1279	5.5134	5.5456	5.5725

IV.3. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de la flexion et de l'analyse de vibration libre des plaques en FGM simplement appuyée pour la présente théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal quasi-3D à cinq variables reposant sur une fondation élastiques, avec la considération des influences de l'étirement à travers l'épaisseur.

En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour simuler le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduées.

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GENERALE

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293–318.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1143 – 1165.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265–275.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104.

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, **11(6)**, 1350082.

Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M. (2011), “Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells”, *Compos. Part B*, **42(2)**, 123–133.

Celebi, K., Yarimpabuc, D., Keles, I. (2016), “A unified method for stresses in FGM sphere with exponentially-varying properties”, *Struct. Eng. Mech.*, **57(5)**, 823-835.

Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009), “Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory”, *J. Reinf. Plast. Compos.*, **28(10)**, 1215–1234.

Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23(4)**, 423 – 431.

Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Martins, P.A.L.S. (2005), “Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method”, *Compos. Struct.*, **69(4)**, 449–457.

Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Polit, O. (2011), “Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations”, *Compos. Part B*, **42(5)**, 1276–1284.

- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y., Adda Bedia, E.A. (2016)**, "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 57(2), 315 – 325.
- Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omid, M. (2010)**, "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*, 34(5), 1276–1291.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011a)**, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates", *Int. J. Mech. Sci.*, 53(1), 11–22.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011b)**, "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Compos. Struct.*, 93(2), 722–735.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015)**, "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235 – 253.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014)**, "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383.
- Irschik, H. (1993)**, "On vibrations of layered beams and plates", *J. Appl. Math. Mech.*, 73(4–5), 34–45.
- Kant, T., Swaminathan, K. (2002)**, "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Compos. Struct.*, 56(4), 329–344.
- Kar, V.R., Panda, S.K. (2015)**, "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Structural Engineering and Mechanics*, 53(4), 661 – 679.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015)**, "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1215–1240.
- Mantari, J.L., Granados, E.V. (2015)**, "A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates", *Thin-Walled Structures*, 90, 150–158.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012a)**, "Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, 94(8), 2561–2575.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015)**, "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508.
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, R.M.N., Jorge, C.M.C., Soares, C.M.M. (2013)**, "Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally

graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique”, *Compos. Part B*, 44(1), 657–674.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M. (2012a), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Part B*, 43(2), 711–725.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M. (2012b), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, 94(5), 1814–1825.

Nguyen, T.K., Sab, K., Bonnet, G. (2008), “First-order shear deformation plate models for functionally graded materials”, *Compos. Struct*, 83(1), 25–36.

Nosier, A., Fallah, F. (2008), “Reformulation of Mindlin–Reissner governing equations of functionally graded circular plates”, *Acta Mech.*, 198(3–4), 209–233.

Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N. (2008), “Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation”, *J. Sound Vib.*, 318(1–2), 176–192.

Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47(1–3), 663–684.

Reddy, J.N. (2011), “A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates”, *Int. J. Aerosp. Lightweight Struct.*, 1(1), 1–21.

Saidi, A.R., Baferani, A.H., Jomehzadeh, E. (2011), “Benchmark solution for free vibration of functionally graded moderately thick annular sector plates”, *Acta Mech.*, 219(3–4), 309–335.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, 24, 209 – 220.

Talha, M., Singh, B.N. (2010), “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, *Appl. Math. Model.*, 34(12), 3991–4011

Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., Jiang, S.X., Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos. Struct.*, 93(11), 2826–2832.

Yang, B., Ding, H.J., Chen, W.Q. (2009), “Elasticity solutions for a uniformly loaded rectangular plate of functionally graded materials with two opposite edges simply supported”, *Acta Mech.*, 207(3–4), 245–258.

Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M. (2009), “Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp–Ritz method”, *J. Sound Vib.*, 319(3–5), 918–939.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory” *Aerospace Science and Technology*, 34, 24–34.

CHAPITRE I:

- Abdizadeh H, 1997** élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 212 p
- Birman V. et Byrd L.W. (2007)**, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, Applied Mechanics Reviews, 60, 195–216, 2007.
- Boch. P Chartier . Huttepain. 2001** M Tapa casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986.
- Bhaskar K**, Varadan TK. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. ASME J Appl Mech;68(4):660–2.
- Bhaskar K, 2001** Varadan TK. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. ASME J Appl Mech;68(4):660–2.
- Benveniste Y 1987**. A new approach to the application of Mori–Tanaka's theory in composite materials. Mech Mater;6:147–57.
- Chan S.H. (2001)**, Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, International Journal of Thermal Science, 40, 255–261.
- Caruso JJ, Charnis CC. 1986** Assessment of simplified composite micromechanics using three dimensional finite element analysis. J Compos Tech Res;8(3):77–83.
- Chi . Shyang-ho. , Chung Yen-Ling, (2003)**. Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227– 1243
- Fuchiyama T. and Noda N. (1995)**, Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, JSAE Review, 16, 263–268.
- G. Bao., L. , (1995)**. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871
- Hirai T. and Chen L. (1999)**, Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, Materials Science Forum, 308–311, 509–514.
- Hui- shen 2009** functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group.
- Hill R. A 1965** self-consistent mechanics of composite materials. J Mech Phys Solids;13:213–22.
- Hashin Z. 1968** Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. J Compos Mater;4:284–300.
- Hashin Z 1962;**. The elastic moduli of heterogeneous materials. ASME J Appl Mech 29:143–50.
- Hashin Z 1964**, Shtrikman S. A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials. J Mech Phys Solids;11:127–40.
- Hashin Z 1964**, Rosen BW. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. ASME J Appl Mech;4:223–32.
- Hashin Z 1979**. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. ASME J Appl Mech;46:543–50.
- Ichiro chiota; yoshinari miyamoto functionally graded materials 1996 Elsevier.

- L.Marin, (2005)** “Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials,” *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351.
- Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C. (2003)**, The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796.
- M. Niino, K. Kisara and M. Mori , , (2005)** “Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS),” *Mater Sci Forum*, vol. 492, pp. 163–168.
- Müller E., Drašar C., Schilz J., and Kaysser W.A. (2003)**, Functionally graded materials for sensor and energy applications, *Materials Science and Engineering*, A362, 17–39
- Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995)**, Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193, 1995.
- Mori T, Tanaka T1973**. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*;21:571–4.
- Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi(2011)**. , "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons;page 110, 4 août,
- Noda N. (1999)**, Thermal stresses in functionally graded material, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.
- Paulino G.H., Jin Z.H., and Dodds Jr. R.H. (2003)**, Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- Paszkiwicz B., Paszkiwicz R., Wosko M., Radziejewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M. (2008)**, Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum*, 82, 389–394.
- Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H. (2003)**, Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121.
- Reiter T, Dvorak 1997** GJ, Tvergaard V. Micromechanical models for graded composite materials. *J Mech Phys Solids*;45:1281–302.
- Shen H.-S. (2004)**, Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells (in Chinese), *Advances in Mechanics*, 34, 53–60, 2004.
- Tanigawa Y. (1995)**, Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- Tanigawa Y. (1995)**, Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- Uemura S. (2003)**, The activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.
- Viet.Tung. Nguyen.** « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T. (2004), Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Composites Science and Technology*, 64, 893–908.

Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

CHAPITRE II:

Afaq. K.S, (2003). Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.

Ambartsumyan. S.A, (1969). Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.

Carrera. E, (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198.

Hilderband, F.B, Reissner, E., Thomas, G.G. (1949), “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N° 1833.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.

H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, 2010, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.

Kant.T, K. Swaminathan, (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.

Kapania. R. K. & S. Raciti, (1989). Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I: Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no.7, pages 923,934.

Kant. T & K. Swaminathan, (2000). Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65, 75.

Kirchhoff. G, (1950). uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheid . *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, Vol .40, pages 51-88.

Lo. K.H & R.M.Christensen, (1977). A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's . *journal of applied mechanics*, Vol.44, N° 4, pages 663-668/669-676.

Murthy. M.V.V, (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. *Rapport technique, NASA*.

- Nguyen. T. K., K. Sab., G. Bonnet, (2007).** Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.
- Noor. A. K & W. S. Burton, (1989).** Assesment of shear deformation theories for Multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1, 12.
- Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183.
- Naghdi.P.M, (1957)** "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380,.
- M. Touratier 1991**, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.
- M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, 2003**, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Reissner. E & Y.Stavesky, (1961).** Bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*. Vol.28, pages 402-408.
- Reissner.E, (1945).** The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.
- Reissner. E, (1975).** On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- Reddy. J.N, (1997).** *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.
- Reddy J.N. 1987** generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates.
- Reddy. J.N, (1999).** *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia.
- Reddy. J.N, (1984).** A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- Shimpi, R.P. (2002)**, "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137–146.
- Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959.** *Theory of plates and Shells*. McGraw-Hill, New York. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- Topdar. P, A .H. Sheikh and N.Dhang, (2003).** Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model. *J. Sandwich Structures and Materials*, Vol. 5.
- Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010)**, "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 626–633.
- Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011)**, "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738 1746.
- Whitney J.M, (1969).** The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *J.Compos Mater*. Vol.3, p.534-547.

Whitney. J.M, (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304.

Yang. P.C, C.H.Norris & Y.Starsky, (1966). Elastic wave propagation in heterogeneous plate. *J.Solide Structures* .Vol.2, pages 665-684.

CHAPITRE III:

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Benveniste, Y. (1987), "A new approach to the application of Mori–Tanaka’s theory in composite materials", *Mech Mat*, **6**, 147–157.

Mori T, Tanaka, K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metall*, **21**, 571–574.

Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **47**(1–3), 663–684.

Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory", *Int. J. Eng. Sci.*, **29**(8), 901-916.

Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, **272**(3–5), 703–730.

Zenkour, A. (2007), "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", *Arch. Appl. Mech.*, **77**(4), 197–214.

CHAPITRE IV :

Alijani, F, Amabili, M. (2014), "Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates", *Compos Struct*, **113**, 89 – 107.

Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B*, **42**, 1386-1394.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013), "A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates", *Compos. Part B*, **45**(1), 268–281.

Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012a), "Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, **94**(8), 2561–2575.

Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2012b), “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, 94(6), 1991–2000.

Matsunaga, H. (2008), “Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **82**, 499 – 512.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M. (2012a), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Part B*, 43(2), 711–725.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M. (2012b), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, 94(5), 1814–1825.

Thai, H.T., Vo, T.P., Bui, T.Q., Nguyen, T.K. (2014), "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates", *Acta Mech*, 225, 951–964.

Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, **272**(3–5), 703–730.

Zenkour, A. (2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”, *Arch. Appl. Mech.*, 77(4), 197–214.