

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT 3ème Cycle

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme : TEBBOUNE Wafa

Intitulé de la thèse

Contribution à l'étude de la stabilité thermique des structures composites

Soutenu le :... /... /2015 Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Président
BENRAHOU Kouider Halim	Pr	UDL SBA	Directeur de thèse
ADDA BEDIA El Abbas	Pr	UDL SBA	Examineur
FAHSI Bouazza	MCA	UDL SBA	Examineur
AMEUR Mohamed	MCA	ENP ORAN	Examineur
YEGHNEM Redha	MCA	U DE SAIDA	Examineur

Année universitaire 2014-2015

Dédicace

A la mémoire de mes défunts parents.

A mon cher époux et mon adorable fils Ibrahim.

A toute ma famille.

A mes amis.

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la force et la volonté d'accomplir ce travail et d'avoir éclairé mon chemin.

J'adresse tout d'abord, mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Professeur Benrahou Halim attentif et disponible malgré ses nombreuses charges, ses qualités professionnelles et humaines m'ont aidée à aller au bout de ce travail.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements au professeur Tounsi Abdelouahed de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et aussi de m'avoir guidé pendant toutes ces années de doctorat, sa compétence et sa rigueur scientifique m'ont beaucoup appris.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury : Pr. Adda Bedia, Dr. Fahsi Bouazza, Dr. Yagnem Redha, Dr. Ameer Mohamed pour avoir accepté de juger et d'évaluer ce travail.

J'adresse également mes chaleureux remerciements à mes chères amies Benyoucef Houria ingénieur du laboratoire LM&H et Boutaleb Sabrina enseignante au département du génie civil pour leur aide et pour leur soutien moral.

Je souhaite en outre, remercier Dr. Bachir Bouiadjra Mohamed pour son aide précieuse.

Je ne peux oublier de remercier tous les membres du laboratoire des matériaux et hydrologie, merci pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Tant de personnes ont rendu possible l'avènement de ce travail de thèse qu'il m'est aujourd'hui difficile de n'en oublier aucune. Je m'excuse donc des oublis éventuels. J'éprouve une sincère gratitude envers tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce travail, je tiens à les remercier.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille et mes amis, leur amour, leur tendresse, leur confiance me portent et me guident tous les jours. Un grand merci.

Une pensée pour terminer ces remerciements pour mes défunts parents qui n'ont pas assisté à cette importante étape de ma vie.

Résumé

Dans ce travail, une théorie de déformation de cisaillement simple et efficace est présentée pour l'analyse du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées (FGM). On suppose que la plaque est en contact avec une fondation élastique durant la déformation. Cette théorie explique la distribution sinusoïdale des contraintes de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans employer le facteur de correction de cisaillement. A la différence de la théorie trigonométrique de déformation de cisaillement conventionnelle, la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement proposée contient seulement quatre inconnus. Il est supposé que les propriétés thermiques et mécaniques non-homogènes de la plaque FGM varient par une distribution de loi de puissance suivant l'épaisseur. En utilisant les relations non linéaires de contrainte-déplacement, les équations d'équilibre et de stabilité des plaques fonctionnellement graduées sont dérivées. Les conditions aux limites de la plaque sont supposées être simplement appuyées sur tous les bords. La fondation élastique est modélisée par le modèle de Pasternak de deux paramètres, qui est obtenu en ajoutant une couche de cisaillement au modèle de Winkler. Les effets des différents types de chargement thermiques et variations de puissance du matériau à gradation fonctionnel, rapport d'aspect, et d'un rapport épaisseur sur la température critique de flambement des plaques fonctionnellement graduées sont étudiés et discutés.

Mots-clés: *Plaques fonctionnellement graduées; Flambement; Théorie des plaques; Fondations élastiques.*

Abstract

In this work, an efficient and simple trigonometric shear deformation theory is presented for thermal buckling analysis of functionally graded plates. It is assumed that the plate is in contact with elastic foundation during deformation. The theory accounts for sinusoidal distribution of transverse shear stress, and satisfies the free transverse shear stress conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction factor. Unlike the conventional trigonometric shear deformation theory, the proposed sinusoidal shear deformation theory contains only four unknowns. It is assumed that the mechanical and thermal non-homogeneous properties of functionally graded plate vary smoothly by distribution of power law across the plate thickness. Using the non-linear strain-displacement relations, the equilibrium and stability equations of plates made of functionally graded materials are derived. The boundary conditions for the plate are assumed to be simply supported on all edges. The elastic foundation is modelled by two-parameters Pasternak model, which is obtained by adding a shear layer to the Winkler model. The effects of thermal loading types and variations of power of functionally graded material, aspect ratio, and thickness ratio on the critical buckling temperature of functionally graded plates are investigated and discussed.

Keywords: Functionally graded materials; Buckling; Plate theory; Elastic foundations

ملخص

في رسالة الدكتوراة تم عرض نظرية التواء القص المثالي بشكل مبسط و ذو كفاءة عالية بالنسبة لتحليل الالتواء الحراري للصفائح المتدرجة وظيفيا.

تم الاعتقاد أن الصفائح ملتصقة بالاساسات ذات الطبيعة المطاطية أثناء عملية التشوه كما جرى اعتماد نظرية التوزيع الجيبية لاجهاد القص العرضي. نظرية اجهاد القص العرضي ترضيها شروط القص على الاسطح العلوية و السفلية دون الرجوع لمعامل تصحيح القص بخلاف النظرية التقليدية.

تحتوي نظرية التواء القص الجيبى المفتوحة على اربعة مجاهيل. تم الافتراض أن الخواص الغير متجانسة الميكانيكية و الحرارية للصفائح المتدرجة وظيفيا تتغير بهدوء اعتمادا على توزيع قانون الطاقة على امتداد سمك الصفيحة.

اشتقت معادلات توازن و استقرار الصفائح المتدرجة وظيفيا باستخدام معادلة سلالة الازاحة غير الخطية و تم الافتراض أن الظروف الحدية للصفيحة معتمدة من جميع الحواف.

صممت الأساسات ذات الطبيعة المطاطية باستخدام عاملين هما نموذج باسترناك و الذي يتحصل عليه باضافة طبقة قص لنموذج وينكلر تظهر اثار الحمل الحراري و تغيرات الطاقة جلية على الصفائح المتدرجة وظيفيا، حيث يكمن جوهر الرسالة في استقصاء و مناقشة نسبة الجانب و السمك و أثرها على درجة الحرارة الحرجة للصفائح المتدرجة وظيفيا.

كلمات مفتاحية: صفائح متدرجة وظيفيا، نظرية الصفائح، التواء، الأساسات ذات الطبيعة المطاطية.

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Chapitre V

Tableau V. 1: Modèles de déplacement.

Tableau V. 2: Comparaison de la température critique de flambement d'une plaque FG carrée sous une température uniforme.

Tableau V. 3: Comparaison de la température critique de flambement d'une plaque FG ($a/h=10$) sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire ($\beta=3$).

Tableau V.4: Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG sous température uniformément élevée pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b avec $a/h=100$.

Tableau V.5: Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG carrée sous température uniformément élevée pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'épaisseur a/h .

Tableau V.6: Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG sous une distribution linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b avec $a/h=100$.

Tableau V.7: Température critique de flambement T_{cr} pour une plaque FG carrée sous une distribution linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'épaisseur a/h .

Tableau V.8: Température critique de flambement ($t_{cr}=10^{-3}T_{cr}$) plaque FG sous une distribution non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b et l'exposant de température β avec $a/h=10$.

Tableau V.9: Température critique de flambement ($t_{cr}=10^{-3}T_{cr}$) d'une plaque FG sous une distribution non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b , et l'exposant de température β avec $a/h=5$.

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Caractéristiques du matériau à gradient de propriétés.

Figure I.2 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande

Figure I.3 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres.

Figure I.4 : Géométrie d'une plaque FGM.

Figure I.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Figure I.6: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

Figure I.7 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

Chapitre II

Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

Figure II.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff

Figure II.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin .

Figure II.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé.

Chapitre III

Figure III.1: Système de coordonnées pour des plaques FG rectangulaires sur fondation élastiques de Pasternak.

Chapitre IV

Figure IV.1: Position de la surface médiane et de la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.

Figure IV.2: Variation de la position de la surface neutre par rapport à l'indice de loi de puissance.

Chapitre V

Figure V.1: Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique T_{cr} d'une plaque carrée ($n=2$) sur fondation élastique ($k_1=k_2=10$) par rapport au rapport d'épaisseur a/h : (a) Température uniforme; (b) Température linéaire; (c) Température non-linéaire ($\beta=3$).

Figure V.2: Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique T_{cr} d'une plaque carrée ($a/h=10$, $n=2$) sur fondation élastique ($k_1=k_2=10$) par rapport à a/b : (a) Température uniforme; (b) Température linéaire; (c) Température non-linéaire ($\beta=3$).

Figure V.3: Effet de l'indice de loi de puissance de la différence de température critique de flambement des plaques FG avec ou sans fondations élastiques: (a) La température uniforme; (b) Température linéaire; (c) La température non-linéaire ($\beta=3$).

Figure V.4: Effet du module d'élasticité de la fondation de Winkler k_1 sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG carrée ($n=0.5$ et $a/h=10$) sous uniforme (U), linéaire (L) et non linéaire (NL) charge thermique ($\beta=3$).

Figure V.5: L'effet du module de cisaillement de Pasternak k_2 sur la température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($n=0.5$ et $a/h=10$) sous chargement thermique ($\beta=3$) uniforme (U), linéaire (L) et non linéaire (NL).

Figure V.6: Effet du rapport d'épaisseur pour différents types de chargements thermiques sur la température critique de flambement pour une plaque FG carrée ($n=0.5$, $\beta=3$, $k_1=k_2=10$).

Figure V.7: Effet du rapport d'aspect pour différents types de chargements thermiques sur la température critique de flambement d'une plaque FG ($n=0.5$, $\beta=3$, $a/h=10$, $k_1=k_2=10$).

Figure V.8: Effet du paramètre de linéarité β sur la température critique de flambement d'une plaque FG ($n=0.5$ et $k_1=k_2=10$) par rapport: (a) rapport d'épaisseur a/h (a/b), (b) le rapport d'aspect a/b ($a/h=10$).

Figure V.9: Température critique de flambement t_{cr} due à une élévation de température uniforme, linéaire et non-linéaire ($\beta=3$) à travers l'épaisseur d'une plaque

FG ($a/h=5$) par rapport au rapport d'aspect a/b pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k .

Figure V.10: Température critique de flambement t_{cr} due à une élévation de température uniforme, linéaire et non-linéaire par rapport au rapport d'épaisseur a/h et pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité β ($k=2$, $a/b=2$).

Figure V.11: Température critique de flambement t_{cr} due à une élévation de température uniforme, linéaire et non-linéaire par rapport au rapport d'aspect a/b et pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité β ($k=2$, $a/h=10$).

Liste des notations

$E(z)$: Module de Young en fonction de (z)
$\nu(z)$: Coefficient de Poisson
$g(z)$: Module de cisaillement en fonction de « z »
$V(z)$: Fraction volumique
k	: Paramètre du matériau
a	: Longueur de la plaque
b	: Largeur de la plaque
h	: Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	: Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	: Les déplacements dans les directions x, y, z .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$: Les rotations autour des axes x, y et z ,
$\psi(z)$: Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$: Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	: Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	: Déformations de distorsion
ψ'	: La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
ψ''	: La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$: Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	: Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	: Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$: Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$: Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	: Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	: Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	: Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	: Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	: Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	: Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	: Effort de cisaillement
δ	: Dérivée partielle
i et j	: Nombres naturelles
A_{ij}	: Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	: Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	: Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	: Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	: Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	: Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	: Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	: Termes de rigidité de la matrice

B_{ij}^S	:Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^S	:Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^S	:Termes de rigidité de la matrice
$T(x,y,z)$:Chargement thermique
$\{\Delta\}$:Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$:Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$:Vecteur colonne
$[]$:Matrice

Sommaire

Résumé

Abstract

Liste des notations

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction générale.....1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

I.1 Introduction.....5

I.2 Concept du matériau FGM.....6

I.3 Domaines d'applications.....7

I.3.1 L'aérospatial.....7

I.3.2 La médecine.....7

I.3.3 L'énergie.....8

I.4 Procédés de fabrication des matériaux à gradients évalués.....8

I.4.1 Coulage en bande (Tape casting).....8

I.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting).....9

I.4.3 La métallurgie des poudres.....10

I.4.4 Le frittage.....11

I.5 Avantages et inconvénients des FGMs.....11

I.5.1 Avantages des FGMs.....11

I.5.2 Inconvénients des FGMs.....12

I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....13

I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	14
I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	15
I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	16
I.7 Loi de mélange.....	17
I.8 Conclusion.....	18

Chapitre II : Différentes théories des plaques

II.1 Introduction.....	19
II.2 Définition d'une plaque.....	19
II.3 Théories de déformation des plaques.....	20
II.3.1. Théorie classique des plaques minces (CPT)	20
II.3.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT).....	22
II.3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT).....	23
II.4 Etude des contraintes résiduelles.....	25
II.5 Conclusion	27

Chapitre III : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

III.1 Introduction.....	28
III.2 Hypothèses de base.....	28
III.3 Cinématiques.....	30
III.4 Equations constitutives	30
III.5 Les équations d'équilibre et de stabilité.....	33
III.6 Solution trigonométrique du flambement thermique.....	35
III.7 Solution du flambement thermique.....	36

III.7.1 Flambement des plaques FG sous une température uniformément élevée.....	36
III.7.2 Flambement des plaques FG soumises à une variation graduelle de température à travers l'épaisseur.....	37
III.8 Conclusion	38

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

IV.1 Introduction.....	39
IV.2 Détermination de la surface de référence.....	41
IV.3 Equations d'équilibre.....	45
IV.4 Equations de stabilité.....	44
IV.5 Solutions exactes pour le flambement thermique des plaques FG.....	47
IV.6 Flambement des plaques FG sous une température uniformément élevée.....	49
IV.7 Flambement des plaques FG soumises à une variation graduelle de température à travers l'épaisseur.....	49
IV.8 Conclusion	50

Chapitre V ; Résultats et discussions

Partie A: Etude du comportement des plaques sous fondations élastiques

V.1 Introduction.....	51
V.2 Etudes comparatives	52
V.3 Etudes paramétriques	57

Partie B: Etude du comportement des plaques avec le concept de la position de la surface neutre

V.4 Introduction.....	62
V.5 Etude Paramétrique.....	62
V.6 Conclusion	71
Conclusion générale.....	72
Références Bibliographiques	74

Introduction générale

Dans ces dernières années, les matériaux fonctionnellement gradués FGMs ont acquis une grande popularité en raison de leur grande résistance thermique avec de basses contraintes thermiques. Ces matériaux sont une nouvelle génération des matériaux composites, introduits en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984 (Yamanouchi et al ,1990 ; Koizumi, 1993).

Typiquement, les FGMs sont fabriqués par la céramique et le métal de telle sorte que la céramique peut résister à un chargement thermique sévère, alors que le métal sert à réduire les grandes contraintes de traction produites dans la surface de la céramique dans le stade de refroidissement. Puisque les propriétés matérielles des FGMs varient de façon continue d'une surface à une autre, cela peut mener à l'élimination des problèmes d'interface rencontrés dans les matériaux composites classiques. Les matériaux fonctionnellement gradués sont largement utilisés dans plusieurs applications structurales telles que : l'aérospatial, le nucléaire, le génie civil, l'automobile, l'optique, le biomédical, l'électronique et la chimie.

Les plaques rectangulaires épaisses fabriquées en FGM sont souvent employées comme des éléments des structures d'ingénieurs. De plus, pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs types de modèles de fondations a été proposés. Le plus simple est le modèle de Winkler (modèle à 1 seul paramètre) qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans les effets de couplage entre eux. Ainsi, dans ce modèle les propriétés du sol sont décrites seulement par un seul paramètre (K_w), qui représente des ressorts verticaux (Avramidis and Morfidis, 2006). Cependant, le modèle de Winkler est incapable de prendre en considération la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qu'il n'y a pas une interaction entre les ressorts voisins mène à l'ignorance de l'influence du sol dans certaines parties de la plaque. Pour éviter ces défaillances, plusieurs modèles de fondation élastique à deux paramètres ont été proposés tels que les fondations élastiques de Pasternak (Pasternak ,1954). Le modèle de Pasternak est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure-fondation. Zenkour (2009) a utilisé une théorie sinusoïdale raffinée des plaques pour l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques FG soumises à un chargement uniforme transversal et supportées par des fondations élastiques à deux paramètres. Benyoucef et al.(2010) ont investigué la réponse statique des plaques

épaisses FG reposant sur des fondations de Pasternak et cela en utilisant une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement. Ait Atmane et al. (2010) ont étudié le comportement dynamique des plaques FG supportées par des fondations élastiques de type Pasternak-Winkler. Cheng et Kitipornchai (1999) ont proposé une analogie de membrane pour déterminer les valeurs propres pour le flambement par compression, flambement hydrauthermique et la vibration des plaques FG reposants sur des fondations de Winkler-Pasternak en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT). La même analogie de membrane a été ensuite appliquée à l'analyse des plaques et coques FG en utilisant la théorie des plaques du troisième ordre (Cheng and Batra, 2000 ; Reddy and Cheng ,2002). L'effet de la fondation élastique de Pasternak sur le comportement en post-flambement des plaques FG modérément épaisses est discuté par Yang et al. (2005 a). Dans leur étude, les quatre cotés de la plaque sont supposés être encastés et la formulation est basée sur la FSDT. La réponse en post flambement thermomécanique des plaques FG basée sur la solution analytique est présentée par Woo et al. (2005). Ils ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement des plaques du troisième ordre (Le champ de déplacement de Reddy) et le tenseur de Von Karman des grandes flèches pour obtenir les équations différentielles partielles couplées et ont employé une série de solutions mixtes pour les résoudre. Leur étude inclut quatre types de conditions aux limites pour la plaque. Zenkour et Sobhy (2010) ont investigué le comportement du flambement thermique de plusieurs types de plaques sandwich FG. Zenkour et Sobhy (2011) ont étudié le flambement thermique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques à un ou deux paramètres en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique. Ameer et al. (2001) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour étudier la réponse statique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques de Pasternak. Zenkour et Sobhy (2012) ont examiné la réponse statique des plaques sandwich FG viscoélastiques et simplement appuyées soumises à des charges uniformes transversales. Zenkour et sobhy (2013) ont étudié la réponse dynamique des plaques FG thermoélastiques reposant sur des fondations. Tounsi et ses collaborateurs (Abdelaziz et al, 2011 ; El Meiche et al, 2011 ; Hadji et al, 2011 ; Benachour et al, 2011 ; Bourada et al, 2012 ; Kaci et al, 2012 ; Bachir Bouiadjra et al, 2012 ; Fekrar et al, 2012 ; Bouderra et al, 2013 ; Tounsi et al, 2013 ; Kettaf et al, 2013 ; Bachir Bouiadjra et al, 2013 ; Houari et al, 2013 ; Bessaim et al, 2013 ; Belabed et al, 2014 ; Fekrar et al, 2014 ; Boussahla et al, 2014 ; Hebali et al, 2014 ; Zidi et al, 2014 ; Klouche Djedid et al, 2014 ; Draiche et al, 2014 ; Sadoune et al, 2014 ; Nedri et al, 2014 ; Khalfi et al, 2014) ont

étudié les réponses mécaniques FG et composites en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée.

Le but de ce travail est de présenter une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique pour l'analyse du flambement thermique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiaux et transversaux se composent d'une partie due à la flexion et d'une autre au cisaillement de telle sorte que la composante de flexion ne contribue pas dans les forces de cisaillement et de la même façon la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de cisaillement. Contrairement à la théorie trigonométrique conventionnelle (Zenkour et Sobhy, 2011) la théorie proposée contient uniquement quatre inconnus.

Ce travail a aussi comme but d'étudier le comportement au flambement thermoélastique d'une plaque épaisse fabriquée de matériaux fonctionnellement gradués en employant la théorie exponentielle de déformation de cisaillement. Une simple loi de puissance basée sur la loi des mélanges est utilisée pour estimer les propriétés matérielles comme fonctions de la plaque épaisse. Une théorie de déformation de cisaillement exponentielle basée sur la position exacte de la surface neutre est employée pour dériver les équations d'équilibre des plaques FG rectangulaires, en tenant compte de la non linéarité géométrique dans le sens de von Karman. En utilisant le critère d'équilibre adjacent, les équations de stabilité thermique sont obtenues. Les charges thermiques sont supposées avoir des distributions uniformes, linéaires et non linéaires à travers la plaque.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

- Le premier chapitre donne un aperçu détaillé sur les matériaux fonctionnellement gradués appelés « FGMs »,
- Dans le deuxième chapitre, une attention particulière sera portée aux auteurs ayant travaillé sur les différentes théories des plaques.
- Le troisième chapitre sera consacré à présenter une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée pour étudier les réponses du flambement thermique des plaques, et qui sera explicitement formulée.
- On étudiera dans le quatrième chapitre, le flambement thermoélastique d'une plaque FGM épaisse en employant la théorie exponentielle de déformation de cisaillement basée sur la position exacte de la surface neutre.

- Dans le cinquième chapitre on présentera les résultats obtenus. Ils seront comparés avec d'autres résultats déjà publiés par d'autres auteurs. Cette comparaison nous a permis la validation de nos résultats.

Ce travail s'achèvera en présentant une conclusion générale qui résumera notre travail incluant les perspectives pour des travaux futurs.

*Généralités Sur Les
Matériaux FGM*

I.1 Introduction :

Le développement de nouveaux matériaux performants (grande dureté, résistance à la corrosion, conductivité thermique optimale, etc.) est un enjeu industriel important de nos jours. Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau, mais aussi de l'optimisation de l'architecture des phases en présence (Mishnaevsky, L. et Schmauder, S., 2001). Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de fonction FGM (Functionally Graded Materials).

En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés (Nabil Ferguen et al, 2011). Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels.

Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil (O. BOUAZIZ, 2011).

Cette stratégie de développement semble très prometteuse en particulier pour optimiser la tenue en température et la ténacité.

La plupart des « FGM » sont constitués d'un mélange de céramique et de métal. Cette composition est variée d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal avec une variation désirée des fractions volumiques de ces deux matériaux entre les deux surfaces (J. N. Reddy, 2000).

Les propriétés mécaniques de ces deux composants sont illustrées dans le tableau I-1

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance thermique.- Bonne résistance à l'oxydation.- Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none">- Elimination des problèmes de l'interface.- Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance mécanique.- Conductivité thermique élevée.- Très bonne ténacité.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

I.2 Concept du matériau FGM :

Le concept des « Matériaux à gradients évalués » a été proposé par des scientifiques à Sendai en 1984. L'idée a été de réaliser des matériaux utilisés comme des barrières thermiques dans différents domaines.

Les changements continus de la composition, de la microstructure, de la porosité de ces matériaux distinguent les FGMs des matériaux composites telles que la force mécanique et la conductivité thermique (Fig.I.1). Il en résulte un gradient, ce dernier déterminera les propriétés des FGMs. On peut dans certains cas, avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Sellai Ben-Omrane, 2011).

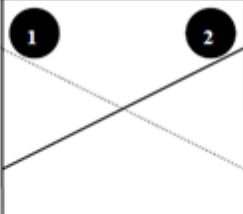
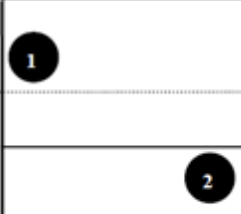
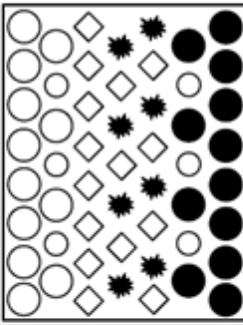
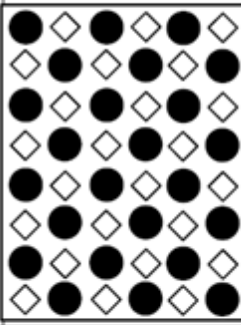
Propriété	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>Fibre ★</p>		
Matériau	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.1 : Caractéristiques du matériau à gradient de propriétés.

En 1987, un projet national a été lancé intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradients de propriétés et l'étude de la relaxation de l'effort thermique ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

-Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Le concept des FGMs est d'intérêt non seulement dans la conception pratique de « matériaux réfractaires », mais aussi dans le développement de divers matériaux fonctionnels.

A la fin de l'année 1989, les chercheurs japonais avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surface maximales de 200K et à gradient de température de 100K.

I.3 Domaines d'applications :

La science des matériaux a fait de grands progrès au siècle dernier. Des matériaux révolutionnaires ont été conçus pour résister même aux environnements inhospitaliers.

Les FGMs (Functionally Graded Materials) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux. Les FGMs les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques (L.Marin, 2005).

Le potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles. Quelques unes d'entre elles sont accentuées ci-dessous :

I.3.1 l'aérospatial :

Les FGMs peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend appropriés pour l'usage. Si la technique de traitement est améliorée, les FGMs sont prometteurs et peuvent être employés dans des secteurs plus larges d'espace (Rasheedat.M et al, 2012).

I.3.2 La médecine :

Des tissus vivants comme des os et des dents sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement évalués de la nature, un matériau compatible est nécessaire qui servira comme bio-tissu d'origine. Le candidat idéal pour cette application est le FGM (W. Pompea et al, 2003).

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

Les FGMs ont un large éventail d'application en chirurgie dentaire ,et les applications orthopédiques pour les dents et le remplacement de l'os.

I.3.3L'énergie :

Les FGMs sont employés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés en tant qu'enduit protecteur sur des lames de turbine dans les turbomoteurs (M. Niino et al, 2005).

I.4 Procédés de fabrication des matériaux à gradients évalués :

Il existe de nombreuses méthodes pour la fabrication des FGMs, nous citons ci-dessous quelques unes d'entre elles :

I.4.1 Coulage en bande (Tape casting) :

Le coulage en bande est devenu une technique largement utilisée pour la fabrication de feuilles métalliques ou céramiques.

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à laminer une suspension sur un support fixe à l'aide d'un sabot de coulage (Aurélie JULIAN, 2008).

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (FigI.2), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande (François Cabannes, 2014).

Deux types de configuration existent pour les montages servant au coulage en bande :

- *Le coulage continu* : le support est mobile et le sabot est fixe. Ce type de configuration est généralement utilisé en fabrication industrielle ;
- *Le coulage discontinu* : le sabot se déplace sur le support fixe. Ce type de banc est approprié à l'étude des paramètres de coulage : vitesse de déplacement, hauteur du couteau, atmosphère de séchage. C'est le cas de l'équipement utilisé au laboratoire

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

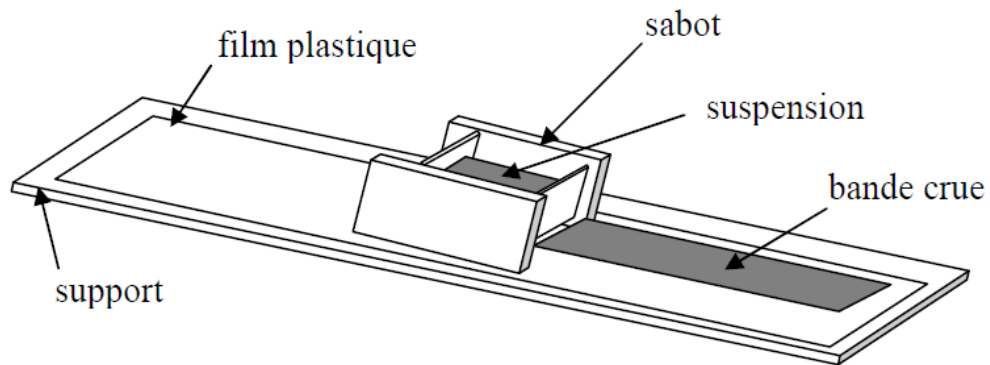


Figure I.2 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (R.E.Mistler, 1973) ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (P. Boch et al, 1986).

Cette technique présente comme principal avantage de nécessiter une installation à faible coût.

I.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting):

Le coulage en barbotine consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule (Hossein ABDIZADEH, 1997). Après séchage, on obtient le corps en cru.

Le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ❖ Formation du tesson ou « prise » ;
- ❖ Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- ❖ Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- ❖ Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3 La métallurgie des poudres :

La métallurgie en poudre est une technique pour fabriquer les matériaux fonctionnellement gradués, par trois étapes de base notamment : la pesée et le mélange de la poudre (a,b), le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) et finalement le frittage(d) (Rasheedat M et al, 2012) (voir Fig. I.3).

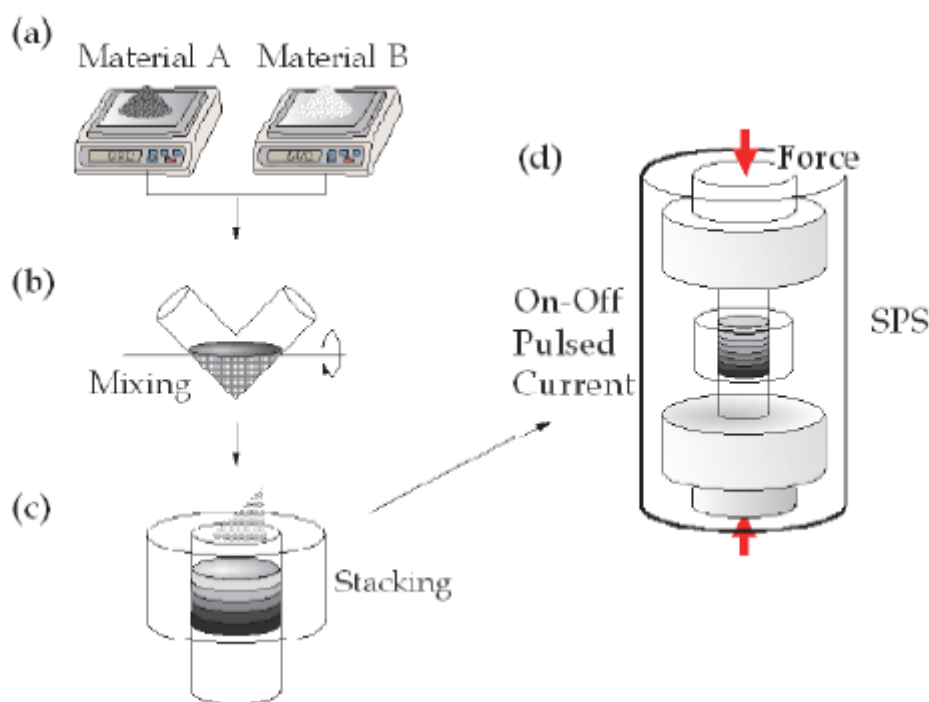


Figure I.3 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres (BARKA Merbouha, 2012).

Cette technique a beaucoup d'avantages, on cite brièvement ci-dessous quelques uns d'entre eux :

- Le procédé permet la réalisation de pièces à partir de métaux dont les méthodes classiques de fusion sont impossibles à adapter.
- Une structure métallurgique fine et homogène

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

- Ce procédé de mise en forme des matériaux limite le nombre d'étape pour la production de produits finis usinés. La diminution des étapes a un impact direct sur les coûts de production.
- Obtention d'un produit de grande qualité à des prix compétitifs.

I.4.4 Le frittage:

Le frittage est un processus qui permet d'agglomérer des poudres et d'obtenir des produits compacts, denses et durs, sans atteindre nécessairement la température de fusion de l'un de ses constituants.

Cette consolidation s'effectue par la formation de liaisons entre les grains. Au point de vue physico-chimique, trois types de frittage sont distingués (TALIDI Abdellah, 2006) :

- *La vitrification* : Il y'a apparition d'une phase vitreuse largement suffisante pour combler la porosité. Ce procédé est largement utilisé pour densifier les céramiques.
- *Le frittage en phase liquide* : La quantité du liquide qui apparait est juste suffisante pour réarranger les particules, il consiste à former des ponts entre les grains et les amener ainsi au contact les uns des autres. Ce type de frittage est polyphasé. il se produit lorsque la température de traitement est supérieure au point de fusion du constituant le plus fusible.
- *Le frittage en phase solide* : Tous les constituants restent solides. La consolidation est produite par soudure et le changement de forme des grains. Ce type de frittage peut être monophasé à un constituant ou polyphasé.

1.5 Avantages et inconvénients des FGMs :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

II.5.1 Avantages de la FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement (Narottam.P et al, 2011) et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc

II.5.2 Inconvénients de la FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (Narottam.P et al, 2011).

I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM:

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Un matériau FGM peut être défini par la variation des fractions volumiques.

Considérant une plaque rectangulaire (Fig I.4), .Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne du plan est dans la direction d'épaisseur.

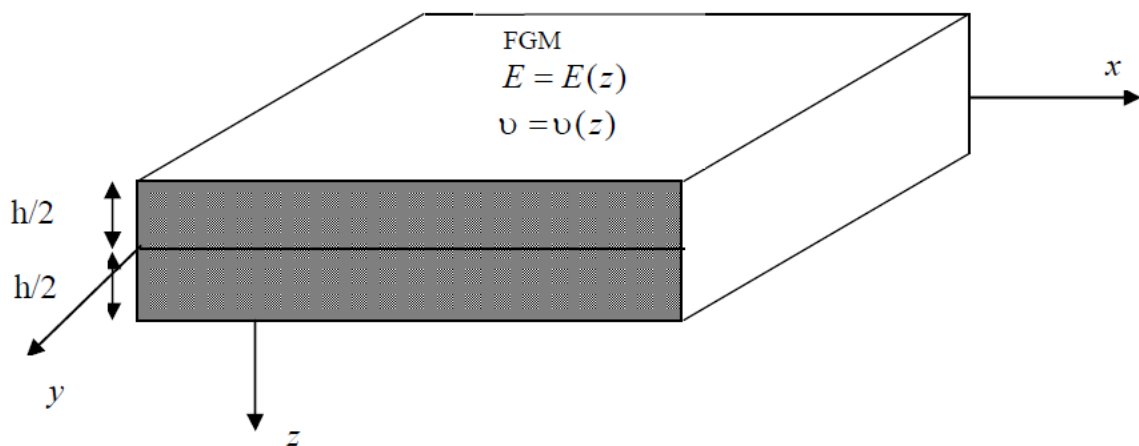


Figure I.4 : Géométrie d'une plaque FGM.

Les propriétés matérielles, module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Cependant, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

L'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque est constant. Cependant, le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi.

La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une fonction de loi de puissance sous la forme :

$$V(Z) = \left(\frac{Z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériel et h représente l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(Z)$ définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées suivant la loi des mélanges :

$$E(Z) = E_m + (E_c - E_m)V(Z) \quad (I.2)$$

Où: E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface du métal (surface inférieure : $z = -h/2$) et de la surface du céramique supérieure : $z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.5 ci-dessous :

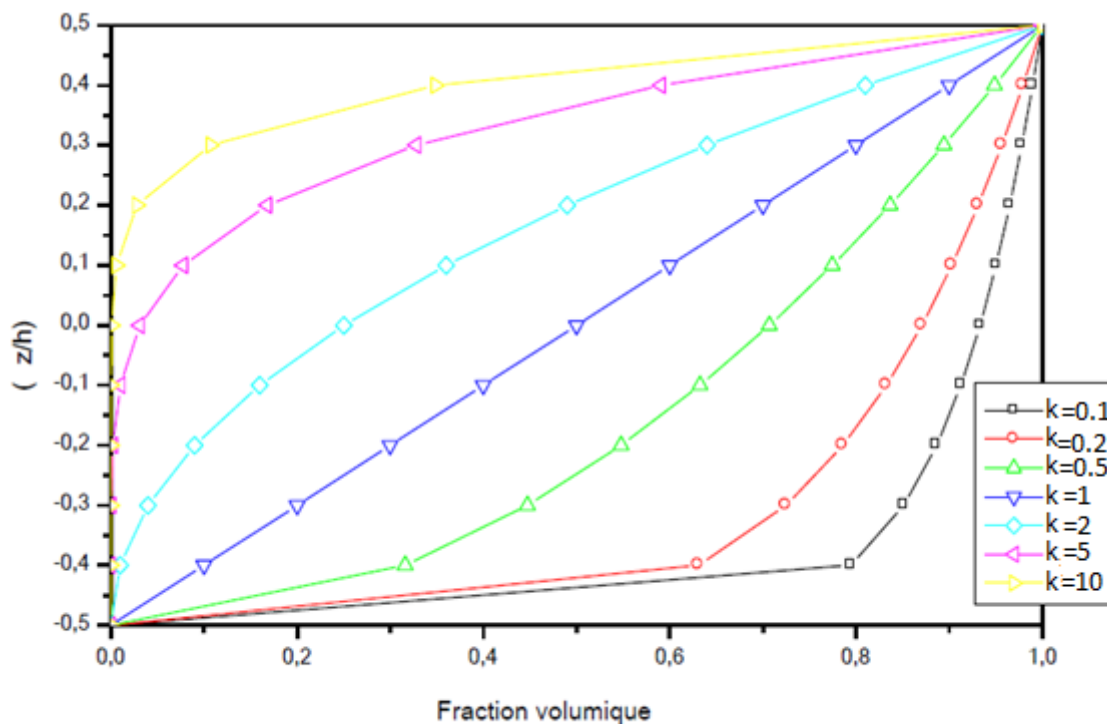


Figure I.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

On distingue clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement (G. Bao., L. Wang , 1995). Par conséquent, (Chi . Shyang-ho. , Chung Yen-Ling , 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \\ V_2(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (I.3)$$

Et en utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé comme suit :

$$\begin{aligned} E(z) &= V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \\ E(z) &= V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (I.4)$$

La figure I.6 montre la variation de la fraction volumique d'une plaque S-FGM.

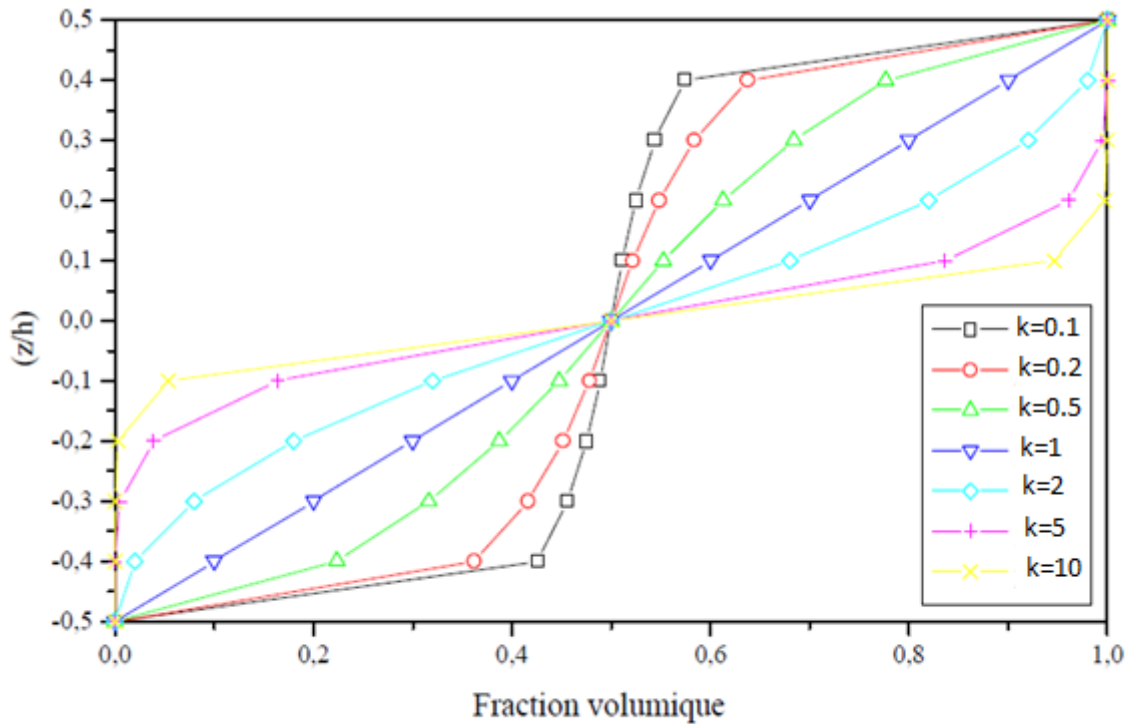


Figure I.6: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

La fonction exponentielle est la plus utilisée pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM. Elle s'écrit de la forme suivante :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La figure I.7 ci-dessous représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

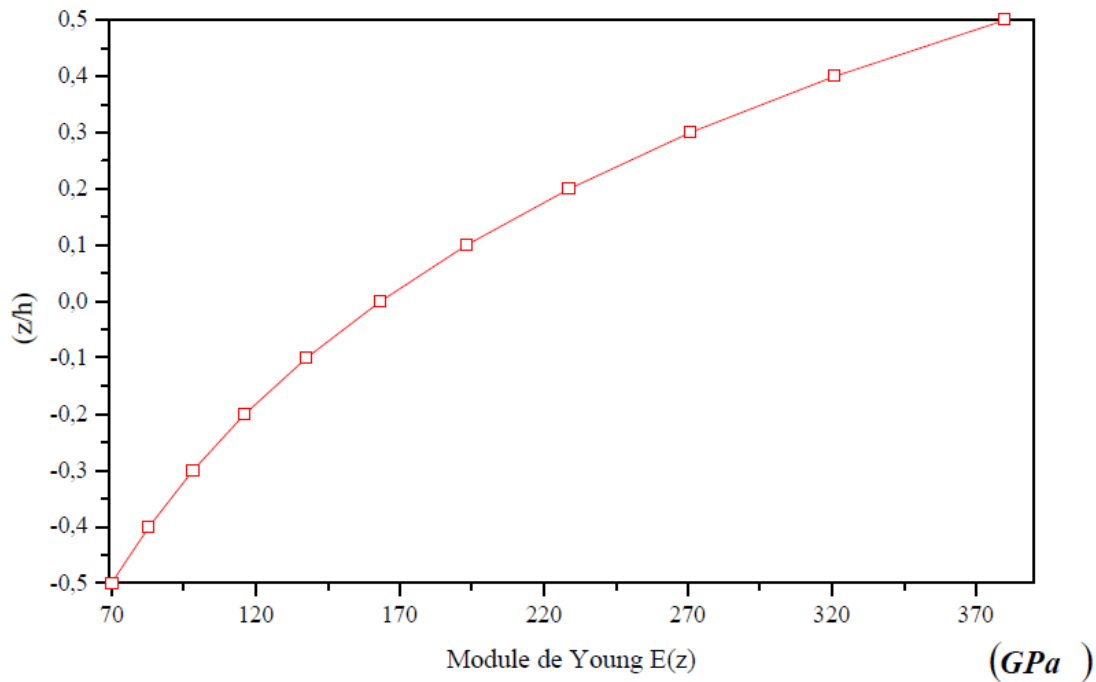


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

1.7 Loi de mélange :

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation *en parallèle* dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront *en série*, dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices (m) et (f) la matrice et la fibre, il vient alors :

$$E_L \text{ en sens long :} \quad E_L = C_m E_m + C_f E_f \quad (\text{I.6})$$

$$E_T \text{ en sens travers :} \quad \frac{1}{E_T} = \frac{C_m}{E_m} + \frac{C_f}{E_f}$$

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = C_m \varepsilon_{T_m} + C_f \varepsilon_{T_f} \quad (\text{I.7})$$

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients évalués

Chacune des déformations latérales ε_{T_m} et ε_{T_f} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{T_m} = \nu_{LT_m} \varepsilon_L$ et $\varepsilon_{T_f} = \nu_{LT_f} \varepsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = C_m \nu_m + C_f \nu_f \quad (\text{I.8})$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{\mu_{LT}} = \frac{C_m}{\mu_m} + \frac{C_f}{\mu_f} \quad (\text{I.9})$$

I.8 Conclusion :

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers.

Nous avons aussi cité quelques procédés de leur fabrication ainsi que les domaines de leur application.

*Les Différentes
Théories Des
Plaques*

II.1 Introduction

L'emploi des structures minces, poutres plaques et coques est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier le génie civil. Il s'agit en général de prédire ou d'éviter plusieurs phénomènes (Fissure, endommagement, bruit...etc).

La plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation au premier ordre du comportement des plaques. La littérature sur le thème des études du comportement linéaire est abondante. Cependant l'hypothèse d'un tel comportement a un domaine de validité restreint.

En effet, de nos jours, les structures utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux de chargement plus importants. Cela engendre des déplacements importants pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable et nécessite une modélisation non linéaire.

Dans ce chapitre, une attention particulière sera portée à différentes théories des plaques employées.

II.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Fig II.1). On définit :

- Le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation $z = 0$;
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

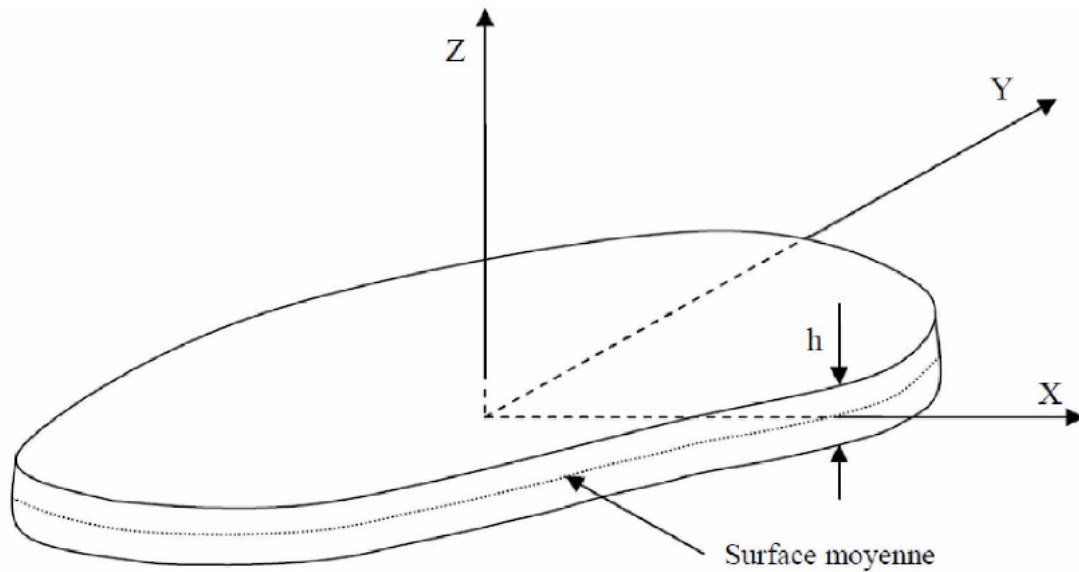


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

II.3 Théories de déformation des plaques

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff- Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner(1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient plus importante.

Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en trois principales catégories: théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy).

II.3.1. Théorie classique des plaques minces (CPT)

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées

Chapitre II: Différentes théorie des plaques

poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love (1888) sont les suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée (Fig II.2)
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par conséquent une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{II.1}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

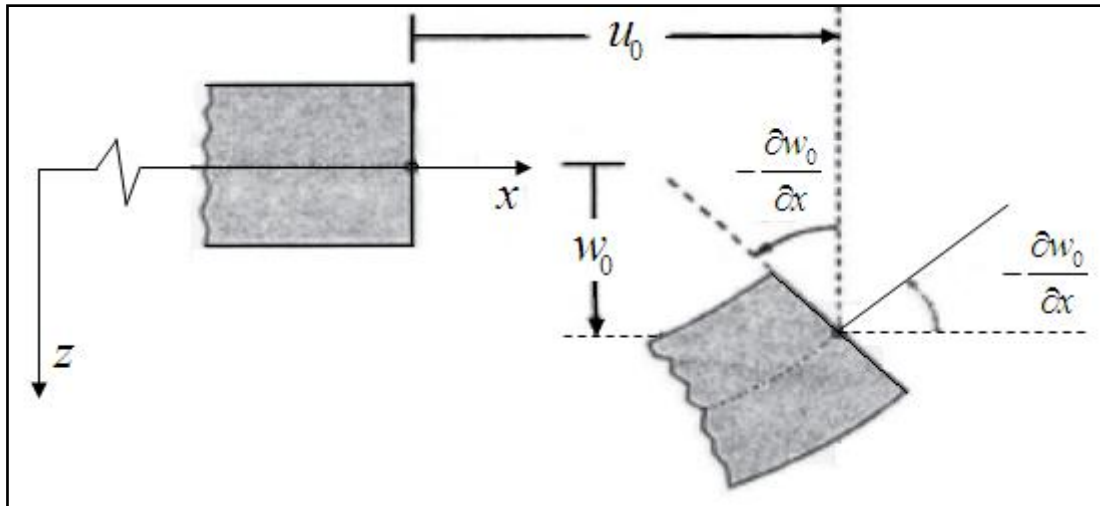


Fig II.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff

Ce modèle donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses puisqu'il ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse.

II.3.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (Timoshenko, 1921) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Où : u , v et w sont les déplacements le long des coordonnées x , y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie,

Chapitre II: Différentes théorie des plaques

du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

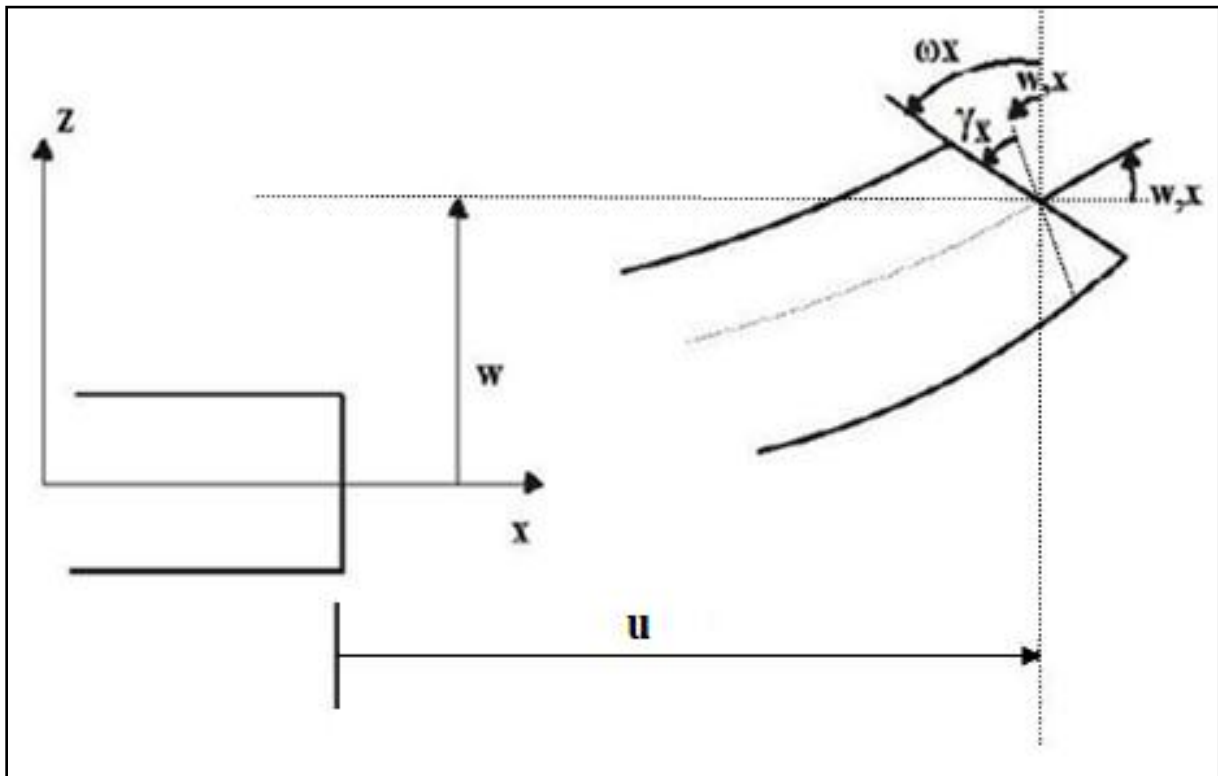


Figure II.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin .

Et afin d'éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)

Contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al, 1949 ; Naghdi, 1957)

Plusieurs modèles de plaque ont été introduit, utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

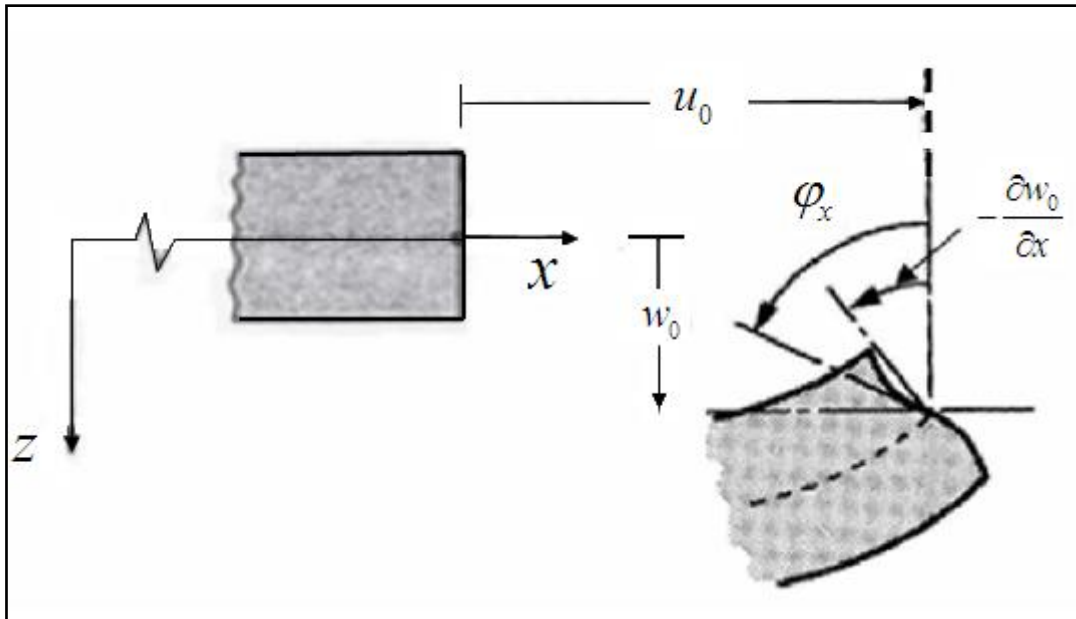


Figure II.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997; Hilderbrand et al, 1949) sont obtenus par :

$$\psi(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (Touratier, 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy. La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama (Karama et al, 2003) est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

II.4 Etude des contraintes résiduelles

Ces contraintes peuvent être associées aux techniques de fabrication des structures en matériaux à gradient fonctionnel. Elles peuvent aussi être le résultat de charges thermiques statiques ou dynamiques (cycliques). Ces contraintes surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujetti à

Chapitre II: Différentes théorie des plaques

un environnement haute-température. Des contraintes résiduelles importantes peuvent modifier le comportement vibratoire des structures FGM.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drake et Williamso en 1993 (Drake et al, 1993; Williamso et al, 1993). Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al₂O₃-Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos et ses collaborateurs (Ginnakopouluset al, 1995) ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson et al. Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al₂O₃-Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot et ses collaborateurs (Finot et al, 1996) complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran (Ravichandran ,1995) a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température.

Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin (Hill et lin, 2002) qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les théories des plaques FGMs à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et ses différents modèles et enfin pour terminer la définition des contraintes résiduelles et les différents travaux effectués par plusieurs chercheurs pour décrire ce phénomène.

*Formulations Théoriques
Du Flambement
Thermique Des plaques
FGM Sur Fondations
Elastiques*

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

III.1 Introduction :

Considérons une plaque rectangulaire en FGM d'épaisseur h , longueur a , et de largeur b référée aux coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) , comme montré dans (Fig.III.1).

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans l'actuelle théorie efficace de déformation de cisaillement trigonométrique est seulement de quatre, alors que cinq inconnus sont exigés dans le cas de la théorie trigonométrique conventionnelle de déformation de cisaillement (Zenkour et Sobhy, 2011) et les autres théories de déformation de cisaillement (Reddy, 1984; Karama et al, 2003). La théorie présentée est variationnellement cohérente, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à des contraintes de cisaillement transversale variant paraboliquement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nulleté de ces contraintes au niveau des surfaces libres.

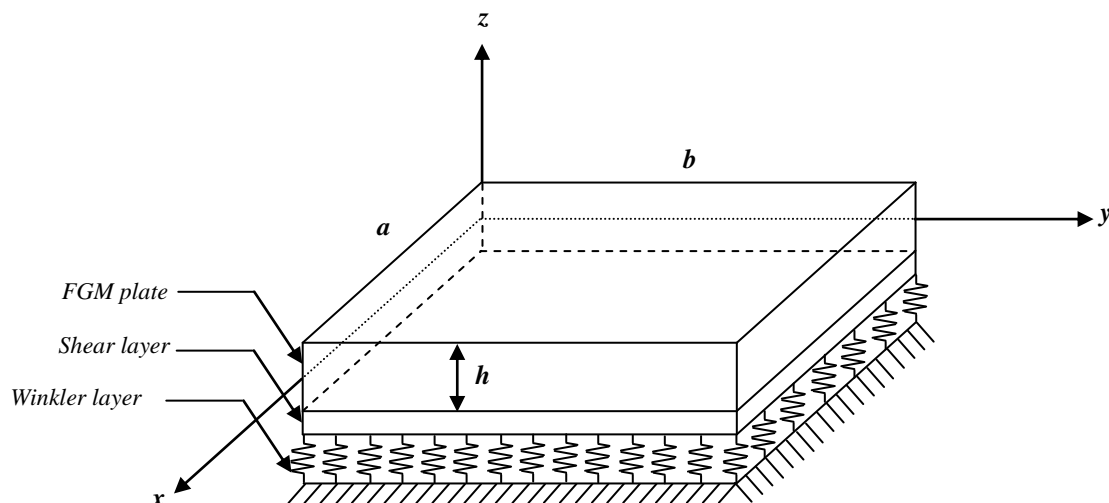


Fig.III.1: Système de coordonnées et géométrie pour plaques FG rectangulaires sur fondation élastique de Pasternak.

III.2 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie sont:

- (i) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales.

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

- (ii) Le déplacement transversal w inclut deux composantes : un déplacement dû à la flexion w_b et un déplacement w_s dû au cisaillement. Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y .

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.1})$$

- (iii) La contrainte normale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales σ_x et σ_y .
- (iv) Le déplacement u suivant la direction x et le déplacement v suivant la direction y se comportent de trois parties à savoir des composantes d'extension, flexion et cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.2})$$

Les composantes de la flexion et u_b et v_b sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de u_b et v_b sont données par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent à l'aide du déplacement w_s une variation sinusoïdale des distorsions γ_{xz} , γ_{yz} et par conséquent les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque deviennent également non-linéaires de telle façon que les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} seront nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et par conséquent l'expression de u_s et v_s est donnée par (Ameur et al, 2011) :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

Où

$$f(z) = \left(z - \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{III.5})$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

III.3. Cinématiques

En se basant sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (III.1)-(III.5) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.6b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.6c})$$

Les équations non-linéaires de contrainte-déplacement de Von Karman sont comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^b \\ \mathbf{k}_y^b \\ \mathbf{k}_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^s \\ \mathbf{k}_y^s \\ \mathbf{k}_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{g}(z) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^s \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad \mathbf{k}_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad \mathbf{k}_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{III.8a})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad \mathbf{k}_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad \mathbf{k}_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (\text{III.8b})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad \mathbf{k}_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad \mathbf{k}_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.8c})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \boldsymbol{\gamma}_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \mathbf{g}(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.8d})$$

III.4. Equations constitutives

Les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de puissance suivant l'épaisseur de la plaque tel que :

$$P(z) = P_m + P_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad P_{cm} = P_c - P_m \quad (\text{III.9})$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Où P représente la propriété matérielle efficace telle que E est le module de Young, α coefficient de dilatation thermique. Les indices m et c représentent les constituants métalliques et céramiques respectivement; et n est l'exposant de la fraction volumique. La valeur de n égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, tandis que n infinie indique que la plaque est entièrement en métallique. Puisque les effets de la variation du rapport de Poisson ν sur la réponse des plaques FGM sont très petits (Yang et al, 2005b; Kitipornchai et al, 2006), le coefficient de poisson ν est supposé constant.

Les relations constitutives linéaires de la plaque peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont respectivement les composantes de contraintes et de déformations. $T(x, y, z)$ est la température qui varie à travers l'épaisseur. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III.9) les coefficients de rigidité peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.11})$$

En se basant sur la présente théorie trigonométrique de déformation de cisaillement, les résultantes des contraintes sont liées aux contraintes par les équations :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III.12a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \quad (\text{III.12b})$$

En utilisant l'éq (III.10) dans l'éq (III.12) les résultantes des contraintes de la plaque de FG peuvent être liées à l'ensemble des déformations par

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{k}^b \\ \mathbf{k}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \boldsymbol{\gamma}, \quad (\text{III.13})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III.14a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (\text{III.14b})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_x^0, \boldsymbol{\varepsilon}_y^0, \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0\}^t, \quad \mathbf{k}^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad \mathbf{k}^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III.14c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14d})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14e})$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\boldsymbol{\gamma}_{yz}, \boldsymbol{\gamma}_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14f})$$

Où A_{ij} et B_{ij} sont la rigidité de la plaque définie par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\nu} \\ \frac{1-\boldsymbol{\nu}}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III.15a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\boldsymbol{\nu}^2} \quad (\text{III.15b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\boldsymbol{\nu})} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.15c})$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

III.5. Les équations d'équilibre et de stabilité

Les équations d'équilibre de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique de Pasternak sous des chargements thermiques peuvent être dérivées sur la base de l'énergie potentielle stationnaire. L'énergie potentielle totale de la plaque V peut être écrite sous la forme suivante :

$$V = U + U_F \quad (III.16)$$

Ici, U l'énergie de déformation totale de la plaque, et est calculée comme

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x (\epsilon_x - \alpha T) + \sigma_y (\epsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dz dy dx, \quad (III.17)$$

Et U_F l'énergie de déformation due à la fondation élastique de Pasternak, qui est donnée par (Benyoucef et al, 2010; Ait Atmane et al, 2010; Ameer et al, 2011)

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f_e (w_b + w_s) dy dx \quad (III.18)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation de Pasternak:

$$f_e = K_w (w_b + w_s) - K_g \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (III.19)$$

Où : K_w est la rigidité de la fondation de Winkler et K_g est une constante représentant l'effet des interactions de cisaillement des éléments verticaux.

En utilisant les Eqs. (7), (8) et (13) et en employant le principe des travaux virtuels on aura les équations d'équilibre comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} - f_e &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} - f_e &= 0 \end{aligned} \quad (III.20)$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III.21})$$

Les équations de stabilité pour des plaques FG peuvent être obtenues par le moyen du critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'équilibre stable pour une plaque sandwich sous des charges thermiques est défini en termes de composants du déplacement u_0^0 , v_0^0 , w_b^0 et w_s^0 . Les composantes de déplacement d'un état voisin de l'équilibre stable diffèrent par u_0^1 , v_0^1 , w_b^1 , w_s^1 par rapport à la position d'équilibre. Ainsi les déplacements totaux de l'état voisin sont :

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, v_0 = v_0^0 + v_0^1, w_b = w_b^0 + w_b^1, w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad (\text{III.22})$$

En conséquence, les résultantes des contraintes sont divisées en deux termes représentant l'équilibre stable et l'état voisin. Les résultantes des contraintes en exposant 1 sont des fonctions linéaires du déplacement. Compte tenu de tous ces mentionnés ci-dessus et en utilisant les équations (III.20) et (III.22), les équations de stabilité deviennent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Avec

$$\bar{N}^1 = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III.24a})$$

$$f_e^1 = \mathbf{K}_W (w_b^1 + w_s^1) - \mathbf{K}_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) \quad (\text{III.24b})$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Les termes N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 sont résultantes de forces de pré flambement obtenues comme:

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z)E(z)T}{1-\nu} dz, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{III.25})$$

III.6. Solution trigonométrique du flambement thermique

Les plaques rectangulaires sont généralement classifiées selon le type d'appui utilisé. Nous sommes ici concernés par la solution exacte de l'Eq.(III.23) pour une plaque FG simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour la présente théorie de déformation de cisaillement raffinée aux bords latéraux:

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \text{ pour } x=0, a, \quad (\text{III.26a})$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \text{ pour } y=0, b. \quad (\text{III.26b})$$

La solution approchée suivante a été démontré pour satisfaire à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Où U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{bmn}^1 , et W_{smn}^1 sont les paramètres à déterminer et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

En substituant Eq (III.27) dans Eq (III.23) on obtient:

$$[K]\{\Delta\} = 0 \quad (\text{III.28})$$

Où $\{\Delta\}$ désigne la colonne

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\}^t \quad (\text{III.29})$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par :

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\
 k_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\
 k_{13} &= \lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\
 k_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\
 k_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
 k_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\
 k_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 k_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 k_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 k_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + \\
 &\quad K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w)
 \end{aligned} \tag{III.30}$$

III.7. Solution du flambement thermique

Dans ce qui suit, la solution de l'équation $|K|=0$ pour différents types de conditions de chargement thermique est présentée. La variation de température est variée seulement à travers l'épaisseur

III.7.1. Flambement des plaques FG sous une température uniformément élevée

La température initiale de la plaque est supposée être T_i . La température est uniformément élevée à la valeur finale T_f dans laquelle la plaque flambe. La variation de température est $\Delta T = T_f - T_i$. En substituant Eq.(III.31) dans l'équation $|K|=0$, la variation de la température critique du flambement est obtenue sous la forme :

$$\Delta T_{cr} = \frac{1}{\bar{\beta}_1(\lambda^2 + \mu^2)} \frac{\bar{k}_{33}\bar{k}_{44} - \bar{k}_{34}\bar{k}_{43}}{\bar{k}_{33} + \bar{k}_{44} - \bar{k}_{34} - \bar{k}_{43}} \tag{III.31}$$

Où

$$\bar{\beta}_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} dz.$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Et

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{33} &= k_{33} - k_{13} \frac{b_1}{b_0} - k_{23} \frac{b_2}{b_0}, & \bar{k}_{34} &= k_{34} - k_{14} \frac{b_1}{b_0} - k_{24} \frac{b_2}{b_0} \\
 \bar{k}_{43} &= k_{34} - k_{13} \frac{b_3}{b_0} - k_{23} \frac{b_4}{b_0}, & \bar{k}_{44} &= k_{44} - k_{14} \frac{b_3}{b_0} - k_{24} \frac{b_4}{b_0} \\
 b_0 &= k_{11}k_{22} - k_{12}^2, & b_1 &= k_{13}k_{22} - k_{12}k_{23}, & b_2 &= k_{11}k_{23} - k_{12}k_{13} \\
 b_3 &= k_{14}k_{22} - k_{12}k_{24}, & b_4 &= k_{11}k_{24} - k_{12}k_{14}
 \end{aligned} \tag{III.32}$$

III.7.2. Flambement des plaques FG soumises à une variation graduelle de température à travers l'épaisseur

Pour des plaques FG, la variation de température n'est pas uniforme. La température est supposée être variée en fonction de la loi de puissance à travers l'épaisseur comme suit:

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta + T_m, \tag{III.33}$$

Où: la différence de température de flambement $\Delta T = T_c - T_m$ et T_c et T_m sont la température de la surface supérieure qui est riche en céramique et la surface inférieure qui est riche en métal respectivement. β est l'exposant de la température ($0 < \beta < \infty$). On note que la valeur de β égale à l'unité représente une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur. Alors que la valeur de β (à l'exception de l'unité) représente une variation non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. Comme dans le cas de chargement précédent, la différence de température critique de flambement ΔT_{cr} peut être déterminée en tant que

$$\Delta T_{cr} = \frac{\bar{k}_{33}\bar{k}_{44} - \bar{k}_{34}\bar{k}_{43} + T_m \beta_1 (\lambda^2 + \mu^2) (\bar{k}_{33} + \bar{k}_{44} - \bar{k}_{34} - \bar{k}_{43})}{\beta_2 (\lambda^2 + \mu^2) (\bar{k}_{33} + \bar{k}_{44} - \bar{k}_{34} - \bar{k}_{43})} \tag{III.34a}$$

Chapitre III: Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sur fondations élastiques

Où

$$\bar{\beta}_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta dz \quad (\text{III.34b})$$

III.8 Conclusion

Le comportement du flambement thermique des plaques FG simplement appuyées sous différents types de chargement thermique (uniforme, linéaire et non linéaire) et reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak a été analysé en utilisant une théorie trigonométrique de déformation de cisaillement simple et efficace. Contrairement à la théorie trigonométrique conventionnelle de déformation de cisaillement, la théorie trigonométrique de déformation de cisaillement proposée contient seulement quatre inconnus.

*Formulations
Théoriques Du
Flambement
Thermique Des
Plaques FGM Avec
Le Concept De La
Position De L'axe
neutre.*

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, une théorie de déformation de cisaillement exponentielle basée sur la position exacte de la surface neutre est employée pour dériver les équations d'équilibre des plaques FGMs rectangulaires, en tenant compte de la non linéarité géométrique dans le sens de von Karman. Le flambement thermoélastique sera étudié.

IV.2 Détermination de la surface de référence

On suppose que la plaque de FG est faite de composants en céramique ou en métal. Comme la condition de symétrie du plan médian n'existe pas pour les plaques de FG, les équations de flexion et membrane sont couplées. Cependant, si l'origine du système de coordonnées se trouve sur la surface neutre, le comportement des plaques FG peut être analysé avec les théories de plaques isotropes homogènes, parce que les équations de flexion et membrane de la plaque ne sont pas couplés dans ce cas. Afin de déterminer la position neutre de la surface de la plaque de FG, deux plans de référence différents sont considérés pour la mesure dans la direction z . La coordonnée z_{ms} est mesurée à partir de la surface du milieu, et la coordonnée z_{ns} est mesurée depuis la surface neutre de la plaque (Fig IV.1).

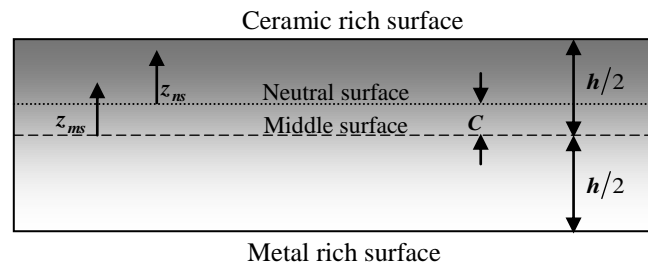


Fig IV.1: Position de la surface médiane et de la surface neutre d'une plaque fonctionnellement graduée.

La fraction volumique de la céramique V_c peut être écrite en fonction des coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad (IV.1)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

Où: h est l'épaisseur de la plaque et k désigne l'indice de puissance de la plaque qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. Et le paramètre C est la distance entre la surface médiane et la surface neutre. Les propriétés matérielles non homogènes d'une plaque fonctionnellement graduée peuvent être obtenues au moyen de la loi de Voigt de mélange (S.Suresh et A.Mortensen, 1998). Ainsi, en utilisant l'équation. (1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FG, en fonction de l'épaisseur de coordonnées, deviennent :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ms} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad P_{CM} = P_C - P_M, \quad (IV.2)$$

Où P_M et P_C sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement. Dans le présent travail, nous supposons que le module d'élasticité E , et le coefficient de dilatation thermique α , sont décrits par l'équation (IV.2), tandis que le coefficient de Poisson ν , est considérée comme étant constant à travers l'épaisseur. La position de la surface neutre de la plaque de FG est déterminée pour satisfaire le premier moment en ce qui concerne le module d'Young étant égale à zéro comme suit (Zhang et Zhou, 2008):

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0, \quad (IV.3)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue sous la forme :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}}. \quad (IV.4)$$

Il est clair que le paramètre C est égal à zéro pour les plaques isotropes homogènes,

La figure IV.2 représente la variation du paramètre sans dimension C/h par rapport à l'indice de loi de puissance k pour une plaque Al / Al₂O₃ fonctionnellement graduée. Il peut être observé que lorsque l'indice de loi de puissance k des FGMs devient nul (entièrement en céramique) ou de l'infini (entièrement métallique); la surface neutre coïncide sur la surface médiane, comme prévu.

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

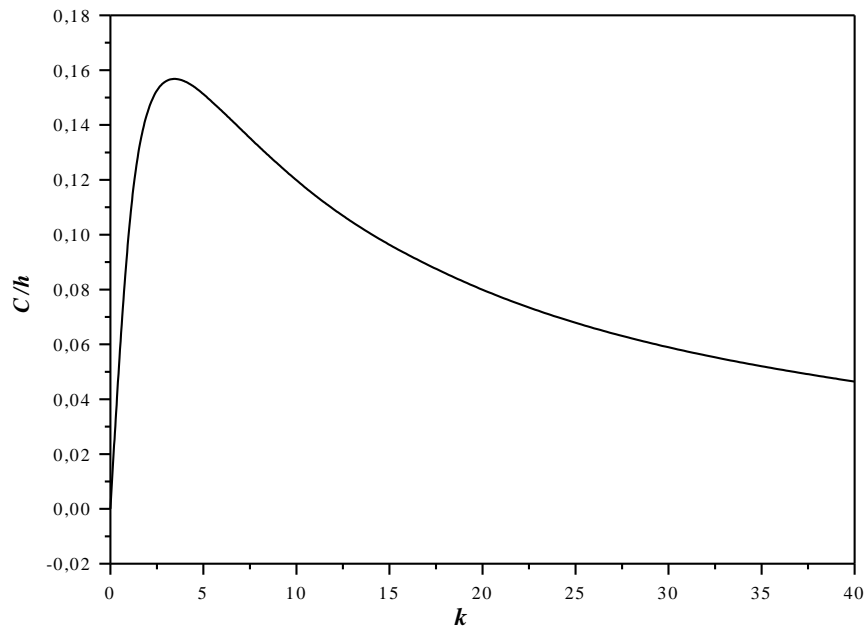


Fig IV.2: Variation de la position de la surface neutre par rapport à l'indice de loi de puissance.

IV.3 Equations d'équilibre

Considérons une plaque rectangulaire FG de longueur a , largeur b et d'épaisseur h . Le système cartésien de coordonnées est situé dans la surface neutre de la plaque de FG et la plaque est soumise à une charge thermique $T(x,y,z_{ns})$

Les déplacements d'un point matériel de la plaque de FG de coordonnées (x,y,z_{ns}) sont présentés comme suit:

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z_{ns}) \varphi_x, \quad (\text{IV.5a})$$

$$v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z_{ns}) \varphi_y, \quad (\text{IV.5b})$$

$$w(x, y, z_{ns}) = w_0(x, y). \quad (\text{IV.5c})$$

Où : u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements de la surface médiane dans les directions x, y , et z_{ns} respectivement, φ_x et φ_y sont les angles de rotation autour des axes x et y , et représentent l'effet

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

de cisaillement transversal et le coefficient $\psi(z_{ns})$ est une fonction impaire de z_{ns} . Tous les déplacements généralisés ($u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$) sont des fonctions de x et y . Le déplacement de la théorie classique des plaques minces (CPT) peut facilement être obtenue de l'équation (IV.5) en mettant $\psi(z_{ns})=0$. Les déplacements de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) sont obtenus de la même formule en mettant $\psi(z_{ns}) = z_{ns}$. La théorie exponentielle de déformation de cisaillement de la plaque (EPT) (M.Karama et al, 2003) basée sur la position exacte de la surface neutre en prenant compte de l'effet du cisaillement transverse est utilisée dans ce travail. Selon cette théorie, le coefficient $\psi(z_{ns})$ est déterminé par la formule:

$$\psi(z_{ns}) = (z_{ns} + C) e^{-2\left(\frac{z_{ns} + C}{h}\right)^2}, \quad (IV.6)$$

On note que la théorie EPT ne nécessite pas de facteur de correction et donne lieu à une distribution quadratique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur. Les théories EPT et FSDT contiennent le même nombre d'inconnues.

En employant les relations contraintes-déformations de Von Karman (J.N.Reddy, 1999) et l'équation (IV.5) on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \psi(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \psi'(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad (IV.7)$$

Où:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix}, \quad (IV.8a)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

Et

$$\psi'(z_{ns}) = \frac{d\psi(z_{ns})}{dz_{ns}}. \quad (\text{IV.8b})$$

Les relations constitutives linéaires sont:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.9})$$

Où

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composantes de contraintes et déformations, respectivement,

En utilisant l'équation (IV.2), nous obtenons les coefficients de rigidité Q_{ij} sous la forme:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.10a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.10b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.10c})$$

Les équations d'équilibre pour une plaque rectangulaire découlent du principe de l'énergie potentielle totale minimale

$$\delta U = 0, \quad (\text{III.11})$$

Où U est l'énergie de déformation de la plaque FG:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2-c}^{h/2-c} \int_0^b \int_0^a (\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y (\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz_{ns}, \quad (\text{IV.12})$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

En substituant les relations (IV.7) et (IV.9) dans Eq (IV.12), nous obtenons les équations d'équilibre:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.13a})$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.13b})$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{IV.13c})$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad (\text{IV.13d})$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0, \quad (\text{IV.13e})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x & M_y & M_{xy} \\ S_x & S_y & S_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ \psi(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{IV.14a})$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xz} & Q_{yz} \end{pmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \begin{pmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix} \psi'(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (\text{IV.14b})$$

Sont les résultantes des moments et des contraintes.

En substituant Eq(IV.9) dans Eq (IV.14), les résultantes des contraintes de la plaque de FG peuvent être reliées aux déformations par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^a \\ 0 & D & D^a \\ B^a & D^a & H^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \eta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \\ S^T \end{Bmatrix}, \quad Q = A^a \gamma, \quad (\text{IV.15})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, \quad S = \{S_x, S_y, S_{xy}\}^t, \quad (\text{IV.16a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T\}^t, \quad M^T = \{M_x^T, M_y^T\}^t, \quad S^T = \{S_x^T, S_y^T\}^t, \quad (\text{IV.16b})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^t, \quad \eta = \{\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}\}^t, \quad (\text{IV.16c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.16d})$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

$$\mathbf{B}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^a & \mathbf{B}_{12}^a & 0 \\ \mathbf{B}_{12}^a & \mathbf{B}_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{66}^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^a & \mathbf{D}_{12}^a & 0 \\ \mathbf{D}_{12}^a & \mathbf{D}_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66}^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^a & \mathbf{H}_{12}^a & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^a & \mathbf{H}_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{66}^a \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.16e})$$

$$\mathbf{Q} = \{\mathcal{Q}_{xz}, \mathcal{Q}_{yz}\}^t, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad \mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{44}^a & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{55}^a \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.16f})$$

Où : A_{ij} , D_{ij} , etc sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{11}^a & \mathbf{D}_{11}^a & \mathbf{H}_{11}^a \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{B}_{12}^a & \mathbf{D}_{12}^a & \mathbf{H}_{12}^a \\ \mathbf{A}_{66} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{B}_{66}^a & \mathbf{D}_{66}^a & \mathbf{H}_{66}^a \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \mathcal{Q}_{11} \left(1, z^2, \boldsymbol{\psi}(z_{ns}), z_{ns} \boldsymbol{\psi}(z_{ns}), \boldsymbol{\psi}^2(z_{ns}) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\nu} \\ \frac{1-\boldsymbol{\nu}}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{IV.17a})$$

$$(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{B}_{22}^a, \mathbf{D}_{22}^a, \mathbf{H}_{22}^a) = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{B}_{11}^a, \mathbf{D}_{11}^a, \mathbf{H}_{11}^a), \quad (\text{IV.17b})$$

$$\mathbf{A}_{44}^a = \mathbf{A}_{55}^a = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \mathcal{Q}_{44} [\boldsymbol{\psi}'(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{IV.17c})$$

Les résultantes des contraintes et des moments $\mathbf{N}_x^T = \mathbf{N}_y^T$, $\mathbf{S}_x^T = \mathbf{S}_y^T$ et $\mathbf{M}_x^T = \mathbf{M}_y^T$ dues au chargement thermique sont définies comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x^T \\ \mathbf{M}_x^T \\ \mathbf{S}_x^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{1-\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\alpha}(z_{ns}) \mathbf{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \boldsymbol{\psi}(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{IV.18})$$

IV.4 Equations de stabilité:

Basées sur les relations (IV.7) et (IV.8) de contraintes-déplacements non-linéaires de Von Karman, les forces résultantes sont non-linéaires en fonction du déplacement transverse. En substituant Eq (IV.15) dans les équations d'équilibre (IV.13), on obtient un système non linéaire d'équations différentielles. Pour obtenir les équations de stabilité, nous utilisons le critère d'équilibre adjacent proposé par (Brush et Almroth, 1975). Basé sur ce critère, l'équilibre stable de la plaque sous chargement dans le plan est défini en termes des composantes de déplacement (u_0^0 , v_0^0 , w_0^0 , φ_x^0 , φ_y^0). La transition de l'état d'équilibre à un état

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

voisin est défini par les composantes de déplacement $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \varphi_x^1, \varphi_y^1)$. Ainsi, les déplacements totaux d'un Etat voisin sont:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_0 = w_0^0 + w_0^1, \quad \varphi_x = \varphi_x^0 + \varphi_{xs}^1, \quad \varphi_y = \varphi_y^0 + \varphi_{ys}^1, \quad (IV.19)$$

En substituant Eq (IV.18) dans Eq (IV.15), nous obtenons les expressions pour les résultantes de déformation pour les états d'équilibre et voisin. En négligeant la déflexion et la rotation de la configuration du pré-flambement et les termes non linéaires, on peut écrire les résultantes de déformation comme suit (Brush et Almroth, 1975):

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^0 \\ M^0 \\ S^0 \\ Q^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^1 \\ M^1 \\ S^1 \\ Q^1 \end{Bmatrix}. \quad (IV.20)$$

Les exposants 1 et 0 se réfèrent à l'état après la perte de la stabilité et de l'état d'équilibre, respectivement.

Les équations de stabilité peuvent être obtenues en substituant Eqs (IV.19) et (IV.20) dans Eqs (IV.13).

Sur cette substitution, les termes avec l'exposant 0 sont éliminés parce qu'ils remplissent les conditions d'équilibre. Les termes non linéaires avec l'exposant 1 sont également ignorés parce ils sont petits par rapport aux termes linéaires (Javaheri et Eslami, 2002; Brush et Almroth, 1975).

Les termes restants forment l'équation de la stabilité de la plaque rectangulaire fonctionnellement graduée:

$$\frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0, \quad (IV.21a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} = 0, \quad (IV.21b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^1}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} = 0, \quad (IV.21c)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

$$\frac{\partial S_x^1}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^1}{\partial y} - Q_{xz}^1 = 0, \quad (IV.21d)$$

$$\frac{\partial S_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial S_y^1}{\partial y} - Q_{yz}^1 = 0. \quad (IV.21e)$$

Les termes N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 correspondent l'état de pré-flambement:

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})T}{1-\nu} dz_{ns} \quad \text{et} \quad N_{xy}^0 = 0. \quad (IV.22)$$

IV.5 Solutions exactes pour le flambement thermique des plaques FG

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Ici, nous cherchons des solutions exactes pour une plaque FG rectangulaire simplement appuyée avec les conditions aux limites suivantes sur les bords latéraux:

$$v_0^1 = w_0^1 = \varphi_y^1 = N_x^1 = M_x^1 = S_x^1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, a, \quad (IV.23a)$$

$$u_0^1 = w_0^1 = \varphi_x^1 = N_y^1 = M_y^1 = S_y^1 = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0, b, \quad (IV.23b)$$

La solution approchée suivante est en vue de satisfaire à la fois à l'équation différentielle et les conditions aux limites:

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ \varphi_x^1 \\ \varphi_y^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{Bmatrix}. \quad (IV.24)$$

Où : U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{mn}^1 , X_{mn}^1 et Y_{mn}^1 sont des paramètres arbitraires, $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$. m et n sont des nombres entiers positifs (modes de flambement). En substituant Eqs (IV.24) dans Eqs (IV.21), on obtient:

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = 0, \quad (IV.25)$$

Où $\{\Delta\}$ désigne la colonne

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{mn}^1, X_{mn}^1, Y_{mn}^1\}^t, \quad (IV.26)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.27})$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -[2\lambda^2 + (1-\nu)\mu^2] \bar{A}, \\ a_{12} &= -(1+\nu)\lambda\mu \bar{A}, \\ a_{13} &= 0, \\ a_{14} &= -[2\lambda^2 + (1-\nu)\mu^2] \bar{B}^a, \\ a_{15} &= -(1+\nu)\lambda\mu \bar{B}^a, \\ a_{22} &= -[2\mu^2 + (1-\nu)\lambda^2] \bar{A}, \\ a_{23} &= 0, \\ a_{24} &= a_{15}, \\ a_{25} &= -[2\mu^2 + (1-\nu)\lambda^2] \bar{B}^a, \\ a_{33} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{D} - 2\lambda^2 N_x^0 - 2\lambda^2 N_y^0, \\ a_{34} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{D}^a, \\ a_{35} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{D}^a, \\ a_{44} &= -[2\lambda^2 + (1-\nu)\mu^2] \bar{H}^a - 2\bar{J}, \\ a_{45} &= -(1+\nu)\lambda\mu \bar{H}^a, \\ a_{55} &= -[2\mu^2 + (1-\nu)\lambda^2] \bar{H}^a - 2\bar{J}. \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Où:

$$\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{22} = \bar{\mathfrak{R}}, \quad \mathfrak{R}_{12} = \nu \bar{\mathfrak{R}}, \quad \mathfrak{R}_{66} = \frac{1-\nu}{2} \bar{\mathfrak{R}},$$

$$A_{44} = A_{55} = \bar{J}, \quad (\mathfrak{R} = A, B^a, D, D^a, H^a).$$

Pour les solutions non-triviales de l'équation (25), le déterminant devrait être égal à zéro. L'équation $|\mathbf{K}| = 0$ est indiquée pour la détermination de la charge critique la plus basse. Les solutions de l'équation pour différents types de conditions de charge thermique sont présents ci-dessous. La plaque est supposée simplement appuyée en flexion et en extension solidaire. La température est variée uniquement dans la direction d'épaisseur.

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

IV.6 Flambement des plaques FG sous une température uniformément élevée

La température initiale de la plaque est supposée être T_i . La température est uniformément élevée à une valeur finale T_f dans laquelle le flambement de la plaque se produit. Le changement de température est $\Delta T = T_f - T_i$. L'équation $|K|=0$ donne l'expression de la valeur critique de ΔT .

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left[\overline{ADH}^a - (\overline{B}^a)^2 \overline{D} - \overline{A}(\overline{D}^a)^2 \right] + a^2 b^2 \Pi \overline{ADJ}}{a^2 b^2 \overline{\beta}_1 \left[\Pi \left(\overline{AH}^a - (\overline{B}^a)^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]}, \quad (IV.29)$$

Où

$$\Pi = (a^2 + b^2) \pi^2, \quad \overline{\beta}_1 = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{\alpha(z_{ns}) E(z_{ns})}{1-\nu} dz_{ns}. \quad (IV.30)$$

IV.7 Flambement des plaques FG soumises à une variation graduelle de température à travers l'épaisseur

On suppose que la température de la surface supérieure est T_C et la température est variée selon une loi de puissance à partir de T_C à la température de la surface inférieure :

$$T(z_{ns}) = \Delta T \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta + T_M, \quad (IV.31)$$

($\Delta T = T_C - T_M$ et $0 < \beta < \infty$). On note que la valeur β égale à l'unité représente un changement de température linéaire à travers l'épaisseur. Tandis que β différent de l'unité représente une distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur. La valeur critique de ΔT est calculée comme suit:

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left[\overline{ADH}^a - (\overline{B}^a)^2 \overline{D} - \overline{A}(\overline{D}^a)^2 \right] + a^2 b^2 \Pi \overline{ADJ}}{a^2 b^2 \overline{\beta}_1 \left[\Pi \left(\overline{AH}^a - (\overline{B}^a)^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]} + \frac{T_M \overline{\beta}_1}{\overline{\beta}_2}, \quad (IV.32)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques du flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées avec le concept de la position de la surface neutre

Où

$$\bar{\beta}_2 = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta dz_{ns}. \quad (\text{IV.33})$$

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre, le comportement au flambement thermoélastique des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur est étudié. La position de la surface neutre pour une telle plaque, la théorie exponentielle de déformation de cisaillement basée sur la position exacte de la surface neutre sont étudiées afin de calculer les équations régissantes du problème.

*Résultats Et
Discussions*

On prévoit dans ce chapitre deux parties:

- *Partie A: Etude du comportement des plaques sous fondations élastiques*
- *Partie B: Etude du comportement des plaques avec le concept de la position de la surface neutre*

Partie A: Etude du comportement des plaques sous fondations élastiques

V.1 Introduction :

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie à prédire la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de Pasternak. Pour des résultats numériques, une plaque Al/Al₂O₃ composée d'Aluminium (comme métal) et d'Alumina (comme céramique) est considérée. Le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de l'Aluminium sont respectivement $E_m=70 \text{ GPa}$ et $\alpha_m=23.10^{-6}/^\circ\text{C}$, et ceux de l'Alumina sont respectivement $E_c=380 \text{ GPa}$ et $\alpha_c=7.4 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Pour la validation, les résultats obtenus sont comparés avec ceux prédits à partir de plusieurs théories des plaques connues de la littérature. La description de différents modèles de déplacements utilisés est présentée dans le tableau V.1. Dans tous les exemples, un facteur de correction de cisaillement de 5/6 est utilisé pour FSDT. Le coefficient de Poisson de la plaque est supposé être constant à travers l'épaisseur et égal à 0.3. Pour la variation linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur, la température de référence de 5°C est supposée dans la surface de la plaque riche en métal ($T_m=5^\circ\text{C}$)

Chapitre V: Résultats et discussions

Modèle	Théorie	Fonctions inconnues
CPT	La théorie classique de la plaque	3
FSDT	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Whitney et Pagano, 1970)	5
PSDT	La théorie parabolique de déformation de cisaillement (Reddy, 1984)	5
TSDT	La théorie trigonométrique de déformation de cisaillement (Zenkour and Sobhy, 2011)	5
Présente	La théorie raffinée de la plaque	4

Tab V. 1: Modèles de déplacement.

Les expressions adimensionnelles suivantes des paramètres de la fondation élastique, ainsi que la température critique de flambement sont utilisées dans la présente analyse.

$$k_1 = \frac{a^4}{D} K_w, \quad k_2 = \frac{a^2}{D} K_g, \quad T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr} \quad (\text{V.1})$$

Où

$$D = E_c h^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad (\text{V.2})$$

V.2 Etudes comparatives :

Dans le tableau (V.2), une étude comparative est effectuée entre les résultats obtenus dans cette étude et ceux rapportés par (Javaheri et Eslami ,2002) basés les deux sur la théorie d'ordre élevé (HPT) et la théorie classique de la plaque (CPT). Les résultats sont présentés pour une plaque FG carrée soumise à une variation uniforme de température. Les résultats de la présente théorie montrent une bonne corrélation avec la HPT pour les plaques minces et épaisses et pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance n .

Chapitre V: Résultats et discussions

n	Théorie	$b/h = 10$	$b/h = 20$	$b/h = 40$	$b/h = 60$	$b/h = 80$	$b/h = 100$
0	CPT (Javaheri et Eslami, 2002)	1709.911	427.477	106.869	47.497	26.717	17.099
	HPT (Javaheri et Eslami, 2002)	1617.484	421.516	106.492	47.424	26.693	17.088
	Présente	1618.820	421.544	106.495	47.423	26.694	17.089
1	CPT (Javaheri et Eslami, 2002)	794.377	198.594	49.648	22.066	12.412	7.943
	HPT (Javaheri et Eslami, 2002)	757.891	196.257	49.500	22.037	12.402	7.939
	Présente	758.451	196.269	49.502	22.037	12.403	7.9400
5	CPT (Javaheri et Eslami, 2002)	726.571	181.643	45.410	20.182	11.352	7.265
	HPT (Javaheri et Eslami, 2002)	678.926	178.528	45.213	20.144	11.340	7.260
	Présente	678.949	178.510	45.212	20.143	11.340	7.261
10	CPT (Javaheri et Eslami, 2002)	746.927	186.732	46.682	20.747	11.670	7.469
	HPT (Javaheri et Eslami, 2002)	692.519	183.141	46.455	20.703	11.657	7.462
	Présente	692.544	183.133	46.455	20.703	11.656	7.463

Tab V. 2: Comparaison de la température critique de flambement d'une plaque FG carrée sous une température uniforme.

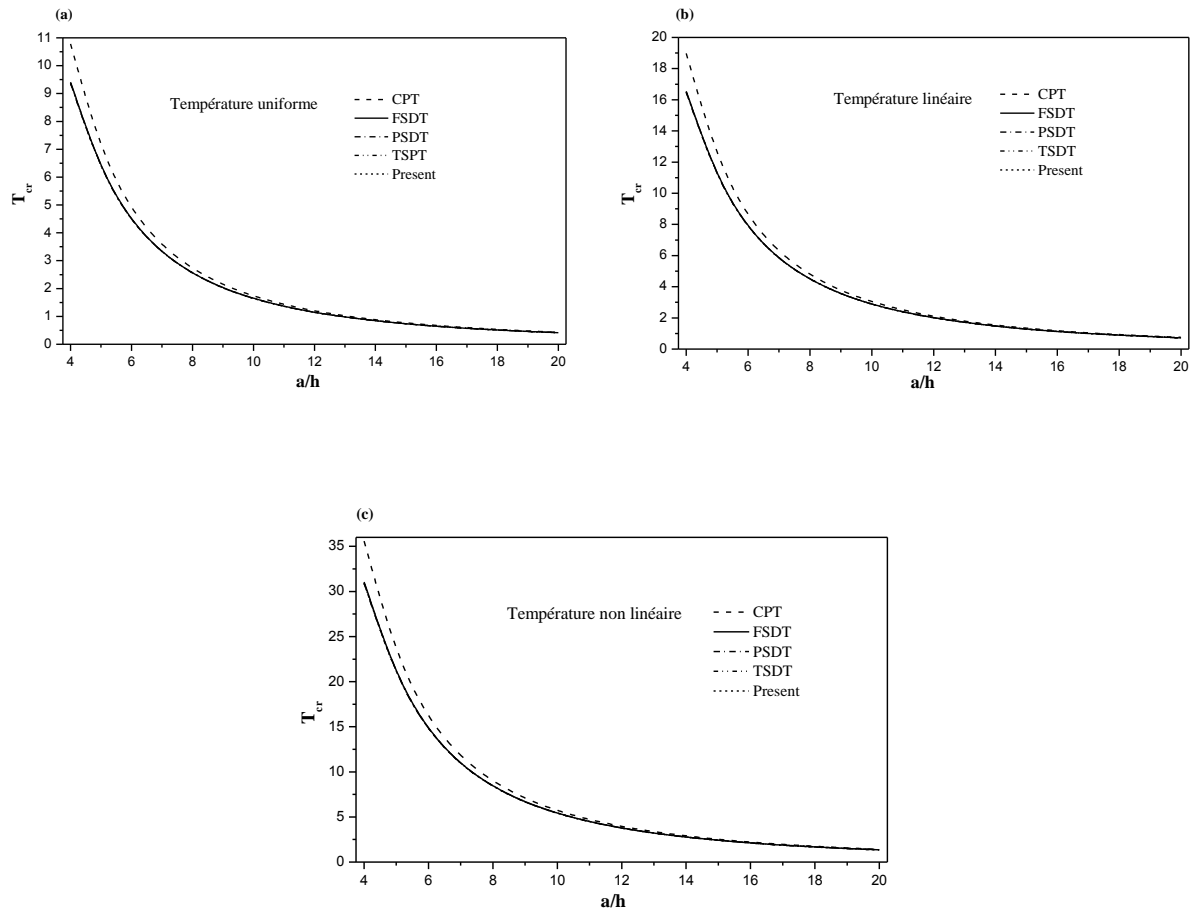
Une autre étude comparative pour la température critique de flambement des plaques FG sur une fondation élastique obtenue par la théorie proposée et celles reportées par Zenkour et Sobhy (2011) est illustrée dans le tableau V.3. On peut voir que la théorie proposée et la TSDT conventionnelle (Zenkour et Sobhy, 2011) donnent des résultats identiques pour la température critique de flambement pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance n . Il est à noter que la théorie trigonométrique proposée exige quatre inconnus contrairement à cinq dans le cas de TSDT classique (Zenkour and Sobhy, 2011) et HPT (Javaheri and Eslami, 2002).

Chapitre V: Résultats et discussions

n	Théorie	$k_1 = 0, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 10$		
		Uniforme	Linéaire	Non-linéaire	Uniforme	Linéaire	Non-linéaire	Uniforme	Linéaire	Non-linéaire
0	Présente	1.61882	3.22764	6.45528	1.66270	3.31541	6.63082	2.52896	5.04791	10.09582
	TSDT ^(a)	1.61882	3.22764	6.45528	1.66270	3.31541	6.63082	2.52896	5.04791	10.09582
1	Présente	0.75845	1.41307	2.82696	0.79935	1.48978	2.98043	1.60674	3.00402	6.00978
	TSDT ^(a)	0.75845	1.41307	2.82696	0.79935	1.48978	2.98043	1.60674	3.00402	6.00978
5	Présente	0.67895	1.16006	2.01520	0.73564	1.25765	2.18472	1.85472	3.18391	5.53091
	TSDT ^(a)	0.67895	1.16006	2.01520	0.73564	1.25765	2.18472	1.85472	3.18391	5.53091
10	Présente	0.69254	1.21837	2.09718	0.75653	1.33176	2.29235	2.01955	3.56992	6.14487
	TSDT ^(a)	0.69254	1.21837	2.09718	0.75653	1.33176	2.29235	2.01955	3.56992	6.14487

Tab V. 3: Comparaison de la température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($a/h = 10$) sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire ($\beta = 3$).

Pour montrer l'exactitude de la présente théorie pour différents rapports d'épaisseur a/h , on a présenté dans la Fig(V.1) les variations de la température critique de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique et soumise à un chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire en fonction du rapport a/h . Les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par CPT, FSDT, PSDT et TSDT. On peut constater que les résultats de la présente théorie et les autres théories de déformation de cisaillement sont quasiment identiques, par contre la CPT surestime la température critique du flambement de la plaque en particulier dans le cas des plaques épaisses. Par conséquent, afin d'obtenir des résultats précis pour les plaques FG épaisses, il est nécessaire de considérer les effets de déformation de cisaillement en utilisant les théories de déformation de cisaillement.



FigV.1: Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique T_{cr} d'une plaque carrée ($n = 2$) sur fondation élastique ($k_1 = k_2 = 10$) par rapport au rapport d'épaisseur a/h :
 (a) Température uniforme; (b) Température linéaire ; (c) Température non-linéaire ($\beta = 3$).

La Figure (V.2) montre les effets du rapport géométrique a/h sur la température critique de flambement T_{cr} des plaques FG ($n=2$) soumise à un chargement thermique uniforme, linéaire et non-linéaire. L'effet de la fondation élastique est considéré en utilisant $k_1=10$ et $k_2=10$. Il est observé qu'avec l'augmentation du rapport d'aspect a/b de la plaque, la température critique de flambement augmente aussi d'une façon graduelle, quelle que soit la théorie utilisée. Les résultats obtenus confirment l'exactitude de la théorie proposée.

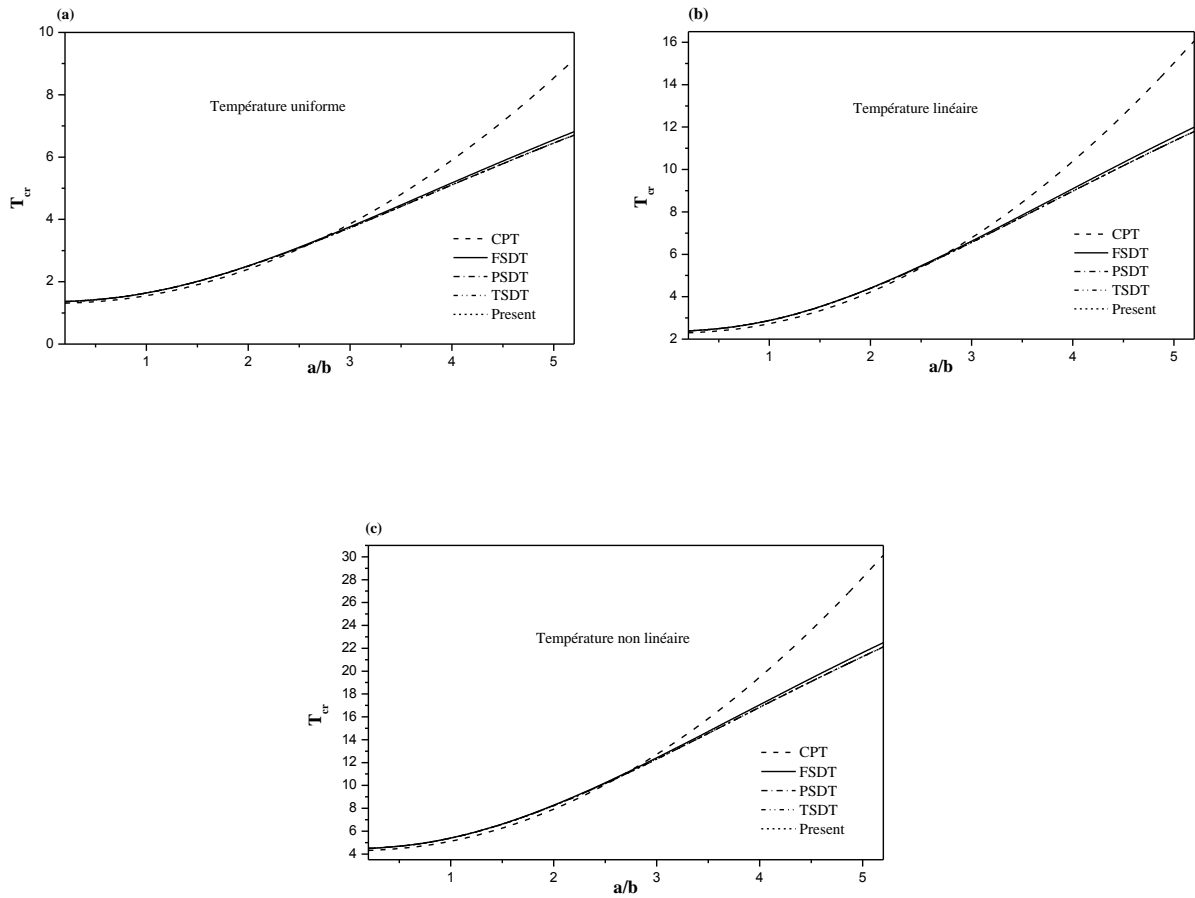


Fig V.2: Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique T_{cr} d'une plaque carrée ($a/h=10$ et $n=2$) sur fondation élastique ($k_1 = k_2 = 10$) par rapport à a/b : (a) Température uniforme; (b) Température linéaire; (c) Température non-linéaire ($\beta = 3$).

Il convient de noter que le nombre d'inconnus dans la présente théorie est de quatre, tandis que dans la TSDT (Zenkour et Sobhy, 2011), la HPT (Javaheri et Eslami, 2002), la PSDT et FSDT est de cinq.

Ainsi on peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple pour l'utilisation dans la prédiction de la température critique de flambement des plaques FG.

V.3 Etudes paramétriques :

Des études paramétriques sont effectuées pour étudier les effets des types de chargements thermiques et variations de puissance des FGM, rigidité de la fondation élastique, rapport d'épaisseur, et l'aspect de rapport sur la température critique du flambement des plaques FG.

Dans la Fig(V.3), l'effet de l'indice de loi de puissance n sur la température critique du flambement T_{cr} de la plaque FG sans fondement élastique ou reposant sur des fondations élastiques de Pasternak ou de Winkler est représenté en utilisant la présente théorie trigonométrique simple. Des résultats sont présentés pour une plaque FG rectangulaire ($a/b=3$ et $a/h=10$) sous changement de température uniforme, linéaire et non linéaire ($\beta=3$) à travers l'épaisseur. Il est noté que T_{cr} diminue rapidement pour atteindre ses valeurs minimales et augmente lentement quand l'indice de loi de puissance augmente. Cependant, pour la plaque sans fondation élastique ou reposant sur une fondation de Winkler d'un seul paramètre, la variation de la température critique T_{cr} est presque indépendante de l'indice de loi de puissance n lorsque ce dernier est supérieur à 4. On peut aussi voir que la présence de fondations élastiques conduit à une augmentation de la température critique de flambement T_{cr} .

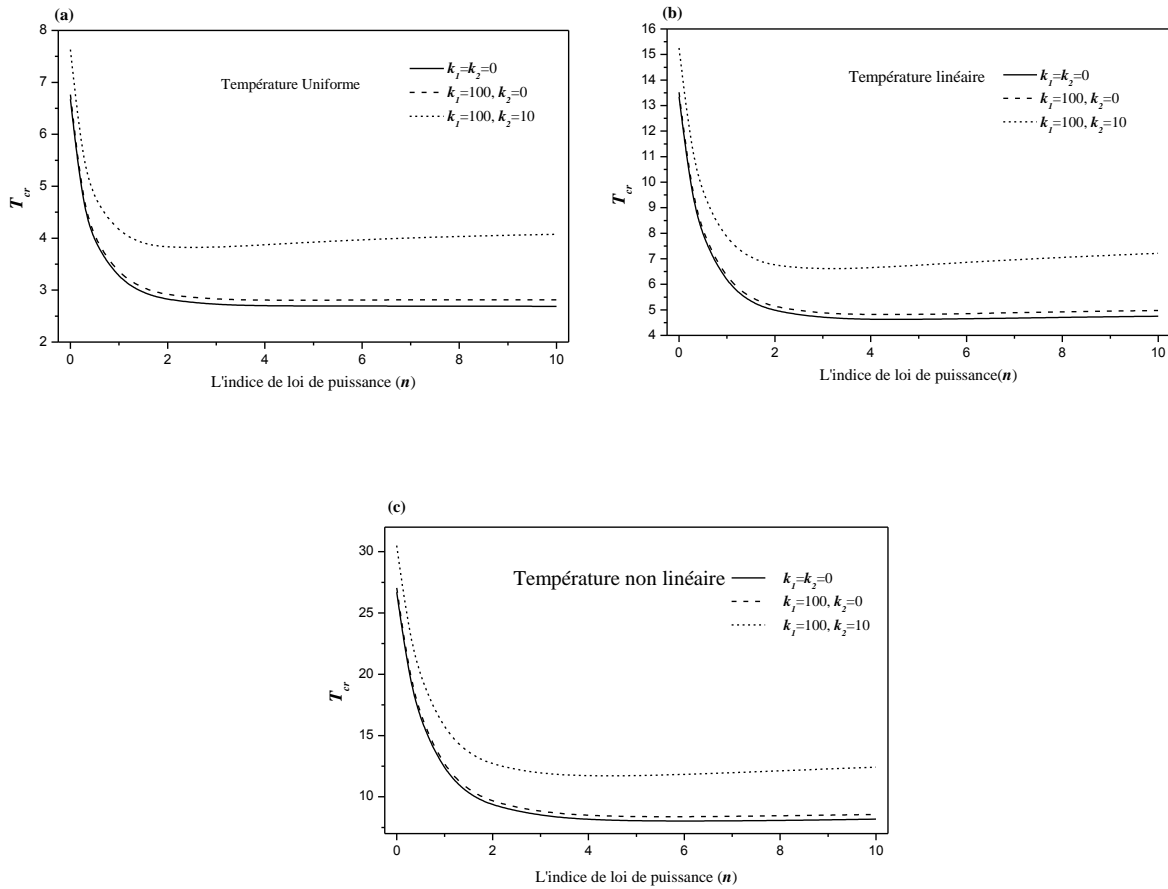


Fig V.3: Effet de l'indice de loi de puissance de la différence de température critique de flambement T_{cr} des plaques FG avec ou sans fondations élastiques: (a) Température uniforme; (b) Température linéaire; (c) La température non-linéaire ($\beta = 3$).

La figure (V.4) montre l'effet du paramètre de module de Winkler sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG carrée avec ou sans la couche de cisaillement de fondation.

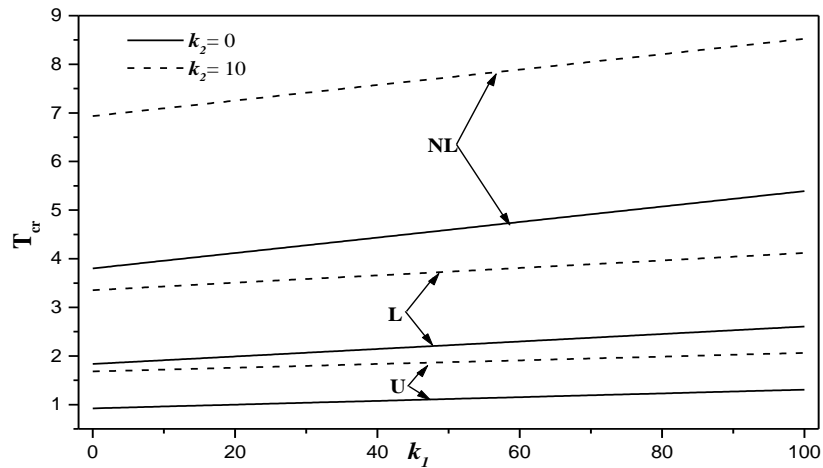


Fig V.4: Effet de module d'élasticité de la fondation de Winkler k_1 sur la température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($n = 0.5$ et $a/h = 10$) sous uniforme (U), linéaire (L) et non linéaire (NL) charge thermique ($\beta = 3$).

La figure (V.5) montre l'effet du module de cisaillement de Pasternak sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG carrée avec la présence ou l'absence de la couche de fondation de Winkler. D'après les résultats présentés dans les Figures (V.4) et (V.5), on peut constater que les résultats sont plus sensibles à la variation de k_2 que celle de k_1 en particulier dans cas d'un changement de température non-linéaire à travers l'épaisseur.

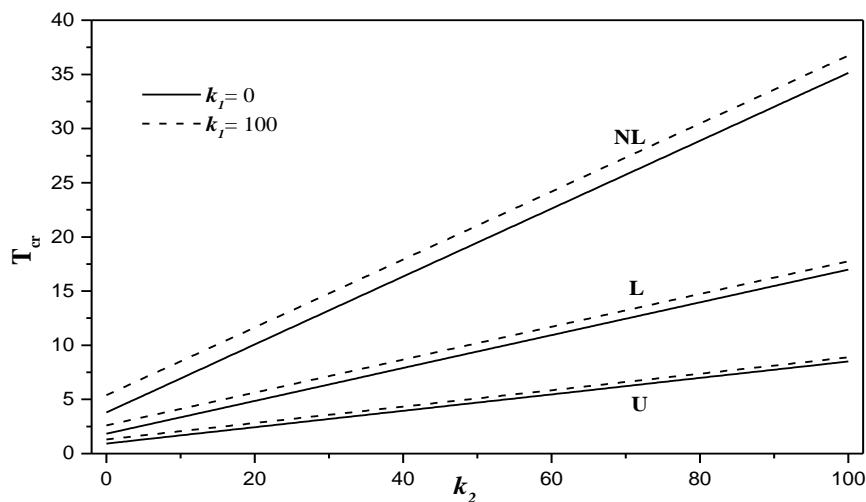


Fig V.5: L'effet du module de cisaillement de Pasternak k_2 sur la température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($n = 0.5$ et $a/h = 10$) sous chargement thermique ($\beta = 3$) uniforme (U), linéaire (L) et non linéaire (NL) .

Chapitre V: Résultats et discussions

Les effets de la face à un rapport d'épaisseur a/h et le rapport d'aspect a/b pour différents types de charges thermiques sur la différence de température critique de flambement sont présentés sur les figures (V.6) et (V.7), respectivement. On remarque qu'une diminution se produit pour T_{cr} lorsque a/h augmente, alors que a/b augmente. Aussi, la différence de température critique de flambement de la plaque FG sous une distribution linéaire de température à travers l'épaisseur est supérieure à celle sous variation uniforme de température et inférieure à celle sous variation non linéaire de température à travers l'épaisseur.

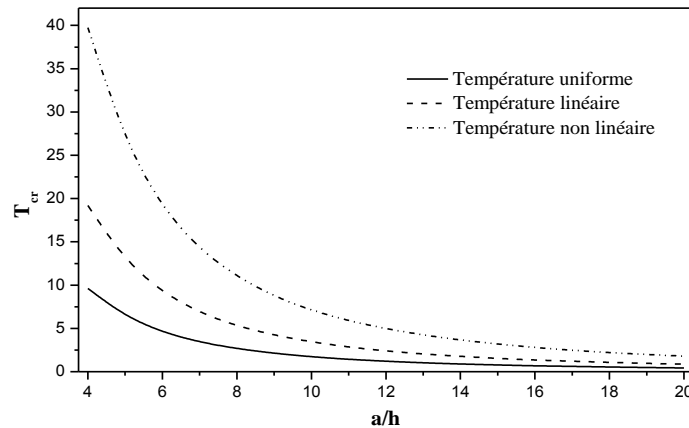


Fig V.6: Effet du rapport d'épaisseur pour différents types de chargements thermiques sur la température critique de flambement pour une plaque FG carrée ($n = 0.5$, $\beta = 3$ et $k_1 = k_2 = 10$).

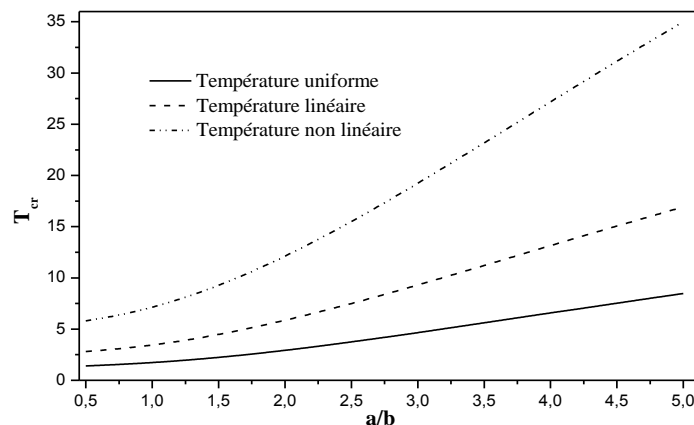


Fig V.7: Effet du rapport d'aspect pour les différents types de chargements thermiques sur la température critique de flambement de la plaque FG ($n = 0.5$, $\beta = 3$, $a/h = 10$ et $k_1 = k_2 = 10$).

Chapitre V: Résultats et discussions

L'effet de l'exposant de température β sur la température critique de flambement T_{cr} de la plaque FG représenté sur Fig(V.8). On voit que T_{cr} est très sensible à la variation de β . En effet, on a remarqué à partir de la Fig.8 que T_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non linéarité β .

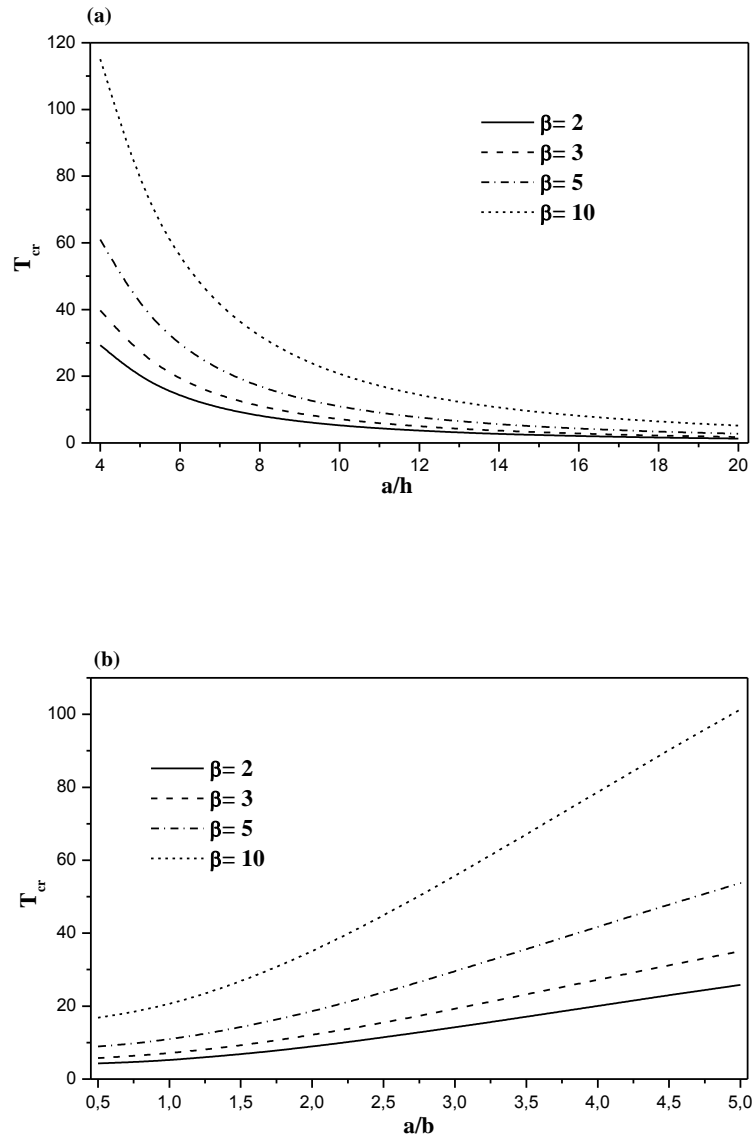


Fig V.8: Effet du paramètre de non linéarité β sur la température critique de flambement d'une plaque FG ($n=0.5$ et $k_1=k_2=10$) par rapport à: (a) le rapport d'aspect a/h ($a/b=1$); (b) le rapport d'aspect a/b ($a/h=10$).

Partie B: Etude du comportement des plaques avec le concept de la position de la surface neutre

V.4 Introduction:

Dans cette partie, les résultats numériques ont été obtenus pour une plaque FG qui se constitue d'aluminium et d'alumina. Le module de Young et le coefficient de dilatation thermique sont $E_m=70 \text{ GPa}$ et $\alpha_m=23.10^{-6}/^\circ\text{C}$ pour l'aluminium, et $E_c=380 \text{ GPa}$ et $\alpha_c=7.4 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ pour l'alumina, respectivement. Le coefficient de poisson de la plaque est supposé être constant à travers l'épaisseur et égal à 0.3. Pour les distributions linaires et non-linéaires de température à travers l'épaisseur de la plaque, la température de la surface inférieure (riche en métal) est $T_m=5^\circ\text{C}$.

Les températures critiques de flambement calculées par la présente formulation de la théorie (EPT) sont comparées dans les tableaux V.4 et V.5 avec les valeurs critiques de température prédites par d'autres théories dans (Javaheri et Eslami, 2002a; Zenkour et Mashat, 2010; Bachir Bouiadjra et al, 2012) pour des distributions uniformes de température à travers la plaque. (Zenkour et Mashat, 2010) ont considéré une distribution sinusoïdale des caractéristiques matérielles à travers la plaque: théorie sinusoïdale des plaques (SPT). (Javaheri et Eslami, 2002b) ont calculé les températures critiques de flambement par la théorie d'ordre élevé (HPT) et la théorie classique des plaques (CPT). (Bachir Bouiadjra et al, 2012) ont utilisé une théorie des plaques raffinée à quatre variable.

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
0	Présente	17.08	42.68	85.25	144.65	220.68
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	17.08	42.68	85.25	144.64	220.66
	(Zenkour et Mashat, 2010) SPT	17.08	42.68	85.25	144.65	220.67
	(Bachir Bouiadjra et al, 2012)	17.08	42.68	85.25	144.64	220.67
	(Javaheri et Eslami, 2002b) CPT	17.09	42.74	85.49	145.34	222.28
1	Présente	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	(Zenkour et Mashat, 2010) SPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	(Bachir Bouiadjra et al, 2012)	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	(Javaheri et Eslami, 2002b) CPT	7.94	19.85	39.71	67.52	103.26
5	Présente	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	(Javaheri et Eslami, 2002b) :HPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	(Zenkour et Mashat, 2010) ,SPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	(Bachir Bouiadjra et al, 2012).	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	(Javaheri et Eslami ,2002b) CPT	7.26	18.16	36.32	61.75	94.45
10	Présente	7.46	18.64	37.22	63.07	96.14
	(Javaheri et Eslami, 2002b) :HPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.12
	(Zenkour et Mashat, 2010) ,SPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11
	(Bachir Bouiadjra et al, 2012)	7.46	18.63	37.20	63.06	96.12
	(Javaheri et Eslami ,2002b) CPT	7.46	18.67	37.34	63.48	97.10

Tab V.4: Température critique de flambement (T_{cr}) pour une plaque FG sous température uniformément élevée pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b avec $a/h = 100$.

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	Présente	1619.22	421.57	106.49	47.42	26.69	17.08
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	1617.48	421.52	106.49	47.42	26.69	17.08
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1618.68	421.53	106.49	47.42	26.69	17.08
	(Javaheri et Eslami,2002b) CPT	1709.91	427.47	106.87	47.49	26.71	17.09
1	Présente	758.51	196.27	49.50	22.03	12.40	7.94
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	757.89	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	758.39	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	(Javaheri et Eslami,2002b) CPT	794.37	198.59	49.64	22.06	12.41	7.94
5	Présente	678.57	178.49	45.21	20.14	11.34	7.26
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	678.92	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	679.31	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
	(Javaheri et Eslami,2002b) CPT	726.57	181.64	45.41	20.18	11.35	7.26
10	Présente	692.61	183.13	46.45	20.70	11.65	7.46
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	692.52	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	692.69	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46
	(Javaheri et Eslami,2002b) CPT	746.92	186.73	46.68	20.74	11.67	7.46

Tab V.5: Température critique de flambement (T_{cr}) d'une plaque FG carrée sous température uniformément élevée pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'épaisseur a/h .

Les températures critiques de flambement dans le cas d'une distribution linéaire à travers la plaque sont énumérées dans les tableaux IV.4 et IV.5. Les températures critiques de flambement pour les plaques suffisamment épaisses avec distributions non linéaires de température à travers la plaque sont données dans les tableaux IV.6 et IV.7. Les résultats dans les six tableaux sont en bon accord.

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
0	Présente	24.17	75.37	160.51	279.30	431.36
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	24.17	75.37	160.50	279.29	431.33
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	24.17	75.37	160.51	279.26	431.34
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	24.19	75.49	160.99	280.68	434.57
1	Présente	5.51	27.82	64.93	116.75	183.11
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	5.52	27.86	65.11	117.25	184.30
5	Présente	3.89	22.60	53.70	97.06	152.49
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	3.89	22.60	53.71	97.07	152.51
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	3.89	22.60	53.70	97.06	152.50
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	3.89	22.60	53.70	97.07	152.51
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	3.89	22.65	53.92	97.69	153.97
10	Présente	4.36	24.17	57.07	102.83	161.56
	(Javaheri et Eslami, 2002b) HPT	4.36	24.16	57.06	102.90	161.47
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	4.36	24.16	57.06	102.90	161.47
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	4.37	24.23	57.32	103.64	163.20

Tab V.6: Température critique de flambement (T_{cr}) d'une plaque FG sous une distribution linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b avec $a/h=100$.

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=40$	$a/h=60$	$a/h=80$	$a/h=100$
0	Présente	3228.45	833.14	202.99	84.84	43.38	24.17
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	3224.96	833.03	202.98	84.84	43.38	24.17
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	3227.36	833.07	202.98	84.84	43.38	24.17
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	3409.82	844.95	203.73	84.99	43.43	24.19
1	Présente	1413.37	358.73	83.46	31.95	13.88	5.51
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	1412.02	358.69	83.46	31.95	13.88	5.51
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1412.96	358.71	83.46	31.95	13.88	5.51
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	1480.45	363.07	83.73	32.00	13.90	5.52
5	Présente	1159.72	298.63	69.21	26.06	10.91	3.89
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	1160.02	298.69	69.21	26.06	10.91	3.89
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1160.68	298.70	69.21	26.06	10.91	3.89
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	1242.03	304.05	69.55	26.13	10.93	3.89
10	Présente	1218.46	315.66	73.46	27.82	11.79	4.36
	(Javaheri et Eslami 2002b) HPT	1218.32	315.67	73.46	27.82	11.79	4.36
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1218.63	315.68	73.46	27.82	11.79	4.36
	(Javaheri et Eslami 2002b) CPT	1314.74	322.04	73.86	27.90	11.82	4.37

Table V.7: Température critique de flambement (T_{cr}) pour une plaque FG carrée sous une distribution linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'épaisseur a/h .

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/b=1$			$a/b=2$			$a/b=3$		
		$\beta=2$	$\beta=5$	$\beta=10$	$\beta=2$	$\beta=5$	$\beta=10$	$\beta=2$	$\beta=5$	$\beta=10$
0	Présente	4.84	9.68	17.75	11.23	22.4 7	41.20	20.04	40.08	73.48
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	4.84	9.68	17.75	11.22	22.4 5	41.16	20.00	40.01	73.35
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	4.84	9.68	17.75	11.22	22.4 5	41.17	20.01	40.03	73.39
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	5.11	10.2 2	18.75	12.80	25.6 1	46.96	25.63	51.26	93.99
1	Présente	2.10	4.31	8.19	4.95	10.1 5	19.26	8.98	18.40	34.91
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	2.10	4.31	8.19	4.95	10.1 4	19.24	8.96	18.38	34.86
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	2.106 8	4.31	8.19	9.95	10.1 4	19.25	8.97	18.38	34.87
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	2.20	4.52	8.58	5.53	11.3 5	21.53	11.09	22.73	43.12
5	Présente	1.59	2.85	5.00	3.65	6.51	11.42	6.35	11.35	19.92
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	1.59	2.84	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	1.70	3.04	5.35	4.28	7.65	13.43	8.58	15.33	26.90
10	Présente	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	1.80	3.11	5.14	4.54	7.81	12.92	9.09	15.64	25.88

Table V.8: Température critique de flambement ($t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$) d'une plaque FG sous une distribution non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b , et l'exposant de température β avec $a/h = 10$.

Chapitre V: Résultats et discussions

k	Théorie	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$
0	Présente	16.75	33.51	61.44	32.97	65.94	120.90	48.85	97.71	179.15
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	16.73	33.47	61.36	32.86	65.72	120.49	48.53	97.07	177.97
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	16.74	33.48	61.38	32.89	65.79	120.62	48.65	97.30	178.39
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	20.50	41.00	75.18	51.28	102.56	188.03	102.57	205.15	376.12
1	Présente	7.46	15.30	29.02	15.12	31.00	58.80	23.06	47.26	89.65
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	7.45	15.28	28.98	15.08	30.90	58.62	22.92	46.98	89.11
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	7.45	15.28	28.99	15.09	30.93	58.68	22.97	47.08	89.30
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	8.87	18.18	34.48	22.19	45.49	86.30	44.41	91.02	172.65
5	Présente	5.36	9.57	16.80	10.13	18.09	31.75	14.49	25.88	45.41
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	5.37	9.59	16.83	10.16	18.15	31.85	14.52	25.93	45.51
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	5.36	9.57	16.81	10.14	18.10	31.77	14.49	25.87	45.40
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	6.86	12.26	21.52	17.18	30.68	53.85	34.39	61.39	107.75
10	Présente	5.54	9.53	15.76	10.24	17.63	29.18	14.40	24.77	40.99
	(Bachir Bouiadjra et al,2012)	5.54	9.53	15.76	10.24	17.62	29.15	14.34	24.68	40.82
	(Zenkour et Mashat,2010) SPT	5.53	9.52	15.75	10.23	17.61	29.13	14.35	24.69	40.85
	(Zenkour et Mashat,2010) CPT	7.27	12.51	20.70	18.20	31.31	51.80	36.41	62.65	103.64

Tab V.9: Température critique de flambement ($t_{cr} = 10^{-3} T_{cr}$) d'une plaque FG sous une distribution non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'aspect a/b , et l'exposant de température exponent β avec $a/h = 5$.

Chapitre V: Résultats et discussions

La figure (V.9) montre la valeur de $t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$ en fonction du rapport d'aspect a/b pour différents types de chargement thermique et différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k . Selon cette figure, la température critique de flambement augmente avec la diminution de k et avec l'augmentation de a/b .

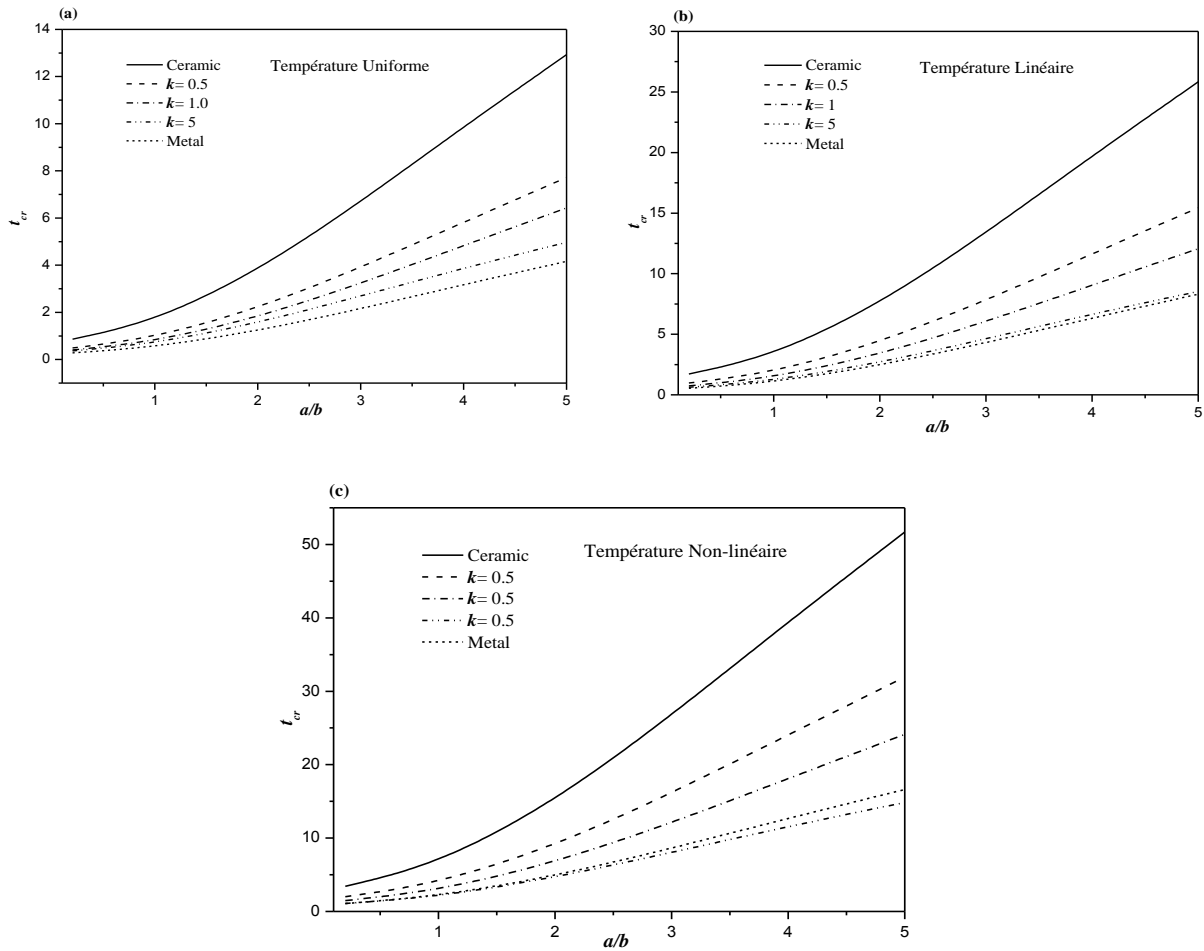


Fig V.9: Température critique de flambement t_{cr} due à une distribution uniforme, linéaire et non-linéaire ($\beta = 3$) de température par rapport à l'épaisseur d'une plaque FG ($a/h = 5$) par rapport au rapport d'aspect a/b pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k .

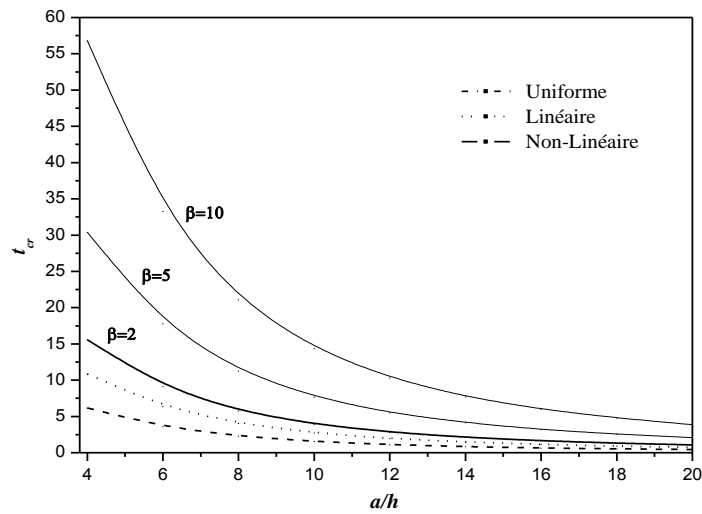


Fig V.10: Température critique de flambement t_{cr} due à une distribution uniforme, linéaire et non-linéaire de température par rapport au rapport d'épaisseur a/h et pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité β ($k = 2$ et $a/b = 2$).

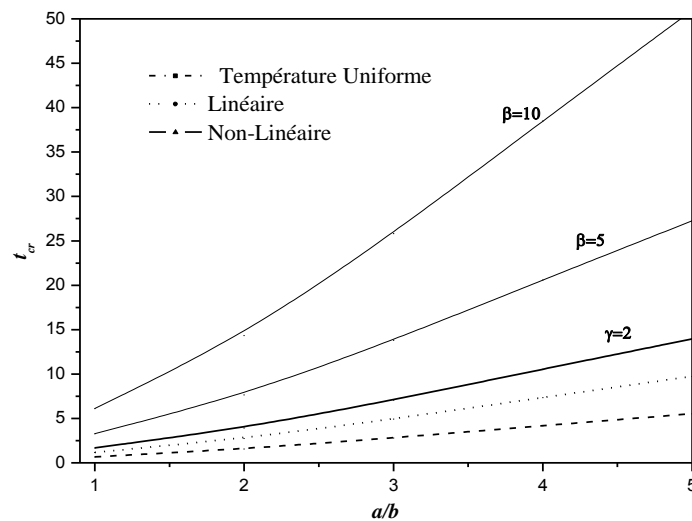


Fig V.11: Température critique de flambement t_{cr} due à une distribution uniforme, linéaire et non-linéaire de température par rapport au rapport d'aspect a/b et pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité β . ($k = 2$ et $a/h = 10$).

V.5 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du flambement thermique des plaques épaisses en FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables reposant sur une fondation de Winkler-Pasternak. La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une inscription parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Toutes les études comparatives ont démontrées que les résultats obtenus en utilisant la théorie proposée à quatre variables et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnues) sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace pour résoudre le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées.

Dans la seconde partie, le comportement du flambement thermoélastique des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur est étudié à l'aide d'une théorie exponentielle de déformation de cisaillement (cinq inconnus). La position de la surface neutre pour de telles plaques fonctionnellement graduées est déterminée. Une approche analytique est présentée pour trouver la température critique de flambement. Une solution numérique du problème avec l'utilisation d'une fonction exponentielle de contraintes de cisaillement est présentée.

Conclusion générale

Les températures critiques de flambement des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées et reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak ont été analysées en employant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement simple et efficace. Le nombre de variables impliquées dans théorie proposée (quatre inconnus) est inférieur à celui des théories déjà utilisées par d'autres auteurs (cinq inconnus). La présente théorie donne une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale et satisfait les conditions aux limites de la tension nulle sur les surfaces de la plaque sans utilisation des facteurs de correction de cisaillement. L'analyse de flambement thermique des plaques FGM sous différents types de chargement thermique est présentée. Les solutions analytiques pour les températures critiques des flambements de plaque sont déterminées. On peut conclure que:

- La température critique de flambement obtenue en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnus) est presque identique avec les températures fournies par d'autres théories de déformation de cisaillement (avec cinq inconnus) sont presque identiques.
- La température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h). Elle augmente lorsque le rapport d'aspect (a/b) augmente.
- La température critique de flambement diminue lorsque l'indice de loi de puissance (n) augmente.
- La température critique de flambement de la plaque FG à travers l'épaisseur augmente avec l'augmentation du paramètre de non linéarité (β)

On peut conclure que la théorie proposée est exacte et efficace pour déterminer les réponses du flambement thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Le comportement du flambement thermoélastique d'une plaque épaisse fonctionnellement graduée est étudié en employant la théorie exponentielle de déformation de cisaillement (cinq inconnus). Une simple loi de puissance basée sur la loi des mélanges est utilisée pour estimer les propriétés matérielles comme fonction de la plaque épaisse. La position de la surface neutre pour de telles plaques fonctionnellement graduées est déterminée sur la base des

relations de contraintes-déformations non linéaires .Les distributions de température uniformes, linéaires et non linéaires à travers la plaque sont prises en considération. Une approche analytique est présentée pour trouver la température critique de flambement. Elle peut être utilisée pour des calculs d'ingénierie. Une solution numérique du problème avec l'utilisation d'une fonction exponentielle de contraintes de cisaillement est présentée.

Le travail présenté peut être développé dans le futur. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutifs dus à la température.

Références Bibliographiques

A.A.Atai, A.Nikranjbar, R. Kasiri, “Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607-614, (2012).

Abdelaziz, H.H., Ait Atmane, H., Mechab, I., Boumia, L., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., “Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory”, *Chinese Journal of Aeronautics*, **24(4)**, 434 – 448, (2011).

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. , “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293–318, (2014).

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int J Mech Mater Des*, **6(2)**, 113–121, (2010).

Ameur, M., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , “A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations”, *KSCE Journal of Civil Engineering*, **15(8)**, 1405-1414, (2011).

A.M.Zenkour, D.S.Mashat, "Thermal Buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates" , *Natur.Sci.*2,968-978, (2010).

A.R.Saidi,E.Jomehzadeh, "On analytical Approach for the Bending/Stretching of lineary elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported", *Proc.Inst.Mech.Eng.Pt.C: J.Mech.Eng.Sci.* 223,2009-2016, (2009).

Avramidis, I.E., Morfidis, K., “Bending of beams on three-parameter elastic foundation”, *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 357–375, (2006).

B.A.Samsam, M.R.Eslami,"Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads",*Compos.Struct.* 78,433-439, (2007).

Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. ,“Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *Journal of Thermal Stresses*, **35**, 677–694, (2012).

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. ,“Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 547 – 567, (2013).

BARKA Merbouha, « Investigation de la stabilité thermique des plaques FGM sigmoïdes »,mémoire de magister, Université de Sidi Bel Abbès, Octobre , (2012).

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. ,"An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283, (2014).

Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. ,“A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, **42**, 1386-1394, (2011).

Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., Adda Bedia, E.A.,“Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Mech Compos Mater*, **46(4)**, 425–434, (2010).

Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. ,“A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15**, 671–703, (2013).

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. ,“Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104, (2013).

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. , "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **14**, 5 - 33, (2012).

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, (In press), (2014).

Brush.D.O, Almorth.B.O, "Buckling of Bars,Plates and Shells,Ed."(McGraw-Hill,New York), (1975).

Chehab.B, Zurob.H, Embury.J.D, Bouaziz.O, Bréchet.Y , *Adv. Eng. Mat.*, Vol.11, No. 12, 992-999, (2009).

Cheng, Z.Q., Batra, B.C., "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate", *J Sound Vib*, **229(4)**, 879–895, (2000).

Cheng, Z.Q., Kitipornchai, S., "Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates", *ASCE J Eng Mech*, **125(11)**, 1293–1267, (1999).

Chi . Shyang-ho. , Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, (2003).

Descamps, M., Richart, O., Hardouin, P. 2007 Synthesis of macroporous _ tri-calcium phosphate with controlled porous architectural. *Ceramics International*, 34, pp. 1131-37.

D. Gay. " *Matériaux composites*" , Hermès, (1991).

D.G.Zhang, Y.H.Zhou, "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Comput.Mater.Sci.* 44,716-720, (2008).

D.O.Brush, B.O.Almorth, "Buckling of Bars,Plates and Shells,Ed."(McGraw-Hill,New York), (1975).

Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. ,“A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81, (2014).

Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H., "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", *Journal of Applied Physics*, 74, 1321-1326, (1993).

E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, and W.A. Kaysser, “Functionally graded materials for sensor and energy applications,” *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, (2003).

EL Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **53(4)**, 237 – 247, (2011).

E. Reissner,” On a variational theorem in elasticity”. *J.Math.Phys.*, 29 :90–95, (1950).

Farooqi, J.K., Sheikh, M.A.Finite, "Element modelling of thermal transport in ceramic matrix composites". *Computational Materials Science*, 26, pp. 361-373, (2006).

Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A.,“Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory”, *Steel and Composite Structures*, **13(1)**, 91 – 107, (2012).

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795 – 810, (2014).

Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S., "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al₂O₃ Multi-Layered Material", *Materials Science and Engineering*, 205, 59-71, (1996).

F. Watari, A. Yokoyama, H. Matsuno, R. Miyao, M. Uo, T. Kawasaki, M. Omori, and T. Hirai, "Fabrication of functionally graded implant and its biocompatibility," *functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*. Boston, Kluwer Academic, pp. 187–190, (2001).

F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, and M. Uo, et al, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Compos Sci Technol*, vol.64 , pp. 893–908, (2004).

G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, (1995).

Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson., M., "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", *Acta Metallurgica et Materialia*, 43, 1335-1354, (1995).

Grandjean, S., Absi, J., Smith, D. , "Numerical calculations of the thermal conductivity of porous ceramics based on micrographs.", *J. of the European Ceramic Society*, 26, pp. 2669-2676, (2006).

H,H, Ibrahim, M. Tawfik, M. Al-Ajmi, " Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels", *J.Aircraft*. 44,1610-1618, (2007).

Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. ,"Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 32, 7925-7942, (2011).

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. ,"New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics*, 140, 374 – 383, (2014).

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda Bedia, E.A. ,“Sound Wave Propagation in Single- Walled Carbon Nanotubes using Nonlocal Elasticity”, *Physica E.*, **40**, 2791, (2008).

Hilderband, F.B, Reissner, E., Thomas, G.G., “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N° 1833, (1949).

Hill, R. eT Lin, W., "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191, (2002).

Hossein ABDIZADEH, « Elaboration et caractérisation de composites duplex : composites laminaires tri-couches à base d'alumine», thèse de doctorat, Université de Lyon, Septembre , (1997).

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. ,“Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **76**, 467 – 479, (2013).

H.Matsunaga, "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D Higher-Order deformation theory", *Compos.Struct.*90,76-86, (2009).

Hussein Hamdan, « Coulage en bande: Elaboration d’une barbotine à base de cuivre/bronze renforcée par des particules améliorant le frottement à sec », *Design & Materials*, Novembre, (2007).

Javaheri, R., Eslami, M.R., “Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory,” *J. Therm. Stress.*, **25(1)**, 603-625, (2002a).

Javaheri, R., Eslami, M.R., “Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA.40*,162-169. (2002b).

J.D. Embury, O. Bouaziz, *Annu. Rev. Mater. Res.*, No.40, 213–241, (2010).

J.M.Berthelot, *Matériaux composites « Comportement mécanique et analyse des structures »*, Masson, (1993).

J.N.Reddy, "Energy principles and variational methods in Applied Mechanics", Jhon Wiley, New York, (1984).

J.N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". CRC Press, Boca Raton, (1997).

J.N.Reddy, "Theory and analysis of elastic plates", (Taylor and francis, Philadelphia), (1999).

J. N. Reddy, "Analysis of functionally graded plates", INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, Int. J. Numer. Meth. Engng. 47, 663,684 (2000).

Julien Soro, « Elaboration par coulage en bande et caractérisation de composites fibreux à matrice à base de ciment alumineux », thèse de doctorat, université de limoges, (2005).

Kaci, A., Tounsi, A., Bakhti, K., Adda Bedia, E.A., "Nonlinear cylindrical bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates", *Steel and Composite Structures*, **12**, 491 – 504, (2002).

Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *International Journal of Solids and Structures*, **40(6)**, 1525–1546, (2003).

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A., "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, **15(4)**, 399-423, (2013).

Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A., "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, In press, (2014).

Kitipornchai, S., Yang, J., Liew, K.M., “Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195(9-12)**, 1075-1095, (2006).

K.J.Sohn, J.H.Kim, "Structural stability of functionally graded panels subjected to Aero - thermal loads", *Compos.Struct.* 82,317-325, (2008).

Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Ameer, M., “A n -order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 21-46., (2014).

Koizumi, M., “The concept of FGM”, *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, **34**, 3–10, (1993).

L.H. You, H. Ou, Z.Y. Zheng, *Composite Structures*, Vol.78, 285–291, (2007).

L.Marin, “Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials,” *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, (2005).

L. Lostec, "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L", Thèse de l'université de Limoges, (1997).

Mansour Mohieddin Ghomshei, Vahid Abbasi, Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method, *Journal of Mechanical Science and Technology* 27 (4) (2013) 1031~1039

M.Bodaghi, A.R.Saidi, "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally rectangular plates", *Arch.Appl.Mech.* 81,1555-1572, (2011).

M.Bouazza, A.Tounsi, E.A.Adda-Bedia, A.Megueni, "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach", *Comput.Mater.Sci.* 49,865-870, (2010).

Michot, A., Smith, D. S., Degot, S., Gault, C. "Thermal conductivity and specific heat of kaolinite : Evolution with thermal treatment". *Journal of the European Ceramic Society*, 28, pp.2639-2644, (2008).

Mishnaevsky, L. Schmauder, S. "Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review *Applied Mechanics Reviews*", 54, pp. 49-69, (2001).

M.Karama, K.S.Afaq, S.Mistou, "Mechanical Behavior of Laminated Composite Beam by New Multi-Layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity", *Int.J.Solids Struct.* 4 ,1525-1546, (2003).

M.M. Najafizadeh, H.R.Heydaru, "Thermal buckling of Functionally Graded Circular plates based on Higher Order Shear deformation plate theory", *Eur.J.Mech.A.Solids* 23,1085-1100, (2004).

M. M. Nemat-Alla1, M. H. Ata, M. R. Bayoumi, and W. Khair-Eldeen, "Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of Aluminium/Steel functionally graded material," *Materials Sciences and Applications*, vol. 2, pp. 1708-1718, (2011).

M. Niino, T. Hirai and R. Watanabe, "The functionally gradient materials," *J Jap Soc Compos Mat*, vol.13, pp. 257-264.

M. Niino, K. Kisara and M. Mori , "Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS)," *Mater Sci Forum*, vol. 492, pp. 163–168, (2005).

MOYA, J. S. , SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters* , Vol. 14, p.333-35, (1992).

M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, (1991)

Nabil Ferguen, Emmanuel Bellenger, Mohamed Guessasma, Claudia Cogné Christine Pelegris, Christian Courtois, Olivier Rigo, « Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction : modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective », 20^{ème} Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).

Naghdi.P.M, "On the theory of thin elastic shells". Quarterly Appl. Math, 14: 369-380, (1957).

Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi ,"Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons;page 110, 4 août ,(2011).

Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. , “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory” *Mechanics of Composite Materials*, **49(6)**, 641 – 650, (2014).

Noda, N., Hetnarski, R.B., Tanigawa, Y. ,“Thermal Stresses”, second edition, Taylor & Francis, New York, (2003).

O. Bouaziz, Y. Bréchet, J.D. Embury, Adv. Eng. Mat., Vol.10, No. 1–2, 24-36, (2008).

O. Bouaziz, "Potentiel des matériaux à gradient de propriétés pour applications nucléaires", 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).

O. Kolednik, International Journal of Solids and Structures, Vol.37, 781-808, (2000).

Pasternak, PL., "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, Cosudarstrennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR, 1–56 [in Russian], (1954).

P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram". Soc; 69 (8):191-192, (1986).

P. Shanmugavel, G. B. Bhaskar, M. Chandrasekaran, P. S. Mani and S. P. Srinivasan, “An overview of fracture analysis in functionally graded materials,” *European Journal of Scientific Research*, vol.68 No.3 ,pp. 412-439, (2012).

Raether, F., Iuga, M. , "Effect of particle shape and arrangement on thermoelastic properties of porous ceramics". *J. of the European Ceramic Society*, 26, pp. 2653-2667, (2012).

Rafic YOUNES, Matériaux composites, Master Mécanique 3M, Beyrouth ,(2008).

Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi Member, IAENG, Mukul Shukla and Sisa Pityana, “Functionally Graded Material: An Overview”, Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III, WCE 2012, July 4 - 6, London, U.K, (2012).

Ravichandran, K.S., "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", *Materials Science and Engineering*, A-201, 269-276, (1995).

R. Chaouadi, G. Coen, E. Lucon, V. Massaut, *Journal of Nuclear Materials*, 403, 15–18, (2010).

R.E.Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, (1973).

Reddy, J.N., “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *ASME-Journal of Applied Mechanics*, **51(4)**, 745–752, (1984).

Reddy, J.N., Cheng, Z.Q.,“Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal plan form”, *Int J Mech Sci*, **44(5)**, 967–985, (2002).

S.Abrate, "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Composites*,Pt.B:Eng.39(1),151-158, (2008).

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. ,“A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures*, In press, (2014).

Sellai Ben-Omrane , "Etude et analyse des structures en FGM, comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM" , thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, (2010-2011).

Shiota, I., and Miyamoto, Y, "Functionally Grade Materials Proceedings of the 4th international symposium on Functionally Graded Materials", October 21-24, (1996).

Sobhy, M. ,“Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos Struct*, **99**, 76–87, (2013).

Sobhy, M., “Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions”, *Acta Mech*, (In press), (2014).

S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata, “Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root,” *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, (2001).

S.M. Serebrin, A.G. Rakhshadt, V.M. Seremov , *Metal Science and Heat Treatment*, Vol.18, No. 8, 713-716, (1976).

S.Suresh, A.Mortensen, "Fundamentals of functionally graded materials,Ed", (IOM Comm.Ltd., London, (1998).

S. Timoshenko and S. Woinowsky-Kreiger,”*Theory of Plates and Shells*”. McGraw–Hill, (1964).

TALIDI Abdellah, « Etude de l'élimination du Chrome et du bleu de méthylène en milieux aqueux par adsorption sur la pyrophyllite traitée et non traitée.», thèse de doctorat, Université de Rabat, Juin, (2006).

Thibault Reynier, « Elaboration par cofrittage d'une cellule de pile à combustible SOFC à base de zircone scandiée: approches mécanique, microstructurale et électrochimique », thèse de doctorat, université de Grenoble, novembre , (2012).

T.Morimoto, Y.Tanigawa, R.Kawamura, "Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to Partial Heating", *Int.J.Mech.Sci.*48(9),926-937, (2006).

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A., A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220., (2013).

Timoshenko, S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series 46) p. 744–746, (1921).

Vargas-Escobar, W., McCarthy, J.J. "Conductivity of granular media with stagnant interstitial fluids via thermal particle dynamics simulation". *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 45, pp. 4847-4857, (2002).

V.P. Il'Ina, *Metal Science and Heat Treatment*, Vol.41, No. 1–2, 20-21, (1999).

W.Lanhe, "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Compos.Struct.* 64,211-218, (2004).

W. Pompea, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempele, D. Scharnweber, and K. Schulte Functionally graded materials for biomedical applications, *Materials Science and Engineering*, vol. A362, pp. 40–60, (2003).

Whitney, J.M., Pagano. N.J., “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, **37**, 1031–1036, (1970).

Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T., "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320, (1993).

Woo, J., Meguid, S.A., Stranart, J.C., Liew, K.M., “Thermomechanical postbuckling analysis of moderately thick functionally graded plates and shallow shells”, *Int. J. Mech. Sci.*, **47(8)**, 1147–1171, (2005).

Yaghoobi, H., Torabi, M., “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *J Therm Stresses*, **36**, 869–894, (2013a).

Yaghoobi, H., Yaghoobi, P., “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach”, *Meccanica*, **48**, 2019–2035, (2013).

Yaghoobi, H., Torabi, M., “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Appl Math Model*, **37**, 8324–8340, (2013b).

Yaghoobi, H., Fereidoon, A., “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Composites: Part B*, **62**, 54–64, (2014).

Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I., "In Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials", Sendai, Japan, (1990).

Yang, J., Liew, K.M., Kitipornchai, S., “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Technol.*, **65(7–8)**, 1165–1175, (2005a).

Yang, J., Liew, K.M., Kitipornchai, S., “Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **47(10)**, 1519-1541, (2005b).

Y. M. Chiang, J. S. Haggerty, R. P. Messer, C. Demetry, "Reaction-based processing methods for ceramic-matrix composite" *Ceramic Bulletin*, vol. 18, pp. 544, (1989).

Yun, T.S., Evans, T.M. "Three-dimensional random network model for thermal conductivity in particulate materials". *Computers and Geotechnics*, 37, pp. 991-998, (2010).

Zenkour, A.M. ,“The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations”, *Int. J. Mech. Sci.*, **51**, 869–880, (2009).

Zenkour, A.M., Sobhy, M. ,“Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates”, *Compos Struct*, **93**, 93 – 102, (2010).

Zenkour, A.M., Sobhy, M. , “Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory”, *Journal of Thermal Stresses*, **34**, 1119–1138, (2011).

Zenkour, A., M. Sobhy, “Elastic foundation analysis of uniformly loaded functionally graded viscoelastic sandwich plates”, *Journal of Mechanics*, **28(3)**, 439-452, (2012).

Zenkour, A., Sobhy, M., “Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Aerospace Science and Technology*, **29(1)**, 7-17, (2013).

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. ,“Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34, (2014).