N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
SIDI BEL ABBES

THESE
DE DOCTORAT

Présentée par: *Ahmed HALLOUZ*

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Equations différentielles*

Intitulée

Etudes quantitatives et qualitatives de quelques problèmes d'équations et d'inclusions différentielles

Soutenue le 13 /12 / 2016

Devant le jury composé de :

Président : Mouffak . Benchohra	*Pr*	*Univ de Sidi Bel Abbès*
Examinateurs :		
Mohammed. Belmekki	*Pr*	*Univ de Saida*
Abdelghani. Ouahab	*Pr*	*Univ de Sidi Bel Abbès*
Benaouda. Hedia	*MC (A)*	*Univ de Tiaret*
Directeur de thèse: Mustapha. Mechab	*Pr*	*Univ de Sidi Bel Abbès*
Co-Directeur de thèse : Lahcene. Guedda	*MC(A)*	*Univ de Tiaret*

REMERCIEMENTS

Dieu merci.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mon Professeur Monsieur M. Mechab, Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abès pour son soutien, sa patience et sa totale disponibilité durant tout le temps que ce travail a pris. Je le remercie aussi de m'avoir encadré.

Je remercie Monsieur L. Guedda Maitre de conférence (A) à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret pour le grand travail qui a effectué pour que je puisse avancer, pour sa rigueur et son encouragement durant les moments difficiles. Je le remercie de m'avoir co-encadré, pour son aide et ses conseils lors de la rédaction de ce travail.

Je remercie Monsieur M. Benchohra, Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès d'avoir eu la gentillesse d'accepter de présider ce jury et de m'avoir fait honneur d'examiner et de présider cette assemblé. Merci

Je remercie Messieurs M. Belmekki, Professeur à l'université Moulay Tahar de Saida, A. Ouahab Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès B. Hedia, Maitre de Conférence (A) à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Le Professeur Paul RAYNAUD DE FITTE de l'université de Rouen, France. Merci pour toutes les belles choses mathématiques que vous m'avez apprises. Merci Chikh.

Je remercie tous ceux et toutes celles qui on permis à ce travail de voir le jour.

Table des matières

Introduction

La notion des opérateurs complètement continus joue un rôle fondamental dans la théorie des équations différentielles dans des espaces de Banach de dimensions infinis. Si l'opérateur associé à l'équation différentielle i.e., l'opérateur dont les points fixes coïncident avec les solutions de cette dernière, n'est pas complètement continu, alors l'équation différentielle n'admet pas nécessairement une solution. Il s'est avéré avantageux de mesurer la déviation d'un opérateur continu à un opérateur complètement continu. Un moyen pour le faire est d'introduire les notions de mesures de non compacités et d'opérateurs condensants.

Un opérateur condensant par rapport à une mesure de non compacité donnée est un opérateur dont la mesure de non compacité de l'image d'un ensemble donné est inférieure à la mesure de non compacité de l'ensemble lui même, dans un certain sens.

En 1976, B. N. Sadovskii a introduit des fonctions appelées "Mesures de non compacités dans le sens généralisé", ces fonctions sont définies de sorte qu'elles soient stables par passage à la couverture convexe fermée d'un ensemble borné. Il a remarqué que ce type de fonctions généralise la notion classique d'une mesure de non compacité introduite par Kuratowski et que c'est exactement dont on a besoin pour les applications.

Au cours d'étude sur les propriétés des opérateurs condensants, une grande ressemblance avec les opérateurs complètement continus a été remarquée et la théorie du degré topologique a trouvé son essor pour ce type d'opérateurs. Ce qui a fait le succès de cette dernière est le fait que les opérateurs condensants sont plus adaptés aux applications réelles.

En s'appuyant sur la théorie du degré topologique pour des opérateurs condensants, dans la thèse on trouve deux résultats principaux, publiés dans des revues internationales respectables, à savoir :

1. L'étude du problème d'existence pour certaines inclusions d'évolution semi-linéaires de type J.K. Hale ;

2. Un point de vu unifié pour l'étude du problème des solutions périodiques pour différents types d'inclusions différentielles pas forcement li-

néaires.

Plus précisément, la thèse est constituée de trois parties.

La première partie (chapitres 1 et 2) est consacrée à la présentation de certaines notions et des résultats de bases liés à la théorie des opérateurs condensants, à la théorie des semi-groupes et à l'analyse multivoque.

La seconde partie (chapitre 3) est consacrée à l'étude du problème d'existence pour des inclusions différentielles de type J. K. Hale écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[x(t)-h(t,x_t)\right] &\in Ax(t)+F(t,x_t), \qquad t\in[0,T],\\ x(t) &= \varphi(t),\ t\in[-r,0], \end{aligned}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné d'opérateur linéaires $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach séparable E, l'opérateur F est tel que $F:[0,T]\times C([-r,0],E)\to\mathcal{P}(E)$, où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties non vides de E, $h:[0,T]\times C([-r,0],E)\to E$, est une fonction donnée , $0<r<\infty$ et $\varphi\in C([-r,0],E)$, $C([-r,0],E)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[-r,0]$ à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour toute fonction continue x définie sur $[-r,T]$ et pour $t\in[0,T]$, l'élément x_t de $C([-r,0],E)$ est défini par

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in[-r,0].$$

$$\|u\|_{C([-r,0],E)}=\sup\{\|u(s)\|:s\in[-r,0]\}.$$

La fonction $x_t(.)$ représente l'historique de l'état du système à partir de l'instant $t-r$ jusqu'au temps présent t.

La troisième partie (chapitre 4) est consacrée à établir un point de vu unifié dans l'étude du problème des solutions périodiques pour des inclusions abstraites pas forcément linéaires dans des espaces de Banach, données sous la forme :

$$\begin{cases} x\in S\left(x(0),\ sel_F(x)\right)\\ x(T)=x(0), \end{cases} \tag{1}$$

où, $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties non vides de E, $F:[0,T]\times\mathcal{K}\to\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{K}$ un sous ensemble convexe, fermé et non vide de E, est un multivoque à valeurs compactes et convexes vérifiant les conditions supérieures de Carathéodory , sel_F est l'opérateur de superposition généré par F,
$S:\mathcal{K}\times L^1([0,T];\,E)\to C([0,T];\,\mathcal{K})$ un opérateur abstrait, on a

$$S\left(x(0),\ sel_F(x)\right)=\left\{S\left(x(0),\ f\right);\ f\in sel_F(x)\right\}.$$

Un exemple fondamental de ce type de problèmes abstraits est donné par le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) \in -Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2}$$

où $-A$ est un opérateur univoque ou multivoque non nécessairement linéaire. Dans le cas semi-linéaire, quand $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire (univoque) tel que $-A$ génère un C_0-semi-groupe $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur S est l'opérateur des mild solutions. Plus précisement, pour $x_0 \in \mathcal{K} = E$ et $f \in L^1([0, T];\, E)$, la valeur $S(x_0, f)$ représente la mild solution (unique) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) \in -Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

Dans ce cas, la formule de la variation de la constante permet d'écrire l'opérateur S explicitement par :

$$\begin{gathered} S : \mathcal{K} \times L^1([0, T];\, E) \to C([0, T];\, E) \\ S(x_0, f)(t) = \mathcal{T}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s)\, ds. \end{gathered}$$

Dans le cas non linéaire avec A m-accrétif, S est l'opérateur solution intégrale,i.e. pour $x_0 \in \mathcal{K} = \overline{D(A)}$ et $f \in L^1([0, T];\, E)$, la valeur $S(x_0, f)$ est (unique) solution intégrale du problème de Cauchy (3). Dans les deux cas cités l'opératuer S a été étudié par plusieurs auteurs , voir par exemple [39, 51, 55] pour le cas semi-linéaire, et [18, 14, 32, 40, 51] pour le cas non linéaire. Dans [4] et [20] , les auteurs développent une approche du point fixe qui peut être utilisée dans l'étude du problème de Cauchy pour différentes classes d'inclusions différentielles en considérant des inclusions abstraites dans $C([0, T];\, E)$ de la forme

$$x \in \Upsilon \circ sel_F(x) \tag{4}$$

$\Upsilon : L^1([0, T];\, E) \to C([0, T];\, E)$ est un opérateur non nécessairement linéaire.

Ce travail peut être considéré comme une généralisation de ces approches au problème des inclusions différentielles linéaires et non linéaires périodiques. Plus précisément, on fixe $x_0 \in E$ et on considère l'inclusion abstraite

$$x \in\; S(x_0, sel_F(x)).$$

En prenant $\Upsilon(.) = S(x_0, .)$, on tombe sur le cas voir [4] et [20]. Mais il est clair que pour étudier le problème périodique , on laisse varier x_0 dans $\mathcal{K}$ (où $\mathcal{K} \subset E$).

Dans ce travail, on construit un opérateur multivoque pour lequel les points fixes sont solutions de l'inclusion (4.1) et on donne des conditions suffisantes pour lesquelles cet multivoque soit semi-continu supèrieurement à valeurs contractibles et condensant par rapport à une mesure de non compacité régulière, monotone et non singulière.

Comme application du résultat de ce chapitre, on étudie le problème périodique non linéaire (2), où A est supposé être m-accrétif tel que $-A$ genère un semi-groupe équicontinu.

La raison pour laquelle on considère de tels problèmes est que dans le cas où E est un espace de Hilbert et $A = \partial\phi$ est le pseudo différentiel d'une fonction propre, semi-continue inférieurement et convexe $\phi : \mathcal{D}_\phi \subset E \to \mathbb{R}$, le semi-groupe engendré par $-A$ est toujours équicontinu et il est compact si et seulement si ϕ possède un sous ensemble compact i.e. $\{x \in E : \|x\|^2 + \phi(x) \leq r\}$ est compact pour tout $r > 0$; (voir par exemple [55] p.42).

Finalement on fait remarquer qu'il y a beaucoup de travaux sur l'étude du problème périodique pour des équations et inclusions différentielles engendrés par des opérateurs m-accrétifs générant des semi-groupes compacts ; voir l'introduction dans [36] et [1] et les références qui s'y trouvent.

Chapitre 1

Mesures de non compacités et opérateurs condensants

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne les notions de bases liées aux mesures de non compacités et aux opérateurs condensants . On définit les mesures de non compacités les plus utilisées.
On décrit un certain nombre de formules qui nous permettent de calculer directement la valeur de la mesure de non compacité de Hausdorff d'un ensemble dans certains espaces concrets. On donne la définition générale de la notion d'une mesure de non compacité et on définit les opérateurs condensants.

1.2 Mesure de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff

Dans cette section on définit la mesure de non compacité de Kuratowski et celle de Hausdorff et on donne leurs propriétés de bases.

Dans toute la suite, E désigne un espace de Banach (sauf mention contraire) ; et Ω un sous-ensemble de E. $B(x,r)$ et $\overline{B}(x,r)$ désignent, respectivement, la boule ouverte et la boule fermée dans E de centre x et de rayon r et ; et $B = B(0,1)$.

Définition 1.2.1 *La mesure de non compacité de Kuratowski $\alpha(\Omega)$ d'un ensemble Ω est la borne inférieure des nombres $d > 0$ tels que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètres inférieur ou égal à d .*

Définition 1.2.2 *La mesure de non compacité de Hausdorff $\chi(\Omega)$ d'un ensemble Ω est la borne inférieure des nombres $\varepsilon > 0$ tels que Ω admet un ε-réseau fini dans E.*

$$\textbf{\textit{i.e.}} \quad \chi(\Omega) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ admet un } \varepsilon\text{-réseau fini }\right\}.$$

l'ensemble $S \subset E$ est un ε-réseau de Ω si

$$\Omega \subset S + \varepsilon\overline{B} = \left\{s + \varepsilon b : \; s \in S, b \in \overline{B}\right\}.$$

Remarque 1.2.1 *Certains auteurs, par exemple L. Górniewicz, utilisent la formule suivante pour définir la mesure de non compcité de Hausdorff :*

$$\chi(\Omega) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \; \Omega \text{ admet recouverement fini par des boules de rayon } \varepsilon\right\}$$

cette définition est équivalente à celle donnée précédemment.

En effet,

$$\begin{aligned}
S\textit{est un } \varepsilon\textit{-réseau fini de } \Omega \;&\Leftrightarrow\; \forall x \in \Omega, \exists s_i \in S : \; d(x, s_i) < \varepsilon, \;\; i \leq 1 \leq n \\
&\Leftrightarrow\; \forall x \in \Omega, \exists s_i \in S : \; x \in B(s_i, \varepsilon), \;\; i \leq 1 \leq n \\
&\Leftrightarrow\; \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(s_i, \varepsilon), \; s_i \in S \\
&\Leftrightarrow\; \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(\varepsilon), \; \textit{où } B_i(\varepsilon) = B(s_i, \varepsilon), \; s_i \in S.
\end{aligned}$$

Les propiétés remarquables des mesures de non compacités α et χ sont énumérées ci-dessous.

1.2.1 Propriétés élémentaires des mesures de non compacités de Kuratowski et de Hausdorff.

Soient $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset E$. On note par ψ la MNC de Kuratowski ou de Hausdorff. On a les propriétés suivantes :

(a) Régularité *:* $\psi(\Omega) = 0$ *si et seulement si* Ω *est totalement borné* ;
(b) Non singularité :si pour tout $a \in E$, $\Omega \in P(E)$, $\psi(\{a\} \cup \Omega) = \Omega$;
(c) Monotonie :

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \quad \Longrightarrow \quad \psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2);$$

(d) Semi-additivité :

$$\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\left\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\right\};$$

(e) Semi-additivité algébrique :

$$\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2);$$

(f) Lipschitzité *:*

$$\mid \psi(\Omega_1) - \psi(\Omega_2) \mid \leq L_\psi \rho(\Omega_1, \Omega_2),\ \textit{où}\ L_\psi = \begin{cases} 1 & si\ \psi = \chi \\ 2 & si\ \psi = \alpha \end{cases}$$

et ρ *désigne la métrique de Hausdorff définie par* :

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \Omega_1 \subset \Omega_2 + \varepsilon\overline{B},\, \Omega_2 \subset \Omega_1 + \varepsilon\overline{B}\right\};$$

(g) Continuité *: Pour tout* $\Omega \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\textit{pour tout}\ \Omega_1\ \textit{satisfaisant}\ \rho(\Omega, \Omega_1) < \delta\ \textit{on a}\ \mid \psi(\Omega) - \psi(\Omega_1) \mid < \varepsilon.$$

(h) Semi-homogénéité :

$$\psi(t\Omega) = \mid t \mid \psi(\Omega)\ \textit{pour tout réel}\ t;$$

(i) Invariance par translation :

$$\psi(\Omega + x_0) = \psi(\Omega)\ \textit{pour tout}\ x_0 \in E.$$

Maintenant on donne une propriété imporatante verifiée par les mesures de Kuratowski et Hausdorff. Cette propriété justifie en un sens la définition générale d'une mesure de non compacité introduite par Sadovskii

Théorème 1.2.1 *Les mesures de non compacités de Kuratowski et de Hausdorff sont invariantes par passage à la fermeture et à l'enveloppe convexe,*

$$i.e.\ \ \psi(\Omega) = \psi(\overline{\Omega}) = \psi(co\Omega).$$

Théorème 1.2.2 *Les mesures de non compacités de Kuratowski et de Hausdorff vérifient les inégalités suivantes :*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

En dimension infinie, ces inégalités sont strictes.

1.2.2 Expression de la mesure de non compacité de Hausdorff dans un espace de Banach séparable

Théorème 1.2.3 *Soit E un espace de Banach séparable et $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ une suite de sous espaces de dimensions finies de E tels que*

$$E_m \subseteq E_{m+1},\ \ m = 1, 2, ...\quad et\quad \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m} = E.$$

Alors la mesure de non compacité de Hausdorff d'un ensemble borné $\Omega \subset E$ peut être calculée par

$$\chi(\Omega) = \lim_{m\to\infty} d_*(\Omega, E_m)$$

où

$$d_*(\Omega, E_m) = \sup_{x\in\Omega} d(x, E_m)$$

est la déviation de l'ensemble Ω du sous espace E_m.

1.2.3 La mesure de non compacité de Hausdorff dans les espaces l_p, c_0, C, L_p et L_∞

La mesure de non compacité de Hausdorff dans l_p et c_0

Théorème 1.2.4 *Dans l'espace l_p (resp c_0) des suites de p^{ieme}-puissance sommable (resp des suites convergentes vers zéro), la mesure de non compacité χ est donnée par la formule*

$$\chi(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \parallel (I - P_n)x \parallel, \tag{1.1}$$

où P_n est la projection sur l'espace vectoriel engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique de l_p (resp c_0).

La mesure de non compacité de Hausdorff dans $C[a, b]$:

Théorème 1.2.5 *Dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $[a, b]$, la mesure de non compacité χ d'un ensemble borné Ω peut être donnée par la formule*

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} \parallel x - x_\tau \parallel, \tag{1.2}$$

où x_τ est la τ-translaté de la fonction x :

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t+\tau), & si\ a \leq t \leq b - \tau, \\ x(b), & si\ b - \tau \leq t \leq b. \end{cases}$$

1.3 Notions générales de mesures de non compacités

1.3.1 Définitions et Propriétés

Dans cette section on donne une définition axiomatique de la notion de mesure de non compacité et on donne certains exemples.

Comme déjà mentionné, l'invariance des mesures de non compacités de Kuratowski et de Hausdorff par passage à la fermeture convexe joue un rôle important.

Définition 1.3.1 *: Soient E un espace de Banach et $(Q, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Une fonction $\psi : \mathcal{P}(E) \to Q$, s'appelle une mesure de non compacité si pour tout Ω borné de E*

$$\psi(\overline{co}\Omega) = \psi(\Omega).$$

1.3.2 Exemples de mesures de non compacités :

Exemple 1.2.1

Soit E un espace de Banach. Les fonctions

$$\psi_1(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Omega \text{ est totalement borné} \\ 1, & \text{si non} \end{cases}$$

et

$$\psi_2(\Omega) = diam\, \Omega$$

sont des mesures de non compacités (au sens de la Définition 1.3.1).
Notons que si E est de dimension infini alors ψ_1 n'est pas continue par rapport à la topologie naturelle sur l'ensemble où elle prend ses valeurs, (la droite réelle). Il est aussi clair que ψ_2 n'est pas une mesure de non compacité régulière.
En effet, si $\Omega = \{x, y\}$, $x, y \in E$, $x \neq y$ alors $diam\,\Omega \neq 0$ mais cet ensemble est totalement borné (fini).

Exemple 1.2.2

On considère un autre exemple de mesure de non compacité dans l'espace des fonctions continues $C([a,b];E)$. Pour $\Omega \subset C([a,b];E)$, on pose

$$\phi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} \chi(\Omega(t))$$

où χ est la mesure de non compacité de Hausdorff dans E et $\Omega(t) = \{y(t) : y \in \Omega, t \in [a,b]\}$. Il est facile de vérifier que cette mesure vérifie les propriétés habituelles des mesures de non compacité sauf la régularité.

1.4 opérateurs condensants

1.4.1 Définitions et Propriétés

Définition 1.4.1 *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, ψ_1 et ψ_2 deux mesures de non compacités dans E_1 et E_2, respectivement, à valeurs dans un ensemble partiellement ordonné $(Q, \leq)$ et $f : D(f) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ un opérateur continu.*

- *L'opérateur f est dit (ψ_1, ψ_2)-condensant si*

$\Omega \subset D(f);\ \psi_1(\Omega) \leq \psi_2[f(\Omega)]$ *implique Ω est relativement compact.*

- *L'opérateur f est dit (ψ_1, ψ_2)-condensant au sens propre si pour tout ensemble $\Omega \subset D(f)$ relativement compact*

$$\psi_2[f(\Omega)] < \psi_1(\Omega).$$

Si l'ensemble Q est linéairement ordonné, ces deux notions coïncident.

- *Supposons qu'une opération de multiplication par un scalaire non négatif est définie sur Q. Un opérateur continu f est dit (q, ψ_1, ψ_2)-borné ($q \in \mathbb{R}_+$) si pour tout $\Omega \subset D(f)$:*

$$\psi_2[f(\Omega)] \leq q\psi_1(\Omega).$$

Quand $E_1 = E_2$ et $\psi_1 = \psi_2$ on dit simplement ψ_1-condensant et (q, ψ_1)-borné. Si $q < 1$, les opérateurs (q, ψ_1)-borné sont parfois appelés ψ_1-condensant avec la constante q.

1.4.2 Exemples :

(a) Tout opérateur compact f, définit sur un sous ensemble borné d'un espace de Banach E est évidemment ψ_1-condensant, où ψ_1 est la mesure de non compacité qui est définie dans 1.3.2 par

$$\psi_1(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Omega \text{ est totalement borné} \\ 1, & \text{si non} \end{cases}$$

En effet, soit $\Omega \subset E$ un ensemble borné, tel que

$$\psi_1(\Omega) \leq \psi_1[f(\Omega)].$$

Puisque f est compact alors $f(\Omega)$ est relativement compact, et grâce à la régularité de ψ_1 on a

$$\psi_1[f(\Omega)] = 0.$$

Alors $\psi_1(\Omega) = 0$, donc Ω est relativement compact.

(b) Tout opérateur contractif f sur un sous-ensemble borné est ψ_2-condensant, où ψ_2 est la mesure de non compacité qui est définie dans 1.3.2 par $\psi_2(\Omega) = diam\Omega$.
En effet, soit $\Omega \subset E$ borné tel que $diam\Omega > 0$, puisque f est contractif alors

$$\| f(x) - f(y) \| \leq q \| x - y \| < \| x - y \|, \ \ \forall x, y \in \Omega, \ \ 0 \leq q < 1$$

et puisque Ω est borné, alors $diam\Omega < \infty$ et on a

$$\sup_{x,y \in \Omega} \| f(x) - f(y) \| < \sup_{x,y \in \Omega} \| x - y \|,$$

par suite

$$diam[f(\Omega)] < diam\Omega \qquad i.e. \qquad \psi_2[f(\Omega)] < \psi_2(\Omega).$$

D'où l'opérateur f est ψ_2-condensant.

(c) On peut aisément voir que les opérateurs compacts (resp contractifs) sont α-condensant.

(d) Tout opérateur compact sur un ensemble borné et aussi χ-condensant.

Remarque 1.4.1 *Les opérateurs contractifs ne sont pas nécessairement χ-condensant. Un contre exemple peut être trouvé dans Kam Potatov.*

1.4.3 Propriétés élémentaires des opérateurs condensants

Dans ce qui suit on suppose que Q est un cône fermé dans un espace de Banach E et " $\leq$ " est la relation d'ordre partielle définie sur Q..

(a) *Si la mesure de non compacité ψ_1 est régulière, alors tout opérateur (q, ψ_1, ψ_2)-borné avec $q < 1$ est (ψ_1, ψ_2)-condensant au sens propre.*

(b) *Si f_1 et f_2 sont deux opérateurs (q_1, ψ_1, ψ_2)-borné et (q_2, ψ_2, ψ_3)-borné respectivement, alors $f_2 \circ f_1$ est un opérateur $(q_1 q_2, \psi_1, \psi_3)$-borné.*

(c) *Si la mesure de non compacité ψ_2 est algébriquement semi-additive et monotone, et si f_1 et f_2 deux opérateurs (q_1, ψ_1, ψ_2)-borné et (q_2, ψ_1, ψ_2)-borné respectivement, alors $f_1 + f_2$ est un opérateur $(q_1 + q_2, \psi_1, \psi_2)$-borné.*

(d) *Si f_1 est un opérateur (ψ_1, ψ_2)-condensant et f_2 est un opérateur (ψ_2, ψ_3)-condensant qui transforme les ensembles totalement bornés en des ensembles totalement bornés, ψ_1 et ψ_3 sont des mesures de non compacités régulières, et $Q = [0, \infty)$ alors $f_2 \circ f_1$ est un opérateur (ψ_1, ψ_3)-condensant.*

(e) *Si $Q = [0, \infty)$ et ψ_2 est semi-additive, alors l'ensemble des opérateurs (ψ_1, ψ_2)-condensant est convexe.*

1.4.4 Famille d'opérateurs condensants

Les notions d'opérateurs (ψ_1, ψ_2)-condensant et (q, ψ_1, ψ_2)-bornés admettent des généralisations naturelles aux familles d'opérateurs $f = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$; où Λ est un ensemble arbitraire, dans ce cas $f(\Omega)$ est entendu comme $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(\Omega)$.

Souvent une famille d'opérateurs $f = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est considérée comme un opérateur à deux variables,

$$\begin{array}{rlll} f : & \Lambda \times E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) = f_\lambda(x) \end{array}$$

Alors au lieu de parler de famille d'opérateurs (ψ_1, ψ_2)-condensant et (q, ψ_1, ψ_2)-bornés on peut parler d'opérateur conjointement (ψ_1, ψ_2)-condensant et conjointement (q, ψ_1, ψ_2)-borné.

1.4.5 Exemple d'une famille d'opérateurs condensants (homotopie condensant).

Théorème 1.4.1 *Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach, Λ est un ensemble arbitraire et $M \subset E_1$. Supposons que les opérateurs de la famille $f = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sont continus et admettent une représentetion diagonale*

$$f_\lambda(x) = \Phi(\lambda, x, x) \ \text{au moyen de l'opérateur} \quad \Phi : \Lambda \times M \times E_1 \longrightarrow E_2.$$

Supposons aussi que pour tout $y \in E_1$ l'ensemble $\Phi(\Lambda \times M \times \{y\})$ est totalement borné, et que pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout $x \in M$ l'opérateur $\Phi(\lambda, x, \cdot)$ satisfait la condition de Lipschitz avec une constante $q < 1$ qui ne dépend pas de λ et de x. Alors la famille f est (q, χ)-bornée.

Corollaire 1.4.1 *Sous les hypothèses du Théorème 1.4.1,*
(a) *Si l'ensemble M est borné et $q < 1$, alors la famille f est χ-condensant.*
(b) *La somme $f + g$ d'un opérateur compact $f : E_1 \to E_2$ et d'un opérateur contractif $g : E_1 \to E_2$ est un opérateur χ-condensant pour tous ensemble borné $M \subset E_1$.*

Degré topologique relatif et points fixes des opérateurs condensants.

Pour démontrer l'existence d'une solution d'une équation différentielle ou une équation intégrale, on utilise en générale la théorie du point fixe, cette dernière offre plusieurs outils pour résoudre ce problème.

La théorie d'indice du point fixe occupe une grande partie de cette branche. La façon par la quelle l'indice est défini ne joue aucun rôle dans les applications, ce qui est fondamental est le fait que cet indice est bien défini et possède des propriétés particulières. L'invariance de l'indice par une homotopie, rend le calcul plus simple, beaucoup de résultats sont obtenus en utilisant cette propriété remarquable.

Dans cette partie on définit l'indice du point fixe des opérateurs univoques χ-condensant et on examine leur propriétés élémentaires pour le cas multivoque.

1.5 Indice du point fixe des opérateurs complètement continus

On donne un rappel des principaux résultats connus dans la théorie des indices du point fixe des opérateurs complètement continus.

Définition 1.5.1 *Soient E un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert borné. Deux opérateurs complètement continus $f_0, f_1 : \overline{U} \to E$ sont dits homotopes s'il existe une application complètement continue $H : [0,1] \times \overline{U} \to E$ telle que*

1. *$H(\lambda, x) \neq x$ pour tout $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial U$;*
2. *$H(0,x) = f_0(x)$ et $H(1,x) = f_1(x)$.*

Définition 1.5.2 *Soit $f : \overline{U} \to E$ une application complètement continue n'ayant pas de points fixes sur ∂U, alors on peut lui associer un nombre relatif appelé indice du point fixe $ind(f,U)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(A1) Normalisation. Si $f(x) = x_0$ où $x_0 \in U$, alors $ind(f,U) = 1$.

(A2) Si $f(x) = x_0$ où $x_0 \notin U$, alors $ind(f,U) = 0$.

(A3) Invariance par homotopie. Deux fonctions homotopes ont le même indice.

(A4) Additivité. Soient $U_i, i = 1, 2, \cdots$ des sous ensembles ouverts de U disjoints deux à deux et supposons que f n'a pas de points fixes sur $\overline{U} \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Alors les indices $ind(f,U_i)$ sont définis pour tout i, différents de zéro pour un nombre fini de i et $ind(f,U) = \sum_{i=1}^{\infty} ind(f,U_i)$.

(A5) Principe du point fixe. Si $ind(f,U) \neq 0$, alors il existe au moins $x \in U$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 1.5.1 ([58] ; 542) ***(Indice du point fixe de Leray-Schauder).*** *Soient U un ouvert borné dans un espace de Banach E, $f : \overline{U} \subset E \to E$ un opérateur complètement continu n'ayant pas de points fixes sur ∂U, alors il existe un seul indice du point fixe satisfaisant les axiomes $(A1) - (A5)$ de la définition 1.5.2.*

Définition 1.5.3 ([2] ; page 105) *Soient E un espace de Banach et $U \subset E$ un domaine borné (i.e.ouvert et connexe). U est dit domaine de Jordan si $E \setminus \overline{U}$ est connexe.*

Théorème 1.5.2 (Théorème de Hopf) *Soient E un espace de Banach, $U \subset E$ un domaine de Jordan et $f_1, f_2 : \overline{U} \to E$ deux opérateurs complètement continus tels que $ind(f_1,U) = ind(f_2,U)$. Alors f_1 et f_2 sont homotopes.*

Théorème 1.5.3 (Théorème de Dugundji) *Soient E et F deux espaces de Banach, $U \subset E$ un sous ensemble fermé non vide et $f : U \to F$ un opérateur continu. Alors, il existe un opérateur continu $\widehat{f}$ qui prolonge f sur tout E tel que $\widehat{f} : E \to co(f(U))$.*

Théorème 1.5.4 ([58] ; page 56) ***(Théorème de Schauder 1930).*** *Soit E un espace de Banach, $U \subset E$ un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe et soit $f : U \to U$ un opérateur complètement continu. Alors f admet au moins un point fixe.*

Pour la démonstration, on introduit la notion de rétraction.

Définition 1.5.4 ([58] ; page 50) *Soient U un sous ensemble d'un espace de Banach E et $r : E \to U$ un opérateur continu. r est dit rétractif si et seulement si $r(x) = x$ pour tout $x \in U$. L'ensemble U est appelé rétracté de E.*

Proposition 1.5.1 *Tout ensemble convexe fermé U d'un espace de Banach E est un rétracté de E.*

1.6 Construction d'indice du point fixe des opérateurs χ-condensant

Définition 1.6.1 ([2] ; page 100) *Soient E un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert borné. Deux opérateurs χ-condensant $f_0, f_1 : \overline{U} \to E$ sont dits homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1] \times E \to E$ telle que*

1. *$f_\lambda = H(\lambda, \cdot) : \overline{U} \to E$ est condensant ;*
2. *$H(\lambda, x) \neq x$ pour tout $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial U$;*
3. *$H(0,x) = f_0(x)$ et $H(1,x) = f_1(x)$.*

Dans la suite, la notion d'ensembles fondamentaux, introduite par M.Krasnosel'skiĭ, P.Zabreĭko et V.Strygin, jouera un rôle important dans la construction d'indice du point fixe des opérateurs χ-condensant.

Définition 1.6.2 ([2] ; page 42) *Un ensemble S dans un espace de Banach E est dit fondamental pour l'opérateur $f : M \subset E \to E$, M une partie fermée de E si*

(S1) S est non vide, convexe et fermé ;

(S2) $f(M \cap S) \subset S$;

(S3) Si $x_0 \in \overline{co}[\{f(x_0)\} \cup S]$, alors $x_0 \in S$.

Si $S = \emptyset$ ou $M \cap S = \emptyset$ alors l'ensemble des points fixes de f est vide.

Définition 1.6.3 *Un ensemble est fondamental pour une famille d'opérateurs s'il est fondamental pour chaque élément de la famille.*

Proposition 1.6.1 *L'ensemble des points fixes de f est inclus dans n'importe quel ensemble fondamental S de f.*

Exemple 1.6.1 *Soient M un ensemble borné non vide et $f : M \subset E \to E$ un opérateur complètement continu. L'ensemble $S = \overline{co}[f(M)]$ est fondamental pour l'opérateur f.*

En effet, S est convexe par construction, sa compacité résulte du fait que f est complètement continu. D'autre part, $M \cap \overline{co}[f(M)] \subset M$ d'où

$$f\{M \cap \overline{co}[f(M)]\} \subset f(M) \subset \overline{co}[f(M)].$$

Finalement, comme $f(x_0) \in f(M)$ alors $x_0 \in \overline{co}[f(M)] = S$.

Proposition 1.6.2 *Une intersection d'ensembles fondamentaux est un ensemble fondamental.*

Construction d'indice du point fixe des opérateurs χ-condensant.

Pour définir l'indice du point fixe des opérateurs χ-condensant, on donne

(1) E un espace de Banach, $U \subset E$ un sous ensemble ouvert et borné ;

(2) $f : \overline{U} \to E$ un opérateur χ-condensant n'ayant pas de points fixes sur ∂U ;

(3) S un ensemble fondamental de f, alors $f(\overline{U} \cap S) \subset S$.

Pour la construction, on fait les opérations suivantes :

(a) On prolonge f à l'ensemble fermé $\overline{U} \cap S$ (on suppose pour le moment que $\overline{U} \cap S \neq \emptyset$) sur E tout entier en utilisant le théorème de Dugundji ; il existe alors, un opérateur continu $\widehat{f}$ tel que $\widehat{f} : E \to S$ et $\widehat{f}(x) = f(x), x \in \overline{U} \cap S$;

(b) On fait une restriction de $\widehat{f}$ sur $\overline{U}$, on note $\widetilde{f}$ cette restriction.

Alors

(i) L'opérateur $\widetilde{f} : \overline{U} \to S$ est complètement continu.
En effet, pour tout borné $\Omega \subset \overline{U}$, son image $\widetilde{f}(\Omega)$ est relativement compact ;

(ii) Les points fixes de $\widetilde{f}$ sont tous contenus dans $\overline{U} \cap S$, où $\widetilde{f}$ coïncide avec f ; car l'ensemble des points fixes de f est inclus dans S, alors $\widetilde{f}$ n'a pas de points fixes sur ∂U.

De ce qui précède, l'indice $ind(\widetilde{f}, U)$ de l'opérateur complètement continu $\widetilde{f}$ est défini, et on définit l'indice $ind(f, U)$ d'un opérateur χ-condensant par

Définition 1.6.4 *L'indice d'un opérateur χ-condensant est défini par*

$$ind(f, U) = ind(\widetilde{f}, U). \tag{1.3}$$

Remarque 1.6.1 *Dans la construction d'indice, on a supposé que* $\overline{U} \cap S \neq \emptyset$*, si on a le contraire,* $ind(f, U) = 0$ *par définition.*

Théorème 1.6.1 *L'indice* $ind(f, U)$ *définit ci-dessus ne dépend pas du choix de l'ensemble fondamental* S *et du prolongement* $\widetilde{f}$*.*

On a la famille $F = \{f_\lambda : f_\lambda(x) = (1 - \lambda)\widetilde{f}_1(x) + \lambda \widetilde{f}_2(x), \lambda \in [0, 1]\}$ définit une homotopie entre $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{f}_2$.

Proposition 1.6.3 *L'indice de l'opérateur* χ*-condensant défini ci-dessus vérifie les propriétés* $(A1) - (A5)$ *de la définition 1.5.2.*

Dans la pratique, il est important de calculer l'indice d'un opérateur ou au moins savoir s'il est différent de zéro. Pour cela, on donne l'exemple suivant.

Exemple 1.6.2 *Soit* E *un espace de Banach,* $U \subset E$ *un sous ensemble ouvert, convexe et borné, et* $f : \overline{U} \to E$ *un opérateur* χ*-condensant tel que* $f(\partial U) \subset U$ *et* f *n'ayant pas de points fixes sur* ∂U*. Alors* $ind(f, U) = 1$*.*

En effet, d'après les hypothèses, f est homotope à l'opérateur constant $f_0(x) = x_0$, où $x_0 \in U$, par la famille χ-condensant $H = \{f_\lambda : f_\lambda(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)x_0, \lambda \in [0, 1]\}$. Comme $x_0, f(x) \in U$ et U est convexe alors $\lambda f(x) + (1 - \lambda)x_0 \in U$, i.e. $f_\lambda(x) = x$ est impossible si $x \in \partial U$. Par conséquent, l'indice de f est défini. En utilisant $(A1)$ et $(A3)$ de la définition de l'indice on obtient

$$ind(f, U) = ind(x_0, U) = 1.$$

1.7 Quelques théoremes du point fixe pour des opérateurs condensants

En analyse non linéaire, un rôle important est fourni par le théorème de Schauder et le principe de contraction de Banach. Le premier affirme qu'un opérateur complètement continu f qui transforme un ensemble fermé, borné, convexe et non vide vers lui même admet un point fixe. Le deuxième assure en plus l'unicité si cet opérateur est contractant. Ces deux théorèmes sont différents. Dans le principe de Banach, l'opérateur f diminue la distance, bien que le théorème de Schauder puisse agrandir la distance. Mais, il s'est avéré que ces deux théorèmes apparaissent comme des cas particuliers du célèbre théorème du point fixe de Darbo.

Lemme 1.7.1 *Si dans un espace de Banach E, $\Omega_1 \supset \Omega_2 \cdots \supset \Omega_n \cdots$ est une suite décroissante d'ensembles fermés non vides, et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \chi(\Omega_n) = 0$, alors l'intersection $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ est non vide et compacte.*

Théorème 1.7.1 ([3] ; page 195) ***(Darbo)*** *Soit M un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné d'un espace de Banach E. Supposons que l'opérateur (q, α)-borné f, avec $q < 1$, transforme M vers lui même. Alors f admet au moins un point fixe dans M.*

Théorème 1.7.2 (Théorème de Schauder généralisé) *Soit M un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné d'un espace de Banach E. Supposons que l'opérateur α-condensant f transforme M vers lui même. Alors f a au moins un point fixe dans M.*

Remarque 1.7.1 *Le théorème de Darbo reste vrai pour toute mesure de non compacité régulière, semi-additive et semi-homogène.*

Chapitre 2

Opérateurs Multivoques

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 *On appelle opérateur multivoque (ou multivoque) d'un ensemble X dans un ensemble Y toute application $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ où $\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble des parties non vides de Y.*

On écrit parfois $F : X \multimap Y$ pour dire que F est un opérateur multivoque de X dans Y. On definit l'image d'une partie $A \subset X$ notée $F(A)$, le graphe de F sur A noté $\Gamma_F(A)$ et l'application inverse de F notée F^{-1} définie de Y dans X par :

$$\begin{aligned} F(A) &= \bigcup_{x\in A} F(x). \\ \Gamma_F(A) &= \{(x,y) \in A \times Y : y \in F(x)\} \\ F^{-1}(y) &= \{x \in X : y \in F(x)\}. \end{aligned}$$

$F(X)$ notée $Im(F)$ ou $rg(F)$ est appelée l'image ou le rang de F
Si $Im(F) = Y$, le multivoque F est dit surjectif. $\Gamma_F(X)$ noté Γ_F est appelé le graphe de F.
On a évidement $(F^{-1})^{-1} = F$.

Exemple 2.1.1 *L'exemple le plus naturel est celui induit par une fonction (au sens classique) surjective. Soit f une fonction définie de X dans Y. On* *définit l'image réciproque f^{-1} comme un multivoque, qui associe à tout $y \in Y$ l'ensemble des solutions de l' équation $f(x) = y$.*

$$f^{-1}(y) = \{x \in X, f(x) = y\}.$$

Remarque 2.1.1 *Le multivoque F est dit univoque si pour tout $x \in X$ l'ensemble $F(x)$ est un singleton $\{y\}$. On écrit dans ce cas $F(x) = y$ au lieu de $F(x) = \{y\}$.*

On dit qu'un multivoque F vérifie une propriété si et seulement si son graphe la satisfait.
Par exemple, un multivoque est dit fermé (resp.convexe) si et seulement si son graphe est fermé (resp.convexe).
Si les images d'un multivoque F sont fermées, convexes, ..., on dit que F est à valeurs fermées, convexes,... .
Quand $\star$ désigne une opération sur les sous ensembles, on utilise la même notation pour l'opération sur les applications multivoques, qui est définie par :

$$F_1 \star F_2 : x \to F_1(x) \star F_2(x).$$

2.1.1 Continuité des opérateurs multivoques.

La notion classique de continuité se divise en plusieurs concepts dans le cas des multivoques. Pour cela on aura besoin de définir la petite image réciproque et l'image réciproque large d'un multivoque.

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ un multivoque et $D \subseteq Y$. On définit la petite image réciproque $F^{-1}(D)$ et l'image réciproque large $F_{+}^{-1}(D)$, respectivement, par :*

$$F^{-1}(D) = \{x \in X : F(x) \subset D\} \quad et \quad F_{+}^{-1}(D) = \{x \in X : F(x) \cap D \neq \emptyset\}$$

On donne maintenant quelque propriétés de l'image et de l'image réciproque.

Proposition 2.1.1 *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ un multivoque, $A \subset X$ et $B \subset Y$ alors on a :*

1) $F^{-1}(F(A)) \supset A$.
2) $F(F^{-1}(B)) \subset B$.
3) $X \setminus F^{-1}(B) \supset F^{-1}(Y \setminus B)$.
4) $F_{+}^{-1}(F(A)) \supset A$.
5) $F(F_{+}^{-1}(B)) \supset B \cap F(X)$.
6) $X \setminus F_{+}^{-1}(B) = F^{-1}(Y \setminus B)$.

Dans la suite, on considère X et Y deux espaces topologiques.

2.1.2 Semi-continuité supérieure.

Définition 2.1.3 *Un multivoque $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est dit semi-continu supérieurement (s.c.s.) au point $x \in X$ si pour tout ouvert $W \subset Y$ tel que $F(x) \subset W$, il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que $F(V(x)) \subset W$.*

On dit qu'un multivoque est s.c.s. sur X s'il est s.c.s. en tout point $x \in X$.

Exemple 2.1.2 *Le multivoque $F : [0,1] \to P([0,1])$, définit par*

$$F(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}], & si\ x \neq \frac{1}{2} \\ [0,1], & si\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

est s.c.s.

Théorème 2.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est s.c.s.*
2. *L'ensemble $F^{-1}(W)$ est ouvert pour tout ouvert $W \subset Y$.*
3. *L'ensemble $F_+^{-1}(Q)$ est fermé pour tout fermé $Q \subset Y$.*

2.1.3 Semi-continuité inférieure.

Définition 2.1.4 *Un multivoque $F : X \to P(Y)$ est dit semi-continu inférieurement (s.c.i.) au point $x \in X$ si pour tout ouvert $W \subset Y$ tel que $F(x) \cap W \neq \emptyset$; il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que $F(x') \cap W \neq \emptyset$ pour tout $x' \in V(x)$.*

On dit qu'un multivoque est s.c.i. sur X si il est s.c.i. en tout point $x \in X$.

Exemple 2.1.3 *Le multivoque $F : [0,1] \to P([0,1])$, définit par*

$$F(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}], & si\ x = \frac{1}{2} \\ [0,1], & si\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

est s.c.i.

Théorème 2.1.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est s.c.i.*
2. *L'ensemble $F_+^{-1}(W)$ est ouvert pour tout ouvert $W \subset Y$.*
3. *L'ensemble $F^{-1}(Q)$ est fermé pour tout fermé $Q \subset Y$.*

4. *Si X et Y sont des espaces métriques, pour tout $x \in X$, si $(x_n) \subset X$ est une suite telle que $x_n \to x$, alors pour tout $y \in F(x)$, il existe une suite $(y_n) \subset Y$, $y_n \in F(x_n)$, $y_n \to y$.*

Définition 2.1.5 *Un multivoque F qui est s.c.s. et s.c.i. est continu.*

Exemple 2.1.4 *Soit $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors la multivoque $F : [0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ est continue.*

.

Théorème 2.1.3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérataur multivoque F est fermé.*
2. *Pour tout couple $(x,y) \in X \times Y$ tel que $y \notin F(x)$ il existe des voisinages $V(x)$ de x et $W(y)$ de y tels que $F(V(x)) \cap W(y) = \emptyset$.*
3. *Soient X et Y deux espaces métriques. Pour toute suite $(x_n) \subset X$, et $(y_n) \subset Y$, si $x_n \to x$, $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y$ alors $y \in F(x)$.*

Exemple 2.1.5 *Soient X et Y deux espaces topologiques et X un espace de Hausdorff. Et soit $f : Y \to X$ une application continue et surjective. alors le multivoque*

$$F : X \to \mathcal{P}(Y) \text{ tel que } F(x) = f^{-1}(x)$$

est fermé.

Les notations suivantes seront utilisées par la suite.
Soit Y un espace topologique.(Rappelons que $\emptyset \notin \mathcal{P}(Y)$.)

$$C(Y) = \{D \in \mathcal{P}(Y) : \ D \text{ est fermé}\};$$

$$K(Y) = \{D \in \mathcal{P}(Y) : \ D \text{ est compact}\};$$

Si Y est un espace vectoriel topologique on pose :

$$Pv(Y) = \{D \in \mathcal{P}(Y) : \ D \text{ est convexe}\};$$

$$Cv(Y) = Pv(Y) \cap C(Y) = \{D \in \mathcal{P}(Y) : \ D \text{ est fermé et convexe}\};$$

$$Kv(Y) = Pv(Y) \cap K(Y) = \{D \in \mathcal{P}(Y) : \ D \text{ est compact et convexe}\};$$

Quand un multivoque F prend ces valeurs dans $C(Y), K(Y)$, ou $Pv(Y)$, on dit que F est , respectivement, à valeurs fermées, compactes ou convexes .
Il est clair qu'un multivoque fermé est à valeurs fermées.
Les multivoques fermés et semi-continus supérieurement sont un peu à part.
La relation entre eux est donnée par les relation suivantes.

Théorème 2.1.4 *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique régulier et $F : X \to C(Y)$ un multivoque s.c.s. Alors F est fermé .*

Pour formuler une condition suffisante pour qu'un multivoque fermé soit s.c.s, on a besoin des définitions suivantes.

Définition 2.1.6 *Un multivoque $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est :*

(i) *compact si son rang $F(X)$ est relativement compact dans Y, i.e. $\overline{F(X)}$ est compact dans Y;*

(ii) *Localement compact si tout point $x \in X$ possède un voisinage $V(x)$ tel que la restriction de F sur $V(x)$ est compact. i.e. $\overline{F(V(x))}$ est compact.*

(iii) *Quasi-compact si sa restriction sur tout compact $A \subset X$ est compact;*

Il est clair que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Lemme 2.1.1 *([39]) Soit X et Y des espaces métriques et $F : X \to K(Y)$ un multivoque quasi compact fermé . Alors F est semi-continu supérieurement.*

Exemple 2.1.6 *La condition de localement compacte est nécessaire. Le multivoque $F : [-1, 1] \to K(\mathbb{R})$, définit par*

$$F(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{x}\right\}, & si\ x \neq 0, \\ \{0\}, & si\ x = 0 \end{cases}$$

est fermé mais n'est pas s.c.s.en $x = 0$.

Théorème 2.1.5 *Soit $F : X \to K(Y)$ un multivoque s.c.s. Si $A \subset X$ est un ensemble compact alors son image $F(A)$ est un sous-ensemble compact de Y.*

2.2 Multivoque mesurable et multivoque de superposition

2.2.1 Multivoque mesurable et intégrale à valeurs multiples

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, μ une mesure de Lebesgue sur I et E un espace de Banach.

Définition 2.2.1 *Un multivoque $F : I \to K(E)$ est dit mesurable si pour tout sous-ensemble ouvert $W \subset E$ l'ensemble $F^{-1}(W)$ est mesurable.*

Pour décrire des propriétés additionnelles des multivoques mesurables on aura besoin des définitions suivantes.

Définition 2.2.2 *Une fonction $f : I \to E$ est dite une sélection mesurable d'un multivoque $F : I \to K(E)$ si f est mesurable et*

$$f(t) \in F(t) \;\; \mu\text{-p.p.} \;\; t \in I.$$

L'ensemble de toutes les sélections mesurables de F sera noté par S_F.

Définition 2.2.3 *Une famille dénombrable $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_F$ est dite une représentation de Castaing de F si*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(t)} = F(t) \quad \mu\text{-p.p.} \quad t \in I.$$

On dit que le multivoque $\widetilde{F} : I \to K(E)$ est une multifonction étagé s'il existe une partition de I en une famille finie de sous-ensembles mesurables disjoints $\{I_j\}$, $\bigcup_j I_j = I$ tel que $\widetilde{F}$ est constante sur chaque I_j.

Définition 2.2.4 *Un multivoque $F : I \to K(E)$ est dit fortement mesurable s'il existe une suite $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de multivoques étagés tel que*

$$h(F_n(t), F(t)) \longrightarrow 0 \;\; \text{quand } n \to \infty \quad \mu\text{-p.p.} \quad t \in I$$

où h est la métrique d'Hausdorff sur $K(E)$.

Il est bien connu que de la même manière on peut définir le concept de fonction fortement mesurable et donc, de sélection fortement mesurable. Notons qu'en général un multivoque mesurable n'est pas nécessairement fortement mesurable (voir, par exemple [73]). Mais pour les multivoques à valeurs compactes agissant dans un espace de Banach séparable ces deux notions coïncident. Ceci devient clair par le théorème suivant décrivant les principales propriétés des multivoques mesurables.

Théorème 2.2.1 *Soit E un espace de Banach séparable, et $F : I \to K(E)$ un multivoque, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est mesurable ;*

2. *Pour tout sous-ensemble dénombrable dense $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de E, les fonctions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$,*
$$\varphi_n : I \to \mathbb{R}, \ \ \varphi_n(t) = d(x_n, F(t))$$
sont mesurables ;
3. *F possède une représentation de Casting ;*
4. *F est fortement mesurable ;*
5. *F est mesurable comme application univoque de I dans un espace métrique $(K(E), h)$;*
6. *F possède la propriété de **Lusin** : Pour tout $\delta > 0$ il existe un sous-ensemble fermé $I_\delta \subset I$ tel que $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$ et la restriction de F sur I_δ est continue.*

2.2.2 Les conditions de Carathéodory

Soient E et E_0 deux espaces de Banach séparables ; I comme dans la section précédente.

Définition 2.2.5 .
(a) *Un multivoque $F : I \times E_0 \longrightarrow K(E)$ vérifie les conditions de Carathéodory supérieures si*

(i) *pour tout $x \in E_0$ le multivoque $F(\cdot, x) : I \to K(E)$ est mesurable ;*

(ii) *pour presque tout $t \in I$ le multivoque $F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$ est s.c.s .*

(b) *Un multivoque $F : I \times E_0 \longrightarrow K(E)$ vérifie les conditions de Carathéodory si la condition (i) est vérifiée, ainsi que la condition suivante :*

(ii') *pour presque tout $t \in I$ le multivoque $F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$ est continue.*

2.2.3 Multivoque de superposition

Chaque multivoque $F : I \times E_0 \to P(E)$ définit une correspondance associant à tout multivoque $Q : I \to P(E_0)$, le multivoque $\Phi : I \to P(E)$ définit par la formule
$$\Phi(t) = F(t, Q(t)).$$
Notre but maintenant est de donner quelques propriétés de cette correspondance.

Théorème 2.2.2 *Si un multivoque $F : I \times E_0 \to K(E)$ vérifie les conditions de Carathéodory alors F est superpositionnellement mesurable dans le sens suivant : Pour tout multivoque mesurable $Q : I \to K(E_0)$ le multivoque Φ est mesurable.*

Maintenant on donne une condition suffisante de la mesurabilité superpositionnelle.

Proposition 2.2.1 *Si un multivoque $F : I \times E_0 \to K(E)$ est s.c.s. ou s.c.i. alors il est superpositionnellement mesurable.*

Théorème 2.2.3 *Soient E, E_0 deux espaces de Banach (non nécessairement séparables) ; et soit le multivoque $F : I \times E_0 \longrightarrow K(E)$ tel que*

(i) *pour tout $x \in E_0$ le multivoque $F(\cdot, x) : I \to K(E)$ possède une sélection fortement mesurable ;*

(ii) *μ-p.p tout $t \in I$ le multivoque $F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$ est s.c.s .*

Alors pour toute fonction fortement mesurable $q : I \to E_0$, il existe une sélection fortement mesurable $\varphi : I \to E$ du multivoque $\Phi : I \to K(E)$,

$$\Phi(t) = F(t, q(t)).$$

Corollaire 2.2.1 *Soient E, E_0 deux espaces de Banach, et le multivoque F comme dans le théorème 2.2.3. Alors pour tout multivoque fortement mesurable $Q : I \longrightarrow K(E_0)$ il existe une sélection fortement mesurable $\varphi : I \to E$ d'un multivoque Φ, $\Phi(t) = F(t, Q(t))$.*

Le théorème 2.2.3 justifie la définition suivante.

Définition 2.2.6 *Soit $F : I \times E_0 \to K(E)$ un multivoque vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème 2.2.3. Le multivoque P_F qui associé à chaque fonction continue $q \in C(I, E_0)$ l'ensemble de toutes les sélections fortement mesurables du multivoque $F(t, q(t))$ est dit multivoque de superposition engendré par F.*

2.3 Multivoque condensant

Soit $\psi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow (A, \leq)$ une mesure de non compacité dans E.

Définition 2.3.1 *Un multivoque $F : X \to K(E)$ (resp, une famille de multivoques $G : \Lambda \times X \to K(E)$) est dit condensant par rapport à une mesure de non compacité ψ (ou ψ-condensant) si pour tout $\Omega \subseteq X$ qui n'est pas relativement compact, on a*

$$\psi(\Omega) \nleq \psi(F(\Omega)) \qquad (\ \textit{resp,}\ \ \psi(\Omega) \nleq \psi(G(\Lambda \times \Omega))).$$

On introduit la définition suivante des multivoques condensant.

Définition 2.3.2 *Soit ψ une mesure de non compacité réelle et $0 \leq k < 1$. Un multivoque $F : X \to K(E)$ (resp, une famille de multivoques $G : \Lambda \times X \to K(E)$) est dit (k, ψ)-condensant si*

$$\psi(F(\Omega)) \leq k\psi(\Omega) \quad (\textit{resp,}\ \ \psi(G(\Lambda \times \Omega)) \leq k\psi(\Omega))\ \ \textit{pour tout}\ \ \Omega \subseteq X.$$

Définition 2.3.3 *Soient E_0, E_1 deux espaces de Banach et ψ_0, ψ_1 deux mesures réelles de non compacités respectivement dans E_0 et E_1. Un multivoque $F : X \subseteq E_0 \to K(E_1)$ est dit (k, ψ_0, ψ_1)-borné (avec $k \geq 0$) si*

$$\psi_1(F(\Omega)) \leq k\psi_0(\Omega)$$

pour tout $\Omega \subseteq X$.

Il est évident que dans le cas $E_0 = E_1 = E$, $\psi_0 = \psi_1 = \psi$, $k < 0$. on revient à la définition d'un multivoque (k, ψ)-condensant.
Pour tester si un multivoque est (k, χ_0, χ_1)-borné (ou (k, χ)-condensant) on peut utiliser le critère suivant.

Proposition 2.3.1 *Soient E_0, E_1 deux espaces de Banach; χ_0, χ_1 des mesures de non compacités de Hausdorff respectivement dans E_0 et E_1, $X \subseteq E_0$ et $\mathcal{M}$ une famille de sous-ensembles bornés de X.*
Supposons que le multivoque $B : X \times E_0 \to K(E_1)$ vérifie les conditions suivantes :

(i) *Pour tout $x \in X$ le multivoque $B(x, \cdot) : E_0 \to K(E_1)$ est k-Lipschitzien par apport à la métrique de Hausdorff ρ sur $K(E_1)$, i.e,*

$$\rho(B(x, y_0), B(x, y_1)) \leq k \parallel y_0 - y_1 \parallel$$

pour tout $y_0, y_1 \in E_0$ où $k \in \mathbb{R}_+$ ne dépend pas de x ;

(ii) *L'ensemble $B(\Omega \times \{y\})$ est relativement compact dans E_1 pour tout $\Omega \in \mathcal{M}$ et $y \in E_0$.*
Alors le multivoque $A : X \to K(E_1)$ définit par $A(x) = B(x, x)$ est (k, χ_0, χ_1)-borné sur $\mathcal{M}$, i.e,

$$\chi_1(A(\Omega)) \leq k\chi_0(\Omega) \qquad \textit{pour tout}\ \ \Omega \in \mathcal{M}.$$

Corollaire 2.3.1 *Soit E un espaces de Banach; $X \subset E$ un sous ensemble fermé et borné. Si le multivoque $F_0 : X \to K(E)$ est k-Lipschitzien, $0 \leq k < 1$ par rapport à la métrique de Hausdorff et le multivoque $F_1 : X \to K(E)$ est compact alors leur somme $F_0 + F_1 : X \to K(E)$ est (k, χ)-condensant.*

2.3.1 Quelques théorèmes du point fixe pour des opérateurs multivoques condensant

Théorème 2.3.1 *([39]). Si G est un sous ensemble convexe fermé de l'espace de Banach E, et $\Gamma : G \to Kv(G)$ fermé Θ condensant, où Θ est une mesure de non compacité non singulière définit sur les sous ensembles de G, alors $Fix\Gamma \neq \emptyset$.*

Théorème 2.3.2 *([39]). Soit Z un sous ensemble fermé de l'espace de Banach E et $F : Z \to K(E)$ un multivoque fermé, α-condensant sur tout sous ensemble borné de Z, où α est une mesure de non compacité monotone . Si l'ensemble des points fixes $FixF$ est borné, alors il est compact.*

Définition 2.3.4 *Le sous ensemble $\Lambda \subset E$ est dit contractile si pour un certain $x_0 \in \Lambda$, il existe une application continue H de $[0, 1] \times \Lambda$ dans Λ vérifiant $H(0, x) = x_0$ et $H(1, x) = x$, pour tout $x \in \Lambda$. Pour plus de détails voir par exemple [39, 26]*

Théorème 2.3.3 *[28] Soit X un espace de Banach et $D \subset X$ un ensemble compact convexe non vide. On suppose que $\mathcal{G} : D \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$ est s.c.s. à valeurs contractiles fermées . Alors $\mathcal{G}$ a un point fixe.*

2.4 Semi-groupe et mesure de non compacité

Dans cette section on donne un résumé de la théorie des semi-groupes fortement continus des C_0-semi-groupes, nécessaire à notre étude des inclusions semi-linéaires. On continue aussi l'étude des mesures de non compacités dans quelques espaces fonctionnels. Des conditions sous lesquelles un semi-groupe condensant sont données.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \to E$, (E un espace de Banach), on note :

par I l'opérateur identité de E,

$\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} /\ \lambda I - A$ est un opérateur inversible à inverse borné dans E

l'ensemble résolvant de A
et

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda(A)$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A .

2.4.1 Semi-groupes : Notions générales

Définition 2.4.1 *On appelle C_0-semi-groupe sur E toute famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E vérifiant les propiétés suivantes :*
(i) $T(0) = I$;
(ii) pour tout $t, s \geq 0$:

$$T(t+s) = T(t)T(s);$$

(iii) la fonction

$$\begin{array}{rcl} T(.)x : [0, \infty) & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & T(t)x \end{array}$$

est continue pour tout $x \in E$.

Définition 2.4.2 *On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire A définit sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{ x \in E / \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \ x \in D(A)$$

On dit que A génère le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et on écrit

$$T(t) = \exp\{At\} = e^{At}.$$

On note par $\mathcal{SG}(C, a)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ pour lesquels il existe $a \geq 0$ et $C \geq 1$ tel que :

$$\| e^{At} \| \leq C e^{at}, \quad t \geq 0$$

Dans ce cas, on dit que $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné.

Proposition 2.4.1 *Soient $\{e^{At}\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(C, a)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $e^{At}x \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$e^{At}Ax = Ae^{At}x, \ \textit{pour tout} \ \ t \geq 0.$$

Remarque 2.4.1 *On voit que :*

$$e^{At}D(A) \subseteq D(A), \ \ pour\ tout \ \ t \geq 0.$$

Proposition 2.4.2 *Soient* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(C,a)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto e^{At}x \in E$$

est dérivable sur $[0,\infty)$*, pour tout* $x \in D(A)$ *et on a :*

$$\frac{d}{dt}e^{At}x = e^{At}Ax = Ae^{At}x, \ \ pour\ tout \ \ t \geq 0.$$

Proposition 2.4.3 *Soit* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{As}x\,ds = e^{At}x$$

pour tous $x \in E$ *et* $t \geq 0$

Proposition 2.4.4 *Soient* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(C,a)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in E$*, alors* $\int_0^t e^{As}x\,ds \in D(A)$ *et on a l'égalité :*

$$A\int_0^t e^{As}x\,ds = e^{At}x - x, \ \ pour\ tout \ \ t \geq 0.$$

Théorème 2.4.1 *Soient* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(C,a)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors* $x \in D(A)$*, et* $Ax = y$ *si et seulement si*

$$e^{At}x - x = \int_0^t e^{As}y\,ds, \ \ pour\ tout \ \ t \geq 0.$$

Théorème 2.4.2 *Soient* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(C,a)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*
(i) $\overline{D(A)} = E$
(ii) *A est un opérateur fermé.*

Théorème 2.4.3 *L'opérateur linéaire fermé à domaine dense* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *si et seulement si ils existent un nombre* $\sigma_0 = \sigma_0(A)$ *et une constante* $C \in \mathbb{R}_+$ *tels que l'ensemble résolvant* $\Lambda(A)$ *contient le demi-plan*

$$\Omega_A = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \sigma_0(A)\}$$

et pour tout $\lambda \in \Omega_A$ *la résolvante* $R(\lambda, A)$ *satisfait les inégalités :*

$$\|(R(\lambda, A))^i\| \leq \frac{C}{(Re\lambda - \sigma_0)^i} \ \ , \ \ i = 1, 2, ...$$

Définition 2.4.3 . *Un semi-groupe* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *est dit décroissant si*

$$\| e^{At} \| \leq Ce^{-at}, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

où C *et* a *sont des constantes positives. Si* $C = 1$ *alors le semi-groupe* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *est dit fortement contractif.*

2.4.2 Mesures de non compacités dans les espaces de fonctions : mesurabilité et integrabilité

Dans cette section on considére quelques propriétés des mesures de non compacités engendrée par la mesure de non compacité de Hausdorff . Ces propriétés sont liées aux estimations de leurs valeurs sur des suites de fonctions et des intégrales à valeurs multiples.
Soit E un espace de Banach (non nécessairement séparable).
Dans cette partie par mesurable on entend fortement mesurable. On commence par le résultat suivant.

Théorème 2.4.4 *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ *une suite de fonctions intégrablement bornées :*

$$\| f_n(t) \|_E \leq v(t) \quad \text{pour tout } n = 1, 2, ... \text{ et p.p. } t \in [0,d] \tag{2.2}$$

où $v \in L^1([0,d])$. *On suppose que*

$$\chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq q(t) \quad p.p. t \in [0,d] \tag{2.3}$$

où $q \in L^1([0,d])$. *Alors pour tout* $\delta > 0$ *il existe un ensemble compact* $K_\delta \subset E$, *un ensemble* $m_\delta \subseteq [0,d]$, $mes(m_\delta) < \delta$ *et un ensemble de fonctions* $G_\delta \subset L^1([0,d];E)$ *à valeurs dans* K_δ *tels que pour tout* $n \geq 1$ *il existe* $g_n \in G_\delta$ *pour laquelle*

$$\| f_n(t) - g_n(t) \| \leq 2q(t) + \delta, \quad t \in [0,d] \backslash m_\delta. \tag{2.4}$$

Définition 2.4.4 *La suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ *est semi-compacte si elle est intégrablement bornée et l'ensemble* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *est relativement compact pour presque tout* $t \in [0,d]$.

En utilisant le Théorème (2.4.4) on peut donner le corollaire suivant décrivant les propriétés des suites semi-compactes.

Corollaire 2.4.1 *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1([0,d];E)$ *une suite semi-compacte. Alors pour tout* $\delta > 0$ *il existe un ensemble* $m_\delta \subset [0,d]$ *et un ensemble compact* $K_\delta \subset E$ *tels que mes* $(m_\delta) < \delta$ *et* $dist(f_n(t), K_\delta) < \delta$ *pour tout* n *et* $t \in [0,d] \backslash m_\delta$.

Lemme 2.4.1 ([23]). *Toute suite semi-compacte dans* $L^1([0,T];E)$ *est faiblement compacte dans* $L^1([0,T];E)$.

2.5 Opérateur intégral

Soit l'opérateur

$$\mathbf{S} : L^1([0, d]; E) \to C([0, d]; E)$$

vérifiant les conditions suivantes :

(S1) Il existe $D \geq 0$ tel que

$$\| \mathbf{S}f(t) - \mathbf{S}g(t) \|_E \leq D \int_0^t \| f(s) - g(s) \|_E \, ds$$

pour tous $f, g \in L^1([0, d]; E), 0 \leq t \leq d$;

(S2) Pour tout compact $K \subset E$ et toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0, d]; E)$ tel que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ p.p. $t \in [0, d]$, la convergence faible $f_n \underset{\omega}{\to} f_0$ alors $\mathbf{S}f_n \to \mathbf{S}f_0$.

On note que la condition *(S1)* implique que l'opérateur $\mathbf{S}$ vérifie la condition de Lipschitz

(S1′)

$$\| \mathbf{S}f - \mathbf{S}g \|_C \leq D \| f - g \|_{L^1} .$$

Pour donner un exemple d'un opérateur vérifiant ces conditions, on introduit la notion suivante.

Définition 2.5.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\left\{e^{At}\right\}_{t \geq 0}$. Alors l'opérateur $G : L^1([0, d]; E) \to C([0, d]; E)$ définit par*

$$Gf(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) \, ds$$

s'appelle l'opérateur de Cauchy.

Remarque 2.5.1 *On remarqur que en prenant $A = 0$ on obtient l'opérateur intégrale usuel $G_I : L^1([0, d]; E) \to C([0, d]; E)$,*

$$G_I f(t) = \int_0^t f(s) \, ds$$

comme cas particulier de l'opérateur de Cauchy.

Lemme 2.5.1 . *L'opérateur de Cauchy G satisfait les propriétés (S1) et (S2).*

Théorème 2.5.1 *Soit une suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ satisfaisant les conditions du théorème 2.4.4. Soit $\boldsymbol{S} : L^1([0,d];E) \to C([0,d];E)$ un opérateur satisfaisant les propriétés (S1) et (S2).*

(i) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ est une suite de fonctions satisfaisant les conditions du théorème 2.4.4, alors

$$\chi(\{\boldsymbol{S}f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq 2D \int_0^t q(s)\,ds \tag{2.5}$$

pour tout $t \in [0,d]$, où $D \geq 0$ est la constante de la condition (S1).

(ii) Pour tout compact $K \subset E$ et toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E)$ telle que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ p.p. $t \in [0,T]$ la convergence faible $f_n \underset{w}{\to} f_0$ implique que $J(f_n) \to J(f_0)$.

Remarque 2.5.2 . *On montre que si l'espace E est séparable, l' estimation 2.5 a la forme*

$$\chi(\{\boldsymbol{S}f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq D \int_0^t q(s)\,ds. \tag{2.6}$$

Corollaire 2.5.1 . *Pour toute suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.4.4 on a l'estimation*

$$\chi\left(\left\{\int_0^t f_n(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2\int_0^t q(s)\,ds$$

pour $t \in [0,d]$ dans le cas général et

$$\chi\left(\left\{\int_0^t f_n(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \int_0^t q(s)\,ds$$

pour $t \in [0,d]$ dans le cas d'un espace séparable E.

Lemme 2.5.2 . *Soit E un espace de Banach séparable. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,d];E)$ une Suite des fonctions intégrablement bornées. Alors la fonction $\varphi : [0,d] \to \mathbb{R}_+$,*

$$\varphi(t) = \chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \text{ p.p. } t \in [0,d]$$

est mesurable et donc intégrable.

Théorème 2.5.2 *Soit E un espace de Banach séparable, et $G : [0,d] \to P(E)$ un multivoque intégrable et intégrablement bornée tel que*

$$\chi(G(t)) \leq q(t)$$

p.p. $t \in [0,d]$ où $q(\cdot) \in L^1_+([0,d])$. Alors

$$\chi\left(\int_0^t G(s)\,ds\right) \leq \int_0^t q(s)\,ds$$

pour tout $t \in [0,d]$. En particulier, si le multivoque $G : [0,d] \to C(E)$ est mesurable et intégrablement bornée alors la fonction $\chi(G(\cdot))$ est intégrable et

$$\chi\left(\int_0^t G(s)\,ds\right) \leq \int_0^t \chi(G(s))\,ds$$

pour tout $t \in [0,d]$.

Théorème 2.5.3 *Soient E un espace de Banach séparable et $\Omega \subset C([0,d];E)$ un sous-ensemble borné. Alors la fonction*

$$\varphi_\Omega : [0,d] \to \mathbb{R}_+, \;\; \varphi_\Omega(t) = \chi(\Omega(t))$$

où $\Omega(t) = \{y(t) : y \in \Omega\}$, est mesurable et donc intégrable et

$$\chi\left(\left\{\int_0^t y(s)\,ds : y \in \Omega\right\}\right) \leq \int_0^t \varphi_\Omega(s)\,ds$$

pour tout $t \in [0,d]$.

Chapitre 3

Résultat d'existence pour des inclusions différentielles de type neutre dans un espace de Banach

Notre objectif dans ce chapitre est de donner un résultat d'existence du problème de Cauchy pour des inclusions différentielles semi-linéaires de type neutre dans un espace de Banach séparable E. Plus précisément on considère les inclusions de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - h(t, x_t)\right] \in Ax(t) + F(t, x_t), \qquad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [-r, 0], \tag{3.2}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitisimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné d'opérateurs linéaires $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach séparable E; l'opérateur multivoque $F : [0, T] \times C([-r, 0], E) \to P(E)$ et $h : [0, T] \times C([-r, 0], E) \to E$, sont des fonctions données , $0 < r < \infty, \varphi \in C([-r, 0], E)$, où $P(E)$ l'ensemble des parties non vides de E, et $C([-r, 0], E)$ est l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ dans E.

Pour toute fonction continue x définie sur $[-r, T]$ et pour $t \in [0, T]$, l'élément x_t de $C([-r, 0], E)$ est défini par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-r, 0].$$

Pour tout $u \in C([-r, 0], E)$ la norme $\|.\|_{C([-r,0],E)}$ de u est donnée par

$$\|u\|_{C([-r,0],E)} = \sup\{\|u(s)\| : s \in [-r, 0]\}.$$

La fonction $x_t(.)$ représente l'historique de l'état du système à partir de l'instant $t - r$ jusqu'au temps présent t.

3.1 Préliminaires

Dans ce qui suit , E est un espace de Banach séparable muni de la norme $\|.\|$, $A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitisimal d'un semi-groupe uniformément borné analytique d'opérateurs linéaires $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans E. On suppose que $0 \in \rho(A)$ et que $\|S(t)\| \leq M$ pour tout $t \in [0,T]$. Sous ces conditions on peut définir la puissance fractionnaire de $(-A)^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$, comme un opérateur fermé sur son domaine $D(-A)^{\alpha}$.En outre , $D(-A)^{\alpha}$ est dense dans E et la fonction $\|x\|_{\alpha} = \|(-A)^{\alpha}x\|$ définit une norme dans $D(-A)^{\alpha}$. Si X_{α} est l'espace $D(-A)^{\alpha}$ muni de la norme $\|.\|_{\alpha}$, alors X_{α} est un espace de Banach et il existe $c_{\alpha} > 0$ telle que $\|(-A)^{\alpha}S(t)\| \leq \frac{c_{\alpha}}{t^{\alpha}}$, pour $t > 0$. Et l'inclusion $X_{\alpha} \hookrightarrow X_{\beta}$ pour $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ est continue.

Pour plus de détails concernant la puissance fractionnaire d'un opérateur linéaire et la théorie des semi-groupes, on renvoie le lecteur à [41] et [49].

Dans la suite on établit un résultat d'existence du problème (3.1)-(3.2) en utilisant les résultats connus suivants. (voir [39]).

Lemme 3.1.1 *Soit E un espace de Banach et $\phi : E \to E$ un opérateur linéaire borné. Alors pour tout sous ensemble borné $\Omega \subset E$*

$$\chi(\phi(\Omega)) \leq \|\phi\| \chi(\Omega).$$

Lemme 3.1.2 *Soit E un espace de Banach séparable et $G : [0,T] \to P(E)$ un multivoque intégrable et intégrablement borné tel que*

$$\chi(G(t)) \leq q(t)$$

p.p. $t \in [0,T]$ où $q \in L^1_+([0,T])$. Alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \chi(G(s))\,ds \leq \int_0^t q(s)ds.$$

Lemme 3.1.3 *Soit E un espace de Banach séparable et J un opérateur*

$$J : L^1([0,T],E) \to C([0,T],E)$$

qui vérifie les conditions suivantes :

$\mathbf{J}_1$) *Il existe $D > 0$ tel que*

$$\|Jf(t) - J(g)(t)\| \leq D \int_0^t \|f(s) - g(s)\|\,ds, \;\; 0 \leq t \leq T$$

pour tout $f, g \in L^1([0,T],E)$.

J$_2$) *Pour tout compact $K \subset E$ et toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E)$ telle que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ p.p. $t \in [0,T]$ la convergence faible $f_n \underset{w}{\rightarrow} f_0$ implique que $J(f_n) \rightarrow J(f_0)$.*

Alors.

(i) Si la suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E)$ est telle que $\|f_n(t)\| \leq \pi(t)$ p.p. $t \in [0,T]$, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, et $\chi(\{f_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \zeta(t)$ p.p. $t \in [0,T]$, où $\pi, \zeta \in L^1_+([0,T]$, alors

$$\chi(\ \{J(f_n)(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq D \int_0^t \zeta(s)ds.$$

pour tout $t \in [0,T]$.

(ii) Pour toute suite semi-compacte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ la suite $\{J(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $C([0,T];E)$, et en plus, si $f_n \underset{w}{\rightarrow} f_0$ alors
$J(f_n) \rightarrow> J(\ f_0)$.

Un exemple de ce type d'opérateur et l'opérateur de Cauchy
$J : L^1([0,T],E) \rightarrow C([0,T],E)$ définit pour chaque $f \in L^1([0,T],E)$ par

$$J(f)(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

où $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0- semi-groupe dans E (voir [20]).

3.2 Résultat d'existence

On définit une mild solution du problème (3.1)-(3.2).

Définition 3.2.1 *La fonction $x \in C([-r,T],E)$ est dite mild solution du problème (3.1)-(3.2) si la fonction $s \rightarrow AS(t-s)h(s,x_s)$ est intégrable sur $[0,t)$ pour chaque $0 \leq t < T$, et il existe $f \in L^1([0,T],E)$, $f(t) \in F(t,x_t)$ p.p. $t \in [0,T]$, tel que*

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t)(\varphi(0) - h(0,\varphi)) + \ h(t,x_t) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &+ \int_0^t AS(t-s)h(s,x_s)ds, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

et

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r,0].$$

Pour établir notre résultat on considére les condtions suivantes :

On suppose que le multivoque $F : [0,T] \times C([-r,0],E) \to Kv(E)$ vérifie les proptiétés suivantes :

$F1)$ le multivoque $F(\cdot,u)$ possède une sélection fortement mesurable pour chaque $u \in C([-r,0],E)$;

$F2)$ le multivoque $F : (t,\cdot) \to Kv(E)$ est semi-continu supérieurement p.p. $t \in [0,T]$;

$F3)$ il existe une fonction $\beta \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in C([-r,0],E)$,

$$\|F(t,u)\| \leq \beta(t)(1 + \|u\|_{C([-r,0],E)}), p.p.\ t \in [0,T];$$

$F4)$ il existe une fonction $\kappa \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $\Omega \subset C([-r,0],E)$,

$$\chi(F(t,\Omega)) \leq \kappa(t) \sup_{s\in[-r,0]} \chi(\Omega(s)), p.p.\ t \in [0,T],$$

où, pour $s \in [-r,0]$, $\Omega(s) = \{u(s); u \in \Omega\}$.

On suppose aussi que

$H)$ il existe des constantes $d_1, d_2, \omega, \theta \in \mathbb{R}^+$ et $0 < \alpha < 1$, telles que h est à valeurs dans X_α, et

(i) pour tout $u \in C([-r,0],E)$, et $t \in [0,T]$

$$\|(-A)^\alpha h(t,u)\| \leq d_1 \|u\|_{C([-r,0],E)} + d_2;$$

(ii) pour tout ensemble borné $\Omega \subset C([-r,0],E)$ et $t \in [0,T]$,

$$\chi((-A)^\alpha h(t,\Omega)) \leq \omega \sup_{s\in[-r,0]} \chi(\Omega(s));$$

(iii) pour tout $u_1, u_2 \in C([-r,0],E)$ et $t, s \in [0,T]$,

$$\|(-A)^\alpha h(t,u_1) - (-A)^\alpha h(s,u_2)\| \leq \theta \|u_1 - u_2\|_{C([-r,0],E)} + \vartheta(|t-s|),$$

où $\vartheta : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, telle que $\vartheta(0) = 0$.

On remarque que des hypothèses $(F1)-(F3)$ l'opérateur de superposition

$$sel_F : C([-r,T],E) \to P(L^1([0,T],E))$$

définit pour $x \in C([-r,T],E)$ par :

$$sel_F(x) = \{f \in L^1([0,T],E), f(t) \in F(t,x_t), p.p.\ t \in [0,T]\}$$

est bien défini (voir [39]) et faiblement fermé dans le sens suivant : si les suites $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([-r,T],E), \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E),\ f_n(t) \in F(t, x_t^n)$, p.p. $t \in [0,T], n \geq 1$ sont telles que $x^n \to x^0,\ f_n \underset{w}{\to} f_0$., alors $f_0(t) \in F(t, x_t^0)$ p.p. $t \in [0,T]$ (voir [39]). dés que la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe analytique [49], l'opérateur
$s \to AS(t-s)$ est continu pour la topologie uniforme sur $[0,t)$ à partir de l'estimation

$$\begin{aligned}
\|(-A)S(t-s)h(s,x_s)\| &= \left\|(-A)^{1-\alpha}S(t-s)(-A)^{\alpha}h(s,x_s)\right\| \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}(d_1 \|x_s\|_{C([-r,0],E)} + d_2) \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}(d_1 \|x\|_{C([-r,T],E)} + d_2)
\end{aligned}$$

et du théorème de Bochner il suit que $AS(t-s)h(s,x_s)$ est intégrable sur $[0,t)$.

On démontre maintenant le résultat principal de ce chapitre

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses $(F1) - (F4)$ et (H) sont vérifiées . Si*

$$\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \max\{\omega, \theta, d_1\} < 1$$

alors l'ensemble des mild solutions du problème (3.1)-(3.2) est un sous ensemble compact non vide de l'espace $C([-r,T],E)$.

Preuve. Dans l'espace $C([-r,T],E)$, on définit l'opérateur
$\Gamma : C([-r,T],E) \to P(C([-r,T],E))$ da la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma(x)(t) &= \{y \in C([-r,T],E) : y(t) = \varphi(t),\ t \in [-r,0] \quad \text{et} \\
y(t) &= \Upsilon(f)(t) + h(t,x_t) + \int_0^t AS(t-s)h(s,x_s)ds;\ \textit{pour}\ t\ \in [0,T]
\end{aligned}\right\}$$

où $f \in sel_F(x)$, et l'opérateur $\Upsilon : L^1([0,T],E) \to C([0,T],E)$ est défini par

$$\Upsilon(f)(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,\ t \in [0,T]$$

avec $x_0 = \varphi(0) - h(0,\varphi)$.

Remarque 3.2.1 *Il est clair que l'opérateur Γ est bien défini, et les points fixes de Γ sont les mild solutions du problème (3.1)-(3.2).*

On divise la preuve du théorème en quatre étapes.

Etape 1. Le multivoque Γ est fermé.

Le multivoque Γ peut être écrit sous la forme $\Gamma = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i$ où les multivoques $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$ sont définis comme suit :

Le multivoque $\Gamma_1 : C([-r, T], E) \to P(C([-r, T], E))$ avec

$$\Gamma_1(x)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - h(0, \varphi), & t \in [-r, 0], \\ \Upsilon(f)(t), & t \in [0, T] \end{cases}$$

où $f \in Sel_F(x)$, le multivoque $\Gamma_2 : C([-r, T], E) \to C([-r, T], E)$ avec

$$\Gamma_2(x)(t) = \begin{cases} h(0, \varphi), & t \in [-r, 0], \\ h(t, x_t), & t \in [0, T] \end{cases}$$

et le multivoque $\Gamma_3 : C([-r, T], E) \to C([-r, T], E)$ avec

$$\Gamma_3(x)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r, 0] \\ \int_0^t AS(t-s)h(s, x_s)ds, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Soient $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}, \{z^n\}_{n=1}^{\infty}, x^n \to x^0, z^n \in \Gamma((x^n), n \geq 1,$ et $z^n \to z^0$. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0, T], E)$ une suite quelconque telle que, pour $n \geq 1$

$$f_n(t) \in F(t, x_t^n), p.p.\ t \in [0, T],$$

et

$$z^n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-r, 0], \\ \Upsilon(f_n)(t) + h(t, x_t^n) + \int_0^t AS(t-s)h(s, x_s^n)ds, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Comme $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu (voir [20]), l'opérateur Υ vérifie les properiétés $(S1)$ et $(S2)$ du Théorème 2.5.1, en utilisant l'hypothèse $(F3)$ on trouve que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est intégrablement bornée. L'hypothèse $(F4)$ implique

$$\chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq \kappa(t)\chi(\{x^n(t)\}_{n=1}^{\infty} = 0$$

p.p. $t \in [0, T]$, c.a.d., l'ensemble $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact p.p. $t \in [0, T]$, ainsi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite semi-compacte. Donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est faiblement compacte dans $L^1([0, T], E)$ alors on peut supposer sans perdre la généralité, que $f_n \underset{w}{\to} f_0$.

En appliquant le Théorème 2.5.1 , $\Upsilon(f_n) \to \Upsilon(f_0)$ dans $C([0,T],E)$.En outre, en utilisant le fait que l'opérateur sel_F est fermé, on a $f_0 \in sel_F(x^0)$. Par quenséquent

$$
\begin{aligned}
z_1^n(t) \quad &= \quad \begin{cases} \varphi(t) - h(0,\varphi), & t \in [-r,0], \\ \Upsilon(f_n)(t), & t \in [0,T]. \end{cases} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} \quad z_1^0(t) = \begin{cases} \varphi(t) - h(0,\varphi), & t \in [-r,0], \\ \Upsilon(f_0)(t), & t \in [0,T] \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Dans l'espace $C([-r,T],E)$, avec $f_0 \in sel_F(x^0)$.

Dans l'autre membre, on utilise $(H)-(iii)$, pour $t \in [0,T]$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\|h(t,x_t^n) - h(t,x_t^0)\right\| &\leq \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|(-A)^{\alpha} h(t,x_t^n) - (-A)^{\alpha} h(t,x_t^0)\right\| \\
&\leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|x_s^n - x_s^0\right\|_{C([-r,0],E)} \\
&\leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)}.
\end{aligned}
$$

Il suit que

$$
\left\|\Gamma_2(x^0) - \Gamma_2(x^n)\right\|_{C([-r,T],E)} \leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)} \tag{3.4}
$$

on utilise les hypothèses $(H)-(ii)$ et l'estimation dans la famille $\{(-A)^{1-\alpha}S(t)\}_{t>0}$, pour chaque $t \in [0,T]$ on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \left[AS(t-s)h(s,x_s^n) - AS(t-s)h(s,x_s^0)\right] ds \right\| \\
\leq\ & \int_0^t \left\|AS(t-s)h(s,x_s^n) - AS(t-s)h(s,x_s^0)\right\| ds \\
\leq\ & \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)} \int_0^t \left\|(-A)^{1-\alpha} S(t-s)\right\| ds \\
\leq\ & \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)} \int_0^t \tfrac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\
\leq\ & \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \frac{C_{1-\alpha} T^{\alpha}}{\alpha} \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)}
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Gamma_3(x^0) - \Gamma_3(x^n)\right\|_{C([-r,T],E)} \\
&\qquad \leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \frac{C_{1-\alpha} T^{\alpha}}{\alpha} \left\|x^n - x^0\right\|_{C([-r,T],E)}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Des és (3.3)-(3.5) , il découle que $z^n \to z^0$ dans l'espace $C([-r,T],E)$, avec

$$z^0(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t), & t \in [-r,0], \\ \Upsilon(f_0)(t) + h(t,x_t^0) + \int_0^t AS(t-s)h(s,x_s^0)ds, & t \in [0,T]. \end{array} \right\}$$

et $f_0 \in sel_F(x^0)$. Ainsi $z^0 \in \Gamma(x^0)$ et donc Γ est fermé.
Maintenant dans l'espace $C([-r,T],E)$ on considère la mesure de non compacité Θ définit par : pour tout sous ensemble borné $\Omega \subset C([-r,T],E)$

$$\Theta(\Omega) = (\chi(\Omega([-r,0])), \Psi(\Omega), mod_c\Omega)$$

où

$$\Psi(\Omega) = \sup_{t\in[0,T]} \left(e^{-Lt} \sup_{s\in[0,t]} \chi(\Omega(s)) \right)$$

et $mod_c\Omega$ est le module de continuité de l'ensemble $\Omega \subset C([-r,T],E)$ donné par :

$$mod_c\Omega = \limsup_{\delta\to 0} \max_{x\in\Omega |t_1-t_2|\le\delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|$$

et $L > 0$ est choisi de sorte que

$$\begin{aligned} M \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-L(t-s)}\kappa(s)ds &\le q_1 < 1 \\ \omega \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} e^{-L(t-s)}ds &\le q_2 < 1 \\ d_1 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{e^{-L(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}} c_{1-\alpha}ds &\le q_3 < 1 \\ M \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-L(t-s)}\beta(s)ds &\le q_4 < 1 \end{aligned}$$

où M est une constante, de l'estimation de la famille $\{S(t)\}_{t\ge 0}$, les constantes d_1, d_2 de $(H)-(i)$, la constante ω de $(H)-(ii)$, la fonction β des hypothèses $(F3)$ et la fonction κ de l'hypothèse $(F4)$. D'après le Théorème d'Ascoli Arzelá, la mesure Θ est une mesure de non compacité non sigulière et régulière dans $C([-r,T],E)$.

Remarque 3.2.2 *Si $\xi \in L^1([0,T],E)$,il est clair que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-L(t-s)}\xi(s)ds \underset{L\to+\infty}{\to} 0.$$

Etape 2. L'opérateur multivoque Γ est Θ-condensant sur tout sous ensemble borné de $C([-r,T],E)$.

Soit $\Omega \subset C([-r,T],E)$ un sous ensemble borné tel que

$$\Theta(\Gamma(\Omega)) \geq \Theta(\Omega), \tag{3.6}$$

où l'inégalité est prise dans le sens de l'ordre dans $\mathbb{R}^3$ induit par le cône positif $\mathbb{R}^3_+$. On peut montrer que (3.6) implique que Ω est relativement compact dans $C([-r,T],E)$. De l'inégalité (3.6) on a directement

$$\chi(\Omega([-r,0])) = 0. \tag{3.7}$$

En effet nous avons

$$\chi(\Gamma(\Omega)[-r,0]) = \chi\{\varphi([-r,0])\} = 0 \geq \chi(\Omega[-r,0]) \geq 0.$$

On remarque que de (3.7) on a

$$\sup_{\alpha\in[-r,0]} \chi(\Omega(\alpha)) = 0.$$

Par conséquent, pour $s \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in[s-r,s]} \chi(\Omega(\alpha)) &\leq \sup_{\alpha\in[-r,0]} \chi(\Omega(\alpha)) + \sup_{\alpha\in[0,s]} \chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,s]} \chi(\Omega(\alpha)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Maintenant on donne une majoration de $\chi(\{f(s), f \in sel_F(\Omega)\}$, pour $s \in [0,t]$, $t \leq T$. En utilisant (3.8) et de l'hypothèse $(F4)$ on a

$$\begin{aligned}\chi(\{f(s), f \in sel_F(\Omega)\} &\leq \chi(F(s,\Omega_s)) \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s)e^{-Ls} \sup_{\alpha\in[-r,0]} \chi(\Omega_s(\alpha)) \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s)e^{-Ls} \sup_{\alpha\in[s-r,s]} \chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s)e^{-Ls} \sup_{\alpha\in[0,s]} \chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s) \sup_{s\in[0,t]} e^{-Ls} \sup_{\alpha\in[0,s]} \chi(\Omega(\alpha)). \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s) \sup_{s\in[0,T]} e^{-Ls} \sup_{\alpha\in[0,s]} \chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Ls}\kappa(s)\Psi(\Omega)\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.5.2 avec $D = M$, on a

$$\chi(\{\Upsilon(f)(s), f \in sel_F(\Omega)\} \leq M\Psi(\Omega)\int_0^s e^{L\lambda}\kappa(\lambda)d\lambda.$$

Donc,

$$\sup_{s\in[0,t]}\chi(\{\Upsilon(f)(s), f \in sel_F(\Omega)\} \leq M\Psi(\Omega)\int_0^t e^{L\lambda}\kappa(\lambda)d\lambda.$$

En multipliant les deux membres par e^{-Lt} et en gardant en tète la définition de q_1, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\sup_{s\in[0,t]}\chi(\{\Upsilon(f)(s), f &\in sel_F(\Omega)\}) \\ &= \Psi(\{\Upsilon(f),\ f \in sel_F(\Omega)\}) \\ &\leq \Psi(\Omega)M\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-L(t-\lambda)}\kappa(\lambda)d\lambda \\ &\leq q_1\Psi(\Omega) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Comme la mesure χ est monotone, de $(H)-(iii)$ et du Lemme 3.1.1, $s \in [0,t]$, $t \leq T$

$$\begin{aligned}\chi(h(s,\Omega_s)) &\leq e^{Lt}e^{-Lt}\chi\left((-A)^{-\alpha}(-A)^{\alpha}h(s,\Omega_s)\right) \\ &\leq e^{Lt}\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| e^{-Lt}\sup_{\alpha\in[0,s]}\chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Lt}\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| e^{-Lt}\sup_{\alpha\in[0,t]}\chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Lt}\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\sup_{\alpha\in[0,t]}\chi(\Omega(\alpha)) \\ &\leq e^{Lt}\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\Psi(\Omega).\end{aligned}$$

Alors,

$$\sup_{s\in[0,t]}\chi(h(s,\Omega_s)) \leq .e^{Lt}\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\Psi(\Omega)$$

En multipliant les deux membres par e^{-Lt}, on a

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\sup_{s\in[0,t]}\chi(h(s,\Omega_s)) \leq .\omega\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\Psi(\Omega). \qquad (3.10)$$

Le multivoque $G : s \to AS(t-s)h(s,\Omega_s)$, $s \in [0,t)$ est intégrable et intégrablement borné. En effet pour tout $x \in \Omega$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(-A)S(t-s)h(s,x_s)\| &= \left\|(-A)^{1-\alpha}S(t-s)(-A)^{\alpha})h(s,x_s)\right\| \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}(d_1\|x_s\|_{C([-r,0],E)}+d_2) \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}(d_1\|x\|_{C([-r,T],E)}+d_2) \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}(d_1\sup_{x\in\Omega}\|x\|_{C([-r,T],E)}+d_2)
\end{aligned}$$

En utilisant les hyporhèses $(H)-(ii)$ et le Lemme 3.1.1, on aura

$$\begin{aligned}
\chi\left(AS(t-s)h(s,x_s)\right) &= \chi\left((-A)^{1-\alpha}(-A)^{\alpha}S(t-s)h(s,x_s)\right) \\
&\leq \left\|(-A)^{1-\alpha}S(t-s)\right\|\chi\left((-A)^{\alpha}h(s,x_s)\right) \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}\omega\sup_{\lambda\in[0,s]}\chi(\Omega(\lambda)) \\
&\leq \frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}e^{Ls}\sup_{s\in[0,T]}e^{-Ls}\sup_{\lambda\in[0,s]}\chi(\Omega(\lambda)) \\
&\leq \frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}}e^{Ls}\Psi(\Omega)
\end{aligned}$$

Du Théoréme 2.5.2, on obtient pour tout $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
\chi\left(\int_0^s(-A)S(t-\lambda)h(\lambda,x_\lambda)d\lambda\right) &\leq \Psi(\Omega)\int_0^s\frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}e^{L\lambda}d\lambda \\
&\leq \Psi(\Omega)\int_0^t\frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}e^{L\lambda}d\lambda.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{s\in[0,t]}\chi\left(\int_0^s(-A)S(t-\lambda)h(\lambda,x_\lambda)d\lambda\right) \leq \Psi(\Omega)\int_0^t\frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}e^{L\lambda}d\lambda.$$

En multipliant les deux membres par e^{-Lt} et en gardant en tête la définition de q_2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}e^{-Lt}\sup_{s\in[0,t]}\chi\left(\int_0^s(-A)S(t-\lambda)h(\lambda,x_\lambda)d\lambda\right) \\
\leq\ &\Psi(\Omega)\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}e^{-L(t-\lambda)}d\lambda \\
\leq\ &q_2\Psi(\Omega). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Des ingalités (3.9)-(3.11), Remarque 3.2.2 et le fait que $\omega \|(-A)^{-\alpha}\| < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(\Gamma(\Omega)) &= \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sup_{s\in[0,t]} \chi \left\{ \Upsilon(f)(s) + h(s,\Omega_s) + \int_0^s AS(t-s)h(\lambda,\Omega_\lambda)d\lambda \right\} \\
&\leq \Psi(\Omega)\Big[\sup_{t\in[0,T]} M \int_0^t e^{-L(t-s)}\kappa(s)ds + \left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\omega \\
&\quad + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{\omega C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} e^{-L(t-S)} ds \Big] \\
&\leq \Psi(\Omega)\left[q_1 + q_2 + \omega \left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\right] \\
&< \Psi(\Omega).
\end{aligned}$$

En utilisant linégalité (3.6), la dernière inégalité implique que

$$\Psi(\Omega) = 0. \tag{3.12}$$

On va donner maintenant une majoration de $mod_c\Gamma(\Omega)$.

On a montré que

$\chi\left\{\Upsilon(f)(t),\ f \in sel_F(x), x \in \Omega\right\} = 0$, pour tout $t \in [0,T]$. Des conditions $(F3)$ et $(F4)$ on a $\{f \in sel_F(x), x \in \Omega\}$ est semi-compact dans $L^1([0,T],E)$, et par conséquent l'ensemble

$$\{y; y(t) = \Upsilon f(t), t \in [0,T], f \in sel_F(x), x \in \Omega\}$$

est relativement compact dans $C([0,T],E)$ (voir [20]). Donc, l'ensemble

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(\Omega) &= \{y(t) = \varphi(t) - h(0,\varphi), t \in [-r,0]; \\
&\quad\ y(t) = \Upsilon(f)(t), t \in [0,T], f \in sel_F(x), x \in \Omega\}
\end{aligned}$$

est relativement compact dans $C([-r,T],E)$. Donc

$$mod_c\Gamma_1(\Omega) = 0. \tag{3.13}$$

Soit $\delta > 0$, et $t, t' \in [0,T]$, tels que pour $0 \leq t' - t < \delta$, et $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(x)(t) - \Gamma_2(x)(t')\| &= \|h(t, x_t) - h(t', x_{t'})\| \leq \\
&\leq \left\|(-A)^{-\alpha}(-A)^{\alpha} h(t, x_t) - (-A)^{-\alpha}(-A)^{\alpha} h(t', x_{t'})\right\| \\
&\leq \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left[\theta \left\|x_t - x_{t'}\right\|_{C([-r,0],E)} + \sup_{t'-t<\delta} \vartheta(t'-t)\right] \\
&\leq \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left[\theta \sup_{\substack{\alpha\in[-r,0] \\ t'-t<\delta}} \|x(t+\alpha) - x(t'+\alpha)\| + \sup_{t'-t<\delta} \vartheta(t'-t)\right] \\
&\leq \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left[\theta \sup_{\substack{s,s'\in[t-r,t'] \\ |s-s'|<\delta}} \|x(s) - x(s')\| + \sup_{t'-t<\delta} \vartheta(t'-t)\right] \\
&\leq \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left[\theta \sup_{\substack{s,s'\in[-r,T] \\ |s-s'|<\delta}} \|x(s) - x(s')\| + \sup_{t'-t<\delta} \vartheta(t'-t)\right].
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{t'-t<\delta} \vartheta(t'-t) = \vartheta(0) = 0.$$

Il en résulte que

$$mod_c\, \Gamma_2(\Omega) \leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| mod_c \Omega. \tag{3.14}$$

Maintenant on peut montrer que l'ensemble

$$\Gamma_3(\Omega) = \left\{ y; y(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \in [-r,0], \\ \int_0^t A e^{A(t-s)} h(s, x_s) ds, & t \in [0,T], \end{array} \right. \right\}$$

où $x \in \Omega$, est équicontinu dans $C([-r,T],E)$. Soit $0 \leq t \leq t' \leq T$, et $x \in \Omega$. on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t'} \left[AS(t'-s) h(s, x_s) - \int_0^t AS(t-s) h(s, x_s) \right] ds \right\| \\
\leq\ & \left\| (S(t'-t) - I) \int_0^t AS(t-s) h(s, x_s) ds \right\| + \left\| \int_t^{t'} AS(t'-s) h(s, x_s) ds \right\| \\
\leq\ & \left\| (S(t'-t) - I) \int_0^t AS(t-s) h(s, x_s) ds \right\| \\
& + C_{1-\alpha} (d_1 \sup_{x\in\Omega} \|x\|_{C([-r,T],E)} + d_2) \frac{(t'-t)^{\alpha}}{\alpha}
\end{aligned}$$

dés que $\chi\left(\int_0^t AS(t-s)h(s,\Omega_s)ds\right) = 0$, c.a.d., l'ensemble $\left\{\int_0^t AS(t-s)h(s,\Omega_s)ds\right\}$ est relativement compact pour tout $t \in [0,T]$, le premier terme du membre à droite converge vers zéro quand $t' \to t$ uniformément dans $x \in \Omega$. Comme conséquence, on obtient

$$mod_c\Gamma_3(\Omega) = 0. \tag{3.15}$$

Dés que

$$mod_c\Gamma(\Omega) \leq \sum_{i=1}^{3} mod_c\Gamma_i(\Omega).$$

Des inégalités (3.13)-(3.15), on obtient

$$mod_c\Gamma(\Omega) \leq \theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| mod_c\Omega.$$

Comme $\theta \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| < 1$, de l'inégalité (3.6) on a

$$mod_c(\Omega) = 0. \tag{3.16}$$

En fin des inégalités (3.7), (3.12) et (3.16) on obtient

$$\Theta(\Omega) = (0,0,0).$$

Ceci montre que Ω est relativement compact, ce qui achéve la preuve de l'étape 2.

Maintenant dans l'espace $C([-r,T],E)$ on introduit la norme, équivalente donée par

$$\|x\|_* = \sup_{t\in[-r,0]} \|x(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sup_{s\in[0,t]} \|x(s)\|$$

On considére la boule

$$B_r(0) = \{x \in C([-r,T],E); \|x\|_* \leq r\}$$

où r est une constante choisie de sorte que

$$r \geq \frac{\|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \|h(0,\varphi)\| + M\left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1}\right) + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha}}{1 - d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\|}$$

où $x_0 = \varphi(0) - h(0,\varphi)$. Dès que $d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| < 1$, la dernière inégalité implique que

$$d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| r+\|\varphi\|_{C([-r,0],E)}+\|h(0,\varphi)\|+M\left(\|x_0\|+\|\beta\|_{L^1}\right)+d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \leq r.$$

Etape 3. Le multivoque Γ applique la boule $B_r(0)$ en elle même .

Soit $x \in B_r(0)$ et $y \in \Gamma(x)$,

$$\begin{aligned} y(t) = S(t)x_0 + \quad h(t,x_t) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ + \int_0^t AS(t-s)h(s,x_s)ds, \quad t \in [0,T] \\ y(t) = \varphi(t), t \in [-r,0] \end{aligned}$$

où $f \in sel_F(x)$. On remarque en premier que

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

où

$$y_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) - h(0,\varphi), & t \in [-r,0] \\ y(t) = \Upsilon f(t), & t \in [0,T] \end{cases},$$

$$y_2(t) = \begin{cases} h(0,\varphi), & t \in [-r,0] \\ h(t,x_t) & t \in [0,T] \end{cases},$$

et

$$y_3(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r,0], \\ \int_0^t AS(t-s)h(s,x_s)ds, & t \in [0,T]. \end{cases}.$$

Donc,

$$\|y\|_\star \leq \|y_1\|_\star + \|y_2\|_\star + \|y_3\|_\star .$$

On donne maintenant une estimation pour chaque $\|y_i\|_\star$; $i = 1,2,3$. Pour $s \in [-r,0]$, on a

$$\sup_{s\in[-r,0]} \|y_1(s)\| = \sup_{s\in[-r,0]} \|\varphi(t) - h(0,\varphi)\| \leq \|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \|h(0,\varphi)\| . \quad (3.17)$$

Pour $s \in [0,t]$, $t \leq T$, en utilisant l'hypothèse (F_3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|y_1(s)\| &\leq \|S(s)x_0\| + \int_0^s \|S(s-\tau)\| \, \|f(\tau)\| \, d\tau \\
&\leq M \|x_0\| + M \|\beta\|_{L^1} + M \int_0^s \beta(\tau) \|x_\tau\|_2 \, d\tau \\
&\leq M \|x_0\| + M \|\beta\|_{L^1} + M \int_0^s \beta(\tau) \sup_{\mu \in [\tau - r, \tau]} \|x(\mu)\| \, d\tau \\
&\leq M \|x_0\| + M \|\beta\|_{L^1} \\
&+ M \int_0^s e^{L\tau} \beta(\tau) \left[e^{-L\tau} \sup_{\mu \in [-r,0]} \|x(\mu)\| + e^{-L\tau} \sup_{\mu \in [0,\tau]} \|x(\mu)\| \right] d\tau \\
&\leq M \|x_0\| + M \|\beta\|_{L^1} \\
&+ M \int_0^s e^{L\tau} \beta(\tau) \left[\sup_{\mu \in [-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{\tau \in [0,T]} e^{-L\tau} \sup_{\mu \in [0,\tau]} \|x(\mu)\| \right] d\tau \\
&\leq M \left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1} \right) + M \|x\|_\star \int_0^s e^{L\tau} \beta(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{s \in [0,t]} \|y_1(s)\| \leq M \left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1} \right) + M \|x\|_\star \int_0^t e^{L\tau} \beta(\tau) d\tau$$

On multiplie les deux membres par e^{-Lt} et en gardant en tête la définition de q_4, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,T]} e^{-Lt} \sup_{s \in [0,t]} \|y_1(s)\| &\leq M \left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1} \right) + \|x\|_\star M \sup_{t \in [0,T]} \int_0^t e^{-L(t-\tau)} \beta(\tau) d\tau \\
&\leq M \left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1} \right) + q_4 \|x\|_\star . \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Des inégalités (3.17) et (3.18), on obtient

$$\|y_1\|_\star \leq \|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \|h(0,\varphi)\| + M \left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1} \right) + q_4 \|x\|_\star \qquad (3.19)$$

On donne maintenant une majoration de $\|y_2\|_\star$. Pour $s \in [-r,0]$, on a

$$\sup_{s \in [-r,0]} \|y_2(s)\|_\star = \sup_{s \in [-r,0]} \|h(0,\varphi)\| = \|h(0,\varphi)\| . \qquad (3.20)$$

Pour $s \in [0,t]$, $t \leq T$, en utilisant les hypothèses $(H)-(i)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|y_2(s)\| &\leq \|h(t,x_t)\| \\
&\leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \|x_s\|_{C([-r,0],E)} \\
&\leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \left[\sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{\mu\in[0,s]} \|x(\mu)\|\right] \\
&\leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| e^{Lt} \left[\sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + e^{-Lt} \sup_{\mu\in[0,t]} \|x(\mu)\|\right] \\
&\leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| e^{Lt} \left[\sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sup_{\mu\in[0,t]} \|x(\mu)\|\right] \\
&\leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| e^{Lt} \|x\|_\star
\end{aligned}$$

il suit que

$$\sup_{s\in[0,t]} \|y_2(s)\| \leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + e^{Lt} d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \|x\|_\star .$$

En multipliant les deux membres par e^{-Lt}, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sup_{s\in[0,t]} \|y_2(s)\| \leq d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \|x\|_\star . \tag{3.21}$$

Des inégalités (3.20) et (3.21), on aura

$$\begin{aligned}
\|y_2\|_\star &\leq \|h(0,\varphi)\| + d_2 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \\
&\quad + d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \|x\|_\star .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Il reste à donner une estimation de $\|y_3\|_\star$. Pour $s \in [-r,0]$, on a

$$\sup_{s\in[-r,0]} \|y_3(s)\| = 0. \tag{3.23}$$

Pour $s \in [0,t]$, $t \leq T$, en utilisant $(H)-(i)$, on a

$$\begin{aligned}
\|y_3(s)\| &= \left\|\int_0^s AS(s-\tau)h(\tau,x_\tau)d\tau\right\| \\
&\leq d_1 \int_0^s \frac{C_{1-\alpha}}{(s-\tau)^{1-\alpha}} \sup_{\mu\in[\tau-r,\tau]} \|x(\mu)\| d\tau + d_2 \int_0^s \frac{C_{1-\alpha}}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&\leq d_1 \int_0^s \frac{C_{1-\alpha}}{(s-\tau)^{1-\alpha}} \left[\sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{\mu\in[0,\tau]} \|x(\mu)\|\right] d\tau + d_2 \int_0^T \frac{C_{1-\alpha}}{(T-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&\leq d_1 \int_0^t \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} e^{L\tau} d\tau \left[\sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{\tau\in[0,T]} e^{-L\tau} \sup_{\mu\in[0,\tau]} \|x(\mu)\|\right] + d_2 C_{1-\alpha} \frac{T^\alpha}{\alpha} \\
&\leq d_1 \int_0^s \frac{C_{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} e^{L\tau} d\tau \|x\|_\star + d_2 C_{1-\alpha} \frac{T^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

Donc
$$\sup_{s\in[0,t]} \|y_3(s)\| \leq \|x\|_\star d_1 \int_0^t \frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}} e^{L\tau} d\tau + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha}.$$
En multipliant les deux membres par e^{-Lt} et en gardant en tête la définition de q_3, on obtient
$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sup_{s\in[0,t]} \|y_3(s)\| \\
\leq\ & \|x\|_\star \left(d_1 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}} e^{-L(t-\tau)} d\tau \right) + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \\
\leq\ & q_3 \|x\|_\star + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$
Des inégalités (3.23) et (3.24), il suit que
$$\|y_3\|_\star \leq q_3 \|x\|_\star + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \qquad (3.25)$$
En fin de (3.19), (3.22) , (3.25) et la Remarque 3.2.2, on obtient
$$\begin{aligned}
\|y\|_\star &\leq \|y_1\|_\star + \|y_2\|_\star + \|y_3\|_\star \\
&\leq \|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \|h(0,\varphi)\| + M\left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1}\right) + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \\
&\quad + \left[d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + q_4 + q_3\right] \|x\|_\star \\
&\leq \|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \|h(0,\varphi)\| + M\left(\|x_0\| + \|\beta\|_{L^1}\right) + d_2 C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha} \\
&\quad + \left[d_1 \left\|(-A)^{-\alpha}\right\| + q_4 + q_3\right] r \\
&\leq r
\end{aligned}$$
D'après le Théorème 2.3.1, le problème (3.1)-(3.2) possède au moins une mild solution.

Etape 4. L'ensemble des solutions est compact.

L'ensmble des solutions est à priori borné.
En effet, si x est mild solution du problème (3.1)-(3.2), et la fonction $\upsilon(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ est telle que $\upsilon(t) = \sup_{\mu\in[0,t]} \|x(\mu)\|$, $t \in [0,T]$.

De ce qui précède, on a

$$
\begin{aligned}
\upsilon(t) &= \sup_{\mu\in[0,t]}\|x(\mu)\| \\
&\leq M\left(\|x_0\|+\|\beta\|_{L^1}\right)+M\int_0^t\beta(\tau)\left[\sup_{\mu\in[-r,0]}\|x(\mu)\|+\sup_{\mu\in[0,\tau]}\|x(\mu)\|\right]d\tau \\
&\quad +d_2\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|+d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\left[\sup_{\mu\in[-r,0]}\|x(\mu)\|+\sup_{\mu\in[0,t]}\|x(\mu)\|\right] \\
&\quad +d_1\int_0^t\frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\left[\sup_{\mu\in[-r,0]}\|x(\mu)\|+\sup_{\mu\in[0,\tau]}\|x(\mu)\|\right]+d_2\int_0^t\frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq M\left(\|x_0\|+\|\beta\|_{L^1}\right)+d_2\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \\
&+ \left[M\|\beta\|_{L^1}+d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|+d_2C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right]\|\varphi\|_{C([-r,0],E)} \\
&\quad +d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\sup_{s\in[0,t]}\|x(s)\|+\int_0^t\left[M\beta(\tau)+d_1\frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right]\sup_{\mu\in[0,\tau]}\|x(\mu)\|\,d\tau \\
&\leq M\left(\|x_0\|+\|\beta\|_{L^1}\right)+d_2\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \\
&\quad +\left[M\|\beta\|_{L^1}+d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|+d_2C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right]\|\varphi\|_{C([-r,0],E)} \\
&\quad +d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|\upsilon(t)+\int_0^t\left[M\beta(\tau)+d_1\frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right]\upsilon(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

il résulte que

$$
\upsilon(t)\leq\frac{1}{1-d_1\|(-A)^{-\alpha}\|}\left[\xi+\int_0^t\left[M\beta(\tau)+d_1\frac{C_{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right]\upsilon(\tau)d\tau\right]
$$

où

$$
\begin{aligned}
\xi &= M\left(\|x_0\|+\|\beta\|_{L^1}\right)+d_2\left\|(-A)^{-\alpha}\right\| \\
&\quad +\left[M\|\beta\|_{L^1}+d_1\left\|(-A)^{-\alpha}\right\|+d_2C_{1-\alpha}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right]\|\varphi\|_{C([-r,0],E)}.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité du type Gromwall-Bellmann, on obtient

$$
\|\upsilon(t)\|\leq\frac{\xi}{1-d_1\|(-A)^{-\alpha}\|}e^\gamma
$$

où,

$$
\gamma=\frac{1}{1-d_1\|(-A)^{-\alpha}\|}\left[M\|B\|_{L^1}+T^\alpha\frac{d_1C_{1-\alpha}}{\alpha}\right].
$$

Donc,
$$\upsilon(T) = \sup_{\mu\in[0,T]} \|x(\mu)\| \leq \frac{\xi}{1 - d_1 \|(-A)^{-\alpha}\|} e^{\gamma}.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned}\|x\|_{C([-r,T],E)} &\leq \sup_{\mu\in[-r,0]} \|x(\mu)\| + \sup_{\mu\in[0,T]} \|x(\mu)\| \\ &\leq \|\varphi\|_{C([-r,0],E)} + \frac{\xi}{1 - d_1 \|(-A)^{-\alpha}\|} e^{\gamma}.\end{aligned}$$
Pour terminer la preuve on applique le Théorème 2.3.2.

Chapitre 4

Inclusions abstraites avec des conditions aux limites de type périodiques dans un espace de Banach

Dans l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans un espace de Banach réel E, on étudie le problème aux limites périodique pour des inclusions abstraites de la forme

$$\begin{cases} x \in S\,(x(0),\, sel_F(x)) \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{4.1}$$

où, $F : [0, T] \times \mathcal{K} \to 2^E/\emptyset$ est un multivoque à valeurs convexes et compactes, $\mathcal{K} \subset E$ un sous ensemble non vide de E convexe et fermé, sel_F est l'opérateur de superposition engendré par F et $S : \mathcal{K} \times L^1([0, T]; E) \to C([0, T]; \mathcal{K})$ est un opérateur abstrait.

Comme application, on donne quelques résultats pour des problèmes aux limites périodiques pour des inclusions différentielles non linéaires engendrés par des opérateurs m-accrétifs ne générant pas nécessairement des semi-groupes compacts.

4.1 Préliminaires

On donne quelques résultats de base sur les opérateurs m-accrétifs.

• Un opérateur multivoque $A : D(A) \subset E \to P(E)$: est dit accrétif si :
(i) $\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|$, pour tout $\lambda > 0$ et $y_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$;

(ii) m-accrétif, s'il est accrétif et $R(I + A) = E$, (I désigne l'identité dans E).

• Si A est m-accrétif, les résolvantes $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} : E \to D(A)$ sont des applications non expansives , i.e. $\|J_\lambda(x) - J_\lambda(y)\| \leq \|x - y\|$ sur $E \times E$, pour tout $\lambda > 0$.

• Si A est m-accrétif, il génère un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'applications non expansives $T(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$, données par ce qu'on appelle la formule exponentielle, i.e.

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} J^n_{t/n}x \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \overline{D(A)},$$

et $T(t)x$ est la solution intégrale du problème initial :

$$\begin{cases} y'(t) \in -Ay(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = x. \end{cases}$$

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit compact si $T(t)B$ est compact pour tout $t > 0$ et $B \subset \overline{D(A)}$ borné, en plus $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est équicontinu si la famille des fonctions $\{T(.)x : x \in B\}$ est équicontinue en tout $t > 0$, et pour $B \subset \overline{D(A)})$ borné.

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est compact si et seulement si $T(t)$, $t \geq 0$ est équicontinu et J_λ est une application compacte pour un certain (ou, équivalent, pour tout) $\lambda > 0$.

Pour plus de détails voir par exemple [9].

4.2 Formulation du problème, énoncé du résultat

Notation

Tout au long de ce chapitre, $0 < T < +\infty$ est un temps fixé, E un espace de Banach réel quelconque muni de la norme $\|.\|$, $\mathcal{K}$ un sous ensemble convexe fermé non vide de E, $C([0,T];\, E)$ est l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\, T]$ à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme, $L^1([0,T];\, E)$ est l'espace de toutes les fonctions Bochner sommable , χ mesure de non compacité de Hausdorff dans E et $C([0,T];\mathcal{K})$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur $[0,\, T]$ à valeurs dans $\mathcal{K}$.
Il est clair que $C([0,T];\mathcal{K})$ est un sous ensemble convexe fermé de $C([0,T];E)$.

Hypothèses

Le multivoque $F : [0,T]\times\mathcal{K} \to Kv(E)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$F_1)$ le multivoque $F : (.,u) \to Kv(E)$ a une sélection fortement mesurable pour tout $u \in \mathcal{K}$;

$F_2)$ le multivoque $F : (t,\cdot) \to Kv(E)$ est s.c.s. p.p. $t\in[0,T]$;

$F_3)$ pour tout ensemble borné non vide $\Omega \subset \mathcal{K}$ il existe une fonction $U_\Omega(.) \in L^1([0,T];\mathbb{R}^+)$ telle que, pour tout $x\in\Omega$ et p.p. $t\in[0,T]$

$$\|F(t,x)\| \leq U_\Omega(t)\,;$$

$F_4)$ il existe une fonction $\kappa(.) \in L^1([0,T];\mathbb{R}^+)$ telle que pour tout ensemble borné $\Omega\subset\mathcal{K}$

$$\chi(F(t,\Omega)) \leq \kappa(t)\,\chi(\Omega), p.p.\ t\in[0,T].$$

L'opérateur abstrait $S : \mathcal{K}\times L^1([0,T];E) \to C([0,T];\mathcal{K})$ vérifie les conditions suivantes :

$S_0)$ pour tout $x_0\in\mathcal{K}$ et $f\in L^1([0,T];E)$:

$$S(x_0,f)(0) = x_0$$

$S_1)$ il existe $M>0$ et $p>0$ tels que

$$\|S(x_0,f)(t) - S(y_0,g)(t)\| \leq M\int_0^t \|f(s)-g(s)\|\,ds + e^{-pt}\,\|x_0-y_0\|$$

pour tout $f,g\in L^1([0,T];E)$, $0\leq t\leq T$ et $x_0,\, y_0\in\mathcal{K}$;

$S_2)$ pour $K \subset E$ compact quelconque et la suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1([0,T];E)$ telle que $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset K$ $p.p.t\in[0,T]$ la convergence faible $f_n \underset{w}{\to} f_0$ implique que $S(x_0,f_n)\to S(x_0,f_0)$ dans $C([0,T];E)$ pour tout $x_0\in\mathcal{K}$;

S_3) Pour tout $g_0, g_1, g_2 \in L^1([0,T],E)$ et $x_0 \in \mathcal{K}$ si $S(x_0,g_1) = S(x_0,g_2)$, alors

$$S(x_0, \mathbf{1}_{[0,\theta]}g_1 + \mathbf{1}_{[\theta,T]}g_0) = S(x_0, \mathbf{1}_{[0,\theta]}g_2 + \mathbf{1}_{[\theta,T]}g_0),$$

pour tout $\theta \in [0,T]$, où $\mathbf{1}_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$.

Remarque 4.2.1 *On rappelle que , des conditions $F_1) - F_3)$, on a pour toute fonction continue $x : [0,T] \to \mathcal{K}$ il existe une sélection sommable $f : [0,T] \to E$; voir théorème 1.3.5 dans [39]. Par conséquent , l'opérateur de superposition*

$$\begin{gathered}\mathrm{sel}_F : C([0,T];\mathcal{K}) \to \mathcal{P}(L^1([0,T];E)) \\ \mathrm{sel}_F(x) = \big\{f \in L^1([0,T];E) : \ f(t) \in F(t,x(t)),\ p.p.t \in [0,T]\big\}\end{gathered}$$

est bien défini. En plus comme $C([0,T];\mathcal{K})$ est fermé ,alors d'aprés le Lemme 5.1.1 dans [39] il est faiblement fermé. Plus précisement :

Lemme 4.2.1 *Si les suites $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];\mathcal{K})$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$, $f_n(t) \in F(t,x^n(t))$, p.p. $t \in [0,T], n \geq 1$ sont telles que $x^n \to x^0$, $f_n \underset{w}{\longrightarrow} f_0$, alors $f_0(t) \in F(t,x^0(t))$ p.p. $t \in [0,T]$.*

Construction de l'opérateur associé au problème (4.1) .
Dans $C([0,T];\mathcal{K})$ on définit l'opérateur multivoque $\mathcal{F}$

$$\begin{cases} \mathcal{F} : C([0,T];\mathcal{K}) \to \mathcal{P}(C([0,T];\mathcal{K})), \\ \mathcal{F}(x) = \{S(S(x(0),f)(T),f) : f \in sel_F(x)\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

On remarque que les points fixes de l'opérateur $\mathcal{F}$ coïncident avec l'ensemble des solutions du problème (4.1). En effet, soit $x \in \mathcal{F}(x)$. Alors, il existe $f \in sel_F(x)$, telle que

$$x = S(S(x(0),f)(T),f). \tag{4.3}$$

De la condition S_0), on a

$$x(0) = S(S(x(0),f)(T),f)(0) = S(x(0),f)(T).$$

D'où,

$$x = S(x(0),f) \text{ avec } x(T) = S(x(0),f)(T) = x(0).$$

Soit maintenant , x une solution du problème (4.1). Alors, il existe $f \in \mathrm{sel}_F(x)$ telle que,

$$x = S(x(0),f) \text{ et } x(0) = x(T).$$

Il en résulte que $x = S(x(0), f) = S(x(T), f)$. Mais $x(T) = S(x(0), f)(T)$. Alors, $x = S(S(x(0), f)(T), f)$, ce qui veut dire que x est un point fixe de $\mathcal{F}$. Un tel opérateur a été exposé dans [36] pour l'étude du problème périodique pour une équation différentielle totalement non linéaire.

Mesure de non compacité associée.

soit $\chi_{\mathcal{K}}$ la fonction définie sur les sous ensembles bornés de $\mathcal{K}$ comme suit

$$\chi_{\mathcal{K}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0; \Omega \ \text{ a un } \ \varepsilon\text{-réseau } \ \text{dans}\, \mathcal{K}\};$$

Puisque $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe fermé de E, la fonction $\chi_{\mathcal{K}}$ définit une mesure de non compacité dans $\mathcal{K}$. En effet ; l'invariance de $\chi_{\mathcal{K}}$ par passage à la fermeture est évidente et l'invariance par passage à l'enveloppe convexe est une conséquence du fait que si $S \subset \mathcal{K}$ est un ε-réseau fini de l'ensemble Ω, alors $co\, S \subset \mathcal{K}$ est ε-réseau totalement borné de l'ensemble $co\, \Omega$. Il est facile de voir que $\chi_{\mathcal{K}}$ est une mesure de non compacité, monotone, non singulière et régulière dans $\mathcal{K}$ et $\chi(\Omega) \leq \chi_{\mathcal{K}}(\Omega)$ pour tout $\Omega \subset \mathcal{K}$.
Soit maintenant Ψ la fonction définie sur les sous ensembles bornés de $C([0,T];\mathcal{K})$ de la façon suivante

$$\Psi(\Omega) = \max_{\mathcal{D}\in\Delta(\Omega)} \Big(\chi_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}(0)),\, \vartheta(\mathcal{D}),\, \mathrm{mod}_c(\mathcal{D})\Big), \tag{4.4}$$

où

$$\vartheta(\mathcal{D}) = \sup_{t\in[0,T]} \chi_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}(t)), \tag{4.5}$$

$$\mathrm{mod}_c(\mathcal{D}) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\mathcal{D}} \max_{|t_1-t_2|\leq\delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|,$$

et $\Delta(\Omega)$ est la famille de tous les sous ensembles dénombrables de Ω. L'image de la fonction Ψ est dans le cône $\mathbb{R}^3_+$, max est pris dans le sens de l'ordre induit par ce cône.
Puisque $C([0,T];\mathcal{K})$ est un sous ensemble convexe fermé de $C([0,T];E)$, de l'exemple 2.1.4 dans [39] et la définition de $\chi_{\mathcal{K}}$, on peut facilement voir que Ψ est bien définie et que c'est une mesure de non compacité non singulière, monotone et régulière dans $C([0,T];\, \mathcal{K})$.

Résultat principal.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.2.1 *On suppose que les conditions $F_1)$-$F_4)$ sont vérifiées. Alors on a ;*

(i) si l'opérateur S vérifie les conditions $S_1) - S_2)$, alors le multivoque $\mathcal{F}$ est s.c.s et est à valeurs compactes ;

(ii) si l'opérateur S vérifie les conditions $S_0) - S_2)$ et

$$4M \left\|\kappa(.)\right\|_{L^1} + e^{-pT} < 1, \tag{4.6}$$

alors $\mathcal{F}$ est Ψ-condensant ;

(iii) si l'opérateur S vérifie les conditions $S_1) - S_3)$, alors le multivoque $\mathcal{F}$ est à valeurs contractiles.

4.3 Preuve du résultat principal

Résultats auxiliaires.

Pour donner la preuve du théorème 4.2.1 on a besoin de quelques résultats auxiliaires.

Lemme 4.3.1 *Soit Υ un opérateur abstrait*

$$\Upsilon : L^1([0,T]; E) \to C([0,T]; \mathcal{K})$$

vérifiant les conditions suivantes :

$\mathbf{\Upsilon}_1)$ *il existe $D > 0$ tel que*

$$\|\Upsilon\ f(t) - \Upsilon\ g(t)\| \leq D \int_0^t \|f(s) - g(s)\|\, ds, \ \ 0 \leq t \leq T$$

pour tout $f, g \in L^1([0,T]; E)$;

$\mathbf{\Upsilon}_2)$ *pour tout compact $K \subset E$ et pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T]; E)$ telle que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ p.p. $t \in [0,T]$, la convergence faible $f_n \underset{w}{\to} f_0$ implique $\Upsilon f_n \to \Upsilon f_0$ dans $C([0,T]; \mathcal{K})$.*

Alors :

(i) si la suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T]; E)$ est telle que $\|f_n(t)\| \leq \delta(t)$ pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ p.p. $t \in [0,T]$ et $\chi(\{f_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \zeta(t)$ p.p. $t \in [0,T]$, où δ, $\zeta \in L^1_+([0,T])$, alors

$$\chi_{\mathcal{K}}(\Upsilon\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq 2\, D \int_0^t \zeta(s) ds; \tag{4.7}$$

(ii) pour toute suite semi-compacte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ *la suite* $\{\Upsilon f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *et relativement compacte dans* $C([0,T];\mathcal{K})$*, et en plus, si* $f_n \underset{w}{\to} f_0$ *alors* $\Upsilon f_n \to \Upsilon f_0$.

Preuve Ce lemme est une conséquense directe du Théorème 4.2.2 et du Théorème 5.1.1 dans [39]. Car Υ est à valeurs dans $C([0,T];\mathcal{K})$, il suffit de voir que le réseau donné pour l'ensemble $\{\Upsilon f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans le théorème est inclu dans $C([0,T];\mathcal{K})$ tout en gardant en tête que $C([0,T];\mathcal{K})$ est un sous ensemble fermé de $C([0,T];E)$

Remarque 4.3.1 *Si l'espace* E *est séparable l'estimation* (4.7) *a la forme suivante :*

$$\chi_{\mathcal{K}}(\Upsilon\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq D\int_0^t \zeta(s)ds;$$

(voir Corollaire 4.2.4. dans [39]).

Remarque 4.3.2 *Pour* $x_0 \in \mathcal{K}$ *fixé, en utilisant les conditions* $S_1) - S_2)$ *on conclut directement que l'opérateur*

$$S(x_0,.) : L^1([0,T];E) \to C([0,T];\mathcal{K})$$

vérifie les conditions Υ_1 *et* Υ_2 *du Lemme 4.3.1.*

Lemme 4.3.2 *Soit la suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E)$ *intégrablement bornée :*

$$\|f_n(t)\| \leq v(t) \, \textit{pour tout} \; n = 1,2\ldots \; \textit{et p.p.}t \in [0,T] \tag{4.8}$$

où $v \in L^1([0,T])$.
On suppose que

$$\chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq q(t) \quad p.p.t \in [0,T], \;\; \text{où } q(.) \in L^1[0,T]. \tag{4.9}$$

Alors pour tout sous ensemble borné $\Omega \subset \mathcal{K}$ *et pour tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$\chi_{\mathcal{K}}\left\{S(\Omega,\{f_n\}_{n=1}^{\infty})(t)\right\} \leq 2M\int_0^t q(s)ds + e^{-pt}\chi_{\mathcal{K}}(\Omega), \tag{4.10}$$

où

$$\{S(\Omega,\{f_n\}_{n=1}^{\infty})(t)\} = \bigcup_{\substack{x\in\Omega \\ n\geq 1}} S(x,f_n)(t)$$

Preuve. Soit $t \in [0,T]$ fixé. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, soit $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{K}$ un $(\chi_{\mathcal{K}}(\Omega)+\varepsilon)$-réseau fini de l'ensemble Ω. De la Remarque 4.3.2 et du Lemme 4.3.1-(ii) on a

$$\chi_{\mathcal{K}}\left\{S(x_i,(\{f_n\}_{n=1}^{\infty})(t)\right\} \leq 2M\int_0^t q(s)ds,\ i=1,...,m,\ t\in[0,T].$$

Maintenant, pour $1 \leq i \leq m$, soit $\left\{y_i^j,\ 1\leq j\leq k(i)\right\} \subset \mathcal{K}$ un $(2M\int_0^t q(s)ds+$ $\varepsilon)$-réseau fini de $\{S(x_i,\{f_n\}_{n=1}^{\infty})(t)\}$ tel que

$$\left\|S(x_i,f_n)(t)-y_i^j\right\| \leq 2M\int_0^t q(s)ds+\varepsilon,\ \forall n\in\alpha_{i,j},\text{ où, }\alpha_{i,j}\subset\mathbb{N},\ \overset{k(i)}{\underset{j=1}{\cup}}\alpha_{i,j}=\mathbb{N}^*.$$

Alor l'ensemble $\left\{y_i^j,\ 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq k(i)\right\}$ forme un $e^{-pt}\left(\chi_{\mathcal{K}}(\Omega)+\varepsilon\right)+$ $2M\int_0^t q(s)ds+\varepsilon$-réseau fini de l'ensemble $\{S(\Omega,\{f_n\}_{n=1}^{\infty})(t)\}$. En effet, soit $x\in\Omega$ et x_{i_o}, $1\leq i_0\leq m$, le point correspondant tel que

$$\|x-x_{i_0}\| \leq \chi_{\mathcal{K}}(\Omega)+\varepsilon.$$

En utilisant la dernière inégalité et la condition S_1), on aura pour tout $n\geq 1$

$$\|S(x,f_n)(t)-S(x_{i_0},f_n)(t)\| \leq e^{-pt}\left(\chi_{\mathcal{K}}(\Omega)+\varepsilon\right).$$

Maintenant, on choisit $y_{i_0}^{j_0}$, $1\leq j_0\leq k(i_0)$ tel que

$$\left\|S(x_{i_0},f_n)(t)-y_{x_{i_0}}^{j_0}\right\| \leq 2M\int_0^t q(s)ds+\varepsilon,\ \forall n\in\alpha_{i_0,j_0} \tag{4.11}$$

Alors, on obtient, pour tout $n\in\alpha_{i_0,j_0}$

$$\begin{aligned}\left\|S(x,f_n)(t)-y_{x_{i_0}}^{j_0}\right\| &\leq \|S(x,f_n)(t)-S(x_{i_0},f_n)(t)\|+\left\|S(x_{i_0},f_n)(t)-y_{x_{i_0}}^{j_0}\right\|\\ &\leq e^{-pt}\left(\chi_{\mathcal{K}}(\Omega)+\varepsilon\right)+2M\int_0^t q(s)ds+\varepsilon.\end{aligned}$$

Du fait que le choix de ε est quelconque et $\overset{k(i)}{\underset{j=1}{\cup}}\alpha_{i,j}=\mathbb{N}^*$ pour tout $1\leq i\leq m$, ce qui achève la preuve.

Lemme 4.3.3 *Pour tout sous ensemble borné $Z\subset\mathcal{K}$ tel que $\chi_{\mathcal{K}}(Z)=0$ et pour toute suite semi-compacte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^1([0,T];E)$, l'ensemble $\{S(Z,f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact dans $C([0,T];\mathcal{K})$, en plus, si $f_n\underset{w}{\to}f_0$ dans $L^1([0,T];E)$ et $x_n\to x_0$ dans $\mathcal{K}$, alors $S(x_n,f_n)\to S(x_0,f_0)$ dans $C([0,T];\mathcal{K})$.*

Preuve Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, soit $\{z_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{K}$ un ε-réseau de Z. De la Remarque 4.3.2 et du Lemme 4.3.1 il résulte que pour tout $1 \leq i \leq m$, la suite $\{S(z_i, f_n)\}_{n=1}^\infty$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$. Maintenant en utilisant la condition $S_1)$ il est facile de voir que l'ensemble relativement compact $\bigcup_{i=1}^m \{S(z_i, f_n)\}_{n=1}^\infty$ dans $C([0,T];\mathcal{K})$ est un ε-réseau de $\{S(Z, f_n)\}_{n=1}^\infty$. En utilisant de nouveau la Remarque 4.3.2 et du Lemme 4.3.1 on a $S(x_0, f_n) \to S(x_0, f_0)$ dans $C([0,T];\mathcal{K})$ et en appliquant la condition $S_1)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\|S(x_n, f_n) - S(x_0, f_0)\| &\leq \|S(x_n, f_n) - S(x_0, f_n)\| + \|S(x_0, f_n) - S(x_0, f_0)\| \\
&\leq \|x_n - x_0\| + \|S(x_0, f_n) - S(x_0, f_0)\| \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 4.2.1

(i). On montre que le multivoque $\mathcal{F}$ est s.c.s. à valeurs compactes. On montre d'abord que $\mathcal{F}$ est fermé à valeurs compactes.

Soit $\{x_n\}_n$, $\{z_n\}_n \subset C([0,T];\mathcal{K})$, $x_n \longrightarrow x_0$, $z_n \in \mathcal{F}(x_n)$, $n \geq 1$, et $z_n \longrightarrow z_0$. Soit $\{f_n\}_n$ une suite quelconque de $L^1([0,T], E)$ telle que $f_n \in \mathrm{sel}_F(x_n)$ et $z_n = S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n)$, $n \geq 1$. De l'hypothèse $F_3)$ on a $\|f_n(t)\| \leq \|F(t, x_n(t))\| \leq U_{\Omega_0}(t)$ p.p $t \in [0,T]$, où Ω_0 est un sous ensemble fermé de $\mathcal{K}$, contenant l'ensemble $\{x_n(t),\, n \geq 1,\, t \in [0,T]\}$, et en utlisant l'hypothèse $F_4)$ on a

$$\chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}) \leq k(t)\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}) = 0 \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Alors, la suite $\{f_n\}_n$ est semi-compacte. Par conséquent elle est faiblement compacte dans $L^1([0,T];E)$. Sans perdre la généralité on peut supposer que $f_n \underset{w}{\to} f_0$. Comme $\chi_{\mathcal{K}}(\{x_n(0)\}_{n=1}^\infty) = 0$, du Lemme 4.3.3, il suit que la suite $\{S(x_n(0), f_n)\}_n$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$ et

$$S(x_n(0), f_n) \to S(x_0(0), f_0).$$

Maintenant, en appliquant le Lemme 4.2.1, on obtient $f_0 \in sel_F(x_0)$. Il suit que

$$S(x_n(0), f_n)(T) \to S(x_0(0), f_0)(T) \text{ dans } \mathcal{K}, \text{ avec } f_0 \in \mathrm{sel}_F(x_0).$$

En utilisant de nouveau le lemme 4.3.3, on obtient que la suite $\{S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n)\}_{n=1}^\infty$, est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$ et

$$z_n = S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n) \to S(S(x_0(0), f_0)(T), f_0) \text{ avec, } f_0 \in sel_F(x_0).$$

Donc, $z_0 = S(S(x_0(0), f_0)(T), f_0) \in \mathcal{F}(x_0)$, ce qui donne $\mathcal{F}$ fermé.

Soit $x(.) \in C([0,T];\mathcal{K})$, en utilisant le même raisonnement que précédemment, les hypothèses F_3) et F_4) impliquent que toute suite $\{f_n\}_n$, $f_n \in sel_F(x)$ est semi-compacte, ce qui donne en utilisant le Lemme 4.3.3 que $\{S(x(0), f_n)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $\mathcal{K}$, ce qui implique en utilisant le même lemme que $S\{(S(x(0), f_n)(T), f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$. la compacité de $\mathcal{F}(x)$ découle du fait qu'il est fermé.

Finalement, on montre que $\mathcal{F}$ est s.c.s. Du Lemme 2.1.1 il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est quasi compact. On considére la suite convergente $\{x_n\}_n \subset C([0,T];\mathcal{K})$ et une suite quelconque $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ telle que $f_n \in sel_F(x_n)$, $n \geq 1$. Des hypothèses F_3)-F_4) on obtient que la suite $\{f_n\}_n$ est semi-compacte. Comme $\chi_{\mathcal{K}}\left(\{x_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$, du Lemme 4.3.3 on obtient que le suite $\{S(x_n(0), f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$. d'où $\{S(x_n(0), f_n)(T)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $\mathcal{K}$. En utilisant de nouveau le Lemme 4.3.3, on obtient que la suite $\{S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n)\}_{n=1}^{\infty}$, est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$. Donc, le multivoque $\mathcal{F}$ est quasi compact.

(ii) Soit $\Omega \subset C([0,T];\mathcal{K})$ un sous ensemble borné tel que

$$\Psi(\mathcal{F}(\Omega)) \geq \Psi(\Omega), \tag{4.12}$$

où l'inégalité est prise dans le sens de l'ordre induit par le cône positif $\mathbb{R}_+^3$. On peut dire que (4.12) implique que Ω est relativement compact dans $C([0,T];\mathcal{K})$. Soit le maximum du membre gauche de l'inégalité (4.12) atteint pour l'ensemble dénombrable $D' = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec

$$z_n(t) = S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n), \quad f_n \in sel_F(x_n),\ n \geq 1,$$

où $\{x_n\}_n \subset \Omega$. On remarque que de S_0) on a directement

$$z_n(0) = S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n)(0) = S(x_n(0), f_n)(T). \tag{4.13}$$

De (4.12) on obtient que

$$\Psi\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \Psi\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right). \tag{4.14}$$

Alors

$$\chi_{\mathcal{K}}\left(\{x_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \chi_{\mathcal{K}}\left(\{z_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\right) = \chi_{\mathcal{K}}\left(\{S(x_n(0), f_n)(T)\}_{n=1}^{\infty}\right); \tag{4.15}$$

$$\vartheta\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \vartheta\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \vartheta\left(\{S(S(x_n(0), f_n))(T), f_n\}_{n=1}^{\infty}\right). \tag{4.16}$$

De l'hypothèse (F_4) on a

$$\begin{aligned}\chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) &\leq \kappa(t)\chi\big(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\big)\\ &\leq \kappa(t)\vartheta\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big) \quad \text{p.p. } t\in[0,T],\end{aligned}\tag{4.17}$$

et de (F_3) la suite $\{f_n\}_n$ est intégrablement bornée. Par suite, du Lemme 4.3.2, on a

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{K}}\left(\{z_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\right) &= \chi_{\mathcal{K}}(\{S(x_n(0),f_n)(T)\}_n)\\ &\leq 2M\left\|\kappa\right\|_{L^1}\vartheta\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big)+e^{-pT}\chi_{\mathcal{K}}\big(\{x_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\big);\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\vartheta\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= \vartheta\left(\{S(S(x_n(0),f_n))(T),f_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\\ &\leq 2M\left\|\kappa\right\|_{L^1}\vartheta\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big)+e^{-pt}\chi_{\mathcal{K}}\left(\{S(x_n(0),f_n)(T)\}_{n=1}^{\infty}\right)\\ &\leq 4M\left\|\kappa\right\|_{L^1}\vartheta\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big)+e^{-pT}\chi_{\mathcal{K}}\big(\{x_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\big)\end{aligned}\tag{4.19}$$

On pose

$$\begin{aligned}\gamma_0 =&\chi_{\mathcal{K}}\big(\{x_n(0)\}_{n=1}^{\infty}\big);\\ \nu =&\vartheta\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big).\end{aligned}$$

Des inégalités (4.15), (4.18) et (4.19), on obtient

$$\begin{cases}\gamma_0 \leq 2M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}\nu+e^{-pT}\gamma_0,\\ \ \nu\leq 4M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}\nu+e^{-pT}\gamma_0.\end{cases}\tag{4.20}$$

Il découle que

$$\begin{cases}\gamma_0 \leq 4M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}\nu+e^{-pT}\gamma_T,\\ \ \nu\leq 4M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}\nu+e^{-pT}\gamma_T.\end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{cases}\gamma_0 \leq \left(4M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}+e^{-pT}\right)\gamma_0,\\ \ \nu\leq \left(4M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1}+e^{-pT}\right)\nu.\end{cases}$$

Du fait que $4M\left\|\kappa\right\|_{L^1}+e^{-pT}<1$ (des hypothèses), du système précédent on a

$$\gamma_0=\nu=0.\tag{4.21}$$

Par conséquent

$$\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty})\leq\chi_{\mathcal{K}}(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty})=0\quad\text{pour tout } t\in[0,T].$$

de (F_3) et (F_4), la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est semi-compacte dans $L^1([0,T];E)$. Du Lemme 4.3.3, l'ensemble $\{S(x_n(0),f_n)(T)\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact dans $\mathcal{K}$ .En appliquant de nouveau le Lemme 4.3.3, on déduit que la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S(S(x_n(0),f_n)(T),f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{K})$. Par conséquent

$$\text{mod}_c\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0.$$

Alors, de (4.12), on obtient

$$\text{mod}_c\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0.$$

La dernière inégalité et (4.21) implique que

$$\Psi(\Omega) = (0,0,0).$$

Alors Ω est relativement compact.

Remarque 4.3.3 *Si l'espace E est séparable, en utilisant la Remarque 4.3.1, l'estimation* (4.6) *dans (ii) du Théorème 4.2.1 peut être affaibli*

$$2M\left\|\kappa(.)\right\|_{L^1} + e^{-pT} < 1.$$

(iii) On montre maintenant que $\mathcal{F}$ est à valeurs contractiles. Soit $x \in C([0,T];\mathcal{K})$ et $v_0 \in \mathcal{F}(x)$, avec $v_0 = S(S(x(0),f_0)(T),f_0)$ pour $f_0 \in sel_F(x)$. On considère l'application $H : [0,1]\times\mathcal{F}(x) \longrightarrow C([0,T];\mathcal{K})$ donnée par

$$H(\lambda,v) = S(S(x(0),\mathbf{1}_{[0,\lambda T]}(.)f + \mathbf{1}_{[\lambda T,T]}(.)f_0)(T),\mathbf{1}_{[0,\lambda T]}(.)f + \mathbf{1}_{[\lambda T,T]}(.)f_0),$$

où $v \in \mathcal{F}(x)$, $v = S(S(x(0),f)(T),f)$, pour $f \in sel_F(x)$. De la condition S_3), la valeur $H(\lambda,v)$ ne dépend pas du choix de f et donc l'application H est bien définie. Et en plus,

$$H(0,v) = v_0 \quad \text{et} \quad H(1,v) = v,$$

et,

$$H(\lambda,v) \in \mathcal{F}(x), \quad \forall\lambda \in [0,1] \text{ et } \forall v \in \mathcal{F}(x).$$

Le dernier point est dû au fait que

$$\mathbf{1}_{[0,\lambda T]}(.)f + \mathbf{1}_{[\lambda T,T]}(.)f_0 \in sel_F(x),\ \forall\lambda \in [0,1].$$

Il reste à montrer que H est continue. soient les suites $\{\lambda_n\}_n \subset [0,1]$ et $\{v_n\}_n \subset \mathcal{F}(x)$ telles que $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$, $v_n \longrightarrow v_\infty$, avec $v_n =$

$S(S(x(0), f_n)(T), f_n)$ et $f_n \in sel_F(x)$. des conditions $F_3)$ et $F_4)$ la suite $\{f_n\}_n \subset L^1([0,T], E)$ est semi-compacte et donc faiblement compacte. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $f_n \underset{w}{\to} f_\infty$.

Du Lemme 4.2.1 on a $f_\infty \in sel_F(x)$ et de la même façon que dans la preuve de la partie (i), on peut montrer que

$$v_n = S(S(x_n(0), f_n)(T), f_n) \to S(S(x(0), f_\infty)(T), f_\infty).$$

D' où, $v_\infty = S(S(x(0), f_\infty)(T), f_\infty),\ f_\infty \in sel_F(x)$.
On montre que

$$\mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.) f_n \underset{w}{\to} \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.) f_\infty.$$

Comme l'espace dual de E^* possède la propriété de Radon-Nikodym, il est clair que $L^1([0,T], E)^*$ est isométrique à $L^\infty([0,T], E^*)$ et pour $g \in L^\infty([0,T], E^*)$ et $\varphi \in L^1([0,T], E)$,

$$<< g, \varphi >>= \int_0^T < g(s), \varphi(s) > ds. \tag{4.22}$$

Où les doubles parenthèses indiquent les crochets du dual de $L^1([0,T]; E) - L^\infty([0,T]; E^*)$ et les parenthèses simples indiquent les crochets du dual de $E - E^*$. (voir [24] pour plus de détails).
Soit g un élément de l'espace $L^\infty([0,T], E^*)$. On remarque que

$$g\,\mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]} \in L^\infty([0,T], E^*),\ \forall\, n \geq 1.$$

En utilisant (4.22), on a

$$<< g, \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.) f_n >>=<< \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]} g, f_n >> .$$

Comme

$$\mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]} g \underset{L^\infty([0,T],E^*)}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{[0,\lambda\, T]} g \quad \text{(fortement)}$$

et

$$f_n \underset{w}{\to} f_\infty.$$

En utilisant les propriétés des parenthèses du dual , on obtient

$$<< g, \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.) f_n >>=<< \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]} g, f_n >>\to<< \mathbf{1}_{[0,\lambda T]} g, f_n >>=<< g, \mathbf{1}_{[0,\lambda T]} f_n >>$$

Donc,

$$\mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.) f_n \underset{w}{\to} \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.) f_\infty.$$

Il est clair que

$$\mathbf{1}_{[\lambda_n T, T]}(.) f_0 \underset{L^1([0,T],E)}{\to} \mathbf{1}_{[\lambda_0 T, T]}(.) f_0.$$

Donc,

$$\mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.)f_n + \mathbf{1}_{[\lambda_n T,T]}(.)f_0 \underset{w}{\rightarrow} \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.)f_\infty + \mathbf{1}_{[\lambda_0 T,T]}(.)f_0.$$

Maintenant, on applique le Lemme 4.3.3, on aura

$$S(x_n(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.)f_n + \mathbf{1}_{[\lambda_n T,T]}(.)f_0) \underset{C([0,T];\mathcal{K})}{\rightarrow} S(x(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.)f_\infty + \mathbf{1}_{[\lambda_0 T,T]}(.)f_0),$$

ce qui implique que,

$$S(x_n(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.)f_n + \mathbf{1}_{[\lambda_n T,T]}(.)f_0)(T) \underset{\mathcal{K}}{\rightarrow} S(x(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.)f_\infty + \mathbf{1}_{[\lambda_0 T,T]}(.)f_0)(T).$$

Une fois de plus si on applique le Lemme 4.3.3, on obtient

$$\begin{gathered} S\left(S\left(x_n(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.)f_n + \mathbf{1}_{[\lambda_n T,T]}(.)f_0\right)(T), \mathbf{1}_{[0,\lambda_n T]}(.)f_n + \mathbf{1}_{[\lambda_n T,T]}(.)f_0\right) \\ \underset{C([0,T];\mathcal{K})}{\longrightarrow} \\ S\left(S\left(x(0), \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.)f_\infty + \mathbf{1}_{[\lambda_0 T,T]}(.)f_0\right)(T), \mathbf{1}_{[0,\lambda_0 T]}(.)f_\infty + \mathbf{1}_{[\lambda_0 T,T]}(.)f_0\right). \end{gathered}$$

Donc, $H(\lambda_n, v_n) \rightarrow H(\lambda_0, v_\infty)$.

4.4 Application

Comme application de notre résultat (Theorem 4.2.1), on étudie dans un espace de Banach réel E l'existence de la solution intégrale du problème périodique abstrait de la forme

$$\begin{cases} x'(t) \in -Ax(t) + F(t, x(t)), 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{4.23}$$

où
(e) le dual topologique E^* de E est uniformément convexe ;
(A_1) $A : D(A) \subset E \to \mathcal{P}(E)$ est un opérateur , avec $0 \in A0$, tel que $-A$ génère un semi-groupe équicontinu ;
(A_2) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A - \varepsilon I$ est m-accrétif ;
(A_3) $\overline{D(A)}$ est un sous ensemble convexe de E.
$F : [0, T] \times \overline{D(A)} \to Kv(E)$ est un multivoque vérifiant (F_1), (F_2) et
(F_3') il existe une fonction $\alpha(.) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|F(t, x)\| \leq \alpha(t)$$

pour tout $x \in \overline{D(A)}$ et p.p. $t \in [0, T]$.

Théorème 4.4.1 *On suppose que les hypothèses* (e), (A_1), (A_2)*,* (F_1), (F_2)*,* (F_3') *et* (F_4) *sont satisfaites. Si*

$$4M \|\kappa(.)\|_{L^1} + e^{-\varepsilon T} < 1, \tag{4.24}$$

alors le problème (4.23) *a au moins une solution intégrale.*

Preuve
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x_\varepsilon'(t) \in -A\, x_\varepsilon(t) + f^\varepsilon(t), 0 < t \leq T, \\ x_\varepsilon(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.25}$$

où, $x_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1([0, T]; E)$. Il est clair que le problème (4.25) a une solution intégrale unique x_ε avec $x_\varepsilon(t) \in \overline{D(A)}$ pour $t \in [0, T]$. En plus, si y_ε est mild solution de l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -y_\varepsilon'(t) \in A\, y_\varepsilon(t) + \overline{f}^\varepsilon(t), \;\; 0 < t \leq T \\ \;\; y_\varepsilon(0) = y_0, \quad y_0 \in \overline{D(A)} \end{cases} \tag{4.26}$$

alors

$$\|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)\| \leq e^{-\varepsilon(t-s)} \|x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)\| + \int_s^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \left\| f^\varepsilon(\tau) - \overline{f}^\varepsilon(\tau) \right\| d\tau, \tag{4.27}$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$. (Pour plus de détails voir par exemple [10]).
Dans ce cas, l'opérateur solution intégral S_ε est défini comme suit :

$$S_\varepsilon : \overline{D(A)} \times L^1([0,T]; E) \to C([0,T], \overline{D(A)}),$$

où $S_\varepsilon(x_0, f)$ est l'unique mild solution du problme (4.25).
L'opérateur $S_\varepsilon$vérifie les conditions $S_0) - S_3)$. En effet,
(i) la condition (S_0) est triviale ;
(ii) la condition (S_1) découle de (4.27), avec $p = \varepsilon$ et M=1 ;
(iii) comme l'opérateur A est m-accrétif et génère un semi-groupe fortement équicontinu (voir [18]), et comme l'espace dual E^* et uniformément convexe (de l'hypothèse (e)), on peut utiliser la Proposition 1 et le Lemme 4 dans [18] pour dire que l'opérateur S_ε vérifie la condition $S_2)$;
(iii) La condition (S_3) découle directement de l'inégalité (4.27).

Maintenant on considère l'opérateur
$\mathcal{F}_\varepsilon$ donné par

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\varepsilon : C([0,T]; \mathcal{K}) \to \mathcal{P}(C([0,T]; \mathcal{K})), \\ \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = \{S_\varepsilon(S_\varepsilon(x_\varepsilon(0), f)(T), f^\varepsilon) : f^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon)\}. \end{cases} \tag{4.28}$$

Il est clair que le point fixe de $\mathcal{F}_\varepsilon$ est solution de (4.23). Du Théorème 4.2.1 il découle que l'opérateur $\mathcal{F}_\varepsilon$ est s.c.s, à valeurs compactes (donc fermée)et contractile . D'après le Théorème 2.3.3 pour assurer l'existence d'au moins une solution de l'inclusion (4.23), on doit déterminer un ensemble compact convexe $K^\varepsilon \subset C([0,T]; \mathcal{K})$ tel que $\mathcal{F}_\varepsilon(K^\varepsilon) \subset K^\varepsilon$.

Soit l'ensemble

$$W_0^\varepsilon = \{x_\varepsilon \in C([0,T]; \mathcal{K}) : \|x_\varepsilon(t)\| \leq \psi(t) \text{ sur } [0,T]\}$$

où ψ est solution de

$$\begin{cases} \psi'(t) = -\varepsilon\psi(t) + \alpha(t), \ p.p. \, t \in [0,T], \\ \psi(0) = \psi(T), \end{cases} \tag{4.29}$$

L'ensemble W_0^ε est bien défini. En effet si ψ_i, $i = 1, 2$ sont solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \psi_i'(t) = -\varepsilon\psi_i(t) + \alpha(t), \ p.p., \, t \in [0,T], \\ \psi_i(0) = \psi_i^0, \end{cases} \tag{4.30}$$

alors

$$\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\| \le e^{-\varepsilon t}\left\|\psi_1^0-\psi_2^0\right\|.$$

Il résulte que l'application de Poincaré $\psi^0 = \psi(T)$ est une contraction stricte sur $\mathcal{K}$, par conséquent le problème (4.29) a une solution unique. d'ailleurs

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{-\varepsilon t}e^{-\varepsilon T}\psi(0) + e^{-\varepsilon t}\int_0^T e^{-\varepsilon(T-s)}\alpha(s)\,ds + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}\alpha(s)\,ds \qquad (4.31)\\ &= e^{-\varepsilon t}\left(1-e^{-\varepsilon T}\right)^{-1}\int_0^T e^{-\varepsilon(T-s)}\alpha(s)\,ds + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}\alpha(s)\,ds.\end{aligned}$$

la première expression de ψ découle du fait que ψ est le point fixe de l'opérateur $\mathcal{F}_\varepsilon$ avec $F(t,x) = \{\alpha(t)\}$, la seconde expression découle du fait que $\psi(0) = \psi(T)$.
En utilisant (4.27) et le fait que $0 \in A0$, on aura pour tout $f \in sel_F(x_\varepsilon)$

$$S_\varepsilon(x_\varepsilon(0), f)(T) \le e^{-\varepsilon T}\|x_\varepsilon(0)\| + \int_0^T e^{-\varepsilon(T-s)}\alpha(\tau)\,d\tau,$$

pour les mêmes raisons on a

$$\begin{aligned}S_\varepsilon\left(S_\varepsilon(x_\varepsilon(0), f)(T), f\right)(t) &\le e^{-\varepsilon t}e^{-\varepsilon T}\|x_\varepsilon(0)\| + e^{-\varepsilon t}\int_0^T e^{-\varepsilon(T-s)}\alpha(\tau)\,d\tau\\ &\quad + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}\alpha(\tau)\,d\tau\\ &\le e^{-\varepsilon t}e^{-\varepsilon T}\psi(0) + e^{-\varepsilon t}\int_0^T e^{-\varepsilon(T-s)}\alpha(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}\alpha(\tau)\,d\tau\\ &= \psi(t).\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{F}_\varepsilon(K_0^\varepsilon) \subset K_0^\varepsilon$. De (4.18) et (4.19), on a

$$\begin{pmatrix}\chi(\mathcal{F}_\varepsilon\left(W_0^\varepsilon(0)\right))\\ \vartheta(W_0^\varepsilon)\end{pmatrix} \le A\begin{pmatrix}\chi(W_0^\varepsilon(0))\\ \vartheta(W_0^\varepsilon)\end{pmatrix}.$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix}e^{-pT} & 4M\|\kappa(.)\|_{L^1}\\ e^{-pT} & 4M\|\kappa(.)\|_{L^1}\end{pmatrix}.$$

On définit $W_1^\varepsilon = \overline{co}\,\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon)$, il est facile de voir que W_1^ε est un sous ensemble non vide, fermé, convexe, et

$$W_1^\varepsilon = \overline{co}\,\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon) \subset \overline{co}W_0^\varepsilon = W_0^\varepsilon$$

pour la même raison on a

$$\begin{pmatrix} \chi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_1^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_1^\varepsilon)) \end{pmatrix} \leq A \begin{pmatrix} \chi(W_1^\varepsilon(0)) \\ \vartheta(W_1^\varepsilon) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \chi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon)) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} \chi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_1^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_1^\varepsilon)) \end{pmatrix} \leq A^2 \begin{pmatrix} \chi(W_0^\varepsilon(0)) \\ \vartheta(W_0^\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

On définit $W_2^\varepsilon = \overline{co}\,\mathcal{F}_\varepsilon(W_1^\varepsilon)$, il est clair que W_2^ε est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe, et

$$W_2^\varepsilon \subset W_1^\varepsilon \subset W_0^\varepsilon;$$

$$\begin{pmatrix} \chi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_2^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_2^\varepsilon)) \end{pmatrix} \leq A^3 \begin{pmatrix} \chi(W_0^\varepsilon(0)) \\ \vartheta(W_0^\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

En continuant dans ce sens, on aura une suite décroissante $(W_n^\varepsilon)_n$ de sous ensembles, fermés, convexes, bornés et non vides telles que

$$\begin{pmatrix} \chi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)) \end{pmatrix} \leq A^{n+1} \begin{pmatrix} \chi(W_0^\varepsilon(0)) \\ \vartheta(W_0^\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Comme $det(A - \lambda I) = 0$ pour $\lambda = 0$ oú $\lambda = 4M\,\|\kappa(.)\|_{L^1} + e^{-\varepsilon T} < 1$, de (4.32), il résulte que

$$\begin{pmatrix} \chi_\mathcal{K}(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon(0))) \\ \vartheta(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)) \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Alors

$$\mathrm{mod}_c\,(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, en premier, on montre que $\zeta \in]0, T]$

$$\mathrm{mod}_c \left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon)\mid_{[\zeta,T]}\right) = 0. \tag{4.34}$$

On remarque que si $B \subset \overline{D(A)}$ est un sous ensemble borné non vide et $G \subset L^1([0, T]; E)$ est un sous ensemble intégrablement borné, alors en utilisant la relation (4.27) et le fait que $0 \in A0$, on montre facilement que l'ensemble

$$S(B, g)[0, T] = \{S(b, g)(t),\, b \in B,\ g \in G,\ t \in [0, T]\}$$

est borné dans $\overline{(D(A))}$. Donc par une petite adaptation de la preuve du théorème 2.5.1 dans [10], p.57 on conclut que l'ensemble $\{S(b, g_\epsilon)(.),\, b \in B,\ g \in G\}$ est équicontinu dans $C([\zeta, T], \overline{D(A)})$.

Maintenant, de $(F'3)$ l'ensemble

$$\left\{f_0^\varepsilon,\ f_0^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^0),\ x_\varepsilon \in W_0^\varepsilon\right\}$$

est un sous ensemble intégrablement borné dans $L^1([0,T];E)$. Comme W_1^ε est borné dans $C([0,T],\overline{D(A)})$, l'ensemble

$$\left\{S(x_0^\varepsilon(0),f_0^\varepsilon)(T),\, x_\varepsilon \in W_0^\varepsilon,\, f_0^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^0)\right\} \subset W_1^\varepsilon(0)$$

est borné dans $\overline{D(A)}$. Par conséquent , l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varepsilon(W_0^\varepsilon)(.) &= \left\{S\left(S(x_0^\varepsilon(0),f_0^\varepsilon)(T),f_\varepsilon\right)(.),\, x_\varepsilon \in W_0^\varepsilon,\, f_0^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^0)\right\}\\ &\subset \left\{S\left(W_0^\varepsilon,f_0^\varepsilon\right)(.),\, f_0^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^0),\, x_\varepsilon \in W_0^\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

est équicontinu dans $C([\zeta,T],\overline{D(A)})$. Du fait que la fonction $\mathrm{mod}_c(.)$ est monotone, on a

$$\mathrm{mod}_c\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)\mid_{[\zeta,T]}\right) = 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } \zeta \in]0,T]. \tag{4.35}$$

Maintenant on montre que

$$\mathrm{mod}_c\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ à l'origine.}$$

De (4.33) on a

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{K}}\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon(0))\right) &= \chi_{\mathcal{K}}\left\{S(x_n^\varepsilon(0),f_\varepsilon)(T) :\, x_n^\varepsilon \in W_n^\varepsilon,\, f_n^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^n)\right\}\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

alors, pour $\delta > 0$, il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \chi_{\mathcal{K}}\left\{S(x_n^\varepsilon(0),f_\varepsilon)(T) :\, x_n^\varepsilon \in W_n^\varepsilon,\, f_n^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^n)\right\} \leq \delta.$$

Pour $n \geq n_0$, soit $\{y_i\}_{i=1}^m \subset \overline{D(A)}$ un 2δ-réseau fini de $\{S(x_n^\varepsilon(0),f_\varepsilon)(T) :\, x_n^\varepsilon \in W_n^\varepsilon,\, f_n^\varepsilon \in sel_F(x_\varepsilon^n)\}$. Soit $x_n^\varepsilon \in W_n^\varepsilon,\, f_n^\varepsilon \in sel_F(x_n^\varepsilon)$ et soit y_{i_0} le point correspondant tel que

$$\|S(x_n^\varepsilon,f_n^\varepsilon)(T) - y_{i_0}\| \leq 2\delta. \tag{4.36}$$

En utilisant la relation(4.27), la condition F_3') et le fait que pour tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $T(t)$ est non expansif, on a

$$\begin{aligned}
&\|S\left(S(x_n^\varepsilon(0), f_n^\varepsilon)(T), f_\varepsilon\right)(h) - S\left(S(x_0^\varepsilon(0), f_n^\varepsilon)(T), f_n^\varepsilon\right)(0)\| \\
&= \|S\left(S(x_0^\varepsilon(0), f_n^\varepsilon)(T), f_\varepsilon\right)(h) - S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T)\| \\
&\leq \|S\left(S(x_0^\varepsilon(0), f_n^\varepsilon)(T), f_\varepsilon\right)(h) - T(h)S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T)\| \\
&\qquad + \|T(h)S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T)\| \\
&\leq \int_0^h e^{-\varepsilon(h-s)}\, \|f_n^\varepsilon(s)\|\, ds + \|T(h)S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T)\| \\
&\leq \int_0^h \alpha(s)\, ds + \|T(h)S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T)\| \\
&\leq \|T(h)S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - T(h)y_{i_0}\| + \|T(h)y_{i_0} - y_{i_0}\| \\
&\qquad + \|S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - y_{i_0}\| + \int_0^h \alpha(s)\, ds \\
&\leq 2\,\|S(x_0^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T) - y_{i_0}\| + \|T(h)y_{i_0} - y_{i_0}\| + \int_0^h \alpha(s)\, ds.
\end{aligned}$$

En prenant en considération que $t \to S(t)y_{i_0}$ est continu à l'origine, et que l'ensemble $\{y\}_{i=1}^m$ est fini, (4.36) et la dernière inégalité implique que pour tout $x_n^\varepsilon \in W_n^\varepsilon$ et $f_n^\varepsilon \in sel_F(x_n^\varepsilon)$,

$\|S\left(S(x_n^\varepsilon, f_n^\varepsilon)(T), f_\varepsilon\right)(h) - S\left(S(x_n^\varepsilon, f_\varepsilon)(T), f_\varepsilon\right)(0)\| \leq 5\delta$ quand $h \to 0$ et $n \geq n_0$.

Par suite

$$\operatorname{mod}_c\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ à l'origine.}$$

La dernière relation avec (4.35) impliquent que

$$\operatorname{mod}_c\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\Psi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_n^\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0,0).$$

Ce qu'il fallait démontrer.
Maintenant comme Ψ est une mesure de non compacité non singulière, régulière et monotone, définit sur un sous ensemble de $C([0,T];\overline{(D(A))})$ et les sous ensembles $(W_n^\varepsilon)_n$ sont non vides fermés , tels que $W_{n+1}^\varepsilon \subset W_n^\varepsilon$, $n \geq 0$, et

$$\Psi(W_n^\varepsilon) = \Psi\left(\overline{co}\left(\mathcal{F}_\varepsilon(W_{n-1}^\varepsilon)\right)\right) = \Psi(\mathcal{F}_\varepsilon(W_{n-1}^\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0,0),$$

il est clair que

$$K^{\varepsilon} = \bigcap_{n \geq 0} W_n^{\varepsilon}$$

est un ensemble non vide compact. En outre, comme $(W_n^{\varepsilon})_{n \geq 0}$ sont convexes, l'ensemble K^{ε} est convexe aussi . Il est clair que

$$\mathcal{F}_{\varepsilon}\left(K^{\varepsilon}\right) \subset K^{\varepsilon}.$$

Ainsi, K^{ε} est ce qu'on cherche. Ce qui achève la preuve du théorème 4.2.1.

Remarque 4.4.1 *Il est clair que la condition* (A_2) *implique que la solution mild de* (4.23) *est aussi une solution intégrale de ce problème. En d'autres termes, pour le problème* (4.23)*, avec la condition* (A_2) *la notion de mild solution et la notion solution intégrale coïncident (voir Théorème 1.3 dans [10], p. 204).*

Corollaire 4.4.1 *On suppose les conditions* $(e), (A_1), (A_2), (A_3), (F_1), (F_2), (F_3')$ *vŕifiées, et que*

(F_4') *pour tout sous ensemble borné* $\Omega \subset \mathcal{K}$

$$\chi(F(t, \Omega)) = 0, p.p., \, t \in [0, T].$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ *le problème* (4.23) *a au moins une solution intégrale (mild) solution.*

Preuve C'est une conséquence du Théorème 4.4.1 et du fait que $e^{-\varepsilon T} < 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Corollaire 4.4.2 *On suppose les conditions* $(e), (A_1), (A_3), (F_1), (F_2), (F_3'), (F_4')$ *vérifiées et que*

$(\tilde{A}_2)$ $A : D(A) \subset E \to \mathcal{P}(E)$ *est* m*-accrétif.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$*, le problème perturbé*

$$\begin{cases} x_{\varepsilon}'(t) \in -(A + \varepsilon\, I)x_{\varepsilon}(t) + F(t, x_{\varepsilon}(t)), \quad 0 < t \leq T, \\ x_{\varepsilon}(0) = x_{\varepsilon}(T) \end{cases} \tag{4.37}$$

a au moins une solution intégrale (mild) solution.

Preuve De l'hypothèse $(\tilde{A}_2)$, il résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur $(A+\varepsilon I)$ est m-accrétif et génère un semi-groupe équicontinu (voir par exemple [15], Remarque 3.5, p. 47). En outre $(A+\varepsilon I)-\varepsilon I = A$ est m-accrétif. Il reste à appliquer le Corollaire 4.4.1 dans le but de prouver que le problème (4.37) a au moins une solution intégrale (mild).

Remarque 4.4.2 *Pour avoir une bonne estimation de* (4.24)*, nous avons essayé de définir des mesures de non compacités pour des normes équivalentes dans E. Des inégalités* (4.18) *et* (4.19)*, Ψ est la meilleure mesure de non compacité qu'on peut avoir dans le sens où on a des conditions minimales.*

Remarque 4.4.3 *Théorème 4.4.1 généralise le Théorème 1 dans [10] car dans notre cas F est un multivoque et A génère seulement un semi-groupe équicontinu.*

Remarque 4.4.4 *Dans le problme* (4.23) *quand l'opérateur A est m-accrétif et génère un semi-groupe équicontinu, on sait que sous les conditions du Corollaire 4.4.2, pour tout $\varepsilon > 0$ le problème perturbé* (4.37) *a au moins une solution x_ε.*
Une question naturelle peut survenir : est ce que la suite $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte ?.
Dans [1] où A génére un semi-groupe compact la réponse à cette question est affirmative, et pour établir que la suite $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte il était suffisant de prouver qu'elle soit bornée. Ce fait a permis par la suite de prouver l'existence d'une sous suite $(x_{\varepsilon_n})_n$ qui converge vers la solution intégrale du problème (4.23)*. Dans notre cas (A génère un semi-groupe équicontinu), pour prouver que $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte, on doit montrer en premier que la suite $(x_\varepsilon(0))_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $\overline{D(A)}$.*

Bibliographie

[1] A. Sergiu and Papageorgiou, Nikolaos S. and Staicu, Periodic solutions of nonlinear evolution inclusions in Banach spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. An International Journal, 7(2), 2006.

[2] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, B. N. Sadovskii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Birkhauser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[3] J. Appell, Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points : An application-oriented survey, Fixed Point Theory. 6 (2005), no. 2, 157-229.

[4] R.Bader, M. I. Kamenskiĭ and V.V. Obukhovskiĭ, On some classes of operator inclusions with lower semicontinuous nonlinearities, Topol. Methods Nonlinear Anal.. 17(1) :143–156, 2001.

[5] R. Bader, B. D. Gel'man, Mikhail Kamenskii, and V. V. Obukhovskii. On the topological dimension of the solutions sets for some classes of operator and differential inclusions. *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.*, 22(1) :17–32, 2002.

[6] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Ellis Horwood Series :Mathematics and Its Applications, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989.

[7] J. Banas, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Marcel Dekker, New York, 1980.

[8] J. Banas, K. Sadarangani, On some measures of noncompactness in the space of continuous functions, Nonlinear Anal. 68 (2008), 377ÂŰ383.

[9] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, 1976. Translated from the Romanian.

[10] V. Barbu. *Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems*, volume 190 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1993.

[11] M. Benchohra and S.K. Ntouyas, Existence results for neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2000(2000), No. 20, pp. 1-15.

[12] M. Benchohra, J. Henderson, and S. Ntouyas, Impulsive Differential Equations and Inclusions. Contemporary Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[13] P. Benilan and H. Brezis. Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 22(2) :311–329, 1972.

[14] P. Bénilan. Solutions intégrales d'équations d'évolution dans un espace de Banach. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 274 :A47–A50, 1972.

[15] D. Bothe, Nonlinear Evolutions in Banach Spaces - Existence and Qualitative Theory with Applications to Reaction-Diffusion Systems, Habilitation thesis, Univ. of Paderborn. 1999.

[16] Yu. G. Borisovich. An application of the concept of rotation of compact vector fields in linear spaces. Trudy Sem. Funktsion. Anal. Voronezh Gos.0 Univ. 12(1969), 28-42 (in Russian).

[17] H. G. Bothe. How hyperbolic attractors determine their basins. *Nonlinearity*, 9(5) :1173–1190, 1996.

[18] D. Bothe. Multivalued perturbations of m-accretive differential inclusions. *Israel J. Math.*, 108 :109–138, 1998.

[19] T. Cardinali, P. Rubbioni, Impulsive semilinear differential inclusions : topological structure of the solutions set and solutions on noncompact domains, Nonlinear Anal., TMA. 69 (1) (2008) 73-84.

[20] J.F. Couchouron and M. Kamenskii, A unified topological point of view for integro-diffrential inclusions and optimal control, (J.Andres, L. Gorniewicz and P. Nistri eds.), Lecture Notes in Nonlinear Anal. **2** (1998), 123-137.

[21] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24 (1955), 84-92.

[22] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sciences, 2006.

[23] J. Diestel, W. M. Ruess, and W. Schachermayer. On weak compactness in $L^1(\mu, X)$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(2) :447–453, 1993.

[24] Diestel, J. and Uhl, Jr., J. J., Vector measures, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[25] C. Gori, V. Obukhovskii, M. Ragni and P. Rubbioni, Existence and continuous dependence results for semilinear functional differential inclusions with infinite delay, Nonlinear Anal. **51** (2002), 765-782.

[26] Lech Górniewicz. *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, volume 495 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[27] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Second Edition, Springer, 2006

[28] L. Górniewicz, A. Granas and W. Kryszewski, Sur la méthode de l'homotopie dans la théoorie des point fixes pour les applications multivoques. Partie 2 : L 'indiee dans les ANRs compaetes, Comptes Rendus de l'Aeadémie des Sciences, Paris 308 (1989), 449-452.

[29] L. Guedda, On the existence of mild solutions for neutral functional differential inclusions in Banach space, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 2. (2007), pp. 1-15

[30] L. Guedda and A Hallouz, Existence results for Neutral Functional Differential Inclusions in Banach Space, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 9. (2008), pp. 1-23.

[31] L.Guedda, , A. Hallouz, (2014). Abstract inclusions in Banach spaces with boundary conditions of periodic type. Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization, 34(2), 229-253.

[32] S. Gutman. Evolutions governed by m-accretive plus compact operators. *Nonlinear Anal.*, 7(7) :707–715, 1983.

[33] Nikolaos Halidias and Nikolaos S. Papageorgiou. Nonlinear boundary value problems with maximal monotone terms. *Aequationes Math.*, 59(1-2) :93–107, 2000.

[34] E. Hernandez ; A remark on neutral partial differential equations, Cadernos De Matematica,**04** (2003), 311-318.

[35] E. Hernández. M. Rabello and Hernán R. Henríquez ; Existence of solutions for impulsive partial neutral functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 331 (2006), Issue 2, 1135-1158

[36] I. I. Vrabie, Periodic solutions for nonlinear evolution equations in a Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 3, 653âĂŞ661.

[37] M. Kamenskii and V. Obukhovskii, Condensing
multioperators and periodic solutions of parabolic functional differential inclusions in Banach spaces, Nonlinear Anal. **20** (1993), 781-792.

[38] M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, Method of the solution sets for a quasilinear functional differential inclusion in a Banach space, Differ. Equ. Dyn. Syst. **4** (1996), 339-359.

[39] M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Berlin-New York, 2001.

[40] T. Kato, Nonlinear evolution equations, Proc. Sympos. Appl. Math. 17 (1965),50-67.

[41] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, E. I. Pustylnik, and P. E. Sobolevskii, Integral Operators in Spaces of Summable Functions, Moscow (1966).

[42] C. S. Kubrusly, The elements of operator theory, Birkhäuser, 2011.

[43] K. Kuratowski, Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1934), 301-335.

[44] V. V. Obukhovskii, Semilinear functional-differential inclusions in a Banach space and controlled parabolic systems, Soviet J. Automat. Inform. Sci. **24** (1991), 71-79.

[45] O'Regan. Donal, Je Cho. Yeol, Chen. Yu-Qing, Topological degree theory and applications, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[46] N. S. Papageorgiou, S. T. Kyritsi-Yiallourou, Handbook of applied analysis, Springer, 2009.

[47] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[48] S.N. Papageorgiou, On multivalued semilinear evolution equations, Boll. U.M.I. (**7**) 3-B (1990), 1-16.

[49] A. Pazy, Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, vol.**44**, Springer Verlag, New York,1983.

[50] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 277304.

[51] Jan Prüss, On semilinear evolution equations in Banach spaces, *J. Reine Angew. Math.*, 303/304 :144–158, 1978.

[52] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle, Funct. Anal. Appl.**1** (1967), 74-76

[53] B. N. Sadovskii, Limit-compact and condensing operator's, Uspckhi iVIa.t. Nauk 27 (1972), no. 1(163), 85-155.

[54] P. Volkmann, Cinq cours sur les Ãľquations diffÃľrentielles dans les espaces de Banach, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions. (1995), 501-520.

[55] I. I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, volume 32 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987. With a foreword by A. Pazy.

[56] S. Ralph E, Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Mathematical Surveys and Monographs 49. Providence, RI : American Mathematical Society. p. 103. MR1422252. ISBN 0-8218-0500-2.

[57] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[58] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol. I : Fixed Point Theorems, Springer Verlag, New York, 1986.