N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES
SIDI BEL ABBES

THESE
DE DOCTORAT

Présentée par

DADDIOUAISSA HACHEMI

Spécialité : Mathématiques
Option : Equations différentielles aux dérivées partielles

Intitulée

ETUDE DE L'EXISTENCE GLOBALE ET DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'UNE CERTAINE CLASSE DE SYSTEME DE REACTION-DIFFUSION

Soutenue le............................

Devant le jury composé de :

Encadreur: Mechab Mustapha, Pr, Université de Sidi Bel Abbès
Président : Benaissa Abbès, Pr, Université de Sidi Bel Abbès
Examinateurs:
Bouzar Chikh, Pr, Université d'Oran
Bouguima Sidi Mohamed, Pr, Université de Tlemcen
Moussaoui Mohand, Pr associé,ENS de Kouba

Table des matières

Première partie

Introduction

Introduction

"Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions (chimiques) locales ; dans lequel les différentes substances se transforment ; et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace.

Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent.

Mathématiquement, les systèmes de réaction-diffusion sont représentés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires qui prennent la forme générale :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = D\Delta u + f(u), \quad t > 0,\, x \in \Omega \\ u_i(x,0) & = u_{0i}(x) \quad t = 0,\, x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert regulier borné de $\mathbb{R}^n$, $u(x,t) = (u_i(x,t))_{i=1}^m$ est la fonction inconue, où chaque composante du vecteur représente la concentration d'une substance, D est une matrice de coefficients de diffusion, Δ désigne le Laplacien et f une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$.

Les conditions aux bord seront considérées pour traduire le comportement des substances au bord du domaine Ω." [1]

Le but essentiel de ce travail est l'etude de l'existence globale des solutions de certaines classes de systèmes de reaction-diffusion de la forme (1), ainsi que leurs comportement asymptotique. Il est organisé comme suit :

- Une première partie composée de deux chapitres (chapitre 1 et chapitre 2). Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions générales et certains résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures. Dans le deuxième

1. Noter que cette partie a été prise principalement de Wikipedia [56].

chapitre on présente quelques resultats d'existence locale de solutions faibles et classiques de systemes de réaction-diffusion ainsi que la positivité de ces solutions.

- La deuxième partie comporte aussi deux chapitres (chapitre 3, chapitre 4) où on étudie l'existence de solutions globales de systèmes avec différents type de nonlinéarités (exponentielles ou polynomiales).

- La troisième partie (chapitre 5) est consacrée à l'etude du comportement asymptotique des solutions.
- Une annexe est ajouté, où on présente differente systèmes de reaction-diffusion modelisant differents problèmes et phénomènes physiques.

Plus exactement ;

Dans le ***chapitre*** 3 on s'intéresse à l'étude de l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution d'un système de reaction-diffusion avec une nonlinearité exponentielle, intervenant dans la modelisation de la propagation de la maladie du SIDA dans une population (voir [7], [22], [47]). Un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \alpha u \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f(u,v) - \sigma\kappa(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{2}$$

avec des conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

et des conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec la frontière $\partial\Omega$ de classe C^1, η est la normale extérieure de $\partial\Omega$, $a > 0$, $b > 0$ sont les constantes de diffusion, et Π, α, σ sont des constantes stirictement positives, κ et f sont des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ et $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ respectivement.

Le nombre de résultats obtenus au cours de ces dernières années, autour de la question d'existence globale des solutions, n'a cessé de croitre.

Dans le cas $\Pi = \alpha = \sigma = 0$ et $f(u,v) = uT(v)$, Alikakos [1] a étudié l'existence globale de la soloution avec la condition $T(v) \leq C(1 + |v|^{(n+2)/n})$.

Pour $\alpha > 0$, Massuda [44] a obtenu des résultats positifs sous la condition $T(v) \leq C(1 + |v|^{\alpha})$; qui représente un accrroissement polynomiale du deuxième membre du système ; en utilisant la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov.

En utilisant la technique de la fonctionnelle de Lyapunov, Haraux et Youkana ont étudié dans [24] le cas de l'accroissement exponentiel faible (i.e $T(v) = e^{\alpha v^{\beta}}$), $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$.

Le cas d'un accroissement exponentiel, c'est-a-dire $T(v) = e^{\alpha v}$, nous citons le travail de Barabanova [3], dans lequel elle donne une réponse positif au problème avec une restriction sur la donnée initiale

$$\| u_0 \|_\infty < \frac{8ab}{rn(a-b)^2},$$

Cette restriction limite la classe des conditions initiales admissibles. La force de ce résultat depend de la difference $(a - b)$, dans le sens que le choix de la donnée initiale est large si cette différence est suffisament petite.

On peut citer aussi le travail de H. Kwean [39], qui a prouvé l'existence globale des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -KuT(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = uT(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

avec $K \geq \alpha n$, $\| u_0 \|_\infty < 1$ et

$$3 - 2\sqrt{2} \leq \frac{a}{b} \leq 3 - 2\sqrt{2}.$$

Le résultat le plus marquant est celui de I. J. Kanel [31] qui ; en utilisant les propriétés inhérentes à la fonction de Green ; a developpé le résultat de Barabanova [3], sans aucune restriction sur l'accroissement de la fonction $T(v)$, sous la condition moins contraignante :

$$b < a,$$

Pour le cas d'un système a n équations, on peut citer les travaux [19] et [28, 29, 30].

Pour le cas, plus générale, suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u,v), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \qquad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \qquad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions continuement différentiables sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, avec $f(0,s) \geq 0$ et $g(r,0) \geq 0$ pour tout $r,\ s \geq 0$, pour assurer la positivité de la solution.

S.Kouachi [38], a répondu positivement à la question, sous les hypothèses suivantes : Pour tout $r,\ s \geq 0$,

- $K^{2i-1}f(r,s)+g(r,s)\leq C_1(r+s+1)\quad \text{pour}\, i=1,...,p,$
- $|f(r,s)|,|g(r,s)|\leq C_2(r+s+1)^m.$

avec $p,m\geq 1$ et K satisfait

$$K\geq \frac{(a+b)}{2\sqrt{ab}}.$$

Dans le cas $\Pi>0$, $\alpha>0$, $\sigma>0$, L. Melkemi et al. [45], ont prouvé l'existence globale de la solution, dans une premiere étape, lorsque

- $0\leq f(r,s)\leq (1+s)^{\beta}\varphi(r)\quad \text{pour tout}\, r,s\geq 0,\ \beta\geq 1$
- $g(r,s)\leq \psi(s)f(r,s),$
- $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{\psi(s)}{s}=0.$

dans une deuxième étape, dans [46] lorsque $g(r,s)=f(r,s)\leq \psi(r)\varphi(s)$ telque

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln(1+\varphi(s))}{s}=0.$$

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution du problème, avec une nonlinearité exponentielle, telle que f satisfait les conditions suivantes :

- $\forall\tau\geq 0,\ f(0,\tau)=0,$
- $\forall\xi\geq 0,\ \forall\tau\geq 0,\ 0\leq f(\xi,\tau)\leq \varphi(\xi)(\tau+1)^{\lambda}e^{r\tau},$
- $\kappa(\tau)=\tau^{\mu},\ \mu\geq 1,$

où r et λ sont des constantes positives, telles que $\lambda\geq 1$, et φ est une une fonction positive de classe $C(\mathbb{R}_+)$.

Cette existence globale est assurée pour tout v_0 et u_0, satisfaisant la condition suivante :

$$\max\left(\parallel u_0\parallel_\infty,\frac{\Pi}{\alpha}\right)<\frac{\theta^2}{2-\theta}\quad\frac{8ab}{rn(a-b)^2}.$$

Dans le ***chapitre*** 4 on s'intéresse à l'étude de l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution d'un système de reaction-diffusion dont la matrice de diffusion est triagulaire, (i.e) de la forme

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-a\Delta u=\Pi-f(u,v)-\alpha u & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\\ \frac{\partial v}{\partial t}-c\Delta u-d\Delta v=g(u,v)-\sigma v & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+,\end{cases}$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial v}{\partial\eta}=0\quad \text{on}\ \partial\Omega\times\mathbb{R}_+,$$

et les conditions initiales

$$u(0,x)=u_0(x)\geq 0, \quad v(0,x)=v_0(x)\geq 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

Les constantes de diffusion sont $a>0$, $c>0$ et $d>0$, telles que $a>d$ et $c^2<4ad$ qui représente la condition de parabolicité.

Dans le cas $\Pi=0$, $\alpha=0$, $\sigma=0$ et $f(u,v)=uT(v)$, Kirane [34] a étudié ce systeme sous la condition suivante :

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln(1+T(s))}{s}=0.$$

Ensuite Kanel et Kirane ont donné dans [32] une réponse positive, sous les conditions suivantes :

$$f(u,v)\leq K\phi(u)e^{\gamma v},$$

où K et γ sont des constantes positives, ϕ est une fonction continue, nonnegative et localement Lipschitizienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi(0)=0$ et $d>a$, $c<d-a$.

Le but de ce chapitre est l'étude du problème avec une nonlinearité polynomiale, c'est-à-dire :

- ⋆ Pour tout $\xi\geq 0$ et tout $\tau\geq 0$, $0\leq f(\xi,\tau)\leq\varphi(\xi)(\mu+\tau)^r$;
- ⋆ Pour tout $\xi\geq 0$ et tout $\tau\geq 0$, $g(\xi,\tau)\leq\psi(\tau)f(\xi,\tau)+\phi(\tau)$,

où r,μ sont des constantes positives telles que $r\geq 1$, $\mu\geq 1$, φ,ψ et ϕ sont des fonctions non négatives de classe $C(\mathbb{R}_+)$, telles que

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\psi(\tau)}{\tau}=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\phi(\tau)}{\tau}=0.$$
$$\phi(0)>\beta\frac{c}{a-d}.$$

Dans le ***chapitre*** 5 nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique des solutions du même problème etudié dans le chapitre 4, sous une condition supplémentaire sur la non linerrité g, à savoir :

$$\forall\xi\geq 0,\ \forall\tau\geq 0, \quad g(t,\xi,\tau)=\varpi(t)f(\xi,\tau)\leq\psi(\tau)f(\xi,\tau)+\phi(\tau),$$

où ϖ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et il existe $p\geq 1$, telle que

$$\int_0^{+\infty}\varpi^p(s)ds<+\infty.$$

Nous terminerons, en faisant remarquer que les résultats de notre thèse ont fait l'objet de deux publications, à savoir : [11] et [12].

Deuxième partie

Préliminaires

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on précise quelques notations, ainsi que certains résultats préliminaires (semi-groupes, fonctionnelle de Lyapunov), qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures.

1.1 Notations et outils

1.1.1 Notations

Operateurs
Le point générique de $\mathbb{R}^n$ est noté $x = (x_1, ..., x_n)$ et pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est la longueur de α.

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \Big).$$

le gradient de u et

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

son Laplacien.

Domaine

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière, on note $\mu(\Omega) = |\Omega|$ la mesure de Ω et $\eta(x)$ la normale au bord $\partial\Omega$ au point x.
Si $(\cdot,\cdot)$ designe le produit scalaire, la derivée normale d'une fonction u régulière sur $\partial\Omega$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = (\nabla u(x), \eta(x)).$$

On note $Q_T = \Omega \times [0,T]$, le cylindre de base Ω

Espaces fonctionels

$C(\overline{\Omega})$ est l'espace des applications continues sur $\overline{\Omega}$, muni de la norme

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$ est l'espace des applications k fois continument différentiables sur Ω, $k \in \mathbb{N}$, et

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^n} C^k(\Omega).$$

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à supports compacts.

Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f mesurables sur Ω, telles que $\int_\Omega |f|^p dx < \infty$, avec la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions f mesurables sur Ω telles que :

$$\exists\, C > 0; \quad |f(x)| \leq C \quad (\text{p.p sur}\Omega)$$

avec la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf\{C;\ \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

$W^{1,p}$ est l'espace de Sobolev defini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega);\ \forall\, i = 1,..,n,\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega)\right)\right\},$$

où la dérivation est au sens des distributions. Il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p,$$

cette norme est equivalente à la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_p{}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

On definit l'espace

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \Big(|\alpha| \leq m \Longrightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\Big)\Big\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

L'espace $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note :

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

$L^p((a, b); X)$ est l'espace des fonctions $f : (a, b) \to X$ telles que

$$\int_{(a,b)} \|f(x)\|_X{}^p dx < \infty.$$

On le muni de la norme

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} = \left(\int_{(a,b)} \|f(x)\|_X{}^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.2 Inégalités et formules [6]

Dans ce qui suit, on va énumérer quelques formules et inégalités classiques.

1) Formule de *Green*
C'est en fait une généralisation de la formule d'intégration par partie.
On peut écrire la *formule de Green* sous deux formes :

$$\forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx,$$

et

$$\forall u \in H^2(\Omega),\, \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx.$$

2) Inegalité de Hölder

Soit $p, q \in [0, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f,\ g \in L^p(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

3) Inegalité de Gronwall

Soit $T > 0$ et ω, φ deux fonctions intégrables sur $(0, T)$ non négatives, telles que $\omega\varphi \in L^1(0, T)$ et

$$\exists\, C_1, C_2 \geq 0; \quad \varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \omega(s)\varphi(s) ds, \quad \text{p.p sur } (0, T).$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \omega(s) ds\right), \quad \text{p.p sur } (0, T)$$

4) Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Soit Ω un ouvert connexe de classe C^1, et soit $1 \leq p \leq \infty$, alors il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in W^{1.p}(\Omega) \quad \|u - \overline{u}\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \tag{1.1}$$

avec $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$. D'ou on déduit, grâce à l'inégalité de Sobolev que si $p < n$

$$\|u - \overline{u}\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1.p}(\Omega). \tag{1.2}$$

Lemme 1.1.1. [4, 21] *Soit f une fonction uniformement continue sur $[0, +\infty)$, alors :*

$$f \in L^1([0, +\infty)) \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0. \tag{1.3}$$

5) Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.1.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une fonction telle que :*

$$\exists k \in [0, 1[,\, \forall (x, y) \in X \times X, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \tag{1.4}$$

alors f admet un unique point fixe dans X, c'est-à-dire

$$\exists!\, x_0 \in X; \quad f(x_0) = x_0.$$

Remarque 1.1.1. *Quand f vérifie (1.4), on dit que f est une contraction stricte sur X.*

1.2 Semi-groupes [48, 8]

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Soient X, Y deux espace de Banach et $A : X \to Y$ un opérateur de A dans Y. On désigne par $D(A)$, $N(A)$, $R(A)$ et $G(A)$, respectivement, le domaine, le graphe, le noyau et l'image de l'opérateur A.

Définition 1.2.1. *On appelle ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :*

i) $A_\lambda(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A))$ *est dense dans* X *;*

ii) A_λ^{-1} *existe et est continu de* $A_\lambda^{-1}(R(A))$ *dans* X.

la resolvante, ou l'opérateur résolvant de A est noté :

$$R(\lambda : A) = A_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}.$$

On note par $\mathfrak{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Définition 1.2.2. *Une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{L}(X)$ forme un semi-groupe fortement continu (on dit aussi de classe C^0) dans X, si elle vérifie les conditions suivantes :*

(A) $G(t+s) = G(t)G(s)$, *pour tout* $s, t \geq 0$,

(B) $G(0) = I$ *(identité dans* $\mathfrak{L}(X)$*),*

(C) $\lim\limits_{t\to 0} \|G(t)x - x\|_X = 0$ *pour tout* $x \in X$.

Proposition 1.2.1. *. Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X, alors*

(a) $t \to \|G(t)\|$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0, T]$,

(b) *Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to G(t)x$ est continue (à valeures dans X) sur* $[0, +\infty[$,

(c) *Il existe des constantes positives ω et M telles que*

$$t \in \mathbb{R}^+, \quad \|G(t)\| \leq M \exp(\omega t) \quad .$$

Définition 1.2.3. *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu, alors :*

1/ *On dit que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformement borné si* $\omega = 0$.

2/ *On dit que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction fortement continu si l'on a :*

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|G(t)\| \leq 1$$

Proposition 1.2.2. *Soit $A \in \mathfrak{L}(X)$. Pour tout $T > 0$ et tout $x_0 \in X$, il existe une unique solution $u \in C^1([0,T], X)$ problème suivant :*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall\, t \in [0,T] \\ u(0) = x_0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par : $\forall\, t \in [0,T], \quad u(t) = e^{tA}x.$

Définition 1.2.4. *Soient $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu défini sur un espace de Banach X. On note par D le sous ensemble de X tel que pour $x \in D$, $G(t)x$ est différentiable à droite du point $t = 0$ i.e.,*

$$D = \left\{ x \in X; \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{G(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}. \tag{1.5}$$

Pour $x \in D$, on note

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{G(h)x - x}{h}. \tag{1.6}$$

L'opérateur A est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, de domaine $D(A) = D$.

Proposition 1.2.3. *Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, alors $D(A)$ est un sous-espace vectoriel dense de X.*

Proposition 1.2.4. *Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, alors :*

(a) $\forall\, x \in D(A), \forall\, t \geq 0, \quad G(t)x \in D(A)$,

(b) *Si φ est une fonction continue dans $[0, +\infty[$, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s)G(s)x ds = \varphi(t)G(t)x,$$

(c) *Si $x \in D(A)$, la fonction $t \to G(t)x$ est une fois continûment différentiable de $[0, +\infty[\to X$ et on a :*

$$\frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

(d) *A est un opérateur fermé.*

Définition 1.2.5. *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. On dit que A est un opérateur accrétif, si :*

$$\forall\, x, y \in D(A),\ \forall\, \lambda > 0, \qquad \|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(Ax - Ay\|,$$

Si de plus $I + A$ est surjectif $\big($i.e., $R(I + A) = X,\big)$ on dit que A est un opérateur maximal monotone, ou bien m-accrétif.

Lemme 1.2.1. *Supposons que $X = H$ est un espace de Hilbert, alors on a deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur A soit m-accrétif :*

(i) $\forall\, x \in D(A), \quad Re(Ax, x) \geq 0,$

(ii) $R(I + A) = H.$

Théorème 1.2.1. [48] *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans un espace de Banach X et satisfaisant les conditions suivantes :*

(a) *Pour* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad \rho(A) \supset \Sigma_\delta = \left\{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}.$

(b) *Il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\forall\, \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}, \qquad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

Alors, A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ de classe C^0, uniformément borné, tel que :

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda, \tag{1.7}$$

où Γ est la courbe regulière dans Σ_δ, de $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$ pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$. L'intégrale (1.7) converge pour $t > 0$.

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Il est naturel de se demander si l'application $t \to G(t)x$ pourrait être prolongée en une fonction analytique dans un domaine convenable du plan complexe $\mathbb{C}$.

Nous avons considéré jusqu'à présent des opérateurs $G(t)$ dépendant de la variable réelle $t > 0$.

Nous allons donc examiner ici le cas où le paramètre t est complexe. Comme nous voulons préserver la structure du semi-groupe, le domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ sur lequel nos opérateurs seront définis, doit être un sous-groupe additif.
Nous allons nous restreindre au cas des domaines angulaires contenant le demi axe réel positif.

Soit X un espace de Banach complexe et

$$\triangle = \{z : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$$

avec $\phi_1 < 0 < \phi_2$. Pour tout $z \in \triangle$, on considère $G(z)$ un opérateur linéaire borné.

Définition 1.2.6. *On dit que la fammille $\{G(z)\}_{z\in\triangle}$ est un semi-groupe analytique dans $\triangle$ si :*

(A) *Pour tout* $x \in X$, $z \to G(z)x$ *est analytique dans* $\triangle$,

(B) $G(0) = I$ *et*

$$\forall\, x \in X, \quad \lim_{z\to 0, z\in\triangle} G(z)x = x$$

(C) $\forall\, z_1,\ z_2 \in \triangle, \quad G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2).$

De la definition on constate que la restriction d'un semi-groupe analytique a l'axe réel est un semi-groupe fortement continu.

Nous allons voir la possibilité pour qu'un semi-groupe fortement continue, $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, soit prolongeable en un semi-groupe analytique dans un domaine du type $\triangle$. Le théorème 1.2.1 affirme que si les hypothèse (a) et (b) sont satisfaites alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ fortement continu et uniformement borné.

Théorème 1.2.2. [48] *Soient $G(t)$ un semi-groupe fortement continu, uniformement borné, et A le générateur infinitésimal du semi-groupe $G(t)$ tel que $0 \in \rho(A)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$G(t)$ est prolongeable en un semi-groupe analytique dans un secteur*

$$\triangle_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\},$$

et $G(z)$ est uniformement borné dans tout sous secteur $\triangle_{\delta'}$, $\delta' < \delta$.

(b) $\exists\, C > 0;\ \forall\, \sigma > 0,\ \forall \tau \neq 0, \quad \|R(\sigma + i\tau; A)\| \leq \dfrac{C}{|\tau|},$

(c) *Il existe $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ et $M > 0$ telles que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda : |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\},$$

et

$$\forall \lambda \in \Sigma \setminus \{0\}, \quad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|},$$

(d) $G(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et il existe une constante positive C telle que :

$$\forall t > 0, \qquad \|AG(t)\| \leq \frac{C}{t}.$$

Démonstration. $(\mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{b})$.

Soit $0 < \delta' < \delta$ tel que : $\exists\, C_1 > 0;\ \forall\, z \in \triangle_{\delta'}, \quad \|G(z)\| \leq C_1$.

Pour $x \in X$ et $\sigma > 0$ on a :

$$R(\sigma + i\tau; A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} G(t)x dt. \tag{1.8}$$

Comme $G(z)$ est uniformément borné et analytique dans $\triangle_{\delta'}$, alors on peut considérer le changement de variable $\rho e^{i\vartheta}$, $0 < \rho < \infty$ et $|\vartheta| \leq \delta'$. Pour $\tau > 0$, on a

$$\begin{aligned}\|R(\sigma + i\tau; A)x\| &\leq \int_0^{\infty} e^{-\rho(\sigma \cos\delta' + \tau \sin\delta')} C_1 \|x\| d\rho \\ &\leq \frac{C_1}{\sigma \cos\delta' + \tau \sin\delta'} \leq \frac{C}{\tau}.\end{aligned}$$

De même pour $\tau < 0$, on obtient

$$\|R(\sigma + i\tau; A)x\| \leq \frac{-C}{\tau}$$

d'où (1.12).

Pour les autres implications on peut les trouver dans [48].

Remarque 1.2.1. [**48**] *Pour un semi-groupe $G(t)$ fortement continu, on a :*

$$\|G(t)\| \leq M e^{\omega t}.$$

En utilisant la transformation $T(t) = G(t)e^{-\omega t}$, on peut avoir les résultats du Théorème 1.2.2 correspendant au semi-groupe $G(t)$, où :

(a) ne change pas

(b) se transfome en :

$$\forall \sigma > \omega,\ \forall \tau \neq 0, \quad \exists C > 0 \quad \|R(\sigma + i\tau; A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) se transfome en :

$$\rho(-A) \supset \Sigma = \{\lambda : |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{\lambda = \omega\}$$

et

$$\|R(\lambda; -A)\| = \|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|},$$

(d) se transfome en :

$$\exists C_1, \omega_1 > 0, \quad \|AG(t)\| \leq \frac{C_1}{t} e^{\omega_1 t},$$

Définition 1.2.7. *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans X. On dit que A est sectoriel s'il existe $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ et un réel a, tels que*

$$\rho(A) \supset S_{a,\phi} = \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| < \pi,\ \lambda \neq a\},$$

et

$$\|R(\lambda; A)\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Théorème 1.2.3. *Si A est un opérateur sectoriel, alors $-A$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $G(z)$.*

Théorème 1.2.4. *Supposons que l'opérateur A est sectoriel et B un opérateur linéaire avec $D(B) \supset D(A)$ tel que :*

$$\forall\, x \in D(A), \quad \|Bx\| \leq \varepsilon\|Ax\| + K_\varepsilon\|x\|,$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante assez petite et K_ε une constante stirictement positive dependante de ε, alors $A + B$ est sectoriel.

1.3 Fonctionnelle de Lyapunov [24, 45, 51]

Etant donné le système de réaction-diffusion à m équations, posées sur un cylindre $(0, T) \times \Omega$, du type suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_k & = d_k \Delta u_k + f_k(u_1, ..., u_m), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u_k(0, x) & \qquad = u_{k0}(x) \geq 0, \quad x \in \Omega,\ k = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1.9}$$

où $u_k = u_k(t, x)$, $d_k > 0$ sont les constantes de diffusion, $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ des fonctions localement lipschitziennes en $u = (u_1, ..., u_m)$.

Définition 1.3.1. *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée au système (1.9), toute fonction*

$$L : \mathbb{R}_+^m \to [0, +\infty),$$

telle que

$$\forall\, t > 0, \quad \frac{d}{dt} L(u(., t)) \leq 0, \tag{1.10}$$

où bien, il existe s et Γ des constantes positives telles que

$$\frac{d}{dt} L(u(., t)) \leq -sL(u(., t)) + \Gamma, \tag{1.11}$$

et pour un certain $p > n/2$ on a

$$\forall\, t > 0, \quad \|f_k\|_p \leq CL(u(., t)). \tag{1.12}$$

Commentaire :

Si la condition (1.10) est satisfaite alors on a

$$\forall\, t > 0, \quad \|f_k\|_p \leq CL(u(., t)) \leq CL(u(., 0)). \tag{1.13}$$

Si la condition (1.11) est satisfaite alors on multiplie e^{st}, on aura

$$\frac{d}{dt}(L(u(.,t)e^{st}) \leq \Gamma e^{st}, \tag{1.14}$$

on intègre sur $(0,t)$,

$$L(u(.,t)e^{st} \leq \frac{\Gamma}{s}(e^{st}-1), \tag{1.15}$$

d'où

$$L(u(.,t) \leq \frac{\Gamma}{s}(1-e^{-st}) \leq \frac{\Gamma}{s} \tag{1.16}$$

et donc on retrouve la condition (1.10) et par suite la majoration (1.13).

1.4 Equations d'évolutions semi-linéaires [48]

Nous entendons par problème d'évolution semi-linéaire tout problème de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t,u), \\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Nous supposons ici que $-A$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, fortement continu dans un espace de Banach X et $f : [0,T] \times X \to X$ une fonction continue en t, Lipschitziènne en u.

On traite l'existence d'une solution locale, i.e., le problème (1.17) admet-il une solution sur un intervalle $[0,T)$. Si oui, peut-on étendre la solution pour qu'elle soit globale ou bien qu'elle explose en temps fini.

1.4.1 Types de solutions

- **Solution classique**

Définition 1.4.1. *On appelle solution classique du problème* (1.17) *dans* $[0,T)$, *toute fonction*

$$u \in C\left([0,T), X\right) \cap C^1\left((0,T), D(A)\right). \tag{1.18}$$

vérifiant le problème (1.17) *dans* $[0,T)$.

- ***Mild solution***

Si on pose $f(t, u(t)) = g(t)$, en considèrant $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe fortement continu généré par l'operateur A et u la solution de (1.17), alors la fonction $H(t) = S(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\frac{dH}{ds} = S(t-s)g(s). \tag{1.19}$$

Par ailleurs, si $g \in L^1(([0,T), X)$, alors $S(t-s)g(s)$ est intégrable et en intégrant (1.19) entre 0 et t on aura :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds. \tag{1.20}$$

donc :

Propriété 1.4.1. *[48] Pour tout $u_0 \in X$, le problème (1.17) a au plus une solution et si cette solution existe, alors elle est donné par la formule (1.20).*
Cette expression est dite **mild solution** *du problème (1.17).*

Définition 1.4.2. *(**solution forte**) Si la solution u est différentiable presque partout sur $[0,T]$, telle que $u' \in L^1([0,T), X)$, alors u est dite* **solution forte** *du problème (1.17).*

1.4.2 Existence de solutions

Dans cette section on présente des résultats d'existence de solutions du problème (1.17).

Cas d'un semi-groupe fortement continu

Lemme 1.4.1. *Soit $F : E \to E$ une application sur l'espace de Banach E. Si F possède une itérée contractante, alors F admet un unique point fixe.*

Démonstration. Pour un certain n, F^n est contractante d'où elle admet un unique point fixe x_0. Supposons que x_1 est un point fixe de F, on a

$$F^n(x_1) = F^{n-1}(x_1) = ... = x_1,$$

donc $x_1 = x_0$ nécessairement (unicité du point fixe de F^n), ce qui montre que si F admet un point fixe alors il est unique. De plus

$$F^n(F(x_0)) = F^{n+1}(x_0) = F(F^n(x_0)) = F(x_0),$$

donc $F(x_0)$ est un point fixe de F^n, d'où $F(x_0) = x_0$ (unicité du point fixe F^n). □

Théorème 1.4.1. *[48] Soit $f : [0,T] \times X \to X$ continue en $t \in [0,T]$ et uniformement L-lipschitzienne en $u \in X$. Si $-A$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu sur X, alors pour tout $u_0 \in X$ le problème (1.17) admet une unique mild solution $u \in C([0,T];X)$, de plus ; l'application $u_0 \mapsto u$ est lipschitzienne de X dans $C([0,T];X)$.*

Démonstration. Soient $u_0 \in X$, et $F : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ l'application définie par : $u \in C([0,T];X)$,

$$(Fu)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall t\imath\mathcal{G}n[0,T]. \tag{1.21}$$

De la définition de F, f étant L-lipschitzienne, on déduit :

$$\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| \leq MLt\|u-v\|_\infty, \tag{1.22}$$

où M est la borne de $\|S(t)\|$ sur $[0,T]$.
On note par $\|u\|_\infty$ la norme de u comme élément de l'espace $C([0,T];X)$.
Si on compose F avec lui mème, et en utilisant (1.21) et (1.22), on aura

$$\begin{aligned}
\|(F^2u)(t) - (F^2v)(t)\| &\leq \int_0^t \|S(t-s)(f(s,(Fu)(s)) - f(s,(Fv)(s)))\|ds \\
&\leq ML\int_0^t \|(Fu)(s)) - (Fv)(s)\|ds \\
&\leq M^2L^2\|u-v\|_\infty \int_0^t sds \leq \frac{(MLt)^2}{2}\|u-v\|_\infty,
\end{aligned}$$

En composant F, n fois, on aura :

$$\|(F^nu) - (F^nv)\|_\infty \leq \frac{(MLT)^n}{n!}\|u-v\|_\infty,$$

Pour n assez grand $\dfrac{(MLT)^n}{n!} < 1$, donc F^n est contractante donc admet un unique point fixe, et d'après le Lemme 1.4.1, F admet un unique point fixe $u \in C([0,T];X)$.
Soit v une mild solution de (1.17) dans $[0,T]$, avec la donnée initiale v_0, alors

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| \leq& \|S(t)u_0 - S(t)v_0\| \\
&+ \int_0^t \|S(t-s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\|ds \\
\leq& M\|u_0 - v_0\| + ML\int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq Me^{MLT}\|u_0 - v_0\|$$

et par suite

$$\|u - v\|_\infty \leq Me^{MLT}\|u_0 - v_0\|,$$

d'où on déduit l'unicité de la solution u et que l 'application $u_0 \to u$ est lipschitzienne.

$\square$

Il est à remarquer que si f satisfait les conditions du théorème 1.4.1, il n'est pas sûr que la mild solution soit classique ou même forte. Dans le théorème suivant on impose des conditions supplémentaires pour que la solution soit classique.

Théorème 1.4.2. [48] *Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Si $f : [0,T] \times X \to X$ est continument différentiable de $[0,T] \times X$ dans X, alors la mild solution du problème* (1.17)*, avec $u_0 \in D(A)$, est classique.*

De même, si $f : [0,T] \times X \to X$ est seulement Lipschitzienne pour les deux variables i.e. : $\exists C > 0;\ \forall t_1,\ t_2 \in [0,T]\ \forall u_1,\ u_2 \in X$,

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq C(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|), \tag{1.23}$$

la mild solution n'est pas nécessairement une solution forte, par contre si X est reflexif, la condition (1.23) suffit pour que la solution soit forte.

Théorème 1.4.3. [48] *Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$ fortement continu sur un espace de Banach reflexif X. Si $f : [0,T] \times X \to X$ vérifie la condition (1.23), alors pour tout $u_0 \in D(A)$, la mild solution u du problème* (1.17) *est une solution forte de ce problème.*

Théorème 1.4.4. [48] *Soit $f : [0,T] \times X \to X$ continue en t pour $t > 0$ et localement Lipschitiziènne en u, uniformement en t sur tout intervalle borné, Si $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$ fortement continu sur un espace de Banach X. Alors pour tout $u_0 \in X$, il existe $T_{max} \leq \infty$ tel que le problème (1.17) admet une mild solution u sur $[0, T_{max}[$.*
En plus si $T_{max} < \infty$ alors

$$\lim_{t \uparrow T_{max}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Le cas du semi-groupes analytiques

Dans les applications on recontre souvent des opérateurs $-A$, qui sont des générateurs infinitésimaux des semi-groupes analytiques dans un espace de Banach.

Notons que si $-A$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique alors $(-A - \alpha I)$ est inversible et génère un semi-groupe analytique borné pour un α suffisamment grand, ce qui nous amène à supposer que $-A$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné et que $-A$ est inversible ($0 \in \rho(-A)$).

Sous des hypothèses convenable sur A, on peut definir l'opérateur puissance fractionnaire de A (i.e. A^α pour $0 \leq \alpha \leq 1$, voir [48] section 2.2.6).
A^α est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A^\alpha)$ dense dans X, donc $D(A^\alpha)$ muni de la norme du graphe, (i.e., $|||x||| = \|x\| + \|A^\alpha x\|$) est un espace de Banach qu'on note X_α et si $0 < \alpha < \beta$ alors $X_\beta \subset X_\alpha$. Comme A^α est inversible alors sa norme $|||\ |||$ est équivalente à la norme $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$.

Théorème 1.4.5. [48] *Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ analytique. Si $0 \in \rho(A)$ alors,*

(1) *$S(t) : X \to D(A^\alpha)$ pour tout $t > 0$ et $\alpha \geq 0$.*

(2) *Pour tout $x \in D(A^\alpha)$ on a $S(t)A^\alpha x = A^\alpha S(t)x$.*

(3) *Pour tout $t > 0$, il existe $M_\alpha > 0$ telle que : $\|A^\alpha S(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$.*

(4) $\forall\, \alpha \in]0,1[$, $\exists\, C_\alpha > 0$; $\forall\, x \in D(A)$, *alors*

$$\|S(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha) x\|.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^+ \times X_\alpha$ et $f : U \to X$ une fonction telle que : Pour tout $(t,x) \in U$ il existe un voisinage V de (x,t) dans U et des constantes $L \geq 0$ et $\vartheta \in]0,1]$ tels que

$$\forall\, (t_i, x_i) \in V, \quad \|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\| \leq L(|t_1 - t_2|^\vartheta + \|x_1 - x_2\|_\alpha) \tag{1.24}$$

Théorème 1.4.6. [48] *Soit* $-A$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe infinitésimal analytique et borné tel que* $0 \in \rho(-A)$*. Si* f *verifie la condition* (1.24)*, alors pour tout* $(0, u_0) \in U$*, le problème* (1.17) *admet une unique solution* $u \in C([0,T[: X) \cap C^1(]0,T[: X)$ *; où* $T = T(u_0) > 0$*.*

Chapitre 2

Systèmes de réaction-diffusion

Dans ce chapitre, on va etudier l'existence locale de différents types de solutions de certains systèmes de réaction-diffusion.

2.1 Existence locale de solutions faibles

Dans cette section, on s'intéresse a l'étude de l'existence locale de solutions faibles, moyennant une application de la methode principalement cité dans [16].

2.1.1 Position du problème

Dans cette section, nous nous intéressons à des systèmes de la forme

$$\begin{cases} z_t + Lz = F(z) = (\Pi - f(z), g(z)) \quad , \quad \text{dans} \;\; Q_T \\ \gamma z(x,t) + (1-\gamma)\dfrac{\partial z}{\partial \eta}(x,t) = 0, \qquad \text{sur} \;\; \partial\Omega \times [0,T], \\ z(x,0) = z_0, \qquad \text{dans} \;\; \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\gamma \in \{1,0\}$ et

- $z = (u,v)$, avec u et v des fonctions de $Q_T = \Omega \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$
- L l'opérateur défini par :

$$Lz = (div(a\nabla u) + \alpha u, div(b\nabla v) + \sigma v).$$

avec $a,\ b,\ \alpha,\ \sigma$ des fonctions positives dans $L^\infty(Q_T)$, telles que :

$$\exists\, a_0,\ b_0 > 0; \quad a(x,t) \geq a_0 \quad b(x,t) \geq b_0 \quad \text{p.p. } dans\ Q_T,$$

– Π une fonction non négative dans $L^2(Q_T)$

– $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction lipschitzienne, cette hypothèse implique en particulier que

$$\exists\, C > 0;\ \forall\, z \in \mathbb{R}^2, \quad |F(z)| \leq C(1 + |z|) \tag{2.2}$$

En effet

$$\exists k > 0,\, \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad |F(x) - F(y)|_{\mathbb{R}^2} \leq k|x - y|_{\mathbb{R}^2},$$

pour $y = 0 = (0, 0)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad |F(x)|_{\mathbb{R}^2} - |F(0)|_{\mathbb{R}^2} \leq |F(x) - F(0)|_{\mathbb{R}^2} \leq k|x|_{\mathbb{R}^2},$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad |F(x)|_{\mathbb{R}^2} \leq k|x|_{\mathbb{R}^2} + |F(0)|_{\mathbb{R}^2} \leq C(1 + |x|_{\mathbb{R}^2}),$$

où $C = \max(k, |F(0)|_{\mathbb{R}^2})$. Reference [16] (page 499-500)

– Les données initiales u_0 et v_0 des fonctions non négatives dans $L^2(\Omega)$.

Nous allons adapter la terminologie utilisée dans [16].

2.1.2 Le cas Dirichlet ($\gamma = 1$)

En posant $\boldsymbol{z}(t) = (\, u(t, .), v(t, .)\,)$, où $u(t, .),\ v(t, .) \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$\boldsymbol{z} : [0, T] \to H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

Définition 2.1.1 (solution faible)**.** *On dit que la fonction* $\mathbf{z} = (u, v)$*, avec*

$$\boldsymbol{z} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)) \quad \textit{et} \qquad \boldsymbol{z}_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^2)) \tag{2.3}$$

est solution faible du problème (2.1)*, si :* $\forall\, w = (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} &< \boldsymbol{z}_t, w > + B[\boldsymbol{z}, w, t] = (F(\boldsymbol{z}), w), \quad \text{p.p } \textit{dans } [0, T], \\ &\boldsymbol{z}(0) = z_0 = (u_0, v_0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où B *est la forme bilinéaire définie par :*

$$B[\boldsymbol{z}, w, t] = \int_\Omega a(x, t)\nabla \boldsymbol{u}.\nabla w_1 + b(x, t)\nabla \boldsymbol{v}.\nabla w_2 + \alpha(x, t)\boldsymbol{u}w_1 + \sigma(x, t)\boldsymbol{v}w_2 dx$$

$< ., . >$ *étant le produit de dualité entre* $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *et* $H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Remarque 2.1.1. *d'après le Théorème* 3 ([16], p. 287)*, si* $\mathbf{z}$ *vérifie* (2.3)*, alors*

$$\boldsymbol{z} \in C([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)) \tag{2.5}$$

Théorème 2.1.1. *Si F est Lipschetiziènne alors il existe une unique solution faible du probleme* (2.1) *(cf [16] page* 500*).*
En outre si F prend une forme plus générale $F = f(t,x)$ et dans un espace plus grand (i.e.) $F \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^2))$, alors le problème (2.1) *admet une unique solution faible (cf [43] page* 264*).*

Démonstration 1) La remarque 2.1.1 nous motive à étudier le problème (2.1) dans l'espace $X = C([0,T];L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$, avec la norme

$$\|w\| = \max_{0\le t\le T} \|w(t)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.$$

On définit l'opérateur A comme suit :
Soit $\boldsymbol{z} \in X$, on pose $h(t) = F(\boldsymbol{z}(t))$, $(0 \le t \le T)$. De l'inégalité (2.2), on peut voir que $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^2))$.
Pour $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^2))$ fixé, on considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t + L\mathbf{y} = h, & \text{dans}\, Q_T \\ \mathbf{y} = 0, & \text{sur} \quad [0,T] \times \partial\Omega, \\ \mathbf{y} = z_0, & \text{sur} \quad \{0\} \times \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

D'après le Théorème 3 ([16], p. 356), le problème (2.10) admet une solution faible

$$\mathbf{y} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega,R^2)), \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega,R^2)),$$

donc $\mathbf{y} \in X$ et

$$\begin{cases} \forall\, w \in H_0^1(\Omega,R^2), & <\mathbf{y}_t, w> + B[\mathbf{y},w] = (h,w)\,\text{p.p. dans} \quad [0,T], \\ & \mathbf{y}(0,.) = z_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

On considère l'opérateur $A : X \to X$ tel que

$$A\boldsymbol{z} = \mathbf{y},$$

Montrons que pour $T > 0$ assez petit, A est strictement contractant.

Soient $\boldsymbol{z}, \overline{\mathbf{z}} \in X$, tels que :

$$\begin{cases} A\boldsymbol{z} = \mathbf{y} \\ A\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{y}} \end{cases}$$

donc $\mathbf{y}$ vérifie (2.6) pour $h = F(\boldsymbol{z})$ et $\overline{\mathbf{y}}$ vérifie le même problème pour $\overline{h} = F(\overline{\mathbf{z}})$.
On a

$$\begin{aligned} B[\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}] = &\int_\Omega a(x,t)|\nabla(\mathbf{y}_1 - \overline{\mathbf{y}}_1)|^2 + b(x,t)|\nabla(\mathbf{y}_2 - \overline{\mathbf{y}}_2)|^2 dx \\ &+ \int_\Omega \alpha(x,t)|\mathbf{y}_1 - \overline{\mathbf{y}}_1|^2 + \sigma(x,t)|\mathbf{y}_2 - \overline{\mathbf{y}}_2|^2 dx, \end{aligned}$$

et en appliquant l'inegalité de Poincaré, on aura :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} + 2B[\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}},\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}] \\
&\qquad = 2(h-\overline{h},\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}) \\
&\qquad \leq \epsilon\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} + \frac{1}{\epsilon}\|F(\boldsymbol{z})-F(\overline{\boldsymbol{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \\
&\qquad \leq \epsilon C\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}\|^2_{H^1_0(\Omega,R^2)} + \frac{1}{\epsilon}\|F(\boldsymbol{z})-F(\overline{\boldsymbol{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)}.
\end{aligned}$$

On a $a,\ b,\ \alpha,\ \sigma$ des fonctions positives dans $L^\infty(Q_T)$, telles que :

$$\exists\, a_0,\, b_0; \quad a(x,t) \geq a_0 \quad b(x,t) \geq b_0 \quad \text{p.p. } dans\ Q_T,$$

et en choisissant ϵ assez petit tel que

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \leq C\|F(\boldsymbol{z})-F(\overline{\boldsymbol{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \leq C\|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)},$$

car F est lipschitzienne. En intégrant entre 0 et T, sachant que $\mathbf{y}(0,.) = \overline{\mathbf{y}}(0,.)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall\, s \in [0,T], \quad \|\mathbf{y}(s)-\overline{\mathbf{y}}(s)\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} &\leq C\int_0^s \|\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)}dt \\
&\leq CT\|\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}}\|^2,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donc

$$\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}\|^2 \leq CT\|\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}}\|^2,$$

et par suite

$$\|A\mathbf{z}-A\overline{\mathbf{z}}\|^2 \leq CT\,\|\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}}\|^2,$$

et pour T suffisament petit pour que $CT<1$, A est strictement contractant.
Soit un $T>0$ quelconque et prenons T_1 assez petit tel que $CT_1<1$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Banach sur l'intervalle $[0,T_1]$ pour l'existence d'une solution faible, comme $\mathbf{z(t)} \in H^1_0(\Omega,R^2)$ pour *p.p* $0 \leq t \leq T_1$, on peut supposer que $\mathbf{z}(T_1) \in H^1_0(\Omega,R^2)$, et donc on reprend le mème raisonnement sur l'intervalle $[T_1,2T_1]$, et ainsi après un nombre fini de fois on retrouve l'existence de notre solution faible sur l'intervelle $[0,T]$.
Concernant l'unicité de la solution, supposons que $\mathbf{z}$ et $\overline{\mathbf{z}}$ sont deux solutions du problème (2.1), alors on a $\mathbf{y}=\mathbf{z}$, $\overline{\mathbf{y}}=\overline{\mathbf{z}}$ dans l'inégalité 2.12, d'où

$$\|\mathbf{z}(s)-\overline{\mathbf{z}}(s)\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \leq C\int_0^s \|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)}dt$$

pour $0 \leq s \leq T$. Utilisant l'inégalité de Gronwall on a $\mathbf{z}=\overline{\mathbf{z}}$.
Concernant le cas $F=f(t,x)$ où $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^2))$, il suffit d'appliquer le théorème 4.1 (cf [43] page 257). □

2.1.3 Le cas Neumann ($\gamma = 0$)

Remarque 2.1.2. *La principale difference entre la formulation variationnelle* (2.4) *pour une condition aux limite de Neumann (i.e* $\gamma = 0$*) et celle d'une condition aux limites de Dirichlet vient de ce que la condition de Dirichlet est inscrite dans le choix de l'espace alors que la condition de Neumann apparait dans la forme lineaire mais pas dans l'espace. En effet si on essaie, on doit considérer l'espace* $V = \{v \in H^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial \eta}_{|\partial\Omega\times[0,T[} = 0\}$*, donc il faut imposé la regularité* $H^2(\Omega)$ *pour que* $\frac{\partial v}{\partial \eta}_{|\partial\Omega\times[0,T[}$ *ait un sens, mais l'espace* $(V, \|.\|_{H^1(\Omega)})$ *n'est pas un espace de Hilbert, la condition dont on a besoin pour appliquer le théorème de Lax Milgram.*

Remarque 2.1.3. *Notons que si* $V = H^1(\Omega)$ *et* $H = L^2(\Omega)$*, alors* $V' = (H^1(\Omega))'$ *n'est pas un espace de distributions sur* Ω *car* $D(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $H^1(\Omega)$ *et par consequence* $L^2(0,T;V')$ *n'est pas un espace de distributions sur* $[0,T[\times\Omega$*.*

Remarque 2.1.4. ***1)*** *Dans le cas où* Ω *est regulier (de frontière* $\partial\Omega$ *de classe* C^1*), le Théorème de trace ([14] page* 204*) nous assure un sens de la condition aux bord.*
Si le deuxième membre dans (2.1) *prend la forme* $h(t,x)$ *alors du Théorème* 1 *et* 2 *dans [15] (page* 512, 513*), on a pour* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$*, le problème admet une solution unique qui satisfait :*

$$u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega)).$$

2) *Si on ne fait pas de conditions sur la regularité de* Ω *on introduit l'espace* $\mathbb{E}^1(\Omega)$ *(cf [43] page* 266*).*
Soit

$$\delta(x) = inf(d(x,\partial\Omega), 1),$$

où

$$d(x,\partial\Omega) = distance\ de\, x\ à\ \partial\Omega,$$

où $\delta \in L^\infty(\Omega)$*.*
On définit

$$\mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2) = \{v | v \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2), \delta\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2),\ i = 1, ..., n\}.$$

muni de la norme

$$(\|v\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\delta\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc les proprietés suivantes : *(cf [43])*

A. $D(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *est dense dans* $\mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *(cf [43] proposition* 4.3 *page* 266*),*

B. *On definit alors*

$$\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2) = (\mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2))' \quad (\textit{dual de}\, \mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)),$$

$\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *est un espace de distribution sur* Ω *(on peut identifier* $\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *à un sous-espace de* $D'(\Omega,\mathbb{R}^2)$*).*

C. *On deduit aussi que* $H^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$,

D. *alors* $H^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *est dense dans* $\mathbb{E}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *et donc on peut identifier* $\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *à un sous-espace de* $(H^1(\Omega,\mathbb{R}^2))'$.

E. *Par concequence*

$$L^2(0,T;\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)) \subset L^2(0,T;(H^1(\Omega,\mathbb{R}^2))'),$$

et que $L^2(0,T;\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2))$ *est un espace de distribution sur* $[0,T[\times\Omega$.

Si on prend $h \in L^2(0,T;\mathbb{E}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2))$, $\quad z_0 \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *donc le Théorème* 4.1 *dans [43] (page* 257*) est applicable et le problème* (2.1) *admet une solution unique dans*

$$z \in L^2(0,T;H^1(\Omega,\mathbb{R}^2)) \cap C(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)). \tag{2.9}$$

et

$$z_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega,\mathbb{R}^2))'$$

3) *Le resultat (2.9) nous motive à étudier le problème* (2.1) *dans l'espace* $X = C([0,T];L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$, *avec la norme*

$$\|w\| = \max_{0\le t\le T} \|w(t)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.$$

On définit l'opérateur A *comme suit :*
Soit $\mathbf{z} \in X$, *on pose* $h(t) = F(\mathbf{z}(t))$, $(0 \le t \le T)$. *De l'inégalité (2.2), on peut voir que* $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^2))$.
Pour $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^2))$ *fixé, on considère le problème linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_t + L\boldsymbol{y} = h, & \textit{dans}\, Q_T \\ \boldsymbol{y} = 0, & \textit{sur} \;\; [0,T]\times\partial\Omega, \\ \boldsymbol{y} = z_0, & \textit{sur} \;\; \{0\}\times\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

D'après le Théorème 3 *([16], p.* 356*)* ***3)*** *le problème* (2.1) *admet une solution faible*

$$\boldsymbol{y} \in L^2(0,T;H^1(\Omega,R^2)), \quad \textit{avec} \quad \boldsymbol{y}_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega,R^2))'),$$

donc $\boldsymbol{y} \in X$ *et*

$$\begin{cases} \forall\, w \in H_0^1(\Omega,R^2), & <\boldsymbol{y}_t, w> + B[\boldsymbol{y},w] = (h,w)\; p.p. \;\textit{dans} \;\; [0,T], \\ & \boldsymbol{y}(0,.) = z_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

On considère l'opérateur $A : X \to X$ *tel que*

$$A\mathbf{z} = \boldsymbol{y},$$

Montrons que pour $T > 0$ *assez petit,* A *est strictement contractant.*

Soient $\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}} \in X$*, tels que :*

$$\begin{cases} A\mathbf{z} = \boldsymbol{y} \\ A\overline{\mathbf{z}} = \overline{\boldsymbol{y}} \end{cases}$$

donc $\boldsymbol{y}$ *vérifie (2.10) pour* $h = F(\mathbf{z})$ *et* $\overline{\boldsymbol{y}}$ *vérifie le même problème pour* $\overline{h} = F(\overline{\mathbf{z}})$.
On a

$$\begin{aligned} B[\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}] &= \int_\Omega a(x,t)|\nabla(\boldsymbol{y}_1-\overline{\boldsymbol{y}}_1)|^2 + b(x,t)|\nabla(\boldsymbol{y}_2-\overline{\boldsymbol{y}}_2)|^2 dx \\ &+ \int_\Omega \alpha(x,t)|\boldsymbol{y}_1-\overline{\boldsymbol{y}}_1|^2 + \sigma(x,t)|\boldsymbol{y}_2-\overline{\boldsymbol{y}}_2|^2 dx, \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} + 2B[\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}] \\ &\quad = 2(h-\overline{h}, \boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}) \\ &\quad \leq \epsilon\|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} + \frac{1}{\epsilon}\|F(\mathbf{z})-F(\overline{\mathbf{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \\ &\quad \leq \epsilon C\|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2_{H^1_0(\Omega,R^2)} + \frac{1}{\epsilon}\|F(\mathbf{z})-F(\overline{\mathbf{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)}, \end{aligned}$$

On a $a,\ b,\ \alpha,\ \sigma$ *des fonctions positives dans* $L^\infty(Q_T)$*, telles que :*

$$\exists\, a_0,\, b_0; \quad a(x,t) \geq a_0 \quad b(x,t) \geq b_0 \quad \text{p.p. } dans\ Q_T,$$

et en choisissant ϵ *assez petit tel que*

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \leq C\|F(\mathbf{z})-F(\overline{\mathbf{z}})\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} \leq C\|\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)},$$

car F *est lipschitzienne. En intégrant entre* 0 *et* T*, sachant que* $\boldsymbol{y}(0,.) = \overline{\boldsymbol{y}}(0,.)$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} \forall\, s \in [0,T], \quad \|\boldsymbol{y}(s)-\overline{\boldsymbol{y}}(s)\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} &\leq C\int_0^s \|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2_{L^2(\Omega,R^2)} dt \\ &\leq CT\|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donc

$$\|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \leq CT\|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2,$$

et par suite

$$\|A\boldsymbol{z}-A\overline{\boldsymbol{z}}\|^2 \leq CT\,\|\mathbf{z}-\overline{\mathbf{z}}\|^2.$$

$\square$

2.2 Existence locale de solutions classiques

On considère sur un espace de Banach X la famille suivante de systèmes de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - d_1 \Delta u(x,t) = f(t,u,v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.13}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - d_2 \Delta v(x,t) = g(t,u,v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.14}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.15}$$
$$\lambda_1 u + (1-\lambda_1)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \pi_1 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.16}$$
$$\lambda_2 v + (1-\lambda_2)\frac{\partial v}{\partial \eta} = \pi_2 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{2.17}$$

avec les hypothèses :

H$_1$ *a,b, λ_1, λ_2, π_1 et π_2 sont des constantes telles que $d_1,\ d_2 > 0$, $\pi_1,\ \pi_2 \geq 0$ et soit $(0 < \lambda_1,\ \lambda_2 < 1)$, $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)$ ou bien $(\pi_1 = \pi_2 = 0$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$*

H$_2$ *f et g des fonctions continûment différentiables de $[0, +\infty)^3$ dans $\mathbb{R}$, avec*

$$f(t,0,\tau) \geq 0 \quad et \quad g(t,\xi,0) \geq 0, \quad \forall t,\xi,\tau \geq 0$$

H$_3$ *Les fonctions u_0, v_0 sont mesurables sur Ω, telles que*

$$\exists\, M > 0,\ \forall x \in \Omega; \quad 0 \leq u_0(x),\ v_0(x) \leq M \quad .$$

Théorème 2.2.1. [27] *Sous les hypothèses **H**$_1$, **H**$_2$ et **H**$_3$, le problème (2.13)-(2.17) admet une unique solution (classique) locale (u,v) sur $[0, T_{max}) \times \Omega$, et il existe deux fonctions $N_1, N_2 : [0, T_{max}) \to [0, +\infty)$ continues telles que : $\forall\,(t,x) \in [0, T_{max}) \times \Omega$,*

$$0 \leq u(t,x) \leq N_1, \quad 0 \leq v(t,x) \leq N_2, \quad .$$

De plus, si $T_{max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \to T_{max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty.$$ [1]

La preuve de ce théorème est basée sur une approche "Semi-Groupe".

1. On dit que la solution explose en temps fini.

Formulation du semi-groupe

Pour $p \in (1, \infty)$ et $j \in \{1, 2\}$, on définit $A_{j,p}$ sur $L^p(\Omega)$ par :

$$\forall\, w \in D(A_{j,p}), \quad A_{j,p}w = d_j \Delta w \tag{2.18}$$

où d_1 et d_2 sont des constantes positives et

$$D(A_{j,p}) = \left\{ w \in W^{2,p}(\Omega) : \lambda_j w + (1 - \lambda_j) \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

L'opérateur $A_{j,p}$ génère un semi-groupe compact et analytique $T_{j,p} = \{T_{j,p}(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $L^p(\Omega)$ (voir [48]), tels que :

$$\exists\, \kappa;\ \forall\, w \in L^p(\Omega),\ \forall\, t \geq 0, \quad \|T_{j,p}(t)w\|_p \leq e^{\kappa t} \|w\|_p$$

où ($\kappa < 0$ si $\lambda_j > 0$) et ($\kappa = 0$ si $\lambda_j = 0$).
Pour $\alpha > 0$ et $\lambda > \kappa$, l'opérateur $(\lambda I - A_{j,p})^{-\alpha}$ est injectif, linéaire et borné sur $L^p(\Omega)$ (voir [48] , section 2.2.6). On note :

* $B_{j,p}^{-\alpha} = (-A_{j,p})^{-\alpha}$, si $\lambda_j > 0$,
* $B_{j,p}^{-\alpha} = (I - A_{j,p})^{-\alpha}$, si $\lambda_j = 0$,
* $B_{j,p}^{\alpha} = (B_{j,p}^{-\alpha})^{-1}$.

Rappelons que $D(B_{j,p}^{\alpha})$ est un espace de Banach muni de la norme $\|w\|_p = \|B_{j,p}^{\alpha} w\|_p$, et que pour $\alpha > \beta \geq 0$, $D(B_{j,p}^{\alpha})$ est un sous espace dense dans $D(B_{j,p}^{\beta})$, où $D(B_{j,p}^{0}) = L^{\infty}(\Omega)$. On a aussi (voir [25] *p.* 40)

$$\begin{gathered} \text{Si } \alpha > n/(2p), \ \text{ alors } D(B_{j,p}^{\alpha}) \subset L^{\infty}(\Omega) \text{ et} \\ \forall\, w \in D(B_{j,p}^{\alpha}), \quad \|w\|_{\infty} \leq M_{\alpha,p} \|B_{j,p}^{\alpha} w\|_p. \end{gathered} \tag{2.19}$$

de plus, on a les propriétés suivantes :

Lemme 2.2.1. ([48] p. 74 **)**

A. $\forall\, t > 0, \quad T_{j,p}(t) : L^p(\Omega) \to D(B_{j,p}^{\alpha})$,

B. $\forall\, t > 0,\ \forall\, w \in L^p(\Omega), \quad \|B_{j,p}^{\alpha} T_{j,p}(t)w\|_p \leq C_{\alpha,p} t^{-\alpha} e^{\omega t} \|w\|_p$

C. $T_{j,p}(t) B_{j,p}^{\alpha} w = B_{j,p}^{\alpha} T_{j,p}(t) w$ pour $t > 0$, $w \in D(B_{j,p}^{\alpha})$.

On définit F et G sur $[0, \infty) \times L^{\infty}(\Omega)$ par : $\forall\, w_1, w_2 \in L^{\infty}(\Omega),\ \forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \Omega,$

$$[F(t, w_1, w_2)](x) = f(t, w_1(x), w_2(x)), \qquad [G(t, w_1, w_2)](x) = g(t, w_1(x), w_2(x)).$$

Soit z_j, la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta z_j = 0 \ , & \text{sur } \Omega, \\ \lambda_j z_j + (1-\lambda_j)\frac{\partial z_j}{\partial \eta} = \pi_j \ , & \text{sur } \ \partial\Omega \ , \end{cases} \tag{2.20}$$

où $z_j = 0$ si $\lambda_j = 0$ (car $\pi_j = 0$, d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_1$).
Par variation de la constante (voir Pazy [48]) et par suite si (u, v) est la solution dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ du système

$$\begin{aligned} u(t) &= T_{1,p}(t)(u_0 - z_1) + z_1 + \int_0^t T_{1,p}(t-s)F(s, u(s), v(s))ds, \\ v(t) &= T_{2,p}(t)(v_0 - z_2) + z_2 + \int_0^t T_{2,p}(t-s)G(s, u(s), v(s))ds. \end{aligned} \tag{2.21}$$

alors $u(t, x) \equiv [u(t)](x)$, $v(t, x) \equiv [v(t)](x)$ est la solution de (2.13)-(2.17).
Démonstration du théorème 2.2.1.
Soient $p > 1$ et $\alpha \in (0, 1)$ vérifiant (2.19), on veut montrer l'existence et l'unicité d'une solution (u, v) de (2.21) pour :

$$(u_0 - z_1, v_0 - z_2) \in D(B_{1,p}^\alpha) \times D(B_{2,p}^\alpha).$$

On a aussi $u(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions positives sur Ω car $f(t, 0, \tau) \geq 0$ et $g(t, \xi, 0) \geq 0$ pour tous $t,\ \xi,\ \tau \geq 0$. En appliquant le resultat de Ball $[[2], Thm.3.1]$, On déduit que (u, v) est definit sur un interval de la forme $[0, T^*)$ et telle que :

$$\begin{aligned} \limsup_{t \to T^*} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}[\|F(s, u(s), v(s))\|_p + \|G(s, u(s), v(s))\|_p]ds = \infty, \ et \\ \text{si } \ T^* < \infty, \ \text{alors } \ \lim_{t \to T^*} \|B_{1,p}^\alpha u(t, \cdot)\|_p + \|B_{2,p}^\alpha v(t, \cdot)\|_P = \infty \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour tous $T, R > 0$ il existe $M(T, R) > 0$ telque

$$|f(t, \xi, \eta)|, |f(t, \xi, \eta)| \leq M(T, R) \quad \text{pour}\, t \in [0, T], \quad \xi, \eta \in [0, R].$$

Alors

$$\|F(s, w_1, w_2)\|_\infty, \|G(s, w_1, w_2)\|_\infty \leq M(T, R), \tag{2.23}$$

lorsque $t \in [0, T]$ et $w_1, w_2 \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|w_1\|_\infty, \|w_2\|_\infty \leq R$.
On a la fonction $\psi(t) = T_{j,p}(t)(w_j - z_j) + z_j$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \psi_t =& d_j \Delta\psi \quad \text{sur}\, \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \lambda_j \psi + (1-\lambda_j)\frac{\partial \psi}{\partial \eta} =& \pi_j \quad \text{sur}\, \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \psi(0) =& w_j \quad \text{sur}\, \Omega, \end{aligned}$$

en appliquant le principe du maximum, on a

$$\|T_{j,p}(t)(w_j - z_j) + z_j\|_\infty \leq R. \tag{2.24}$$

pour tout $t \geq 0$ avec $\|z_j\|_\infty, \|w_j\|_\infty \leq R$.
Pour la référence on peut voir Hollis et al [27].
Si on multiplie l'equation (2.20) par $(\psi - K)^+ = \sup(\psi - K, 0)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((\psi - K)^+)^2 dx + a\int_\Omega |\nabla(\psi - K)^+|^2 dx = 0,$$

si on integre sur $[0, t]$, on aura :

$$\int_\Omega ((\psi - K)^+)^2 dx \leq \int_\Omega ((w_j - K)^+)^2 dx,$$

donc, si on choisi $K = R$ alors $(\psi - K)^+ = 0$ et par suite $\psi \leq R$.
Si $0 \leq t_1 < T^*$, $\|z_j\|_\infty \leq R_1 < R_2$ et $\|u(t_1)\|_\infty$, $\|v(t_1)\|_\infty \leq R_1$, alors de (2.23) et (2.24) on a

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &= \|T_{1,p}(t - t_1)(u_{t_1} - z_1) + z_1 + \int_{t_1}^t T_{1,p}(t - s)F(s, u(s), v(s))ds\|_\infty \\ &\leq R_1 + (t - t_1)M(T^*, R_2)\end{aligned}$$

pour $\|u(s)\|_\infty$, $\|v(s)\|_\infty \leq R_2$ et $s \in [t_1, t]$. même estimation pour $\|v(t)\|_\infty$ et en prenant $R_2 = R_1 + 1$, alors

$$\begin{aligned}&\text{Si } 0 \leq t_1 < T^* \text{ et } \|u(t_1)\|_\infty,\ \|v(t_1)\|_\infty \leq R_1 \text{ où } R_1 \geq \max\{\|z_1\|_\infty,\ \|z_2\|_\infty\},\\ &\text{alors } T^* - t_1 > M(T^*, R_1 + 1)^{-1}, \text{ et } \|u(t_1)\|_\infty,\ \|v(t_1)\|_\infty \leq R_1 + 1\\ &\text{pour } t \in [t_1, t_1 + M(T^*, R_1 + 1)^{-1}].\end{aligned} \tag{2.25}$$

Maintenant supposons que $T^* < \infty$. Alors de (2.21) on a

$$\begin{aligned}\infty &= \limsup_{t\to T^*} \|F(s, u(s), v(s))\|_p + \|G(s, u(s), v(s))\|_p \\ &\leq C \limsup_{t\to T^*} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} \left[\|F(s, u(s), v(s))\|_\infty + \|G(s, u(s), v(s))\|_\infty\right] ds\ .\end{aligned}$$

Donc par (2.23)

$$\limsup_{t\to T^*} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = \infty.$$

En prenant compte de (2.25), on a

$$\lim_{t\to T^*} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = \infty,$$

si $T^* < \infty$. Tous les assertions de la proposition sont vérifie si

$$(u_0 - z_1, v_0 - z_2) \in D(B_{1,p}^{\alpha}) \times D(B_{2,p}^{\alpha}).$$

Supposons maintenant que $(u_0, v_0) \in L^\infty(\Omega)^2$ et soit $\{(u_0^k, v_0^k)\}$ une suite de $D(B_{1,p}^{\alpha}) \times D(B_{2,p}^{\alpha})$ telle que $u_0^k, v_0^k) \geq 0$ et

$$\|u_0^k - u_0\|_p, \ \|u_0^k - u_0\|_p \to 0 \quad k \to \infty.$$

par la premiere equation dans (2.21) et les proprietés de $B_{1,p}$ dans le Lemme 2.2.1, on a

$$\|B_{1,p}^{\beta}(u^k(t) - z_1)\|_p \leq C_\beta t^{-\beta}\|(u_0^k - z_1)\|_p + \int_0^t C_\beta (t-s)^{-\beta}\|F(s, u^k(s), v^k(s))\|_p ds.$$

pour tout $t \in [0, T_k^*)$.
Si $R_1 \geq \|z_j\|_\infty$ est choisi telque $R_1 \geq \|u_0^k\|_\infty, \|v_0^k\|_\infty$ pour tout $k \geq 1$, alors de (2.25) si $\delta = M(T_{inf}^*, R_1 + 1)^{-1}$, où $T_{inf}^* = \inf_{k \geq 1} T_k^*$, alors $T_k^* > \delta$ pour tout $k \geq 1$. De cette estimation on peut deduire l'existence d'une constante $\overline{C_\beta}$ telque

$$\|B_{1,p}^{\beta}(u^k(t) - z_1)\|_p \leq \overline{C_\beta} t^{-\beta} \quad \text{pour tout} t \in [0, \delta], \ k \geq 1, \ \alpha \leq \beta < 1,$$

de même pour

$$\|B_{2,p}^{\beta}(v^k(t) - z_2)\|_p \leq \overline{C_\beta} t^{-\beta} \quad \text{pour tout} t \in [0, \delta], \ k \geq 1, \ \alpha \leq \beta < 1.$$

Comme l'inclusion est compacte de $D(B_{j,p}^{\beta})$ dans $D(B_{j,p}^{\alpha})$ pour $\alpha < \beta < 1$, et que $T_{j,p}$ est compact
D'après le Théorème 2.3.3 ([48] p 48), Si on a un semigroupe $T(t)$ de classe C_0 de générateur infinitésimal A. $T(t)$ est un semigroupe compact si et seulement si $T(t)$ est continue pour la topologie uniforme pour $t > 0$ et $R(\lambda, A)$ est compacte pour $\lambda \in \rho(A)$.

Définition 2.2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, telsque $X \subset Y$. On dit que l'inclusion de X dans Y est compacte si*
(i) $\exists C > 0$ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_Y$ $x \in X$,
et
(ii) toutes suite bornée dans X est precompacte dans Y.

Remarque 2.2.1. *[13]*
Soit B un opérateur ferme de l'espace de Banach X dans X, de domaine $D(B)$, tels que :
(i) B est bijectif,
(ii) $D(B) \hookrightarrow X$ est compact.
Alors l'operateur B^{-1} est non seulement continu (Théorème du graphe férme) mais aussi compact (en effet B^{-1} transforme les parties bornées de X a des parties brnées de $D(B)$ et qui sont relativement compactes dans X (le point (ii)).

D'ou on a
$D(A_{j,p}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact, (Du Théorème de Rellich-Kondrachov [16] p 272 et la remarque p 274)
$\lambda I - A_{j,p}$ est bijectif pour $\lambda \in \rho(A_{j,p})$.
alors $R(\lambda, A)$ est compacte.
Du Théorème 2.5.2 ([48] page 61) (Théorème 1.2.2 page 15 dans la thèse) on a l'équivalence

(a) $G(t)$ est prolongeable en un semi-groupe analytique dans un secteur

$$\triangle_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\},$$

et $G(z)$ est uniformement borné dans tout sous secteur $\triangle_{\delta'}$, $\delta' < \delta$.
(d) $G(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et il existe une constante positive C telle que :

$$\forall t > 0, \qquad \|AG(t)\| \leq \frac{C}{t}.$$

D'après le Lemme 2.4.2 ([48] p 52) et corollaire 2.4.4 ([48] p 53), Si on a un semigroupe $T(t)$ de classe C_0 qui est differentiable pour $t > 0$, alors $T(t)$ est continue pour la topologie uniforme pour $t > 0$.

$$\|u^k(t) - u(t)\|_p, \; \|v^k(t) - v(t)\|_p \to 0 \quad k \to \infty.$$

pour $t \in [0, \delta]$ et que (u, v) est une solution de (2.21) sur $[0, \delta]$ avec

$$u(t) - z_1 \in B^\alpha_{1,p} \, \text{et} \, v(t) - z_2 \in B^\alpha_{2,p} \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq \delta, \tag{2.26}$$

(voir e.g Lemme 6, 7 dans [41]).
En remplaçant $[0, T^*)$ par $[\delta, T^*)$ et (u_0, v_0) par $(u(\delta), v(\delta))$ et utilisant les resultats ci-dessus quand $(u_0 - z_1, v_0 - z_2) \in D(B^\alpha_{1,p}) \times D(B^\alpha_{2,p})$.
En remplaçant $[0, T^*)$ par $[\delta, T^*)$ et (u_0, v_0) par $(u(\delta), v(\delta))$ car d'après (2.26)

$$u(\delta) - z_1 \in B^\alpha_{1,p} \, \text{et} \, v(\delta) - z_2 \in B^\alpha_{2,p}$$

Supposons que $(u_\delta, v_\delta) \in L^\infty(\Omega)^2$ et soit $\{(u^k_\delta, v^k_\delta)\}$ une suite de $D(B^\alpha_{1,p}) \times D(B^\alpha_{2,p})$ telle que $u^k_\delta, v^k_\delta) \geq 0$ et

$$\|u^k_\delta - u_\delta\|_p, \; \|v^k_\delta - v_\delta\|_p \to 0 \quad k \to \infty.$$

Ainsi par le mème résonnement précedent si $\delta_1 = M(T^*_{\delta, inf}, R_1 + 1)^{-1}$, où $T^*_{\delta, inf} = \inf_{k \geq 1} T^*_{\delta, k}$, alors $T^*_{\delta, k} > \delta_1$ pour tout $k \geq 1$:

$$\|u^{\delta, k}(t) - u(t)\|_p, \; \|v^{\delta, k}(t) - v(t)\|_p \to 0 \quad k \to \infty.$$

pour $t \in [\delta, \delta_1]$ et que (u, v) est une solution de (2.21) sur $[\delta, \delta_1]$ avec

$$u(t) - z_1 \in B^\alpha_{1,p} \, \text{et} \, v(t) - z_2 \in B^\alpha_{2,p} \quad \text{pour} \quad \delta < t \leq \delta_1. \tag{2.27}$$

2.2.1 Cas d'une matrice diagonale

Dans cette section on s'intéresse à un système de réaction-diffusion de la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) =& a\Delta u(x,t) + f(u,v), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, && (2.28)\\
\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) =& b\Delta v(x,t) + g(u,v), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, && (2.29)\\
\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) =& \frac{\partial v}{\partial \eta}(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, && (2.30)\\
u(x,0) =& u_0(x) \geq 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0, && x \in \Omega. && (2.31)
\end{aligned}$$

Où $a > 0$, $b > 0$ sont les constantes de diffusion [2], f et g sont des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
On va proposé un autre cadre fonctionnel pour l'etude de l'existence locale, l'espace est $X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$,.
Posons

$$Au = \xi \Delta u$$

(où ξ est une constante réel), de domaine

$$D_\infty(A) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) \text{ pour tout } \ p > n;\ \Delta u \in C(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}, \qquad (2.32)$$

D'aprés le théorème 4 p 152 [55] L'opérateur A de domaine $D_\infty(A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $e^{\xi \Delta t}$.
On va ecrire notre système (2.28)-(2.31) sous la forme :

$$\begin{cases} U'(t) = \Upsilon U + F(U), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases} \qquad (2.33)$$

Où $U = (u,v)$ et $U : R^+ \to X$,

$$\Upsilon : D_\infty(A) \times D_\infty(A) \to X,$$

avec

$$\Upsilon U = (a\Delta u(t), b\Delta v(t)), \qquad (2.34)$$

et

$$F(U) = (f(u,v), g(u,v)). \qquad (2.35)$$

Pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur linéaire $S(t)$ de X dans X par :

$$\forall\, U_0 = (u_0, v_0) \in X, \quad S(t)(U_0) = (e^{at\Delta} u_0, e^{bt\Delta} v_0). \qquad (2.36)$$

2. Ici, la matrice de diffusion $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est diagonale.

Comme $e^{at\Delta}$ et $e^{bt\Delta}$ sont des semigroupes analytiques alors $S(t)$ est un semigroupe analytique.

Théorème 2.2.2. [34] *Pour tout $U_0 \in X$, le problème (2.33) admet une unique solution classique locale.*

Démonstration. [34] Comme les fonctions f et g sont positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, alos elles sont localement Lipschitiziènnes et Υ génère un semigroupe $S(t)$ fortement continu (car la restriction d'un semigroupe analytique sur $[0, +\infty[$ est un semigroupe fortement continu), D'après le théorème 1.4.4 (Chp 1 p 21) le problème (2.33) admet une mild solution U sur l'intervalle $[0, T_{max}[$, en utilisant le théorème 1.2.2 (Chp 1 p 15) on deduit la differentiabilité de la solution (l'equivalence $(a) \Leftrightarrow (d)$ d'ou U est classique. □

□

2.2.2 Cas d'une matrice triangulaire

Dans cette section, on considère le système de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u(x,t) + f(u,v), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = c\Delta u(x,t) + d\Delta v(x,t) + g(u,v), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{2.39}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \qquad x \in \Omega. \tag{2.40}$$

Où $a > 0$, $c > 0$, et $d > 0$ sont les constantes de diffusion [3], telles que $a > d$ et $c^2 < 4ad$ qui représente la condition de parabolicité et f et g sont des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

On définit l'opérateur

$$\Phi : D_\infty(A) \times D_\infty(A) \to X,$$

3. Ici, la matrice de diffusion $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ est triangulaire.

$$\Phi U = (a\Delta u(t,.), c\Delta u(t,.) + d\Delta v(t,.)),$$

et

$$F(U) = (f(u,v), g(u,v)).$$

où $U = (u,v)$ et $U : R^+ \to X$.
Le problème (2.37)-(2.40) est alors équivalent au problème :

$$\begin{cases} U'(t) = \Phi U + F(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases} \tag{2.41}$$

Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur linéaire $G(t)$ de X dans X par

$$G(t)(U_0) = \big(e^{at\Delta}u_0, e^{dt\Delta}\big(v_0 - \frac{c}{a-d}u_0\big) + \frac{c}{a-d}e^{at\Delta}u_0\big). \tag{2.42}$$

Proposition 2.2.1. ([34]) $\{G(t)\}_{t>0}$ *est un semi-groupe analytique dans* X*, de générateur infinitésimal* Φ.

Démonstration. ([34]) L'idée principale de cette démonstration est de ramener le cas présent à l'étude d'un problème diagonal.

On a vu dans la section précédente que l'opérateur

$$\Upsilon : D_\infty(A) \times D_\infty(A) \to X, \tag{2.43}$$

avec

$$\Upsilon U = (a\Delta u(t), d\Delta v(t)), \tag{2.44}$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $S(t)$ dans X.
Maintenant pour résoudre

$$\begin{aligned} U'(t) &= \Phi U(t), \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0 \in X. \end{aligned} \tag{2.45}$$

on utilise la transformation linéaire suivante :

$$T : (u,v) \to \big(u, \frac{-c}{a-d}u + v\big) = (u,w) = W, \tag{2.46}$$

on peut montre que (u,w) satisfait le problème

$$\begin{aligned} W'(t) &= \Upsilon W(t), \quad t > 0, \\ W(0) &= W_0 = \big(u_0, \frac{-c}{a-d}u_0 + v_0\big) \in X, \end{aligned} \tag{2.47}$$

qui admet comme solution

$$W(t) = e^{t\Upsilon}W_0. \tag{2.48}$$

Comme $S(t) = e^{\Upsilon t}$ est analytique, on peut utiliser l'opérateur inverse T^{-1} de T pour montré que $G(t)$, $t > 0$ est un semi-groupe analytique dans X. $\square$

Théorème 2.2.3. [34] *Pour tout $U_0 \in X$, le problème (2.41) admet une unique solution classique locale.*

Démonstration. De la mème methode que le cas diagonal. □

2.3 Positivité de la solution [51]

Considérons le système de réaction-diffusion a m équations, posées sur un cylindre $(0,T) \times \Omega$, du type suivant :

$$\partial_t u_k = d_k \Delta u_k + f_k(u_1, ..., u_m), \qquad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \eta} = 0, \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2.50}$$

$$u_k(0,x) = u_{k0}(x) \geq 0, \qquad \text{dans} \quad \Omega, \qquad k = 1, ..., m. \tag{2.51}$$

où $u_k = u_k(t,x)$, $d_k > 0$ sont les constantes de diffusion, $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^m)$.
Dans la pratique, les résultats attendus de ces systèmes sont des grandeurs ou bien des mesures positives, c'est pour celà qu'on s'intéresse classiquement aux propriétés suivantes :

(P) La positivité des solutions est préservée au cours du temps.

(M) La masse totale des composants est controlée au cours du temps.

Définition 2.3.1. . *On dit que la fonction $f = (f_1, ..., f_m)$ est quasi-positive, si pour tout $k = 1, ..., m$,*

$$[u_1 \geq 0, ..., u_{k-1} \geq 0, u_{k+1} \geq 0, ..., u_m \geq 0]$$
$$\Downarrow$$
$$[f_k(u_1, ..., u_{k-1}, 0, u_{k+1}, ..., u_m) \geq 0].$$

Proposition 2.3.1. *Si f est quasi-positive la condition (P) est vérifiée.*

Démonstration. Posons $u_k^+ = \max\{u_k, 0\}$, $u_k^- = -\min\{u_k, 0\}$.
En prenant $f_k(u_1^+, ..., u_m^+)$ comme second membre du système ((2.49)-(2.51)), on aura

le système

$$\begin{cases} \partial_t u_k = d_k \Delta u_k + f_k(u_1^+, ..., u_m^+) & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_k(0,x) = u_{k0}(x) \geq 0, \qquad \text{dans} \quad \Omega, & k = 1, ..., m. \end{cases}$$

Le système étant à matrice de diffusion diagonale et f regulière (de classe $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, alors d'après le théorème2.2.1, l'existence locale d'une solution est assurée.
Multiplions la k ième équation du système (2.49) par u_k^-, et intégrons sur $(0,t) \times \Omega$, on obtient alors

$$\int_0^t \int_\Omega u_k^- \frac{\partial}{\partial t}(u_k) dx dt = \int_0^t \int_\Omega d_k u_k^- \Delta u_k dx dt + \int_0^t \int_\Omega u_k^- f_k(u^+) dx dt.$$

En remarquant que

$$(u_k)_t = -(u_k^-)_t,$$

en utilisant la formule de Green, on trouve

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega (u_k^-)^2 dx = d_k \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_k^-|^2 dx dt + \int_0^t \int_\Omega u_k^- f_k(u^+) dx dt.$$

f étant quasi-positive, alors :

$$\begin{cases} u_k^- f_k(u^+) = 0 & \text{si } u_k \geq 0 \\ u_k^- f_k(u^+) \geq 0 & \text{si } u_k < 0 \end{cases}$$

De la positivité de l'intégrale, on obtient

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega (u_k^-)^2 dx \geq d_k \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_k^-|^2 dx dt,$$

donc $u_k^- = 0$, pour tout $k = 1, ..., m$, ce qui montre que la solution u de ((2.49)-(2.51)) et positive. □

Remarque 2.3.1. *La propriété (P) est assuré par la condition de quasi-positivité du deuxième membre du système.*

Remarque 2.3.2. *La propriété (M) est assuré par la condition suivante (dans le cas diagonal : La condition (M) est par exemple satisfaite dès que*

$$\sum_{1 \leq k \leq m} f_k \leq 0, \tag{2.52}$$

avec les conditions au bord sur les u_k. Il suffit pour le voir de faire la somme des m équations et d'intégrer sur $(0;t) \times \Omega$. Les conditions aux bord vont assurer que $-\int_\Omega \Delta u_k(t,x) dx \geq 0$, si bien qu'on obtient l'estimation a priori :

$$\forall t \in (0,T), \quad \sum_{1 \leq k \leq m} \int_\Omega u_k(t,x) dx \leq \sum_{1 \leq k \leq m} \int_\Omega \Delta u_k(0,x) dx. \tag{2.53}$$

Lorsque les $u_k(0)$ sont positifs, comme les $(u_k(t)$ le restent, ceci assure que la masse totale des composants reste bornée au cours du temps.

Remarque 2.3.3. *Plus généralement on a la condition suivante :*

$$\forall r \in [0, +\infty)^m, \qquad \sum_{1 \leq k \leq m} f_k(r) \leq C(1 + \sum_{1 \leq k \leq m} r_k). \tag{2.54}$$

Si on pose $v = \sum_{1 \leq k \leq m} u_k$, et par integration de la somme de tous les equations, et en utilisant le Lemme de Gronwall on aura pour tout $t \in [0, T)$:

$$\int_\Omega v(t) \leq e^{Ct} \int_\Omega v(0) + k(e^{Ct} - 1). \tag{2.55}$$

D'ou la masse totale $\int_\Omega v(t)$ est bornée sur tout intervalle.

2.3.1 Exemples

Dans cette partie, on étudie la positivité des solutions de certains systèmes de type ((2.28)-(2.31)) ou ((2.37)-(2.40)).

I) Cas d'une matrice diagonale

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u, v) - \alpha u, & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f(u, v) - \sigma\kappa(v), & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}_+. \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, & \text{dans } \ \Omega. \end{cases}$$

où $a,\ b,\ \Pi,\ \alpha,\ \sigma > 0$, avec $a \neq b$ et κ et f des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ et $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ respectivement, telles que :

(A1) $\quad \forall \tau \geq 0, \quad f(0, \tau) = 0,$

(A2) $\quad \forall \xi \geq 0, \forall \tau \geq 0, \quad 0 \leq f(\xi, \tau) \leq \varphi(\xi)(\tau + 1)^\lambda e^{r\tau},$

(A3) $\quad \kappa(\tau) = \tau^\mu, \ \ \mu \geq 1,$

avec $r > 0,\ \lambda \geq 1$ et φ une fonction positive de classe $C(\mathbb{R}^+)$.
En posant

$$F(u, v) = \Pi - f(u, v) - \alpha u \quad \text{et} \quad G(u, v) = f(u, v) - \sigma\kappa(v).$$

notre système s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = F(u,v), & \text{dans} \;\; \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = G(u,v), & \text{dans} \;\; \Omega \times \mathbb{R}_+. \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & \text{sur} \;\; \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0, & \text{dans} \;\; \Omega, \end{cases}$$

La condition de quasi-positivité de F et G est satisfaite, car

$$F(0,v) = \Pi \geq 0 \quad \text{et} \quad G(u,0) = f(u,0) \geq 0.$$

de la proposition 2.3.1 on déduit la préservation de la positivité de la solution.

Remarque 2.3.4. *La positivité de la solution est toujours préservée si on remplace la condition* **(A1)** *par la condition :*
(A1 bis) $\forall \tau \geq 0 \quad , f(0,\tau) = \zeta,$ *avec* $0 \leq \zeta \leq \Pi.$

II) Cas d'une matrice triangulaire

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \beta - f(u,v) - \alpha u, & \text{dans} \;\; \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = g(u,v) - \sigma v, & \text{dans} \;\; \Omega \times \mathbb{R}_+. \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & \text{sur} \;\; \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0, & \text{dans} \;\; \Omega. \end{cases}$$

où les constantes de diffusion $a, \; c, \; d > 0$ sont telles que $\Big(a > d \text{ et } c^2 < 4ad\Big)$, $\beta, \; \alpha, \; \sigma$ sont des constantes strictement positives et f et g des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, vérifiant les conditions suivantes :

(H1) pour tout $\tau \geq 0, \; f(0,\tau) = 0$;
(H2) pour tout $\xi \geq 0$ et tout $\tau \geq 0$, $0 \leq f(\xi,\tau) \leq \varphi(\xi)(\mu+\tau)^r$;
(H3) pour tout $\xi \geq 0$ et tout $\tau \geq 0$, $g(\xi,\tau) \leq \psi(\tau) f(\xi,\tau) + \phi(\tau)$,

où $r, \; \mu \geq 1$ et φ, ψ et ϕ sont des fonctions positives de classe $C(\mathbb{R}^+)$.

Proposition 2.3.2. *Si, de plus,* f *et* g *vérifient la condition :*

$$g(\xi, \frac{c}{a-d}\xi) + \frac{c}{a-d} f(\xi, \frac{c}{a-d}\xi) \geq \frac{c}{a-d}[(\sigma-\alpha)\xi + \beta], \quad \forall \xi \geq 0. \tag{2.56}$$

alors la positivité de la solution de notre système est préservée.

En effet, si nous multiplions la première équation par $\dfrac{c}{a-d}$, et on la soustrait de la deuxième équation de notre système, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = F(u,z), & \text{dans } \Omega \times R_+ \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - d\Delta z = G(u,z), & \text{dans } \Omega \times R_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times R_+ \\ u(0,\cdot) = u_0, & \text{dans } \Omega \\ z(0,\cdot) = z_0 = v_0 - \dfrac{c}{a-d}u_0 \ , & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} z = v - \dfrac{c}{a-d}u \\ F(u,z) = \beta - f(u,v) - \alpha u \\ G(u,z) = g(u,v) + \dfrac{c}{a-d}f(u,v) + \dfrac{c}{a-d}(\alpha u - \beta) - \sigma v, \end{cases}$$

On a bien

$$F(0,z) = \beta \geq 0,$$

et

$$G(u,0) = g(u, \frac{c}{a-d}u) + \frac{c}{a-d}f(u, \frac{c}{a-d}u) - \frac{c}{a-d}[(\sigma - \alpha)u + \beta],$$

d'aprés la condition (2.56), on a

$$G(u,0) \geq 0$$

donc le second membre $(F(u,z), G(u,z))$ du système, à matrice de diffusion diagonale, est quasi-positif et de la proposition 2.3.1 on déduit que la solution (u,z) est positive et comme

$$v = z + \frac{c}{a-d}u$$

avec $c,\ a-d > 0$, on déduit que la solution (u,v) de notre système est positive.

$\square$

Troisième partie

Etude de l'existence globale des solutions

Chapitre 3

Etude d'un système avec une nonlinearité exponentielle

3.1 Position du problème

Etant donné le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \alpha u \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f(u,v) - \sigma\kappa(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \text{dans} \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.4}$$

où $a > 0$, $b > 0$ sont les constantes de diffusion, et Π, α, σ sont des constantes stirictement positives, κ et f sont des fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ et $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ respectivement.

Dans le cas $\Pi = 0$, $\alpha = 0$, $\sigma = 0$ et $f(u,v) = h(u)T(v)$, (on peut prendre $h(u) = u$

pour des raisons de simplicité) : on obtient le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -uT(v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = uT(v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.7}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.8}$$

Ce problème a attiré l'attention de plusieurs auteurs, qui ont étudié l'éxistence globale, bornage uniforme et comportement asymptotique des solutions dans différents cas.

3.1.1 Accroissement polynomial

Alikakos [1] a étudié l'éxistence globale de la soloution dans le cas

$$T(v) \leq C(1 + |v|^{(n+2)/n}).$$

en utilisant la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov, Massuda [44] a obtenu des résultats positives pour le cas d'un accrroissement polynomiale de la forme

$$T(v) \leq C(1 + |v|^{\delta}),$$

avec $\delta > 0$ arbitraire.

3.1.2 Accroissement exponentiel

Pour un accroissement exponentiel faible

$$T(v) = e^{\delta v^{\beta}},$$

$0 < \beta < 1$, $\delta > 0$, une répense positive a été donnée par Haraux et Youkana dans[24]. Pour un accroissement exponentiel

$$T(v) = e^{\delta v},$$

dans [3], Barabanova a donné un résultat positif mais avec une condition sur la taille de la donnée initiale

$$\| u_0 \|_{\infty} < \frac{8ab}{rn(a-b)^2}, \tag{3.9}$$

On voit que la force de ce résultat dépend de la différence $(a-b)$, (ie) plus la différence est petite, plus le choix de la donnée initiale est large.
De mème H. Kwean [39], etudie le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -KuT(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = uT(v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.12}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.13}$$

sous des conditions techniques
(1) $K \geq \delta n$,
(2) $3 - 2\sqrt{2} \leq \frac{a}{b} \leq 3 - 2\sqrt{2}$.
il établit un résultat pour des conditions initiales telles que $\| u_0 \|_\infty < 1$.
I. J. Kanel [31], qui a developpé le résultat de Barabanova, sans aucune restriction sur la taille de la donnée initiale, en imposant une condition moins exigeante :

$$b < a,$$

en utilisant les propriétés utiles, inhérentes à la fonction de Green.
Dans le cas $\Pi > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, L. Melkemi et al. [45], ont prouvé l'existence globale de la solution, dans une premiere étape, lorsque
(1) $0 \leq f(r,s) \leq (1+s)^\beta \varphi(r)$ pour tout $r, s \geq 0$, $\beta \geq 1$
(2) $g(r,s) \leq \psi(s) f(r,s)$ et $\lim_{s\to+\infty} \dfrac{\psi(s)}{s} = 0$.
dans une deuxième étape, dans [46] lorsque $g(r,s) = f(r,s) \leq \psi(r)\varphi(s)$ telque

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\ln(1+\varphi(s))}{s} = 0.$$

Pour un cas plus générale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u,v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur} \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.16}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.17}$$

où f et g sont des fonctions continuement differenciable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, avec $f(0,s) \geq 0$ et $g(r,0) \geq 0$ pour tout $r, s \geq 0$, pour assurer la positivité de la solution.
S.Kouachi [38], a donné une réponse positve à la question, sous les hypothèses suivantes :
Pour tout $r, s \geq 0$

(1) $K^{2i-1}f(r,s) + g(r,s) \leq C_1(r+s+1)$ pour $i = 1, ..., p$,
(2) $|f(r,s)|, |g(r,s)| \leq C_2(r+s+1)^m$.
avec $p, m \geq 1$ et K une constante verifiant l'inégalité :

$$K \geq \frac{(a+b)}{2\sqrt{ab}}. \tag{3.18}$$

Pour le cas d'un système à n équations, voir [19] et [28, 29, 30].

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution du problème ((3.1)-(3.4)), avec une nonlinearité exponentielle.

3.2 Existence globale et bornage uniforme de la solution

Dans cette section, on va présenté l'un de nos principaux resultats.
On considère le problème ((3.1) − (3.4)), en supposant que la non-linéarité f vérifie les hypothèses suivantes :

A. **Nonlinearité exponentielle**

Hyp. A-1. $\forall \tau \geq 0,\ f(0,\tau) = 0$,

Hyp. A-2. $\forall \xi \geq 0,\ \forall \tau \geq 0,\ 0 \leq f(\xi,\tau) \leq \varphi(\xi)(\tau+1)^{\lambda} e^{r\tau}$,

Hyp. A-3. $\kappa(\tau) = \tau^{\mu},\ \mu \geq 1$,

où r, λ sont des constantes positives, telque $\lambda \geq 1$ et φ une fonction positive de classe $C(R^+)$.
On impose la condition suivante sur la taille de la donnée u_0 :

$$\max\big(\parallel u_0 \parallel_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}\big) < \frac{\theta^2}{2-\theta} \quad \frac{8ab}{rn(a-b)^2}, \tag{3.19}$$

où $\theta < 1$ est un nombre réel positif très proche de 1.

Proposition 3.2.1. *Si* (u, v) *est la solution du probleme* ((3.1) − (3.4))*, alors*

$$0 \leq u(t,x) \leq \max(\parallel u_0 \parallel_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}). \tag{3.20}$$

Démonstration. On utilisera un raisonement de type principe du maximum.
Si on pose $(u-K)^+ = \sup(u-K,0)$. On multiplie (3.1) par $(u-K)^+$ et en integrant sur Ω, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((u-K)^+)^2 dx + a\int_\Omega |\nabla(u-K)^+|^2 dx \\ = \int_\Omega (u-K)^+(\Pi-\alpha u)dx - \int_\Omega (u-K)^+ f(u,v)dx,\end{aligned}$$

comme f est positive, si on integre sur $[0,t]$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((u-K)^+)^2 dx \leq \int_\Omega ((u_0-K)^+)^2 dx \\ + 2\int_0^t \int_\Omega (u-K)^+(\Pi-\alpha u)dx.\end{aligned}$$

On a
1) Si $\| u_0 \|_\infty \geq \frac{\Pi}{\alpha}$, on a

$$(u-\| u_0 \|_\infty)^+(\Pi-\alpha u) = \begin{cases} 0 & u \leq \| u_0 \|_\infty \\ -\alpha(u-\| u_0 \|_\infty)(u-\frac{\Pi}{\alpha}), & u \geq \| u_0 \|_\infty \geq \frac{\Pi}{\alpha} \end{cases}$$

donc

$$(u-\| u_0 \|_\infty)^+(\Pi-\alpha u) \leq 0.$$

2) Si $\| u_0 \|_\infty \leq \frac{\Pi}{\alpha}$, on a

$$(u-\frac{\Pi}{\alpha})^+(\Pi-\alpha u) = \begin{cases} 0 & u \leq \frac{\Pi}{\alpha} \\ -\alpha(u-\frac{\Pi}{\alpha})^2, & u \geq \frac{\Pi}{\alpha}. \end{cases}$$

D'ou pour $K = \max(\| u_0 \|_\infty, \frac{\Pi}{\alpha})$, on a

$$\int_\Omega ((u-K)^+)^2 dx \leq 0,$$

d'où on deduit que $(u-K)^+ = 0$,
donc

$$u \leq K.$$

□

Pour montrer l'existence globale de la solution, il suffit d'etablir le bornage uniforme de la solution v.
Pour cela on distingue deux cas, le cas $(a=b)$ et $(a \neq b)$.

3.2.1 Le cas $(a = b)$

Théorème 3.2.1. *Posons* $\Gamma(\tau) = \Pi - \sigma\tau^{\mu} + \alpha\tau$, $\mu > 1$ *alors il existe* $M > 0$, *tel que*

$$\Pi - \sigma\tau^{\mu} + \alpha\tau \leq M, \quad \forall\tau \geq 0,$$

Proposition 3.2.2. *Si* (u, v) *est la solution du problème* $((3.1) - (3.4))$, *alors : On a*

$$0 \leq v(t, x) \leq \Lambda, \quad \forall(x, t) \in \Omega \times [0, T_{max}[, \tag{3.21}$$

où

$$\Lambda = \max\{\| z_0 \|_{\infty}, \frac{\Pi}{\sigma}, \frac{\Pi}{\alpha}, \frac{M}{\alpha}\}$$

Démonstration. **Le cas** $\mu = 1$
Posons $z = u + v$, alors si (u, v) verifie $((3.1) - (3.4))$, en faisant la somme on deduit que z verifie l'equation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a\Delta z = \Pi - \sigma z + (\sigma - \alpha)u \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T] \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \tag{3.23}$$

$$z(0, x) = z_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.24}$$

On distingue alors deux cas : **Si** $\sigma \leq \alpha$
Posons $(z - \Lambda)^{+} = \sup(u - \Lambda, 0)$, où Λ est une constante positive.
On multiplie (3.22) par $(z - \Lambda)^{+}$, et nous integrons sur Ω, on aura alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}((z - \Lambda)^{+})^2 dx + a\int_{\Omega}|\nabla(z - \Lambda)^{+}|^2 dx$$
$$= \int_{\Omega}(z - \Lambda)^{+}(\Pi - \sigma z)dx + \int_{\Omega}(\sigma - \alpha)(z - \Lambda)^{+}u dx,$$

alors, si on integre sur $[0, t]$, on aura

$$\int_{\Omega}((z - \Lambda)^{+})^2 dx \leq \int_{\Omega}((z_0 - \Lambda)^{+})^2 dx$$
$$+ \int_0^t \int_{\Omega}(z - \Lambda)^{+}(\Pi - \sigma z)dx.$$

Pour deduire que $0 \leq z(t, x) \leq \Lambda$ on reprend le mème raisonement de la demonstration de la proposition 3.2.1

<u>Si $\sigma > \alpha$</u>
On a $z = u + v$, verifie l'equation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a\Delta z = \Pi - (\sigma - \alpha)v - \alpha z \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.26}$$

$$z(0,x) = z_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.27}$$

En multipliant (3.25) par $(z-\Lambda)^+$ et en integrant sur Ω, on aura :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((z-\Lambda)^+)^2 dx + a\int_\Omega |\nabla(z-\Lambda)^+|^2 dx \\ = \int_\Omega (z-\Lambda)^+(\Pi - (\sigma-\alpha)v - \alpha z)dx,\end{aligned}$$

alors, si on integre sur $[0,t]$, on aura

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((z-\Lambda)^+)^2 dx \leq \int_\Omega ((z_0-\Lambda)^+)^2 dx \\ + \int_0^t \int_\Omega (z-\Lambda)^+(\Pi - (\sigma-\alpha)v - \sigma z)dx.\end{aligned}$$

sachant que $\sigma - \alpha > 0$, on deduit :

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((z-\Lambda)^+)^2 dx \leq \int_\Omega ((z_0-\Lambda)^+)^2 dx \\ + \int_0^t \int_\Omega (z-\Lambda)^+(\Pi - \sigma z)dx.\end{aligned}$$

et avec le mème type de raisonement antérieur, on montre que :

$$0 \leq z(t,x) \leq \Lambda$$

<u>Le cas $\mu > 1$</u>
Dans ce cas z verifie l'equation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a\Delta z = \Pi - \sigma v^\mu + \alpha v - \alpha z \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.29}$$

$$z(0,x) = z_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.30}$$

Posons $\Gamma(\tau) = \Pi - \sigma\tau^{\mu} + \alpha\tau$, comme $\mu > 1$ alors il existe $M > 0$, tel que

$$\Pi - \sigma\tau^{\mu} + \alpha\tau \leq M, \quad \forall\tau \geq 0,$$

On multiplie (3.28) par $(z-\Lambda)^+$, et nous integrons sur Ω, pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}((z-\Lambda)^+)^2dx + a\int_{\Omega}|\nabla(z-\Lambda)^+|^2dx \\ &\leq \int_{\Omega}(z-\Lambda)^+(M-\alpha z)dx, \end{aligned}$$

et si on integre sur $[0,t]$, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}((z-\Lambda)^+)^2dx \leq &\int_{\Omega}((z_0-\Lambda)^+)^2dx \\ &+ \int_0^t\int_{\Omega}(z-\Lambda)^+(M-\alpha z)dx. \end{aligned}$$

On a

1) Si $\| z_0 \|_{\infty} \geq \frac{M}{\alpha}$, on a

$$(z - \| z_0 \|_{\infty})^+(M-\alpha z) = \begin{cases} 0 & z \leq \| z_0 \|_{\infty} \\ -\sigma(z - \| z_0 \|_{\infty})(z - \frac{M}{\alpha}), & z \geq \| z_0 \|_{\infty} \geq \frac{M}{\alpha} \end{cases}$$

2) Si $\| z_0 \|_{\infty} \leq \frac{M}{\alpha}$, on a

$$(z - \frac{\Pi}{\sigma})^+(M-\alpha z) = \begin{cases} 0 & u \leq \frac{M}{\alpha} \\ -\sigma(z - \frac{M}{\alpha})^2, & z \geq \frac{M}{\alpha}. \end{cases}$$

D'ou pour $\Lambda = \max(\| z_0 \|_{\infty}, \frac{M}{\alpha})$, on a

$$\int_{\Omega}((z-\Lambda)^+)^2dx \leq 0,$$

donc $(z-\Lambda)^+ = 0$,
alors

$$z \leq \Lambda.$$

d'où l'existence globale de v.

□

3.2.2 Construction d'une fonction de Lyapunov $(a \neq b)$

Si on utilise les résultats qu'on peut trouver dans D.Henry [25, pp. 35-62], [23], [40], [53], il est suffisant de montrer que

$$\| f(u,v) - \sigma\kappa(v) \|_p \leq C \tag{3.31}$$

(où C est une constante non négative indépendante de t) pour un certain $p > \frac{n}{2}$.

Le résultat principale de ce chapitre est

Théorème 3.2.2. *[12]*
Sous les hypothèses Hyp.A1- Hyp.A3 et (3.19), la solution du système ((3.1)-(3.4)) est globale, en plus elle est bornée uniformement sur $[0, +\infty[$.

Soient ω, β, γ et M des constantes positives telles que $\omega \geq 1$,

$$\beta = \theta \frac{4ab}{(a-b)^2}, \quad \gamma = \max\big(\lambda, \mu, \frac{(\beta+1)(2-\theta)Mr}{\beta\theta(1-\theta)}\big) \tag{3.32}$$

et

$$M = \max\big(\parallel u_0 \parallel_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}\big) < \frac{\theta^2}{2-\theta} \quad \frac{8ab}{rn(a-b)^2}. \tag{3.33}$$

Nous pouvons choisir

$$p = \frac{\theta^2}{2-\theta} \frac{4ab}{(a-b)^2 Mr}, \tag{3.34}$$

comme consequence de (3.33), on a bien $p > \frac{n}{2}$.
Pour aboutir a une preuve du Theorème 3.2.2, il nous faut le résultat suivant

Proposition 3.2.3. [*12*]
Supposons que les conditions Hyp.A1- Hyp.A3 sont satisfait et soit (u, v) la solution de ((3.1)-(3.4)) sur $]0, T^*[$, avec les conditions initiales v_0 et u_0 satisfait (3.19).
Soit

$$R_\rho(t) = \rho \int_\Omega u dx + \int_\Omega \left(\frac{M}{(2-\theta)M - u} \right)^\beta (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx. \tag{3.35}$$

Alors, il existe $p > n/2$, et s, Γ des constantes positives telles que

$$\frac{dR_\rho}{dt} \leq -sR_\rho + \Gamma. \tag{3.36}$$

Il est trés important de posé quelque Lemmes, avant d'annocer la preuve de cette proposition.

Lemme 3.2.1. [*46*]
Si (u, v) est la solution du problème ((3.1)-(3.4)), alors

$$\int_\Omega f(u, v) dx \leq \Pi |\Omega| - \frac{d}{dt} \int_\Omega u(t, x) dx. \tag{3.37}$$

Démonstration. On intègre les deux cotés de l'équation (3.1),

$$f(u,v) = \Pi - \alpha u - \frac{d}{dt}u(t,x) - a\Delta u$$

qui est satisfait par u, qui est positive et alors on trouve (3.37). □

Lemme 3.2.2. [12]
Soit ψ une fonction positive de classe $C(\mathbb{R}^+)$, telle que

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau+\omega} = 0,$$

et soit A une constante positive.
Alors il existe $N_1 > 0$, telle que

$$[\frac{\psi(\tau)}{\tau+\omega} - A](\tau+\omega)^{\gamma p} e^{pr\tau} f(\xi,\tau) \leq N_1 f(\xi,\tau), \tag{3.38}$$

pour tout $0 \leq \xi \leq M$ et $\tau \geq 0$.

Démonstration. Comme

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau+\omega} = 0,$$

il existe $\tau_0 > 0$, telque pour tout $0 \leq \xi \leq K, \tau > \tau_0$, nous avons

$$[\frac{\psi(\tau)}{\tau+\omega} - A](\tau+\omega)^{\gamma p} e^{pr\tau} f(\xi,\tau) \leq 0.$$

Maintenant si τ est dans l'intérvalle compacte $[0,\tau_0]$, alors la fonction continue

$$\chi(\xi,\tau) = [\psi(\tau)(\tau+\omega)^{\gamma p-1} - A(\tau+\omega)^{\gamma p}]e^{pr\tau}$$

est bornée. □

Lemme 3.2.3. [12]
Pour tout $\tau \geq 0$, on a

$$[\frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} - \sigma p\kappa(\tau)(\frac{\gamma}{\tau+\omega} + r)](\tau+\omega)^{\gamma p} e^{pr\tau} \leq -s(\tau+\omega)^{\gamma p} e^{pr\tau} + B_1, \tag{3.39}$$

où B_1 et s sont des constantes positives.

Démonstration. Posons

$$\xi = \frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} + s$$

$$\frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M}(\tau+\omega)^{p\gamma}e^{pr\tau} - \sigma p\kappa(\tau)[\gamma(\tau+\omega)^{\gamma p-1} + r(\tau+\omega)^{\gamma p}]e^{pr\tau} =$$
$$\left(\frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} - \xi\right)(\tau+\omega)^{p\gamma}e^{pr\tau} + \left(\frac{\xi}{\kappa(\tau)} - \sigma rp\right)\kappa(\tau)(\tau+\omega)^{\gamma p}e^{pr\tau},$$

alors, en utilisant le Lemme 3.2.2 nous pouvons conclure le résultat. □

Démonstration. (de la Proposition 3.2.3)
Soit

$$g(u) = \left(\frac{M}{(2-\theta)M - u}\right)^{\beta},$$

donc

$$R_\rho(t) = \rho \int_\Omega u dx + G(t),$$

où

$$G(t) = \int_\Omega g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx.$$

La differentiation de G par rapport à t, nous donne

$$\begin{aligned} G'(t) = & \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right]\frac{\partial v}{\partial t} dx \\ & = \int_\Omega a\frac{\partial}{\partial u}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right]\Delta u + b\frac{\partial}{\partial v}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right]\Delta v dx \\ & + \int_\Omega \left(\Pi - f(u,v) - \alpha u\right)\frac{\partial}{\partial u}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right] dx \\ & + \int_\Omega \left(f(u,v) - \sigma\kappa(v)\right)\frac{\partial}{\partial v}\left[g(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}\right] dx, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, nous aurons

$$G'(t) = I + J,$$

où

$$\begin{aligned} I = & -a\int_\Omega g''(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv}|\nabla u|^2 dx \\ & -(a+b)\int_\Omega g'(u)[\gamma p(v+\omega)^{\gamma p-1} + pr(v+\omega)^{\gamma p}] e^{prv}\nabla u \nabla v dx \\ & -b\int_\Omega g(u)[\gamma p(\gamma p-1)(v+\omega)^{\gamma p-2} + 2\gamma p^2 r(v+\omega)^{\gamma p-1} + p^2r^2(v+\omega)^{\gamma p}] e^{prv}|\nabla v|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J = & \int_\Omega \Pi g'(u)(v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx - \int_\Omega \alpha g'(u) u (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx \\ & + \int_\Omega \left(g(u)\left[\gamma p(v+\omega)^{\gamma p-1} + rp(v+\omega)^{\gamma p}\right] - g'(u)(v+\omega)^{\gamma p}\right) f(u,v) e^{prv} dx \\ & - \int_\Omega \sigma[\gamma p(v+\omega)^{\gamma p-1} + rp(v+\omega)^{\gamma p}]\kappa(v) g(u) e^{prv} dx. \end{aligned}$$

Donc la formule I a une forme quadratique par rapport à ∇u et ∇v, qui est positive si

$$\begin{aligned} \delta = & \left(p(a+b)g'(u)[\gamma(v+\omega)^{\gamma p-1} + r(v+\omega)^{\gamma p}]\right)^2 \\ & - 4ab\gamma p(\gamma p-1) g''(u) g(u)(v+\omega)^{2\gamma p-2} \\ & - 4ab g''(u) g(u)(v+\omega)^{\gamma p}[2\gamma p^2 r(v+\omega)^{\gamma p-1} + p^2r^2(v+\omega)^{\gamma p}] \le 0. \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}\delta = \quad & [(p\gamma)^2(a+b)^2\beta^2 - 4ab\beta(\beta+1)p\gamma(p\gamma-1)]\frac{g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-2}}{((2-\theta)M-u)^2} \\ & + [(a+b)^2\beta^2 - 4ab\beta(\beta+1)]\frac{rp^2g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-1}}{((2-\theta)M-u)^2}[2\gamma+r(v+\omega)],\end{aligned}$$

le choix de β et γ, nous donne

$$\begin{aligned}\delta \leq \quad & [\beta+1-p\gamma(1-\theta)]\frac{4ab\beta p\gamma g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-2}}{((2-\theta)M-u)^2} \\ & + 4ab(\theta-1)\frac{rp\beta g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-1}}{((2-\theta)M-u)^2}[2+(rp)(v+\omega)] \leq 0,\end{aligned}$$

et par suite, on a

$$I \leq 0.$$

Concernant le second terme J, on a

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega \left(\frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} - \sigma p\kappa(v)[\frac{\gamma}{v+\omega}+r]\right)g(u)(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(p[\frac{\gamma}{v+\omega}+r] - \frac{\beta}{(2-\theta)M-u}\right)f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.2.3, nous trouvons

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega [-s(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv} + B_1]g(u)dx \\ & + \int_\Omega \left(p[\frac{\gamma}{v+\omega}+r] - \frac{\theta}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right)f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega [-s(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv} + B_1]g(u)dx \\ & + \int_\Omega \left(\frac{p\gamma}{v+\omega} - \frac{\theta(1-\theta)}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right)f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(pr - \frac{\theta^2}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right)f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx.\end{aligned}$$

Du Lemme 3.2.2 et la formule (3.34), on a

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega [-s(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv} + B_1]g(u)dx \\ & + N_1\int_\Omega f(u,v)g(u)dx.\end{aligned}$$

En plus, on a

$$g(u) \leq \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta,$$

donc

$$J \quad \leq \quad -sG(t)+ \mid \Omega \mid B_1\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{\beta} + N_1\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{\beta} \int_\Omega f(u,v)dx.$$

alors, si on pose,

$$B = B_1 \mid \Omega \mid \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{\beta}$$

et

$$\rho = N_1\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{\beta}.$$

donc, si on utilise le Lemme 3.2.1,

$$\begin{aligned} J \leq & \quad - sR_\rho(t) + s\rho\int_\Omega u(t,x)dx + B + \rho\Pi \mid \Omega \mid -\rho\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx \\ \leq & \quad - sR_\rho(t) + [sM + \Pi]\rho \mid \Omega \mid +B - \rho\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx, \end{aligned}$$

et par suite, on a

$$\frac{dR_\rho}{dt} \leq -sR_\rho + \Gamma,$$

où $\Gamma = [sM + \Pi]\rho \mid \Omega \mid +B$. □

Démonstration. (du Théoreme 3.2.2)
Multiplions (3.36) par e^{st} et intégrons l'inegalité, ce qui implique l'existence d'une constante positive $C > 0$ independente de t telque

$$R_\rho(t) \leq C.$$

Comme

$$g(u) \geq (\frac{1}{2-\theta})^{\beta},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx \quad & \leq \quad (2-\theta)^{\beta} R_\rho(t) \\ & \leq \quad C(2-\theta)^{\beta}. \end{aligned}$$

Aussi on a $\omega \geq 1$ et 3.32 on a bien,

$$\int_\Omega (v+1)^{\lambda p} e^{prv} dx \leq \int_\Omega (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx \leq C(2-\theta)^{\beta},$$

$$\int_\Omega v^{\mu p} dx \leq \int_\Omega (v+\omega)^{\gamma p} dx \leq C(2-\theta)^{\beta}.$$

On pose

$$A = \max_{0 \leq \xi \leq M} \varphi(\xi),$$

en partant des hypothèses Hyp.A1- Hyp.A3, on a

$$\int_\Omega f(u,v)^p dx \leq \int_\Omega A^p (v+1)^{\lambda p} e^{prv} dx \leq A^p C(2-\theta)^\beta = A^p H^p,$$

alors,

$$\|f(u,v) - \sigma\kappa(v)\|_p \leq \|f(u,v)\|_p + \|\sigma\kappa(v)\|_p \leq H(A+\sigma).$$

En tenant compte des remarques preliminaire (introduction de la section 3.2.2), nous concluons que la solution du système ((3.1)-(3.4)) est globale et uniforment bornée sur $[0,+\infty[\times\Omega$. $\square$

3.3 Etude du cas $\sigma = 0$

Dans cette section nous nous intéressons au système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \alpha u \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f(u,v) \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.41}$$

avec des conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.42}$$

et conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.43}$$

où Ω est un ouvert regulier et borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$, η est la normale extérieure de $\partial\Omega$, $a > 0$, $b > 0$ sont les constantes de diffusion, telque $a \neq b$ et Π, α, sont des constantes stirictement positives, f est une fonction positive de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

Le but principale de cette étude est de prouver l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution du problème ((3.40)-(3.43)), avec une nonlinearité exponentielle, telleque f satisfait les conditions suivantes :

B. Nonlinearité exponentielle

Hyp. B-1. $\forall \tau \geq 0,\ f(0,\tau) = \zeta,$

Hyp. B-2. $\forall \xi \geq 0,\ \forall \tau \geq 0, \quad f(\xi,\tau) \leq \varphi(\xi)(\tau+1)^\lambda e^{r\tau},$

Hyp. B-3. $\lim_{\tau\to+\infty} f(\xi,\tau) = +\infty.$

où r, λ, ζ sont des constantes positives, telles que $\lambda \geq 1$ et $0 < \zeta \leq \Pi$, φ est une fonction positive, de classe $C(\mathbb{R}^+)$.
Cette existence globale se justifié, pour tout v_0 et u_0 satisfaisant la conditiont suivante :

$$\max\left(\| u_0 \|_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}\right) < \frac{\theta^2}{2-\theta} \quad \frac{8ab}{rn(a-b)^2}, \tag{3.44}$$

où $\theta < 1$ est un nombre réel positif très proche de 1.
Pour cette fin on utilise deux techniques, le principe de maximum et la fonction de lyapunov.

3.3.1 Existence globale et bornage uniforme de la solution

De la même façon que dans la section 3.2, en utilisant le principe de maximum, on obtiens

$$0 \leq u(t,x) \leq \max(\| u_0 \|_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}), \tag{3.45}$$

Il reste donc le bornage uniforme de la solution v.
Si on utilise les résultat qu'on peut trouver dans D.Henry [25, pp. 35-62], [23], [40], [53], il est suffisant de montrer que

$$\| f(u,v) \|_p \leq C \tag{3.46}$$

(où C est une constante non négative indépendante de t) pour un certain $p > \frac{n}{2}$. Le résultat principale de cette section est

Théorème 3.3.1. *Sous les conditions Hyp.B1- Hyp.B3 et (3.44), la solution du système ((3.40)-(3.43)) est globale, en plus elle est bornée uniformement sur* $[0,+\infty[$.

Soient ω, β, γ et M des constantes positives telles que $\omega \geq 1$,

$$\beta = \theta \frac{4ab}{(a-b)^2}, \quad \gamma = \max\big(\lambda, \frac{(\beta+1)(2-\theta)Mr}{\beta\theta(1-\theta)}\big) \tag{3.47}$$

et

$$M = \max\big(\| u_0 \|_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}\big) < \frac{\theta^2}{2-\theta} \quad \frac{8ab}{rn(a-b)^2}. \tag{3.48}$$

Nous pouvons choisir

$$p = \frac{\theta^2}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2 Mr}, \tag{3.49}$$

comme consequence de (3.48), on a bien $p > \frac{n}{2}$.
Pour aboutir a une preuve du Theorème 3.3.1, il nous faut le résultat suivant

Proposition 3.3.1. *Supposons que les hypothèses Hyp.B1- Hyp.B3 sont satisfait et soit (u,v) la solution de ((3.40)-(3.43)) sur $]0,T^*[$, avec les conditions initiales v_0 et u_0 satisfait (3.44).*
Soit

$$R_\rho(t) = \rho \int_\Omega u dx + \int_\Omega \left(\frac{M}{(2-\theta)M-u}\right)^\beta (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx. \tag{3.50}$$

Alors, il existe $p > n/2$, et s, Γ des constantes positives telles que

$$\frac{dR_\rho}{dt} \leq -sR_\rho + \Gamma. \tag{3.51}$$

Démonstration. Soit

$$g(u)=\left(\frac{M}{(2-\theta)M-u}\right)^{\beta},$$

donc

$$R_\rho(t)=\rho\int_\Omega u dx+G(t),$$

où

$$G(t)=\int_\Omega g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx.$$

La differentiation de G par rapport à t, nous donne

$$\begin{aligned}
G'(t)= & \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial v}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]\frac{\partial v}{\partial t}dx\\
& =\int_\Omega a\frac{\partial}{\partial u}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]\Delta u+b\frac{\partial}{\partial v}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]\Delta v dx\\
& +\int_\Omega \big(\Pi-f(u,v)-\alpha u\big)\frac{\partial}{\partial u}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]dx\\
& +\int_\Omega f(u,v)\frac{\partial}{\partial v}\big[g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}\big]dx,
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, nous aurons

$$G'(t)=I+J,$$

où

$$\begin{aligned}
I= & -a\int_\Omega g''(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}|\nabla u|^2dx\\
& -(a+b)\int_\Omega g'(u)[\gamma p(v+\omega)^{\gamma p-1}+pr(v+\omega)^{\gamma p}]e^{prv}\nabla u\nabla v dx\\
& -b\int_\Omega g(u)[\gamma p(\gamma p-1)(v+\omega)^{\gamma p-2}+2\gamma p^2r(v+\omega)^{\gamma p-1}+p^2r^2(v+\omega)^{\gamma p}]e^{prv}|\nabla v|^2dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J= & \int_\Omega \Pi g'(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx-\int_\Omega \alpha g'(u)u(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx\\
& +\int_\Omega\Big(g(u)\big[\gamma p(v+\omega)^{\gamma p-1}+rp(v+\omega)^{\gamma p}\big]-g'(u)(v+\omega)^{\gamma p}\Big)f(u,v)e^{prv}dx.
\end{aligned}$$

Donc la formule I a une forme quadratique par rapport à ∇u et ∇v, qui est positive si

$$\begin{aligned}
\delta= & \big(p(a+b)g'(u)[\gamma(v+\omega)^{\gamma p-1}+r(v+\omega)^{\gamma p}]\big)^2\\
& -4ab\gamma p(\gamma p-1)g''(u)g(u)(v+\omega)^{2\gamma p-2}\\
& -4abg''(u)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}[2\gamma p^2r(v+\omega)^{\gamma p-1}+p^2r^2(v+\omega)^{\gamma p}]\leq 0.
\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}\delta = \quad & [(p\gamma)^2(a+b)^2\beta^2 - 4ab\beta(\beta+1)p\gamma(p\gamma-1)]\frac{g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-2}}{((2-\theta)M-u)^2} \\ & + [(a+b)^2\beta^2 - 4ab\beta(\beta+1)]\frac{rp^2g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-1}}{((2-\theta)M-u)^2}[2\gamma + r(v+\omega)],\end{aligned}$$

le choix de β et γ, nous donne

$$\begin{aligned}\delta \leq \quad & [\beta+1-p\gamma(1-\theta)]\frac{4ab\beta p\gamma g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-2}}{((2-\theta)M-u)^2} \\ & + 4ab(\theta-1)\frac{rp\beta g(u)^2(v+\omega)^{2p\gamma-1}}{((2-\theta)M-u)^2}[2+(rp)(v+\omega)] \leq 0,\end{aligned}$$

et par suite, on a

$$I \leq 0.$$

Concernant le second terme J, on a

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega \frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} g(u)(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(p[\frac{\gamma}{v+\omega}+r] - \frac{\beta}{(2-\theta)M-u}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx.\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega \frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} g(u)(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(p[\frac{\gamma}{v+\omega}+r] - \frac{\theta}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega \left(\frac{\Pi\beta}{(1-\theta)M} - \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}f(u,v)\right) g(u)(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(\frac{p\gamma}{v+\omega} - \frac{\theta^2(1-\theta)}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(pr - \frac{\theta^2}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx,\end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned}J \quad \leq \quad & \int_\Omega \left(\Pi - \frac{(1-\theta)^3}{2-\theta}f(u,v)\right)\frac{\beta}{(1-\theta)M} g(u)(v+\omega)^{p\gamma}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(\frac{p\gamma}{v+\omega} - \frac{\theta^2(1-\theta)}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx \\ & + \int_\Omega \left(pr - \frac{\theta^2}{2-\theta}\frac{4ab}{(a-b)^2M}\right) f(u,v)g(u)(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse Hyp.B3 et le Lemme 3.2.2, le Lemme 3.2.3 et la formule 3.49, alors il existe $s > 0$, $B_1 > 0$, tels que

$$\begin{aligned} J &\le \int_\Omega [-s(v+\omega)^{p\gamma} e^{prv} + B_1] g(u)dx \\ &+N_1 \int_\Omega f(u,v)g(u)dx. \end{aligned}$$

En plus, on a

$$g(u) \le \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta,$$

donc

$$J \quad \le \quad -sG(t) + \mid \Omega \mid B_1 \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta + N_1 \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta \int_\Omega f(u,v)dx.$$

alors, si on pose,

$$B = B_1 \mid \Omega \mid \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta$$

et

$$\rho = N_1 \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\beta.$$

donc, si on utilise le Lemme 3.2.1,

$$\begin{aligned} J \le &\quad - sR_\rho(t) + s\rho \int_\Omega u(t,x)dx + B + \rho\Pi \mid \Omega \mid - \rho \frac{d}{dt} \int_\Omega u(t,x)dx \\ \le &\quad - sR_\rho(t) + [sM + \Pi]\rho \mid \Omega \mid + B - \rho \frac{d}{dt} \int_\Omega u(t,x)dx, \end{aligned}$$

et par suite, on a

$$\frac{dR_\rho}{dt} \le -sR_\rho + \Gamma,$$

où $\Gamma = [sM + \Pi]\rho \mid \Omega \mid + B$. □

Démonstration. (du Théoreme 3.3.1)
Multiplions (3.51) par e^{st} et intégrons l'inegalité, ce qui implique l'existence d'une constante positive $C > 0$ independente de t telque

$$R_\rho(t) \le C.$$

Comme

$$g(u) \ge (\frac{1}{2-\theta})^\beta,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v+\omega)^{\gamma p} e^{prv} dx &\le (2-\theta)^\beta R_\rho(t) \\ &\le C(2-\theta)^\beta. \end{aligned}$$

Aussi on a $\omega \geq 1$ et (3.47) on a bien,

$$\int_{\Omega}(v+1)^{\lambda p}e^{prv}dx \leq \int_{\Omega}(v+\omega)^{\gamma p}e^{prv}dx \leq C(2-\theta)^{\beta}.$$

On pose

$$A = \max_{0\leq \xi \leq M}\varphi(\xi),$$

en partant des hypothèses Hyp.B1- Hyp.B3, on a

$$\int_{\Omega} f(u,v)^p dx \leq \int_{\Omega} A^p(v+1)^{\lambda p}e^{prv}dx \leq A^pC(2-\theta)^{\beta} = A^pH^p,$$

alors,

$$\|f(u,v)\|_p \leq AH.$$

En tenant compte des remarques preliminaire (introduction de la section 3.2.2), nous concluons que la solution du système ((3.40)-(3.43)) est globale et uniforment bornée sur $[0,+\infty[\times\Omega$. $\square$

Chapitre 4

Etude d'un système avec une nonlinearité polynomiale

Après avoir etudier l'existence locale de la solution du système ((2.37)-(2.40)), on s'intéresse dans ce chapitre, a l'étude de l'existence globale ainsi que le bornage uniforme en temps, de la solution d'un système de reaction-diffusion intervenant dans la modelisation de la propagation de la maladie SIDA dans une population (pour plus de détail voir section 7.2), cette étude se fera dans le cas où on a une nonlinearité polynomiale du deuxième membre du système, dont la matrice correspondante est triangulaire.

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous nous intéressons a un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \alpha u \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = g(u,v) - \sigma v \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

avec des conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

et conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.4}$$

où Ω est ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^1, η est la normale extérieure de $\partial\Omega$, $a > 0$, $c > 0$ et $d > 0$ sont les constantes de diffusion, telsque $a > d$ et $c^2 < 4ad$ qui représente la condition de parabolicité. Π, α, σ sont des constantes stirictement positives, f, g sont deux fonctions positives de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, telles que,

C. Nonlinearité polynomiale

Hyp. C-1. *Pour tout* $\tau \geq 0$, $f(0,\tau) = 0$ *;*

Hyp. C-2. *Pour tout* $\xi \geq 0$ *et tout* $\tau \geq 0$, $0 \leq f(\xi,\tau) \leq \varphi(\xi)(\mu+\tau)^r$ *;*

Hyp. C-3. *Pour tout* $\xi \geq 0$ *et tout* $\tau \geq 0$, $g(\xi,\tau) \leq \psi(\tau) f(\xi,\tau) + \phi(\tau)$,

où r, μ sont des constantes positives telles que $r \geq 1$, $\mu \geq 1$, φ, ψ et ϕ sont des fonctions nonnegatives de classe $C(\mathbb{R}_+)$, telles que

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{\phi(\tau)}{\tau} = 0, \tag{4.5}$$

$$\phi(0) > \beta \frac{c}{a-d}. \tag{4.6}$$

En plus, on suppose

$$g(\xi, \frac{c}{a-d}\xi) + \frac{c}{a-d} f(\xi, \frac{c}{a-d}\xi) \geq \frac{c}{a-d}[(\sigma-\alpha)\xi + \beta], \quad \forall \xi \geq 0. \tag{4.7}$$

4.2 Synthèse

Le but de cette partie est de donner un panorama des résultats recents autour de la question d'existence globale des solutions, pour des systèmes de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Pi - f(u,v) - \alpha u, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = f(u,v) - \sigma\kappa(v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.10}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.11}$$

Dans le cas $\Pi = 0$, $\alpha = 0$, $\sigma = 0$ et $f(u,v) = h(u)T(v)$, (on peut prendre $h(u) = u$ pour des raisons de simplicité) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -uT(v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = uT(v), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.14}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.15}$$

Kirane [34] a etudie ce systeme sous la condition suivante :

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\ln(1 + T(s))}{s} = 0.$$

En suite Kanel et Kirane [32] ont donné une repense positive, sous les conditions suivantes :

(H'1) $f(u,v) \geq 0$, on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(H'2) $f(0,v) = 0$, pour tout $v \in \mathbb{R}_+$;

(H'3) $f(u,v) \leq K\phi(u)e^{\gamma v}$, où K et γ sont des constantes positives, ϕ est une fonction continue, nonnegative et localement Lipschitizienne sur R telle que $\phi(0) = 0$

(H'4) $d > a$, $c < d - a$.

Donc notre but dans ce chapitre est de cherché une repense positive, concernant la question de l'existence globale de la solution du système considéré, i.e., dans le cas où $\Pi > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, en prenant en compte les hypothèses Hyp.C1- Hyp.C3, (4.5), (4.6) et enfin (4.7) pour assuré la positivité de la solution (voir l'exemple 2.3.1).

4.3 Existence globale et bornage uniforme de la solution

Le but de cette partie est d'étudier la question de l'existence globale et bornage uniforme de la solution du système (((4.1))-((4.4))), en prenant en compte les hypothèses Hyp.C1- Hyp.C3, (4.5), (4.6) et enfin (4.7), en utilisant la méthode de la fonction de lyapunov.

4.3.1 Resultat principal

En utilisant le principe de comparaison, on obtiens

$$0 \leq u(t,x) \leq \max(\| u_0 \|_\infty, \frac{\Pi}{\alpha}) = K, \tag{4.16}$$

Il reste donc le bornage uniforme de la solution v. Si on utilise le Lemme **??** ou bien les résultats qu'on peut trouver dans D.Henry [25, pp. 35-62], [23], [40], [53], il est suffisant de montrer que

$$\|\Upsilon(u,z)\|_p \leq C, \tag{4.17}$$

ou bien

$$\| g(u,v) - \sigma v \|_p \leq C \tag{4.18}$$

(où C est une constante non négative indépendante de t) pour un certain $p > \frac{n}{2}$.

Le résultat principale de ce chapitre est

Théorème 4.3.1. *[11]*
Sous les conditions Hyp.C1- Hyp.C3, (4.5), (4.6), la solution du système ((4.1)-(4.4)) est globale, en plus elle est bornée uniformement sur $[0, +\infty[$.

4.3.2 Construction d'une fonction de Lyapunov

Posons

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \frac{p\Gamma + 1}{p-1}\,, \quad \Gamma = (a-d)^2[1 + \frac{1}{4ad}]\,, \\ l &= \frac{2\Pi\rho}{\Gamma(p)\sigma}\,, \quad \omega = [\frac{S^2}{4adR^2} + \frac{p}{R^2} + \mu](p-1) \end{aligned} \tag{4.19}$$

où $\rho > 0$,

$$S = \frac{\rho}{\Gamma(p)l}, \quad R = \frac{(a-d)\rho}{\Gamma(p)(l+\rho K)}.$$

En utilisant les notations ci-dessus, on peut énoncer proposition suivante

Proposition 4.3.1. *[11]*
Supposons que $p \geq 2$ et soit

$$G_N(t) = N\int_\Omega u dx + \int_\Omega (v+\omega)^p \exp(-\frac{1}{\Gamma(p)}\ln(\Gamma(p)[l+\rho(K-u)]))dx, \tag{4.20}$$

où (u,v) est la solution du système ((4.1)-(4.4)) sur $]0,T^*[$.
Alors, sous les suppositions Hyp.C1- Hyp.C3, (4.5), (4.6), il existe deux constantes positive N et s telles que

$$\frac{dG_N}{dt} \leq -(p-1)\sigma G_N + s. \tag{4.21}$$

La preuve de cette proposition nécessite quelques Lemmes.

Lemme 4.3.1. *[46] Si (u,v) est la solution du système ((4.1)-(4.4)), alors*

$$\int_\Omega f(u,v)dx \leq \beta|\Omega| - \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx. \tag{4.22}$$

Démonstration. Nous integrons les deux cotés de (4.1),

$$\int_\Omega f(u,v) = \int_\Omega \Pi - \alpha u - \frac{d}{dt}u(t,x)dx$$

et comme la fonction u est positive, alors on trouve (4.22). □

Lemme 4.3.2. *[11] Supposons que $p \geq 2$, alors sous les hypothèses Hyp.C1- Hyp.C3, (4.5), (4.6) il existe N_1, tel que*

$$[p(g(\xi,\tau)-\phi(\tau))(\tau+\omega)^{p-1} - \theta f(\xi,\tau)(\tau+\omega)^p] \leq N_1 f(\xi,\tau) \tag{4.23}$$

pour tout $0 \leq \xi \leq K$ et $\tau \geq 0$, $\theta > 0$.

Démonstration. De la supposition Hyp.C3, et (4.5), nous concluons qu'il existe $\tau_0 > 0$, tel que pour tout $0 \leq \xi \leq K, \tau \geq \tau_0$, on trouve

$$[p\frac{\psi(\tau)}{\tau+\omega} - \theta](\tau+\omega)^p f(\xi,\tau) \leq 0.$$

Maintenant si τ est dans l'intervalle fermé $[0,\tau_0]$, alors la fonction continue

$$\chi(\xi,\tau) = p\psi(\tau)(\tau+\omega)^{p-1} - \theta(\tau+\omega)^p$$

est bornée. □

Lemme 4.3.3. *[11]*
Pour tout $\tau \geq 0$ et $\omega \geq 1$, on a

$$\frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l}(\tau+\omega)^p - \sigma p(\tau+\omega)^{p-1}\tau + p\phi(\tau)(\tau+\omega)^{p-1} \leq -(p-1)\sigma(\tau+\omega)^p + M_1 \quad (4.24)$$

où M_1 est une constante positive.

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned}\Pi =& \frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l}(\tau+\omega)^p - \sigma p(\tau+\omega)^{p-1}\tau \\ \leq& [2\frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l} - \sigma p]\tau(\tau+\omega)^{p-1} + [2\frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l}\frac{\omega}{\tau+\omega} - \frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l}](\tau+\omega)^p\end{aligned}$$

comme $l = \frac{2\beta\rho}{\Gamma(p)\sigma}$, alors

$$\Pi + p\phi(\tau)(\tau+\omega)^{p-1} \leq -(p-1)\sigma(\tau+\omega)^p + [\frac{p(\sigma\omega+\phi(\tau))}{\sigma(\tau+\omega)} - \frac{1}{2}]\sigma(\tau+\omega)^p.$$

En utilisant (4.5) et le Lemme 4.3.2. □

Maintenant on peut établir la preuve de la proposition 4.3.1,

Démonstration de la proposition 4.3.1. Soit

$$h(u) = -\frac{1}{\Gamma(p)}\ln(\Gamma(p)[l+\rho(K-u)])$$

pour poser

$$G_N(t) = N\int_\Omega u dx + L(t)$$

où

$$L(t) = \int_\Omega e^{h(u)}(v+\omega)^p dx.$$

La differentiation de L par rapport à t, nous donne

$$\begin{aligned}L'(t) &= \int_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial u}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]\frac{\partial v}{\partial t}\Big]dx \\ &= \int_\Omega \Big[a\frac{\partial}{\partial u}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big] + c\frac{\partial}{\partial v}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]\Big]\Delta u dx \\ &+ \int_\Omega d\frac{\partial}{\partial v}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]\Delta v dx \\ &+ \int_\Omega \Big[\big(\beta - f(u,v) - \alpha u\big)\frac{\partial}{\partial u}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]dx \\ &+ \int_\Omega \big(g(u,v) - \sigma v\big)\frac{\partial}{\partial v}\big[e^{h(u)}(v+\omega)^p\big]\Big]dx,\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, nous aurons

$$L'(t) = I + J$$

où

$$\begin{aligned} I = &-\int_\Omega [a(h''(u) + h'^2(u))(v+\omega)^p + pch'(u)(v+\omega)^{p-1}]e^{h(u)}\nabla u^2 dx \\ &-\int_\Omega [p(a+d)h'(u)(v+\omega)^{p-1} + p(p-1)c(v+\omega)^{p-2}]e^{h(u)}\nabla u \nabla v dx \\ &-\int_\Omega p(p-1)d(v+\omega)^{p-2}e^{h(u)}\nabla v^2 dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J = &\int_\Omega \beta h'(u)(v+\omega)^p e^{h(u)} dx \\ &+\int_\Omega [pg(u,v)(v+\omega)^{p-1} - h'(u)f(u,v)(v+\omega)^p]e^{h(u)} dx \\ &-\int_\Omega \alpha h'(u)u(v+\omega)^p e^{h(u)} dx - \int_\Omega \sigma p(v+\omega)^{p-1} v e^{h(u)} dx. \end{aligned}$$

Donc la formule I a une forme quadratique par rapport à ∇u et ∇v, $\nabla u, \nabla v$.

$$\begin{aligned} D = &[a(h''(u) + h'^2(u))(v+\omega)^p + pch'(u)(v+\omega)^{p-1}]\nabla u^2 \\ &+ [p(a+d)h'(u)(v+\omega)^{p-1} + p(p-1)c(v+\omega)^{p-2}]\nabla u \nabla v \\ &+ p(p-1)d(v+\omega)^{p-2}\nabla v^2 \end{aligned}$$

qui est positive si

$$\begin{aligned} \delta = &[p(a+d)h'(u)(v+\omega)^{p-1} + p(p-1)(v+\omega)^{p-2}]^2 \\ &- 4p(p-1)d(v+\omega)^{p-2}[a(h''(u) + h'^2(u))(v+\omega)^p \\ &+ pch'(u)(v+\omega)^{p-1}] \leq 0. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \delta = &p^2(a+d)^2 h'^2(u)(v+\omega)^{2p-2} + 2(a+d)cp^2(p-1)h'(u))(v+\omega)^{2p-3} \\ &+ c^2p^2(p-1)^2(v+\omega)^{2p-4} - 4p(p-1)ad(h''(u) + h'^2(u))(v+\omega)^{2p-2} \\ &- 4cdp^2(p-1)h'(u)(v+\omega)^{2p-3} \end{aligned}$$

et comme $v + \omega \geq 1$. Il s'en suit

$$\begin{aligned} \delta \leq &[p^2(a+d)^2h'^2(u) - 4p(p-1)ad(h''(u) + h'^2(u))](v+\omega)^{2p-2} \\ &+ [2(a+d)cp^2(p-1)h'(u) + c^2p^2(p-1)^2 \\ &- 4cdp^2(p-1)h'(u)](v+\omega)^{2p-3}. \end{aligned}$$

Posons

$$T = p^2(a+d)^2h'^2(u) - 4p(p-1)ad(h''(u) + h'^2(u))$$

le choix de $h(u)$, nous laisse ecrire

$$\frac{\rho}{\Gamma(p)[l+\rho K]} \leq h'(u) \leq \frac{\rho}{\Gamma(p)l}, \tag{4.25}$$

et par consequent,

$$T = -\frac{\rho^2 4ad(a-d)^2p^2}{[\Gamma(p)(l+\rho(K-u))]^2} \leq -4adp^2R^2 \leq 0.$$

En plus

$$\begin{aligned}\delta \leq & [2(a+d)cp^2(p-1)h'(u) + c^2p^2(p-1)^2 - 4cdp^2(p-1)h'(u)](v+\omega)^{2p-3} \\ & + T(v+\omega)(v+\omega)^{2p-3} \\ \leq & [(p-1)c^2 + 2(a-d)c\frac{\rho}{\Gamma(p)l} - \frac{4adR^2\omega}{(p-1)}]p^2(p-1)(v+\omega)^{2p-3} + Tv(v+\omega)^{2p-3}.\end{aligned}$$

Si on remplace w par sa valeur et utilisé la condition de parabolicité $c^2 - 4ad < 0$, nous deduisons

$$\begin{aligned}\delta \leq & [p(c^2-4ad) - (c-S)^2 - 4adR^2\mu]p^2(p-1)(v+\omega)^{2p-3} \\ & + Tv(v+\omega)^{2p-3} \leq 0,\end{aligned}$$

et on a,

$$I \leq 0.$$

Nous pouvons controlé le second tèrme par l'observation que

$$\begin{aligned}J \leq & \int_\Omega [\beta h'(u)(v+\omega)^p - \sigma p(v+\omega)^{p-1}v + p\phi(v)(v+\omega)^{p-1}]e^{h(u)}dx \\ & + \int_\Omega [p(g(u,v) - \phi(v))(v+\omega)^{p-1} - h'(u)f(u,v)(v+\omega)^p]e^{h(u)}dx.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}J \leq & \int_\Omega [\frac{\beta\rho}{\Gamma(p)l}(v+\omega)^p - \sigma p(v+\omega)^{p-1}v + p\phi(v)(v+\omega)^{p-1}]e^{h(u)}dx \\ & + \int_\Omega [p(g(u,v) - \phi(v))(v+\omega)^{p-1} - \frac{\rho}{\Gamma(p)[l+\rho k]}f(u,v)(v+\omega)^p]e^{h(u)}dx.\end{aligned}$$

En appliquant les Lemmes 4.3.2 et 4.3.3, nous trouvons

$$J \leq -(p-1)\sigma \int_\Omega (v+\omega)^p e^{h(u)}dx + M_1 \int_\Omega e^{h(u)}dx + N_1 \int_\Omega f(u,v)e^{h(u)}dx.$$

En plus on a

$$h(u) \leq -\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \frac{2\beta\rho}{\sigma},$$

et par conséquent,

$$J \leq -(p-1)\sigma L + M_1|\Omega|e^{-\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \frac{2\beta\rho}{\sigma}} + N_1 e^{-\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \frac{2\beta\rho}{\sigma}} \int_\Omega f(u,v)dx.$$

Posons

$$M = M_1|\Omega|e^{-\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \frac{2\beta\rho}{\sigma}}, \quad N = N_1 e^{-\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \frac{2\beta\rho}{\sigma}}$$

et utilisant le Lemme 4.3.1, nous concluons que

$$\begin{aligned} J \leq & -(p-1)\sigma L + M + N[\beta|\Omega| - \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx] \\ \leq & -(p-1)\sigma G_N + (p-1)\sigma N \int_\Omega u dx + M + N\beta|\Omega| - N\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx \\ \leq & -(p-1)\sigma G_N + |\Omega|N[(p-1)K\sigma + \beta] + M - N\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx. \end{aligned}$$

et enfin on a

$$\frac{dG_N}{dt} \leq -(p-1)\sigma G_N + s$$

où $s = |\Omega|N[(p-1)K\sigma + \beta] + M$. □

Nous pouvons maintenant établir la preuve du resultat principal de ce chapitre.

Démonstration du Théorème 4.3.1. Nous multiplions (4.3.6) par $e^{(p-1)\sigma t}$ et integrons,

$$\int_0^t e^{(p-1)\sigma\tau}\frac{dG_N}{dt}d\tau \leq \int_0^t -(p-1)\sigma G_N e^{(p-1)\sigma\tau} + s e^{(p-1)\sigma\tau} d\tau$$

$$G_N(t) \leq C.$$

Comme

$$e^{h(u)} \geq e^{-\frac{1}{\Gamma(p)} \ln(\Gamma(p)[l+\rho k)])},$$

pour tout $p \geq 2$, on a

$$\int_\Omega (v+\omega)^p dx \quad \leq e^{\frac{1}{\Gamma(p)} \ln(\Gamma(p)[l+\rho k))} G_N(t) \leq C e^{\frac{1}{\Gamma(p)} \ln \Gamma(p)[l+\rho k]} = C(p).$$

Par concequent, nous avons

$$\int_\Omega (v+\mu)^p dx \leq C(p), \quad \int_\Omega v^p dx \leq C(p).$$

Maitenant nous choisissons $p > n/2$, et nous cherchons a estimé $\|\Upsilon(u,v)\|_p$. nous posons

$$A_1 = \max_{0\leq\tau\leq\tau_0} \psi(\tau), \quad A_2 = \max_{0\leq\xi\leq K} \varphi(\xi), \quad A_3 = \max_{0\leq\tau\leq\tau_0} \phi(\tau)$$

où $\tau_0 = max(\tau_1, \tau_2)$ telle que

$$\tau \geq \tau_1 \quad \Rightarrow \quad \psi(\tau) \leq \tau, \quad \tau \geq \tau_2 \quad \Rightarrow \quad \phi(\tau) \leq \tau.$$

En utilisant Hyp.C1- Hyp.C3, nous aurons

$$g(u,v) \leq \psi(v)f(u,v) + \phi(v) \leq \psi(v)\varphi(u)(\mu+v)^r + \phi(v) \leq A_2\psi(v)(\mu+v)^r + \phi(v).$$

Comme $0 \leq u \leq K$, on a

$$\int_\Omega g(u,v)^p dx \leq \int_\Omega [A_2\psi(v)(\mu+v)^r + \phi(v)]^p dx.$$

En utilisant l'inegalité

$$(x+y)^q \leq 2^{q-1}(x^q + y^q)$$

pour tout $x, y \geq 0$ et $q \geq 1$, pour obtenir les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(u,v)^p dx \\
&\leq \int_\Omega 2^{p-1}[A_2^p \psi(v)^p (\mu+v)^{rp} + \phi(v)^p] dx \\
&\leq 2^{p-1}\Big[A_2^p\Big(\int_{v\leq\tau_0} A_1^p(\mu+\tau_0)^{rp}dx + \int_{v\geq\tau_0} v^p(\mu+v)^{rp}dx\Big) + |\Omega|A_3^p + \int_{v\geq\tau_0} v^p dx\Big] \\
&\leq 2^{p-1}\Big[\Big(A_2A_1(\mu+\tau_0)^r\Big)^p|\Omega| + A_2^p\int_{v\geq\tau_0}(\mu+v)^{(r+1)p}dx + |\Omega|A_3^p + \int_{v\geq\tau_0} v^p dx\Big] \\
&\leq 2^{p-1}[(A_2A_1(\mu+\tau_0)^r)^p|\Omega| + A_2^pC((r+1)p) + |\Omega|A_3^p + C(p)] = E_g^p
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega f(u,v)^p dx \leq A_2^p C(rp) = E_f^p.$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned}
\|\Upsilon(u,v)\|_p &\leq \|g(u,v)\|_p + \frac{c}{a-d}[\|f(u,v)\|_p + \alpha\|u\|_p + \beta|\Omega|] + \sigma\|v\|_p \\
&\leq E_g + \frac{c}{a-d}[E_f + (\alpha K + \beta)|\Omega|] + \sigma\sqrt[p]{C(p)}.
\end{aligned}$$

Enfin nous concluons que l'unique solution du système considéré, est globale, et uniformement bornée sur $[0, +\infty[\times\Omega$. $\square$

Remarque 4.3.1. *La fonction g peut dépendre de t, c'est-a-dire qu'on peut supposer que*
$\varpi(t) \in C([0, +\infty[)$, *une fonction positive et bornée, telle que*

$$\varpi \leq \mu_1. \tag{4.26}$$

Donc si on pose

$$g(t, \xi, \tau) = \varpi(t) f(\xi, \tau), \tag{4.27}$$

alors,

$$g(t, \xi, \tau) \leq \mu_1 f(\xi, \tau), \tag{4.28}$$

mais

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\mu_1}{\tau} = 0, \tag{4.29}$$

donc g verifie l'hypothèse Hyp.C3, et dans ce cas la proposition 4.3.1 reste vraie, et par suite le Théorème 4.3.1 reste aussi vrai.

Quatrième partie

Comportement asymptotique

Chapitre 5

Comportement asymptotique

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude du comportement asymptotique de la solution du problème (((4.1))-((4.4))), chapitre 4.

Dans ce chapitre nous nous intéressons a un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \beta - f(u,v) - \alpha u \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = g(t,u,v) - \sigma v \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{5.2}$$

avec des conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{5.3}$$

et conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.4}$$

où Ω est ouvert régulier et borné de R^n, avec une frontière $\partial\Omega$, η est la normale extérieure de $\partial\Omega$, $a > 0$, $c > 0$ et $d > 0$ sont les constantes de diffusion, telsque $a > d$ et $c^2 < 4ad$ qui représente la condition de parabolicité. β, α, σ sont des constantes stirictement positives, f est une fonction positive de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
Concernant la fonction g, on va supposer les même hypothèses de la remarque 4.3.1, c'est-a-dire que g est une fonction positive de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ telle que,

D. Nonlinearité polynomiale

Hyp. D-1. *Pour tout* $\tau \geq 0$, $f(0,\tau) = 0$ *;*

Hyp. D-2. *Pour tout* $\xi \geq 0$ *et tout* $\tau \geq 0$, $0 \leq f(\xi,\tau) \leq \varphi(\xi)\tau(\mu+\tau)^{r-1}$ *;*

Hyp. D-3. *Pour tout* $\xi \geq 0$ *et tout* $\tau \geq 0$, $g(t,\xi,\tau) = \varpi(t) f(\xi,\tau) \leq \mu_1 f(\xi,\tau)$,

Hyp. D-4. ϖ *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$, *et il existe* $p \geq 1$, *telle que*

$$\int_0^{+\infty} \varpi^p(s)ds < +\infty,$$

où r, μ sont des constantes positives telles que $r \geq 1$, $\mu \geq 1$, φ, ϖ sont des fonctions nonnegatives de classe $C(\mathbb{R}^+)$, telles que

Du Théorème 4.3.1, nous pouvons assurer l'existence d'une constante positive $\overline{B}$, telle que

$$v(t,x) \leq \overline{B} \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{5.5}$$

Posons

$$z = \frac{\Pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \|u_0\|_\infty e^{-\alpha t} - u, \tag{5.6}$$

alors, z satisfait l'équation suivante

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a\Delta z = f(u,v) - \alpha z, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{5.8}$$

$$z(0,x) = z_0(x) = \|u_0\|_\infty - u_0(x) \geq 0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{5.9}$$

Lemme 5.0.4. *Soit $(u(t,x), v(t,x))$, la solution globale du problème (((5.1))-((5.4))), alors,*

$$u \leq \frac{\Pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \|u_0\|_\infty e^{-\alpha t}. \tag{5.10}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la solution du problème (((5.7))-((5.9))) est positive.
En effet,

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a\Delta z = F(z,v), \tag{5.11}$$

avec

$$F(z,v) = f(u,v) - \alpha z.$$

On a donc

$$F(0,v) = f(\frac{\Pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \|u_0\|_\infty e^{-\alpha t}, v) \geq 0,$$

et d'après la proposition 2.3.1, la solution z est positive. □

Donc d'après la démonstration, on a

$$0 \leq z \leq \frac{\Pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \|u_0\|_\infty e^{-\alpha t} \leq \frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{5.12}$$

Lemme 5.0.5. *Soit $(u(t,x), v(t,x))$, la solution du problème (((5.1))-((5.4))), on a*

$$0 \leq \int_0^t \int_\Omega v dx ds < +\infty, \quad \forall t > 0, \tag{5.13}$$

et

$$\int_0^t \int_\Omega g(s,u,v) dx ds < +\infty, \quad \forall t > 0. \tag{5.14}$$

Démonstration. Soit q le conjugué de $p \geq 1$, l'hypothèse Hyp.D4 nous permet d'écrire

$$\int_0^{+\infty} \varpi^p(t) dt = a_0 < +\infty. \tag{5.15}$$

Posons

$$\overline{A_2} = \max_{0 \leq \xi \leq K} \varphi(\xi). \tag{5.16}$$

Par ailleurs, si on applique le Théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction

$$T(\tau) = \frac{\tau}{\tau + \mu},$$

on a

$$T^q(\tau) \leq \tau C_q, \tag{5.17}$$

où

$$C_q = \sup_{0 \leq \varsigma \leq \tau \leq \overline{B}} \Big(\tau^{q-1} \big(\frac{\mu}{(\varsigma + \mu)^2} \big)^q \Big).$$

En integrant l'equation (5.2) sur Ω et utilisant l'inégalité de Holder, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega v dx &= \int_\Omega g(t,u,v) - \sigma v dx \\ &= \int_\Omega \varpi(t) f(u,v) - \sigma v dx \\ &\leq \int_\Omega \varpi(t) \varphi(u) v (\mu + v)^{r-1} - \sigma v dx \\ &\leq \varpi(t) \overline{A_2} (\mu + \overline{B})^r \int_\Omega T(v) dx - \sigma \int_\Omega v dx \\ &\leq \varpi(t) \overline{A_2} (\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} \big(\int_\Omega T^q(v) dx \big)^{\frac{1}{q}} - \sigma \int_\Omega v dx \\ &\leq \varpi(t) \overline{A_2} (\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} C_q^{\frac{1}{q}} \big(\int_\Omega v dx \big)^{\frac{1}{q}} - \sigma \int_\Omega v dx. \end{aligned} \tag{5.18}$$

En integrant (5.18) sur $[0,t]$ et utilisant l'inégalité de Holder, on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v dx + \sigma \int_0^t \int_\Omega v dx ds \\ &\quad \leq \overline{A_2} (\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} C_q^{\frac{1}{q}} \int_0^t \varpi(s) \big(\int_\Omega v dx \big)^{\frac{1}{q}} ds + \int_\Omega v_0 dx \\ &\quad \leq \overline{A_2} (\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} C_q^{\frac{1}{q}} \big(\int_0^t \varpi^p(s) ds \big)^{\frac{1}{p}} \big(\int_0^t \int_\Omega v dx ds \big)^{\frac{1}{q}} + |\Omega| \|v_0\|_\infty. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Posons

$$h(t) = \Big(\int_0^t \int_\Omega v dx ds\Big)^{\frac{1}{q}},$$

alors

$$\sigma h^q(t) - \overline{A_2}(\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} C_q a_0^{\frac{1}{p}} h(t) - |\Omega| \|v_0\|_\infty \leq 0, \tag{5.20}$$

alors

$$\Big(\int_0^t \int_\Omega v dx ds\Big)^{\frac{1}{q}} \leq x_0$$

où x_0 est l'unique solution positive de l'equation

$$\sigma x^q - \overline{A_2}(\mu + \overline{B})^r |\Omega|^{\frac{1}{p}} C_q a_0^{\frac{1}{p}} x - |\Omega| \|v_0\|_\infty = 0, \tag{5.21}$$

dans $\mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^{+\infty} \int_\Omega v dx ds < \infty. \tag{5.22}$$

Pour la fonction g, on intègre ((5.7)) sur $[0, t[\times\Omega$, on aura

$$\begin{aligned} \int_\Omega v dx + \sigma \int_0^t \int_\Omega v dx ds \\ = \int_0^t \int_\Omega g(t, u, v) v dx ds + \int_\Omega v_0 dx, \end{aligned} \tag{5.23}$$

d'ou

$$\int_0^{+\infty} \int_\Omega g(t, u, v) dx ds \leq \int_\Omega v dx + \int_0^{+\infty} \int_\Omega v dx ds < \infty. \tag{5.24}$$

$\square$

Théorème 5.0.2. *Soit $(u(t,x), v(t,x))$, la solution globale du problème (((5.1))-((5.4))). Alors, lorsque $t \to +\infty$,*

$$\|u - \frac{\Pi}{\alpha}\|_\infty \to 0. \tag{5.25}$$

$$\|v\|_\infty \to 0. \tag{5.26}$$

Démonstration. Multiplions l'équation ((5.7)) par z et intégrons sur $[0, t[\times\Omega$, et en utilisant la formule de Green, on trouve,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega z^2 dx + a \int_0^t \int_\Omega |\nabla z|^2 dx ds + \alpha \int_0^t \int_\Omega z^2 dx ds \\ = \int_0^t \int_\Omega z f(u, v) dx ds + \frac{1}{2}\int_\Omega z_0^2 dx, \end{aligned} \tag{5.27}$$

de l'inégalité (5.12), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega z^2dx + a\int_0^t\int_\Omega |\nabla z|^2 dxds + \alpha\int_0^t\int_\Omega z^2dxds \\ \leq (\frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty)\int_0^t\int_\Omega f(u,v)dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega z_0^2dx \\ \leq (\frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty)\int_0^t\int_\Omega \varphi(u)v(\mu+v)^{r-1}dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega z_0^2dx.\end{aligned} \tag{5.28}$$

On a

$$A_2 = \max_{0\leq\xi\leq K}\varphi(\xi),$$

et on pose

$$\overline{R} = max(A_2, (\mu + \overline{B})^{r-1})$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega z^2dx + a\int_0^t\int_\Omega |\nabla z|^2 dxds + \alpha\int_0^t\int_\Omega z^2dxds \\ \leq \overline{R}(\frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty)\int_0^t\int_\Omega vdxds + \frac{1}{2}\int_\Omega z_0^2dx.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Le Lemme 5.0.5, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega z^2dx + a\int_0^t\int_\Omega |\nabla z|^2 dxds + \alpha\int_0^t\int_\Omega z^2dxds \\ \leq \overline{R}(\frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty)|\Omega|\overline{D} + \frac{1}{2}\int_\Omega z_0^2dx,\end{aligned} \tag{5.30}$$

où $\overline{D}$ est une constante positive telle que

$$\int_0^t\int_\Omega vdxds \leq \overline{D}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Alors on déduit les résultats suivants :

$$z(t,.) \in L^2(\Omega), \tag{5.31}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_\Omega |\nabla z|^2dxds < +\infty, \tag{5.32}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_\Omega z^2dx < +\infty. \tag{5.33}$$

D'après le Lemme 1.1.1, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\|z(t,.)\|_2 = 0. \tag{5.34}$$

D'autre part d'après le Théorème **??** d'Ascoli et [23], $\{z(t,.)\}_{t\geq 0}$ est relativement compact, et 5.34 on a

$$\lim_{t\to+\infty}\|z(t,.)\|_\infty = 0. \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}\|u-\frac{\Pi}{\alpha}\|_\infty =& \|\frac{\Pi}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+\|u_0\|_\infty e^{-\alpha t}-u+e^{-\alpha t}(\frac{\Pi}{\alpha}-\|u_0\|_\infty)\|_\infty \\ &\leq \|z\|_\infty + e^{-\alpha t}|\frac{\Pi}{\alpha}-\|u_0\|_\infty|,\end{aligned} \tag{5.36}$$

d'ou on deduit (5.25).
Concernant v, on multiplie l'equation (5.2) par v et on l'integre sur $[0,t[\times\Omega$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^2dx+&2c\int_0^t\int_\Omega \nabla u.\nabla v dxds + 2d\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2dxds + 2\sigma\int_0^t\int_\Omega v^2dxds \\ &= 2\int_0^t\int_\Omega vg(u,v)dxds+\int_\Omega v_0^2dx, \\ &= 2\int_0^t\int_\Omega v\varpi(t)\psi(v)f(u,v)dxds+\int_\Omega v_0^2dx,\end{aligned} \tag{5.37}$$

comme dans (5.30)

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^2dx+&2c\int_0^t\int_\Omega \nabla u.\nabla v dxds + 2d\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2dxds + 2\sigma\int_0^t\int_\Omega v^2dxds \\ &\leq \overline{BR}(\frac{\Pi}{\alpha}+\|u_0\|_\infty)|\Omega|\overline{D}+\int_\Omega v_0^2dx.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Posons

$$\begin{aligned}Q_1 &= \{(x,s)\in\Omega\times[0,t[/\nabla u.\nabla v\geq 0\} \\ Q_2 &= \{(x,s)\in\Omega\times[0,t[/\nabla u.\nabla v\leq 0\}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^2dx+&2c\int_{Q_1} \nabla u.\nabla v dxds + 2d\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2dxds + 2\sigma\int_0^t\int_\Omega v^2dxds \\ &\leq \overline{BR}(\frac{\Pi}{\alpha}+\|u_0\|_\infty)|\Omega|\overline{D}+\int_\Omega v_0^2dx - 2c\int_{Q_2}\nabla u.\nabla v dxds,\end{aligned} \tag{5.40}$$

en utilisant $\epsilon-$inégalité

$$2ab\leq \epsilon a^2 + C(\epsilon)b^2, \tag{5.41}$$

on aura

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^2dx+&2c\int_{Q_1} \nabla u.\nabla v dxds + 2d\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2dxds \\ &+2\sigma\int_0^t\int_\Omega v^2dxds \leq \overline{BR}(\frac{\Pi}{\alpha}+\|u_0\|_\infty)|\Omega|\overline{D} \\ &+\int_\Omega v_0^2dx + 2c\epsilon\int_{Q_2}|\nabla v|^2dxds + 2cC(\epsilon)\int_{Q_2}|\nabla u|^2dxds,\end{aligned} \tag{5.42}$$

pour un choix adéquat de ϵ tel que $d - c\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^2 dx + 2c\int_{Q_1} \nabla u.\nabla v dxds &+ 2(d-c\epsilon)\int_{Q_2} |\nabla v|^2 dxds \\ &+ 2d\int_{Q_1} |\nabla v|^2 dxds + 2\sigma\int_0^t\int_\Omega v^2 dxds \\ &\leq \overline{BR}(\frac{\Pi}{\alpha} + \|u_0\|_\infty)|\Omega|\overline{D} \\ &+ \int_\Omega v_0^2 dx + 2cC(\epsilon)\int_{Q_2} |\nabla u|^2 dxds,\end{aligned} \tag{5.43}$$

alors

$$v(t,.) \in L^2(\Omega), \tag{5.44}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_\Omega |\nabla v|^2 dxds < +\infty, \tag{5.45}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_\Omega v^2 dx < +\infty. \tag{5.46}$$

D'après le Lemme 1.1.1, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \|v(t,.)\|_2 = 0. \tag{5.47}$$

De la mème manière que z, on a $\{v(t)\}_{t\geq 0}$ est relativement compact, et d'après 5.47, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \|v(t,.)\|_\infty = 0. \tag{5.48}$$

$\square$

Chapitre 6

Conclusion

Les Travaux de Brabanova [3], Kanel [31] et encore autres, montre bien que l'accroissement rapide (accroissement exponentiel) des termes de réaction, reste toujours un obstacle devant un résultat d'existence globale des solutions des systèmes de réaction-diffusion, sans restrictions (sur les coefficients de diffusion ou bien les données initiales).

Dans ce cadre on a étudié l'existence globale d'un système qui modélise la propagation de la maladie de SIDA dans une population (chapitre 3), où la croissance des termes de réaction est rapide, seulement le choix de la donnée initiale pour l'inconnu de la première équation et qui représente les individus susceptibles, est restreint.

Par ailleurs, nous avons pu prouver l'existence globale pour le cas où les coefficients de diffusions sont égaux, le cas qui n'est pas trivial.

Comme perspective liées à cette étude, il serait intéressant d'étudie le comportement asymptotique des solutions.

Dans une autre direction, (chapitre 4, 5) on a introduit dans la deuxième équation du système un autre terme diffusif, avec des termes de réaction a croissance polynomiale, où nous avons réussi à donner une repense positive pour l'existence globale, ainsi que le comportement asymptotique des solutions.

Il serait intéressant dans ce sens d'étudie l'existence globale dans le cas où les termes de réactions croissent exponentiellement.
Noter que les résultats obtenus resteront vrai dans le cas des conditions de Dirichlet.

Chapitre 7

Annexe A

7.1 Modélisation

Dans cette partie[1] *on présente la modélisation de quelques phénomènes qui aboutissent à des système de réaction-diffusion*

7.1.1 Equation de conservation et loi de *Fick*

Considerons un fluid (gaz, liquide) qui s'écoule dans un tuyau, soit un petit volume élémentaire $d\tau = dxdydz$ centré au point M de coordonnées x, y, z à l'intérieur du tuyau et occupé par le fluide. Entre deux instants très voisins t et $t + dt$, une certaine quantité de fluide entre dans le volume $d\tau$, une certaine quantité en sort et la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$ peut eventuellement varier pour un fluide compressible (gaz). S'il n'y a ni source de fluide ni fuite possible à l'intérieur du volume $d\tau$, la variation de masse de fluide contenue dans $d\tau$, pendant l'intervalle de temps dt considéré est égale à la différence entre la masse qui a pénétré dans le volume par les parois et celle qui s'en est échappée.

Soit $\overrightarrow{V}(x, y, z, t)$ la vitesse d'écoulement du fluide au point M à l'instant t. On definit la densité de courant par

$$\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{V}.$$

1. Noter que cette partie de modélisation a été prise principalement de [49], [5], pour plus de détails voir [47].

Notons que si $\overrightarrow{V}$ est normal a une surface unité, $|\overrightarrow{j}|$ représente la masse de fluide qui traverse cette surface par unité de temps.

Sous ces conditions l'équation de continuité ou encore l'équation de concervation du fluide est donné par

$$div\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{7.1}$$

Il s'agit d'une équation locale valable en tout point occupé par le fluide. Cette relation s'étend aisément à l'électricité : ρ est alors la densité de charge et $\overrightarrow{j}$ la densité de courant électrique.

Considérons un milieu diffusif, c'est-a-dire un milieu dans lequel des particules d'un gaz ou d'un liquide, des électrons dans métal,etc. Désignons par $n(\overrightarrow{x}, t)$ le nombre de particules par unité de volume en un point $\overrightarrow{x}$ au temps t et par $\overrightarrow{j}(\overrightarrow{x}, t)$ la densité de courant du fluide, c'est-à-dire le nombre de particules traversant une surface unité normale à la vitesse d'écoulement du fluide en ce point, par unité de temps. Le phénomène de diffusion est décrit par la loi de ***Fick*** :

$$\overrightarrow{j} = -D\overrightarrow{grad}\, n, \tag{7.2}$$

qui exprime que les particules ont tendance d'aller à des zone a forte concentration vers celle à faible concentration, D est le coefficient de diffusion. Par ailleurs, l'équetion de conservation du fluide s'écrit d'après l'équation :

$$div\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{7.3}$$

En combinant (7.2) et (7.3) on obtient l'équation fondamentale de la diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0. \tag{7.4}$$

La conduction de la chaleur dans un matériau s'effectue très souvent grace à un mécanisme de diffusion. Dans un milieu où il existe un gradient de températeur, $\overrightarrow{grad}\, T$, la densité de flux de chaleur $\overrightarrow{j}$ est donnée, par analogie avec la loi de ***Fick*** (7.2), par la loi de ***Fourier*** :

$$\overrightarrow{j} = -K\overrightarrow{grad}\, T, \tag{7.5}$$

où K est le coefficient de conductibilité thermique. En l'absence de source de chaleur interne, si l'on effectue un bilan thermique dans un volume unité, on obtient une équation de concervation de la chaleur analogue à (7.3) qui s'écrit :

$$div\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{7.6}$$

où $\rho(x, t)$ est la densité d'énergie. Par ailleurs

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = C_v\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{7.7}$$

où C_v est la chaleur spécifique du milieu à volume constant et par unité de volume. En combinant (7.5), (7.6), (7.7) on obtient l'équation de diffusion de la chaleur :

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T, \tag{7.8}$$

qui a la mème forme que (7.4) en prenant $D = \frac{K}{C_v}$.
Notons qu'en présence de source de chaleur interne créant une chaleur f uniforme par unité de volume, on a :

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + f. \tag{7.9}$$

7.1.2 Loi d'action de masse

On a la reaction chimique

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 + 6H_2O \to 6CO_2 + 12H_2O \tag{7.10}$$

où le symbole $C_6H_{12}O_6$ désigne la molécule de glucose. En appelant A_i ; $i = 1...4$ ces diverses molécules, nous obtenons

$$A_1 + 6A_2 + 6A_3 \to 6A_4 + 12A_3, \tag{7.11}$$

qu'on peut simplifier comme suit :

$$A_1 + 6A_2 \to 6A_4 + 6A_3. \tag{7.12}$$

Dans un système donné, On note $a(t)$ la concentration dun constituant A.
Considérons de manière générale la réaction en équilibre suivante :

$$n_1A_1 + n_2A_2 + ... + n_pA_p \to m_1B_1 + m_2B_2 + ... + m_qB_q, \tag{7.13}$$

où les constituants A_i, $i = 1, ..., p$, et Bj, $j = 1, ..., q$ représentent les réactifs et les produits respectivement.
Cette réaction d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. En supposant le système clos, cest-à-dire, sans aucun apport extérieur ni perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j}\frac{db_j}{dt} = \frac{1}{n_i}\frac{da_i}{dt}, \tag{7.14}$$

où a_i, b_j la concentration de la substance A_i, $i = 1, ..., p$, et Bj, $j = 1, ..., q$ respectivement, v est appelé ***vitesse instantanée de la réaction***.
On a alors pour la réaction (7.12)

$$v = \frac{da_1(t)}{dt} = \frac{1}{6}\frac{da_2(t)}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{da_3(t)}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{da_4(t)}{dt}, \tag{7.15}$$

on obtient la relation

$$\frac{d}{dt}\left(a_1(t)+\frac{1}{6}a_2(t)+\frac{1}{6}a_3(t)+\frac{1}{6}a_4(t)\right)=0, \tag{7.16}$$

ou encore

$$a_1(t)+\frac{1}{6}\left(a_2(t)+a_3(t)+a_4(t)\right)=a_1(0)+\frac{1}{6}\left(a_2(0)+a_3(0)+a_4(0)\right), \tag{7.17}$$

qui exprime exactement la conservation de la quantité totale de matière.

Maintenant soit une réaction simple, qui va conduire à une *loi d'action de masse* dite *d'ordre un*,

$$A \to^k C, \tag{7.18}$$

le bilan cinétique est donné par

$$\frac{da(t)}{dt}=-\frac{dc(t)}{dt}, \tag{7.19}$$

ce qui implique $a(t)+c(t)=a(0)+c(0)$. La loi d'action de masse s'écrit alors

$$\frac{da(t)}{dt}=ka(t), \tag{7.20}$$

avec k une constante strictement positive, appellée *constante de vitesse*, cette constante dépend de la température ambiante et est donnée par la loi d'Arrhénius :$k=k_0\exp(E_0/RT)$ où T est la température absolue.
La solution est donnée par

$$a(t)=a(0)e^{-kt}. \tag{7.21}$$

On en déduit $c(t)=c(0)+a(0)[1-e^{-kt}]$. On constate

$$\lim_{t\to+\infty}a(t)=0; \quad \lim_{t\to+\infty}c(t)=a(0)+c(0). \tag{7.22}$$

Donc, asymptotiquement, tout le réactif A se transforme en le produit C. Continuons maintenant avec une situation un peu moins simple où nous allons obtenir une loi d'ordre deux. Il s'agit de la réaction :

$$A+B\to^k C. \tag{7.23}$$

Notant $a(t)$; $b(t)$; $c(t)$ les concentrations respectives, le bilan cinétique prend la forme

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{da(t)}{dt}=-\frac{dc(t)}{dt}. \tag{7.24}$$

Maintenant, la loi d'action de masse va exprimer que la vitesse de réaction est proportionnelle à la fois à la concentration de A et à la concentration de B, soit

$$\frac{da(t)}{dt}=-ka(t)b(t), \tag{7.25}$$

avec cette équation supplémentaires, on obtient donc trois équations à trois inconnues. Puisque $\frac{d(a-b)}{dt} = \frac{d(a+c)}{dt}$, on a que $b(t) = a(t) + b_0 - a_0$, $c(t) = -a(t) + c_0 + a_0$ où on note a_0 ; b_0 ; c_0 les données initiales en $t = 0$.
Ainsi, pour connaître les trois fonctions, il suffit de résoudre l'équation en a qui s'écrit

$$\frac{da(t)}{dt} = -ka(t)(a(t) + b_0 - a_0). \tag{7.26}$$

On obtient

$$a(t) = a_0 \frac{a_0 - b_0}{a_0 - b_0 e^{k(b_0 - a_0)t}} \quad si\, a_0 \neq b_0; \quad a(t) = \frac{a_0}{1 + a_0 kt} = b(t) \quad si\, a_0 = b_0. \tag{7.27}$$

7.1.3 Modélisation par analyse compartimentale

Nous notons $S(t)$ le nombre à l'instant t des individus sains (on dit aussi susceptibles), $I(t)$ le nombre des individus infectés, $G(t)$ le nombre des individus guéris et supposés immunisés et $M(t)$ le nombre des individus morts (et qui donc ne transmettent plus la maladie). On prend un modèle continu dans lequel on considère que ces "nombres" sont en fait à valeurs dans $[0, +\infty[$. Ceci est tout à fait raisonnable quand on travaille sur des populations suffisamment nombreuses.

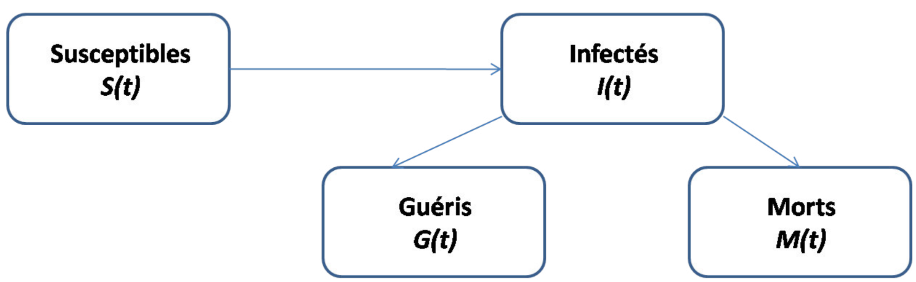

FIGURE 7.1 – Propagation d'une épidémie

Le principe général de la modélisation par analyse compartimentale : soit Ai ; $i = 1; ...; n$ ($S(t)$, $I(t)$, $G(t)$, $M(t)$, Figure 2.1) les compartiments ; on désigne par $q_i(t)$ la quantité de substance (ou de matière) au temps t dans le compartiment Ai.

Comme pour la cinétique chimique, on commence par écrire la loi d'échange de matière. A chaque instant, la variation instantanée de matière dans le compartiment Ai, soit $\frac{dq_i}{dt}$, est égale au flux de matière F_{ji} entrant dans Ai depuis le compartiment

Aj auquel on retranche le flux de matière Fij sortant de Ai vers le compartiment Aj ; et on ajoute l'échange (positif ou négatif) $F_{i,0} = F_{i,0}(t)$ avec l'extérieur. Cela donne l'équation suivante pour tout $i = 1; ...; n$:

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} F_{ji} - \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} F_{ij} + F_{i,0}. \tag{7.28}$$

Notons déjà qu'on obtient la loi de conservation de la quantité totale de matière en faisant la somme de ces équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_i(t)\right) = \sum_{i,j,j\neq i} F_{ji} - \sum_{i,j,j\neq i} F_{ij} + \sum_{i=1}^{i=n} F_{i,0} = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i,0}. \tag{7.29}$$

Par intégration en temps, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_i(t) = \sum_{i=1}^{i=n} q_i(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{i=n} F_{i,0}(s)ds. \tag{7.30}$$

En particulier, si les apports extérieurs sont nuls ($\sum_{i=1}^{i=n} F_{i,0} = 0$), on obtient la conservation exacte de la masse totale. Pour compléter le système (7.28), il est nécessaire d'ajouter des lois de com- portement pour les flux F_{ji} (comme nous l'avons fait dans la modélisation de la cinétique chimique). La loi standard consiste aussi à dire que le flux de matière F_{ji} qui vient du compartiment A_j pour entrer dans le compartiment A_i est proportionnel à la quantité de matière dans le compartiment de départ A_j , soit donc

$$F_{ij} = f_{ji}(q)q_j; \quad avec\, f_{ji} \geq 0,$$

où f_{ji} est une fonction qui reste à préciser selon les cas (on pourrait aussi considérer qu'elle dépend de la variable temps t). On peut alors récrire le système (**??**) sous la forme suivante : $\forall i = 1; ....; n$

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} f_{ji}q_j - \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} f_{ij}q_i\right) + F_{i,0}. \tag{7.31}$$

7.1.4 Modèle de réaction-diffusion

Nous allons maintenant montrer comment coupler la loi d'action de masse vue au paragraphe précédent avec la prise en compte de la variable spatiale.
Pour cela, nous reprenons la réaction chimique simple

$$A + B \to^k C. \tag{7.32}$$

Sans variable spatiale, on a

$$\frac{da(t)}{dt} = -ka(t)b(t), \tag{7.33}$$

$$\frac{db(t)}{dt} = -ka(t)b(t), \tag{7.34}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = ka(t)b(t). \tag{7.35}$$

Si maintenant a, b, c dépendent aussi d'une variable spatiale $x = (x_1, ..., x_n)$ qui varie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la section 7.1.1 nous permet d'écrire le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{da(t)}{dt} - d_1\Delta a = -kab, \tag{7.36}$$

$$\frac{db(t)}{dt} - d_2\Delta b = -ka(t)b(t), \tag{7.37}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} - d_3\Delta c = ka(t)b(t). \tag{7.38}$$

où d_1, d_2, d_3 sont les coefficients de diffusions, en général, les coefficients de diffusions sont distincts, car les divers produits chimiques ne diffusent pas tous à la même vitesse. Les données initiales en $t = 0$ sont des fonctions de la variable x qui décrivent la répartition initiale spatiale des trois substances :

$$a(x,0) = a_0(x) \geq 0,\ b(x,0) = b_0(x) \geq 0,\ c(x,0) = c_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.39}$$

Il est indispensable de décrire ce qui se passe au bord du domaine spatial Ω on comprend, en effet, que l'évolution de la concentration des substances va être tout à fait differente selon qu'elles peuvent disparaître ou non au bord du domaine.
Une condition classique consiste à écrire que le milieu est isolé et que donc aucune des substances ne traverse la frontière du domaine. On écrit alors que le flux de matière est nul à travers le bord $\partial\Omega$ de Ω ; selon le modèle de ***Fick***, ce flux s'exprime par la dérivée dans la direction normale au bord, soit

$$\frac{\partial a}{\partial n} = \nabla a \cdot n, \tag{7.40}$$

où n est le vecteur unitaire normal au bord et dirigé vers l'extérieur. On obtient ainsi les conditions dites de Neumann au bord :

$$\frac{\partial a}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial b}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial c}{\partial n}(x,t) = 0, \quad \forall t > 0,\ \forall x \in \partial\Omega. \tag{7.41}$$

Les conditions dites de Dirichlet au bord sont également souvent utilisées :

$$a(x,t) = b(x,t) = c(x,t) = 0, \quad \forall t > 0, \forall x \in \partial\Omega. \tag{7.42}$$

Si a, b, c désigne par exemple des densités de populations, cette condition exprime que la frontière de Ω est un milieu hostile et que la densité de population y est nulle (ce qui, au passage, ne l'empêche pas de s'y échapper...on peut fuir le milieu hostile en passant à l'extérieur). D'ailleurs, contrairement au cas des conditions de Neumann, la population totale diminue en général dans le cas de conditions de Dirichlet au bord.

7.2 Modèle de Propagation de SIDA

Dans cette partie nous interessons en details au phénomène de la propagation de la maladie de SIDA dans une population, ainsi que le modèle mathématique, qui fera le sujet de notre étude dans les chapitres suivants.

I) Definition et mécanisme de fonctionement

Définition 7.2.1. *[57]*
La maladie de SIDA ou bien AIDS est un stade ultime de l'infection par le virus de l'immunodéficience humaine (VIH), caractérisé par une diminution du nombre de lymphocytes T4 (taux inférieur à 200 par millimètre cube de sang) qui entraîne une déficience du système immunitaire, laquelle favorise le développement d'infections opportunistes redoutables et de cancers.

Progression de l'infection VIH, fondées sur les manifestations cliniques et les anomalies biologiques[47, 57]

Selon la classification CDC (Centers for Diseases Control) :

Catégorie A

• Séropositivité aux anticorps du VIH en l'absence de symptômes (avant 1993, la séropositivité au VIH asymptomatique ne rentrait pas dans la classification SIDA).

• Lymphadénopathie généralisée persistante.

• Primo-infection symptomatique.

Catégorie B

• Manifestations cliniques chez un patient infecté par le VIH, ne faisant pas partie de la catégorie C

et qui répondent au moins à l'une des conditions suivantes :

○ elles sont liées au VIH ou indicatives d'un déficit immunitaire ;

○ elles ont une évolution clinique ou une prise en charge thérapeutique compliquée par l'infection VIH.

Catégorie C
Cette catégorie correspond à la définition du SIDA chez l'adulte :
• Pneumocystose.
• Toxoplasmose cérébrale.
• Maladie de Kaposi.
• Lymphome.
• Mycobactériose atypique généralisée, et plus généralement toute affection grave apparaissant chez un patient infecté par le VIH, ayant une baisse importante de son immunité (taux de CD4 inférieur à $200/mm^3$).

Notes 1. *[57]*
Le SIDA se transmet par voie sexuelle, par voie sanguine, et de la mère à l'enfant, par voie transplacentaire et au cours de l'allaitement.
Il n'existe pas encore de médicament capable de stopper réellement la progression de cette maladie ou de la prévenir ; on peut cependant limiter la prolifération du virus dans l'organisme en administrant des inhibiteurs de réplication virale et des antiprotéases, et on peut, jusqu'à un certain point, traiter les infections opportunistes et les cancers en administrant des antibiotiques, des antifongiques, des antimiotiques, ou en faisant appel à la radiothérapie et à la chirurgie.

Du temps que Monsieur Ronald Ross [52] identifia les similitudes (équivalence mathématique) des modèles pour les maladies dite "sexually-and vector-transmitted diseases" en 1911, les efforts pour modèliser et comprendre la dynamique de transmission des maladies sexuel ou bien sexually-transmitted diseases (STDs) dans des populations hetero-sexuellement actives ont été effectués, en particulier, après le début de l'épidémie d'HIV (voir Kasseem, Roudenko, Tennenbaum, et Castillo-Chavez [33], Kirschner [36]).
Le premier modèle utilisé pour une étude explicite d'une maladie sexuellement transmis (sexually-transmitted disease) est la maladie dite Gonorrhea (Cooke et Yorke [9]). Plus tard, un modèle de multi-groupe développé pour la dynamique de STD a été formulé et analysé par Le jmanovich et Yorke [42].
L'étude des dynamiques de transmission et le controle des STDs a beneficie des travaux théoriques menés dans le contexte de la dynamique de transmission de la maladie Gonorrhea et le travail de Hethcote et Yorke [26].

II) Modèle mathématique

Le phenomaine de propagation de la maladie SIDA dans une population est géré par le système de reaction-diffusion suivant [22, 47] :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = D\Delta S(x,t) + \Lambda - \lambda C(T)\frac{SI}{T} - \mu S, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.43}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = D\Delta I(x,t) + \lambda C(T)\frac{SI}{T} - \sigma I, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.44}$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(x,t) = D\Delta A(x,t) + \alpha I - (d+\mu)A, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.45}$$
$$\frac{\partial S}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial I}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial A}{\partial n}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.46}$$

où $T = S + I$, $\sigma = \mu + \alpha$, S le nombre des individus susceptibles, I est le nombre des individus infectés dont le developpement de l'inflamation est tolèrable et qui atteindront le stade ultime SIDA, A est le nombre d'individus qui ont atteint le stade ultime SIDA (voir definition 7.2.1). Λ est le taux de recrutement d'individus susceptibles, qui est une constante positive, λ représente la moyène de risque sexuel par partenaire, qui est une constante positive, la fonction $C(T)$ est le nombre moyen de partenaires sexuels en prenant une moyènne d'un individu par unité de temps, T est la densité de la population, μ est le taux de mortalité normal (où la mort n'a pas un lien avec le SIDA), qui est une constante positive, et d est le taux de mortalité relié au SIDA qui est une constante positive.

Nous supposons également que tous les individus infectés deviennent immédiatement infectieux, et parsuite ils acquièrent la maladie SIDA à un taux constant α, par conséquent $\frac{1}{\mu+\alpha}$ représente la période moyènne d'infectés. De plus, $D > 0$ est le coefficient de diffusion qui est une constante.

Pour le cas d'équations différentiels ordinaires, Castillo-Chavez et al [7], ont étudié la stabilité asymptotique du système suivant :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t) = \Lambda - \lambda C(T(t))\frac{S(t)W(t)}{T(t)} - \mu S(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.47}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t}(t) = \lambda p C(T(t))\frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_I + \mu)I(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.48}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t) = \lambda(1-p)C(T(t))\frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_Y + \mu)Y(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.49}$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \alpha_I I(t) - (d+\mu)A(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.50}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t) = \alpha_Y Y(t) - \mu Z(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.51}$$

où $W = I + Y$, et $T = W + S$, qui est l'extension du modèle

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t) = \Lambda - \lambda c S(t) - \mu S(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.52}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t}(t) = \lambda c S(t) - (v + \mu) I(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.53}$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = p v I(t) - (d + \mu) A(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.54}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t) = (1 - p) v I(t) - \mu Z(t), \qquad t \geq 0, \tag{7.55}$$

qui a été proposé par Anderson et al.
Pour le cas des équations differentielles aux derivées partielles, Fitzgibbon and Morgon [18] ont travaillé sur le système :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = d_1 \Delta S(x,t) - aSI, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.56}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = d_2 \Delta I(x,t) + aST - \lambda I, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.57}$$
$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = d_3 \Delta R(x,t) + \lambda I, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.58}$$
$$\frac{\partial S}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial I}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial R}{\partial n}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{7.59}$$

On peut obtenir A immediatement une fois S et I sont determiné ; alors le système ((7.43)-(7.46)) peut ètre reduit à

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = D \Delta S(x,t) + \Lambda - \lambda C(T) \frac{SI}{T} - \mu S, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.60}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = D \Delta I(x,t) + \lambda C(T) \frac{SI}{T} - \sigma I, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{7.61}$$
$$\frac{\partial S}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial I}{\partial n}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{7.62}$$

Ce système fera l'objet d'étude des chapitres suivants.

7.3 Autres modèles de reaction-diffusion

Dans cette section nous exposons quelques exemples, qui intérvinnent dans different domaines telsque la chimie, biologie, écologie, physique, et qui sont géré par des modèles mathématiques sous formes de systèmes de reaction-diffusion.

I) Système de Gierer-Meinhardt

Consederons le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) - a\Delta S(x,t) &= \Lambda - \lambda_1 S + \frac{S^p}{I^q}, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.63)\\
\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) - b\Delta I(x,t) &= -\lambda_2 I + \frac{S^r}{I^s}, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.64)\\
\frac{\partial S}{\partial n}(x,t) &= \frac{\partial I}{\partial n}(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.65)\\
S(x,0) = &S_0(x),\ I(x,0) = I_0(x) && x \in \Omega, && (7.66)\\
&&&&& (7.67)
\end{aligned}$$

où $p > 1$, $q,r,s \geq 0$, $a,b > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \Lambda \geq 0$. Pour le cas $p = r = 2$, $q = s = 4$, le système intervient a la modèlisation d'un modèle biologique introduit par A. Gierer and H. Meinhardt [20]. Koch et Meinhardt [37] en 1994 ont amélioré ce sytème en modélisant des modèles plus complèxes.

II) Système de Field-Noyers

En chimie, il y a une reaction chimique qui s'appele reaction de Belousov-Zhabotinskii [58], qui consiste a plus de dix reactions chimiques élementaires simultanément, et qu'elles ne tend pas vers un équilibre chimique. En 1974 Field and Noyers [17] ont présenté un modèle mathématique, et qui ont abouti au système de reaction-diffusion suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a\Delta u(x,t) &= \varepsilon^{-1}(qw - uw + u - u^2), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.68)\\
\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - b\Delta v(x,t) &= u - v, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.69)\\
\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - d\Delta w(x,t) &= \delta^{-1}(-qw - uw + cv), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.70)\\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) &= \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. && (7.71)\\
u(x,0) = u_0(x),\ & v(x,0) = v_0(x),\ w(x,0) = w_0(x), && x \in \Omega. && (7.72)
\end{aligned}$$

Ici, u représente la concentration du $HBrO_2$, v est la concetration du Ce^{4+}, et w est la concentration du Br^-.
Les constentes ε, δ, q et c sont des paramètres chimiques, où ε, δ, et q sont conséderé assez petits.
En 1986, ce modèle a éte plus simplifié par Keener et Tyson, en supposant que w est en quasi-équilibre, i.e.,

$$w = \frac{cv}{u+q},$$

donc, sous cette hypothèse il ont pu présenté leur modèle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon a \Delta u =& \varepsilon^{-1}[u(u-1) - cv(\frac{u-q}{u+q})], && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.73)\\
\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon b \Delta v =& u - v, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.74)\\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) =& \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. && (7.75)\\
u(x,0) =& u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), && x \in \Omega. && (7.76)\\
& && && (7.77)
\end{aligned}$$

III) Système "Chemical morphogenetic process (Brusselator)"

Toujours da le cadre des reaction chimiques, Prigogene et Lefever [50], ont proposé un système sous la forme suivante [47] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon d_1 \Delta u =& - uv^2 + bv, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.78)\\
\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon d_2 \Delta v =& uv^2 - (b+1)v + a, && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.79)\\
u(x,t) =& \frac{b}{a}, v(x,t) = a, && (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. && (7.80)\\
u(x,0) =& u_0(x), v(x,0) = v_0(x), && x \in \Omega. && (7.81)\\
& && && (7.82)
\end{aligned}$$

Où a, b, d_1, et d_2 sont des constantes strictement positives.

IV) Système de Combustion exothermique de gaz

La combustion exothérmique des gaz est géré par le système de reaction-diffusion suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u =& - H(u,T), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.83)\\
\frac{\partial T}{\partial t} - d_2 \Delta T =& qH(u,T), && (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, && (7.84)\\
& && && (7.85)
\end{aligned}$$

où u est la concentration du reactif, T représente la température, d_1, d_2, et q sont des constantes strictement positifs [51].

V) Système de Lotka-Volterra : Modèle Prédateur-Proie

En 1926 Volterra a proposé le premier modèle des systèmes Prédateur-Proie sous la forme [47] :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - d_1 \Delta N = N(a - bP), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.86}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - d_2 \Delta P = P(cN - d), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.87}$$

$$\tag{7.88}$$

où N représente le nombre des proies et P est celui des prédateurs.
Dans le cas où il y a k éspèces de proies et k éspèces de prédateurs, on retrouve le système de Lotka-Volterra Prédateur-Proie généralisé [47] :

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - c_i \Delta N_i = N_i \big[a_i - \sum_{j=1}^{k} b_{ij} P_j \big], \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.89}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} - d_i \Delta P_i = P_i \big[\sum_{j=1}^{k} r_{ij} N_j - s_i), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.90}$$

$$\tag{7.91}$$

où $i = 1, \ldots, k$

VI) Système de Lotka-Volterra : Modèle symbiose

La symbiose en biologie est l'association entre deux organismes d'espèces différentes, qui est profitable pour chacun d'eux. May (1981)[47] a pu modèliser ce phénomaine par le système suivant :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - d_1 \Delta N = r_1 N + a_1 NP, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.92}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - d_2 \Delta P = r_2 P + a_2 PN, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.93}$$

$$\tag{7.94}$$

où d_1, d_2, r_1, r_2, a_1 et a_2 sont des constantes positives.

VII) Système d'écoulement des fluids

Nous considerons un système qui décrit le comportement de trois éspèces :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = a(v-u), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.95}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = -uw + bu - v, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.96}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_3 \Delta w = uv - cw, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.97}$$

$d_1, d_2, d_3, a, b,$ et c sont des constantes strictement positives.
Ce modèle étudié par Lorenz (1963)[47], intervient dans des modèles d'écoulement des fluids.

VIII) Système de la dynamique du Calcium

La dynamique du Calcium est géré par le système suivant :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1\Delta u_1 = \lambda(\gamma_0 + \gamma_1 u_4)(1 - u_1) - \frac{p_1 u_1^4}{p_2^4 + u_1^4}, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.98}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2\Delta u_2 = - k_1 u_2 + k_1' u_3, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.99}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3\Delta u_3 = - k_1' u_3 + k_2 u_1 u_3 + k_1 u_2 + k_2' u_4, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.100}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} - d_4\Delta u_4 = k_2 u_1 u_3 + k_3' u_5 - k_2' u_4 - k_3 u_1 u_4, \qquad (x,t) \in \Omega \times R_+^*, \tag{7.101}$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial t} - d_5\Delta u_5 = k_3 u_1 u_4 - k_3' u_5, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{7.102}$$

$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \lambda, \gamma_0, \gamma_1, k_1, k_1', k_2, k_2', k_3,$ et k_3' sont des constantes strictement positives.

IX) Système de Hodgkin-Huxley

Le Système de Hodgkin-Huxley est un modèle mathématique pour le phénomène physiologique de la transmission des signal [54], qui s'écrit sous la forme suivante :

$$c\frac{\partial u}{\partial t} - R^{-1} u_{xx} = g(u, v, w, z), \tag{7.103}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_1 u_{xx} = g_1(u)(h_1(u) - v), \tag{7.104}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_2 w_{xx} = g_2(u)(h_2(u) - w), \tag{7.105}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - d_3 z_{xx} = g_3(u)(h_3(u) - z), \tag{7.106}$$

$$\tag{7.107}$$

où c et R sont des constantes strictement positives, les constantes d_i sont positives, et g est une fonction definit par

$$\begin{aligned} g(u, v, w, z) =& k_1 v^3 w(c_1 - u) + k_2 z^4 (c_2 - u), \\ &+ k_3(c_3 - u), \quad c_1 > c_3 > 0 > c_2. \end{aligned} \tag{7.108}$$

Les fonctions $g_i > 0$, $1 > h_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.
Dans ce modèle, les variables v, w et z représentes des concentrations chimiques, par contre u est un potentiel éléctrique.

X) Système d'oxydation du polypropylène isotactique

Définition 7.3.1. *(polypropylène)*
Résine thermoplastique obtenue par polymérisation du propylène offrant une bonne résistance aux acides et aux alcalis, utilisée pour la fabrication de pompes et/ou de leurs composants.

Définition 7.3.2. *(polypropylène isotactique)*
Polypropylène dont les groupements méthyl sont tous situés du même côté de la chaîne.

L'oxydation spontanée du polypropylène isotactique est une reaction chimique a grand intérèt dans la pratique, ce modèle est géré par le système de reaction-diffusion suivant : [35]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1\Delta u_1 = - k_1u_1u_2 + k_2u_3^2, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7.109)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2\Delta u_2 = - k_1u_1u_2 - 2k_6u_2^2 - k_5u_2u_3 + k_3u_3 + k_8u_4, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7.110)$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3\Delta u_3 = k_1u_1u_2 - k_5u_2u_3 - (k_2 + k_4)u_3 - 2k_3u_3^2, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7.111)$$
$$\frac{\partial u_4}{\partial t} - d_4\Delta u_4 = 2k_3u_3^2 - (k_7 + k_8)u_4, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7.112)$$

$d_1, d_2, d_3, d_4, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ et k_8 sont des constantes strictement positives.

Bibliographie

Bibliographie

[1] N. Alikakos, *L^p-Bounds of solutions of reaction-diffusion equations*, communication in Partial Differential Equations. Vol. 4, no. 8, pp. 827-828, (1979). (cité pages 3, 47).

[2] J. M. Ball *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 28 (1977), pp. 473-486.

[3] A. Barabanova, *On the global existence of solutions of reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), n 3, 827-831. (cité pages 3, 4, 86).

[4] I. Barbalat, *Systemes d'equations differentielle d'oscillations nonlineaires*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 4, 267-270. (1959). (cité page 11).

[5] E. Belorizky, *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs*, EDP Sciences, 2007. (cité page 87).

[6] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, DUNOD, Paris, 1999. (cité pages 10).

[7] C. Castillo-Chavez, K. Cook, W. Huang and S. A. Levin, *On the role of long incubation periods in the dynamics of acquires immunodeficiency syndrome, (AIDS)*, J. Math. Biol. 27(1989) 373-398. (cité pages 3).

[8] T. Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, CLARENDON PRESS. OXFORD. 1998. (cité page 12).

[9] K. L. Cooke and J. A. Yorke, *Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics*, Math. Biosciences, 16 (1973), 75-101. (cité page 95).

[10] M. Crandall, A. Pazy, and L. Tartar, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*. SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 744-761.

[11] E. Daddiouaissa, *Existence of global solutions for a system of reaction-diffusion equations having a triangular matrix*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008(2008), No. 141, pp. 1-9. (cité pages 6, 69, 70, 71).

[12] E. Daddiouaissa, *Existence of global solutions for a system of reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 73. (2009), pp. 1-7. (cité pages 6, 54, 55).

[13] R. Dautray J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000 V 2.(cité page 38)

[14] R. Dautray J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000 V 3.(cité page 28)

[15] R. Dautray J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000 V 5.(cité page 28)

[16] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics V 19, AMS. (1998). (cité pages 25, 26, 29, 36).

[17] R.J. Field, R.M. Noyers, *Oscillations in chemical systems V, Quantitative explanation of band migration in the Belousov-Zhabotinskii reaction*, J. Am. Chem. Soc. 96, 2001-2006 (1974). (cité page 98).

[18] E.Fitzgibbon, J. J. Morgan, *A diffusive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension*, Differential and Integral Equations 1 (1988) 125-132. (cité page 97).

[19] A. Friedman, *Partial differential equation of parabolic type*, Prentice Hall Englewood Chiffs N. J. 1964. (cité pages 4, 49).

[20] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik 12 (1972), 30-39. (cité page 98).

[21] A. K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, vol. 74 of Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1992. (cité page 11)

[22] Y.Hamaya, *On the asymptotic behavior of the diffusive epidemic model (AIDS)*, Nonlinear Analysis 36 (1999). (cité pages 7, 96).

[23] A. Haraux and M. Kirane, *Estimation C^1 pour des problemes paraboliques semi−lineaires*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1983), 265-280. (cité pages 53, 61, 84)

[24] A. Haraux and A. Youkana, *On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations*. Tohoku. Math. J. 40 (1988), 159-163. (cité pages 4, 17, 47).

[25] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer−Verlag, New york, 1984. (cité pages 32, 53, 61).

[26] H. W. Hethcote and J. A. Yorke, *Gonorrhea transmission dynamics and control* Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 56 (1984), Springer-Verlag, New York. (cité page 95).

[27] S. L. Hollis, R. H. Martin and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. Vol 18 No 3 (1987), 744761. (cité page 48).

[28] J. I. Kanel, *The Cauchy problem for a systems semilinear parabolic equations with balance conditions* Differentsialnyje uravnenija 20 (1984) 1753-1760 (in Russian). (cité pages 4, 49).

[29] J. I. Kanel, *The solvability on the whole of reaction-diffusion systems with balance conditions* Differentsialnyje Uravnenija 26 (1990) 448-458 (in Russian). (cité pages 4, 49).

[30] J. I. Kanel, *The global solvability of Cauchy problem for some systems of reaction-diffusion equations* Differentsialnyje Uravnenija 28 (1992) 1045-1049 (in Russian). (cité pages 4, 49)

[31] J. I. Kanel, *On global initial boundary-value problems for reaction-diffusion systems with balance conditions*. Nonlinear Analysis 37 (1999) 971-995. (cité pages 4, 86).

[32] J. I. Kanel and M. Kirane, *Global solutions of reaction-diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth* Journal of Differential Equations 165, 24-41 (2000). (cité pages 6, 68).

[33] G. T. Kasseem, S. Roudenko, S. Tennenbaum and C. Castillo-Chavez, *The role of transactional sex in spreading HIV/AIDS in Nigeria*. American Mathematical Society, 410 (2006), 367-389. (cité page 95).

[34] M. Kirane, *Global bounds and asymptotics for a system of reaction−diffusion equations*. J. Math. Anal. Appl. 138 (1989), 1172-1189. (cité pages 6, 38, 39, 40, 68).

[35] M. Kirane and A. Youkana, *A reaction-diffusion system modelling the post irridiation oxydation of an isotactic polypropylene*. Demostratio mathematica XXIII, 2, 1990. (cité page 103).

[36] D. Kirschner, *A diffusion model for AIDS in a closed, heterosexual populations : Estimating rates of infection*. SIAM J. Appl. Math., 56 (1996), 143-166. (cité pages 95).

[37] A.J. Koch and H. Meinhardt, *Biological pattern formation from basic mechanisms to complex structures*. Rev. of Modern Phys, 66 (1994) $1481 - 1507$. (cité page 98).

[38] S. Kouachi and A. Youkana, *Global existence for a class of reaction−diffusion systems*. Bulletin of the Polish Academy of Science, Vol 49, no. 3, (2001). (cité pages 4, 48).

[39] H. Kwean, *The global existence of solutions of a reaction−diffusion equations*. J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B : Pure Appl. Math. Volume 8, Number 1 (May 2001), Pages 47-51. (cité pages 4, 48).

[40] O. A. Ladyenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc. 1968. (cité pages 53, 61).

[41] J. H. Lightbourne and R. H. Martin *Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups*. J. Nonlinear Anal.-Theory Meth. Appl., (1977), pp. 277-292. (cité pages 36).

[42] A. La jmanovich and J. A. Yorke *A deterministic model for gonorrhea in a non-homogeneous population*. Math. Biosciences, 28 (1976), 221-236. (cité pages 95).

[43] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes* (3 volumes), Dunod (1968). (cité page 26, 27, 28, 29).

[44] K. Masuda, *On the global existence and asymptotic behaviour of reaction-diffusion equations*. Hokkaido Math. J. 12 (1983), 360-370. (cité pages 7).

[45] L. Melkemi, A. Z. Mokrane, and A. Youkana, *On the uniform boundedness of the solutions of systems of reaction-diffusion equations*. E.J.Q.T.D.E, 2005. N° 24, 1-10. (cité pages 5, 17, 48).

[46] L. Melkemi, A. Z. Mokrane, and A. Youkana, *Boundedness and large-time behavior results for a diffusive epedimic model*. J. Applied Math, volume 2007, 15 pages. (cité pages 5, 47, 48, 54, 70).

[47] J. D. Murray, *Mathematical biology : I-II*. Springer Verlag, 2003. (cité pages 7, 87, 94, 96, 99).

[48] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Verlag, New York, 1983. (cité pages 12, 14, 15, 20, 21, 22, 32, 33).

[49] M. Pierre, *Autour des mathématiques des sciences de la vie et de la terre exemples de modélisation déterministe*. preprint. (cité page 87).

[50] I. Prigogene and R. Lefever, *Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II*. J. Chem. Phys., 48, 1665-1700, 1968. (cité page 99).

[51] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear parabolic problems blow-up, global existence and steady states.*Birkhauser advanced text, 2007. (cité pages 17, 100).

[52] R. Ross, *The prevention of malaria (2nd ed.).* John Murray, London, 1911, p. 667. (cité page 95).

[53] F. Rothe, *Global solutions of reaction-diffusion systems*, Lecture Notes in Mathematics 1072, Springer-Verlag, New York, 1984. (cité pages 53, 61).

[54] J. A. Smoller, *Shock wave and reaction−diffusion equations.* Springer-Verlag, New york, 1983. (cité page 102).

[55] H. B. Stewart, *Generation of analytic semi-group by strong elliptic operators.* Trans. Amer. Math. Sot. 199 (1974). 141-162.(cité page 37)

[56] Wikipedia , *http ://fr.wikipedia.org/wiki/Systèmeàreaction−diffusion*

[57] J. William,(cité page 2) *Dictionnaire anglais-français des sciences médicales et paramédicales*, 4e éd, Saint-Hyacinthe, Québec (1996), p 1057. (cité pages 32, 94).

[58] A. Yagi, *Abstract parabolic evolution equations and their applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010. (cité pages 22, 36).

[59] T. I. Zelenyak, *Stabilization of solutions to boundary value problems for second order parabolic equations in one space variable*, Differentsial'nye Uravneniya 4 (1968), 34-45. (cité pages 98).

[60] S. Zheng, *Nonlinear evolution equations*, Chapman and Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics (2004). (cité pages 20, 21, 22).