

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Pour

L'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Comportement mécanique des structures

Présenté Par :

Bendine Kouider

Contribution à l'étude du contrôle actif de structures composites par incorporation des matériaux intelligents

Soutenue le /2016

Devant la commission d'examen :

- | | | |
|-------------------------------------|---|-----------------------|
| ➤ ELAJRAMI, Mohamed | Professeur, UDL – SBA - | Président |
| ➤ BOUKHOULDA Farouk Benallel | Professeur, UDL – SBA - | Directeur de thèse |
| ➤ Nouari Mohammed | Professeur, Univ. de LORAINNE
(France) | Co-directeur de thèse |
| ➤ Abdelkader Ziadi | Professeur, C.U. AIN
TEMOUCHENT | Examineur |
| ➤ Amirat Mohamed | Docteur (MCA), C.U. AIN
TEMOUCHENT | Examineur |

2016-2017

Remerciements

Cette thèse présente les résultats des recherches *réalisés* durant la période de septembre 2012 à octobre 2016 au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (LMSS) de l'Université Djilali Liabes (UDL).

Plusieurs personnes ont contribué à l'aboutissement de ce travail et je tiens à les remercier. Un sincère merci au Professeur Boukhoulda Farouk Benallel, directeur de recherche, qui m'a aidé et encouragé tout au long de ce projet et sans qui la réalisation aurait été impossible. Travailler en son équipe a été très motivant et vous introduction au monde de la recherche scientifique aura certainement un impact considérable sur ma future carrière.

Dès mon arrivée à Saint Dié des Vosges (France), le Professeur Nouari Mohammed co-directeur de thèse et directeur de la recherche à l'Institut Supérieur d'Ingénierie (INSIC) non seulement m'a très bien accueilli dans son laboratoire mais m'a aussi accompagné et encouragé. Il a toujours su réunir les conditions propices à l'aboutissement et à la reconnaissance de mes efforts. Ses conseils m'ont été, et le seront toujours, très utiles pour enrichir mon expérience en recherche. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également le Dr. Badis Haddag et le Dr. Hamid Makich, Maîtres de conférences à l'INSIC, pour les nombreuses et fructueuses discussions sur l'ensemble de mes recherches. A travers notre collaboration, j'ai énormément appris.

Je remercie tout particulièrement Dihia pour m'avoir encouragé et soutenu.

Je remercie les doctorants de l'INSIC : Mohammed, Issam, Soufiane, Nawel, Samir et Dominique pour leur bonne humeur et encouragement.

Je remercie mes amis et mes collègues du laboratoire LMSS et particulièrement Zouaoui, Amine, Aziz, Kamel, Ahmed, Amine et Mohammed.

Je remercie vivement le Professeur M. Elajrami, le Professeur A. Ziadi, et le Docteur. M. Amirat pour avoir accepté d'examiner en participant en jury.

Je remercie ma famille de m'avoir soutenu et supporter durant ces années et en particulier mes parents, mes frères et ma sœur et tous les autres qui se reconnaîtront et qui ont su me soutenir pendant les moments difficiles que j'ai pu avoir et me faire profiter de leur bonne humeur.

Résumé

Cette thèse étudie l'amortissement des vibrations des structures en FGM et en composite à partir de dispositifs d'amortissement piézoélectriques actifs. Des modèles d'éléments finis sont développés pour prendre en compte le couplage entre une structure élastique de géométrie quelconque et des pastilles piézoélectriques.

La première partie du présent travail propose une modélisation électromécanique d'une structure poutre FGM munie d'actionneurs piézoélectriques. Par la suite, une loi de contrôle appropriée de rétroaction directe des vitesses (DVF) est proposée pour obtenir le gain de contrôle.

La seconde partie est consacrée au développement d'un prototype de contrôle actif des vibrations d'une plaque FGM munie d'actionneurs piézoélectriques en utilisant le logiciel d'éléments finis Ansys. Deux types de contrôleurs PID et LQR sont implémentés.

Dans la dernière partie, une optimisation du positionnement des réseaux des actionneurs piézo-électriques est proposée en utilisant des algorithmes génétiques. La procédure d'optimisation est basée sur la minimisation de l'indice linéaire quadratique.

Mots clés : contrôle actif des vibrations, structure, piézoélectricité, modèle éléments finis, optimisation, algorithme génétique, FGM, composite.

Abstract

The structural vibrations damping of composite and FGM structures with main active piezoelectric damping devices is addressed in this thesis. Finite elements model were developed for structures with piezoelectric patches.

The first part of the work is dedicated to the derivation of an electromechanical model suited for FGM beam with piezoelectric actuators layers. Then, an appropriate control law velocity feedback (LVF) is proposed to obtain the control gain.

The second part is devoted to develop a prototype of active control of vibration of FGM plate with piezoelectric actuators under Ansys finite element software. Two types of controllers (PID and LQR) are implemented.

The last part of the work is dealt with the optimization of piezoelectric actuators networks using genetic algorithms. The optimization procedure is based on minimizing the quadratic linear index.

Keywords: active vibrations control, structure, piezoelectricity, finite element models, optimization, genetic algorithm, FGM, composite.

Table des matières

List des figures	I
List des tableaux	III
Nomenclatures	IV
Introduction generale.....	1
OBJECTIFS DE LA THESE	2
STRUCTURE DE LA THESE	2
ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE	3
I. HAPITRE I. GÉNÉRALITÉS	7
I.1 MECANISMES D’ACTION PIEZOELECTRIQUE.....	7
I.1.1 DEFINITIONS.....	8
I.1.2 Équations de la piézo-électricité	9
I.1.3 Coefficients de couplage piézoélectrique	13
I.1.4 Les applications des matériaux piézoélectriques aux contrôle des vibrations	14
I.2 LES ALGORITHMES DE CONTROLE ACTIF.....	16
I.2.1 Principe	17
I.2.2 Contrôle classique par rétroaction.....	18
I.2.3 Régulateurs Proportionnels-Intégraux-Dérivés (PID)	19
I.2.4 Régulateur linéaire quadratique (LQR).....	21
I.2.5 Les algorithmes génétiques	23
Chapitre II.	27
II. Chapitre II. Contrôle actif de vibrations d'une poutre FGM	27
II.1 PROCESSUS DE MODELISATION	27
II.1.1 Lois de comportement de matériau FGM	27
II.1.2 Lois de comportement de matériau piézoélectrique	28
II.1.3 Description cinématique de la structure intelligente (FGM+piezoe).....	29
II.1.4 Discrétisation par éléments finis	30
II.1.5 Formulation variationnelle.....	31
II.1.6 Intégration numérique	33
II.1.7 Rétroaction directe des vitesses (DVF).....	34
II.2 APPLICATIONS	34
II.2.1 Validation du modèle	34
II.2.2 Contrôle actif des vibrations	37
II.3 CONCLUSION	45
III. Chapitre iii. Contrôle actif de vibrations des plaques fgm	
III.1 THEORIE CLASSIQUE DES PLAQUES (CPT)	46
III.1.1 Lois des propriétés matérielles des plaques FGM.....	47
III.1.2 Lois de comportement.....	48
III.1.3 Discrétisation éléments finis	48
III.1.4 Les matrices élémentaires	50
III.1.5 Critère d’optimisation pour les matrices de pondération	52

III.1.6	Modélisation Ansys	53
III.2	APPLICATIONS	54
III.2.1	Validation de modèle	54
III.2.2	Détermination de paramètres de contrôle.....	58
III.2.3	Contrôle actif des vibrations par Ansys	61
III.3	CONCLUSION	68
IV.	Chapitre optimisation du reseau des patches piezoelectrique sur les plaques composites	
IV.1	EQUATIONS CONSTITUTIVES.....	69
IV.1.1	Processus de modélisation.....	69
IV.1.2	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	70
IV.2	FORMULATION DE LA PIEZOELECTRICITE	74
IV.2.1	Principe d'Hamilton	75
IV.2.2	Formulation des éléments finis	77
IV.2.3	Intégration numérique	82
IV.2.4	Système des équations d'état.....	83
IV.2.5	Fonction objective	85
IV.3	MECANISME DE L'ALGORITHME GENETIQUE.....	85
IV.3.1	Codage des variables	87
IV.3.2	Population initiale	87
IV.3.3	Sélection naturelle de l'ensemble de reproduction	88
IV.3.4	Reproduction	88
IV.4	APPLICATIONS	90
IV.4.1	Optimisation du positionnement des pastilles piézoélectriques.....	93
IV.5	CONCLUSION	98
	Conclusion generale.....	99
	References	101
	Annexes	105
	Annexe a	105
	A.1 codes matlab.....	105
	Annexe b.....	114
	B.1 codes ansys pour le controle actif des vibrations des structures en fgm	114
	B.2 codes ansys pour le controle actif des vibration des plaques composites.....	120
	Contributions scientifiques publication	135
	Communication international	135

List des figures

Figure I.1. Effets piézoélectriques direct et indirect	8
Figure I.2. Interactions entre les grandeurs physiques	9
Figure I.3. Une maquette d'aile équipée avec des actionneurs piézo-électriques.	15
Figure I.4. Un prototype d'aile (Aero-structures Test Wing) équipé avec des pastilles piézoélectriques.	15
Figure I.5. Une aube fan avec des pastilles piézoélectrique.	16
Figure I.6. Contrôle active des vibrations d'une pale d'hélicoptère (The Boeing Company facility in Mesa, Arizona, USA).	16
Figure I.7. Schéma fonctionnel d'un dispositif de contrôle par rétroaction.	18
Figure I.8. Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique.	20
Figure I.9. Représentation du système contrôlé par un régulateur LQR.	22
Figure I.10. Organigramme d'un algorithme GENETIQUE.....	24
Figure I.11. Les cinq niveaux d'organisation dans l'algorithme génétique	24
Figure I.12. Les opérations sur l'algorithme génétique.....	26
Figure II.1. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.	29
Figure II.2. Propriétés géométriques de la poutre FGM Avec actionneur et capteur piézoélectriques collés sur leurs surfaces (Ansys).	37
Figure II.3. effets de l'indice de puissance (R_n) sur les cinq premières fréquences.	37
Figure II.4. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=0.2$).....	38
Figure II.5. Tensions de contrôle cas ($R_n=0.2$).....	39
Figure II.6. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=1$).....	39
Figure II.7. Tensions de contrôle cas ($R_n=1$).....	40
Figure II.8. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=5$).....	40
Figure II.9. Tensions de contrôle cas ($R_n=5$).....	41
Figure II.10. Coefficient d'amortissement en fonction d'indice de puissance.	41
Figure II.11. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=0.2$).....	42
Figure II.12. Tensions de contrôle cas ($R_n=0.2$).....	42
Figure II.13. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=1$).....	43
Figure II.14. Tensions de contrôle cas ($R_n=1$).....	43
Figure II.15. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle cas ($R_n=5$).....	44
Figure II.16. Tensions de contrôle cas ($R_n=5$).....	44
Figure II.17. La réduction d'amplitude en fonction d'indice de puissance.	45
Figure III.1. Les assumptions de différentes théories de la plaque.....	46
Figure III.2. Géométrie d'une plaque FGM.....	47
Figure III.3. Élément finis tridimensionnel de type solid.....	54
Figure III.4. . Propriétés géométriques de la plaque FGM Avec actionneur et capteur piézoélectriques collés sur leurs surfaces.....	55
Figure III.5. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	56

Figure III.6. Quatre premiers modes propres de la plaque FGM.	57
Figure III.7. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=0$	59
Figure III.8. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=1$	59
Figure III.9. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=100$	59
Figure III.10. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=0$	60
Figure III.11. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=1$	60
Figure III.12. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=100$	60
Figure III.13. Erreur enregistré entre les résultats obtenues par ANSYS et de référence.	62
Figure III.14. L'effet de l'indice de puissance (R_n) sur l'amplitude de la plaque FGM.	63
Figure III.15. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=0.2$	65
Figure III.16. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=1$	66
Figure III.17. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $R_n=5$	66
Figure III.18. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=1$	67
Figure III.19. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=0.2$	67
Figure III.20. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $R_n=5$	67
Figure IV.1. Les hypothèses de la théorie du premier de la plaque.	70
Figure IV.2. Effet piézoélectrique en contrôle actif de vibrations.	75
Figure IV.3. Numérotation des nœuds de l'élément isoparamétrique à quatre nœuds.	77
Figure IV.4. Organigramme d'un algorithme génétique.	86
Figure IV.5. Espace de recherche.	87
Figure IV.6. Représentation et le codage des variables.	88
Figure IV.7. Opérations reproductifs.	89
Figure IV.8. Premiers modes propres de la plaque composite.	91
Figure IV.9. Réponses en fréquences.	92
Figure IV.10. Réponse transitoire de la plaque composite en boucle-ouverte.	92
Figure IV.11. La position optimale pour chaque configuration ((a) 2, (b) 4, (c) 6, (d) 8 and (e) 10 pastilles.	94
Figure IV.12. Réponse transitoire de la plaque composite en boucle-ouverte et fermée pour des différentes configurations d'actionneurs.	95
Figure IV.13. Coefficient d'amortissement en fonction de nombre d'actionneurs.	96
Figure IV.14. Tension électrique, cas : 2 actionneurs.	96
Figure IV.15. Tension électrique CAS, 4 actionneurs.	97
Figure IV.16. Tension électrique cas, 6 actionneurs.	97
Figure IV.17. Tension électrique cas, 8 actionneurs.	97
Figure IV.18. Tension électrique cas, 10 actionneurs.	98

List des tableaux

Tableau I.1. Définition des grandeurs.	13
Tableau II.2. Les propriétés des matériaux.	35
Tableau II.3. Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM pour $L/h = 20$	36
Tableau II.4. Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM pour $L/h = 5$	36
Tableau II.5. Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM $L/h = 30$ avec des couches piézoélectriques.	36
Tableau III.1. Les propriétés des matériaux.	55
Tableau III.2. Les cinq premières fréquences propres (Hz) de la plaque FGM.	56
Tableau III.3. Les paramètres optimal du contrôle LQR.	58
Tableau III.4.. Les propriétés des matériaux	61
Tableau III.5. Les fréquences propres (Hz) de la plaque FGM.	62
Tableau IV.1. Les propriétés des matériaux.	90
Tableau IV. Les fréquences propres (Hz).	91

Nomenclatures

[**A**] La matrice d'état

[**B**] La matrice d'entrée

[**C**] La matrice d'observation

[**C**] La matrice d'amortissement

{**D**} le déplacement électrique

{**E**} Vecteur du champ électrique

E_1, E_2 modules d'Young dans les directions x, y

E_x, E_y, E_z Les composantes du champ électrique dans les directions x, y, z

$[e]$, et $[\epsilon]$ les constantes élastiques mesurées à champ électrique $\{E\}$

{ F_m } Le vecteur des forces généralisées extérieures.

G_{12}, G_{13}, G_{23} Les modules de cisaillement

[**K**] La matrice rigidité de la structure

[**K_e**] La rigidité électrique

[**K_{me}**] La matrice de couplage électrique-mécanique

[**M**] La matrice masse

N_i Les fonctions d'interpolation

ξ_i et η_i les coordonnées local

[**P**] La solution de l'équation de Riccati

$\overline{\mathbf{Q}}_{ij}$ Les rigidités de contraintes planes généralisées

[**Q**], [**R**] Les Matrices de pondération

U_1, U_2, U_3 sont les déplacements dans les directions x, y , et z

[**T**] La matrice de transformation

T L'énergie cinétique

ψ L'énergie potentielle

W Le travail fait par une force

u_0, v_0, w_0 Les déplacements du plan median

θ_x, θ_y Les rotations des plans yz et xz

{ **σ** } Le champ de contraintes

$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ Le champ de déformations

Φ Le potentiel électrique

\mathbf{d}_i Le vecteur déplacement

$[\boldsymbol{\Omega}]$ Les modes propres

ν_{12}, ν_{21} Les coefficients de Poisson.

Introduction Générale.

Les vibrations sont présentes dans d'innombrables applications de la vie réelle, et sont devenues l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile, etc.), et la plupart du temps sont hautement indésirables. Les vibrations indésirables peuvent diminuer les performances du produit, causer des problèmes économiques ou de sécurité. Les ingénieurs et les scientifiques travaillent constamment pour résoudre ce problème complexe. Tous les systèmes physiques ont un certain inhérent amortissement, mais le niveau ne peut pas être satisfaisant dans certains cas. Pour augmenter la dissipation d'énergie, on applique des techniques d'atténuation de vibrations. De cette façon, la réponse d'une structure entraînée à des fréquences de résonance peut être fortement diminuée.

Traditionnellement, les vibrations ont été réduites de manière passive. Cela prend profit des propriétés physiques, ou des phénomènes du système et des vibrations. Les vibrations peuvent être atténuées par la manipulation de masse, raideur ou propriétés géométriques de structure, l'isolation des vibrations, des résonateurs de Helmholtz, amortisseurs, chocs absorbants et bien d'autres techniques. Malheureusement, ces méthodes conduisent à une augmentation du poids, une faible réponse et la détection d'une faible énergie de vibration. Dans ce contexte, les méthodes de contrôle actif apparaissent à priori plus adaptées.

La réduction active des vibrations utilise des actionneurs pour générer des forces externes appliquées au système considéré. Ces actionneurs sont entraînés par des systèmes de contrôle. Un des matériaux qui peut être utilisé comme actionneur et capteur c'est le matériau piézoélectrique, il génère une charge électrique lorsqu'il est soumis à une déformation mécanique (effet direct), et à l'inverse produisent une contrainte mécanique appliquée sous un champ électrique (l'effet inverse). Généralement, l'utilisation de ce type de matériaux intelligents se fait en appliquant des couches ou des pastilles (patch) sur la structure vibrante.

Les performances d'un système de contrôle actif dépendent fortement de la position, de la taille, de la forme et du nombre des patches piézoélectrique. L'optimisation du réseau des capteurs et des actionneurs piézo-électriques est donc une étape indispensable lors de la conception de ce type de dispositifs.

Dans ce travail, le contrôle actif de vibrations des structures composite utilisant des éléments piézo-électriques est présenté. Des modèles vibrationnels appropriés pour le calcul

des efforts mécaniques et électriques sont utilisés. La méthode des éléments finis est employée pour l'analyse modale et dynamique du système couplé (matériaux composites avec des piézoélectriques) à l'aide du logiciel Matlab et Ansys APDL. Pour améliorer l'efficacité du contrôle l'algorithme génétique est proposé comme outil d'optimisation de positionnement des pastilles piézoélectriques, en utilisant des fonctions objectives développées dans la littérature.

Objectifs de la thèse

L'objectif général de cette thèse de recherche est de contrôler et d'amortir les vibrations des structures composites en utilisant des pastilles piézoélectriques.

Afin d'atteindre cet objectif, les tâches spécifiques suivantes sont effectuées :

- Développement des modèles éléments finis des structures composites et FGM (plaque, et poutre) munies de pastilles piézoélectriques.
- Optimisation de réseaux de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques au moyen d'algorithmes génétiques en contrôle actif de vibrations.
- Optimisation des paramètres de la commande appliquée aux actionneurs piézo-électriques.
- La mise en place des différents types de contrôleurs (PID, LQR, LQG, velocity feedback, displacement Feedback).

Structure de la thèse

Le présent travail est constitué en quatre chapitres. Le premier s'attache à rassembler les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu (mécanisme piézoélectrique, les différentes stratégies de contrôle, et les algorithmes génétiques). Des exemples d'applications y sont présentés.

Le second chapitre est consacré au développement d'un modèle élément finis de poutre en matériaux à gradient de propriétés (FGM) munie de couches piézoélectriques à partir de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Ce modèle est ensuite associé d'une part à l'algorithme de contrôle réaction directe des vitesses (DVF) et d'autre part, il est utilisé pour étudier le contrôle actif de vibrations, d'autre part.

Le troisième chapitre présente un modèle éléments finis de plaque FGM munie de couches piézoélectriques, développé à partir d'une formulation variationnelle. Ensuite, les éléments finis sont implémentés sous MATLAB et Ansys et validés à travers des comparaisons avec des résultats de la littérature. Deux types de contrôle (PID et LQR) sont appliqués au contrôle actif des vibrations.

Le quatrième chapitre détaille un processus d'optimisation. L'optimisation proposée est basée sur un algorithme génétique et vise à minimiser l'indice linéaire quadratique pour obtenir le meilleur emplacement du réseau de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques en contrôle actif de vibrations de structures plaques composites. Dans un premier temps, un modèle éléments finis basé sur la théorie du premier ordre (FOSDT) pour une plaque composite avec des pastilles piézoélectriques distribuées sur sa surface. Ensuite le problème d'optimisation est décrit en posant la fonction objective, les contraintes de design ainsi que les domaines des variables géométriques. Différentes simulations sont effectuées en utilisant le logiciel MATLAB et des solutions sont proposées.

Finalement, quelques conclusions sont présentées afin de

- (i) résumer les principaux résultats présentés,
- (ii) souligner les originalités de cette thèse
- (iii) définir les perspectives de continuation des travaux de recherche présentés ici.

Analyse bibliographique

La documentation scientifique a récemment montré une importante augmentation du nombre d'articles décrivant des recherches dans le domaine du contrôle actif des vibrations. Que ce soit des études sur la modélisation, la conception ou l'optimisation, des travaux ont été proposés permettant d'augmenter les performances des systèmes de contrôle actif et facilitant donc leur intégration de façon appliquée. Le travail scientifique cité dans ce chapitre s'attarde donc aux études clés qui ont permis un avancement des connaissances. Ils permettent de mieux situer ce travail en regard de ce qui a été déjà fait. Les aspects abordés dans cette étude bibliographique sont :

- 1) la modélisation des structures intelligentes ;
- 2) les algorithmes de contrôle ;
- 3) l'optimisation du nombre et de positionnement des pastilles piézoélectriques.

Effectivement, de nombreux travaux ont été effectués afin de développer des modèles permettant de contrôler les vibrations induites dans une structure composite à l'aide d'actionneurs et de capteurs piézoélectrique. Ces modèles purement numériques utilisent des algorithmes de contrôle liant l'activation de l'actionneur à la dérivée temporelle de la sortie du capteur, et de la charge électrique, et permettent de contrôler des phénomènes vibratoires ayant des amplitudes de l'ordre de quelques millimètres(Aridogan et Basdogan 2015).(Chee, Tong, and Steven 1998) ont examiné les approches de modélisation des matériaux piézoélectriques. Dans leur article, des modèles analytiques et éléments finis (FE) de matériaux piézo-électrique ont été principalement construit en utilisant des équations linéaires constitutives piézoélectriques. Ils ont conclu que l'approche de modélisation linéaire est seulement fiable à des faibles champs électriques appliqués. Dans le cas de grands champs électriques (i.e des grandes tensions d'actionnement), le comportement non linéaire des matériaux piézo-électriques doit être pris en compte dans les modèles analytiques et numériques pour des prévisions plus précises. Récemment, Les matériaux piézocéramiques ont fortement participé au développement des structures intelligentes. Des études récente sont proposé des modèles afin d'incorporer des éléments piézoélectriques dans des structures simples telles que des poutres(M. Adnan Elshafei and Alraïess 2013; Trindade 2000; Djojodihardjo et al. 2015; Zorić et al. 2012; Bendary, Elshafei, and Riad 2010; Benjeddou, Trindade, and Ohayon 2000; Robbins and Reddy 1991; Tzou and Tseng 1990; Shen 1995)ou bien des plaques(Sadri, Wright, and Wynne 1999; Batra and Liang 1997; Lam et al. 1997; Phung-Van et al. 2015; Mostafa Adnan Elshafei 1996; Chandrashekhara and Agarwal 1993; Kerur and GHOSH 2011; He et al. 2001).

Un système de contrôle est dit actif si un ou plusieurs actionneurs appliquent des forces sur une structure selon une loi de contrôle et en utilisent pour leur fonctionnement une source d'énergie externe. Ces forces peuvent être utilisées pour ajouter ou dissiper l'énergie de la structure à contrôler. Afin de construire un tel système, il existe deux approches qui sont radicalement différentes : la première consiste à identifier la perturbation qui crée les

vibrations pour l'annuler en lui super posant une excitation "inverse". Cette stratégie de contrôle actif est appelée contrôle par anticipation (feedforward). Elle est surtout développée en acoustique(Rizet 1999), mais elle est aussi très utile pour le contrôle de vibration des structures (Yamamoto et al. 1997). La deuxième approche consiste à identifier la réponse de la structure plutôt que l'excitation qui la fait vibrer. Elle nécessite, donc, la modélisation du comportement dynamique de la structure. Le travail de contrôle des vibrations qui porte sur ce type de stratégie est appelé contrôle par boucle de rétroaction(feedback)(Takács and Rohal-Ilkiv 2012).Plusieurs algorithmes ont été utilisés dans la littérature, sachant que ceux proportionnels(P), dérivatifs (D) ou proportionnel-dérivatifs (PD) occupent la majeure partie des travaux, dû à leurs simples conception et mise en œuvre(Khot et al. 2012; Karagülle, Malgaca, and Öktem 2004; Jovanović et al. 2013; Alam 2012; Malgaca 2010).Une part considérable des littératures a été consacrée aux autres types d'algorithmes, tel que LQR (Linear Quadratic Regulator) (Dong et al. 2014; Takacs and Rohal-Ilkiv 2012; Daraji and Hale 2012; Balamurugan and Narayanan 2001; Narayanan and Balamurugan 2003). En outre, d'autres type d'algorithmes ont été proposés dans la documentation scientifique, par exemple H_2/H_∞ (Rao et al. 2007; Peng, Ng, and Hu 2005; Nonami and Sivrioglu 1996; Mao and Pietrzko 2013), Fuzzy controler (Muradova and Stavroulakis 2013; Shirazi, Owji, and Rafeeyan 2011; Wei, Qiu, and Wang 2010).

Les systèmes de contrôles actifs dépendent fortement de la position, de la taille, de la forme et du nombre des éléments actifs mis en jeu. Le mauvais choix de ces paramètres affecte directement la performance du contrôle, L'optimisation du réseau des capteurs et des actionneurs piézo-électriques est donc une étape indispensable lors de la conception de ce type de dispositifs. Dans le but de déterminer la configuration optimale des capteurs et des actionneurs piézo-électriques différentes fonction de coût sont présentées dans la littérature.(Sadri, Wright, and Wynne 1999) ont proposé deux critères de contrôlabilité : (contrôlabilité modal et contrôlabilité Grampian), pour trouver le positionnement optimal des actionneurs piézoélectriques sur une plaque simplement appuyée en utilisant des algorithmes génétiques.(Peng, Ng, and Hu 2005)ont présenté une méthodologie à l'aide du logiciel Ansys et un algorithme génétique pour trouver la position optimale des pastilles piézoélectriques.(Roy and Chakraborty 2009)ont présenté le contrôle actif des vibrations des plaques et coques de type FRP (fiber reinforced polymer). Ils ont utilisé un modèle éléments

finis et un algorithme génétique afin d'optimiser la mise en place de pastilles piézo-électriques et la détermination des matrices de pondération, Q et R pour le contrôle. Les travaux d' (Isabelle Bruant, Gallimard, and Nikoukar 2010) sont portés sur l'optimisation du réseau des capteurs et des actionneurs piézo-électriques : optimisation de la position, de l'orientation des capteurs et des actionneurs, optimisation du nombre de capteurs, en présence ou non de modes résiduels. (I. Bruant, Gallimard, and Nikoukar 2011) ont traité deux nouveaux critères d'optimisation, Ces critères sont utilisés pour optimiser la position de réseaux d'éléments piézo-électriques.(Mehrabian and Yousefi-Koma 2011) ont présenté une méthode d'optimisation basée sur la maximisation de la fonction de réponse en fréquence (FRF) pour la position optimale des actionneurs piézoélectriques sur un modèle d'un / A-18 empennage vertical F.(Mallardo, Aliabadi, and Khodaei 2012) ont proposé une stratégie d'optimisation de la position des capteurs piézoélectrique au sein d'un panneau composite.(Daraji and Hale 2014) ont proposé une nouvelle fonction objective basés sur la moyenne des variations de gain en boucle fermée afin de trouver le nombre et le positionnement optimal d'actionneurs, les auteurs ont montré que deux paires de pastilles piézoélectriques donnent presque le même amortissement que celle de cinq paires. (Chhabra, Bhushan, and Chandna 2016) ont traité l'emplacement optimal des actionneurs piézoélectriques sur une plaque mince par l'utilisation une approche modifié de la matrice de contrôle et la décomposition en valeurs singulières. Pour le présent travail, une contribution sera apportée sur le contrôle actif des vibrations des structures composites composites et dont l'objectif a été détaillé en début de cette introduction générale.

Chapitre I.

Généralités

Ce chapitre est scindé en deux sections, la première est consacrée à l'étude de la piézo-électricité dans le cadre du contrôle actif de vibrations, ou un bref rappel des bases théoriques du phénomène piézo-électrique, est nous présenté lois comportementales des matériaux piézoélectriques utilisés en contrôle actif de structures. La deuxième section dédiée aux techniques de contrôle actif, trois algorithmes de contrôle sont présentés. Finalement, un rappel sur les notions de base des algorithmes génétiques.

I.1 MECANISMES D'ACTION PIEZOELECTRIQUE

En 1880, les frères Curie furent à la base de la découverte de l'effet piézoélectrique sur des cristaux de sel de la Rochelle. Etymologiquement, le préfixe 'piézo' provient du grec et signifie presser ou serrer. Les matériaux piézo-électriques possèdent la propriété de se polariser électriquement sous l'action d'une force mécanique (effet direct) et, réciproquement, de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique (effet inverse) figure I.1. Ces caractéristiques particulières en font des matériaux de choix pour la réalisation de capteurs d'actionneurs, de moteurs, de transducteurs ou de transformateurs. Les premières applications industrielles de cette découverte fondamentale n'apparurent que dans les années 1940 – 1950. La piézoélectricité a depuis lors trouvé un large champ d'applications dans le domaine de l'ingénierie électromécanique : les matériaux piézoélectriques sont notamment utilisés comme transducteurs électromécaniques tels que les sondes échographiques, les senseurs, actuateurs et les micro-positionneurs.

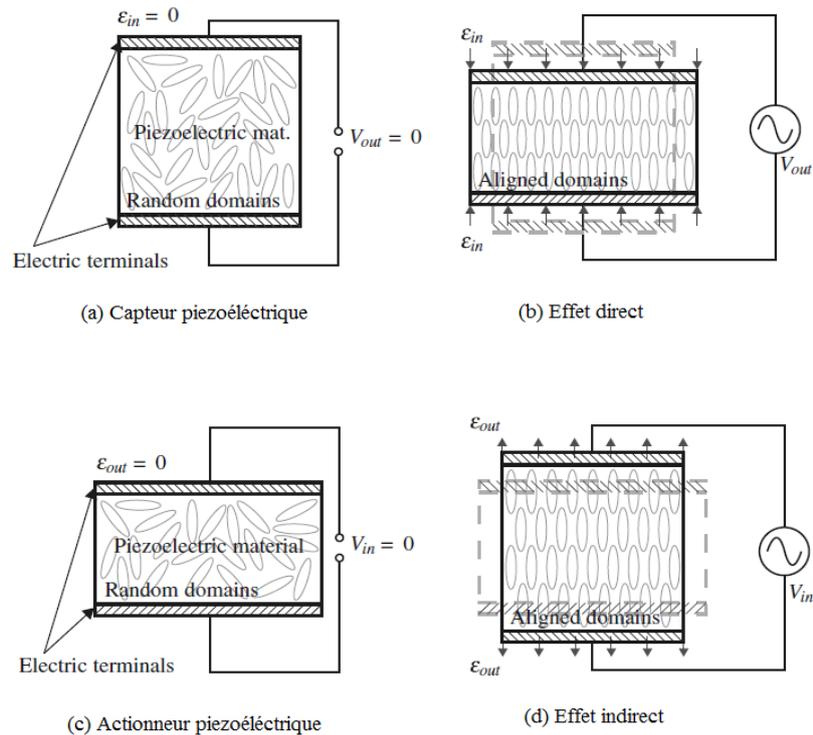


Figure I.1. Effets piézoélectriques direct et indirect (Takács and Rohal'-Ilkiv 2012).

I.1.1 DEFINITIONS

Sous l'influence de grandeurs physiques telles que la température, l'entropie, la contrainte et la déformation ainsi que le champ et l'induction électrique, les propriétés des matériaux piézoélectriques changent. Les variations se traduisent par des électromécaniques, thermoélectriques ou thermoélastiques. L'ensemble des effets qui existent entre les propriétés électriques, thermiques et mécaniques d'un cristal sont représentées par le diagramme symbolique de la figure II.2. Les effets piézoélectriques apparaissent comme une interaction entre, d'une part contrainte et déplacement électrique, et autre part champ électrique et la déformation. D'après cette figure on peut établir les définitions suivantes :

- **La piézoélectricité** : c'est l'apparition, dans certains matériaux, de charges ou encore d'une polarisation électrique sous l'influence d'une contrainte. Les charges sont proportionnelles aux contraintes ou aux déformations subies par le milieu et le signe des charges s'inverse avec le sens de la contrainte.

• **La pyroélectricité** : Comme son nom l’indique, pyro provient du Grec et signifie feu indiquant qu’il s’agit d’un phénomène couplant des effets thermiques et électriques. En fait, il s’agit de l’apparition de charges libres symbolisées par lors que la température varie.

• **Ferroélectricité** : Il s’agit d’une sous famille des matériaux pyroélectriques qui ont la propriété particulière d’avoir une polarisation modifiable dans certaines conditions et sous un champ électrique excitateur. Cette propriété est particulièrement intéressante dans le domaine du stockage de l’information où l’information est stockée grâce à l’état de polarisation comme en atteste les mémoires non volatiles dénommées FRAM (Ferroelectric Random Access Memory).

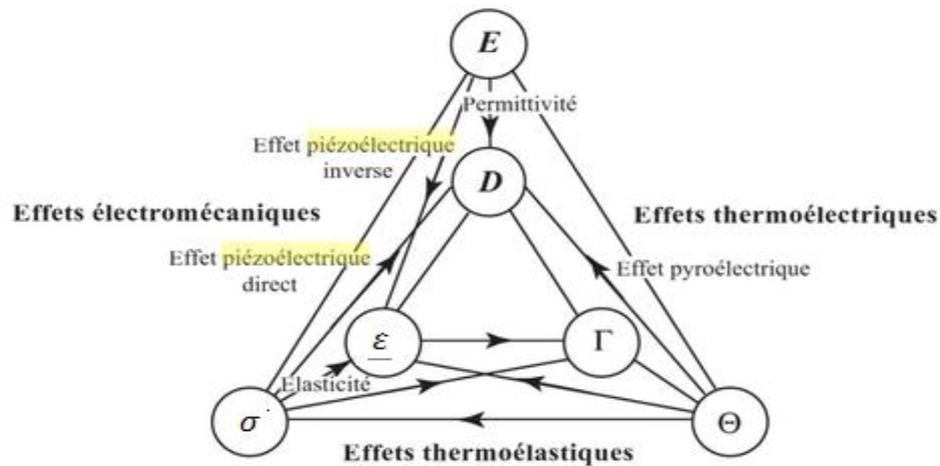


Figure I.2. Interactions entre les grandeurs physiques(Brissaud 2007).

1.1.2 Équations de la piézo-électricité

La piézo-électricité peut se définir comme un phénomène de couplage entre le domaine mécanique (énergie élastique) et le domaine électrique (énergie électrique). La différentielle exacte de l’énergie interne du système peut donc se mettre sous la forme :

$$\{U(\epsilon, \vec{D}) = \sigma_{ij}d\epsilon_{ij} + E_idD_i \tag{I.1}$$

Ou

$\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}$: Energie élastique

E_idD_i : Energie éléctrique

Ou σ_{ij} et ε_{ij} représentent respectivement les tenseurs de déformation et de contrainte. E_i et D_i sont respectivement le vecteur du déplacement ou induction électrique et le champ électrique.

Nous introduisons maintenant, l'enthalpie électrique (H) en utilisant la transformation suivante:

$$H(\varepsilon, E) = U(\varepsilon, \vec{D}) - D_i E_i \quad (I.2)$$

La forme différentielle de l'enthalpie électrique peut être présentée par :

$$dH(\varepsilon_{ij}, E_i) = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} dE_i \quad (I.3)$$

On peut ainsi écrire la différentielle exacte de l'enthalpie électrique sous la forme suivante :

$$dH(\varepsilon_{ij}, E_i) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i \quad (I.4)$$

La comparaison des équations I.3 et I.4 donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \\ \frac{\partial H}{\partial E_i} = D_i \end{cases} \quad (I.5)$$

On note que $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, E_m)$ et $D_i = D_i(\varepsilon_{ij}, E_m)$, les différentielles de la contrainte et le déplacement électrique prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} \right)_E d\varepsilon_{pq} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_m} \right)_\varepsilon dE_m \\ dD_m = \left(\frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{pq}} \right)_E d\varepsilon_{pq} + \left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k} \right)_\varepsilon dE_k \end{cases} \quad (I.6)$$

La signification physique des dérivées partielles est la suivante:

$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} \right)_E = C_{ijpq}^E$ est le tenseur des modules d'élasticité à champ électrique nul.

$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_m} \right)_\varepsilon = - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_E = -e_{ijm}$ est le tenseur des coefficients piézoélectriques linéaires.

$\left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k}\right)_\varepsilon = \epsilon_{mk}^\varepsilon$ est le tenseur des constantes diélectriques à déformation nulles.

En intégrant les équations I.6 on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijpq}^E \varepsilon_{pq} - e_{ijm} E_m \\ D_m = e_{mij} \varepsilon_{ij} + \epsilon_{mk}^\varepsilon E_k \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

En ce qui concerne les céramiques PZT, principalement utilisées dans les actionneurs que nous étudierons, les différentes matrices $[C^E]$, $[e]$, $[\varepsilon]$ respectivement la matrice raideur, la matrice coefficients piézoélectriques, et la matrice permittivité électrique prennent les formes suivantes, lorsque la polarisation est dirigée selon z :

$$[C^E] = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^E & C_{32}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} = e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

Il est possible de réécrire les équations de la piézoélectricité équation. I.7 sous une autre forme. En effet, nous avons exprimé σ et D en fonction de ε et E , mais il est aussi possible d'exprimer ε et D en fonction de σ et E :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = S_{ijpq}^E \sigma_{pq} + d_{ijm} E_m \\ D_m = d_{mij} \sigma_{ij} + \epsilon_{mk}^T E_k \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

S_{ijpq}^E correspond à la souplesse notée avec un exposant E, puisqu'elle est mesurée lorsque E est nul.

d_{mij} à la constante piézoélectrique et l'exposant T correspond à la transposée du tenseur.

Il est possible d'exprimer ces coefficients en fonction des précédents :

$$\begin{cases} C^E = [S^E]^{-1} \\ e = dC^E \\ \epsilon^\epsilon = \epsilon^T - dC^E d^t \end{cases} \quad (I.12)$$

On peut aussi exprimer ϵ et E en fonction de σ et D :

$$\begin{cases} \epsilon_{ij} = S_{ijpq}^D \sigma_{pq} + g_{ijm} D_m \\ E_m = -g_{mij} \sigma_{ij} + \beta_{mk}^T D_m \end{cases} \quad (I.13)$$

ou

$$\begin{cases} S^D = S^E \\ g = \beta^T d \\ \beta^T = (\epsilon^T)^{-1} \end{cases} \quad (I.14)$$

Enfin, on exprime le couple σ et D en fonction de ϵ et D et on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijpq}^D \epsilon_{pq} + h_{ijm}^T D_m \\ E_m = -h_{mij} \epsilon_{pq} + \beta_{mk}^\epsilon D_m \end{cases} \quad (I.15)$$

avec

$$\begin{cases} C^D = C^E + e^T \beta^\epsilon e \\ h = \beta^T e \\ \beta^\epsilon = (\epsilon^\epsilon)^{-1} \end{cases}$$

La définition et les unités des différentes grandeurs et constantes mécaniques, électriques, diélectriques et piézoélectriques sont rappelées dans le tableau.I.1

Tableau I.1 Définition des grandeurs

Type	Grandeur	Définition	unité
Mécanique	σ	Contrainte mécanique	Nm^{-2}
	ε	Déformation relative	
	C	Raideur ou constante élastique	Nm^{-2}
	S	La souplesse ou compliance élastique	m^2N^{-1}
électrique	D	Déplacement ou induction électrique	Cm^2
	E	Champ électrique	Vm^{-1}
	β	Constante d'imperméabilité diélectrique	mF^{-1}
	ϵ	Permittivité électrique	Fm^{-1}
Constantes piézoélectriques	e	Coefficient piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul.	$NV^{-1}m^{-1}$ Ou Cm^{-2}
	d	Constante piézoélectriques qui traduit la proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul.	CN^{-1} Ou mV^{-1}
	g	Coefficient piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la contrainte et le champ résultant à induction constante ou nulle.	VmN^{-1} ou m^2C^{-1}
	h	Coefficient piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la déformation et le champ résultant à induction constante ou nulle.	NC^{-1} Ou Vm^{-1}

1.1.3 Coefficients de couplage piézoélectrique

Pour évaluer l'efficacité d'un matériau piézoélectrique, un coefficient de couplage électromécanique est généralement utilisé pour caractériser l'aptitude d'un matériau à

convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et inversement. Ce facteur se traduit par la relation équivalente suivante :

$$k = \frac{\text{Energie transformée}}{\text{Energie fournie}} \quad (\text{I.16})$$

En termes de choix de matériau piézoélectrique pour des applications telles que les actionneurs, il convient donc d'opter pour des coefficients piézoélectriques et des coefficients de couplage les plus élevés possibles afin de maximiser l'efficacité du matériau.

1.1.4 Les applications des matériaux piézoélectriques aux contrôle des vibrations

Les matériaux piézoélectriques sont capables d'assurer une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique: l'application d'une contrainte sur un matériau piézo-électrique entraîne l'apparition d'une tension entre les électrodes. Ce phénomène est réversible ce qui permet d'utiliser les éléments piézo-électriques indifféremment comme actionneur ou capteur ou même de cumuler les deux fonctions.

Les techniques de réduction de vibrations à l'aide de matériaux piézoélectrique sont récemment montrés une importante utilisation dans des nombre champs industriel (Takács and Rohal'-Ilkiv 2012; Sénéchal 2011). Beaucoup de ces travaux sont couramment employés dans l'aéronautique. Les applications concernent, en grande majorité, la réduction des phénomènes de flottement (Suleman, Crawford, and Costa 2002) figure I.3, l'utilisation de capteurs piézoélectriques pour estimer le battement aéroélectriques figure I.4, l'amortissement des aubes de turbomachine à l'aide des pastilles piézoélectriques dans (Sénéchal 2011) figure I.6. Le contrôle actif des pales d'hélicoptère (figure. I.6).

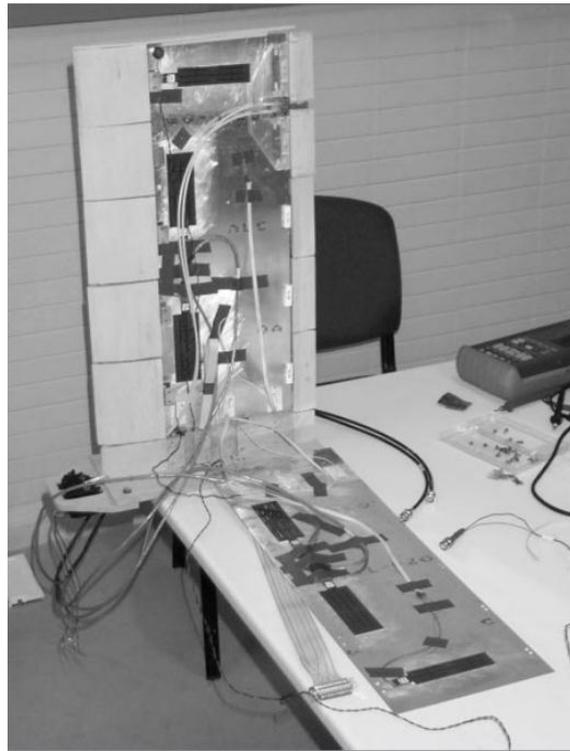


Figure 3. Une maquette d'aile équipée avec des actionneurs piézo-électriques.

Figure I.3. Une maquette d'aile équipée avec des actionneurs piézo-électriques. (Suleman, Crawford, and Costa 2002).

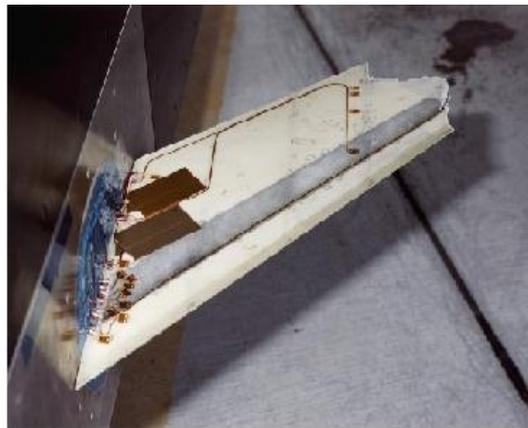


Figure 4. Un prototype d'aile (Aero-structures Test Wing) équipé avec des pastilles piézoélectriques.

Figure I.4. Un prototype d'aile (Aero-structures Test Wing) équipé avec des pastilles piézoélectriques.



Figure I.5. Une aube avec des pastilles piézoélectriques.

Figure I.5. Une aube avec des pastilles piézoélectriques (Sénéchal 2011).



Figure I.6. Contrôle actif des vibrations d'une pale d'hélicoptère.

Figure I.6. Contrôle actif des vibrations d'une pale d'hélicoptère (The Boeing Company facility in Mesa, Arizona, USA).

I.2 Les algorithmes de contrôle actif

La performance du système de contrôle actif est fortement dépendante de l'algorithme de contrôle utilisé pour traiter les informations fournies par les capteurs afin de déterminer les signaux de commande envoyés aux actionneurs. Il existe de nombreux ouvrages qui traitent des théories de

contrôle. Parmi ceux-ci, citons les ouvrages de (Takács and Rohal'-Ilkiv 2012; Fuller, Elliott, and Nelson 1996).

Cette section a pour but de présenter les algorithmes de commande essentiels qui sont couramment utilisés dans le contrôle actif de vibrations. La première sous-section présente un bref rappel des bases pour décrire le principe de contrôle par rétroaction. La deuxième sous-section a pour objectif de présenter brièvement les méthodes de contrôle classiques appliquées aux contrôles actifs des vibrations. Ces méthodes sont souvent appelées rétroaction de position ou de vitesse (ie. le système utilise simplement un gain fixe multiplié par la position, la vitesse ou le signal d'accélération afin de calculer un signal d'entrée, qui est à son tour fourni à l'actionneur). La troisième sous-section discute les régulateurs proportionnels intégraux dérivés (PID), qui sont très couramment utilisés dans tous les domaines de l'ingénierie, y compris le contrôle actif de vibrations. La dernière sous-section examine une stratégie de contrôle un peu plus avancée appelée la commande linéaire quadratique (LQR).

1.2.1 Principe

Les techniques actives permettent de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure quelconque de l'intensité des vibrations indésirables. C'est le principe du contrôle actif (CA) des vibrations. Ces mesures sont, soit basées sur une référence, soit fournies par des capteurs plus ou moins intégrés dans la structure. Les systèmes de type feedback constituent la méthode de contrôle la plus souvent applicable. Cela tient à la simplicité du principe, illustré dans la figure 7 : le contrôle résulte uniquement du traitement d'un signal d'erreur. Ce signal d'erreur filtré par le contrôleur commande alors les actionneurs de contrôle.

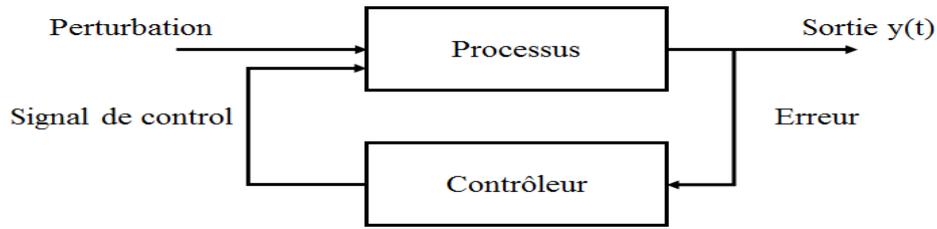


Figure I.7. Schéma fonctionnel d'un dispositif de contrôle par rétroaction.

1.2.2 Contrôle classique par rétroaction

un contrôleur est classé en tant que contrôleur classique par rétroaction, lorsque le signal de vibration mesuré par les capteurs est simplement amplifié par un gain et renvoyé aux actionneurs. Pour démontrer le concept mathématique, on considère un système vibrant décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Avec x le vecteur des variables d'état, u le vecteur des commandes, et y le vecteur des sorties. Ce formalisme, très puissant, permet en fait de traiter de la même façon des systèmes SISO (Single Input Single Output) ou MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) avec de nombreux degrés de liberté. De plus on, intègre aisément des termes modélisant les différents bruits pouvant exister dans le système.

L'idée en contrôle classique par rétroaction directe des positions est très simple : il consistant à envoyer le signal du capteur amplifié à l'actionneur. La loi de command peut être décrite comme :

$$u(t) = -Ky(t) \quad (\text{I.18})$$

Avec K le gain de contrôle,

Dans le cas de contrôle par rétroaction directe des vitesses, la loi de contrôle est donnée par :

$$u(t) = -K\dot{y}(t) \quad (\text{I.19})$$

En outre, il est également possible d'utiliser la mesure de l'accélération pour formuler l'entrée de commande :

$$u(t) = -K\ddot{y}(t) \quad (\text{I.20})$$

1.2.3 Régulateurs Proportionnels-Intégraux-Dérivés (PID)

Un exemple de contrôle très répandu dans l'industrie et appartenant à la famille du contrôle classique est la méthode de contrôle par régulateur ou correcteur PID (Proportionnel -Intégrale-Dérivée). Cette méthode de contrôle par rétroaction permet d'obtenir un signal de commande à partir du signal mesuré, de son intégrale et de sa dérivée. Ce type de contrôle permet de faire un compromis entre la précision, la rapidité et la robustesse du système. Il est adaptable à de nombreux cas.

Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions:

- Il fournit un signal de commande $u(t)$ en tenant compte de l'évolution du signal de sortie $y(t)$ par rapport à la consigne $r(t)$.
- Il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
- Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

Le comportement du régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) standard peut être décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (\text{I.21})$$

avec l'écart $e(t)$ défini comme suit :

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (\text{I.22})$$

Le signal de commande découlant de l'algorithme décrit ci-dessus est composé de la somme de trois termes distincts qui, de par la fonction remplie, sont logiquement dénommés respectivement terme proportionnel, intégral et dérivé. Les paramètres du régulateur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration K_i et la constante de dérivation K_d . Un schéma bloc de la régulateur PID est présenté dans la figure I.8.

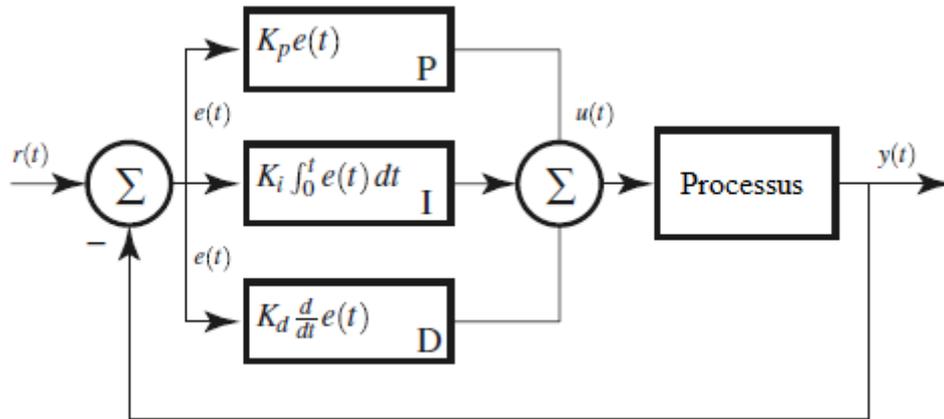


Figure I.8. Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique.

L'algorithme du régulateur PID tel que décrit en équation I.21 peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (\text{I.23})$$

D'autres variations de la formulation standard sont couramment utilisées afin d'augmenter les performances en boucle fermée du régulateur PID. L'ajout d'un filtre dans le terme dérivé est souvent adopté en pratique. Il en résulte la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) \quad (\text{I.24})$$

Les gains d'intégration T_i et de dérivation T_d sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$\begin{cases} T_i = \frac{K_p}{K_i} \\ T_d = \frac{K_d}{K_p} \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

où le terme supplémentaire $\frac{T_d}{N} s + 1$ est un filtre passe-bas introduit sur l'action dérivé.

1.2.4 Régulateur linéaire quadratique (LQR)

La commande linéaire quadratique appartient à la famille des algorithmes du contrôle optimale. Dans un contrôle optimal, une fonction de coût indiquant un indice de performance est choisie qui est ensuite réduite au minimum pour obtenir une entrée optimale.

Considérons le système sous forme d'équations d'état I.17, stationnaire et invariant dans le temps. La fonction de coût dans le problème de contrôle optimal quadratique peut être choisie pour être quadratiquement dépendante de l'entrée de commande et l'état ou réponse de sortie :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I.26})$$

Les termes $x^T Q x$ et $u^T R u$ peuvent être interprétés comme une mesure de l'énergie vibratoire du système et de l'énergie de contrôle. Q et R sont des matrices pondérant respectivement les états et les commandes du système.

La loi de contrôle finale qui minimise l'équation l'indice J peut être exprimé sous la forme :

$$u(t) = -Kx(t) \quad (\text{I.27})$$

La matrice gain du contrôle optimal K est défini par :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (\text{I.28})$$

où la matrice P est la solution de l'équation de Riccati, équation différentielle matricielle qui s'écrit dans le cas stationnaire :

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \quad (\text{I.29})$$

Cette méthode s'applique à tout système dynamique linéaire. Dans le cas général, toutes les matrices intervenant dans l'expression I.29 peuvent varier en fonction du temps. La matrice des gains de contrôle K minimisant l'indice quadratique J est appelée matrice optimale. Plusieurs méthodes, généralement itératives, existent pour résoudre l'équation de Riccati. Dans la pratique, des outils logiciels du type Matlab sont apparus pour calculer directement la matrice optimale K à partir du système d'état et du critère choisi.

La méthodologie de conception d'un contrôle optimal quadratique, présentée précédemment, peut être résumée par les étapes suivantes(Trindade 2000):

Définition des matrices de pondération Q et R pour atteindre la performance désirée avec l'effort de contrôle disponible ;

Calcul de la matrice P, solution de l'équation algébrique de Riccati équation I.29, à partir des matrices du système A et B, et de pondération Q et R;

Calcul de la matrice de gain (constante) K à partir de P équation I.28.

Si l'on revient à l'équation I.17, avec u vérifiant $u(t) = -Kx(t)$, on a le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (I.30)$$

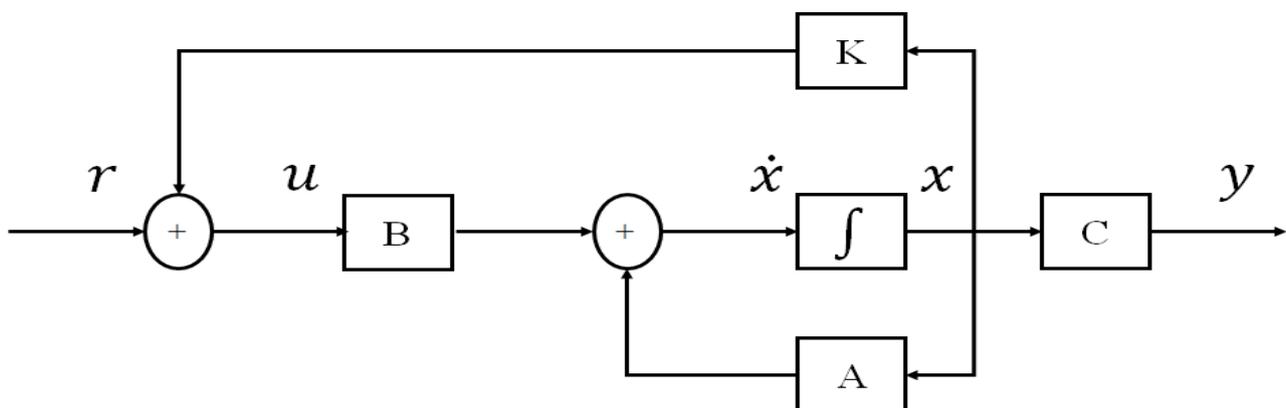


Figure I.9. Représentation du système contrôlé par un régulateur LQR.

Puisque K est une matrice qui multiplie toutes les variables d'état, il est nécessaire de mesurer toutes les variables d'état. Dans le cas d'une suspension active, certaines variables d'état sont difficilement mesurables. L'ajout d'un observateur optimal permet de contourner le problème mais rend le système de contrôle plus complexe.

La créativité de l'esprit humain est sans limite, et cela est également vrai pour la conception des stratégies de commande qui peuvent être utilisées dans le contrôle actif des vibrations (CAV). Le lecteur intéressé par ce domaine pourra consulter la référence (Takács and Rohal'-Ilkiv 2012)

1.2.5 Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont un mécanisme général, performant pour résoudre des problèmes pour lesquels :

- Il existe un très grand nombre de solutions plus ou moins bonnes ;
- On ne dispose pas d'algorithme déterministe pour calculer la ou les meilleures solutions ;
- L'univers du problème est peu formalisé ;

Les algorithmes génétiques consistent à employer le principe de l'évolution à un problème d'optimisation. Selon la théorie de l'évolution de Darwin, chaque être vivant possède des gènes qui déterminent ses particularités. Les êtres les plus performants ont de plus grandes chances de survie, donc plus de chances de transférer leurs gènes à la génération suivante. Contrairement aux algorithmes traditionnels, la recherche débute avec une population de points de départ et non un seul. Différents mécanismes permettent d'explorer l'espace des solutions et de trouver l'optimum. Tout comme les algorithmes traditionnels, il n'y a pas de certitude sur l'optimalité de la solution, mais l'espace exploré est beaucoup plus vaste. Le processus de l'algorithme génétique comporte quatre étapes essentielles figure I.10:

- Création d'une population de départ ;
- Fonction objective ;
- Sélection ;
- Croisement et mutation des gènes ;

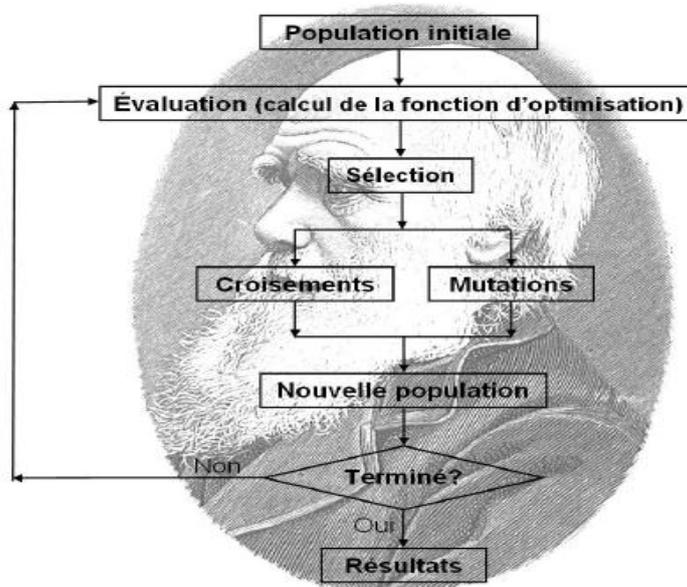


Figure I.10. Organigramme d’un algorithme génétique (Nikoukar2011).

Étape 1 : Création de la population

Pour résoudre un problème, il faut d’abord coder les paramètres. Un gène Correspond à une variable d’optimisation X_i , et un ensemble de gène correspond à un chromosome. Un individu a un ou plusieurs chromosomes et une population c’est un ensemble d’individus. Il existe deux types de codage réel et binaire. La population de départ est créée de manière aléatoire (ie. le choix de la population initiale est important car il peut rendre plus ou moins rapide la convergence vers l’optimum global).

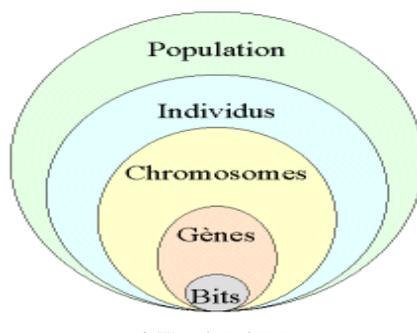


Figure I.11. Les cinq niveaux d’organisation dans l’algorithme génétique (<http://pro.chemist.online.fr/cours/ag1.htm>).

Étape 2 : Fonction objective

La fonction objective est la fonction d'optimisation qui mesure la qualité de l'individu exprimée sous forme d'un nombre ou d'un vecteur.

Étape 3 : Sélection

La sélection est un opérateur clé sur lequel repose en partie la qualité d'un algorithme évolutionnaire. Après l'évaluation de la fonction objective, on peut la calculer pour l'ensemble des solutions de la population courante. Ces valeurs sont utilisées ces valeurs pour réaliser la sélection. En effet, la sélection permet d'identifier statistiquement les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais. On trouve dans la littérature un nombre important de principes de sélection(Haupt and Haupt 2004; Sivanandam and Deepa 2007).

Étape 4 : Croisement et mutation des gènes

Pour explorer de nouvelles possibilités dans l'espace des solutions, il est essentiel de créer de nouveaux individus. Les processus sont basés sur ceux de la nature : le croisement et la mutation des gènes.

Le croisement est une des étapes importantes de l'algorithme génétique figure I.12. C'est l'instrument majeur des innovations au sein de l'algorithme, c'est lui qui insuffle le changement. Un taux de croisement p_c est utilisé pour déterminer les individus qui seront croisés. Lorsque deux parents sont sélectionnés, les chromosomes de chaque parent sont séparés en deux à un emplacement aléatoire et chaque partie est ajoutée à celle de l'autre parent pour former deux enfants.

Au début de la recherche, quand les solutions sont plutôt différentes, le croisement a un rôle d'exploration, car la combinaison des solutions produit des solutions placées aux endroits non encore visités pendant la recherche. Par contre, à la fin de la recherche, les parents sont similaires, ce qui produit des enfants similaires, accordant au croisement un rôle plutôt d'intensification(ou d'exploitation) (Haupt and Haupt 2004; Sivanandam and Deepa 2007; Shopova and Vaklieva-Bancheva 2006; Mais et al., n.d.; Eiben and Smith 2003).

Après le croisement, un opérateur de mutation est appliqué au sein de la population des enfants (figure 12). Cet opérateur joue le rôle d'un (élément perturbateur). Il introduit du (bruit). Il permet ainsi de maintenir la diversité de la population des enfants et d'explorer l'espace de recherche en évitant à l'algorithme de converger trop rapidement vers un optimum local. Généralement, L'opérateur de mutation modifie de manière complètement aléatoire les caractéristiques d'un ou plusieurs individus de la population des enfants. Il modifie un ou plusieurs gènes pour passer d'une solution à une autre solution de forme similaire mais qui peut avoir une évaluation totalement différente (Haupt and Haupt 2004; Sivanandam and Deepa 2007; Shopova and Vaklieva-Bancheva 2006; Mais et al., n.d.; Eiben and Smith 2003).

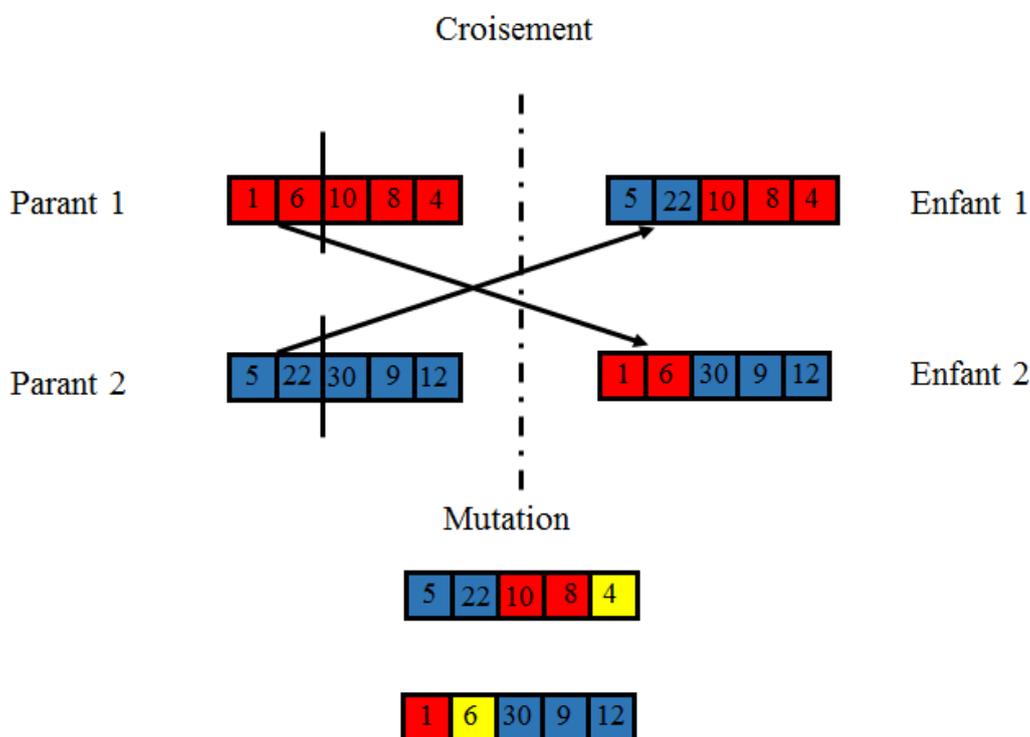


Figure I.12. Les opérations sur l’algorithme génétique.

Une fois toutes ces étapes complétées, une nouvelle génération a été créée. L'évolution se poursuit pour un nombre donné d'itérations.

Chapitre II.

Contrôle actif de vibrations d'une poutre FGM

Dans ce chapitre, un modèle éléments finis de poutre en matériaux à gradient de propriétés (FGM) munie des couches piézoélectriques est développé à partir de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Le choix du champ de déplacement conduit à un élément fini avec huit degrés de liberté. Les éléments finis sont implémentés sous MATLAB et validés à travers des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature.

II.1 Processus de modélisation

II.1.1 Lois de comportement de matériau FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Plusieurs lois sont utilisées pour décrire les propriétés de FGM tel que, la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM). Les propriétés matérielles effectives, tel que le module de Young E_{fgm} , et la masse volumique ρ_{fgm} , peuvent être exprimés par :

$$\begin{cases} E_{fgm}(z) = (E_c - E_m)V_c^{Rn} + E_m \\ \rho_{fgm}(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c^{Rn} + \rho_m \\ V_c = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^{Rn} \end{cases} \quad (II.31)$$

Où E_c, E_m, ρ_c, ρ_m sont respectivement, les modules et les masses volumiques correspondants à la céramique et au métal, et le Rn est le paramètre de matériau. V_c est la fraction volumique de la classe P-FGM.

II.1.2 Lois de comportement de matériau piézoélectrique

De nombreux ouvrages présentent les équations constitutives des matériaux piézoélectriques. Les vecteurs de contraintes $\{\sigma\}$ et de déformations $\{\varepsilon\}$ et les vecteurs de champ électrique $\{E\}$ et de déplacement électrique $\{E\}$ sont reliés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

où $[e]$ représente la matrice des constantes piézo-électrique reliant les champs électriques et les contraintes, $[Q]$ est la matrice de rigidité élastique mesurée a champ électrique constant et $[\epsilon]$ est la matrice des constantes diélectriques obtenues a déformation constante.

Dans le cas de la poutre, les équations piézoélectriques sont fondées sur les hypothèses suivantes :

On considère que les contraintes dans la direction y figure II.1 ne contribuent pas à l'énergie électromécanique Par conséquent, il est possible de définir :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_y = \tau_{xy} = 0$$

Du moment qu'il s'agit de la flexion de poutres FGM, il est possible de définir :

$$E_x = E_y = 0$$

Les lois de comportement réduites s'écrivent donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & -e_{31} \\ 0 & Q_{55} & 0 \\ e_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

II.1.3 Description cinématique de la structure intelligente (FGM+piezoe)

D'après les hypothèses de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT), les champs de déplacements sont décrits par (Junuthula N. Reddy 1984; Zorić et al. 2012)

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\varphi_x(x, t) - z^3 \frac{4}{h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

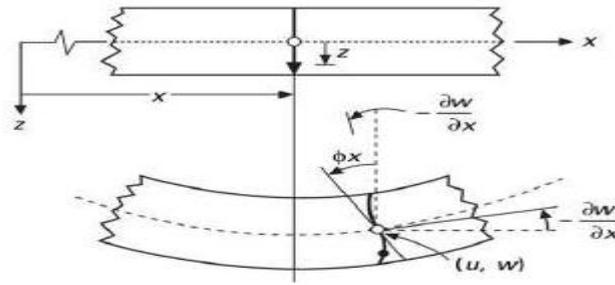


Figure II.1. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.

Les relations déformations – déplacements pour la poutre FGM sont décrites par :

$$\begin{aligned} \Omega &= z^3 \frac{4}{h^2} \\ \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^0 + z\epsilon_{xx}^1 - \Omega\epsilon_{xx}^3 \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 - z^2 \frac{4}{h^2} \gamma_{xz}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

ou

$$\epsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \epsilon_{xx}^1 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad \epsilon_{xx}^3 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{II.36})$$

$$\gamma_{xz}^0 = \gamma_{xz}^2 = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

Les équations de déplacement et de déformation sont exprimées sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z\alpha \frac{\partial}{\partial x} & z - \Omega \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Or $\{u\} = [A](u_l)$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & -\Omega \\ 0 & 1 & 0 & z^2 \frac{4}{h^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \varepsilon_{xx}^1 \\ \gamma_{xz}^2 \\ \varepsilon_{xx}^3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Or $\{\varepsilon\} = [H](\varepsilon_l)$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \varepsilon_{xx}^1 \\ \gamma_{xz}^2 \\ \varepsilon_{xx}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

$\{\varepsilon\} = [L](u_l)$

II.1.4 Discrétisation par éléments finis

En considérant que les champs électriques dans les couches piézoélectriques sont imposés, c'est-à-dire, ces dernières agissent en tant qu'actionneurs. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'ajouter des ddls électriques. Les déplacements généralisés $\{u_e\} = \{u, w, \varphi_x, \frac{\partial w}{\partial x}\}$ sont discrétisés par :

$$N = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & \theta_1'(\frac{l_e}{2}) & 0 & \theta_2 & 0 & \theta_2'(\frac{l_e}{2}) \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.400})$$

Nest la matrice d'interpolation définie par les fonctions de forme.

Avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1-\gamma)/2, \quad \xi_2 = (1+\gamma)/2 \\ \theta_1 &= 1/4(1-\gamma)^2(2+\gamma), \theta_2 = 1/4(2-\gamma)(1+\gamma)^2 \\ \theta_1' &= 1/4(1-\gamma)^2(1+\gamma), \theta_2' = -1/4(1-\gamma)(1+\gamma)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.411})$$

ou

$$\gamma = 2\frac{x}{l_e} - 1 \quad (\text{II.422})$$

l_e est la longueur de l'élément.

II.1.5 Formulation variationnelle

Le principe d'Hamilton s'écrit entre deux instants t_1 et t_2 pour un système continu est donné par:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - \boldsymbol{\psi} + W] dt = 0 \quad (\text{II.43})$$

T est l'énergie cinétique, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dv \quad (\text{II.44})$$

$\boldsymbol{\psi}$ est l'énergie potentielle elle s'écrite comme suit :

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (\text{II.45})$$

W^e est le travail fait de la force $\{f_b\}$ et est défini de la façon suivante :

$$W^e = \int_{V_e} \{u\}^T \{f_b\} dv + \int_{s_e} \{u\}^T \{f_s\} ds + \{u\}^T \{f_c\} \quad (\text{II.46})$$

Le vecteur de champ électrique $\{E\}$ peut être exprimé sous la forme :

$$\{E\} = -\nabla\phi \quad (\text{II.47})$$

∇ est l'opérateur différentiel ou la placien.

Le champ électrique $\{E\}$ devient :

$$\{E\} = [0 \ 0 \ 1/h_a]^T V^e = [L_\phi] V^e \quad (\text{II.48})$$

En utilisant les expressions (II.14), (II.15) et (II.16) et en assemblant les contributions élémentaires de tous les éléments, la formulation variationnelle (II.13), exprimée sous forme matricielle, fournit les équations de mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\}^e + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} + \{K_{me}\}\{V\}_a + \{K_{me}\}\{V\}_s &= \{F_m\}\{K_{me}\}_A^T \{u\} - [K_e]_a \{V\}_a \\ &= -[K_e]_a \{V\}_{aa} \\ \{K_{me}\}_s^T \{u\} - [K_e]_s \{V\}_s &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Ou les matrices $[M]$ et $[C]$ sont les matrices globales de masse et d'amortissement visqueux et $\{F_m\}$ est les vecteurs globaux de chargement mécanique.

$[K]$ est la matrice de rigidité de la structure, composée de contributions de la poutre FGM et de la couche piézoélectrique.

$\{K_{me}\}$ et $[K_e]$ sont les matrices de rigidité élémentaires piézoélectrique.

$\{V\}_a$ est le potentiel imposé, correspondant aux actionneurs piézoélectriques, et $\{V\}_s$ est le potentiel mesuré. Les termes des équations de mouvement sont donnés sous la forme :

$$[M] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \rho [N]^T [A]^T [A] [N] b dx dz \quad (\text{II.50})$$

$$[K] = \int_{-h/2}^{-h/2} \int_0^L [B]^T [H]^T [C] [H] [B] b dx dz \quad (\text{II.51})$$

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (\text{II.52})$$

$$[K_{me}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \int_0^L [B]^T [H]^T [e] [L_\phi] b dx dz \quad (\text{II.53})$$

$$[K_e] = \int_{-h/2}^{-h/2} \int_0^L [L_\phi]^T [k] [L_\phi] b dx dz \quad (\text{II.54})$$

$$\{V\}_s = K_e^{-1} K_{me} \{u\} \quad (\text{II.55})$$

$$\{V\}_a = Gv \{\dot{V}\}_s \quad (\text{II.56})$$

$$\{V\}_{aa} = [K_{me}]_a \{u\} - Gv [K_e]_a [K_e]_s^{-1} [K_{me}]_s \{\dot{u}\} \quad (\text{II.57})$$

II.1.6 Intégration numérique

La solution de L'équation du mouvement (II.19) n'est facile que pour les éléments les plus simple. Il est donc préférable d'utiliser une méthode d'intégration numérique. La méthode de Newmark, est une méthode explicite, qui permette de construire la solution à l'instant $t + \Delta t$ à partir des vecteurs connus $\{u\}, \{\dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$. Elle utilise les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1 - \bar{\alpha})\{\ddot{u}\}_t + \bar{\alpha}\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}] \\ \{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\bar{\beta})\{\ddot{u}\}_t + 2\bar{\beta}\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}] \nabla t^2 \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Où : $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont des paramètres qui sont déterminés pour obtenir l'exactitude et la stabilité du schéma d'intégration. En fait, le paramétré $\bar{\beta}$ contrôle la variation de l'accélération pendant l'incrément de temps Δt . La méthode Newmark est inconditionnellement stable pour $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}, \bar{\beta} = \frac{1}{2}$.

II.1.7 *Rétroaction directe des vitesses (DVF)*

On propose d'analyser dans cette section une loi de contrôle très simple de rétroaction directe des vitesses (DVF). Dans ce cas, puisque l'effort de contrôlé est proportionnel à une combinaison des dérivées temporelles de quelques variables du modèle éléments finis, le contrôleur n'ajoute qu'une matrice d'amortissement au système.

A partir de l'équation. (II.28), le potentiel électrique de sortie du capteur est donnée par

$$\{V\}_s = K_e^{-1} K_{me} \{u\} \quad (\text{II.59})$$

Et la loi de commande est donnée par

$$\{V\}_a = Gv \{\dot{V}\}_s \quad (\text{II.60})$$

Ou Gv est le gain de contrôleur (DVF).

Substituer les équations. (II.29) et (II.30) dans l'équation. (II.28), la tension de contrôle imposé à l'actionneur peut s'exprime sous la forme suivante :

$$\{V\}_{aa} = [K_{me}]_a \{u\} - Gv [K_e]_a [K_e]_s^{-1} [K_{me}]_s \{\dot{u}\} \quad (\text{II.61})$$

II.2 Applications

Cette section consiste, dans un premier temps, à présenter une analyse numérique des vibrations de la poutre FGM avec des couches piézoélectriques, pour le cas de l'analyse modal, suivie de quelques résultats de performance du contrôle actif.

II.2.1 *Validation du modèle*

Considérons une configuration de poutre FGM encastree-libre. Les propriétés du matériau de la poutre intelligente sont données dans le tableau II.1.

Table II.1 Les propriétés des matériaux

propriétés	Aluminium	Zirconia	PZT G-1195
Module de Young E (N/m ²)	70×10 ⁹	151×10 ⁹	6.1×10 ¹⁰
Coefficient de poisson	0.3	0.3	0.35
Masse volumique ρ(kg/m³)	2702	3000	7750
Rigéité (GPa)			
E11			61.0
E22			61.0
E33			53.2
G12			22.6
G13			21.1
G23			21.1
Constantes piézoélectriques (C/m²)			
e31	-	-	6.5
e33			23.3
e15			17
Constantes diélectriques (F/m)			
g11			1.53×10 ⁻⁸
g22			1.53×10 ⁻⁸
g33			1.5×10 ⁻⁸

Afin de valider le modèle proposé, une analyse modal a été effectuée Les fréquences non-dimensionnelles sont calculées par l'expression suivante(Şimşek 2010) :

$$\lambda = \frac{\omega L b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (\text{II.32})$$

Les fréquences propres correspondantes sont calculés pour $Rn = 0, 0.5, 1, 2, 5$ et 100 avec $L / h = 20$ et 5, respectivement. Les résultats sont ensuite comparés à ceux obtenue en affectant des simulations sous Ansys et des résultats de la littérature (Şimşek 2010; Wattanasakulpong and Ungbhakorn 2012)et Ansys. Tous les résultats sont présentés dans les tableaux II.2 et II.3. On observe que les résultats sont cohérents et presque identiques démontrant l'exactitude et la validité de notre méthode.

Table II.2 Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM pour $L/h = 20$.

	Al_2O_3	$Rn = 0.2$	$Rn = 0.5$	$Rn = 1$	$Rn = 2$	$Rn = 5$	$Rn = 10$	Al
MEF (développé)	1.9520	1.8163	1.6622	1.5027	1.3712	1.3052	1.2665	1.0206
Simsek (2010)	1.9524	1.8171	1.6626	1.5029	1.3714	1.3057	1.2671	1.0129
Nuttawit <i>et al.</i> (2012)	1.953	1.816	1.663	1.504	1.372	1.307	-	1.015
Ansys	1.938	1.7799	1.6344	1.5114	1.4158	1.3314	1.2780	1.1807

Table II.3. Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM pour $L/h = 5$

	Al_2O_3	$Rn = 0.2$	$Rn = 0.5$	$Rn = 1$	$Rn = 2$	$Rn = 5$	$Rn = 10$	Al
MEF (développé)	1.9216	1.7891	1.6379	1.4982	1.3493	1.2805	1.2415	1.0047
Simsek (2010)	1.9384	1.8041	1.6505	1.4913	1.35985	1.2941	1.2564	1.00720
Ansys	1.9117	1.7803	1.6564	1.5171	1.3664	1.2820	1.1951	1.0132

Dans le cas de poutre FGM avec une couche de matériau piézoélectrique collée sur sa surface supérieure (figure 2), les fréquences fondamentales pour les cinq premiers modes sont présentées dans le Tableau 4. Les effets de l'indice de puissance (Rn) sur les cinq premières fréquences fondamentales de la poutre sont présentés sur la figure. 3.

Table II.4 Les fréquences propres (Hz) de la poutre FGM $L/h = 30$ avec des couches piézoélectriques.

Mode	Al_2O_3	$Rn = 0.2$	$Rn = 0.5$	$Rn = 1$	$Rn = 2$	$Rn = 5$	$Rn = 10$	Al
1								
MEF (développé)	1.9023	1.7709	1.6233	1.4725	1.3496	1.2875	1.2501	1.0704
Ansys	1.8704	1.7633	1.6189	1.4926	1.3363	1.272	1.238	1.0622
2								
MEF (développé)	11.866	11.049	10.13	9.1873	8.4152	8.0157	7.7788	6.6705
Ansys	11.62	10.952	10.043	9.2541	8.2846	7.8891	7.6804	6.5985
3								
MEF (développé)	32.981	30.724	28.175	25.548	23.376	22.21	21.536	18.514
Ansys	32.164	30.293	27.715	25.51	22.831	21.751	21.183	17.085
4								
MEF (développé)	58.494	55.79	52.615	48.752	44.142	38.389	35.114	30.946
Ansys	58.551	55.444	50.703	46.75	41.985	40.158	39.181	34.024
5								
MEF (développé)	63.967	59.629	54.72	49.717	45.454	42.939	41.568	35.835
Ansys	62.097	58.415	53.263	48.947	43.78	41.729	40.664	37.133

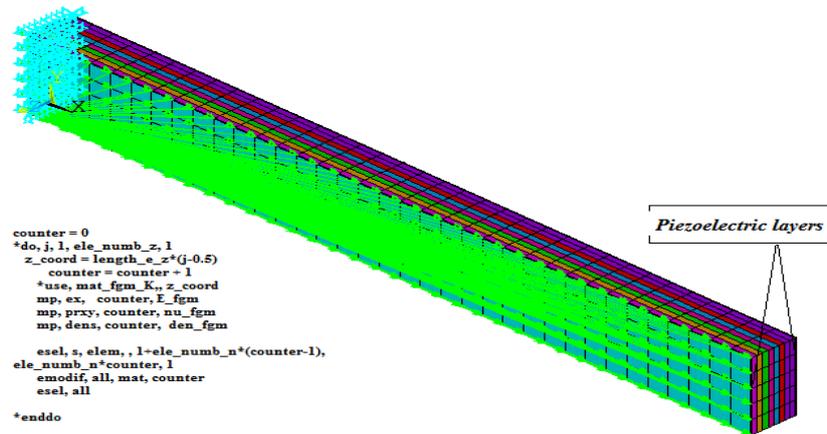


Figure II.2. Propriétés géométriques de la poutre FGM avec actionneur et capteur piézoélectriques collés sur ses surfaces (Ansys).

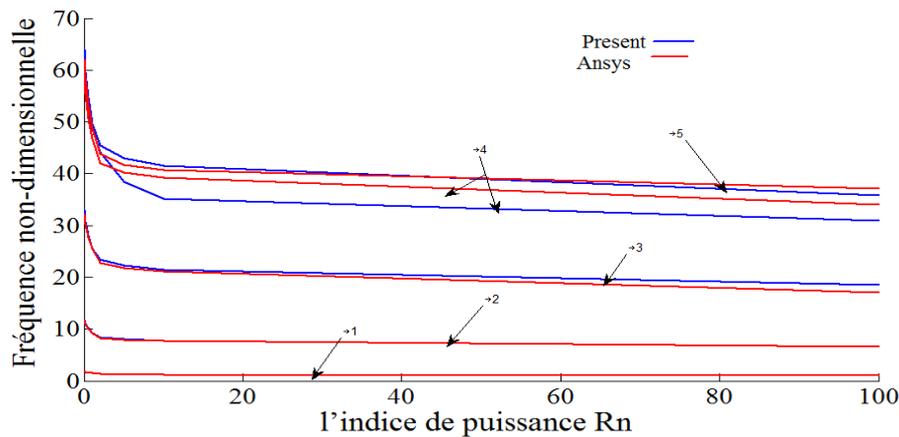


Figure II.3. Effets de l'indice de puissance (Rn) sur les cinq premières fréquences.

II.2.2 Contrôle actif des vibrations

Afin d'améliorer activement l'amortissement des trois premiers modes, la couche piézoélectrique collée sur la surface supérieure de la poutre FGM est associée à la stratégie de contrôle (rétroaction directe des vitesses (DVF)).

Dans un premier temps, la poutre est excitée par une force de perturbation transversale concentrée ($f = 5 \times 10^4 \text{N}$), appliquée à son extrémité libre. Les analyses sont effectuées à

l'aide de la technique Newmark-Beta. Les paramètres d'intégration $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont égale à 0,5 et 0,25 (Muradova and Stavroulakis 2013). Tous les calculs pour une réponse transitoire sont réalisés avec un incrément de temps de 0,01 s. On propose dans cette section pour trois gains de contrôle ($G_v=0.1, 0.2, \text{ et } 0.3$).

La figure (II.4) présente la réponse transversale transitoire de l'extrémité libre de la poutre pour $Rn = 0.2$ avec les trois gains de contrôle considérés. Elle permet, particulièrement, d'analyser le comportement dynamique de la poutre. Ainsi, on observe que la réponse s'atténue beaucoup plus rapidement en boucle-fermée. En effet, les amplitudes maximale de la poutre en boucle-fermée pour $G_v=0.1, 0.2, \text{ et } 0.3$ sont réduits de (2.7%), (11%) et (25%), respectivement, par rapport à ceux en boucle ouverte. Les tensions de contrôle imposées à l'actionneur sont présentées dans la figure (II.5).

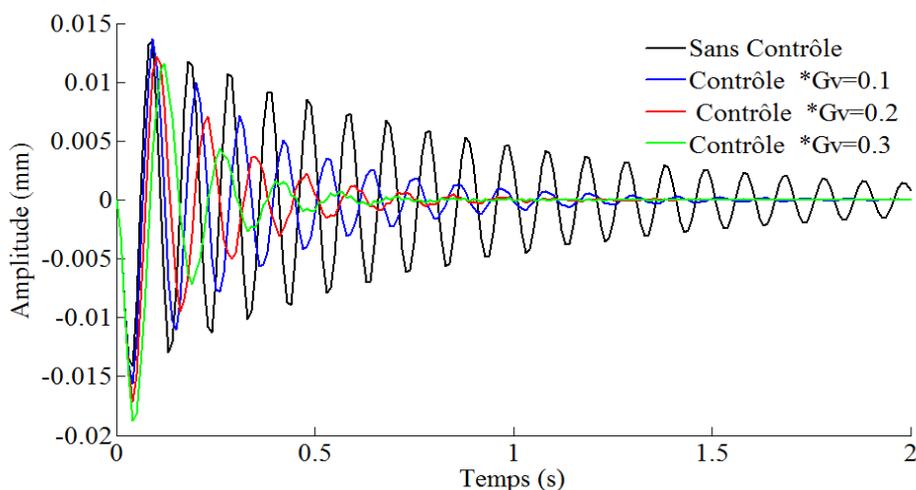


Figure II.4. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 0.2$).

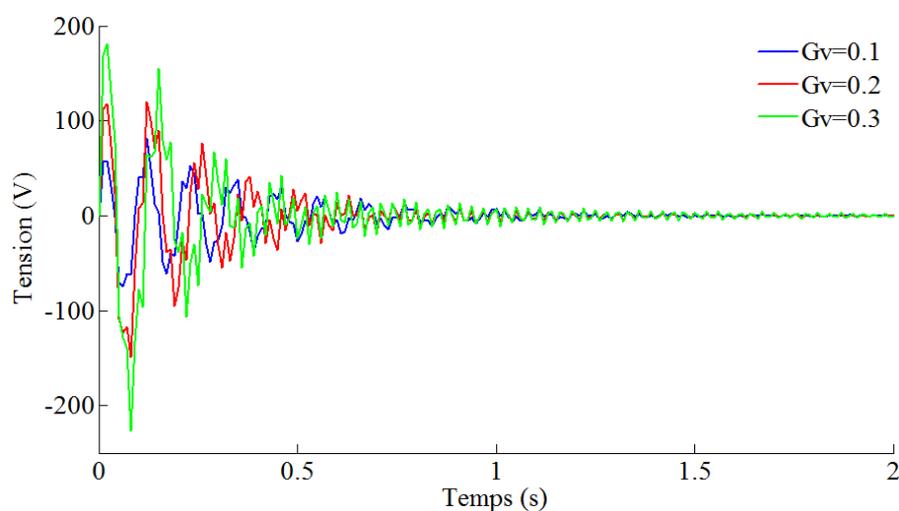


Figure 5. Tensions de contrôle (cas $Rn = 0.2$).

Les réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la poutre dans le cas ($Rn = 1$), pour les trois gains de contrôle considérés, sont présentées dans la Figure (II.6). On remarque que la réponse vibratoire de la poutre est rapidement atténuée avec la méthode présentée. Les coefficients d'amortissements sont 1.2%, 4.4% et 9.6% pour $Gv=0.1$, 0.2, et 0.3, respectivement. Les tensions de contrôle imposées à l'actionneur sont présentées dans la figure (II.7).

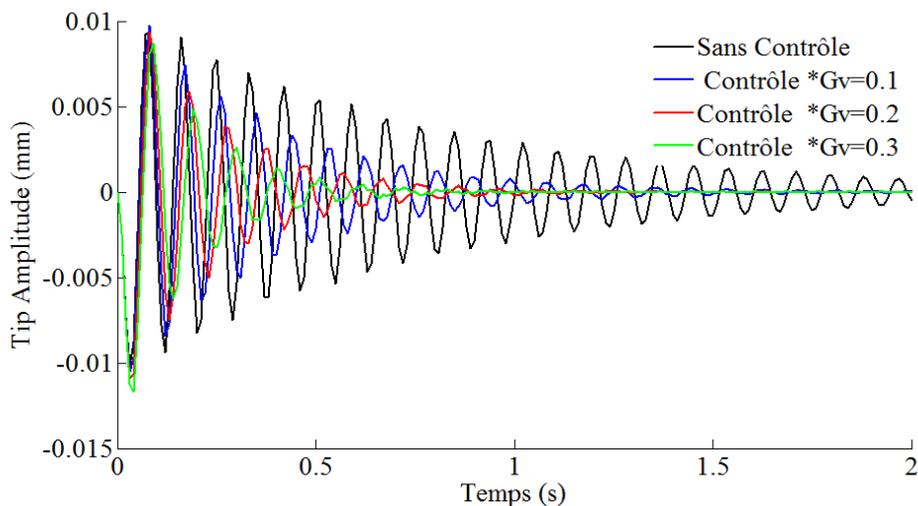


Figure 6. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 1$).

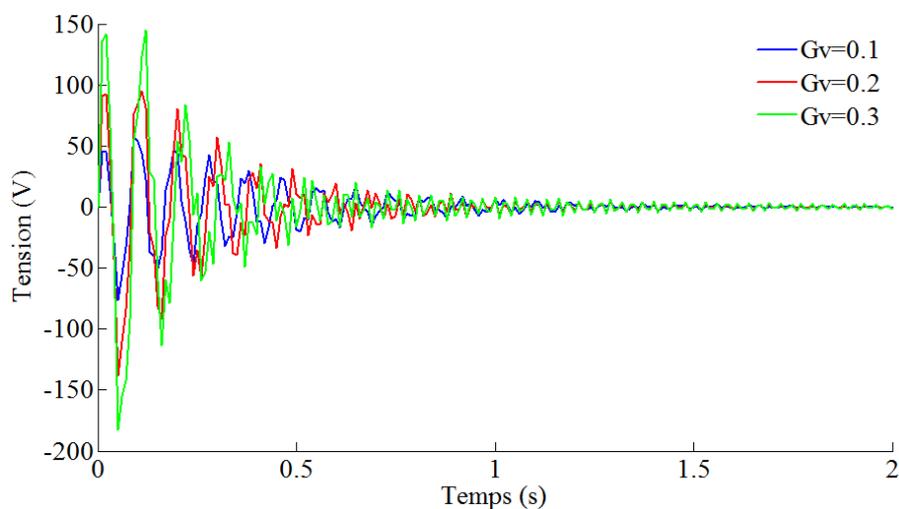


Figure II.7. Tensions de contrôle (cas $Rn = 1$).

Les réponses transitoires de la poutre, avec et sans contrôlé actif dans le cas ($Rn = 5$), sont analysées et présentées dans la figure (II.8). On note que les vibrations transversales de la poutre sont atténuées, pour les trois gains de contrôle. En effet, le pourcentage d'amortissement additionnel fourni par le system de contrôle est 1.1% pour $Gv=0.1$, 2.3% pour $Gv=0.2$ et 5.5% pour $Gv=0.3$. La tension dans l'actionneur piézoélectrique pour les trois contrôleurs est présentée dans la figure (II.9).

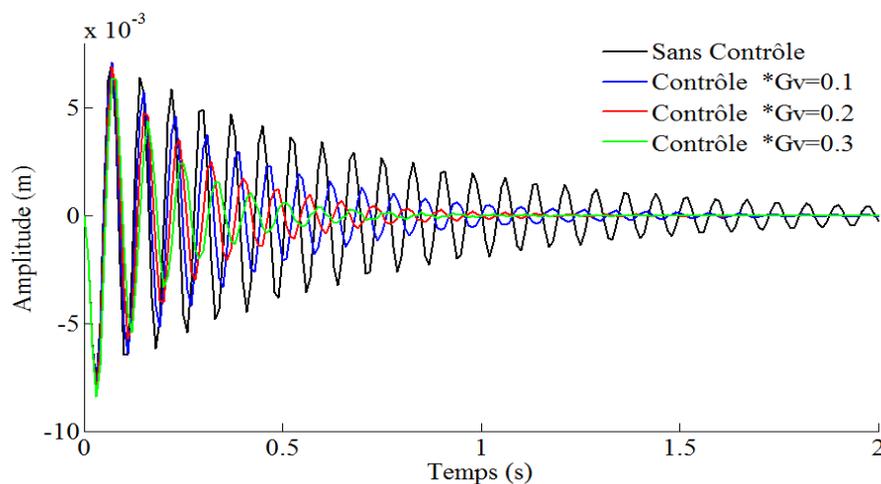


Figure II.8. Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 5$).

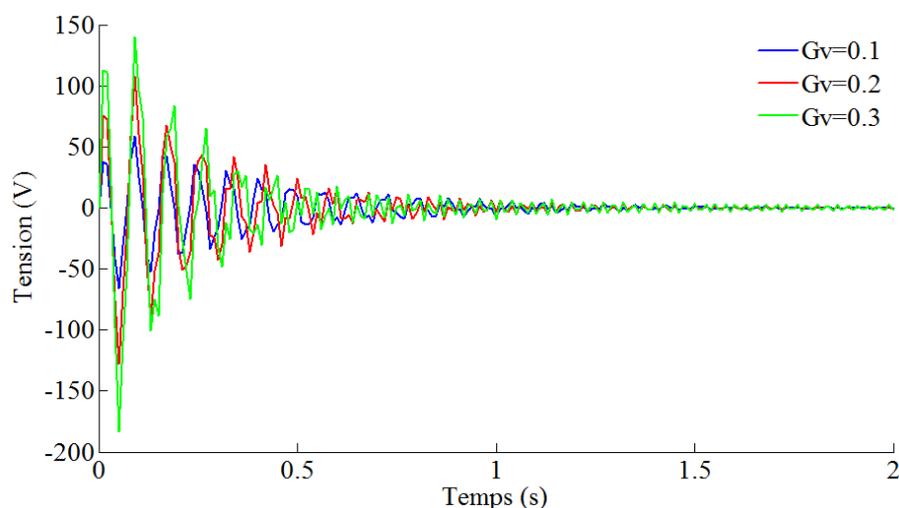


Figure II.9. Tensions de contrôle cas ($Rn = 5$).

La figure (II.10) montre les coefficients d'amortissements calculés pour les trois gains de contrôle. Les coefficients d'amortissements sont représentés en fonction de l'indice de puissance. Il est clair d'après la figure que les vibrations s'annulent rapidement lorsqu'on augmente le taux du métal (Aluminium).

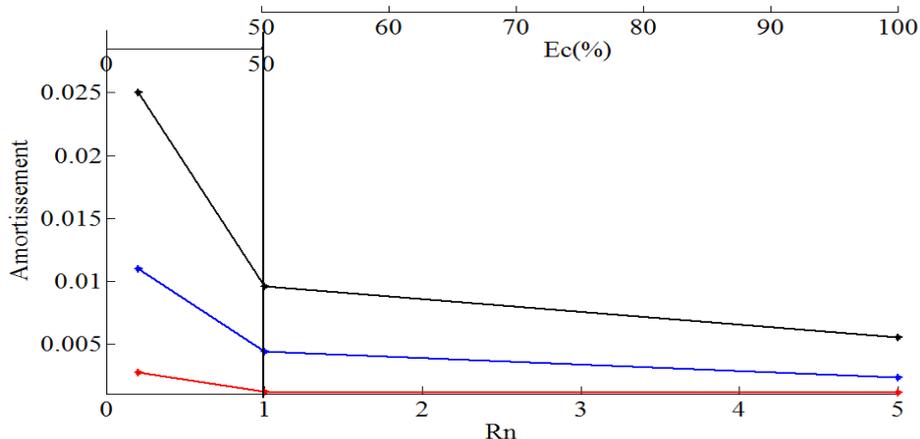


Figure II.10. Coefficient d'amortissement en fonction de l'indice de puissance.

Dans un deuxième temps, nous avons voulu vérifier l'efficacité de contrôle actif d'une poutre excitée par une force de perturbation harmonique ($q = 5 \times 10^4 \sin(\omega t)$), appliquée à son extrémité libre. Les mêmes propriétés et condition aux limites sont considérées. La

première simulation est effectuée avec $Rn = 0.2$. Le résultat est représenté sur la figure (II.11). Elle montre que les amplitudes sont diminuées de façon remarquable pour les trois gains de contrôle 0.1, 0.2, et 0.3. Les tensions de contrôle imposées à l'actionneur sont présentées dans la figure (II.12). Evidemment, la tension de contrôle augmente proportionnellement au gain.

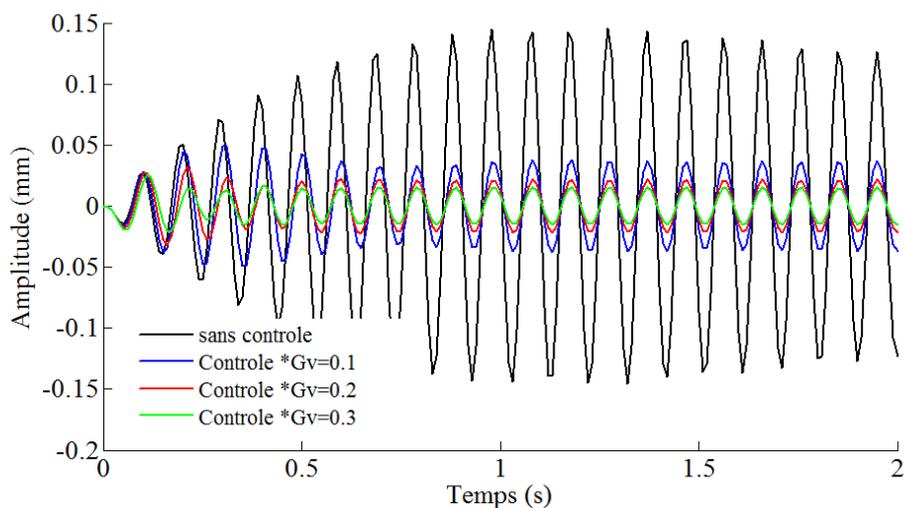


Figure II.11. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 0.2$).

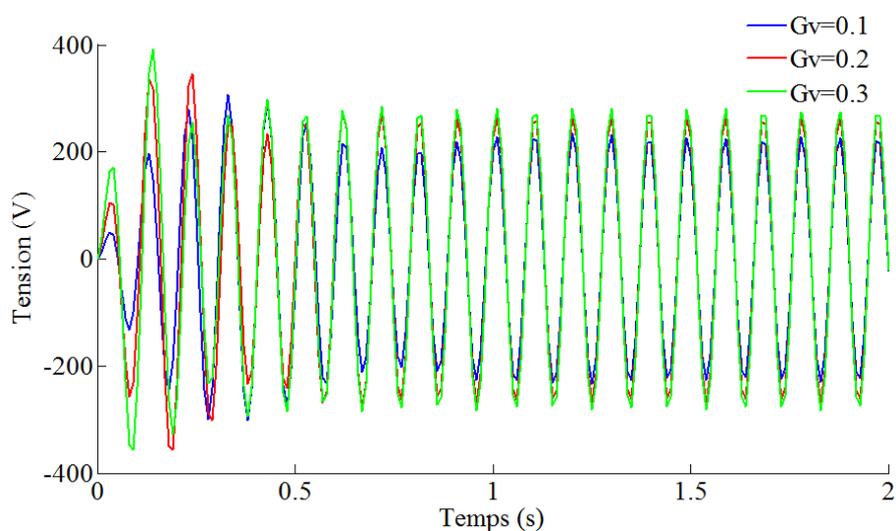


Figure II.12. Tensions de contrôle (cas $Rn = 0.2$).

Dans la deuxième simulation on prend $Rn = 1$. Les réponses en boucle-ouverte et en boucle-fermée de la poutre FGM sont présentées dans la figure (II.13) pour les trois gains de contrôle 0.1, 0.2, et 0.3. La figure montre que le contrôle permet de diminuer l'amplitude de des réponses vibratoires. On observe aussi, à travers figure que l'augmentation du gain de contrôle donne une meilleur réduction des amplitudes. La tension appliquée à l'actionneur piézoélectrique pour les trois gains de contrôle est présentée dans la figure (II.14).

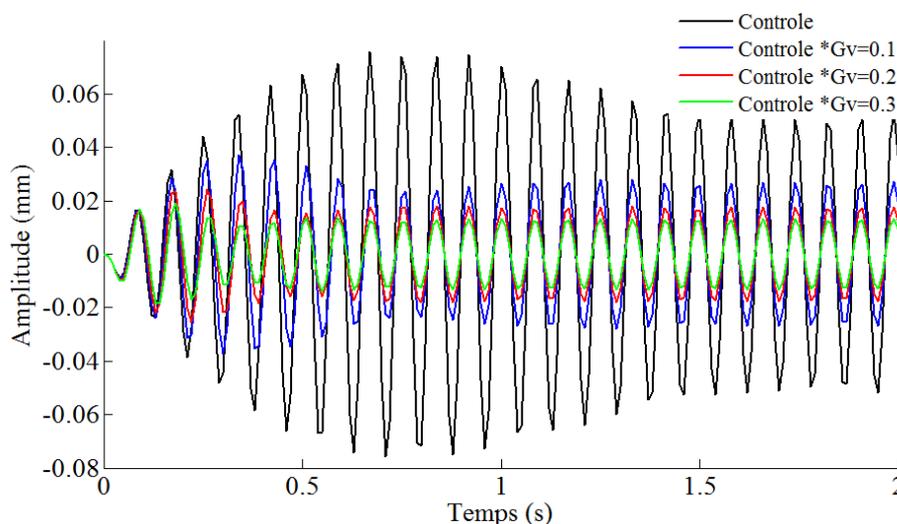


Figure II.13. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 1$).

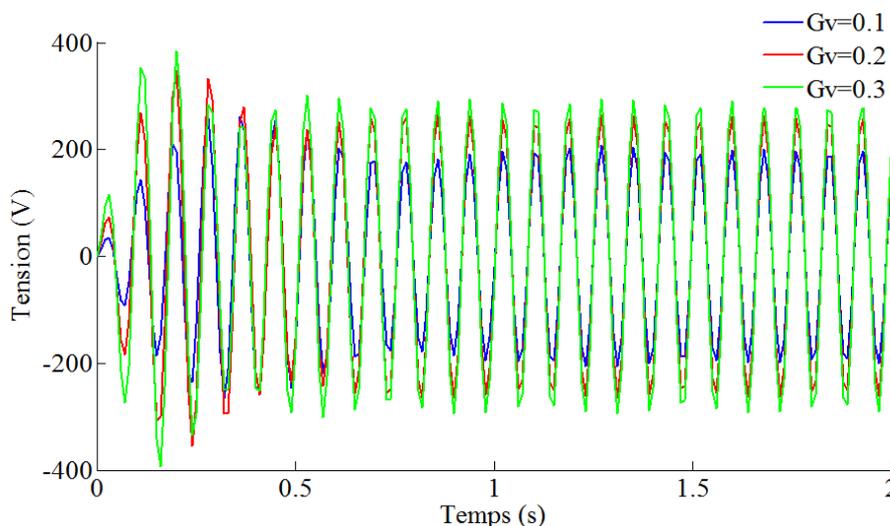


Figure II.14. Tensions de contrôle (cas $Rn = 1$).

Enfin, une dernière simulation est effectuée dans le cas où $Rn = 5$. La figure (II.15) présente les réponses en boucle-ouverte et en boucle-fermée, de la poutre FGM. La figure montre que les vibrations sont successivement réduites. La tension dans l'actionneur piézoélectrique pour les trois gains de contrôle est présentée dans la figure (II.16).

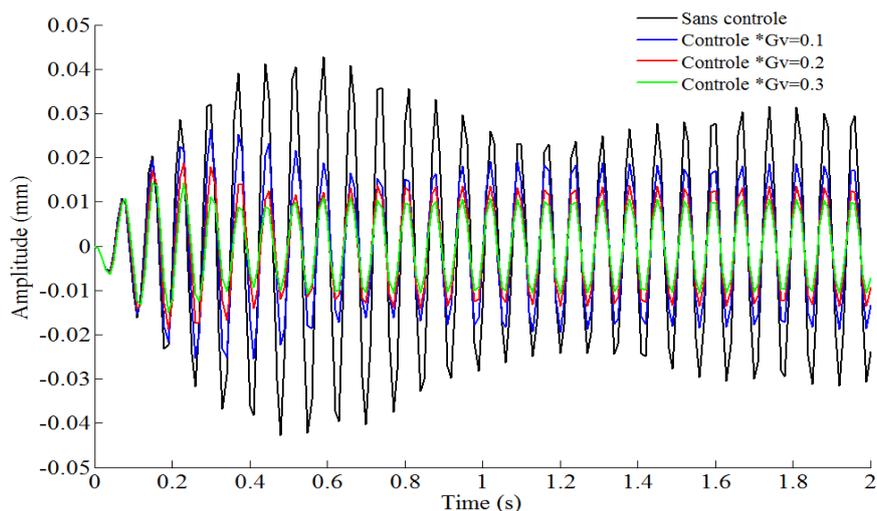


Figure II.15. Réponse harmonique de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour des différents gains de contrôle (cas $Rn = 5$).

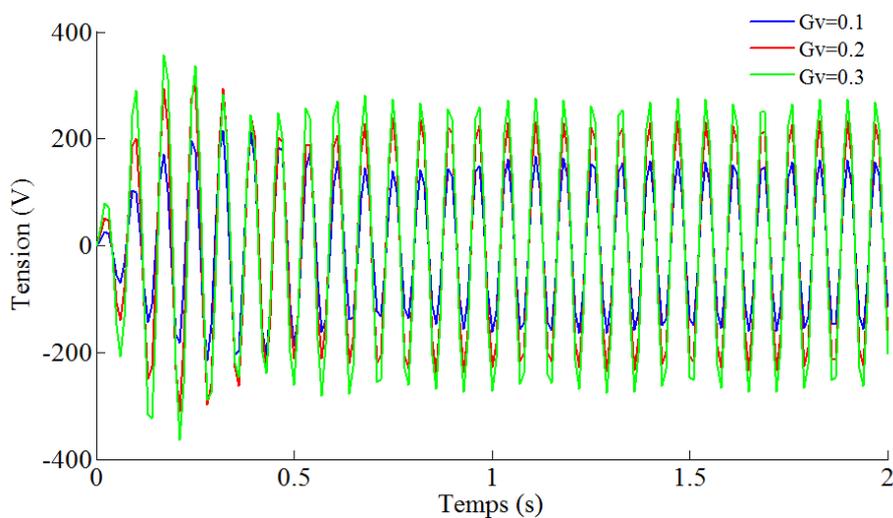


Figure II.16. Tensions de contrôle (cas $Rn = 5$).

Les pourcentages de réductions comme fonction du nombre de l'indice de puissance Rn sont présentés dans la figure (II.17). La figure confirme clairement les constatations précédentes à savoir une atténuation des amplitudes avec l'augmentation de Rn . Les taux de réduction enregistrés par les trois gains de contrôle dans le cas ou $Rn = 0.2$ sont 2%, 85% et 91%, respectivement. Pour $Rn = 1$, les réductions sont 62%, 77% and 82%. Enfin pour $Rn = 5$ les réductions sont 32% 40%, et 43%

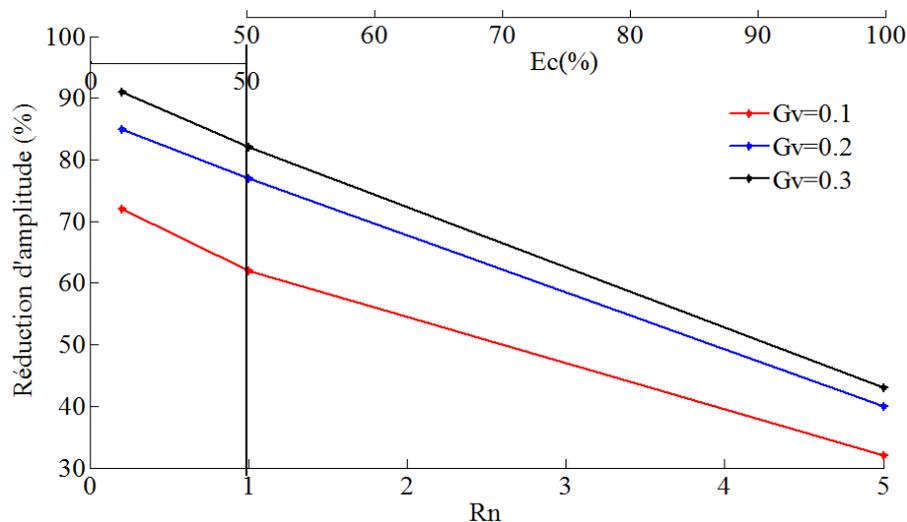


Figure II.17. La réduction d'amplitude en fonction d'indice de puissance.

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'étude du contrôle actif de vibrations d'une poutre FGM en utilisant une couche piézoélectrique. Un modèle éléments finis a été développé en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Le modèle est à 2 nœuds et 4 degrés de liberté mécaniques par nœud (le déplacement transversal, et sa dérivée, le déplacement axial et une rotation). Il a été validé par des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature. Un schéma de contrôle actif utilisant un algorithme de contrôle simple (rétroaction directe des vitesses (DVF)), consistant à envoyer la dérivée du signal du capteur amplifié à l'actionneur. Le système de contrôle a été ensuite appliqué à l'étude du contrôle actif d'une poutre FGM. Il est noté que la méthode proposée amortie de manière significative le temps et l'amplitude de réponse de la vibration transversale.

Chapitre III.

Contrôle actif de vibrations des plaques FGM

Dans ce chapitre, un modèle éléments finis de plaque FGM munie de couches piézoélectriques est développé à partir d’une formulation variationnelle. Par la suite, les éléments finis sont implémentés sous MATLAB et Ansys et validés à travers des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature. Deux types de contrôle (PID et LQR) sont appliqués au problème du contrôle actif.

III.1 Théorie classique des plaques (CPT)

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse Figure (III.1).

Selon La théorie classique des plaques (CPT), le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} U_1(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ U_2(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ U_3(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (III.62)$$

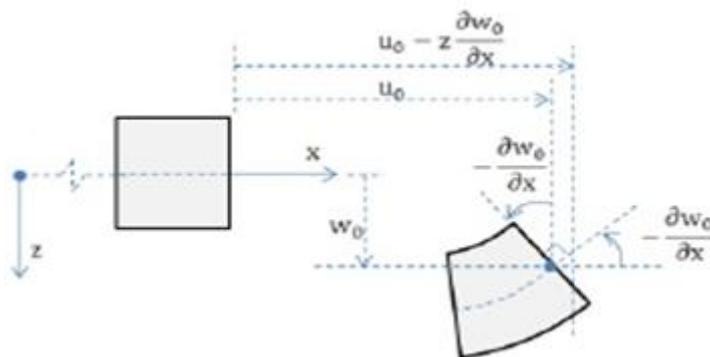


Figure III.1. Les assumptions de la théorie classique de la plaque

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l’équation (III.1) ($\text{cas } f(z) = z$) s’écrit :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}\}^T = -z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (\text{III.63})$$

III.1.1 Lois des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i V_i \quad (\text{III.64})$$

Avec \bar{P}_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{III.65})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$\bar{P} = \bar{P}_c V_c + \bar{P}_m V_m \quad (\text{III.66})$$

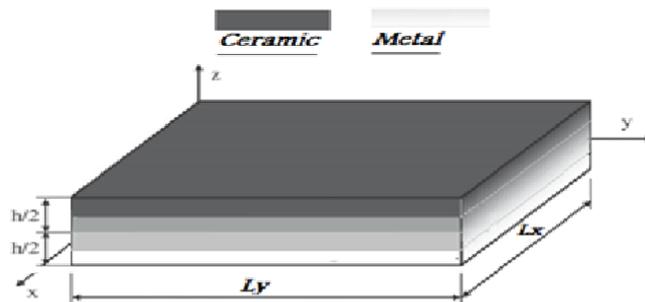


FIGURE 31. GEOMETRIE D'UNE PLAQUE FGM.

Figure III.2. Géométrie d'une plaque FGM

Dans ce travail on utilise La fraction volumique de la classe P-FGM, la fonction est donnée par :

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^{Rn} \quad (\text{III.67})$$

Où Rn est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fractionvolumique locale $V_c(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuventêtre déterminées par la loi des mélanges(He et al. 2001; Dai et al. 2005)

$$\begin{aligned} E_{fgm}(z) &= (E_c - E_m)V_c^{Rn} + E_m \\ \rho_{fgm}(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c^{Rn} + \rho_m \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

III.1.2 Lois de comportement

De nombreux ouvrages présentent les équations constitutives des matériaux piézoélectriques. Les vecteurs de contraintes $\{\sigma\}$ et de déformations $\{\varepsilon\}$ et les vecteurs de champélectrique $\{E\}$ et de déplacement électrique $\{D\}$ sont reliés comme suite (chapitre I) :

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \\ \{D\} = [e]\{\varepsilon\} - [\varepsilon]\{E\} \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

En supposant que le champ électrique $\{E\}$ est constant à travers l'épaisseur de l'actionneur, le vecteur de champ électrique $\{E\}$ peut être exprimé sous la forme :

$$\{E\} = \frac{1}{h_p} [0 \ 0 \ -1]^T \{\Delta\varphi\} = [B_\varphi]^T \{\Delta\varphi\} \quad (\text{III.70})$$

Pour un matériau isotrope, la relation entre contrainte plane $\{\sigma\}$ et le champ de déformation $\{\varepsilon\}$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

III.1.3 Discrétisation éléments finis

Nous considérons des éléments de type quadrilatère auxquels nous appliquons la formulation isoparamétrique. Dans un élément, chaque variable correspond aux valeurs du champ de déplacements aux nœuds. Des fonctions d'interpolation sont associées à chaque

nœud. Pour un élément à quatre nœuds, une variable du champ de déplacements peut alors être estimée à l'intérieur d'un élément avec la relation suivante:

$$U(x_i, y_i) = a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4x_i^2 + a_5x_iy_i + a_6y_i^2 + a_7x_i^3 + a_8x_i^2y_i + a_9x_iy_i^2 + a_{10}y_i^3 + a_{11}x_i^3y_i + a_{12}x_iy_i^3, i = 1 \dots 4 \quad (\text{III.11})$$

Les champs de déplacements sont décrits par :

$$U = p^T a \quad (\text{III.12})$$

Avec :

$$\{p\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 \ xy^3\}^T \quad (\text{III.13})$$

Et

$$\{a\} = \{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}\}^T \quad (\text{III.714})$$

Le vecteur déplacement de l'élément à 4 nœuds ayant trois degrés de liberté par nœud, est écrit sous la forme suivante :

$$\{d_e\} = \left\{ w_1 \frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \ w_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \ w_3 \frac{\partial w}{\partial y_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} \ w_4 \frac{\partial w}{\partial y_4} \frac{\partial w}{\partial x_4} \right\} \quad (\text{III.15})$$

En substituant les valeurs des coordonnées des quatre nœuds dans l'équation (III.6) devient :

$$\{d_e\} = \begin{bmatrix} p(0,0) \\ \frac{p(0,0)}{\partial x} \\ \frac{p(0,0)}{\partial y} \\ p(l_x,0) \\ \frac{p(0)}{\partial x} \\ \frac{p(l_x,0)}{\partial y} \\ p(l_x,l_y) \\ \frac{\partial x}{p(l_x,l_y)} \\ \frac{\partial y}{p(0,l_y)} \\ \frac{p(0,l_y)}{\partial x} \\ \frac{p(0,l_y)}{\partial y} \end{bmatrix} \{a\} = [PM]\{a\} \quad (\text{III.16})$$

l_x est la longueur de l'élément dans la direction x et l_y est la longueur de l'élément dans la direction y . Il est alors possible d'écrire le vecteur $\{a\}$ de la façon suivante :

$$\{a\} = [PM]^{-1}\{d_e\} \quad (\text{III.17})$$

Ce qui permet d'établir le déplacement en tout point de manière matricielle :

$$\{U\} = \{p\}[PM]^{-1}\{d_e\} \quad (\text{III.18})$$

Ou $\{N\} = \{p\}[PM]^{-1}$ sont les fonctions d'interpolation.

En utilisant l'équation (III.2), le vecteur des déformations généralisées est donné par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 p [PM]^{-1} \{d_e\}}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 p [PM]^{-1} \{d_e\}}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 p [PM]^{-1} \{d_e\}}{\partial xy} \end{Bmatrix} = [B]\{d_e\} \quad (\text{III.19})$$

III.1.4 Les matrices élémentaires

Les équations du mouvement sont calculées en utilisant le principe d'Hamilton.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \psi + W) dt \quad (III.20)$$

L'énergie potentielle totale de la plaque FGM avec deux couches piézoélectriques collés sur ces surfaces peut être exprimée comme suit :

$$\psi = \int_v \frac{1}{2} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\mathbf{E}\}^T \{\mathbf{D}\}) dv \quad (III.21)$$

Après substitution des équations (III.18), (III.19) et (III.8) dans l'équation (III.21), l'expression de l'énergie devient :

$$\begin{aligned} \psi = & \{\delta d_e\}^T [B]^T [\bar{D}] [B] \{d_e\} - \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T [e] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\delta \mathbf{E}\}^T [e]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \\ & - \{\delta \mathbf{E}\}^T [\boldsymbol{\varepsilon}]^T \{\mathbf{E}\} dv \end{aligned} \quad (III.22)$$

L'expression de l'énergie cinétique permet de calculer la matrice masse :

$$T = \int_v \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho} \{\dot{\mathbf{U}}\}^T \{\dot{\mathbf{U}}\} dv \quad (III.23)$$

La substitution d'équation (18) dans l'équation d'Hamilton (III.23) donne :

$$T = \int_v (\{\delta d_e\}^T \boldsymbol{\rho} [N]^T [N] \{d_e\} dv \quad (III.24)$$

Tenant compte d'équation (III.21) et l'équation (III.24) le principe d'Hamilton devient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \{ \{\delta d_e\}^T [[M] \{d_e\} + [K_e] \{d_e\} + [K_{me}] \{\boldsymbol{\varphi}\}_a - \{\mathbf{F}_m\}] + \{\delta \boldsymbol{\varphi}\} [[K_{me}]^T \{d_e\} \\ + [K_e]_a \{\boldsymbol{\varphi}\}] \} dt = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Ou

$$[M_e] = \rho \int_v [\{p\} [PM]^{-1}]^T [\{p\} [PM]^{-1}] dv \quad (III.26)$$

$$[K_e] = \int_v [B]^T [\bar{D}] [B] dA \quad (III.27)$$

$$[K_{me}] = \int_A [B]^T [e] [B_\varphi] dA \quad (III.28)$$

$$[K_{ea}, K_{es}] = \int_A [B_\varphi]^T [\epsilon_{a,s}] [B_\varphi] dA \quad (III.29)$$

Après réorganisation matricielle et tenant compte l'amortissement structural, deux équations d'équilibre écrites en coordonnées généralisées sont obtenues :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}\}^e + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + \{K_{me}\}\{\varphi\}_a + \{K_{me}\}\{\varphi^e\}_s = \{F_m\} \\ [K_{me}]_A^T \{u\} - [K_e]_a \{\varphi\}_a = -[K_e]_a \{\varphi\}_{aa} \end{cases} \quad (III.30)$$

Les équations du mouvement peuvent être transformées en forme d'espace d'état comme suite :

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -diag(\omega_k^2) & -2\xi_k \omega_k \end{bmatrix} \{X\} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu \Omega^T K_{me}^{(i)} \end{bmatrix} \{\varphi^{(ac)}\} \\ \{Y\} &= [K_{me}^{(i)T} \Omega \quad \mathbf{0}] \{X\} + [D] \{\varphi^{(ac)}\} \end{aligned} \quad (III.31)$$

III.1.5 Critère d'optimisation pour les matrices de pondération

Supposons un contrôle optimal quadratique, c'est à dire, dont la fonction coût J est quadratique sous la forme suivante :

$$J = \int_0^\infty (\{X\}^T [Q] \{X\} + \{\varphi\}^T [R] \{\varphi\}) dt = \min \quad (III.32)$$

Nous souhaitons optimiser la commande du contrôle des actionneurs piézoélectriques à l'aide d'un algorithme génétique. En effet, la construction de la commande LQR nécessite le choix des matrices [Q] et [R]. Les matrices [Q] et [R] peuvent être données par (Roy and Chakraborty 2009):

$$Q = \begin{bmatrix} X1\omega^2 & 0 \\ 0 & X2 \end{bmatrix}, \quad R = X3 \quad (III.33)$$

Par conséquent, un algorithme de recherche est nécessaire pour trouver Q et R en prenant X1, X2 et X3 en tant que variables pour parvenir à un amortissement le plus élevé possible de la façon suivante :

$$\xi_d = \max \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2}{p^2}\right)}} \right) \quad (\text{III.34})$$

Ou

$$p = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+1)} \right)$$

III.1.6 Modélisation Ansys

Le modèle numérique développé est basé sur la méthode des éléments finis. Le logiciel d'éléments finis utilisé est Ansys, version 15.5. Le programme développé pour effectuer l'analyse est présentée en annexe B du présent document.

Les propriétés (i.e valeurs du module de Young, de masse volumique et du coefficient de Poisson) du FGM sont calculées à l'aide de subroutine suivant par l'utilisation d'équation (III.7) :

```
*create, mat_fgm_K
  /nopr
z_coord = arg2
grad_common = (z_coord+0.5)**n_z
E_fgm      = (E_t-E_b)*grad_common + E_b
nu_fgm     = (nu_t-nu_b)*grad_common + nu_b
den_fgm    = (dens_t-dens_b)*grad_common + dens_b
/gopr
*end
```

Puis, au moyen de double boucle, on a modifié les propriétés matérielles des éléments.

```
counter = 0
*do, j, 1, ele_numb_z, 1
z_coord = length_e_z*(j-0.5)
counter = counter + 1
  *use, mat_fgm_K,,z_coord
mp, ex, counter, E_fgm
mp, prxy, counter, nu_fgm
```

```

mp, dens, counter, den_fgm

esel, s, elem, , 1+ele_numb_n*(counter-1), ele_numb_n*counter, 1
emodif, all, mat, counter
esel, all

*enddo
    
```

Les éléments de type SOLID45 sont utilisés pour la plaque FGM (figure III.3), ces éléments ayant trois degrés de liberté par nœuds sur les trois directions orthogonales (ux,uy et uz). Pour le couche piézoélectrique, nous considérerons un élément de type SOLID 5 à quatre degrés de liberté (ux, uy, uz, volt) par nœuds.

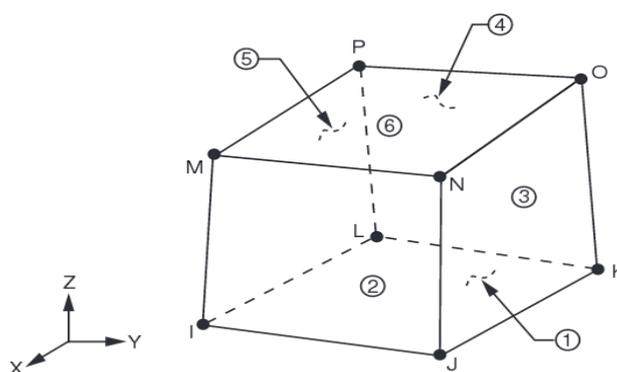


Figure III.3. Élément finis tridimensionnel de type solid (Ansys Inc)

III.2 Applications

Cette section consiste, dans un premier temps, à présenter une analyse numérique des vibrations des plaques FGM avec des couches piézoélectriques, pour le cas de l'analyse modal. Des résultats de performance du contrôle actif sont illustrés à la fin de la section.

III.2.1 Validation de modèle

Afin de démontrer la validité du modèle développé, les résultats trouvés sont comparés avec ceux de la littérature.

On considère une plaque FGM totalement recouverte avec une couche piézoélectrique sur les deux surfaces. La plaque est encastree sur une arête et les autres sont libres. La configuration géométrique de l'exemple considère est présentée dans la Figure (III.4)

l'épaisseur de chaque couche piézoélectrique est de 0,1 mm. Les propriétés des matériaux sont données dans le tableau (III.1). La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM est représentée sur la figure (III.5).

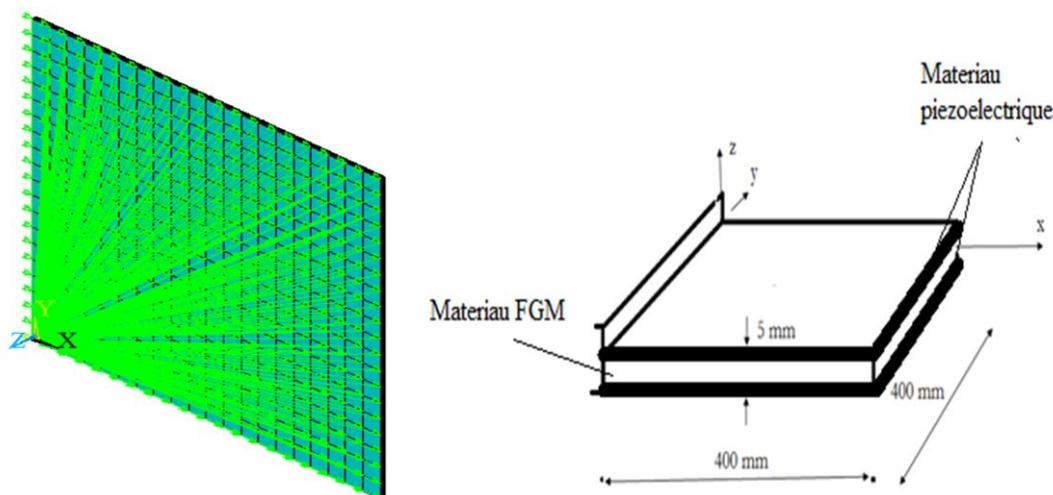


Figure III.4. Propriétés géométriques de la plaque FGM Avec actionneur et capteur piézoélectriques collés sur leurs surfaces

Tableau III.1 Les propriétés des matériaux.

Propriétés	oxyde d'Aluminium-	Ti-6A1-4V	PZT G-1195	PZT-5A
Module de Young E (N/m ²)	3.2024 x 10 ¹¹	1.0570 x 10 ¹¹	6.1 x 10 ¹⁰	63x10 ⁹
Coefficient de poisson	0.26	0.29	0.3	0.3
Masse volumique ρ(kg/m3)	3750	4429	7600	7750
constantes piézoélectriques (c/m ²)	-	-		
e 31			22.86	6.5
e 33			22.86	23.3
e 15			-	17
constantes diélectriques (F/m)				
g 11			1.5x10 ⁻⁸	1.53x10 ⁻⁸
g 22			1.5x10 ⁻⁸	1.53x10 ⁻⁸
g 33			1.5x10 ⁻⁸	1.5x10 ⁻⁸

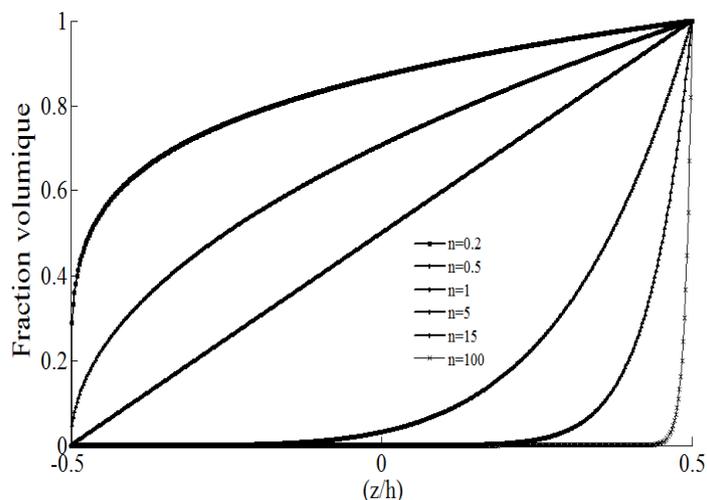


Figure III.5. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

Le Tableau 2 montre les fréquences propres de la plaque, calculées numériquement et comparées avec les résultats de la réf.(He et al. 2001). Les résultats numériques correspondent assez bien. Il est clair que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique, Ceci peut s'expliquer par le fait que la configuration FGM soit plus rigide lorsque on s'approche de titane (figure 5).

Tableau III.2 Les cinq premières fréquences propres (Hz) de la plaque FGM

l'indice de puissance (Rn)	Numéro de mode				
	1	2	3	4	5
0					
Q4 (Matlab)	24.69	68.10	160.48	202.10	243.54
Q8 (Matlab)	24.61	67.60	154.46	198.30	235.61
Ansys	25.68	63.00	158.51	202.02	230.48
He et al (2001)	25.58	62.75	157.20	200.19	228.22
0.2					
Q4 (Matlab)	28.94	79.81	188.07	236.85	285.41
Q8 (Matlab)	28.85	79.23	181.02	232.39	276.12
Ansys	28.89	71.02	178.42	227.23	259.66
He et al (2001)	29.87	73.67	183.97	233.88	267.51

1					
Q4 (Matlab)	36.48	100.60	237.06	298.55	359.76
Q8 (Matlab)	36.39	99.89	228.18	292.93	348.06
Ansys	37.02	91.52	229.01	291.26	333.98
He et al (2001)	35.33	87.52	218.04	276.89	317.43
15					
Q4 (Matlab)	45.48	125.40	295.48	372.13	448.42
Q8 (Matlab)	45.37	124.51	284.42	365.12	433.83
Ansys	46.78	116.44	289.96	368.35	423.90
He et al (2001)	43.97	109.48	271.63	344.76	396.11
100					
Q4 (Matlab)	46.52	128.29	302.29	380.71	458.76
Q8 (Matlab)	46.42	127.38	290.97	373.54	443.83
Ansys	46.78	116.44	289.96	368.36	423.90
He et al (2001)	46.55	116.00	287.60	365.00	419.55

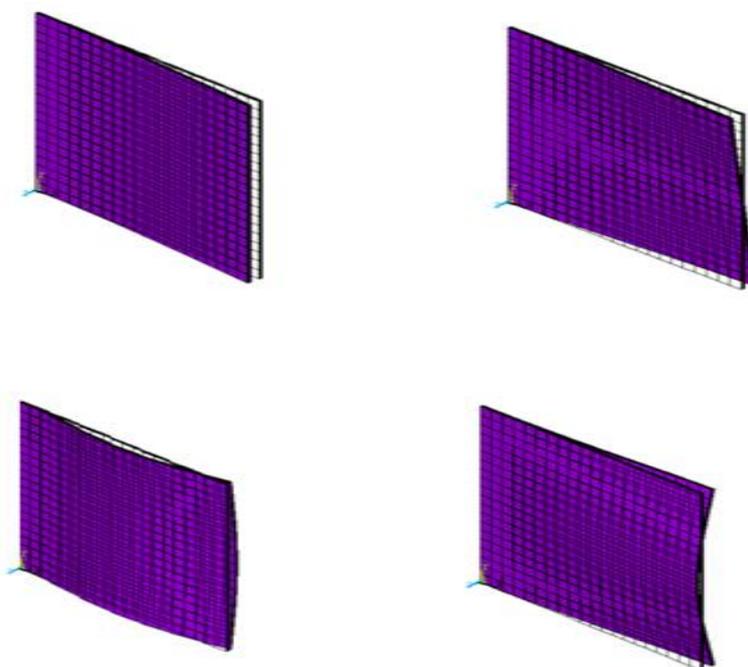


Figure III.6. Quatre premiers modes propres de la plaque FGM.

III.2.2 Détermination de paramètres de contrôle

La stratégie de contrôle LQR présentée précédemment est appliqués à l'étude du contrôle actif de plaque FGM à travers deux couches piézoélectriques collées symétriquement sur ses surfaces supérieure et inférieure. Les paramètres de la commande du contrôle sont optimisés à l'aide de l'équation (III.12). Le Matlab code de l'algorithme génétique (GA) sont données dans l'annexe A. Les valeurs optimales obtenues des matrices [R] et [Q] intervenant dans l'équation (32) sont alors donnés dans le Tableau III.3.

Tableau III.3 Les paramètres optimal du contrôle LQR

Les paramètres optimaux de matrices Q et R	paramètre matériels (Rn)		
	0	1	100
$X1 (10^2)$	9.79	1.13	0.80
$X2 (10^2)$	5.45	8.29	9.40
$X3$	0.0011	0.0016	1.08

Les figures (III.7), (III.8) et (III.9) présentent la réponse transitoire de la plaque FGM contrôlée avec GA-LQR dont l'indice de puissance Rn est 0, 1 et 100. Les coefficients d'amortissements en boucle fermée sont : 5,2%, 6,3% et 8,9%, en outre le temps d'amortissement des vibrations est : 0,35s pour $Rn = 0$, 0,3s pour $Rn = 1$, et 0,2s pour $Rn = 100$.

Les figures (III.11) à (III.13) représentent les potentiels électriques nécessaires pour le contrôle actif. À travers la comparaison des figures, on observe que les vibrations s'atténuent moins rapidement lorsqu'on augmente le taux de titane.

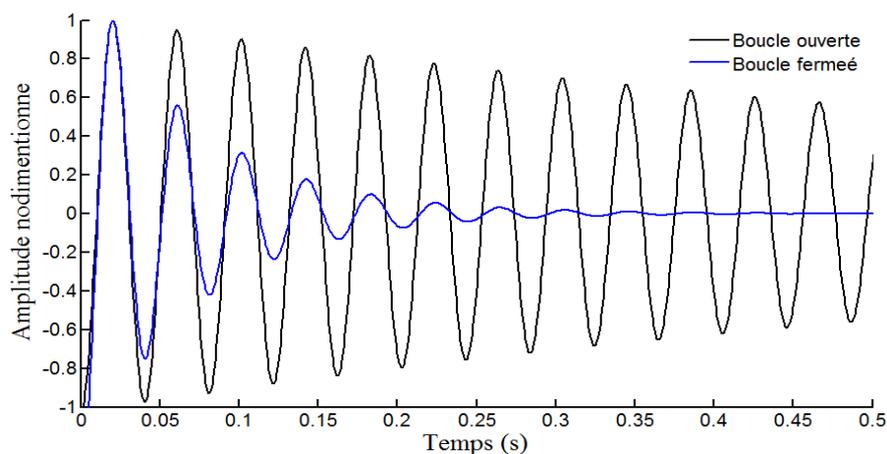


Figure III.7. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $Rn = 0$

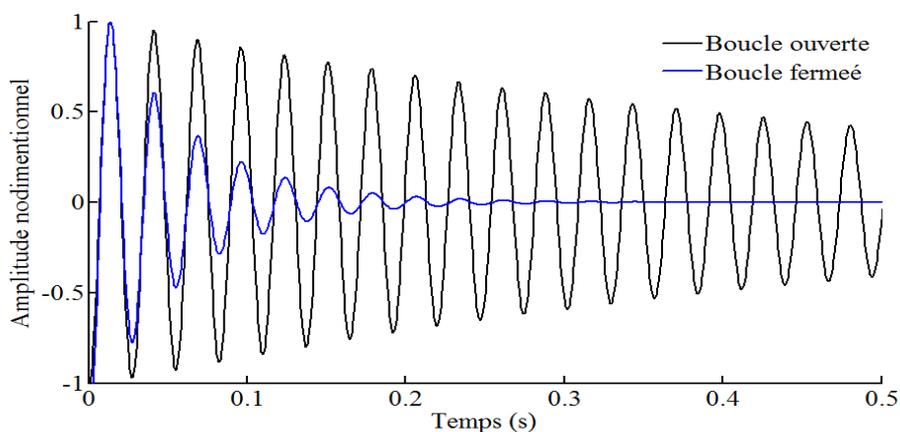


Figure III.8. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $Rn = 1$

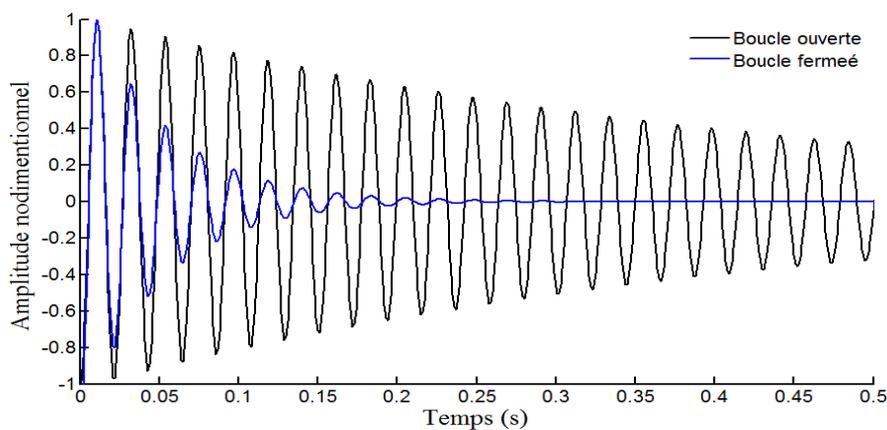


Figure III.9. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $Rn =$

100

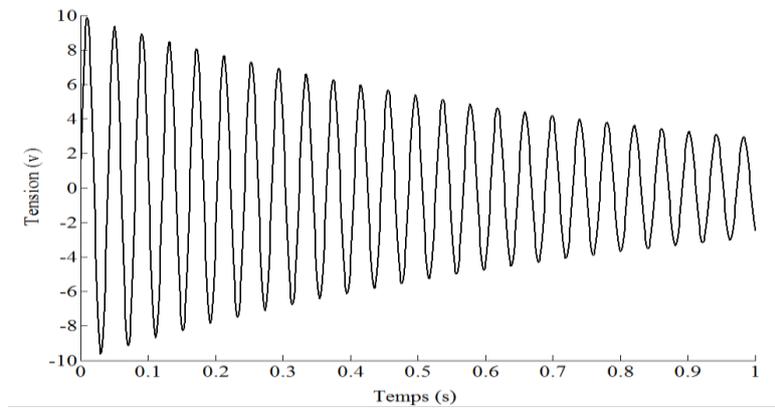


Figure III.10. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 0$

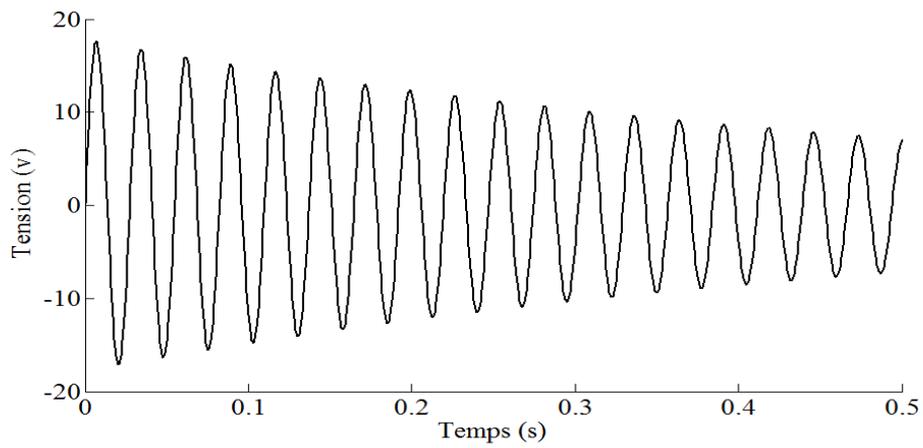


Figure III.11. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 1$

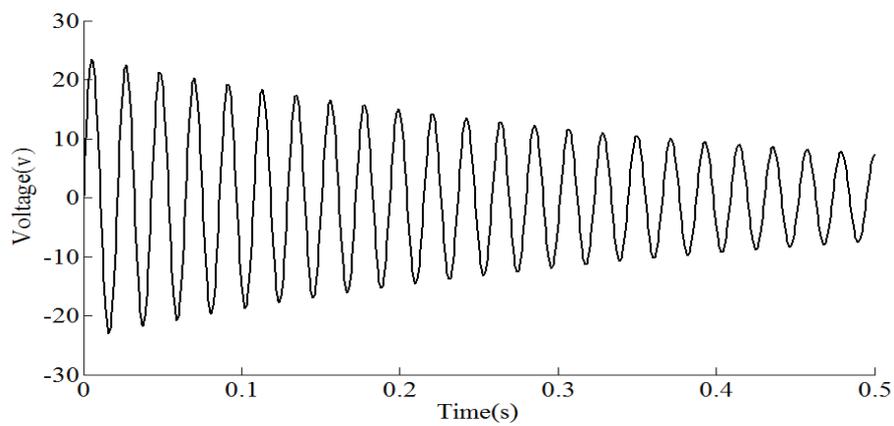


Figure III.12. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 100$

III.2.3 Contrôle actif des vibrations par Ansys

L'utilisation d'une programmation avec logiciel ANSYS permet d'effectuer une simulation du contrôle actif de vibrations. Après la définition des paramètres caractéristiques de la conversion électromécanique, deux algorithmes de contrôle (LQR et PID) sont implémentés et utilisés pour la simulation. Une comparaison des performances obtenues à l'aide des deux algorithmes élaborés jusqu'ici (LQR et PID) est présentée à la fin de cette sous-section.

Dans un premier temps, une plaque FGM encadrée sur le côté gauche avec deux couches piézoélectriques est considérée. Ses propriétés sont indiquées dans la référence (Dai et al. 2005) et sont données dans le tableau III.4. Les premières fréquences propres ont été évaluées et comparées aux résultats numériques présentés dans (Dai et al. 2005).

Tableau III.4. Les propriétés des matériaux.

propriétés	Aluminum	Zirconia	PZT G-1195
Module de Young E (N/m ²)	70 x 10 ⁹	151 x 10 ⁹	6.1 x 10 ¹⁰
Coefficient de poisson	0.3	0.3	0.35
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2702	3000	7750
constantes piézoélectriques			
e 31	-	-	6.5
e 33			23.3
e 15			17
constantes diélectriques (F/m)			
g 11			1.53x10 ⁻⁸
g 22			1.53x10 ⁻⁸
g 33			1.5x10 ⁻⁸

Tableau III.5 présente les six premières fréquences propres de la plaque FGM. Les résultats obtenus montrent que le code Ansys permet d'avoir une très bonne approche des

premières fréquences propres. La différence entre les résultats ne dépasse pas 1.5% (figure III.13).

Tableau III.5. Les fréquences propres (Hz) de la plaque FGM

Numéro de mode		$R_n = 0$	$R_n = 0.2$	$R_n = 1$	$R_n = 5$	$R_n = 1000$
1	Ansysis	37.082	35.407	31.849	29.454	26.579
	R.Y.Dai et al	36.715	34.969	31.774	29.915	26.933
2	Ansysis	90.552	86.467	77.778	71.910	64.905
	R.Y.Dai et al	89.111	84.864	77.156	72.675	65.345
3	Ansysis	227.18	216.92	195.12	180.43	162.83
	R.Y.Dai et al	226.25	215.54	195.97	184.44	166.12
4	Ansysis	289.73	276.65	248.85	230.10	207.67
	R.Y.Dai et al	286.77	273.11	248.12	233.55	210.18
5	Ansysis	329.38	314.53	282.92	261.56	236.09
	R.Y.Dai et al	326.05	310.54	282.30	265.76	239.11
6	Ansysis	575.51	549.56	494.34	456.95	412.51
	R.Y.Dai et al	569.32	542.21	492.78	463.87	417.27

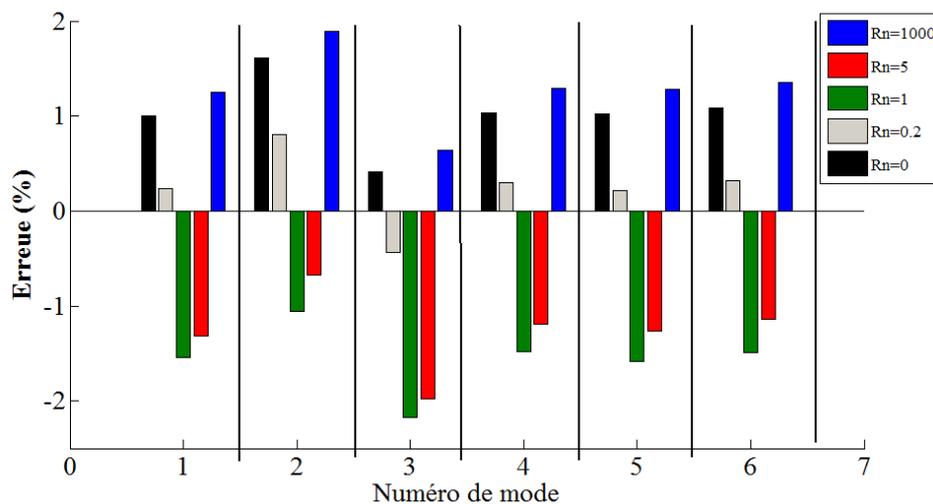


Figure III.13. Erreur enregistré entre les résultats obtenus par ANSYS et de référence (Dai et al. 2005)

Afin d'améliorer activement l'amortissement des trois premiers modes, la couche piézoélectrique collée sur la surface supérieure de la plaque FGM est associée aux stratégies de contrôle LQR et PID itérative présentées précédemment, dont les paramètres sont $\{Q = 106 * \text{diag}(6) \text{ et } R = 1\}$ pour le contrôleur LQR et $\{Kp = -15000, Ki = -1500, Kd = -1000\}$ pour le contrôleur PID. La plaque est excitée par une force de perturbation transversale concentrée, appliquée au milieu de son extrémité libre. La tension de contrôle est limitée à 250 V.

La réponse transversale transitoire de l'extrémité libre de la plaque FGM en boucle ouverte est présentée dans la Figure (III.14). Elle permet, particulièrement, d'analyser le comportement dynamique de la plaque FGM. Ainsi, on observe que les réponses diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique, ceci peut s'expliquer par le fait que la configuration FGM soit plus rigide lorsque s'approche du titane.

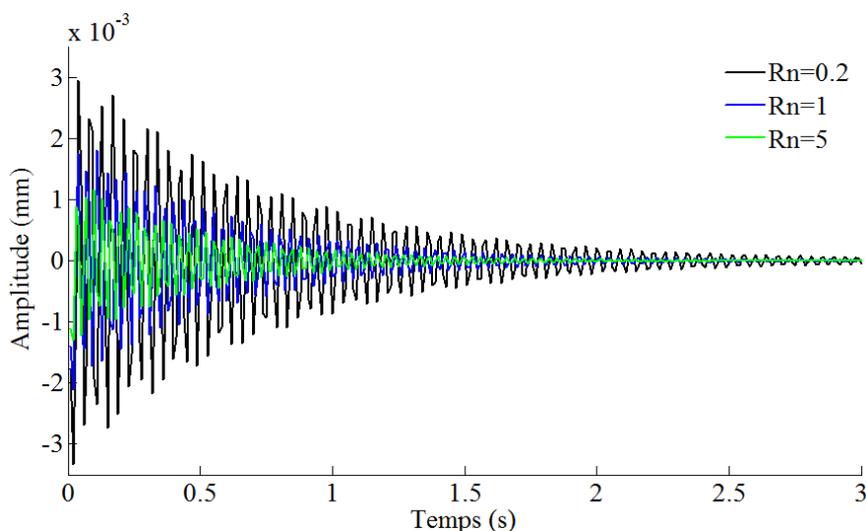


Figure III.14. L'effet de l'indice de puissance (Rn) sur l'amplitude de la plaque FGM

Afin d'implémenter le contrôleur PID sur ANSYS, une subroutine a été élaborée par un cycle de programmation, réalisé par la commande `* DO * ENDDO`. Ce programme utilise la variable de temps en tant que variable d'index, le temps de simulation transitoire est réglé, le contrôleur est mis en place. La subroutine développée est donnée au-dessous. Le temps de fin de calcul en boucle fermée est donné par «temps»,

"Tres" : Incrément du temps.

«dz» : La valeur de déplacement enregistrée.

La valeur des parties intégrale et dérivée sont calculés par "integ+x*dt", "(x-dy)/Tres", respectivement. La valeur de "dy" sont connus de l'étape précédente. La tension utilisée pour le contrôle prend comme "kp*x+ki*integ+kd*diff", où kp, ki et kd sont les gains, proportionnelles, intégrale et dérivée. La condition * IF- * ELSEIF est utilisée comme une mesure de sécurité; enfin, la couche piézoélectrique est configurée pour recevoir la tension souhaitée à l'aide du commande d.

```
*do,t,2*Tres,time,Tres
time,t
*get,y,node,Sn,u,z
*set,x,y
*set,integ,integ+x* Tres
*set,diff,(x-dy)/ Tres
*set,U,kp*x+ki*integ+kd*diff
*IF,U,LT,uL,THEN
    U=uL
*ELSEIF,va,GT,uH
    U=uH
*ENDIF
d,p1,volt,U
*set,y,x
SOLVE
*enddo
```

Sur la base des équations des éléments finis donnés précédemment. Un programme MATLAB a été écrit pour déterminer les équations d'état défini par A, B, C. D'autre part, le gain de contrôleur LQR a été calculé. Les matrices d'état sont stockées dans ANSYS en utilisant la commande*DIM pour évaluer la taille des matrices et de *SET pour la définition des éléments des matrices. Les opérations matricielles sont effectuées à l'aide de la subroutine donné ci-dessous :

```
*GET,y,NODE,7105,U,Z
*VFACT,u
*VFUN,inp,COPY,B
out(1,1)=y
outs=out(1,1)
*VFACT,outs
```

*VFUN, st, COPY, A

*VOPER, x, inp, ADD, st

La tension électrique reçue par l'actionneur est effectué par :

*MOPER, VC, K, MULT, x

u=Vc(1,1)

Les deux contrôleurs présentés précédemment sont utilisés pour le contrôle actif de vibrations de la plaque FGM. L'intérêt est de pouvoir choisir le contrôleur le plus optimal, tout en mesurant seulement les réponses. Les réponses du système non contrôlé sont comparées avec celles contrôlé par LQR et PID, pour plusieurs indice de puissance (Rn). La figure (III.15) montre le déplacement transversal mesuré sans et avec contrôle, respectivement pour $Rn = 0.2$. On remarque que l'amplitude vibratoire de la plaque est rapidement atténuée en présence des deux contrôleurs tout en mesure uniquement les réponses. Les coefficients d'amortissement atteint 0.078 dans le cas de LQR et 0.063 pour PID. Augmentant l'indice de puissance (Rn) a 1, la réponse est amorti et le coefficient d'amortissement prend la valeur 0.0691 pour le contrôleur LQR et 0.0524, comme le montre la figure (III.16). la figure (III.17) montre l'atténuation obtenue avec le contrôle dans le cas $Rn = 5$. L'amortissement pour ce cas prend la valeur 0.0527 pour le contrôleur LQR et 0.0262 pour le contrôleur PID. Les tensions de contrôle des systèmes pour chaque indice de puissance (Rn) sont données dans les figures (III.18) à (III.20).

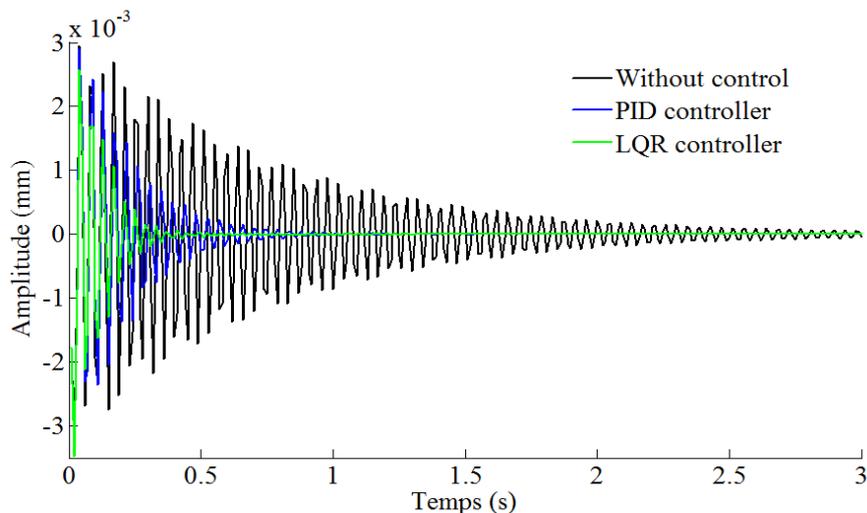


Figure III.15. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour

$$Rn = 0.2$$

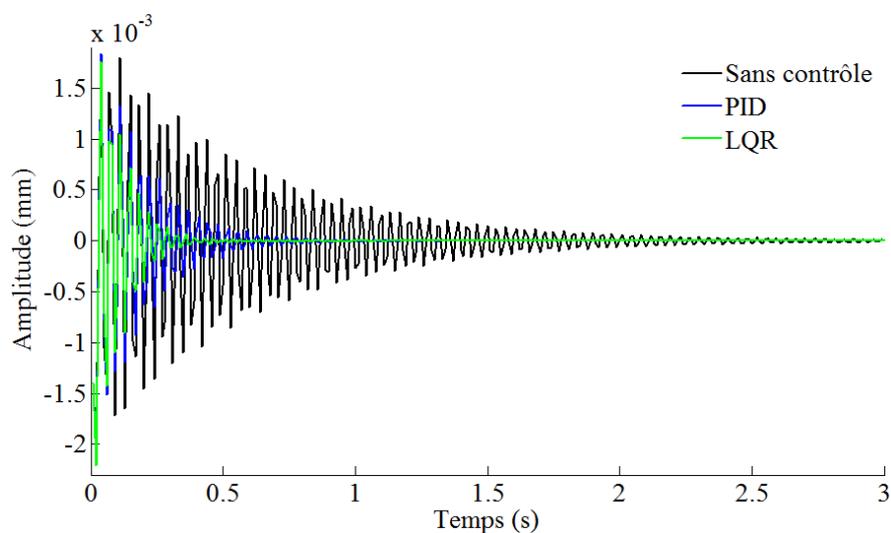


Figure III.16. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $Rn = 1$

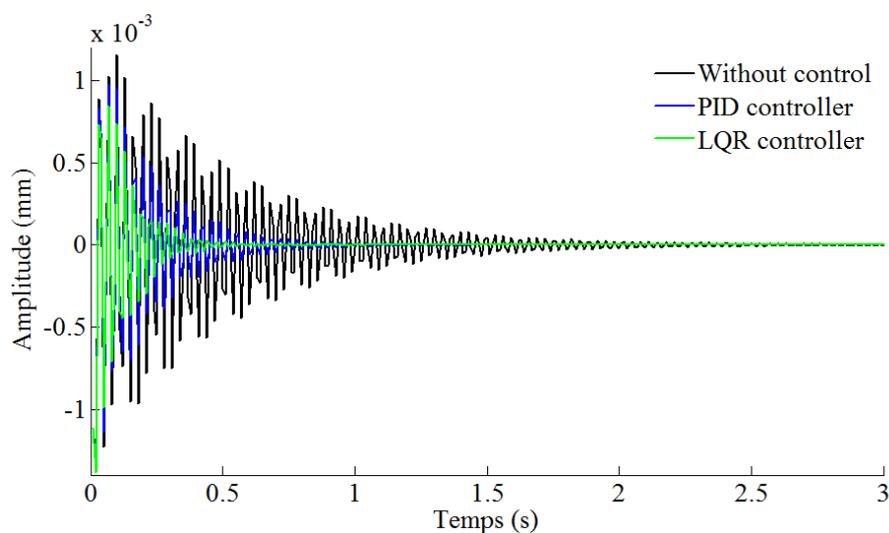


Figure III.17. Réponse transitoire de la plaque FGM en boucle-ouverte et fermée pour $Rn = 5$

Il est clair d'après les figures (III.15) à (III.17) que la mise en service d'un contrôleur LQR amorti plus efficacement les réponses que le contrôleur PID. Cependant, le contrôleur LQR nécessite encore un modèle mathématique du système, contrairement contrôleur PID qu'est plus simple et ne nécessite un modèle Mathématique.

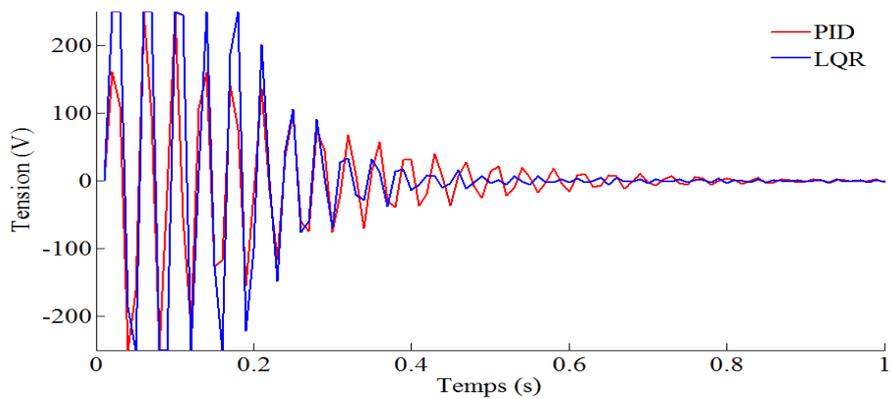


Figure III.18. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 1$

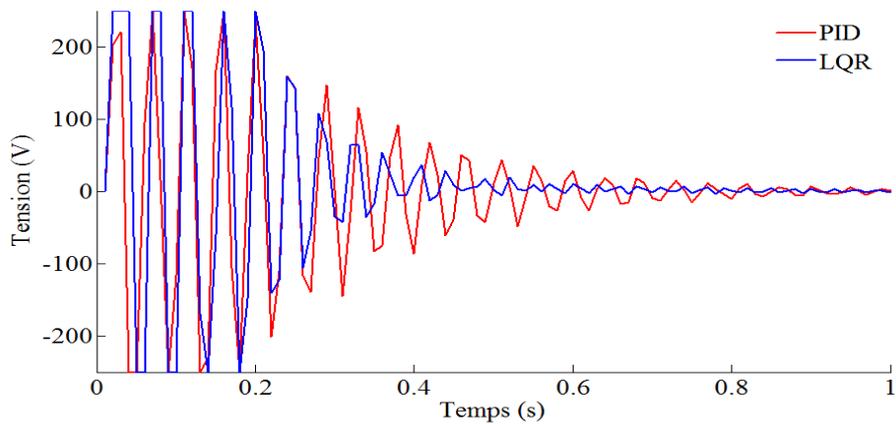


Figure III.19. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 0.2$

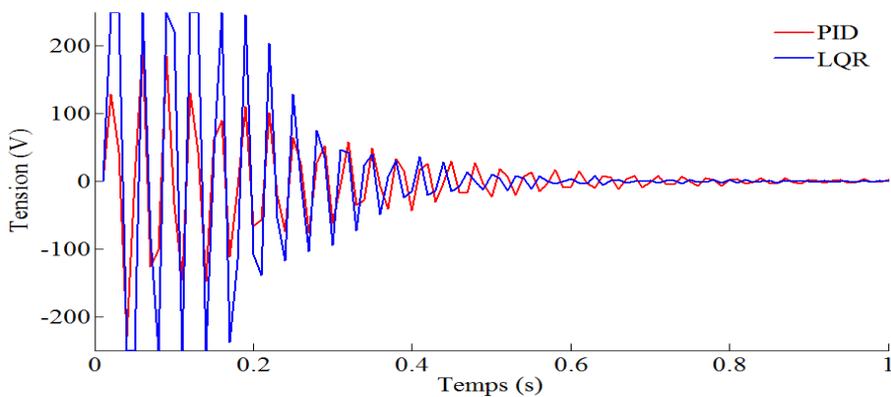


Figure III.20. Tension électrique aux bornes de l'actionneur pour $Rn = 5$

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle éléments finis de la plaque FGM avec deux couches piézoélectriques. La structure (plaque FGM avec deux couches piézoélectriques) a été modélisée à l'aide de la théorie classique des plaques. Afin de mettre en place le contrôle actif de vibrations de la structure, deux types de contrôleur ont été utilisés (LQR et PID). Pour déterminer les paramètres de contrôleur LQR, une fonction objective couplée avec un algorithme génétique itératif a été proposé. Des simulations numériques sont présentées à l'aide de logiciel ANSYS afin de faire une étude comparative entre les deux contrôleurs proposés. L'étude a montré que le contrôleur LQR est meilleur en termes d'atténuation d'amplitude de vibrations mais il nécessite un modèle mathématique pour le mettre en place.

Chapitre IV.

Optimisation du réseau des patches piézoélectrique sur les plaques
composites

Dans le présent chapitre, un processus d'optimisation est présenté. L'optimisation proposée est basée sur un algorithme génétique et vise à minimiser l'indice linéaire quadratique pour obtenir le meilleur emplacement du réseau de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques sur une structure plaques. Dans un premier temps, un modèle éléments finis (basé sur la théorie du premier ordre (FOSDT)) pour une plaque composite avec des pastilles piézoélectriques collées sur sa surface a été construit. Ensuite le problème d'optimisation est décrit en posant la fonction objective, les contraintes de design ainsi que les domaines des variables géométriques. Différentes simulations sont effectuées en utilisant le logiciel MATLAB et des solutions sont proposées.

IV.1 Equations Constitutives

IV.1.1 Processus de modélisation

Considérons une plaque rectangulaire munie des éléments piézoélectriques. Le champ de déplacement d'un point matériel situé aux coordonnées (x, y, z) dans la plaque s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} U_1(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + f(z)\theta_x(x, y, t) \\ U_2(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + f(z)\theta_y(x, y, t) \\ U_3(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{IV.72})$$

Avec U_1, U_2 , et U_3 sont les déplacements dans les directions x, y , et z , $[u_0, v_0]$, et w_0 sont les déplacements du plan médian.

$[\theta_x, \theta_y]$ sont les rotations des plans yz et xz dus à la flexion, respectivement.

$f(z)$ Représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $f(z) = 0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $f(z) = z$. En plus, la théorie des déformations du troisième ordre (the third-order shear deformation theory ou TSDT) est obtenue en posant $f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$ et h représente l'épaisseur de la plaque (Junuthula N. Reddy 1984; J. N. Reddy 2007).

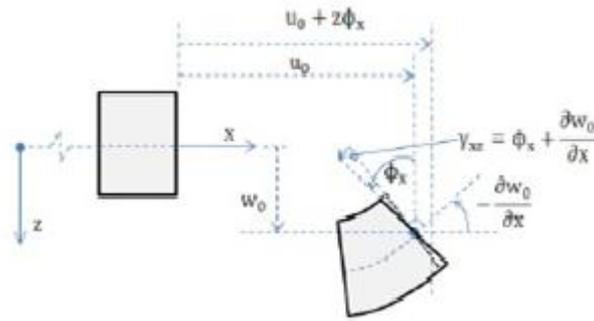


Figure IV.1. Les assumptions de la théorie de premier ordre de la plaque

IV.1.2 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement. Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation 1 (cas $f(z) = z$) s'écrit avec les hypothèses de von Kármán :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy}\}^T = \varepsilon_0 + z\kappa \quad (\text{IV.2})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{z0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Les déformations de cisaillement transversales sont données par :

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{bmatrix} \quad (\text{IV .4})$$

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (\text{IV .5})$$

Ou $[L]$ s'exprime par :

$$[L] = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_x & 1 & 0 \\ d_y & d_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 0 & d_y & d_x \end{bmatrix} \quad (\text{IV 6})$$

avec

$$d_x = \frac{\partial}{\partial x} \text{ et } d_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Les plaques composites sont habituellement composées de plusieurs couches orthotropes dans laquelle la relation entre contrainte-déformation pour la couche $k^{\text{ième}}$ orthotrope avec l'orientation des fibres par rapport aux axes de référence est donnée par (Junuthula Narasimha Reddy 2004):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} & 0 & 0 \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} & 0 & 0 \\ \overline{Q_{61}} & \overline{Q_{62}} & \overline{Q_{66}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_s \overline{Q_{55}} & k_s \overline{Q_{54}} \\ 0 & 0 & 0 & k_s \overline{Q_{45}} & k_s \overline{Q_{44}} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (\text{IV .7})$$

Où k_s est le facteur de correction de cisaillement et $\overline{Q_{ij}}^{(k)}$ sont les constantes de matériau transformées de la couche $k^{i\text{ème}}$ et sont exprimés par :

$$\overline{[Q_{ij}]} = [T]^T [Q_{ij}^{(k)}] [T] \quad (\text{IV .8})$$

$[T]$ est une matrice de transformation donnée par

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\phi)^2 & \sin(\phi)^2 & -\sin(2 * \phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi)^2 & \cos(\phi)^2 & \sin(2 * \phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) * \cos(\phi) & -\sin(\phi) * \cos(\phi) & \cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$[Q_{ij}]$ sont les rigidités de contraintes planes généralisées avec

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}$$

Avec E_1, E_2 sont les deux modules d'Young dans les directions $x, et y$, G_{12}, G_{12} et G_{13} les modules de cisaillement et ν_{12}, ν_{21} sont les coefficients de Poisson.

En combinant les équations (IV.2) et (IV.5) avec l'équation (IV.7) et en intégrant par couches sur toute l'épaisseur, les équations des contraintes résultantes sont obtenues comme suite (Chandrashekhara and Agarwal 1993):

$$\{\overline{N}\} = [\overline{D}]\{\varepsilon\} - \{\overline{N}^E\} \quad (\text{IV 9})$$

Avec $\{\overline{N}\} = (N_x, N_y, Q_y, Q_x, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy})^T$ (IV 10)

$$(N_x, M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(1, z) dz \quad (\text{IV 11})$$

$$(N_y, M_y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(1, z) dz \quad (\text{IV 12})$$

$$(N_{xy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(1, z) dz \quad (\text{IV 22})$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (\text{IV.13})$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{IV.14})$$

où

[N] est le tenseur des résultantes en membrane,

[Q] le vecteur des résultantes en cisaillement,

[M] le tenseur des moments de flexion-torsion.

La matrice $[\bar{D}]$ est définie par :

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Ou

$[\bar{D}]$ est le tenseur des souplesses généralisées,

$[A_{ij}]$ est la matrice des rigidités membranaires de plaque,

$[B_{ij}]$ est la matrice des couplages membrane-flexion-torsion de plaque,

$[D_{ij}]$ est la matrice des rigidités en flexion et torsion de plaque,

$[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$, $[D_{ij}]$ s'expriment en fonction du tenseur des rigidités réduites $[\bar{Q}_{ij}]$ de chaque couche, nous avons les relations suivantes :

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}](1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{IV.16})$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{ij}]_k dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (IV .17)$$

IV.2 Formulation de la piézoélectricité

Dans la théorie de la piézoélectricité linéaire, les équations de l'élasticité linéaire sont couplées aux équations de l'électrostatique par l'intermédiaire des coefficients piézoélectriques. L'effet piézo-électrique peut être traduit par quatre couples d'équations reliant les tenseurs mécaniques de déformation $\{\varepsilon\}$ et de contrainte $\{\sigma\}$ aux vecteurs du champ électrique $\{E\}$ et de l'induction (le déplacement électrique) $\{D\}$. Il est courant de présenter ces équations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \\ \{D\} = [e]\{\varepsilon\} - [\varepsilon]\{E\} \end{cases} \quad (IV .18)$$

$[Q]$, $[e]$ et $[\varepsilon]$ sont appelées respectivement les constantes élastiques mesurées à champ électrique $\{E\}$ constant, les constantes piézoélectriques et les constantes diélectriques mesurées à déformations constantes.

$[e]$ et $[\varepsilon]$ sont exprimé par :

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (IV .19)$$

Concernant les aspects électrostatiques, le vecteur de champ électrique est donné par :

$$\{E\} = -grad \varphi \quad (IV 20)$$

Ou $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, sont les composantes du champ électrique dans les directions x, y, z et φ est le potentiel électrique.

En supposant que la distribution du champ de potentiel électrique varie de façon linéaire à travers l'épaisseur d'un élément piézoélectrique, et la différence de tension à travers son épaisseur est constante sur toute sa surface, le vecteur de champ électrique $\{E\}$ peut être exprimé sous la forme :

$$\{E\} = \frac{1}{h_p} [0 \ 0 \ -1]^T \{\Delta\varphi\} \quad (IV.21)$$

Ainsi, en considérant que $E_z = -\frac{V^+}{h_p}$, ou V^+ représente la tension électrique aux bornes de l'élément piézoélectrique (figure IV.2) est donné par :

$$V^+ = \varphi(h + h_p) - \varphi(h) \quad (IV.22)$$

h_p est l'épaisseur de l'élément piézoélectrique.

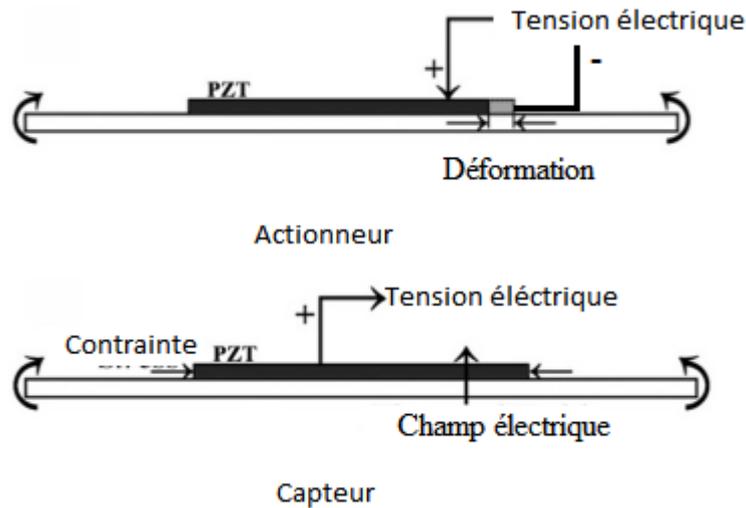


Figure IV.2. Effet piézoélectrique en contrôle actif de vibrations.

IV.2.1 Principe d'Hamilton

Le principe de Hamilton est basé sur la minimisation de la fonctionnelle appelée Lagrangien du système, définie comme la différence entre l'énergie cinétique T du système et son énergie potentielle ψ . Dans le cas des systèmes continus, cette dernière quantité est classiquement appelée énergie de déformation élastique. Le principe d'Hamilton s'écrit entre deux instants t_1 et t_2 pour un système continu :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \psi + W) dt \quad (IV.23)$$

Pour les petits mouvements des systèmes élastiques, l'énergie cinétique s'exprime sous la forme suivante :

$$T = \int_v \frac{1}{2} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dv \quad (IV.24)$$

En faisant intervenir l'ensemble des contributions présentes dans le volume piézoélectrique, énergie potentielle peut écrire come suite :

$$\psi = \int_v \frac{1}{2} (\{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \{E\}^T \{D\}) dv \quad (IV.25)$$

Le travail fait par une force P_s se définit de la façon suivante :

$$W = \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds \quad (IV.26)$$

Partant des expressions présentées en équations (IV.24 à IV.26), le principe d'Hamilton (équation IV. 23) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_v \delta \left(\frac{1}{2} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} - \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \{E\}^T \{D\} \right) dv + \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds_1 - \int_s \{\delta \phi\}^T \mu ds_2 \right] dt = 0 \quad (IV.27)$$

Tenant compte d'équation (IV.16) et l'équation (IV.18) exprimant le couplage entre les grandeurs électriques et mécaniques le principe de Hamilton devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_v \left(\frac{1}{2} \rho \{\delta \dot{U}\}^T \{\dot{U}\} - \{\delta \epsilon\}^T [\bar{D}] \{\epsilon\} + \{\delta \epsilon\}^T [e] \{E\} + \{\delta E\}^T [e]^T \{\epsilon\} + \{\delta E\}^T [\epsilon] \{E\} \right) dv + \int_s \{\delta U\}^T \{P_s\} ds_1 - \int_s \{\delta \phi\}^T \mu ds_2 \right] dt = 0 \quad (IV.28)$$

Étant donné que toutes les variations doivent disparaître à $t = t_1$ et $t = t_2$, en substituant l'équation variationnelle prend la forme:

$$\int_v \left(\frac{1}{2} \rho \{ \delta \dot{U} \}^T \{ \dot{U} \} + \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \}^T [\bar{D}] \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} - \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \}^T [\mathbf{e}] \{ \mathbf{E} \} - \{ \delta \mathbf{E} \}^T [\mathbf{e}]^T \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} \right. \\ \left. - \{ \delta \mathbf{E} \}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \{ \mathbf{E} \} \right) dv - \int_s \{ \delta \mathbf{U} \}^T \{ \mathbf{P}_s \} ds_1 + \int_s \{ \delta \phi \}^T \boldsymbol{\mu} ds_2 \quad (IV.29)$$

IV.2.2 Formulation des éléments finis

L'objectif est de définir les degrés de liberté $u_{0i} v_{0i} w_{0i} \theta_{xi} \theta_{yi}$ dans la plaque en termes de déplacements et rotations nodaux en utilisant un élément quadratique isoparamétrique à quatre nœuds. Chaque nœud de l'élément présente cinq degrés de liberté. L'approximation nodale pour les déplacements U_i d'un point quelconque d'un élément a pour expression :

$$U_i = \sum_i^4 N_i d_i \quad (IV.30)$$

d_i est le vecteur déplacement à chaque nœud qui s'écrit :

$$d_i = [u_{0i} v_{0i} w_{0i} \theta_{xi} \theta_{yi}]^T \quad (IV.31)$$

ou

ξ_i et η_i sont les coordonnées local telque $\xi_i = -1, 1, -1$ et $\eta_i = -1, -1, 1, 1$ pour $i = 1, \dots, 4$.

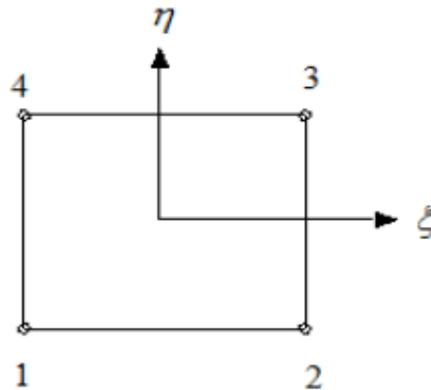


Figure IV.3. Numérotation des nœuds de l'élément isoparamétrique à quatre nœuds.

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale $(1, \xi, \eta, \xi\eta)$ sur $(\xi, \eta) \in [-1,1]$. L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation sont :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i)(1 + \eta_i) \quad i=1, 2, 3,4 \quad (\text{IV.32})$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi_i)(1 - \eta_i) \quad (\text{IV.33})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (\text{IV.34})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (\text{IV.35})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (\text{IV.36})$$

Les translations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

les rotations sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

Les coordonnées sont interpolées comme :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

Les dérivés sont données par :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta_i)\xi_i \quad (\text{IV.40})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi_i)\eta_i \quad (\text{IV.41})$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Après substitution l'équation (IV.30) dans l'équation (IV.2), le vecteur déformation généralisé $\{\varepsilon\}$ en tout point au sein de l'élément est obtenu par :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^4 (B_{mi}d_i + zB_{bi}d_i) \quad (\text{IV.44})$$

$$\{\gamma\} = \sum_{i=1}^4 (B_{shi}d_i) \quad (\text{IV.45})$$

Avec $[B_{mi}]$, $[B_{bi}]$ et $[B_{shi}]$ opérateurs de différentiation spatiales, définies en coordonnées cartésiennes par :

$$[B_{mi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

$$[B_{bi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

$$[B_{shi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (IV.48)$$

Les opérateurs de différentiation spatiale peuvent s'écrire :

$$[B_b] = [B_{b1} B_{b2} B_{b3} B_{b4}] \quad (IV.49)$$

$$[B_m] = [B_{m1} B_{m2} B_{m3} B_{m4}] \quad (IV.50)$$

$$[B_{sh}] = [B_{sh1} B_{sh2} B_{sh3} B_{sh4}] \quad (IV.51)$$

$$\{d\} = \{d_1 d_2 d_3 d_4\}, \{d_i\} = \{u_{0i} v_{0i} w_{0i} \theta_{xi} \theta_{yi}\}^T \quad (IV.52)$$

Une matrice appelée matrice jacobienne J donne une solution d'opérateur différentiel en utilisant la règle de la chaîne appliquée à la différenciation partielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (IV.53)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (IV.54)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (IV.55)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (IV.56)$$

En utilisant la relation contrainte-déformation, dans l'équation (IV.16)

$$[\sigma] = [Q][B]\{d_i\} \quad (IV.57)$$

La substitution des équations (IV.30) (IV.44) et (IV.45) dans l'équation d'Hamilton (IV.28) donne :

$$\int_v (\{\delta d_i\}^T \rho [N]^T [N] \{d_i\} + \{\delta d_i\}^T [B]^T [\bar{D}] [B] \{d_i\} - \{\delta \epsilon\}^T [e] \{\epsilon\} - \{\delta E\}^T [e]^T \{\epsilon\} - \{\delta E\}^T [\epsilon]^T \{E\}) dv - \int_s \{\delta d_i\}^T [N]^T \{P_s\} ds + \int_s \delta \phi \mu ds = 0 \quad (IV.58)$$

Ou

$$[B] = [B_{mi} B_{bi} B_{shi}]^T \quad (IV.59)$$

Soit après réorganisation matricielle ? l'expression finale des équations matricielles du mouvement se définit comme suit :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}\}^e + [K]\{U\} + \{K_{me}\}\{\varphi\}_a + [K_{me}]\{\varphi^e\}_s = \{F_m\} \\ [K_{me}]_A^T \{u\} - [K_e]_a \{\varphi\}_a = -[K_e]_a \{\varphi\}_{aa} \\ [K_{me}]_s^T \{u\} - [K_e]_s \{\varphi\}_s = 0 \end{cases} \quad (IV.60)$$

Après avoir ajouté la matrice d'amortissement structural à l'équation (IV.60), les équations du mouvement prendront la forme :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}\}^e + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + \{K_{me}\}\{\varphi\}_a + \{K_{me}\}\{\varphi^e\}_s = \{F_m\} \\ [K_{me}]_A^T \{u\} - [K_e]_a \{\varphi\}_a = -[K_e]_a \{\varphi\}_{aa} \\ [K_{me}]_s^T \{u\} - [K_e]_s \{\varphi\}_s = 0 \end{cases} \quad (IV.61)$$

Ou $[M]$, $[C]$, $[K]$ représentent respectivement la matrice masse, la matrice d'amortissement et la matrice rigidité de la structures (plaque + pastilles piézoélectrique).

$[K_{me}]_a^T$, $[K_e]_a$ sont les matrices de couplage électrique-mécanique et de rigidité électrique correspondant aux actionneurs.

$[K_{me}]_s^T$, $[K_e]_s$ sont les matrices de couplage électrique-mécanique et de rigidité électrique correspondant aux capteurs.

$\{F_m\}$ le vecteur des forces généralisées extérieures.

La formulation en éléments finis des matrices données en équation (IV.61), nous ramène à des expressions bidimensionnelles. Leur intégration explicite n'est facile que pour les éléments les plus simples. Il est donc préférable d'utiliser une méthode d'intégration numérique.

IV.2.3 Intégration numérique

Les éléments de l'équation du mouvement (IV.61), qui sont donnés individuellement dans les équations, peuvent être intégrés numériquement en utilisant la méthode de Gauss Legendre en quadrature.

Les formes finales des matrices d'équation (IV.61) peuvent être exprimées comme suit:

- Matrice masse

$$\begin{aligned}
 [M_e] &= \int_v [N]^T [\bar{m}] [N] dv = [M_{ep}, M_{ap}, M_{sp}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [\bar{m}] [N] |J| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} [N]^T ([\bar{m}_p, \bar{m}_{ap}, \bar{m}_{sp}]) [N] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{IV.62}$$

Ou

$$[\bar{m}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} dz, (I_1, I_2, I_3) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k+1}}^{z_k} \rho(1, z, z^2) dz \tag{IV.63}$$

- Matrice rigidité

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_v [B]^T [\bar{D}] [B] dv = [K_{ep}, K_{ap}, K_{sp}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} [B]^T ([\bar{D}_p, \bar{D}_{ap}, \bar{D}_{sp}]) [B] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{IV.64}$$

- Matrice d'amortissement

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \tag{IV.65}$$

- Matrice de rigidité électrique

$$\begin{aligned}
 [K_{me}] &= \int_A [B]^T [e] [B_\varphi] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [e] [B_\varphi] |J| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} [B]^T [e] [B_\varphi] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{IV.66}$$

- Matrice de couplage

$$\begin{aligned}
 [K_{ea}, K_{es}] &= \int_A [B_\varphi]^T [\epsilon_{a,s}] [B_\varphi] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [e_{a,s}] [B_\varphi] |J| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} [B]^T [e] [B_\varphi] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{IV.67}$$

- Force mécanique

$$\begin{aligned}
 [F_m] &= \int_A [N]^T [d] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [d] |J| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} [N]^T [d] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{IV.68}$$

IV.2.4 **Système des équations d'état**

Afin d'appliquer le modèle précédent à la conception d'un système de contrôle actif optimal, son équations de mouvement (équation IV.61) doit être réécrite sous la forme d'équations d'état. L'approximation de la solution du problème (équation IV.61) consiste à introduire un sous-espace de dimension finie qui est formé par les N premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale permet de déterminer une estimation modale de déplacement sur les N premiers modes propres sous la forme suivante :

$$\{U\} = \sum_k^{Nmode} \{\Omega_k\} \{x(t)\} \tag{IV.69}$$

$$([K] - \omega_n[M])\{U\} = 0 \quad (IV.70)$$

Où $\{\Omega_k\}$ est le kième mode propre de la plaque

$\{x(t)\}$, la composante de la projection du vecteur déplacement sur $\{\Omega_k\}$, souvent appelé la contribution modale du mode k .

Après le remplacement du déplacement par son estimation équation (IV.69) dans la formulation (IV.61), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} [M][\Omega]\{\ddot{x}(t)\} + [C][\Omega]\{\dot{x}(t)\} + [K][\Omega]\{x(t)\} + \{K_{me}\}\{\varphi\}_a + \{K_{me}\}\{\varphi^e\}_s = \{F_m\} \\ \{K_{me}\}_A^T[\Omega]\{x(t)\} - [K_e]_a\{\varphi\}_a = -[K_e]_a\{\varphi\}_{aa} \text{ 'Actionneur'} \end{cases} \quad (IV.71)$$

En faisant varier la fonction test N fois, en la remplaçant à chaque fois par k , et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres équation (IV.72) :

$$\begin{aligned} [\Omega]^T[M][\Omega] &= \mathit{diag}(\mu_k) \\ [\Omega]^T[K][\Omega] &= \mathit{diag}(\mu_k\omega_k^2) \\ [\Omega]^T[C][\Omega] &= \mathit{diag}(2\xi_k\omega_k^2) \end{aligned} \quad (IV.72)$$

Complétons par l'identité $\{\dot{x}(t)\} = \{\dot{x}(t)\}$ et introduisons le vecteur d'état qui contient les inconnues du système différentiel, défini par : $X = \{\dot{x}(t), x(t)\}^T$ pour $k = 1, \dots, N$. Nous pouvons récrire l'équation (IV.71) :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -\mathit{diag}(\omega_k^2) & -2\xi_k\omega_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu\Omega^T K_{me}^{(i)} \end{bmatrix} \{\varphi^{(ac)}\} \quad (IV.73)$$

Ou $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -\mathit{diag}(\omega_k^2) & -2\xi_k\omega_k \end{bmatrix}$ est la matrice d'état de dimension et $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu\Omega^T K_{me}^{(ac)} \end{bmatrix}$ la matrice d'entrée avec ac est le nombre d'actionneurs.

Pour décrire le système du point de vue de sa sortie, on lui ajoute souvent une seconde équation appelée équation de sortie ou d'observation :

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{me}^{(i)T} \Omega & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + [D]\{\varphi^{(ac)}\} \quad (IV.74)$$

L'observation est mesurée le plus souvent à travers des capteurs placés sur la plaque. $Y(t)$ est le vecteur de sortie contenant les signaux observés, aux points de mesure des capteurs, $C = [K^{(i)}_{me}{}^T \Omega \quad \mathbf{0}]$ est la matrice d'observation.

IV.2.5 Fonction objective

Dans ce travail, la fonction objective proposée par (Kondoh, YATOMI, and Inoue 1990) est utilisée pour construire des problèmes d'optimisation prenant en compte à la fois la position de la paire capteurs/actionneurs. le problème d'optimisation peut être réécrit de la façon suivante :

Supposons un contrôle optimal quadratique, présenté sous la forme suivante :

$$J = \int_0^{\infty} (\{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{Q}] \{\mathbf{X}\} + \{\boldsymbol{\varphi}\}^T [\mathbf{R}] \{\boldsymbol{\varphi}\}) dt = \min \quad (\text{IV.75})$$

La valeur optimale de la fonction coût est donnée par

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T(0) \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{X}(0) \quad (\text{IV.76})$$

On peut remarquer que J_{opt} dépend de l'emplacement de l'actionneur qui est représenté par $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et le système de conditions initiales. Pour réduire la dépendance aux conditions initiales (Kondoh, YATOMI, and Inoue 1990) a proposé une nouvelle fonction exprimée en :

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}) = \text{trace}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \quad (\text{IV.77})$$

La nouvelle fonction équation de coût optimal J minimisée par rapport aux emplacements d'actionneurs \mathbf{x} .

Où \mathbf{x} prend des valeurs entières correspondant à la zone de positionnement de l'élément.

IV.3 Mécanisme de l'algorithme génétique

Les algorithmes génétiques appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnistes s'inspirant de la théorie de l'évolution pour résoudre un problème donné. Le but est d'obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation lorsqu'il n'existe pas de méthode permettant de le résoudre en un temps raisonnable. Les algorithmes génétiques utilisent la notion de sélection naturelle et l'appliquent à une population de solutions potentielles au problème donné. La solution au problème d'optimisation est obtenue par un processus itératif

qui s'arrête lorsqu'un certain critère d'arrêt est atteint. Ce processus est présenté sous la forme d'un diagramme de fonctionnement à la figure (IV.4) L'algorithme génétique fonctionne selon la procédure suivante :

- Un principe de codage de l'élément de population. Cette étape associe à chacun des points de l'espace d'état une structure de données.
- Une population initiale est créée aléatoirement, évaluée et une première population est sélectionnée.
- Le classement de la population est effectué selon les valeurs de performances et une sélection naturelle est appliquée.
- Une population de parents est déterminée afin de procéder à la reproduction qui est le premier processus d'exploration de la fonction objective. Le croisement a pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant les composantes des individus.
- Le second processus d'exploration est la mutation qui change le code génétique de certains individus.
- Ce mécanisme itératif est répété tant que le critère d'arrêt n'est pas respecté.

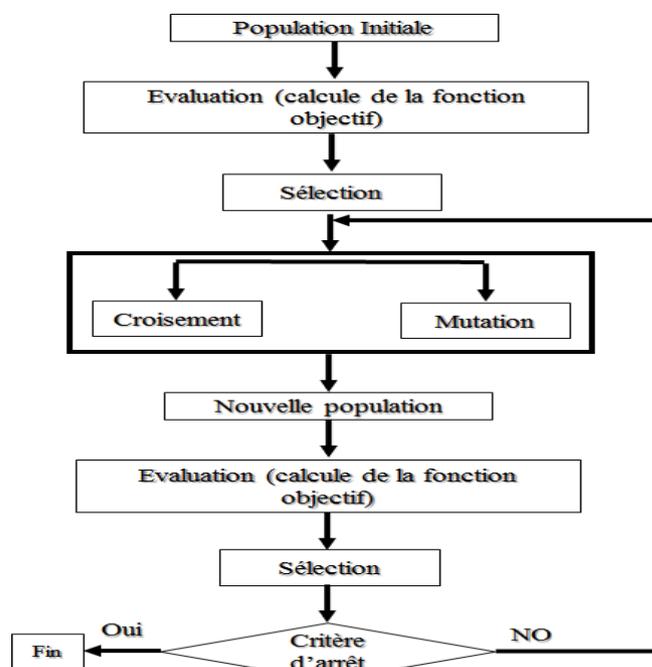


Figure IV.4. Organigramme d'un algorithme génétique

IV.3.1 Codage des variables

En génétique, les chromosomes sont constitués de gènes qui peuvent prendre différentes valeurs. Dans le contexte d'un algorithme génétique, il est impératif de commencer en définissant un chromosome ou une série de valeurs de paramètres qui doit être optimisée. Dans notre cas, une plaque est divisée en 64 éléments codés par les nombres entiers 01, 02, ..., à 64. Représentant chacun un emplacement possible d'un pair capteur / actionneur comme indiqué dans la figure (IV.5). Un chromosome est formé de A_i paramètres (emplacement possible d'un pair capteur / actionneur) qui sont définis par A_1, A_2, \dots, A_n . Le chromosome prend donc la forme suivante :

$$chromosome = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

Chacune des combinaisons de variables est associée à une valeur de fonction objectif, c'est-à-dire que :

$$f(chromosome) = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Figure IV.5. Espace de recherche

IV.3.2 Population initiale

L'algorithme génétique débute avec un nombre de chromosomes N_{chrom} dans sa population initiale. Cet ensemble de chromosomes représente diverses positions de pastilles piézoélectriques. La population de N_{chrom} (chaînes de chromosomes) se fait donc

reproduction consiste en la première façon d'explorer la fonction objective avec l'algorithme génétique. Le terme exploration est utilisé car l'algorithme génétique utilise des chaînes d'individus compris dans la population actuelle pour former la prochaine population. La façon la plus commune d'introduire la reproduction implique deux parents qui conçoivent deux enfants. Donc, N_p parents formés de $N_p/2$ couples produiront N_e enfants qui seront introduits dans la prochaine génération formée de N_{chrom} chromosomes. Premièrement, un point de croisement compris entre 1 et A_{i-1} est choisi de façon aléatoire. La partie de la chaîne du parent1 avant le point de croisement est combiné à la partie de la chaîne du parent2 pour former la chaîne de l'enfant1. De façon analogue, la chaîne de l'enfant2 est composée de la partie de la chaîne du parent2 avant le point de croisement et de la partie du parent1 après le point de croisement. Cette opération est appliquée pour chaque couple de parents. Le mécanisme de reproduction est étonnamment simple, mais ces opérations de croisement font en sorte de donner énormément d'efficacité à l'algorithme génétique. Il est à noter qu'un algorithme plus sophistiqué peut utiliser plus de points de croisement. La procédure de croisement demeure la même entre le couple de parents, elle ne fait que se répéter à plus d'une reprise. Les nouveaux chromosomes sont filtrés pour éviter la répétition des gènes. Le filtrage est une exigence physique car, plus d'un gène pour un emplacement particulier serait dénué de sens et perturbe le chemin vers la solution optimale. Les gènes répétés sont remplacés par un gène de l'espace de recherche. La mutation est la deuxième façon utilisée par l'algorithme pour explorer la fonction objective et converger vers l'optimum. La mutation consiste à changer aléatoirement un ou plusieurs gènes dans le chromosome de l'enfant. Les opérations de la reproduction sont représentées dans La figure (IV.7). Cette dernière montre la reproduction de deux parents et la création des deux enfants.

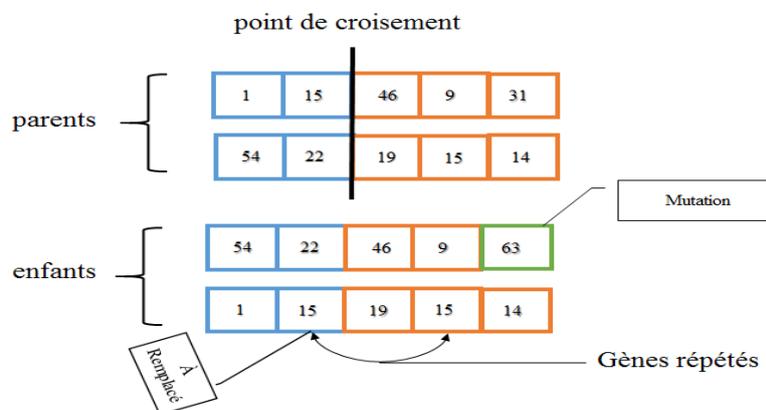


Figure IV.7. Opérations reproductifs.

IV.4 Applications

Pour vérifier l'efficacité des formulations présentées précédemment, une plaque composite $[0/\pm 45 / 90]$ encastrée sur le côté gauche est considérée. La longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque composite sont, respectivement $L=400\text{mm}$, $b= 400\text{mm}$ et $h=2\text{mm}$. La plaque est discrétisée en soixante-quatre éléments codés par des nombres entiers 01, 02 ..., 64; Chaque élément représente un emplacement possible d'une pastille PZT. Les propriétés des matériaux de la plaque et les patches piézoélectriques sont données dans Table.1.

Table. IV.1. Propriétés des matériaux.

Propriétés	Graphite/epoxy	PZT G-1195
Coefficient de poisson	0.31	0.3
Masse volumique $\rho(\text{kg/m}^3)$	1550	7600
Elastic stiffness matrix (GPa)		
E11	119	63.0
E22	8.67	63.0
E33	8.67	63.0
G12	5.18	24.2
G13	3.29	24.2
G23	3.29	24.2
Constantes piézoélectriques (C/m^2)		
e31		12.5
e33		12.5
e15		12.5
Constantes diélectriques (F/m)	-	
g11		1.53×10^{-8}
g22		1.53×10^{-8}
g33		1.53×10^{-8}

Afin de vérifier et de valider notre modèle, les fréquences naturelles de la plaque composite avec quatre patches piézoélectriques sont calculées et comparées avec ceux obtenus par ANSYS. Les résultats sont présentés dans le Tableau IV.2, tandis que les quatre premières formes modales sont présentées dans la figure. (IV.8). La réponse en fréquence obtenue à

partir de l'équation d'état de l'espace est présentée dans la figure. (IV.9). Il est clairement observé qu'un bon accord est trouvé entre les résultats du modèle proposé et celui d'ANSYS.

Table.IV.1. Les fréquences propres
(Hz)

Modes	Présent	Ansys	Erreur (%)
1	19.41	18.80	3.14
2	44.19	46.51	5.24
3	117.06	118.8	1.49
4	140.86	141.1	0.17
5	173.14	177.0	2.23

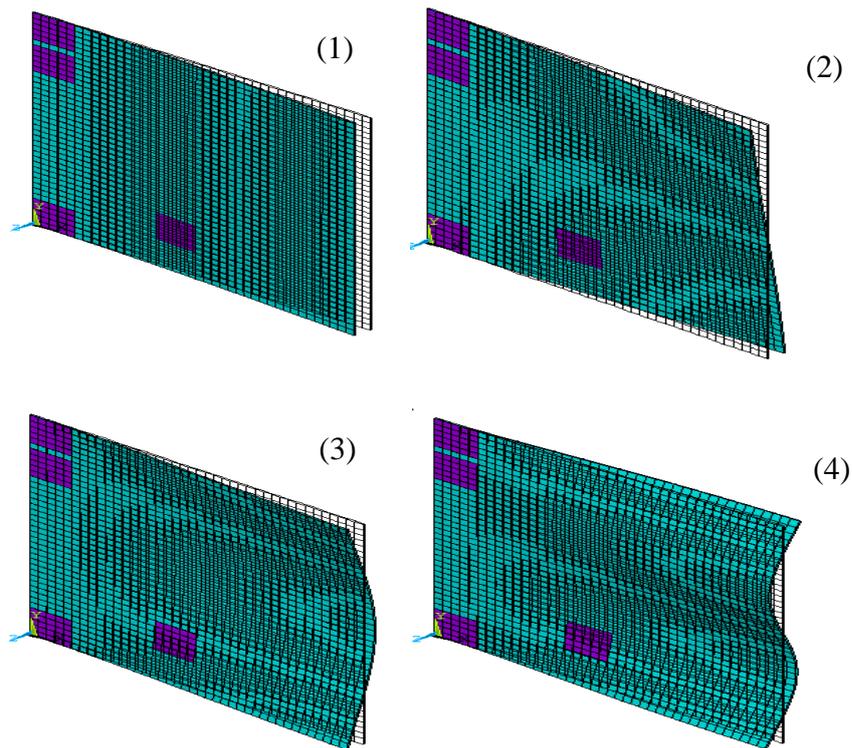


Figure IV.8. Premiers modes propres de la plaque composite.

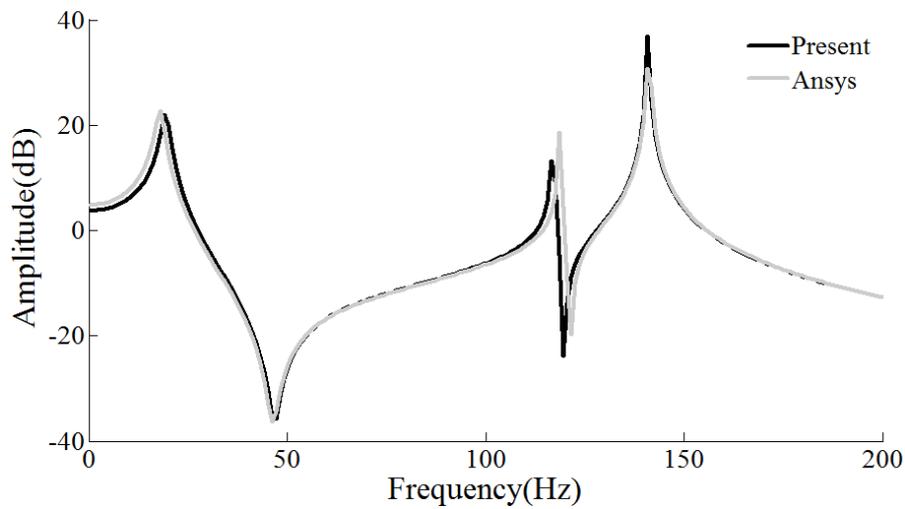


Figure IV.9. Réponses en fréquences.

Les résultats numériques pour la réponse en boucle ouverte ont été comparés à ceux obtenus à partir d'ANSYS. La figue. (IV.10) présente la réponse de la plaque composite soumise à une charge d'impulsion de 2 N pour une durée de 0.01s, elle montre une concordance des résultats entre la réponse de la formulation présentée et celle obtenue par ANSYS.

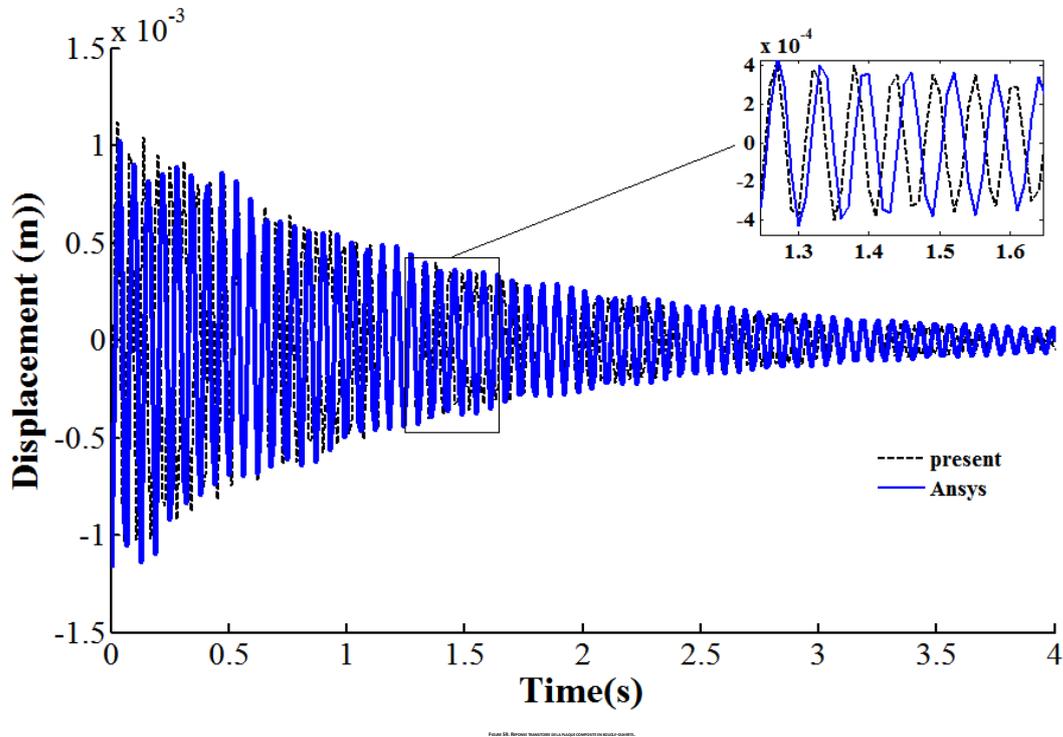


Figure IV.10 Réponse transitoire de la plaque composite en boucle-ouverte

IV.4.1 Optimisation du positionnement des pastilles piézoélectriques

Afin de mettre en application le processus d'optimisation pour les emplacements optimaux de pastilles, un algorithme génétique est développé sous Matlab pour minimiser la fonction d'optimisation définie par l'équation (IV.77). Les valeurs des matrices de pondération pour le contrôleur LQR sont $R = 2$ et $Q = 107$. Pour assurer la bonne décision le code est lancé dix fois pour cinq cents générations. Cinq configurations (deux, quatre, six, huit et dix) des pastilles piézoélectriques sont analysées. La convergence de la fonction d'optimisation pour chaque configuration est montrée dans la figure (IV.11). On peut noter que l'augmentation du nombre des pastilles fournit une fonction d'optimisation. Toutefois les placements optimaux pour deux pastilles sont trouvés dans les positions 1 et 57, alors que pour le cas de quatre pastilles, les emplacements sont 1, 12,49 et 57. Pour le cas de six pastilles, les positions sont 1, 9, 49, 57,35, et 3. Pour huit pastilles, la configuration s'avèrent 1, 9, 49, 57, 26, 19,61, et 36. En fin, le cas de 10 pastilles, l'emplacement sont 1, 2, 12, 9, 14, 27, 49, 51,57, et 60. Les positions pour chaque configuration sont montrées dans la figure. (IV.12).

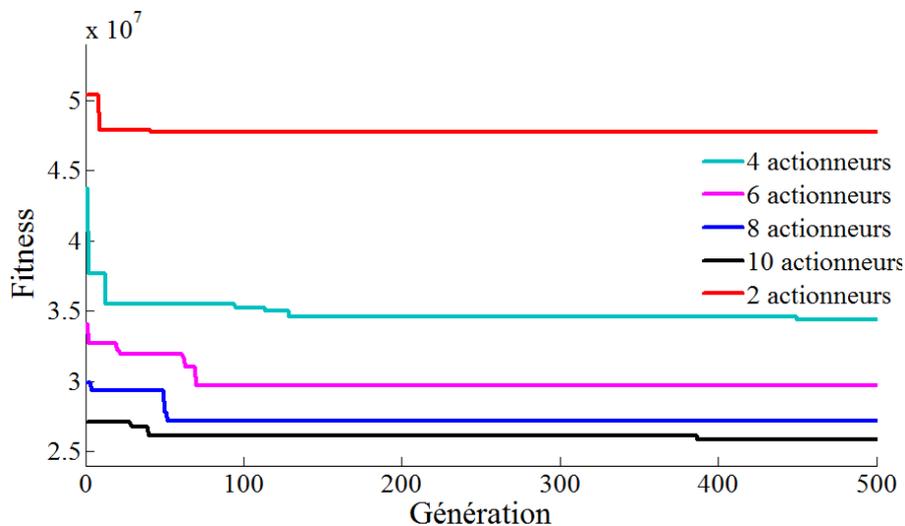


Figure IV.11. Variation de la fitness en fonction du nombre de génération

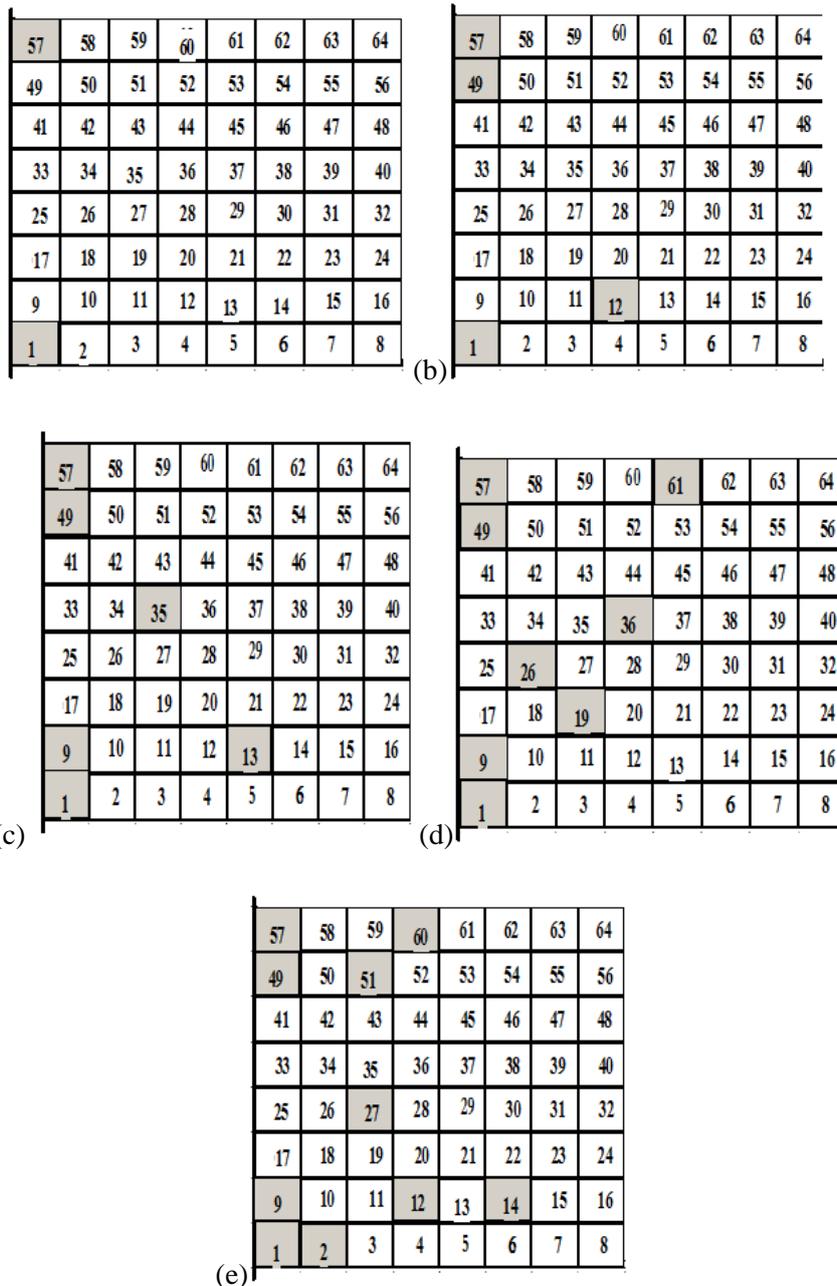


Figure IV.12. La position optimale pour chaque configuration ((a) 2, (b) 4, (c) 6, (d) 8 and (e) 10 pastilles.

En Basant sur les résultats présentés ci-dessus, un contrôleur LQR a été mis en application pour le cas d'une plaque composite avec des actionneurs collés sur les positions optimisées. Premièrement, trois modes de la plaque composite sont considérés dans le modèle dynamique. Les paramètres de contrôle LQR sont choisis pour être $R = 2$ et $Q = 10^7$. Les calculs pour la réponse transitoire sont exécutés avec un intervalle de temps de 0,01 s.

D'après la figure. (IV.13), on constate que les réponses transitoires de la plaque composite sont atténuées quand le nombre d'actionneurs augmente. La figure met aussi en évidence l'étendue du temps où la vibration est complètement amortie. Ceci indique que les vibrations sont éliminées plus rapidement avec dix actionneurs (environ de 0.45s), comparées au cas le plus défavorable (c.-à-d. deux actionneurs) pour lesquelles la vibration est complètement atténuée au bout de 1.03s. Entre ces deux cas extrêmes, quatre actionneurs mènent à un temps de stabilisation de 0.84s, alors que six et huit actionneurs donnent un même temps de stabilisation (environ de 0.62s). La figure. (IV.14) représente le coefficient d'amortissement en fonction du nombre d'actionneurs, cette dernière confirme l'atténuation de la réponse de figure. (IV.13). La quantité d'atténuation fournie par le système de contrôle est 0,0587, 0,0746, 0,0802, 0,0840, et 0,1159 pour deux, quatre, six, huit, et dix actionneurs, respectivement.

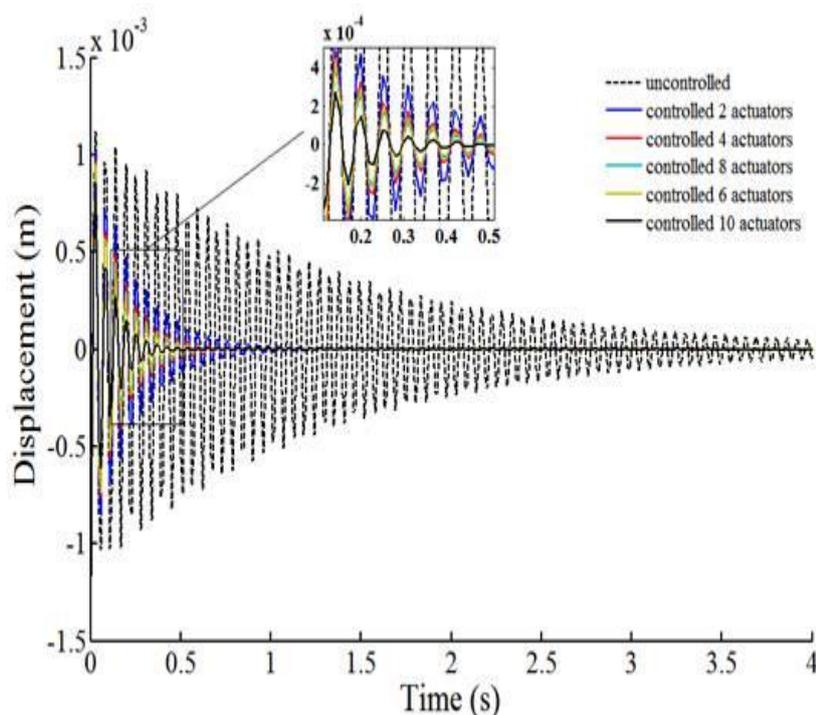


Figure IV.13. Réponse transitoire de la plaque composite en boucle-ouverte et fermée pour des différentes configurations d'actionneurs.

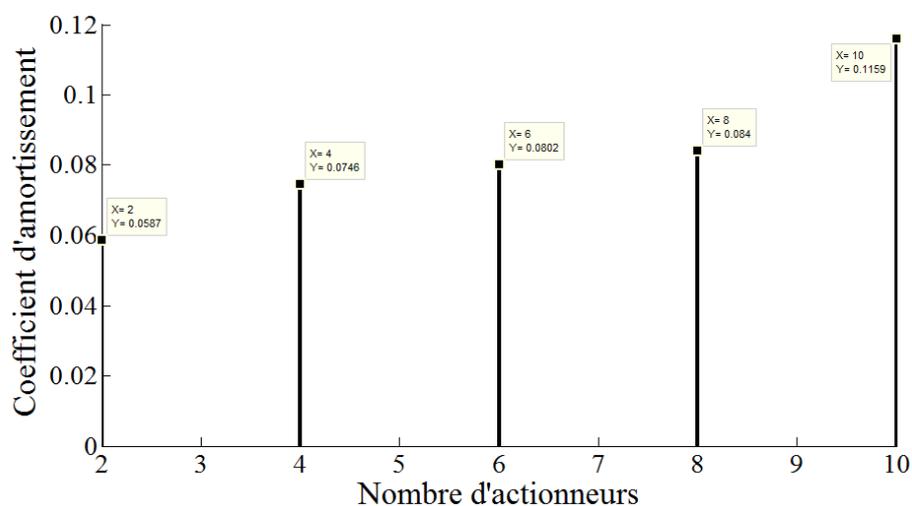


Figure IV.14. Coefficient d'amortissement en fonction de nombre d'actionneurs.

Les figures (IV.15) à (IV.19) représentent les potentiels électriques reçues par les actionneurs pour chaque configuration étudiée. Ici, pour chaque configuration.

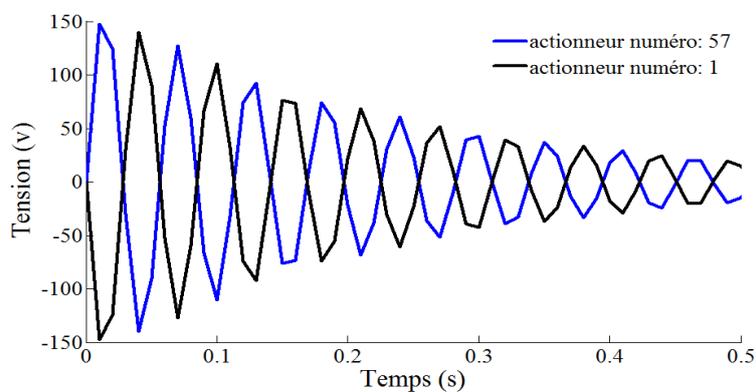


Figure IV.15. Tension électrique, cas : 2 actionneurs.

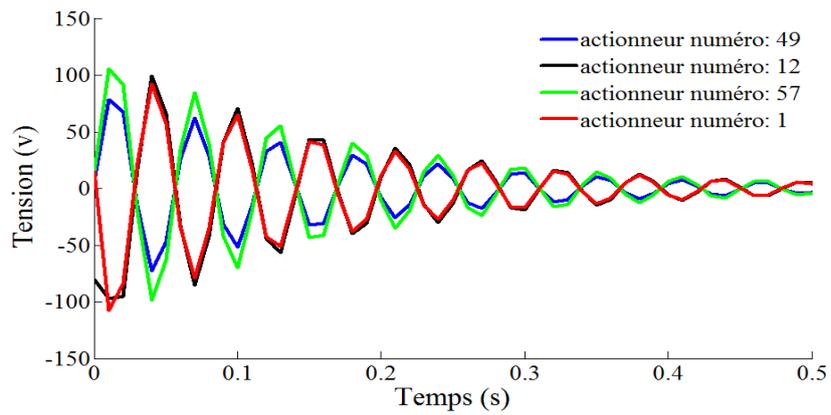


Figure IV.16. Tension électrique cas, 4 actionneurs.

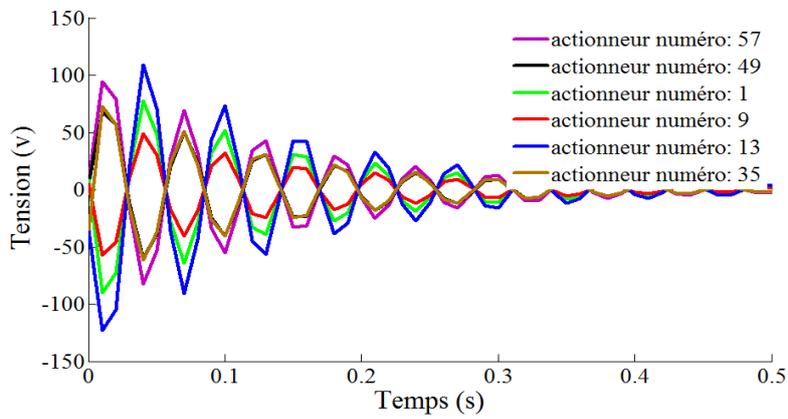


Figure IV.17. Tension électrique cas, 6 actionneurs

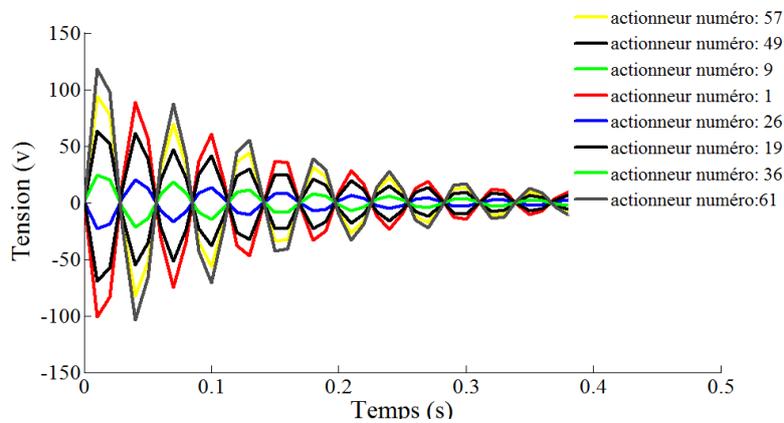


Figure IV.18. Tension électrique cas, 8 actionneurs.

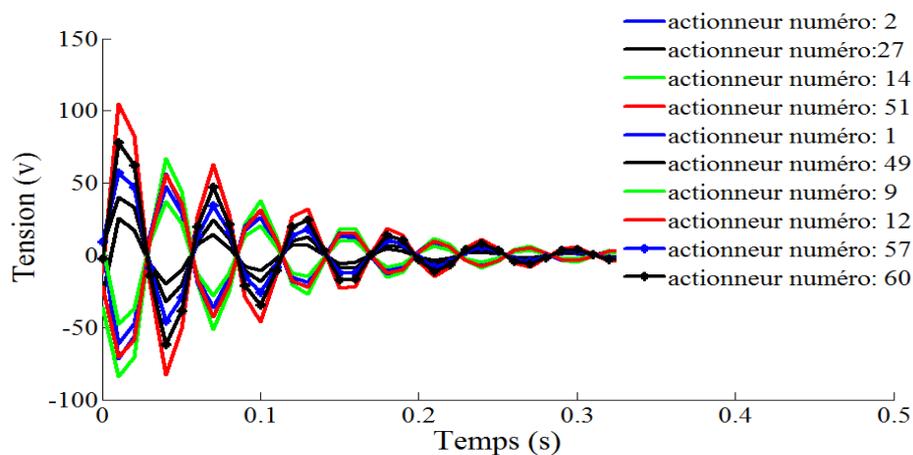


Figure IV.19. Tension électrique cas, 10 actionneurs.

IV.5 Conclusion

Ce chapitre a étudié le contrôle actif des vibrations de la plaque composite en utilisant les actionneurs piézoélectriques. On propose un modèle élément fini basé sur la théorie du premier ordre (FOSDT). Le positionnement optimal des actionneurs est basé sur la réduction au minimum une fonction objective basée sur l'algorithme LQR à l'aide d'un algorithme génétique. Le modèle du contrôle de vibration est appliqué pour les cas de deux, quatre, six, huit et dix actionneurs. Le modèle proposé est validé en utilisant le logiciel Ansys. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre d'actionneurs diminue le temps d'atténuation car le coefficient d'amortissement fourni par le système de contrôle augmente avec l'augmentation du nombre d'actionneurs. Néanmoins l'augmentation du nombre d'actionneurs exige plus d'énergie de contrôle et donc le coût du système de contrôle augmente. Donc, en conclusion, un compromis est recherché selon le cahier de charge imposé par l'utilisateur.

Conclusion Générale.

Cette thèse présente des travaux réalisés pour trouver des solutions à la problématique de la maîtrise des niveaux vibratoires des structures composites.

Les contributions apportées à travers ce travail concernent principalement le développement des modèles éléments-finis et des outils numériques capables de réaliser l'intégralité d'une étude de réduction des vibrations d'une structure en utilisant des pastilles piézoélectriques.

La revue de littérature a permis de définir les critères de performance et les différentes stratégies de contrôle applicables au contrôle actif.

Trois études distinctes ont été menées dans le présent travail. Dans la première étude, un modèle éléments-finis a été développé à l'aide du logiciel Matlab pour le cas d'une poutre FGM avec deux couches piézoélectriques collées sur ses surfaces supérieure et inférieure. Un algorithme basé sur la rétroaction directe des vitesses a été proposé pour régler automatiquement la tension électrique reçue par l'actionneur piézoélectrique. Les résultats ont montré que la couche piézoélectrique (actionneur) est efficace pour contrôler les vibrations lorsqu'elle est intégrée dans la structure FGM. De plus, la méthode proposée permet d'amortir efficacement le temps et l'amplitude de réponse des vibrations transversales.

Une deuxième étude a été proposée où un modèle éléments-finis d'une plaque FGM munie de couches piézoélectriques est développé à partir d'une formulation variationnelle. Les algorithmes génétiques sont utilisés dans cette partie de l'étude pour déterminer les paramètres du contrôleur LQR. Deux stratégies de contrôle complètement différentes sont développées et implémentées dans le logiciel ANSYS. Elles sont appliquées par la suite automatiquement aux actionneurs pour amortir les vibrations de la plaque FGM. Le premier contrôleur utilisé est de type PID et l'autre de type LQR. L'étude comparative entre les deux contrôleurs proposés a montré que le contrôle LQR donne de meilleurs résultats.

Enfin, dans la troisième et dernière partie de la thèse, un modèle éléments-finis basé sur la théorie du premier ordre (FOSDT) applicable à une plaque composite munie de pastilles piézoélectriques est proposé. Pour vérifier et valider le modèle, les fréquences naturelles de la plaque composite dotée de quatre pastilles piézoélectriques sont calculées et comparées à celles obtenues en utilisant le logiciel ANSYS. Les résultats obtenus en utilisant le modèle

proposé et ceux obtenus avec ANSYS ont été confrontés. Une concordance des résultats a été observée, ce qui démontre la pertinence du modèle.

Toujours dans cette dernière partie de la thèse, et afin d'améliorer l'efficacité de l'amortissement actif de la structure, le problème du positionnement des actionneurs et des capteurs piézo-électriques a été abordé. Une méthode de placement s'inspirant des travaux de (Daraji and Hale 2014) a été adaptée au cas étudié. Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes de l'identification du positionnement des actionneurs piézo-électriques. L'algorithme génétique y est utilisé comme outil d'optimisation en utilisant une fonction objective développée par (Kondoh, YATOMI, and Inoue 1990).

Dans la perspective de poursuivre les travaux de recherche développés dans le cadre de la présente thèse, des investigations dans le domaine du contrôle actif des vibrations peuvent être entreprises, notamment :

- La modélisation peut être étendue à d'autre type de structures plus complexes notamment aux lames d'hélicoptère et réflecteurs de satellites, de manière à mettre en œuvre les stratégies de placement et des fonctions objectives utilisées dans cette étude.
- D'autres améliorations à l'efficacité du contrôle actif des vibrations par capteurs et actionneurs situés de manière optimale peuvent être étudiées à l'aide des algorithmes : neural, H2 et systèmes de contrôle neuronaux flous.
- La Construction des dispositifs expérimentaux de différents types de structures, notamment aux poutres et plaques afin de prototyper le problème de contrôle actif des vibrations (AVC).

Références

Références

- Alam, M. Naushad. 2012. "Active Vibration Control of a Piezoelectric Beam Using PID Controller: Experimental Study." *Latin American Journal of Solids and Structures* 9 (6): 657–73.
- Aridogan, Ugur, and Ipek Basdogan. 2015. "A Review of Active Vibration and Noise Suppression of Plate-like Structures with Piezoelectric Transducers." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1045389X15585896.
- Balamurugan, V., and S. Narayanan. 2001. "Shell Finite Element for Smart Piezoelectric Composite Plate/shell Structures and Its Application to the Study of Active Vibration Control." *Finite Elements in Analysis and Design* 37 (9): 713–38.
- Batra, R. C., and X. Q. Liang. 1997. "The Vibration of a Rectangular Laminated Elastic Plate with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators." *Computers & Structures* 63 (2): 203–16.
- Bendary, I. M., M. Adnan Elshafei, and A. M. Riad. 2010. "Finite Element Model of Smart Beams with Distributed Piezoelectric Actuators." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.
- Benjeddou, A., M. A. Trindade, and R. Ohayon. 2000. "Piezoelectric Actuation Mechanisms for Intelligent Sandwich Structures." *Smart Materials and Structures* 9 (3): 328.
- Brissaud, Michel. 2007. *Matériaux Piézoélectriques: Caractérisation, Modélisation et Vibration*. PPUR presses polytechniques.
- Bruant, I., L. Gallimard, and Sh Nikoukar. 2011. "Optimization of Piezoelectric Sensors Location and Number Using a Genetic Algorithm." *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 18 (7): 469–75.
- Bruant, Isabelle, Laurent Gallimard, and Shahram Nikoukar. 2010. "Optimal Piezoelectric Actuator and Sensor Location for Active Vibration Control, Using Genetic Algorithm." *Journal of Sound and Vibration* 329 (10): 1615–35.
- Chandrashekhara, Kt, and A. N. Agarwal. 1993. "Active Vibration Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Devices: A Finite Element Approach." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 4 (4): 496–508.
- Chee, Clinton YK, Liyong Tong, and Grant P. Steven. 1998. "A Review on the Modelling of Piezoelectric Sensors and Actuators Incorporated in Intelligent Structures." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 9 (1): 3–19.
- Chhabra, Deepak, Gian Bhushan, and Pankaj Chandna. 2016. "Optimal Placement of Piezoelectric Actuators on Plate Structures for Active Vibration Control via Modified Control Matrix and Singular Value Decomposition Approach Using Modified Heuristic Genetic Algorithm." *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23 (3): 272–80.
- Dai, K. Y., G. R. Liu, X. Han, and K. M. Lim. 2005. "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Material (FGM) Plates Using Element-Free Galerkin Method." *Computers & Structures* 83 (17): 1487–1502.
- Daraji, A. H., and J. M. Hale. 2012. "Determination of State Space Matrices for Active Vibration Control Using Ansys Finite Element Package." In *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 1219–29. American Society of Mechanical Engineers.
- . 2014. "Reduction of Structural Weight, Costs and Complexity of a Control System in the Active Vibration Reduction of Flexible Structures." *Smart Materials and Structures* 23 (9): 95013.
- Djojodihardjo, Harijono, Mohammad Jafari, Surjatin Wiriadidjaja, and Kamarul Arifin Ahmad. 2015. "Active Vibration Suppression of an Elastic Piezoelectric Sensor and Actuator Fitted

Références.

- Cantilevered Beam Configurations as a Generic Smart Composite Structure." *Composite Structures* 132: 848–63.
- Dong, Xingjian, Zhike Peng, Wenming Zhang, HongXing Hua, and Guang Meng. 2014. "Research on Spillover Effects for Vibration Control of Piezoelectric Smart Structures by ANSYS." *Mathematical Problems in Engineering* 2014.
- Eiben, Agoston E., and James E. Smith. 2003. *Introduction to Evolutionary Computing*. Vol. 53. Springer.
- Elshafei, M. Adnan, and Fuzy Alraies. 2013. "Modeling and Analysis of Smart Piezoelectric Beams Using Simple Higher Order Shear Deformation Theory." *Smart Materials and Structures* 22 (3): 35006.
- Elshafei, Mostafa Adnan. 1996. "Smart Composite Plate Shape Control Using Piezoelectric Materials." Fuller, Christopher C., Sharon Elliott, and Philip A. Nelson. 1996. *Active Control of Vibration*. Academic Press.
- Haupt, Randy L., and Sue Ellen Haupt. 2004. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons.
- He, X. Q., T. Y. Ng, S. Sivashanker, and K. M. Liew. 2001. "Active Control of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators." *International Journal of Solids and Structures* 38 (9): 1641–55.
- Jovanović, Miroslav M., Aleksandar M. Simonović, Nemanja D. Zorić, Nebojša S. Lukić, Slobodan N. Stupar, and Slobodan S. Ilić. 2013. "Experimental Studies on Active Vibration Control of a Smart Composite Beam Using a PID Controller." *Smart Materials and Structures* 22 (11): 115038.
- Karagülle, H., L. Malgaca, and H. F. Öktem. 2004. "Analysis of Active Vibration Control in Smart Structures by ANSYS." *Smart Materials and Structures* 13 (4): 661.
- Kerur, S. B., and ANUP GHOSH. 2011. "Active Vibration Control of Composite Plate Using AFC Actuator and PVDF Sensor." *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 11 (2): 237–55.
- Khot, S. M., Nitesh P. Yelve, Rajat Tomar, Sameer Desai, and S. Vittal. 2012. "Active Vibration Control of Cantilever Beam by Using PID Based Output Feedback Controller." *Journal of Vibration and Control* 18 (3): 366–72.
- Kondoh, Shinji, Chikayoshi YATOMI, and Koichi Inoue. 1990. "The Positioning of Sensors and Actuators in the Vibration Control of Flexible Systems." *JSME International Journal. Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry* 33 (2): 145–52.
- Lam, K. Y., X. Q. Peng, G. R. Liu, and J. N. Reddy. 1997. "A Finite-Element Model for Piezoelectric Composite Laminates." *Smart Materials and Structures* 6 (5): 583.
- Mais, HAJ-RACHID, Christelle BLOCH, Wahiba RAMDANE-CHERIF, and Pascal CHATONNAY. n.d. "Différentes Opérateurs Évolutionnaires de Permutation: Sélections, Croisements et Mutations."
- Malgaca, Levent. 2010. "Integration of Active Vibration Control Methods with Finite Element Models of Smart Laminated Composite Structures." *Composite Structures* 92 (7): 1651–63.
- Mallardo, V., M. H. Aliabadi, and Z. Sharif Khodaei. 2012. "Optimal Sensor Positioning for Impact Localization in Smart Composite Panels." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1045389X12464280.
- Mao, Qibo, and Stanislaw Pietrzko. 2013. *Control of Noise and Structural Vibration: A MATLAB®-Based Approach*. Springer Science & Business Media.
- Mehrabian, Ali Reza, and Aghil Yousefi-Koma. 2011. "A Novel Technique for Optimal Placement of Piezoelectric Actuators on Smart Structures." *Journal of the Franklin Institute* 348 (1): 12–23.
- Muradova, Aliko D., and Georgios E. Stavroulakis. 2013. "Fuzzy Vibration Control of a Smart Plate." *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* 14 (3): 212–20.

Références.

- Narayanan, S., and V. Balamurugan. 2003. "Finite Element Modelling of Piezolaminated Smart Structures for Active Vibration Control with Distributed Sensors and Actuators." *Journal of Sound and Vibration* 262 (3): 529–62.
- Nonami, Kenzo, and Selim Sivrioglu. 1996. "Active Vibration Control Using Lmi-Based Mixed H_2/H_∞ State and Output Feedback Control with Nonlinearity." In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, 1:161–66. IEEE.
- Peng, Fujun, Alfred Ng, and Yan-Ru Hu. 2005. "Actuator Placement Optimization and Adaptive Vibration Control of Plate Smart Structures." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 16 (3): 263–71.
- Phung-Van, Phuc, L. De Lorenzis, Chien H. Thai, Magd Abdel-Wahab, and H. Nguyen-Xuan. 2015. "Analysis of Laminated Composite Plates Integrated with Piezoelectric Sensors and Actuators Using Higher-Order Shear Deformation Theory and Isogeometric Finite Elements." *Computational Materials Science* 96: 495–505.
- Rao, A. K., Kannan Natesan, M. Seetharama Bhat, and Ranjan Ganguli. 2007. "Experimental Demonstration of H_∞ Control Based Active Vibration Suppression in Composite Fin-Tip of Aircraft Using Optimally Placed Piezoelectric Patch Actuators." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.
- Reddy, J. N. 2007. "Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams." *International Journal of Engineering Science* 45 (2): 288–307.
- Reddy, Junuthula N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates." *Journal of Applied Mechanics* 51 (4): 745–52.
- Reddy, Junuthula Narasimha. 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC press.
- Rizet, Nicolas. 1999. "Contrôle Actif de Vibrations Utilisant Des Matériaux Piézo-Électriques."
- Robbins, D. H., and J. N. Reddy. 1991. "Analysis of Piezoelectrically Actuated Beams Using a Layer-Wise Displacement Theory." *Computers & Structures* 41 (2): 265–79.
- Roy, Tarapada, and Debabrata Chakraborty. 2009. "Optimal Vibration Control of Smart Fiber Reinforced Composite Shell Structures Using Improved Genetic Algorithm." *Journal of Sound and Vibration* 319 (1): 15–40.
- Sadri, A. M., J. R. Wright, and R. J. Wynne. 1999. "Modelling and Optimal Placement of Piezoelectric Actuators in Isotropic Plates Using Genetic Algorithms." *Smart Materials and Structures* 8 (4): 490.
- Sénéchal, Aurélien. 2011. "Réduction de Vibrations de Structure Complexe Par Shunts Piézoélectriques: Application Aux Turbomachines." Conservatoire national des arts et metiers-CNAM.
- Shen, M.-H. Herman. 1995. "A New Modeling Technique for Piezoelectrically Actuated Beams." *Computers & Structures* 57 (3): 361–66.
- Shirazi, A. Hossain Nezhad, H. R. Owji, and M. Rafeeyan. 2011. "Active Vibration Control of an FGM Rectangular Plate Using Fuzzy Logic Controllers." *Procedia Engineering* 14: 3019–26.
- Shopova, Elisaveta G., and Natasha G. Vaklieva-Bancheva. 2006. "BASIC—A Genetic Algorithm for Engineering Problems Solution." *Computers & Chemical Engineering* 30 (8): 1293–1309.
- Şimşek, Mesut. 2010. "Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories." *Nuclear Engineering and Design* 240 (4): 697–705.
- Sivanandam, S. N., and S. N. Deepa. 2007. *Introduction to Genetic Algorithms*. Springer Science & Business Media.
- Suleman, Afzal, Curran Crawford, and Antonio P. Costa. 2002. "Experimental Aeroelastic Response of Piezoelectric and Aileron Controlled 3D Wing." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 13 (2–3): 75–83.

Références.

- Takacs, Gergely, and Boris Rohal-Ilkiv. 2012. "Direct Closed-Loop Active Vibration Control System Prototype in ANSYS." In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, 244:1–12. Institute of Noise Control Engineering.
- Takács, Gergely, and Boris Rohal-Ilkiv. 2012. *Model Predictive Vibration Control: Efficient Constrained MPC Vibration Control for Lightly Damped Mechanical Structures*. Springer Science & Business Media.
- Trindade, Marcelo Areias. 2000. "CONTR ˆOLE HYBRIDE ACTIF–PASSIF DES VIBRATIONS DE STRUCTURES PAR DES MAT ERIAUX PI EZO ELECTRIQUES ET VISCO ELASTIQUES: POUTRES SANDWICH/MULTICOUCHES INTELLIGENTES." INSA Lyon.
- Tzou, H. S., and C. I. Tseng. 1990. "Distributed Piezoelectric Sensor/actuator Design for Dynamic Measurement/control of Distributed Parameter Systems: A Piezoelectric Finite Element Approach." *Journal of Sound and Vibration* 138 (1): 17–34.
- Wattanasakulpong, Nuttawit, and Variddhi Ungbhakorn. 2012. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with General Elastically End Constraints by DTM." *World Journal of Mechanics* 2 (6): 297.
- Wei, Jing-jun, Zhi-cheng Qiu, and Yue-chao Wang. 2010. "Experimental Comparison Research on Active Vibration Control for Flexible Piezoelectric Manipulator Using Fuzzy Controller." *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 59 (1): 31–56.
- Yamamoto, K., T. Yamamoto, Hiromitsu Ohmori, and A. Sano. 1997. "Adaptive Feedforward Control Algorithms for Active Vibration Control of Tall Structures." In *Control Applications, 1997., Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on*, 736–42. IEEE.
- Zorić, Nemanja D., Aleksandar M. Simonović, Zoran S. Mitrović, and Slobodan N. Stupar. 2012. "Optimal Vibration Control of Smart Composite Beams with Optimal Size and Location of Piezoelectric Sensing and Actuation." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1045389X12463465.

Annexes

Annexe A

A.1 Codes Matlab

```
%*****
%FILE: Genetic algorithm for optimal piezoelectric patches placement
%
% author: kouider
% e-Mail: kouider84@live.com
%*****

clear;close all;clc;
tic

best = Inf; % Initialize Best (arbitrarily large)
plotting = 1;
count = 1; % Used for plotting purposes
%*****
disp('*****');
disp(' Parameters de l''Algorithme Génétique ');
disp('*****');

nbregeneration = input(' Nombre de Générations');
pop_size = input(' Nombre d''individus ');
Cros_rate = input(' Probabilite de croisement ');
Mut_rate = input(' Probabilité de mutation ');
cro = input(' Nombre de patches');
ne = input(' Nombre délite ');

%*****
% Génération de population aléatoirement
%*****

for i=1:pop_size

    Modification_pop(:,i)=randperm(pop_size,cro)';

end
Modification_pop;

for ksel=1:pop_size
    Sel_pop_cri(ksel)= newplate(Modification_pop(:,ksel));
end
initF = max(Sel_pop_cri); % Initial fitness for plotting

[sel index]=sort(Sel_pop_cri);
Min_fit_sel=[];

for ksel=1:length(index)
```

Annexes.

```
        Min_fit_sel=[ Modification_pop(:,index(ksel)) , Min_fit_sel];
end

Sel_pop=Min_fit_sel(:,1:60);
GenomeLength=cr0;
nKids = length(Sel_pop)/2;
datapos=[];

for Gen = 1:nbregeneration
    indexx=1;
    xoverKids=[];
    for i=1:nKids
        % get parents
        rp1 = Sel_pop(:,indexx);
        indexx = indexx + 1;
        rp2 = Sel_pop(:,indexx);
        indexx = indexx + 1;
        % Extract the common genes between the two parents
        [r_inters, i1, i2] = intersect(rp1,rp2);
%-----
%OPTION1:Make a crossover between the parents if there is no
%intersection
%-----
        lr_inters = length(r_inters);
        if lr_inters == 0;
            xoverKids1(1:GenomeLength/2,1)=rp1(1:GenomeLength/2);

xoverKids1(GenomeLength/2+1:GenomeLength,1)=rp2(GenomeLength/2+1:GenomeLength);

            xoverKids2(1:GenomeLength/2,1)=rp2(1:GenomeLength/2);

xoverKids2(GenomeLength/2+1:GenomeLength,1)=rp1(GenomeLength/2+1:GenomeLength);

%-----
% OPTION 2: Take the entire interserction genes in the kid
%-----

        elseif lr_inters ~= 0

            C = union(rp1,rp2);
            if length(C)==GenomeLength
                q=randperm(length(C));
                xoverKids1=C(q(1:GenomeLength));
                q=randperm(length(C));
                xoverKids2=C(q(1:GenomeLength));
            else
                q=randperm(length(C));
                xoverKids1=C(q(1:GenomeLength));
                xoverKids2=C(q(GenomeLength+1:end));
                g=length(xoverKids2);
            end
        end
    end
end
```

Annexes.

```
    if g<GenomeLength
        q=randperm(GenomeLength);
        xoverKids2(g+1:GenomeLength,1)=xoverKids1(q(1:(GenomeLength-g)));
        end

        end
    end
    xover=[ xoverKids1 xoverKids2];
    xoverKids =[ xover ,xoverKids];
end
%-----
% Mutation % par 2 (ln1)
%-----
Mut_pop_cri=xoverKids;

for i=1:2:length(xoverKids)

    n=length(Mut_pop_cri(:,i));
    nr=1;

    q=randperm(length(Modification_pop),1);
        Mut_pop_cri(randperm(n,nr),i)=q;
        for j=1:length(Mut_pop_cri(:,i))-1
            q=randperm(length(Modification_pop),1);

            if Mut_pop_cri(j,i)==Mut_pop_cri(j+1,i)
                Mut_pop_cri(j,i)=q;
            end
        end
    end
end

%*****
% Sort Population and order for the next generation
%*****

    for kcros=1:length(xoverKids)
        Cros_pop_cri(kcros)= newplate(Mut_pop_cri(:,kcros));
    end

    % Finding Best Members for Score Keeping and Printing Reasons
    [current,currentGenome]= min(Cros_pop_cri);
    % current is the minimum value of the fitness array F
    % currentGenome is the index of that value in the F array

    % Stores New Best Values and Prints New Best Scores
    if current <= best
        best = current; % Makes new best
        bestGenome = Mut_pop_cri(:,currentGenome); % Uses that index to
find best value
    else
        best = B(count-1)
```

Annexes.

```
end
    B(count) = best; % Stores all best values
for plotting
    G(count) = Gen; % Stores all gen values
for plotting
    count = count + 1; % Increments number of
best found
    Sol_tr(:,count)=bestGenome;
    datapos=[Mut_pop_cri,datapos];

%*****
fprintf('Gen: %d| Fitness: %d | ',Gen, best); % printing of
%generation and fitness
    disp(char(bestGenome)); % Best genome so far
    Sel_pop=Mut_pop_cri ;

end

toc % Ends timer and prints elapsed time

% Graphs Fitness Curve if Plotting is Turned On
figure(1)
plot(G(:),B(:), '-r')
ylabel('Fitness');
xlabel('Generation');
```

Annexes.

```
%*****
%
%           FILE: fitness function
%           author: kouider
%           e-Mail: kouider84@live.com
%*****

function f= newplate(x)

Lx=500e-3; Ly=500e-3; h=2e-3;           % l, b and h of plate
E=21e10; nu=0.3; rho=7810;           % E, nu, rho of plate
e13=-12.351;e23=-12.351;tp=0.25e-3;
% *****
%
%           PLATE PARAMETERS
%*****
Nx=8; Ny=8; t=h;           % number of elements and thickness
%*****
%
%           NOD DETAILS
%*****
ele=1; NOD=[];
for i=1:Nx
for j=1:Ny
NOD(ele,:)= [j+(i-1)*(Nx+1)  j+(i-1)*(Nx+1)+1  j+(i)*(Nx+1)+1
j+(i)*(Nx+1)];
ele=ele+1;
end
end
%*****
%
%           NCO DETAILS
%*****
nod=1; lx=Lx/Nx; ly=Ly/Ny; NCO=[];
for i=1:(Nx+1)
for j=1:(Ny+1)
NCO(nod,:)= [lx*(j-1)  ly*(i-1)];
nod=nod+1;
end
end
%*****
%
%           BOUNDARY CONDITIONS
%*****
ndof=3;           % ndof: nodal dof
[nele elen]=size(NOD);           % elements & nodes
in an element
[tnod cord]=size(NCO);           % tnod: total nodes
edof=elen*ndof;           % edof: element dof
tdof=tnod*ndof;           % tdof: total dof
FN=[ 1 10 19 28 37 46 55 64 73];           % FN: Fixed nodes
BC=[]; bcnod=FN;           % bcnod: Boundary conditions of nodes
for bn=1:size(bcnod,2)           % .
pdof=[ (bcnod(bn)-1)*ndof+1:bcnod(bn)*ndof];           % pdof:
prescribed dof
BC=[BC,pdof];           % .
```

Annexes.

```
end
actdof=setdiff([1:tdof]', [BC]);

% .
% actdof: active dof

%*****
%
% STIFFNESS AND MASS MATRIX ASSEMBLY
%*****
KG=zeros (tdof); MG=zeros (tdof);
KeaG1=zeros (tdof,1);KeaG2=zeros (tdof,1);KeaG3=zeros (tdof,1);KeaG4=ze
ros (tdof,1);
KeaG5=zeros (tdof,1);KeaG6=zeros (tdof,1);KeaG7=zeros (tdof,1);KeaG8=ze
ros (tdof,1);
KeaG9=zeros (tdof,1);KeaG10=zeros (tdof,1);
for e=1:nele % for each element
en=NOD(e,:); % en: each element
nodes
eledof=[]; eledofp1=[]; eledofp2=[]; eledofp3=[]; eledofp4=[];
eledofp5=[]; eledofp6=[]; eledofp7=[]; eledofp8=[];eledofp9=[];
eledofp10=[]; % eledof: element dof
for i=1:length(en) % for each nod
eledof=[eledof (en(i)-1)*ndof+1:en(i)*ndof]; % element dof
end % end
Ke
Me
KG(eledof,eledof)=KG(eledof,eledof)+Ke;% KG: Global stiffness matrix
MG(eledof,eledof)=MG(eledof,eledof)+Me;% MG: Global mass matrix
end % end for each element

enp1=NOD(x(1),:);
enp2=NOD(x(2),:);
enp3=NOD(x(3),:);
enp4=NOD(x(4),:);
enp5=NOD(x(5),:);
enp6=NOD(x(6),:);
enp7=NOD(x(7),:);
enp8=NOD(x(8),:);
enp9=NOD(x(9),:);
enp10=NOD(x(10),:);
for i=1:length(enp1) % for each nod
eledofp1=[eledofp1 (enp1(i)-1)*ndof+1:enp1(i)*ndof]; % element dof
eledofp2=[eledofp2 (enp2(i)-1)*ndof+1:enp2(i)*ndof];
eledofp3=[eledofp3 (enp3(i)-1)*ndof+1:enp3(i)*ndof]; % element dof
eledofp4=[eledofp4 (enp4(i)-1)*ndof+1:enp4(i)*ndof];
eledofp5=[eledofp5 (enp5(i)-1)*ndof+1:enp5(i)*ndof]; % element dof
eledofp6=[eledofp6 (enp6(i)-1)*ndof+1:enp6(i)*ndof];
eledofp7=[eledofp7 (enp7(i)-1)*ndof+1:enp7(i)*ndof]; % element dof
eledofp8=[eledofp8 (enp8(i)-1)*ndof+1:enp8(i)*ndof];
eledofp9=[eledofp9 (enp9(i)-1)*ndof+1:enp9(i)*ndof]; % element dof
eledofp10=[eledofp10 (enp10(i)-1)*ndof+1:enp10(i)*ndof];
end
Kea = [ 0
(e13*ly*(2*t + tp))/4
```

Annexes.

```
(e23*lx*(2*t + tp))/4
0
-(e13*ly*(2*t + tp))/4
(e23*lx*(2*t + tp))/4
0
-(e13*ly*(2*t + tp))/4
-(e23*lx*(2*t + tp))/4
0
(e13*ly*(2*t + tp))/4
-(e23*lx*(2*t + tp))/4];

KeaG1 (eledofp1,1)=Kea;
KeaG2 (eledofp2,1)=Kea;
KeaG3 (eledofp3,1)=Kea;
KeaG4 (eledofp4,1)=Kea;
KeaG5 (eledofp5,1)=Kea;
KeaG6 (eledofp6,1)=Kea;
KeaG7 (eledofp7,1)=Kea;
KeaG8 (eledofp8,1)=Kea;
KeaG9 (eledofp9,1)=Kea;
KeaG10 (eledofp10,1)=Kea;
%KeaG11 (eledofp11,1)=Kea;
%KeaG12 (eledofp12,1)=Kea;
% *****
%
%                               FREQUENCY DOMAIN
% *****
KG=KG (actdof,actdof) ;
MG=MG (actdof,actdof) ;KeaG1=KeaG1 (actdof,1) ;KeaG2=KeaG2 (actdof,1) ;Kea
G3=KeaG3 (actdof,1) ;KeaG4=KeaG4 (actdof,1) ;KeaG5=KeaG5 (actdof,1) ;KeaG6
=KeaG6 (actdof,1) ;
% Applying boundary conditions
KeaG7=KeaG7 (actdof,1) ;KeaG8=KeaG8 (actdof,1) ;KeaG9=KeaG9 (actdof,1) ;Ke
aG10=KeaG10 (actdof,1) ;%KeaG11=KeaG11 (actdof,1) ;
KeaG12=KeaG12 (actdof,1) ;
[eig_vec,omega]=eig (KG,MG) ;
% Eigen analysis by "eig"
f= sqrt(diag(omega))./(4*pi) ;
% f: frequency vector
% *****
%                               state space equation and Control part
% *****
MM=eig_vec'*MG*eig_vec ;
KK=eig_vec'*KG*eig_vec ;
Kea1=-eig_vec'*KeaG1 ;
Kea2=-eig_vec'*KeaG2 ;
Kea3=-eig_vec'*KeaG3 ;
Kea4=-eig_vec'*KeaG4 ;
Kea5=-eig_vec'*KeaG5 ;
Kea6=-eig_vec'*KeaG6 ;
Kea7=-eig_vec'*KeaG7 ;
Kea8=-eig_vec'*KeaG8 ;
Kea9=-eig_vec'*KeaG9 ;
Kea10=-eig_vec'*KeaG10 ;
```

Annexes.

```
MM=MM(1:3,1:3);
KK=KK(1:3,1:3);
Kea1=Kea1(1:3);
Kea2=Kea2(1:3);
Kea3=Kea3(1:3);
Kea4=Kea4(1:3);
Kea5=Kea5(1:3);
Kea6=Kea6(1:3);
Kea7=Kea7(1:3);
Kea8=Kea8(1:3);
Kea9=Kea9(1:3);
Kea10=Kea10(1:3);

Demp=0.004;
omega=zeros(3);
omega(1,1)=f(1)*2*pi;%omeg1;
omega(2,2)=f(2)*2*pi;%omeg2;
omega(3,3)=f(3)*2*pi;%omeg3;

%=====
%==== state space :           X=A*X+B*U
%====                       y=C*x
%=====
A=[zeros(3),omega;-omega,zeros(3)];
A(4,4)=-omega(1,1).*2*Demp;A(5,5)=-omega(2,2).*2*Demp;A(6,6)=-
omega(3,3).*2*Demp;
B=[zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea3))
zeros(size(Kea4)) zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea1))
zeros(size(Kea3)) zeros(size(Kea4)) ...
zeros(size(Kea3)) zeros(size(Kea4)) ; Kea1 Kea2 Kea3 Kea4 Kea5
Kea6 Kea7 Kea8 Kea9 Kea10 ];
C=[Kea1 Kea2 Kea3 Kea4 Kea1 Kea2 Kea3 Kea4 ;...
zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea3))
zeros(size(Kea4)) zeros(size(Kea1)) zeros(size(Kea1))
zeros(size(Kea3)) zeros(size(Kea4))];
C=C';
save dataplate A
save dataplate1 B
save dataplate2 C
save dataplate3 omega
Q=[1e4*KK zeros(size(KK))
zeros(size(KK)) 1e4*MM];
R=1*eye(10);
f = care(A,B,Q,R);
f=trace(f);
```

Annexes.

```
% *****
%                                     Element STIFFNESS AND MASS MATRIX
% *****

clear all; close all; clc;                % Clear and close the screen
syms x y z lx ly t tp;                   % symbolic variables
P=[1 x y x^2 x*y y^2 x^3 x^2*y x*y^2 y^3 x^3*y x*y^3] ;
% interpolation function for w
phi=diff(P,x); sy=diff(P,y);              % angles phi and sy
PM=[subs(P,{x,y},{0,0});subs(phi,{x,y},{0,0});subs(sy,{x,y},{0,0});
% P matrix at nodal co-ordinates

subs(P,{x,y},{lx,0});subs(phi,{x,y},{lx,0});subs(sy,{x,y},{lx,0});
% .

subs(P,{x,y},{lx,ly});subs(phi,{x,y},{lx,ly});subs(sy,{x,y},{lx,ly});
; % .

subs(P,{x,y},{0,ly});subs(phi,{x,y},{0,ly});subs(sy,{x,y},{0,ly});
% .
N=P/PM;
% N Matrix
B=-z*[diff(diff(P,x),x);diff(diff(P,y),y);2*diff(diff(P,x),y)]/PM;
% B matrix
syms E nu rho e13 e23
% symbolic variables
E=[0 0 e13
    0 0 e23
    0 0 0];
% qessi=[ qessi11 0 0
%         0 qessi22 0
%         0 0 qessi33];
Bp=[0 0 1/tp];
D=E/(1-nu^2)*[1 nu 0; nu 1 0; 0 0 (1-nu)/2]; % Plane stress D
matrix Isotropic
K=int(int(int((transpose(B)*D*B),z,0,t),y,0,ly),x,0,lx); %
Stiffness matrix
M=int(int(int((transpose(N)*rho*N),z,0,t),y,0,ly),x,0,lx);% Mass
%matrix
Kea=int(int(int((transpose(B)*E*Bp'),z,t,t+tp),y,0,ly),x,0,lx);
```

Annexe B

B.1 Codes ANSYS pour le contrôle actif des vibrations des structures en FGM

```
finish
/clear
/title, FGM plate with piezo - Bendine K.
/nopr                                ! Supresses extended
interpreted data input
/com,                                ! Places comments in
the output
!/FILENAME,FGM_control_kouider,0    ! This sets the
jobname to 'beam_control'
/CONFIG,NRES,3000
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!  PARAMETERS      !!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! GEOMETRY

*set, b, 0.005    ! [m]
*set, S, 20.
*set, a, 0.4    ! [m]
*set, l, 0.4 ! [m]
*set,bpe,0.0001
!
! MATERIAL DUMMY
*set, nu_dummy, 0.3
*set, E_dummy, 71.700E9 ! [Pa]
*set, alpha_dummy, 23E-6 ! [1/K]
*set, kxx_dummy, 121.    ! [W/mK]
*set, dens_dummy, 1210
!
! MATERIAL TOP
! MATERIAL TOP
*set, E_b, 320.24e9    ! [Pa]
*set, nu_b, 0.26
*set,dens_b,3750
!
! MATERIAL BOT
*set, E_t, 105.70e9 ! [Pa]
*set, nu_t, 0.29
*set,dens_t,4429
!
! LOADING
*set, p, 1.
!
! FGM gradation law
*set, a_z, 1./b    ! [m^-1]
*set, n_z, 0.2
```

Annexes.

```
!
! MESH
*set, v_numb_z, b/8 ! 20, 40
!transient analysis
*set,Tstep,0.01
*set,Tstop,2
*set,Tres,0.01
*set,ALPHAD,0
*set,BETAD,0.00015
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!   mat_fgm_K MACRO   !!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*create, mat_fgm_K
  /nopr

  z_coord = arg2
  grad_common = (z_coord+0.5)**n_z
  E_fgm      = (E_t-E_b)*grad_common + E_b
  nu_fgm     = (nu_t-nu_b)*grad_common + nu_b
  den_fgm    = (dens_t-dens_b)*grad_common + dens_b
  /gopr
*end !mat_fgm_K
!
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!   PREP 7   !!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

/prep7
!

!Damping
ALPHAD,0
BETAD,0.00015
! ELEMENT TYPE SELECTION
! ELEMENT TYPE SELECTION
et, 1, solid186
et,2,solid5
!et,2,solid186
ContOn=1                ! Controller ON=1, OFF=0;
uH=200                  ! Controller saturation
uL=-uH
u=0

! =====
! Define problem parameters - PZT
```

Annexes.

```
! =====
!   - PZT Geometry (All PZTs QP16n)

Material properties for PVDF

s11=16.4e-12
s22=s11
s12=-5.74e-12
s13=-7.22e-12
s23=s13
s33=18.8e-12
s44=47.5e-12
s55=47.5e-12
s66=44.3e-12

pidns=7700                ! Density of PZT
d31=-179e-12             ! Piezoelectric strain
coefficients, C/N
d32=-179e-12             ! Manufacturers data combined with PZT5A
mat props
d33=350e-12
d24=584e-12
d16=584e-12

ept11=1730                ! Relative permittivity at
constant stress
ept22=1730
ept33=1700
!Piezo Properties APC 850
et,1,SOLID5,3            ! 3-D piezoelectric element
MP,DENS,1,pidns
MP,PERX,1,ept11          ! Permittivity at constant
stress
MP,PERY,1,ept22
MP,PERZ,1,ept33
tb,ANEL,1,,,1           ! Assembling elastic compliance
matrix
tbda,1,s11,s12,s13
tbda,7,s22,s23
tbda,12,s33
tbda,16,s66
tbda,19,s55
tbda,21,s44
tb,PIEZ,1,,,1          ! Piezoelectric strain matrix
tbda,3,d31
tbda,6,d33
tbda,9,d32
tbda,14,d24
tbda,16,d16
! =====
```

Annexes.

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ! GEOMETRY!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! =====

*do, j, -b/2,+b/2-v_num_z,v_num_z
block, 0, 1, 0, a, j, j+v_num_z
*enddo

block, 0, 1, 0, a, -b/2, -b/2-bpe
block, 0, 1, 0, a, +b/2, +b/2+bpe

! =====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! FGM MATERIAL
PROPERTIES!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! =====
counter = 1
*do, j, -b/2,+b/2-v_num_z,v_num_z
  z_coord = j
  counter = counter+1
  *use, mat_fgm_K,, z_coord
  mp, ex, counter, E_fgm
  mp, prxy, counter, nu_fgm
  mp, dens, counter, den_fgm
  VSEL,S,volu,,counter
  VATT,counter,,1,0
  vsel,all
*enddo
VSEL,S,LOC,Z,+b/2,+b/2+bpe
VSEL,A,LOC,Z,-b/2,-b/2-bpe
VATT,1,,2,0
VSEL,S,LOC,Z,-b/2,-b/2+v_num_z
VATT,2,,1,0
vsel, all
ebig=2e-2
ESIZE,ebig
vmesh, all
nsel,all
nummrg,node,1e-5
!nummrg,kp
ALLSEL
! =====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Define upper electrodes on
piezos!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! =====

!P1
asel,s,loc,z,+b/2+bpe
nsla,s,1
*get,p1,node,0,num,min
cp,1,volt,all
```

Annexes.

```
d,p1,VOLT,0,0
allsel

!P2
asel,s,loc,z,+b/2
nsla,s,1
*get,p2,node,0,num,min
cp,2,volt,all
d,p2,VOLT,0,0
allsel
!d,all,volt,0,0          ! Ground bottom electrode,

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!NSEL,S,LOC,Y,0
!NSEL,R,LOC,Z,0
!D,ALL,UZ,0
!NSEL,S,LOC,X,0
!NSEL,R,LOC,Z,0
!D,ALL,UZ,0
!NSEL,S,LOC,Y,1
!NSEL,R,LOC,Z,-b/2,b/2
!D,ALL,UZ,0
!NSEL,S,LOC,X,a
!NSEL,R,LOC,Z,-b/2,b/2
!D,ALL,UZ,0
!NSEL,ALL

! =====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! =====
nset,s,loc,x,0          ! Clamp left end of bimorph
d,all,ux,0,,,,uy,uz    ! Defines DOF constraints, clamp the end
nset,all
NSEL,ALL
finish

! =====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! =====

/SOLU
ANTYPE,MODAL          ! Modal analysis
nmodes = 5
modopt,LANB,nmodes   ! Block Lanczos solver
mxpand,nmodes,,,yes  ! Calculate element results
and

SOLVE
```

Annexes.

```
*get, f1, mode, 1, freq
FINISH
SAVE
/COM,      **** REVIEW THE RESULTS OF THE MODAL SOLUTION ****
/POST1
SET, LIST

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
-----
-----      PID
-----
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
dt=0.01
ns=300
nf=7105
Kp=-15000
Ki=-1500
Kd=-1000
dzp=0
integ=0
uH=250
uL=-uH

! =====
frce=-100
Tstep=0.01
Tstop=3
Tres=0.01
/SOLU
ANTYPE, 4
TRNOPT, FULL, , DAMP
LUMPM, 0
OUTRES, ALL, ALL

DELTIM, Tres           ! Specifies the time step sizes
TINTP, , 0.25, 0.5, 0.5

!At the starting point
TIME, 0.01             ! Sets time to Tstep seconds
F, 7105, FZ, frce
KBC, 1                ! Ramped load step
SOLVE
FDELE, 7105, ALL
*get, dz, node, 7105, u, z
*do, t, 2*Tres, 3, Tres
time, t
*get, dz, node, 7105, u, z

*set, x, dz
*set, integ, integ+x*dt
*set, diff, (x-dzp)/dt
```

Annexes.

```
*set,va,kp*x+ki*integ+kd*diff
*IF,va,LT,uL,THEN                ! If case to decide wheter
control difference is lower than limit
    va=uL                        ! Set the control difference to the
low limit
    *ELSEIF,va,GT,uH             ! Elseif case to decide wheter
the control difference is higher than limit
    va=uH                        ! Set the control difference to the
high limit
*ENDIF
d,p1,volt,va
*set,dzp,x
SOLVE
*enddo
```

B.2 Codes ANSYS pour le contrôle actif des vibration des plaques composites

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher start
!=====

FINISH
/CLEAR

/title, Controlled smart composite plate - Bendine K.
/nopr                ! Supresses extended
interpreted data input
/com,                ! Places comments in
the output
/FILNAME,composite_plate_control,0                ! This sets the
jobname to 'composite_plate_control'
/CONFIG,NRES,3000

/PREP7
SHPP,SILENT,ON                !Shape checking in silent
mode
SHPP,MODIFY,1,40
!*CFOPEN,resultscomposite,csv

*USE,parameters.mac                ! Load all the parameters
*USE,geometry.mac                ! Create model geometry
*USE,meshing.mac                ! Define materials and mesh the model
*USE,loads.mac                ! Defines clamp and other loads
*USE,modalan.mac
*USE,harmonic.mac
!*USE,trans.mac ! Initializes solution, defines an initial condition
Tstep=0.01
Tstop=5
Tres=0.01
*do,i,2,Ntimes,1
```

Annexes.

```
!*DO,t,2*Tstep,Tstop,Tstep
!   TIME,t           ! Sets time to Tstop second
   *USE,controller.mac
   !*VWRITE,t,y,u1,u2,u3,u4,x1,x2
   !%0.0e,%0.0f,%0.0f,,%0.0f,%0.0f,%0.0f,%0.0f,%0.0f
   SOLVE
TIME,soltime(i)
*ENDDO

FINISH

!*CFCLOSE
*USE,process.mac
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher parameters
!=====
ebig=10e-3                ! Global element size
frce=-2                   ! Force

!Timing
Tstep=0.01
Tstop=5
Tres =0.01

!Damping
ALPHAD,0
BETAD,0.00015
ET,1,SOLID45
!=====
! [0/-45/+45/90]T laminate layered orthotropic solid, with X,Y,Z DOF
!=====
sectype,1,shell
secdata,Hp,1,0
secdata,Hp,1,45
secdata,Hp,1,-45
secdata,Hp,1,90
!secdata,Hp,3,0
tref,0
!=====
! Define material properties
!=====
MP,ex,1,119e9
MP,ey,1,8.67e9
MP,ez,1,8.67e9
MP,gxy,1,5.18e9
MP,gxz,1,3.29e9
MP,gyz,1,3.29e9
MP,prxy,1,0.31
MP,prxz,1,0.31
MP,pryz,1,0.31
MP,dens,1,1550

!Control
ContOn=1                ! Controller ON=1, OFF=0;
uH=220                  ! Controller saturation

uL=-uH
!ut=0                  ! Initialize parameter
! =====
! State-Space Model
! =====
! =====
! State-Space Model
```

Annexes.

```
! =====
*DIM,A,ARRAY,2,2,1, , ,
*SET,A(1,1,1) , 0.4426
*SET,A(1,2,1) , 0.007989
*SET,A(2,1,1) , -99.4
*SET,A(2,2,1) , 0.4301

*DIM,B,ARRAY,2,4,1, , ,
*SET,B(1,1,1) , -8.114e-8
*SET,B(1,2,1) , 1.913E-7
*SET,B(1,3,1) , -1.913E-7
*SET,B(1,4,1) , 1.913E-7
*SET,B(2,1) , 1.242e-7
*SET,B(2,2) , 9.851e-7
*SET,B(2,3) , 1.247e-5
*SET,B(2,4) , 1.247e-5

*DIM,x,ARRAY,2,1,1, , ,

! LQ Controller Gain-----

*DIM,K,ARRAY,4,2,1, , ,
*SET,K(1,1,1) , -8.3212e4
*SET,K(1,2,1) , -0.0117e4
*SET,K(2,1,1) , 0.1572e4
*SET,K(2,2,1) , 0.1098e4
*SET,K(3,1,1) , -9.3547e4
*SET,K(3,2,1) , -0.0294e4
*SET,K(4,1,1) , -3.0113e4
*SET,K(4,2,1) , -0.0824e4
*DIM,u,ARRAY,4,1,1, , ,
*SET,u(1,1,1) , 0
*SET,u(2,1,1) , 0
*SET,u(3,1,1) , 0
*SET,u(4,1,1) , 0

! Temporary variables-----
*DIM,t1,ARRAY,2,1,1, , ,
*DIM,t2,ARRAY,2,1,1, , ,
*DIM,t3,ARRAY,1,1,1, , ,
*DIM,t4,ARRAY,2,1,1, , ,
*DIM,ut,ARRAY,4,1,1, , ,

! =====
! Define problem parameters - PZT
! =====
! - PZT Geometry (All PZTs QP16n)
L=50e-3 ! Length, Thicknessm
H=0.5e-3 ! , m
```

Annexes.

```
W=50e-3                ! width

!   - Material properties for PVDF

s11=16.4e-12
s22=s11
s12=-5.74e-12
s13=-7.22e-12
s23=s13
s33=18.8e-12
s44=47.5e-12
s55=47.5e-12
s66=44.3e-12

pidns=7700             ! Density of PZT
d31=-179e-12          ! Piezoelectric strain
coefficients, C/N
d32=-179e-12          ! Manufacturers data combined with PZT5A
mat props
d33=350e-12
d24=584e-12
d16=584e-12

ept11=1730             ! Relative permittivity at
constant stress
ept22=1730
ept33=1700

! =====
! Define problem parameters - Plate
! =====
Lb=400e-3
Wb=400e-3
Hb=2e-3
Hp=0.5e-3

! =====
! Define problem parameters - PZT Placement
! =====
! Define problem parameters - PZT Placement
! =====
!   - Top PZT 1
!-----
L1=0
W1=0
! =====
!   - Top PZT 2
!-----
L2=0
W2=290e-3
```

Annexes.

```
! =====  
!   - Top PZT 3  
!-----  
L3=0  
W3=350e-3  
! =====  
!   - Top PZT 4  
!-----  
L4=150e-3  
W4=50e-3
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher geometry
!=====

! -----
! Create model
! -----
BLOCK,0,Lb,0,Wb,0,Hb          ! Create the active QP16 piezo wafer
P1
! =====
! Divinding the base aluminum plate for better mesh distribution
! =====
WPROTA,,-90,
WPOFFS,,,W1
VSBW,ALL
WPOFFS,,,W
VSBW,ALL
WPAVE,0,0,0,
WPOFFS,,,W2
VSBW,ALL
WPOFFS,,,W
VSBW,ALL
WPAVE,0,0,0,
WPOFFS,,,W3
VSBW,ALL
WPOFFS,,,W
VSBW,ALL
WPAVE,0,0,0,
WPOFFS,,,W4
VSBW,ALL
WPOFFS,,,W
VSBW,ALL
!WPAVE,0,0,0,
WPROTA,,,90
WPOFFS,,,L1
VSBW,ALL
WPOFFS,,,L
VSBW,ALL
WPAVE,0,0,0,
WPOFFS,,,L4
VSBW,ALL
WPOFFS,,,L

WPCSYS,,0

WPCSYS,,0
! Top piezos
BLOCK,L1,L1+L,w1,w1+W,Hb,Hb+H
BLOCK,L2,L2+L,W2,W2+W,Hb,Hb+H
BLOCK,L3,L3+L,w3,w3+W,Hb,Hb+H
BLOCK,L4,L4+L,w4,w4+W,Hb,Hb+H
```

Annexes.

```
!=====  
! bottom piezos  
!=====  
BLOCK, L1, L1+L, w1, w1+W, 0, -H  
BLOCK, L2, L2+L, w2, w2+W, 0, -H  
BLOCK, L3, L3+L, w3, w3+W, 0, -H  
BLOCK, L4, L4+L, w4, w4+W, 0, -H
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher meshing
!=====
! =====
! Materials and element types
! =====
! Defining elements and materials:
! PZT-----
et,2,SOLID5,3                ! 3-D piezoelectric element
MP,DENS,2,pidns
MP,PERX,2,ept11              ! Permittivity at constant stress
MP,PERY,2,ept22
MP,PERZ,2,ept33
tb,ANEL,2,,,1               ! Assembling elastic compliance
matrix
tbda,1,s11,s12,s13
tbda,7,s22,s23
tbda,12,s33
tbda,16,s66
tbda,19,s55
tbda,21,s44
tb,PIEZ,2,,,1               ! Piezoelectric strain matrix
tbda,3,d31
tbda,6,d33
tbda,9,d32
tbda,14,d24
tbda,16,d16

!*****
! Assigning mesh size and materials, mesh process initiation Global
!*****

ESIZE,ebig
VSEL,S,LOC,Z,0,Hb           ! Selecting plate
VATT,1,1,1,0                ! Assigning plate material properties
VSEL,S,LOC,Z,0,-H           !Selecting piezos
VSEL,A,LOC,Z,Hb,Hb+H
VATT,2,1,2,0                !Assigning piezo material props
ALLSEL
VPLOT
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,ALL

!-----
!Go and merge some nodes (eg. use glue layers of materials together)
!-----
nset,all
nummrg,node,1e-5
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher Load
!=====

!=====
!Clamp left end of plate
!=====
nset,s,loc,x,0                ! Clamp left end of bimorph
d,all,ux,0,,,,uy,uz          ! Defines DOF constraints, clamp the end
nset,all
!=====
!Define upper electrodes on piezos
!=====
!P1
aset,s,loc,z,Hb+H
aset,r,loc,x,L1,L1+L
aset,r,loc,y,W1,W1+W
nsla,s,1
*get,ANTOP1,node,0,num,min
cp,1,volt,all
d,ANTOP1,VOLT,0,0
allsel
!=====
!P2
aset,s,loc,z,Hb+H
aset,r,loc,x,L2,L2+L
aset,r,loc,y,W2+1e-3,W2+10e-3+W
nsla,s,1
*get,ANTOP2,node,0,num,min
cp,2,volt,all
d,ANTOP2,VOLT,0,0
allsel
!=====
!P3
aset,s,loc,z,Hb+H
aset,r,loc,x,L3,L3+L
aset,r,loc,y,W3,W3+W
nsla,s,1
*get,ANTOP3,node,0,num,min
cp,3,volt,all
d,ANTOP3,VOLT,0,0
allsel
!=====
!P4
aset,s,loc,z,Hb+H
aset,r,loc,x,L4,L4+L
aset,r,loc,y,W4,W4+W
nsla,s,1
*get,ANTOP4,node,0,num,min
cp,4,volt,all
d,ANTOP4,VOLT,0,0
allsel
```

Annexes.

```
!=====
!Define lower electrodes on piezos (bonded side)
!=====
!P1
asel,s,loc,z,Hb
asel,r,loc,x,L1,L1+L
asel,r,loc,y,W1,W1+W
nsla,s,1
d,all,volt,0,0          ! Ground bottom electrode,
nsel,all

!P2
asel,s,loc,z,Hb
asel,r,loc,x,L2,L2+L
asel,r,loc,y,W2+1e-3,W2+10e-3+W
nsla,s,1
d,all,volt,0,0          ! Ground bottom electrode,
nsel,all

!P3
asel,s,loc,z,Hb
asel,r,loc,x,L3,L3+L
asel,r,loc,y,W3,W3+W
nsla,s,1
d,all,volt,0,0          ! Ground bottom electrode,
nsel,all

!P4
asel,s,loc,z,Hb
asel,r,loc,x,L4,L4+L
asel,r,loc,y,W4,W4+W
nsla,s,1
d,all,volt,0,0          ! Ground bottom electrode,
nsel,all
allsel,all
!-----
!Define gravitational field
!-----
acel,0,-9.81,0
fini
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher modalan
!=====
/SOLU
ANTYPE,MODAL                ! Modal analysis
nmodes = 10
modopt,LANB,nmodes         ! Block Lanczos solver
mxpand,nmodes,, ,yes      ! Calculate element results
and
SOLVE
*get,f1,mode,1,freq
FINISH
SAVE
/COM,      **** REVIEW THE RESULTS OF THE MODAL SOLUTION ****
/POST1
SET,LIST
FINISH

!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher harmonic
!=====

/SOLU
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL,,DAMP
LUMPM,0
OUTRES,ALL,ALL

DELTIM,Tres                ! Specifies the time step sizes
TINTP,,0.25,0.5,0.5
!=====
! Load equation by steps: 100*sin(frequency*{TIME})
!=====
Time= 10
NTIMES=500
Dt=Time/NTIMES
!
*dim,soltime,array,Ntimes
soltime(1)=0.
*do,i,2,Ntimes,1
soltime(i)=soltime(i-1)+Dt
*enddo
!
!*dim,force,array,Ntimes
*dim,voltage,array,Ntimes
*do,i,2,Ntimes,1
!force(i)=-1*sin(f1*soltime(i))
voltage(i)=20*sin(f1*soltime(i))
*enddo
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Ficher trans
!=====

Tstep=0.01
/SOLU
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL,,DAMP
LUMPM,0
OUTRES,ALL,ALL

DELTIM,Tres                ! Specifies the time step sizes
TINTP,,0.25,0.5,0.5

!At the starting point
TIME,Tstep                ! Sets time to Tstep seconds
F,1762,FZ,frce
KBC,1                    ! Ramped load step
SOLVE
FDELE,1762,ALL          ! Delete the load at the end

*GET,y,NODE,1762,U,Z
y=y*7
!*VWRITE,tstep,y,u,0,0
!%0.0e,%0.0f,%0.0f,%0.0f,%0.0f,

!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! process
!=====

/POST26                ! Enter time history
!FILE,'Controlled smart composite plate','rst','.'
NSOL,2,1762,U,Z,UZ_4
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2
FINISH
```

Annexes.

```
!=====
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Controller
!=====

! Sensor (Position readout)-----

!F,1762,Fz,force(i)
d,ANTOP4,VOLT,voltage(i),0      !P4
!FDELE,1762,ALL
*GET,y,NODE,1762,U,Z           ! Get the nodal position
y=y*10      ! Convert to mm
!y
! Space State-----
! x=A*x+B*u
!=====
!*MOPER,t1,A,MULT,y
*VFACT,u      !Scale factor applied to results
*VFUN,t2,COPY,B      !t2=B.*u
t3(1,1)=y      !t3=(y-C*x)
t3B=t3(1,1)      !Convert back from array to scalar
*VFACT,t3B      !Scale factor applied to results
*VFUN,t4,COPY,A      !t4=A.*y
*VOPER,x,t1,ADD,t4      !t3=A*x+B*u

! Save the states for diagnostics
x1=x(1,1)      ! Convert back from array to scalar
x2=x(2,1)      ! Convert back from array to scalar

*IF,ContOn,EQ,1,THEN
! Controller-----
!u=K*x
!*MOPER,ut,K,MULT,x      ! u=K*x, the LQ controller
  u(1,1) =-ut(1,1) !scalar
  u(2,1) =-ut(2,1)
  u(3,1) =-ut(3,1)
  u(4,1) =-ut(4,1)

!*IF,u(1,1),LT,uL,THEN      ! If case to decide wheter control
!      u(1,1)=uL
!*ELSEIF,u(1,1),GT,uH      ! Elseif case to decide wheter the
!      u(1,1)=uH
!      *ENDIF
!*IF,u(2,1),LT,uL,THEN      ! Set the control difference
!      u(2,1)=uL
!      *ELSEIF,u(2,1),LT,uL,THEN
!      u(2,1)=uH
!      *ENDIF
!*IF,u(3,1),LT,uL,THEN
!      u(3,1)=uL
!      *ELSEIF,u(3,1),LT,uL,THEN
```

Annexes.

```
!           u(3,1)=uH
!           *ENDIF
!*IF,u(4,1),LT,uL,THEN
!!           u(4,1)=uL
!           *ELSEIF,u(4,1),LT,uL,THEN
!           u(4,1)=uH
!           *ENDIF
! Actuator-----

           d,ANTOP1,VOLT,u(1,1),0   !P1
           d,ANTOP2,VOLT,u(2,1),0   !P2
           d,ANTOP3,VOLT,u(3,1),0   !P3
           d,ANTOP4,VOLT,u(4,1),0   !P4

*GET,y,NODE,1762,U,Z
*ENDIF
```

Contributions scientifiques Publication

- **Bendine, K., & Wankhade, R. L. (2016).** *Vibration Control of FGM Piezoelectric Plate Based on LQR Genetic Search. Open Journal of Civil Engineering, 6(01), 1.*
- **Bendine, K., Boukhoulda, F. B., Nouari, M., & Satla, Z. (2016).** *Active vibration control of functionally graded beams with piezoelectric layers based on higher order shear deformation theory. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 15(4), 611-620.*
- **Bendine, K., Boukhoulda, B. F., Nouari, M., & Satla, Z. (2016).** *Structural Modeling and Active Vibration Control of Smart FGM Plate through ANSYS. International Journal of Computational Methods, 1750042.*
- **K. Bendine, F.B. Boukhoulda, B. Haddag, M.Nouari.** *Active vibration control of composite plate with optimal placement of piezoelectric patches . Mechanics of Advanced Materials and Structures (under-review)*

Communication International

- **K.Bendine** "Active vibration control using piezoelectric material" CAM2013, Novembre 2013
- **A .smahat, K.Bendine, A. Megueni et Z.satla** "Finite element of functionally graded beam vibrations" 3eme conference internationale sur les matériaux et les structures en composite, December 2014
- **M.latrache, K. Bendine, M.N.Amrane** "optimal placement of piezoelectric actuator and sensor for active vibration of smart plate using genetic algorithm" CMEME 2015, Decembre 2015