

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

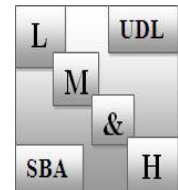
THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme : BOUNOUARA Fatima

Intitulé de la thèse



# Etude Du Comportement Mécanique Des Nano-Plaques

Composition du jury :

Mr. TOUNSI Abdelouahed	Pr	Président	UDL SBA
Mr. BENRAHOU Kouider Halim	Pr	Directeur de thèse	UDL SBA
Mr. ADDA BEDIA El Abbas	Pr	Examineur	UDL SBA
Mr. AMEUR Mohammed	MCA	Examineur	ENP D'ORAN
Mr. HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	Examineur	U. DE MASCARA
Mr. AMARA Khaled	MCA	Examineur	C.U. DE AINTMOUCHENT

Année universitaire : 2016-2017

## **REMERCIEMENT**

---

Ce produit de doctorat n'est que le résultat d'efforts fournis en synergie et en collaboration, grâce à notre laboratoire de matériaux et hydrologies à qui j'appartiens et lequel m'a accepté à bras ouverts au sein de son respectueux staff, à sa tête monsieur le Professeur ADDA BEDIA EL ABBES qui mérite mes chaleureux remerciements et reconnaissances.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le directeur de thèse le professeur BENRAHOU KUIDER HALIM de son soutien, de sa disponibilité et de sa compétence manifestés tout au long de ma préparation de la présente thèse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le respectable professeur TOUNSI ABDELOUHED de sa compréhension, son écoute et son esprit d'aide, qui n'a guère réfuté mes sollicitations rentrant dans le cadre de ma recherche scientifique.

Mes vifs remerciements aux membres de jury : ADDA BEDIA EL ABBES, HOUARI MOHAMMED SID AHMED, AMEUR MOHAMED, AMARA KHALED qui m'ont honoré pour examiner à cette occasion ma thèse de doctorat.

Enfin, je suis dans l'obligation de remercier mes chères amies de travail à savoir : le docteur Melle BELKORISSAT ISMAHENE et l'ingénieur de laboratoire LMH Melle BENYOUCEF HOURIA de leur assistance, leurs conseils et leur honnêtes durant ma préparation de cette thèse.

## **DEDICACE**

---

Je dédie ce modeste travail scientifique à toutes et à tous qui m'ont aidé de loin ou de près pour accomplir cette thèse.

Je le dédie en premier lieu à :

Mes parents qui m'ont soutenue par leurs interminables prières.

Ma petite famille à sa tête : mon marie, et mes enfants : Bochra,

Rayene et Achraf.

# ملخص

---

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم نظرية التشوه القص بالنسبة الصفر بغية التحليل الإهتزازات الحرة لصفحات نانو ذات المواد المتدرجة وظيفيا استنادا على أساس مرن من نوع "وينكلر باسترنالك". هذا النموذج يأخذ بعين اعتبار أثر السلم المختصر.

الصفات المادية هي افتراضيا فقط ذات طابع تغيري عن طريق السمك والصفات الحقيقية للصفحات نانو ' تحتسب باعتبار نموذج التجانس موري تانكا .

معادلات الحركة تستنتج باستعمال نظريات أرينغر اللامحلية. تم إجراء مقارنة النتائج الرقمية لصفائح نانو مع نتائج الدراسات السابقة للتحقق من دقة و فعالية النظرية الحالية.

كلمات المفتاح: نظرية مرونة اللامحلية، لوحة نانو، إهتزاز الحر، وينكلر باسترنالك.

## RESUME

---

L'objectif de ce travail est de présenter une théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro pour l'analyse de la vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées reposant sur fondation élastique. Le modèle prend en considération l'effets d'échelle réduite, la variation parabolique des déformations de cisaillement à travers de l'épaisseur de la nano plaque et par conséquent, ce model évite l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement.

Aussi, dans la présente théorie, l'effet de la déformation de cisaillement transversale est incluse dans les déplacements axiaux. En utilisant les efforts tranchants au lieu de rotations comme est connue dans les autres théories d'ordre élevées.

Les propriétés matériels sont supposés être varié seulement à travers l'épaisseur et les propriétés effectives de la nano plaque fonctionnellement graduée sont calculés en considérant le model d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant les expressions différentielles constitutives non locales d'Eringen en conjonction avec la théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro par l'intermédiaire du principe d'Hamilton.

Les résultats numériques pour la vibration des nano plaques en FG reposant sur fondations élastiques sont présentés et comparés avec les solutions existantes. Les effets de l'échelle, la déformation de cisaillement, indice matériel, le paramètre de modules de Winkler et le paramètre du module de cisaillement de Pasternak sur les réponses vibratoires des nano plaques fonctionnellement graduées sont examinées.

**Mots clés :** théorie d'élasticité non locale ; nano plaque ; vibration libre ; théories des plaques ; matériaux fonctionnellement graduées.

## ABSTRACT

---

The objective of this work is to present a zeroth-order shear deformation theory for free vibration analysis of functionally graded (FG) nanoscale plates resting on elastic foundation. The model takes into consideration the influences of small scale and the parabolic variation of the transverse shear strains across the thickness of the nanoscale plate and thus, it avoids the employ use of shear correction factors.

Also, in this present theory, the effect of transverse shear deformation is included in the axial displacements by using the shear forces instead of rotational displacements as in available high order plate theories.

The material properties are supposed to be graded only in the thickness direction and the effective properties for the FG nanoscale plate are calculated by considering Mori–Tanaka homogenization scheme. The equations of motion are obtained using the nonlocal differential constitutive expressions of Eringen in conjunction with the zeroth-order shear deformation theory via Hamilton’s principle.

Numerical results for vibration of FG nanoscale plates resting on elastic foundations are presented and compared with the existing solutions. The influences of small scale, shear deformation, gradient index, Winkler modulus parameter and Pasternak shear modulus parameter on the vibration responses of the FG nanoscale plates are investigated.

**Keywords:** Nonlocal elasticity theory; Nanoscale-plates; Free vibration; Plate theory; Functionally graded materials.

## TABLES DE MATIERES

---

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

### Introduction générale

1. Introduction.....	1
2. Objectif Et Plan De La Thèse.....	3

### Chapitre I : Les Nanomatériaux

I.1. INTRODUCTION.....	6
I.2. DEFINITIONS DES NANOMATERIAUX.....	6
I.3. OBSERVER A L'ECHELLE NANOMETRIQUE.....	7
I.3.1. Les propriétés remarquables de la matière à l'échelle nanométrique.....	8
I.4. LES FAMILLES DE NANOMATERIAUX.....	9
I.4.1. Les nano-objets .....	9
I.4.2. Les matériaux nanostructurés .....	10
I.5. MODELISER LES PHENOMENES POUR MIEUX LES COMPRENDRE ET LES MAITRISER.....	12
I.5.1. L'approche top-down (ou descendante).....	12
I.5.2. L'approche bottom-up (ou ascendante) .....	12
I.6. PROCÉDES DE FABRICATION DES NANOMATERIAUX.....	13
I.6.1. Procédés par voie physique .....	13
I.6.2. Procédés par voie chimique .....	14
I.6.3. Procédés par voie mécanique .....	14
I.7. PROPRIETES DES NANOMATERIAUX .....	14
I.7.1. Propriétés mécaniques.....	14
I.7.2. Propriétés électriques .....	15
I.7.3. Propriétés optiques.....	15

I.7.4. Propriétés de transfert thermique.....	15
I.7.5. Propriétés de barrière .....	15
I.7.6. Propriétés magnétiques.....	15
I.7.7. Propriétés catalytiques.....	15
I.8. CHAMPS D'APPLICATIONS .....	16
I.9. LES NANOTECHNOLOGIES DANS LE DOMAINE DE GENIE CIVIL.....	17
I.10. LES RISQUES LIES AUX NANOMATERIAUX.....	18
I.11. CONCLUSION.....	18

## **Chapitre II : Les Nano Plaques Fonctionnellement Graduées -FGM**

II.1. LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETE (FGM.....	20
II.1.1. Introduction.....	20
II.1.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	20
II.1.3. Différences entre matériaux à fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels.....	22
II.1.4. Historique sur le développement des matériaux FGM.....	24
II.1.5. Procédé de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués .....	27
II.1.5.1. Coulage en bande (Tape Casting) .....	27
II.1.5.2. Projection plasma.....	27
II.1.5.3. Compaction sèche des Poudres.....	27
II.1.5.4. Frittage et Infiltration .....	28
II.1.5.5. Dépôt par électrophorèse .....	28
II.1.6. Propriétés effectives des FGM.....	28
II.2. HOMOGENEISATION DU MATERIAUX FGM.....	29
II.2.1. Technique d'homogénéisation.....	30
II.2.2. Un Volume Élémentaire Représentatif (VER) .....	30
II.2.3. Quelques méthodes usuelles d'homogénéisations.....	30
II.2.3.1. Approche auto-cohérent.....	31
II.2.3.2. Solution diluée.....	31
II.2.3.3. Modèle de Mori –Tanaka.....	31
II.2.3.4. Bornes de Voigt et Reuss.....	32
II.3. THEORIES DES PLAQUES.....	33
II.3.1. Introduction.....	33
II.3.2. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	34
II.3.2.1. Propriétés matérielles des plaques P-FGM.....	35
II.3.2.2. Propriétés matérielles des plaques S-FGM.....	36
II.3.2.3. Propriétés matérielles des plaques E-FGM.....	37
II.3.4. Théories des plaques.....	38
II.3.4.1. Théorie classique des plaques.....	38
II.3.4.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	39



II.3.4.3. Facteur de correction transversal.....	41
II.3.4.4. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	42
II.4. VERS L'UTILISATION D'UN MODELE DE COMPORTEMENT NON-LOCAL.....	46
II.4.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non-locale.....	46
II.4.2. Théories non-locales à gradient.....	47
II.4.3. Théories non-locales intégrales.....	48
II.5. CONCLUSION.....	49

### **Chapitre III : Etude De La Vibration Libre Des Nano-Plaques FGM Reposant Sur Des Fondations Elastiques**

III.1. INTRODUCTION .....	51
III.2. DESCRIPTION DE LA NANO PLAQUE UTILISEE NOYEE DANS UN MILIEU ELASTIQUE.....	51
III.3. MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES.....	52
III.4. CINEMATIQUE .....	54
III.5. LA THEORIE NON LOCALE ET DES RELATIONS CONSTITUTIVES.....	56
III.6. EQUATIONS DE MOUVEMENT .....	57
III.7. SOLUTION EXACTE DE LA NANO PLAQUE FONCTIONNELLEMENT.....	62
III.8. CONCLUSION .....	63

### **Chapitre IV : Résultats Et Discussion**

IV.1. INTRODUCTION .....	64
IV.2. ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES PLAQUES ONCTIONNELLEMNT GRADUEES FGM A L'EHELLE MACROSCOPIQUE.....	64
IV.2.1. Validation des résultats .....	64
IV.3. ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES NANO PLAQUES FG A L'EHELLE NANOMETRIQUE.....	67
IV.3.1. Validation des résultats.....	67
IV.3.2. Effet du paramètre non local, l'épaisseur de la plaque, l'indice matériel et les paramètres de la fondation élastique de type « Winkler –Pasternak » sur la fréquence fondamental adimensionnels d'une nano plaque carré fonctionnellement graduée.....	71

## ***Tables Des Matières***

IV.3.3. Effet du paramètre de Winkler .....	73
IV.3.4. Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak .....	76
IV.4. CONCLUSION.....	78
<b>Conclusion générale</b>	
Conclusion générale.....	79
<b>Référence bibliographique</b>	
Référence bibliographique.....	81

## **LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES**

---

# LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES

→ Liste Des Tableaux :

## Chapitre I

**Tableau I-1 :** Domaine d'application par type de nanomatériau (INRS, 2012)..... 17

## Chapitre II

**Tableau II-1 :** Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon..... 26

**Tableau II-2 :** comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal..... 29

## Chapitre IV

**Tableau IV-1 :** fréquence fondamentale adimensionnelle  $\hat{\omega}$  pour les plaques carrées..... 66

**Tableau IV-2:** Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnues..... 68

**Tableau IV-3 :** Comparaison des fréquences fondamentales ( $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ ) des nano plaques ( $a = 10, E = 30 \times 10^6, \rho = 1, \nu = 0.3$ )..... 69

**Tableau IV-4:** Comparaison des fréquences naturelles des nano- plaques fonctionnellement graduées ( $a = 10, n = 5$ )..... 70

**Tableau IV-5 :** La fréquence fondamentale adimensionnel ( $\tilde{\omega} = \omega(a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ ) d'une nano plaque carré FGM ( $k_w = k_s = 100, a = 10$ )..... 72

**Tableau IV-6 :** La fréquence fondamentale adimensionnel ( $\tilde{\omega} = \omega(a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ ) d'une nano plaque carré FGM ( $k_w = k_s = 100, a = 10$ )..... 73

➔ Liste Des figures :

**Chapitre I**

<b>Fig. I.1.</b> Loi d'échelle nanométrique (site web).....	7
<b>Fig. I.2.</b> Augmentation de la surface par nano structuration des matériaux.....	8
<b>Fig. I.3.</b> Nanoparticules de dioxyde de titane observées en microscopie électronique à balayage (INRS ,2012).....	9
<b>Fig. I.4.</b> Nanotubes de carbone multiparois observés en microscopie électronique à balayage (INRS ,2012).....	10
<b>Fig. I.5.</b> Classification des nanomatériaux selon la norme ISO TS 80004-1.....	11
<b>Fig. I.6.</b> Les deux approches d'élaboration des nanomatériaux manufacturés.....	13

**Chapitre II**

<b>Fig. II.1.</b> Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGMs), (Yin et al, 2004).....	21
<b>Fig. II.2.</b> Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM.....	22
<b>Fig. II.3.</b> Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1997).....	23
<b>Fig. II.4.</b> Les champs potentiels de l'application des FGMs.....	24
<b>Fig. II.5.</b> Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM (Koizumi, 1997).....	25
<b>Fig. II.6.</b> Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM.....	29
<b>Fig. II.7.</b> Géométrie d'une plaque FGM.....	34
<b>Fig. II.8.</b> Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.....	35
<b>Fig. II.9.</b> Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.....	37
<b>Fig. II.10.</b> Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.....	38
<b>Fig. II .11.</b> Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff (Reddy, 2003).....	39

<b>Fig. II.12.</b> Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin (Reddy, 2003).....	40
<b>Fig. II.13.</b> Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) (Carrera et Brischetto, 2008).....	41
<b>Fig. II.14.</b> Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT (Nguyen, 2009).....	42

### Chapitre III

<b>Fig.III.1.</b> Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur des fondations élastique.....	51
<b>Fig.III.2.</b> Cas d'une poutre repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak.....	52
<b>Fig.III.3.</b> Variation de la fraction volumique de phase céramique à travers l'épaisseur.....	54

### Chapitre IV

<b>Fig. IV.1.</b> Effet du paramètre de la fondation de Winkler d'une nano plaque FG sur le rapport des fréquences ( $\bar{\omega}_{NL} / \bar{\omega}_L$ ) pour différent valeur du paramètre non local ( $\mu$ ), ( $a / h = 10$ , $n = 5$ ).....	74
<b>Fig. IV.2.</b> Effet du paramètre de Winkler sur la fréquence non locale ( $\bar{\omega}_{NL}$ ) d'une nano plaque carré FG pour différents valeurs du rapport géométriques ( $a/h$ ). ( $k_s = 0$ , $\mu = 2$ , $n = 5$ ).....	76
<b>Fig. IV.3.</b> Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak d'une nano plaque carré FG sur le rapport des fréquences ( $\bar{\omega}_{NL} / \bar{\omega}_L$ ) pour différent valeur du paramètre non local ( $\mu$ ), ( $k_w = 100$ , $a / h = 10$ , $n = 5$ ).....	77
<b>Fig. IV.4.</b> Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak sur la fréquence non locale ( $\bar{\omega}_{NL}$ ) d'une nano plaque carré FG pour différents valeurs du rapport géométriques. ( $a/h$ ), ( $k_w = 100$ , $\mu = 2$ , $n = 5$ ).....	78

## **LISTE DES NOTATIONS**

---

## LISTE DES NOTATIONS

---

$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contrainte
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformation
$[Q_{ij}]$	Matrice de rigidité réduite
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$E_m$	Module de Young du métal
$E_c$	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
$\rho_m$	La densité du métal
$\rho_c$	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$\mu$	Paramètre non local
$n, k$	Indice matériel de la plaque P-FGM
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)



$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta U_p$	Variation de l'énergie de déformation de la plaque
$\delta U_f$	Variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique
$\delta K$	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$Q_x, Q_y$	Effort tranchant d'ordre élevé
$K_w, K_s$	Les coefficients transversales de cisaillement et de rigidité du milieu élastique
$\partial$	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Sont des nombres naturels.
$(m, n)$	ième mode propre
$q(x, y)$	Charge transversale
$(I_i, J_i, K_i, J_i^s)$	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice
$\nabla$	Laplacien

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

### 1. Introduction

Les théories d'élasticité locales (théories classiques) sont utilisées en considérant l'hypothèse que la contrainte dans un point est fonction de la déformation au niveau du même point. Par contre les théories d'élasticités non locales (les théories non classiques) proposées par Eringen (1972 et 1983) supposent que la contrainte dans un point dépend des déformations de tous les points du milieu continu.

Dans la théorie de l'élasticité non-locale, les forces entre les atomes et la longueur de l'échelle intérieure sont inclus dans les expressions des équations constitutives (Reddy and Pang 2008, Lu et al. 2008, Heireche et al. 2008a, b, Benzair et al. 2008, Amara et al. 2010, Hashemi and Samaei 2011, Berrabah et al. 2013, Benguediab et al. 2014, Zidour et al. 2014, Samaei et al. 2015, Adda Bedia et al. 2015, Besseghier et al. 2015, Aissani et al. 2015).

Dans ces dernières récentes années, les nanostructures tel que les nano-plaques et les nano poutres sont employées dans les instruments de la nano-électro-mécaniques (NEMS) et la micro-électro-mécaniques (MEMS) et sont actuellement des structures de l'ingénierie.

Par conséquent, plusieurs recherches sont effectuées dans les études expérimentales et théoriques. Katsnelson et Novoselov (2007) ont investigué les caractéristiques électroniques des feuilles de graphène. Bunch et al. (2007) ont discuté quelques résultats expérimentaux en utilisant des résonateurs électromécaniques fabriqués à partir des feuilles de graphène mono et multicouches. Aghbabaie et Reddy (2009) ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement des plaques de troisième ordre pour étudier analytiquement la flexion et la vibration libre des nano plaques rectangulaires simplement appuyée. Pradhan et Phadikar (2009) ont employé **la théorie classique non locale des plaques pour analysé la vibration** des feuilles de graphène multicouches noyé dans un milieu élastique en considérant les effets d'échelles.

En se basant sur une théorie non locale d'ordre élevée des poutres, Pradhan (2009) a utilisé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) en conjonction avec les relations différentielles constitutives non locales d'Eringen pour étudier la réponse du flambement des nano plaques isotropes.

Pradhan et Kumar (2010) ont discuté l'influence de la taille réduite sur le comportement vibratoire des feuilles de graphène orthotropes monocouches noyée dans un milieu élastique.

Samaei et al. (2011) ont examiné la stabilité des feuilles de graphène monocouches noyée dans un milieu élastique de type de Pasternak en employant une théorie des plaques non locale de Mindlin.

Tounsi et al (2013a) ont étudié la stabilité thermique des poutres à l'échelle nanométrique. Tounsi et al (2013b) ont analysé l'effet non local sur les propriétés du flambement thermique des nanotubes de carbone en double paroi.

Nami et Janghorban (2013) ont étudié le comportement statique des nano plaques rectangulaires en utilisant la théorie non locale de déformation de cisaillement trigonométrique.

En introduisant les équations de l'élasticité non locale d'Eringen dans les théories de la plaque à deux variables, Sobhy (2014) a étudié la vibration libre, flambement mécanique et le flambement thermiques des feuilles de graphène multicouches.

En raison de leurs nouvelles propriétés thermomécaniques, les applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont été introduit dans diverses applications d'ingéniering (Tounsi et al, 2013b;. Boudarba, et al, 2013;. Yaghoobi et Torabi, 2013; Chakraverty et Pradhan 2014;. Liang, et al, 2014; Zidi et al, 2014;. Bousahla et al, 2014;. Belabed et al, 2014;. Ait Amar Meziane et al, 2014;. Hebali et al, 2014;. Ait Yahia . et al, 2015; Ziane et al, 2015).

Actuellement, les micro/nano structures fonctionnellement gradués sont devenus considérablement utiles dans nombreuses applications modernes d'ingéniering tels que les structures aéronautiques, l'industrie microélectronique, les constructions ultrasensibles, des rotors de turbine de gaz et de vapeur. Il semblerait que les structures nanométriques fonctionnellement gradués ont de nombreux avantages sur les structures nanométriques isotropes, tel que les petites contraintes thermiques, les concentrations de contraintes et atténuation des ondes de contraintes etc.

Le développement de la technologie des matériaux FGM ont mené à utiliser dans l'échelle nano et micro système des dispositifs tels que des capteurs, les nano fils, microscopes à force atomique, des actionneurs, des couches minces à améliorer leurs performances (Fu et al., 2003;. Lee et al., 2006; Lu et al 2011; Lun et al., 2006; Moser et Gijs, 2007;. Rahaeifard et al, 2009; Stölken et Evans, 1998; Witvrouw et Mehta, 2005).

Jung et Han (2013) ont développé un modèle pour le comportement vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduée en matériau FGM sigmoïde (S-FGM) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre.

Natarajan et al. (2012) ont étudié le comportement de vibration libre flexionnel des nano plaques FG en utilisant la méthode des éléments finis.

Hosseini-Hashemi et al. (2013) ont présenté une solution analytique exacte pour la vibration libre des nano plaques FG circulaire / annulaire de Mindlin en utilisant l'élasticité non locale.

Récemment, Larbi Chaht et al (2015) ont étudié la flexion et la stabilité des nano poutres fonctionnellement graduées (FG) introduisant l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Belkorissat et al. (2014) ont étudié les propriétés de vibration des nano plaques en utilisant une nouvelle théorie non locale hyperbolique raffinée.

Ansari et al. (2015) ont examiné les caractéristiques de vibration et de flambement de nano plaques FG soumises à des charges thermiques basé sur la théorie de l'élasticité du surface.

Zemri et al. (2015) ont présenté une théorie non locale de déformation de cisaillement raffinée pour la réponse mécanique de la poutre FG à l'échelle nanométrique.

## **2. Objectif Et Plan De La Thèse**

L'objectif principal de cette thèse est de développer une théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT) est étendue pour la première fois pour l'analyse des vibrations des nano plaques fonctionnellement graduées noyé dans un milieu élastique.

Cette théorie (ZSDT) est utilisée par Ray (2003) pour les plaques composites stratifiées et introduit l'effet de déformation de cisaillement transversal par l'intermédiaire des forces de cisaillement au lieu des angles de rotation comme dans les théories de déformation de cisaillement existantes.

La théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT) utilise les cinq inconnues comme dans le cas de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), elle respecte les conditions de la contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utilisée le facteur de correction de cisaillement.

En outre, l'effet d'échelle est pris en compte en utilisant les relations constitutives non locales d'Eringen.

Suivant ces objectifs, ce manuscrit est divisé en deux grandes parties :

**Le premier chapitre** est consacré à donner une définition des nanomatériaux, leurs propriétés à l'échelle du nanomètre et intérêt, techniques de synthèse, leurs domaines d'application ainsi que leurs dangers.

**Le deuxième chapitre** est articulé autour de trois parties. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions générales concernant les matériaux à gradient de propriétés «FGM», leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, leurs domaines d'application.

En deuxième lieu, on a présenté les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives, les différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation des différents types de théories non locales.

**Le troisième chapitre** porte sur le développement d'un modèle analytique pour l'analyse de la vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques selon la théorie non-locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT), en assumant que les propriétés matérielles de la nano plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur.

**Le quatrième chapitre** est consacré à la validation de la présente théorie, développée au quatrième chapitre, dans la résolution des problèmes dynamiques (vibration libre) des nano plaques noyée dans un milieu élastique. Les résultats numériques trouvés seront comparés à ceux disponibles dans la littérature.

**Finalemment**, le travail se termine par une conclusion générale résumant les résultats obtenus et les perspectives envisagés.

## **CHAPITRE I**

---

# **LES NANOMATERIAUX**



## **I.1. INTRODUCTION**

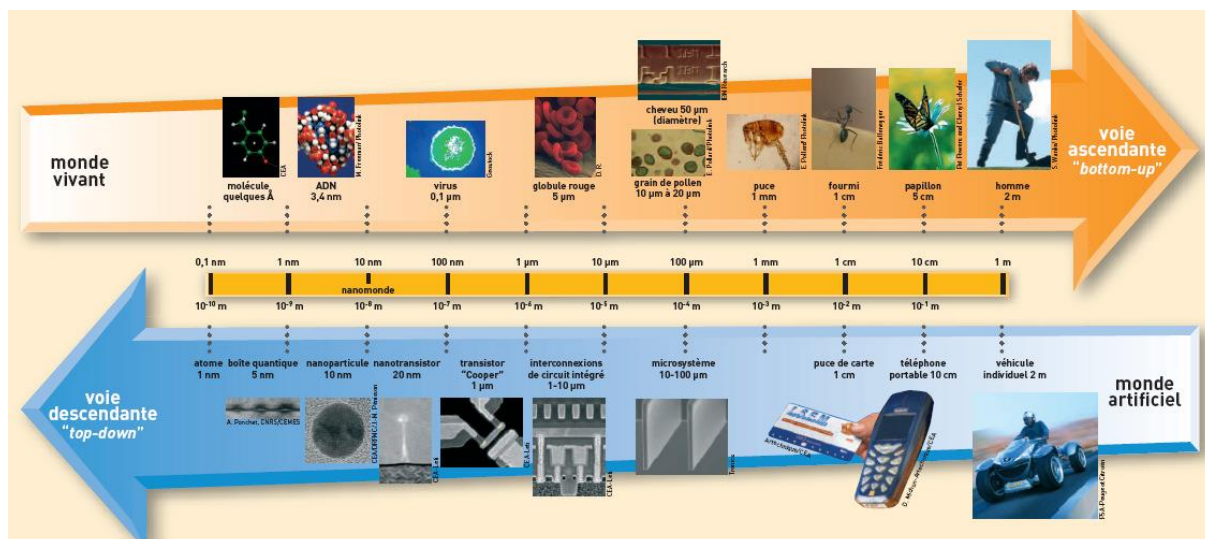
Lors d'une conférence organisée en 1958, le physicien Richard Feynman a déclaré que les principes de la physique autorisaient la manipulation et le positionnement contrôlé des atomes et des molécules, individuellement, à la manière de brique de construction type lego. Par cette déclaration, le physicien américain suggérait à la communauté scientifique d'explorer l'univers de l'infiniment petit.

Le terme de la « nanotechnologie » fut utilisé pour la première fois en 1974. Elle constitue un champ de recherche et de développement multidisciplinaire qui repose sur la connaissance et la maîtrise de l'infiniment petit. Elle regroupe, plus précisément, l'ensemble des techniques qui permettent de fabriquer, de manipuler et de caractériser la matière à l'échelle nanométrique.

## **I.2. DEFINITIONS DES NANOMATERIAUX**

Il existe de nombreuses définitions du terme « nanomatériau » dont la première définition est : un nanomatériau est un matériau naturel ou manufacturé, formé accidentellement, contenant des particules libres, sous forme d'agrégat ou sous forme d'agglomérat, dont au moins 50% des particules, dans la répartition numérique par taille, présentent une ou plusieurs dimensions externes se situant entre 1 nm et 100 nm. Pour une deuxième définition, un nanomatériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 nm, ou, qui possède une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique.

Le préfixe « nano », d'origine grecque, signifie « très petit ». Un nanomètre est une unité de mesure qui correspond au milliardième de mètre ou à un millionième de millimètre. C'est environ 30 000 fois plus fin que l'épaisseur d'un cheveu et 100 fois plus petit que la molécule d'ADN. Par comparaison de taille, la Terre est à une orange ce que cette orange est à une nanoparticule de 1nm. Aborder « l'échelle nanométrique », revient à évoquer des objets dont la taille évolue entre le nanomètre et quelques centaines de nanomètres ou des effets spécifiques aux dimensions nanométriques.



**Fig. I.1.** Loi d'échelle nanométrique (site web  
<http://www.nanomicro.recherche.gouv.fr/docs/plaq.nanomonde.pdf>).

### I.3. OBSERVER A L'ECHELLE NANOMETRIQUE

L'émergence des nanosciences et des nanotechnologies doit beaucoup aux progrès spectaculaires des techniques d'observation et de manipulation. Les microscopes optiques créés en 1605, ne peuvent observer des objets de taille inférieure au micromètre. De nouveaux microscopes, utilisant des techniques différentes, se sont développés depuis plusieurs décennies et requiert notamment un degré de technicité avancé pour préparer les échantillons d'observation.

Le développement des microscopes électroniques à transmission (1931,1970) a permis de donner des images à l'échelle atomique (1/10 nm) mais nécessite une préparation complexe des échantillons. Le microscope électronique à balayage (1965), bien que moins sensible permet de visualiser rapidement la présence, la forme et la disposition de nano-objets.

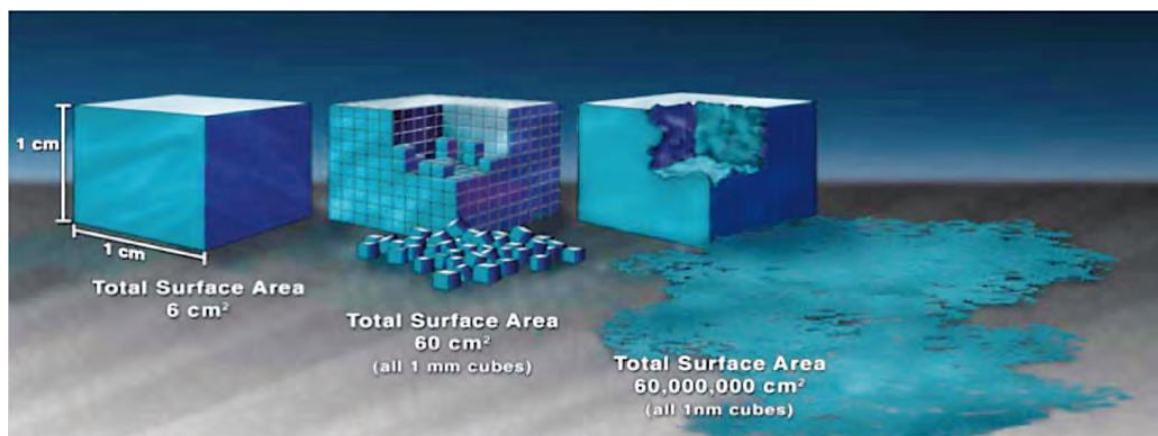
L'invention au début des années 1980 du microscope à effet tunnel a fait prendre conscience que le « nano monde » était à notre portée. Ce microscope utilise une pointe métallique extrêmement fine qui se déplace à quelques nanomètres de la surface. Les variations du courant électrique - appelé « courant tunnel » - qui franchit l'espace séparant la pointe de la surface, sont enregistrées par traitement informatique pour en déduire la topologie et certaines propriétés (chimiques, électroniques, magnétiques) des surfaces. Le microscope à force atomique est basé sur une architecture similaire mais mesure une force de contact au lieu d'un courant électrique (Obadia, 2008).

### I.3.1. Les propriétés remarquables de la matière à l'échelle Nanométrique

Le potentiel de découvertes et d'applications liées aux nanotechnologies vient du fait **qu'à l'échelle nanométrique les propriétés de la matière peuvent être radicalement différentes**. En effet, à cette échelle les atomes sont plus accessibles. Ainsi dans un centimètre cube de matière, un atome sur 10 millions se trouve à la surface, mais dans un nanomètre cube, près de 80 % des atomes se situent à la surface. A volume équivalent, la matière sous forme de nano-objets (des nanoparticules, par exemple) présente une plus grande surface développée. Cette propriété la rend plus réactive, puisque les réactions chimiques se produisent à la surface.

Or plus de réactivité signifie potentiellement plus d'utilité. A cette échelle, c'est la réactivité de surface qui est déterminante et les propriétés d'un matériau peuvent ainsi différer de façon spectaculaire. Il peut s'agir du point d'ébullition, de la solubilité ou de l'activité catalytique. Par la seule réduction de leurs dimensions, les matériaux peuvent présenter de nouvelles propriétés qu'ils ne possèdent pas à une échelle plus grande ou à l'échelle macroscopique.

La figure ci-dessous explicite cet aspect des nanomatériaux : si on considère un cube d'un centimètre de cote, sa surface (qui assure le contact avec l'extérieur) fera  $6 \text{ cm}^2$ . Si l'on est en mesure de découper le cube à l'échelle du nanomètre, la surface développée de ses subdivisions passe à 60 millions de centimètres carrés. Les atomes sont alors plus accessibles, et la matière change de caractéristiques (ANR, 2012).



**Fig. I.2.** Augmentation de la surface par nano structuration des matériaux  
(ANR, 2012).

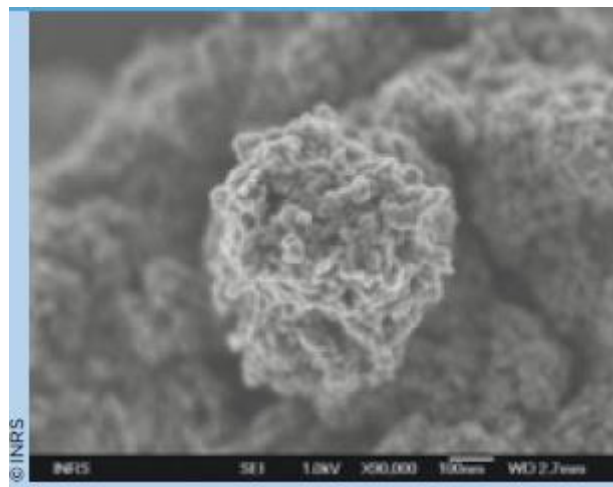
## I.4. LES FAMILLES DE NANOMATERAIX

### I.4.1. Les nano-objets

Ce sont des matériaux dont une, deux ou trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire approximativement entre 1 et 100 nm.

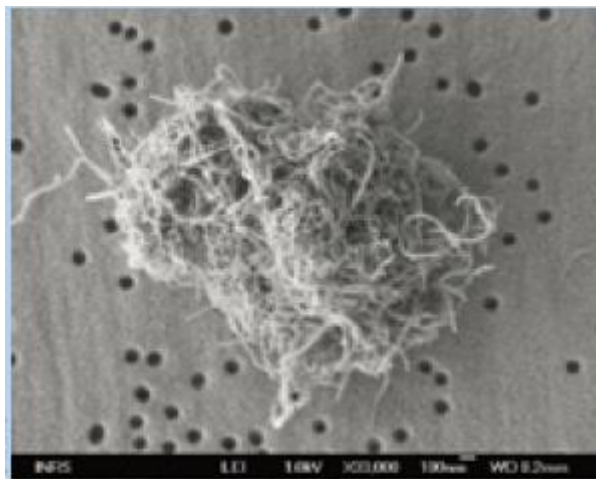
Parmi les nano objets, il est possible de distinguer trois catégories :

- Les nano particules, qui désignent des nano objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique : nano particules de latex, d'oxyde de zinc, de fer et de cérium, d'alumine, de dioxyde de titane, de carbonate de calcium, etc. (voir fig. I.3) ;



**Fig. I.3.** Nanoparticules de dioxyde de titane observées en microscopie électronique à balayage (INRS ,2012).

- Les nanofibres, nanotubes, nanofilaments, ou nanobâtonnet, qui se rapportent à des nano-objets dont deux dimensions externes sont à l'échelle nanométrique et la troisième dimension significativement supérieure (nanotubes de carbone, nano-fibres de polyester, nanotube de bore, etc.).ces termes désignent des nano objets longilignes de section comprise entre 1 et quelque dizaines de nm et de longueur comprise entre 500 et 10000 nm (voir fig. I.4) ;



**Fig. I.4.** Nanotubes de carbone multi parois observés en microscopie électronique à balayage (INRS ,2012).

- Les nano feuillets, nanoplats ou nano plaquettes, qui définissent des nano objets dont une dimension externe se situe à l'échelle nanométrique et les deux autres dimensions sont significativement supérieures (nano feuillets d'argile, nano plaquettes de sélénium de cadmium, etc.).

Les nano objets peuvent être utilisés en tant que tels sous forme de poudre, de suspension liquide ou de gel.

#### **I.4.2. Les matériaux nanostructurés**

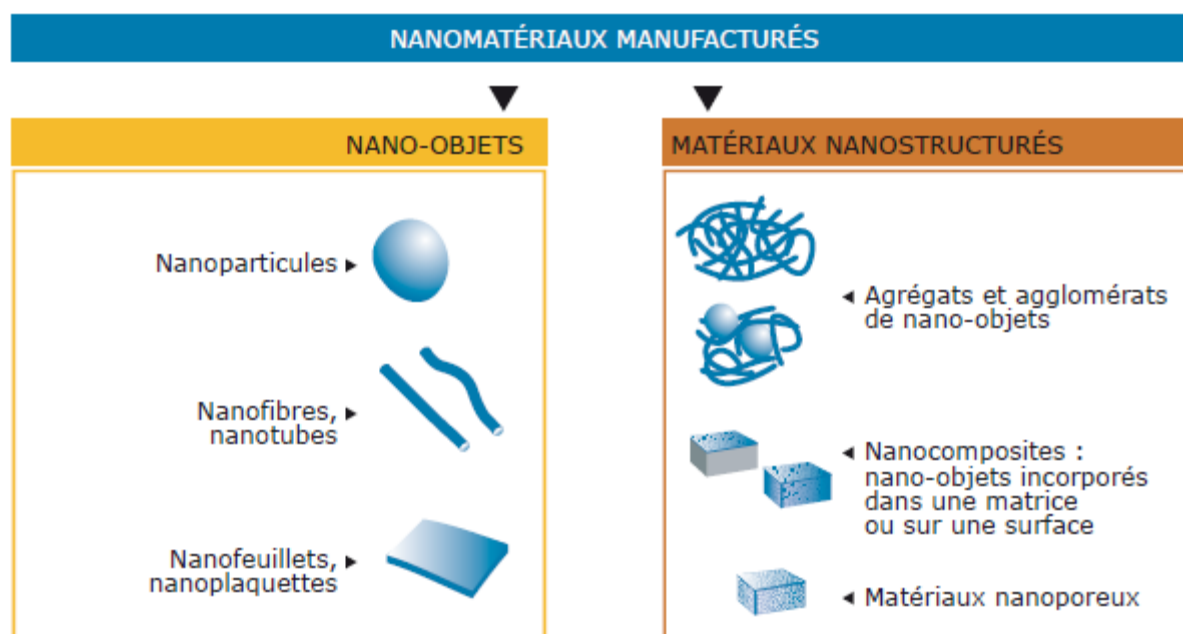
Ce sont des matériaux qui possèdent une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique. Parmi les matériaux nanostructurés, il est possible de distinguer plusieurs familles, parmi lesquelles :

- les agrégats et agglomérats de nano-objets : les nano objets peuvent se présenter soit sous formes individuelles (c'est-à-dire sous forme de particules primaire), soit sous forme d'agrégat ou d'agglomérats dont la taille est sensiblement supérieure à 100 nm ;
- Les nano composites : ces matériaux sont composés pour tout ou partie de nano-objet qui leur confèrent des propriétés améliorées ou spécifiques de la dimension nanométrique. Les nano objets sont incorporés dans une matrice ou sur une surface afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité ou de modifier certaines propriétés mécaniques, magnétiques, thermiques, etc. Les polymères chargés de nano tubes de

carbone utilisés dans le secteur des équipements sportifs, afin d'améliorer leur résistance mécanique et de diminuer leur poids, constituent un exemple de nano composites ;

- Les matériaux nano poreux : ces matériaux possèdent des pores de taille nanométrique les aérogels de silice sont des matériaux nano poreux qui présentent d'excellentes propriétés d'isolation thermique.

Les nanomatériaux produits de façon intentionnelle par l'homme à des fins d'applications précises et possédant des propriétés spécifiques sont nommés « nanomatériaux manufacturés » (voir fig. I.5). Parmi ces nanomatériaux manufacturés, certains sont produit depuis déjà de nombreuses années des tonnages importants, tels que le dioxyde de titane, le noir de carbone, l'alumine, le carbonate de calcium ou la silice amorphe. D'autre, plus récents, sont fabriqués dans des quantités moindres, tels que les nanotubes de carbones.



**Fig. I.5.** Classification des nanomatériaux selon la norme ISO TS 80004-1 (INRS ,2012).

## **I.5. MODELISER LES PHENOMENES POUR MIEUX LES COMPRENDRE ET LES MAITRISER**

L'alliance entre théorie quantique et simulation numérique constitue une approche complémentaire aux travaux expérimentaux dans le but de modéliser des matériaux réels à partir des principes de la physique quantique. La modélisation est une méthode employée notamment pour l'étude de la formation et de la croissance des nanostructures et parvenir à une meilleure connaissance des forces unissant les atomes à la surface et la façon dont ils s'assemblent...

Les nanomatériaux peuvent être synthétisés selon deux approches différentes. Les approches technologiques : top-down et bottom-up (voir fig. I.5) (Obadia, 2008).

### **I.5.1. L'approche top-down (ou descendante)**

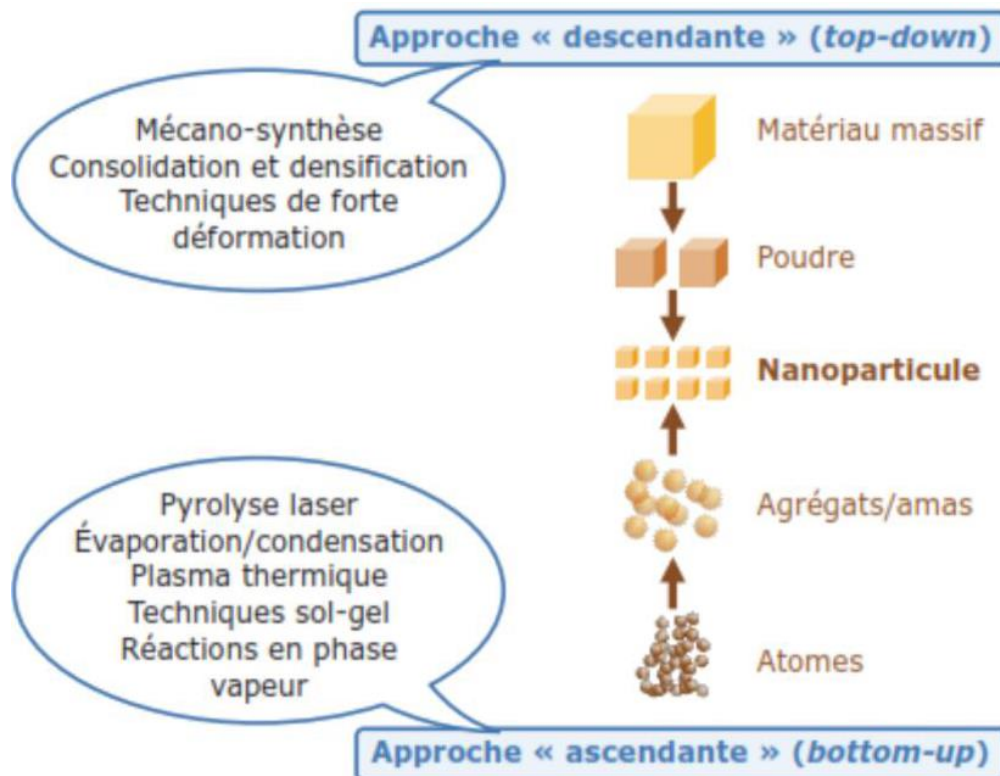
Elle est basée sur la miniaturisation. On part de blocs de matière que l'on divise autant de fois que nécessaire pour arriver à un objet de taille nanométrique. Pour cela, on utilise des techniques de fabrication dérivées des techniques dites de lithographie qui ont été développées pour l'industrie de la microélectronique. La lithographie se base sur l'utilisation de résines sensibles à la lumière ou aux électrons et déposées sur les matériaux à structurer. Après exposition à la lumière ou aux électrons, la résine est plongée dans une solution chimique qui dissout les parties exposées (ou non exposées selon le type de résine). Les régions non protégées peuvent ensuite être utilisées par exemple pour une gravure ou un dépôt localisé.

La lithographie permet par exemple de fabriquer les circuits électroniques intégrés ainsi que des microsystèmes électromécaniques (MEMS : Micro Electro Mechanical Systems). Les technologies utilisées pour la réalisation de circuits ou systèmes miniaturisés s'appuient sur des équipements permettant de gérer des dimensions de quelques nanomètres, et est effectuée dans des salles blanches où la température, l'humidité et l'empoussièrement sont contrôlés afin d'améliorer la précision des dimensions souhaitées (ANR, 2012).

### **I.5.2. L'approche bottom-up (ou ascendante)**

Elle est basée sur l'assemblage d'atomes ou de molécules à l'image d'un LEGO™. Cette fabrication ascendante, similaire à la voie suivie par la nature pour l'auto-assemblage, permet de travailler atome par atome, molécule par molécule. Elle peut être réalisée en utilisant des équipements capables de manipuler des molécules avec une précision atomique et d'utiliser des liaisons entre atomes ou molécules. Les microscopes à effet tunnel et à force

atomique permettent ainsi d'assembler des édifices nanométriques. Une autre approche est basée sur l'auto assemblage (chimie supramoléculaire) (ANR, 2012).



**Fig. I.6.** Les deux approches d'élaboration des nanomatériaux manufacturés (INRS, 2012)

Les deux approches tendent à converger en termes de gamme de tailles des objets. L'approche « bottom-up » semble néanmoins plus riche en termes de type de matière, de diversité d'architecture et de contrôle de l'état nanométrique alors que l'approche « top-down » permet d'obtenir des quantités de matière plus importantes mais le contrôle de l'état nanométrique s'avère plus délicat.

## I.6. PROCÉDES DE FABRICATION DES NANOMATERIAUX

Les procédés actuels permettant la fabrication de nanomatériaux sont classés en trois grandes catégories :

### I.6.1. Procédés par voie physique

- ✦ L'évaporation/condensation,
- ✦ L'ablation laser,



- ✦ La décharge électrique,
- ✦ Les flammes de combustion,
- ✦ La pyrolyse laser,
- ✦ Les micro-ondes, L'irradiation ionique ou électronique,
- ✦ La décomposition catalytique,
- ✦ Les dépôts physiques en phase vapeur regroupés sous le terme de PVD (Physical Vapor Deposition), etc.

### **I.6. 2. Procédés par voie chimique**

- ✦ Les réactions en phase vapeur regroupées sous le terme de CVD (Chemical Vapor Deposition),
- ✦ Les réactions en milieu liquide : co-précipitation chimique, hydrolyse, etc.,
- ✦ Les réactions en milieu solide,
- ✦ Les fluides supercritiques avec réaction chimique,

Les techniques sol-gel : sol-gel à base de silice, alkoxyde de métal, etc.

### **I.6. 3. Procédés par voie mécanique**

- ✦ Le broyage à haute énergie ou mécano-synthèse,
- ✦ À consolidation et la densification,
- ✦ Les techniques de forte déformation: torsion, friction, laminage, etc.

L'approche « ascendante » fait appel à des procédés d'élaboration chimiques et physiques alors que l'approche « descendante » induit, principalement, l'utilisation de méthodes mécaniques.

## **I.7. PROPRIETES DES NANOMATERIAUX**

Les nanomatériaux présentent de nombreuses propriétés particulières dont les principales sont les suivantes, (Afsset, 2010):

### **I.7.1. Propriétés mécaniques**

L'effet de la nanostructure peut se traduire par un phénomène de superplasticité. Les nanomatériaux peuvent ainsi permettre d'améliorer la résistance des matériaux sans compromettre leur ductilité, car la taille des nanoparticules **limite les concentrations de contraintes**. Il faut également noter l'effet de renfort dans les composites (absorption d'énergie, déviation des fissures, etc.), (Afsset, 2010).

**I.7.2. Propriétés électriques**

L'introduction de nanoparticules et/ou de nanotubes peut modifier de façon drastique la conductivité électrique de matériaux réputés isolants, et ce à des taux de charges extrêmement faible, notamment lors de l'utilisation de nanotubes de carbone (NTC), (Afsset, 2010).

**I.7.3. Propriétés optiques**

Les nanoparticules ont des dimensions inférieures aux longueurs d'onde de la lumière visible (380 – 780 nm), ce qui permet d'améliorer les propriétés optiques de certains matériaux (transparence), (Afsset, 2010).

**I.7.4. Propriétés de transfert thermique**

L'ajout de nanoparticules peut permettre d'améliorer certaines propriétés avec de faibles fractions volumiques. Par exemple, l'ajout de nanoparticules d'alumine ou d'oxyde de zinc peut modifier la conductivité thermique de fluides caloporteurs (nanofluides), (Afsset, 2010).

**I.7.5. Propriétés de barrière**

Dans les nano-composites à matrice polymère, l'incorporation d'argile augmente les propriétés de barrière vis-à-vis de l'eau et des gaz du fait de l'augmentation de la distance à parcourir pour les molécules qui diffusent (Afsset, 2010).

**- Inflammabilité**

L'introduction de lamelles d'argile de taille nanométrique dans une matrice polymère retarde sa dégradation et permet la formation d'une couche superficielle carbonisée qui ne se fracture pas mais forme une nanostructure multicouche de silicate améliorant les propriétés de barrière et de résistance, jouant le rôle d'un isolant et réduisant les émissions de produits volatils issus de la combustion.

**I.6. 6. Propriétés magnétiques**

L'influence de la dimension des domaines cristallins a un effet très important sur le comportement magnétique des matériaux, (Afsset, 2010).

**I.7.7. Propriétés catalytiques**

La différence des propriétés catalytiques entre le matériel massif et le nano-matériel manufacturé correspondant est illustrée par l'exemple des nanoparticules d'or. L'or massif n'a pas de propriétés catalytiques particulières. Haruta (Haruta M., 1987) a montré que les nanoparticules d'or dispersées sur un support possédaient des propriétés intéressantes pour la

réaction d'oxydation du monoxyde de carbone (CO). Cette réaction est observée pour des nanoparticules d'or inférieures à 5 nm, (Afsset, 2010).

### **I.8. CHAMPS D'APPLICATIONS**

Le passage de la matière à des dimensions nanométriques fait apparaître des propriétés inattendues et souvent totalement différentes de celles des mêmes matériaux à l'échelle micro ou macroscopique, notamment en terme de résistance mécanique, de réactivité chimique, de conductivité électrique et de fluorescence. Les nanotechnologies conduisent donc à l'élaboration de matériaux dont les propriétés fondamentales (chimiques, mécaniques, optiques, biologiques, etc.) peuvent être modifiées. Par exemple, l'or est totalement inactif à l'échelle micrométrique alors qu'il devient un excellent catalyseur de réactions chimiques lorsqu'il prend des dimensions nanométriques. Toutes les grandes familles de matériaux sont concernées : les métaux, les céramiques, les diélectriques, les oxydes magnétiques, les polymères, les carbones, etc.

Du fait de leurs propriétés variées et souvent inédites, les nanomatériaux recèlent de potentialités très diverses et leurs utilisations ouvrent de multiples perspectives. Les nanomatériaux permettent ainsi des innovations incrémentales et de rupture dans de nombreux secteurs d'activité tels que la santé, l'automobile, la construction, l'agroalimentaire ou encore l'électronique. Le tableau ci-dessous récapitule les domaines d'application par type de nanomatériau :

**Tableau I-1 : Domaine d'application par type de nanomatériau**  
(INRS, 2012).

<b>Nanomatériaux</b>	<b>Domaines d'applications</b>
<b>Nanocéramiques</b>	Matériaux composites structuraux -Composants anti – UV- Polissage Mécano chimique des substrats (wafers) dans la microélectronique- Applications photo catalytiques
<b>Nanométalliques</b>	Secteurs antimicrobiens et/ou de la catalyse- Couches conductrices des écrans, les capteurs ou encore les matériaux énergétiques.
<b>Nanoporeux</b>	Aérogels pour isolation thermique dans les domaines de l'électronique, de l'optique et de la catalyse- Domaine bio– médical pour des applications de type vectorisation ou encore implants.
<b>Nanotubes</b>	Nano composites conducteurs électriques -Matériaux structuraux -Les nanotubes, mono feuillets pour des applications dans le domaine de l'électronique, les écrans,
<b>Nanomatériaux massifs, (génie civil)</b>	Ciment autonettoyant et anti pollution, peinture, revêtements durs- Composants structuraux pour l'industrie aéronautique, l'automobile, les conduites pour les industries pétrolières et gazières, le domaine sportif ou encore le secteur anticorrosion.
<b>Dendrimères</b>	Domaine médical (administration de médicaments, détection rapide) -Domaine cosmétique.
<b>Quantum Dots</b>	Applications optoélectroniques (écrans) -Cellules photovoltaïques -Encres et peintures pour applications de type marquage anti –
<b>Fullerènes</b>	Secteurs du sport (nano composites) et des cosmétiques
<b>Nanofils</b>	Applications dans les couches conductrices des écrans ou encore les cellules solaires ainsi que les dispositifs électroniques

### **I.9. LES NANOTECHNOLOGIES DANS LE DOMAINE DE GENIE CIVIL**

La nanotechnologie n'est pas seulement une révolution industrielle, mais également une voie permettant de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde et aussi une voie permettant d'avoir une meilleure vie. Par exemple, les nouveaux matériaux de construction aux propriétés uniques, les matériaux composites légers et plus résistants, isolant d'incendie, absorbeur de son, revêtement à faible entretien, hydrofuges, des polymères nano-argile remplis, les surfaces auto désinfectant, protecteur de la lumière de l'ONU, purificateurs d'air, des capteurs de nano taille, plaquettes conductrices ultra minces, cellules solaires, etc. pour n'en nommer que quelques-uns.

Ainsi, l'un des progrès réalisés par l'étude du béton à l'échelle nanométrique, c'est que la particule d'emballage en béton peut être améliorée en utilisant la nano-silice qui conduit à une densification de la micro et nanostructures produisant des propriétés mécaniques améliorées.

### **I.10. LES RISQUES LIÉS AUX NANOMATERIAUX**

Les nanoparticules naturelles ou manufacturées peuvent avoir des propriétés et des effets très différents de ceux des mêmes matériaux à des tailles plus grandes, ce qui peut comporter de nouveaux risques pour la santé de l'homme et d'autres espèces animales et végétales. Elles peuvent, dans certains cas, se disperser et persister dans l'environnement sans qu'on en connaisse l'impact sur celui-ci (Obadia, 2008).

En matière d'environnement, les risques potentiellement soulevés par l'arrivée des nanotechnologies seront reliés au fait que le marché des nanomatériaux pourra mettre en circulation des matériaux aux propriétés avantageuses (économie d'énergie par exemple) mais dont le contre-coup serait l'absence de techniques de recyclage testées et approuvées. La production et l'entreposage des nouveaux matériaux est aussi sujet à risques étant donné la réactivité accrue de ceux-ci.

Dans le domaine de la santé, quelques études ont été menées. Les risques pour la santé reliés aux nanotechnologies ont été le sujet de quelques études qui jusqu'à maintenant n'ont pas abouti à des résultats concluants mais n'éliminent pas la possibilité de dangers reliés aux nanomatériaux.

La grande difficulté de ce genre d'étude vient du fait que la grande diversité de nanomatériaux existant déjà sur le marché fait en sorte qu'il n'y aura pas de réponse pas unique à la question d'évaluation des risques.

Des tests ont été effectués sur des rats en laboratoire pour évaluer les effets des nanotubes de carbone sur la santé et les conclusions ne sont pas unanimes. Il reste encore beaucoup de recherche à faire dans ce domaine.

### **I.11. CONCLUSION**

Au terme de cette recherche bibliographique, les conclusions suivantes peuvent être dégagées. Le développement des nanotechnologies est un enjeu incontournable pour notre avenir.

Avec l'invention du microscope à effet tunnel, la voie a été ouverte à l'émergence d'une nouvelle thématique : les nanotechnologies. Celles-ci, en s'appuyant sur les progrès dans l'étude des propriétés de la matière à son échelle ultime, le nanomètre, permettent d'envisager la maîtrise des processus de fabrication à cette échelle. Cela laisse entrevoir un nouvel ensemble d'applications soit par l'amélioration des procédés déjà utilisés grâce à une miniaturisation poussée à l'extrême, soit par la conception de nouveaux composants fonctionnels construits par assemblage au niveau de l'atome ou de la molécule. A cette échelle, les disciplines (mécanique, physique, chimie, biologie...) se rejoignent, ce qui fait des nanotechnologies un lieu d'interdisciplinarité exemplaire pour les scientifiques.

Il ne faut pas ignorer ces inquiétudes. Prendre en compte leur existence doit, au contraire, nous conduire à mettre en œuvre une démarche permettant à la société de s'assurer que l'essor indispensable des nanotechnologies est conçu dans un souci de transparence et de sécurité maximales pour la population, les salariés et l'environnement. Le principe de précaution ne doit pas conduire à l'immobilisme mais favoriser une action raisonnée et responsable.

## **CHAPITRE II**

---

### **LES NANOPLAQUES**

### **FONCTIONNELLEMENT GRADUEES-FGM**

## **II.1. LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETE (FGM)**

### **II.1.1. Introduction**

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Zhong, 2007).

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales (Baron, 2008).

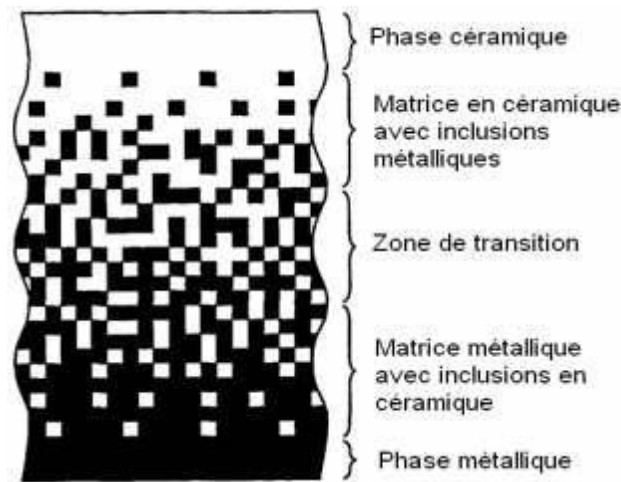
### **II.1.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés**

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels. Des recherches ont été établies afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres).

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal.

Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGMs, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Les applications balistiques de cette classe des matériaux sont également très attrayantes (voir, fig. II.1).





**Fig. II.1.** Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGMs)

(Yin et al, 2004).

En général, les différentes combinaisons matérielles utilisées dans la fabrication des matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont des coefficients de dilatation thermique différents qui peuvent conduire à la génération des contraintes résiduelles significatives chaque fois que la pièce est exposée à un cycle thermique (par exemple, pendant le traitement).

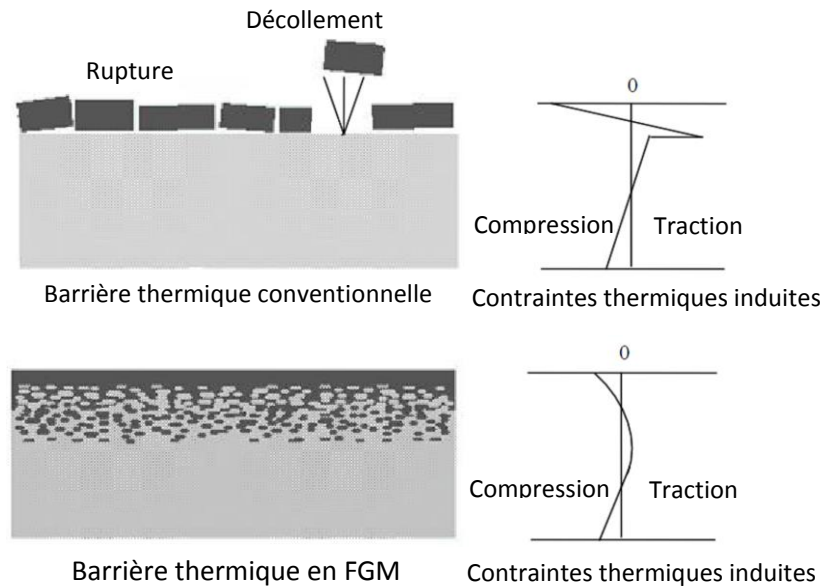
Des contraintes résiduelles sont généralement considérées comme une nuisance ou même un danger potentiel pour l'intégrité de la pièce. Dans certains cas, toutefois, elles peuvent avoir un effet bénéfique sur les performances d'un composant. Un certain nombre de concepts bien définis sont disponibles qui permettent à l'ingénieur de parvenir à un tel état de contrainte résiduelle avantageux.

Le concept de FGM offre une méthode alternative pour concevoir une pièce bien défini, construit en état de contrainte. En adaptant judicieusement la composition et la microstructure, les contraintes thermiques peuvent être dispersés ou réduits au minimum pendant le cycle de traitement et l'utilisation en service.

Alternativement, ils peuvent même être utilisés pour augmenter les performances d'une pièce, par exemple, par la génération des contraintes compressives sur la surface.

La figure II.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de

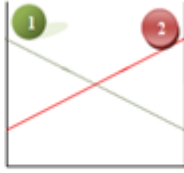

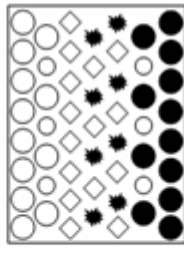
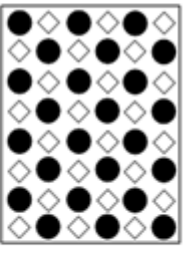
contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Fig.II.2.** Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Belkorissat, 2015).

### II.1.3. Différences entre matériaux à fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels

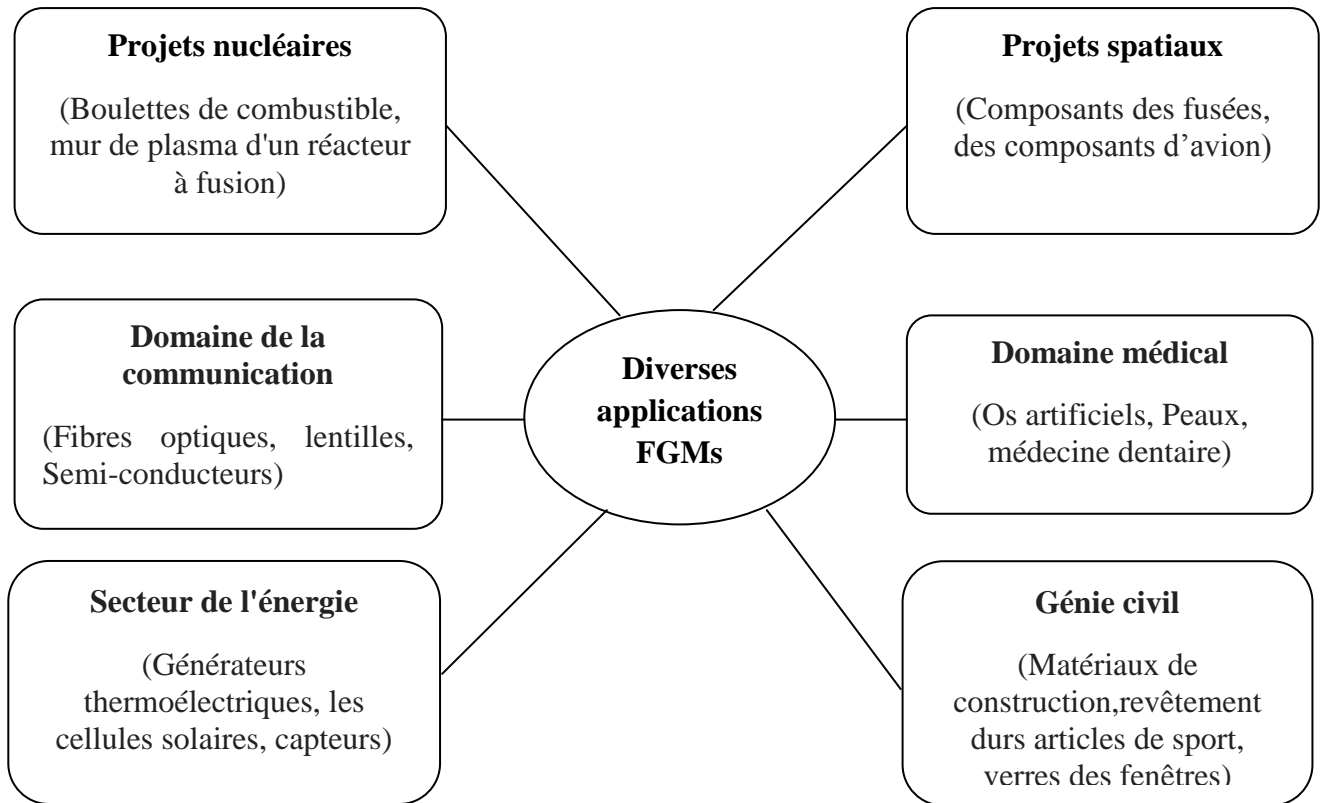
Les matériaux fonctionnellement gradués sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure II.3.

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutants:</b></p> <p>Céramique ● Métal ○ Microporosité ◊ Fibre ◆</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Fig.II.3.** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi).

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure II.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau.

Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.



**Fig. II.4.** Les champs potentiels de l'application des FGMs

**II.1.4. Historique sur le développement des matériaux FGM**

Au cours des années 1987, un vaste projet a été lancé par le gouvernement Japonais intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C (Koizumi, 1997). A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux à gradient de propriétés FGMs. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

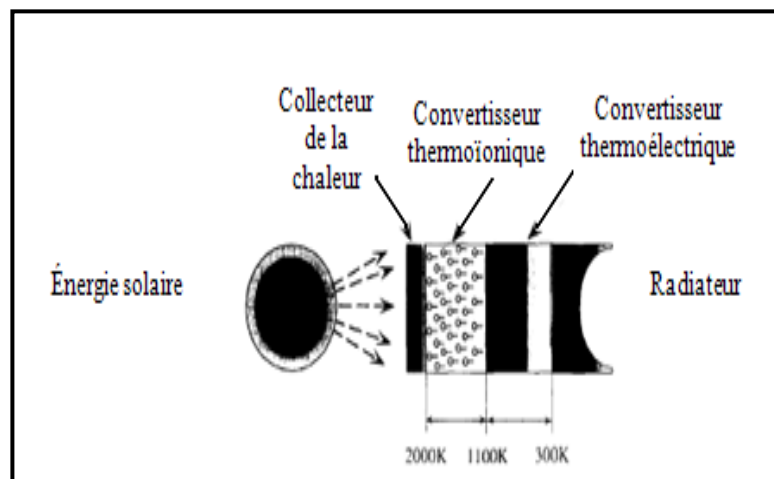
En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K. Les quatre techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. (Okamura, 1991).

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire (Kieback et al, 2003).

La figure II.5 (Koizumi) montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.



**Fig.II.5.** Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM (Koizumi).

Le tableau II-2 présenté ci-dessous résume sur les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

**Tableau II-1** : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

Année	Progrès de recherche sur les FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 <sup>er</sup> Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Köln, (Allemagne).
1990	1 <sup>er</sup> Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	Etude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
1996	4 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon).

**II.1.5. Procédé de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués**

Les principaux procédés disponibles pour la production des matériaux FGM sont présentés ci-après :

**II.1.5.1. Coulage en bande (Tape Casting)**

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) à été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuses, dans lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à (FGM  $Al_2O_3$ -TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en enlevant la reliure, et en pressant les produits obtenus à chaud ( Zeng et al,2000).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [MIST] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (BOCH ,1986), (BOCH, 1987).

**II.1.5.2. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens et al,1990).

**II.1.5.3. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement,

par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop et al, 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.

#### **II.1.5.4. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi ,1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **II.1.5.5. Dépôt par électrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (SARK ,1996).

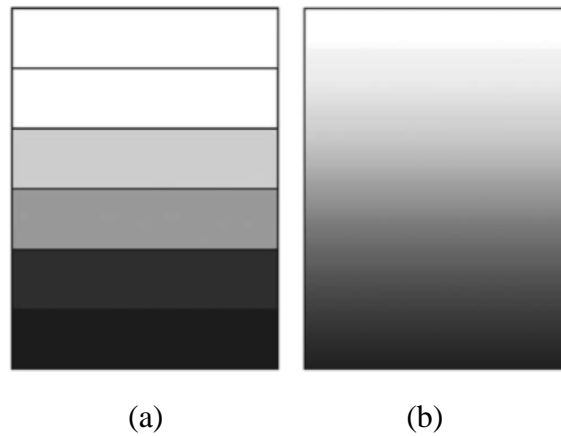
#### **II.1.6. Propriétés effectives des FGM**

Les matériaux fonctionnellement gradué sont classés selon la fonction de changement des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire couche quasi-homogène de céramique-métal (fig. II.6.a)
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (fig. II.6.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).





**Fig. II.6.** Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. La plupart des « FGM » sont constitués de deux matériaux céramiques et métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II-2.

**Tableau II-2 :** comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

## II.2. HOMOGENEISATION DU MATERIAUX FGM

Les FGMs se sont des matériaux hétérogène et pour permettre de contourner les problèmes liés à cette hétérogénéité, il est nécessaire d'appliquer le concept d'homogénéisation (Ch El Hage, 2006) qui est parfois appelé la micromécanique où la modélisation multi-échelle. C'est une discipline relativement ancienne puisque la loi de mélange bien connue remonte à 1889 avec Voigt.

### **II.2.1. Technique d'homogénéisation**

La procédure d'homogénéisation en mécanique des matériaux consiste à substituer un matériau fortement hétérogène à un matériau homogène qui répond globalement à une sollicitation donnée de la même façon. Elle se formalise mathématiquement par l'écriture d'une relation de comportement homogène à une échelle dite macroscopique en fonction des propriétés des phases du matériau à une échelle dite microscopique (Yang, 2008). La mise en œuvre des techniques d'homogénéisation nécessite deux éléments :

- Un Volume Élémentaire Représentatif (VER).
- Le respect de la condition de séparation d'échelle.

### **II.2.2. Un Volume Élémentaire Représentatif (VER)**

Le VER est un motif élémentaire qui permet de reconstituer le matériau, lorsqu'on le duplique dans les trois directions de l'espace. Ce VER est choisi en fonction des informations disponibles sur la microstructure du matériau. La condition de séparation d'échelle permet de vérifier que la sollicitation (grandeur macroscopique) est grande devant la taille des constituants (grandeur microscopique).

Ainsi, le matériau hétérogène est vu comme un matériau homogène au niveau macroscopique (Cerezo, 2005).

Dans notre thèse, nous étudions un matériau hétérogène (FGM) composé de deux phases homogènes : céramique (ou l'inclusion ; phase a) de fraction volumique  $V_a$ , noyé dans la partie solide métal (ou matrice, phase m). Chacune de ces phases présente un comportement élastique linéaire, homogène et isotrope. Les deux phases sont supposées parfaitement collées entre elles, ce qui justifie la représentation biphasique.

### **II.2.3. Quelques méthodes usuelles d'homogénéisations**

La détermination des propriétés effectives d'un matériau hétérogène consiste alors, à définir le comportement homogène équivalent du matériau à partir des caractéristiques de la matrice diluée. Il existe beaucoup de méthodes d'homogénéisations dans la bibliographie telle que la méthode Auto-cohérente, la solution diluée, le modèle de Mori-Tanaka, les bornes de Voigt et Reuss, etc.

**II.2.3.1. Approche auto-cohérent**

Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que le milieu entourant chaque inclusion est un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché.

Pour un composite biphasé, avec des inclusion sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées :

$$K^{AC} = K_1 + f_2 \frac{(K_2 - K_1)(3K^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3K_2 + 4\mu^{AC})} \quad (\text{II.1})$$

$$\mu^{AC} = \mu_1 + f_2 (\mu_1 - \mu_2) \frac{15(1 - \nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_2} \quad (\text{II.2})$$

Où ( $K^{AC}$ ) et ( $\mu^{AC}$ ) représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement équivalent.

**II.2.3.2. Solution diluée**

Dans cette section, chaque inclusion est considérée comme noyée dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. La solution diluée est donc valable s'il n'y a aucune interaction entre les inclusions, c'est-à-dire si elles ne sont pas suffisamment éloignées les unes des autres. Par conséquent, elle s'applique seulement aux matériaux hétérogènes contenant une faible fraction volumique d'inclusion.

Dans le cas d'un composite à deux phase (matrice en phase 1 et inclusion en phase 2), en supposant que les inclusions sont sphériques de comportement élastique linéaire isotrope, les coefficients de compressibilité ( $K$ ) et ( $\mu$ ) de cisaillement :

$$K^{dl} = K_1 + f_2 \frac{(K_2 - K_1)(3K_1 + 4\mu_1)}{(3K_2 + 4\mu_1)} \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\mu^{dl}}{\mu_1} = 1 - \frac{15(1 - \nu_1)(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1})f_2}{7 - 5\nu_1 + 2(4 - 5\nu_1)\frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (\text{II.4})$$

**II.2.3.3. Modèle de Mori -Tanaka**

Mori et al. (Mor73) ont proposé une méthode de calcul de la contrainte moyenne et de l'énergie élastique stockée dans la matrice d'un matériau contenant une fraction volumique d'inclusion. Benveniste (Ben87) a ensuite publié une interprétation claire de ce modèle. Dans ce modèle, le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la

matrice. Le V.E.R est soumis à l'infini à la déformation moyenne de la matrice in –situ dans le composite.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphérique, le module de compressibilité équivalent et le module de cisaillement équivalent sont défini comme suit :

$$K^{MT} = K_1 + f_2 \frac{K_1(K_2 - K_1)}{[(1-f_2)(K_2 - K_1)\alpha_1 + K_1]} \quad (II.5)$$

$$\mu^{MT} = \mu_1 - f_2 \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{[(1-f_2)(\mu_2 - \mu_1)\beta_1 + \mu_1]} \quad (II.6)$$

Où les paramètres  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  valent :

$$\alpha_1 = \frac{3K_1}{3K_1 + 4\mu_1} \quad (II.7)$$

$$\beta_1 = \frac{6(K_1 + 2\mu_1)}{5(3K_1 + 4\mu_1)} \quad (II.8)$$

#### II.2.3.4. Bornes de Voigt et Reuss

Les bornes élémentaires de Voigt et de Reuss découlent du choix des champs uniformes pour les champs admissibles de contrainte pour la borne de Reuss et de déformation pour la borne de Voigt. L'approximation de Voigt suppose que la déformation  $v(y)$  est constante dans toutes les phases (V.E.R) et égale à la déformation macroscopique impose ( $E$ ), soit:

$$v(y) = E, \quad \forall y \in V \quad (II.9)$$

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = E \quad (II.10)$$

$$C_V^* = c_1 C^{(1)} + c_2 C^{(2)} \quad (II.11)$$

Où :

$$C_V^* \leq C^{(1)} + c_2(C^{(2)} - C^{(1)}) \quad (II.12)$$

Avec :

$C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$  sont respectivement les rigidités des deux phases : phase (a) et matrice (m).

$C_V^*$  présente la rigidité équivalente de la borne supérieure de Voigt.

$C_1$  et  $C_2$  sont des fractions volumiques tel que:

$$C_1 + C_2 = 1 \quad (II.13)$$

L'approximation de Reuss est l'approximation duale de Voigt et consiste à construire un champ statiquement admissible pour le problème dual. Le module d'élasticité du matériau peut s'exprimer en fonction du tenseur ( $S_R^*$ ) des souplesses homogénéisées. Le champ de contrainte ( $\tau$ ) proposé est uniforme dans le V.E.R et égale à la contrainte macroscopique imposée ( $\Sigma$ ), soit:

$$\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \Sigma \quad (\text{II.14})$$

$$S_R^* = c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)} \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$S_R^* \leq S^{(1)} + c_2 (S^{(2)} - S^{(1)}) \quad (\text{II.16})$$

$S^{(1)}$  et  $S^{(2)}$  sont respectivement les tenseurs de souplesses homogénéisées des deux phases : phase (a) et matrice(m).

**Voigt:** le module d'élasticité de la partie parallèle (Zhou et al., 1995), (Kurugöl et al., 2008) :

$$E_{c\_Voigt} = E_m + V_a (E_a - E_m) \quad (\text{II.17})$$

**Reuss:** le module d'élasticité de la partie en série (Zhou et al., 1995) (Kurugöl et al., 2008):

$$E_{c\_Reuss} = \frac{1}{\frac{1}{E_m} + V_a \left( \frac{1}{E_a} - \frac{1}{E_m} \right)} \quad (\text{II.18})$$

Avec :

$E_a$  et  $E_m$  sont respectivement les modules d'élasticité des deux phases: inclusion et matrice.

## II.3. THEORIES DES PLAQUES

### II.3.1. Introduction

Les plaques et les coques constituent une partie essentielle de la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile, grâce à leurs rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités. Ces qualités permettent le développement des structures légères possédant des rigidités membranaires et flexionnelles très importantes.

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

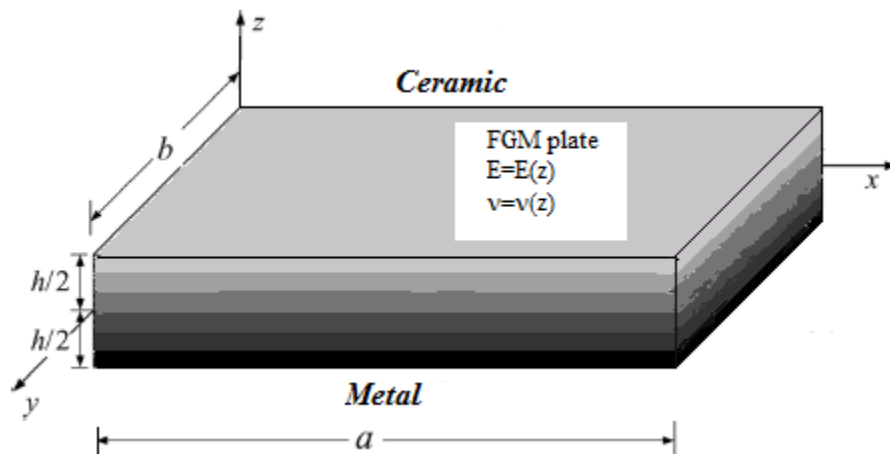
Il existe des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des plaques à gradient fonctionnel sous **chargement mécanique, dynamique** et thermique. Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la plaque (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel.

### II.3.2. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Un **FGM** peut être défini par la variation des fractions de volume.

La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume (Fig. II.7).

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Fig. II.7.** Géométrie d'une plaque FGM.

**II.3.2.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM**

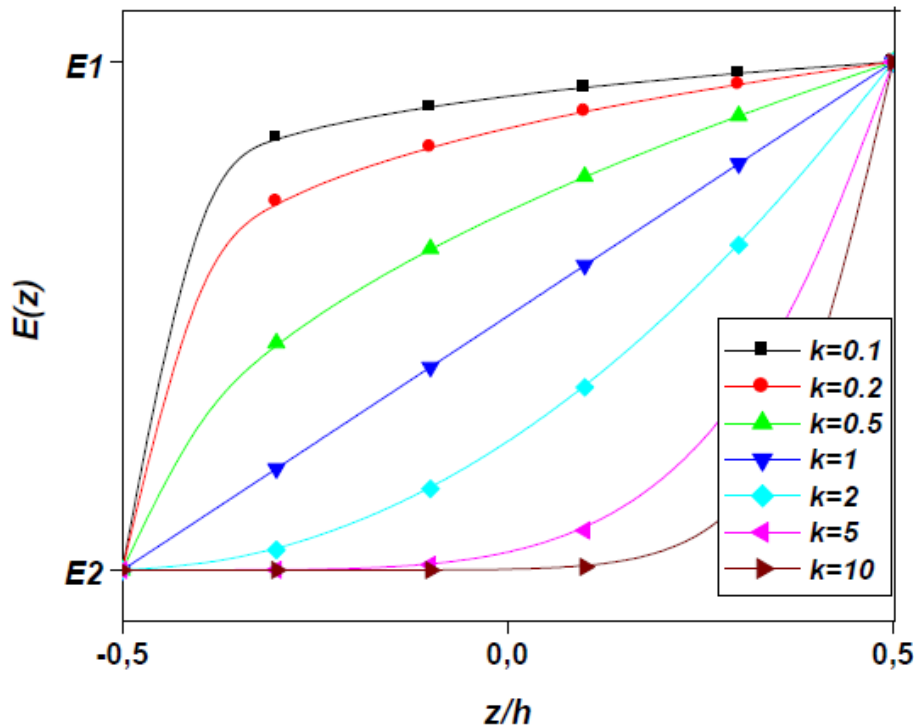
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \tag{II.19}$$

Où (k) est un paramètre matériel qui représente l'ordre du polynôme et (h) est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = V(z) E_1 + [1 - V(z)]E_2 \tag{II.20}$$

Où ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h / 2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h / 2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.8.



**Fig. II.8.** Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM

D'après la figure II.8, on remarque que le module de Young décroît dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque ( $k > 1$ ), et s'accroît en allant vers l'extrémité supérieure ( $k < 1$ ) et pour, la variation du module de Young devient linéaire. On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de

résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vis versa : la plaque devient de moins résistante si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal. Les propriétés matérielles effectives ( $S$ ) de la couche de FGM, comme le module de Young ( $E$ ), la densité ( $\rho$ ) et le coefficient de poisson ( $\nu$ ) sont alors exprimées par :

$$S = \sum_{i=1}^n S_j V_j \quad (\text{II.21})$$

( $S_j$ ) et ( $V_j$ ) sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche ( $j$ ), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{i=1}^n V_j = 1 \quad (\text{II.22})$$

### II.3.2.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chung et chi (Chi et al, 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.23.a})$$

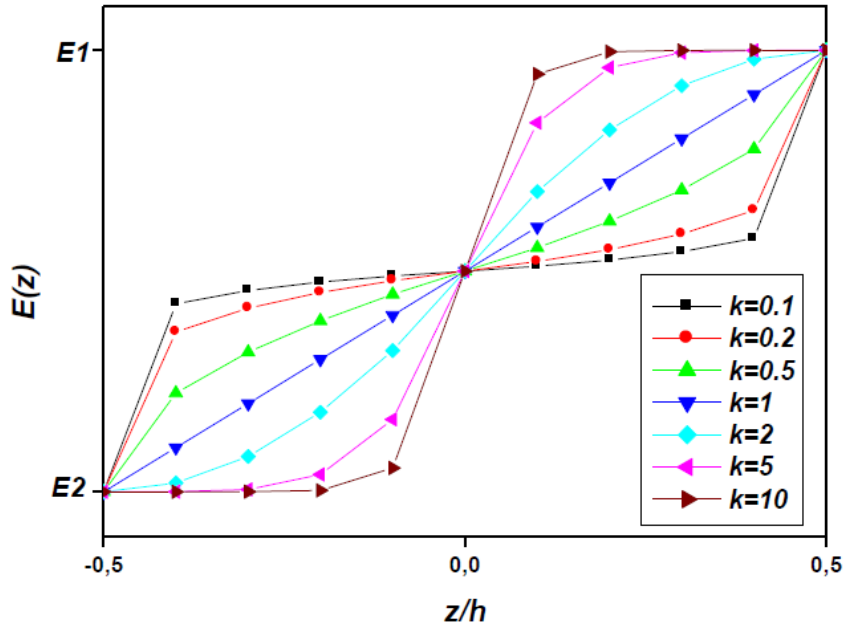
$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II.23.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.24.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.24.b})$$





**Fig. II.9.** Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM

La figure II.9 montre que la variation du module de Young définie par les équations (II.25.a) et (II.23.b) représente les distributions sigmoïdes.

**II.3.2.3. Propriétés matérielles des plaques E-FGM**

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et al ,1983):

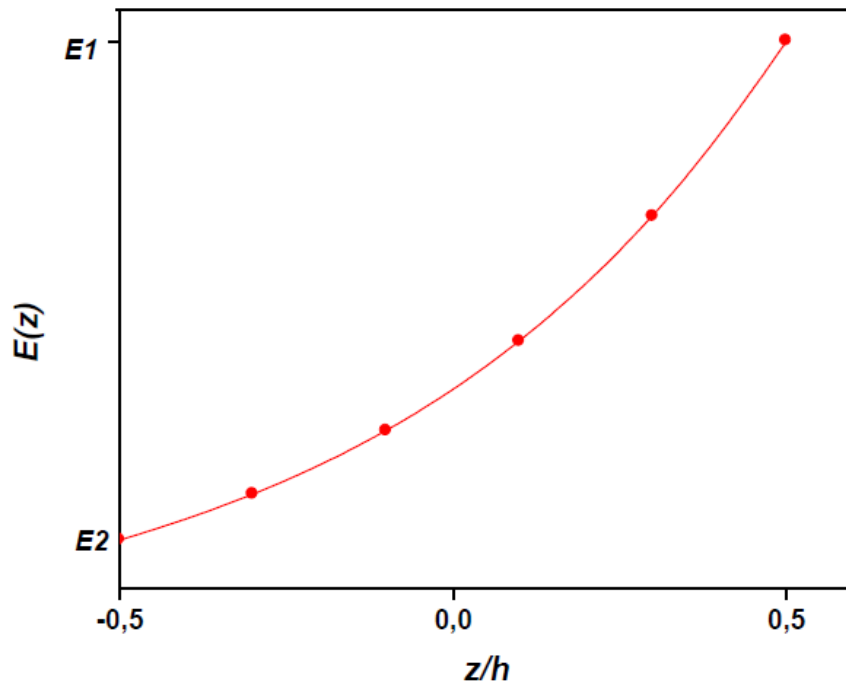
$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \tag{II.26.a}$$

Avec :

$$A = E_2 e \tag{II.26.b}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{II.26.c}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représenté dans la figure II.10.



**Fig. II.10.** Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

### II.3.4. Théories des plaques

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structuraux les plus couramment utilisés. Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle de l'analyse.

#### II.3.4.1. Théorie classique des plaques

La théorie classique des plaques est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff (Kirchhoff, 1850) en 1850, puis elle a été poursuivie par Love (Love, 1934) au début du XXe siècle.

Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donné des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses.

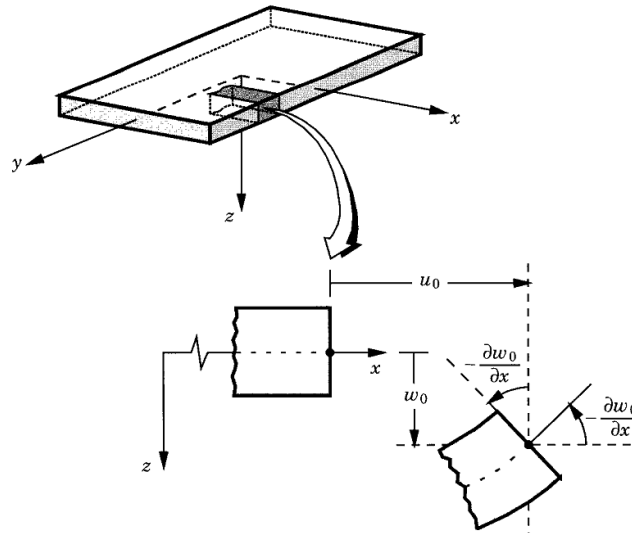
L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Fig. II.11). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) et les déformations/contraintes normales ( $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ ). Ces hypothèses imposent la cinématique suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{II.27.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{II.27.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.27.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Fig. II .11.** Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff (Reddy, 2003).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses. L'application du modèle de Kirchhoff-Love aux structures multicouches est souvent désigner comme « Classical Lamination Theory (CLT) ».

Étant donné l'importance de la question, Libove et Batdorf (Libove et Batdorf, 1948), Yang et al. ( Yang et al, 1966) et Whitney (Whitney,1969), ont étendu la théorie de Reissner (Reissner, 1945), Mindlin (Mindlin, 1951), dans le cas de plaques isotropes épaisses, pour introduire l'effet de cisaillement dans les plaques sandwichs et les plaques stratifiées anisotropes. Cela est devenu ce qu'on appelle « théorie de déformation en cisaillement du premier ordre » (FSDT).

### **II.3.4.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)**

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque.

Cette théorie est basée essentiellement sur l’hypothèse suivante de Reissner-Mindlin: les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l’effet du cisaillement transverse), (Fig. II.12). Ils ont également supposé que la contrainte normale ( $\sigma_z$ ) est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes (l’hypothèse de déformation plane). Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre s’écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \tag{II.28.a}$$

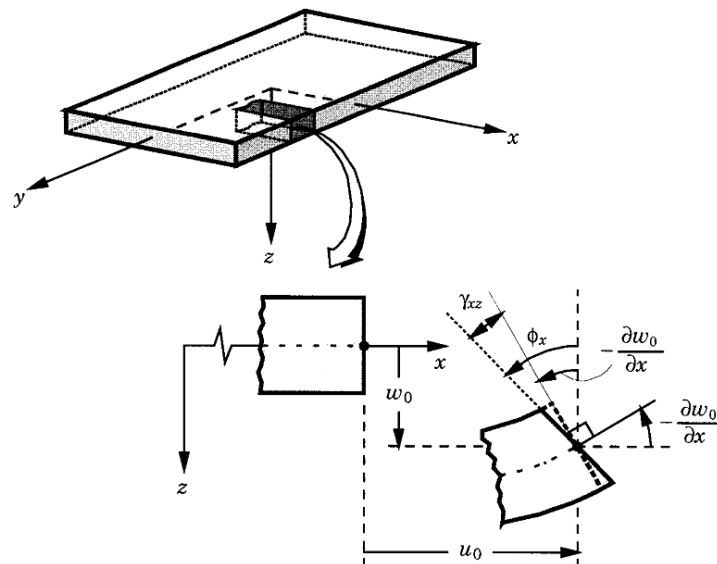
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \tag{II.28.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \tag{II.28.c}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes (x) et (y), respectivement.

Le champ de déplacement défini dans l’expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrites dans la dernière section par le remplacement

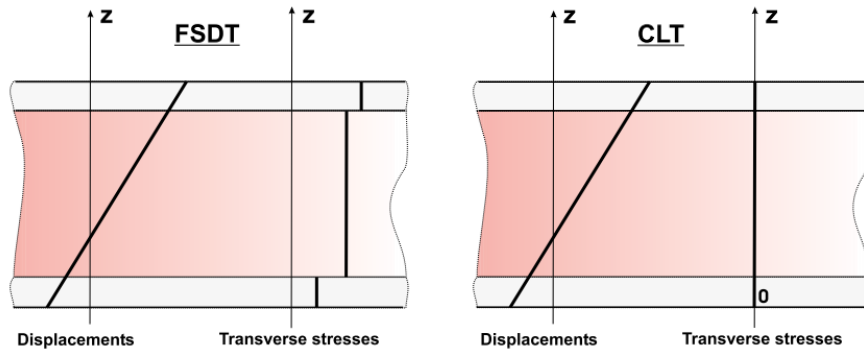
$$\left( \phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \right).$$



**Fig. II.12.** Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin (Reddy, 2003).

À partir de l'équation (II.28), nous remarquons que les composantes de déplacements plans ( $u, v$ ) varient d'une manière linéaire suivant l'axe ( $z$ ), tandis que la composante de déplacement transversal ( $w$ ) est constante. Cela va conduire à un état de contrainte/déformation de cisaillement transverse constant sur toute l'épaisseur de la plaque (Fig. II.13).

Cette déficience est corrigée par l'introduction de ce qu'on appelle les facteurs de correction de cisaillement transverse (Pai, 1995), (Vlachoutsis, 1992), (Laitinen et al, 1995).



**Fig. II.13.** Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) (Carrera et Brischetto, 2008).

**II.3.4.3. Facteur de correction transversal**

Les facteurs de correction du CT (FC), notés ( $k$ ), est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement ( $\sigma_{xz}$ ) et ( $\sigma_{yz}$ ) constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces libres.

Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson ( $\nu$ ) et variant de (0.76) pour  $\nu = 0$  à (0.91) pour  $\nu = 0,5$  dans le cas d'un matériau isotrope.

En suivant cette observation et en choisissant ( $k$ ) de façon à égaler la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope infinie déterminée par la théorie de l'élasticité et la théorie de Mindlin, nous pouvons montrer que le facteur ( $k$ ) est solution d'une équation polynomiale d'ordre (3) telle que :

$$(k = 0,86, \text{ si } \nu = 0,3, \quad k = \pi^2/12 \text{ si } \nu = 0,176)$$

Les résultats de Reissner-Mindlin qui supposent une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, donnent :  $k=5/6$ .

A ce jour le facteur (k), lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger son influence sur les résultats.

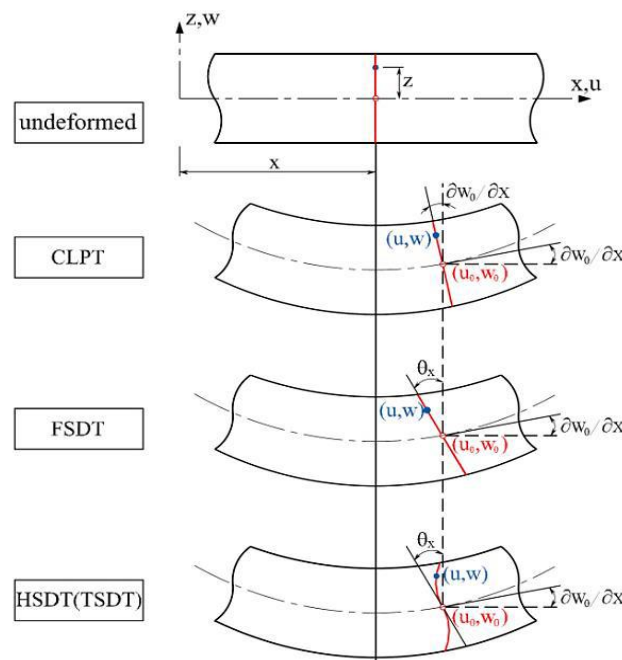
**II.3.4.4. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)**

Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes. Elles sont basées sur une variation non-linéaire du champ de déplacement (Fig. II.13), afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de CT. En addition, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation (Berthelot, 1992).

La plupart de ces théories sont des approches en déplacement et utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement sous la forme suivante:

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{u}_0(x, y) + z\underline{\phi}_\alpha(x, y) + z^2\underline{\phi}_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\underline{\phi}_\alpha^n(x, y) \tag{II.29}$$

Où (n) détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love (n = 0). La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec (n = 1) pour les déplacements dans le plan et (n = 0) pour le déplacement normal.



**Fig. II.14.** Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT (Nguyen, 2009).

Le modèle proposé par Hildebrand et al. (Hildebrand, 1949) peut être considéré comme la première tentative d'amélioration de la théorie classique des plaques par une théorie d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale. Ce modèle considère la forme suivante pour les déplacements:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x, y, z) &= u_{\alpha}(x, y) + z\phi_{\alpha}(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= u_z(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Nelson and Lorch (Nelson et Lorch, 1974) ont proposé un modèle avec neuf champs inconnus pour l'analyse des plaques multicouches. Lo et al. (Lo et al., 1977a; Lo et al., 1977b) ont étudié l'effet de la déformation normale transverse en utilisant une théorie à onze champs inconnus. Il y a d'autres travaux dans la littérature dans lesquels le champ de déplacement est approché de la même manière dans l'épaisseur.

Ce type de théories est connu sous le nom de High-order Shear Deformation Theory (HSDT) dans la littérature. Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisées pour analyser le comportement des structures épaisses en matériaux fonctionnellement gradués.

Le champ de déplacement est généralement donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II.31.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{II.31.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.31.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $(x)$  et  $(y)$ , respectivement  $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,

$\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaques (CPT) est obtenue en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{II.32})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (Touratier, 1991) a proposé un nouveau modèle, qui est largement utilisé dans les plaques stratifiées et sandwichs, en se basant sur la théorie TSDPT (Trigonometric Shear Deformation Plate Theory). L'auteur a utilisé une fonction sinusoïdale pour décrire la cinématique de son modèle où le champ de déplacement est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \psi_x, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \psi_y, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

D'après l'équation (II.33), on remarque que ce modèle se rapproche beaucoup des modèles à base de polynômes d'ordre supérieur. Selon Nguyen (Nguyen, 2004), les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Karama et al. (Karama et al., 2003) ont proposé une nouvelle fonction dite "exponentielle" pour les poutres composites stratifiées. Elle est plus tard étendue aux plaques stratifiées (Karama et al., 2009). Les fonctions exponentielles s'avèrent beaucoup plus riches que les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) dans leur série de développement de Fourier (Karama et al., 2003).

Elle est communément connue par la théorie de plaque de la déformation en cisaillement exponentielle ESDPT (Exponential Shear Deformation Plate Theory) dont le champ de déplacement s'écrit comme suit:



$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + ze^{-2(z/h)^2} \psi_x, \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + ze^{-2(z/h)^2} \psi_y, \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y),
\end{aligned} \tag{II.34}$$

La théorie des plaques de déformation en cisaillement hyperbolique HSDPT (Hyperbolic Shear Deformation Plate Theory) a été développée par Soldatos (Soldatos, 1992) pour l'analyse des plaques monocliniques homogènes. L'auteur a utilisé la fonction sinus hyperbolique pour les composantes membranaires tandis que le déplacement transversal est considéré comme constant à travers l'épaisseur. La cinématique de ce modèle est présentée comme suit:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \psi_x, \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \psi_y, \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y),
\end{aligned} \tag{II.35}$$

Mantari et al (Mantari ,2012) propose un nouveau modèle sinusoïdale (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{II.36}$$

Généralement, afin d'augmenter la précision des résultats, une croissance dans le degré du polynôme de l'équation (II.29) peut être une alternative. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une « fonction de cisaillement » ( Nguyen,2012) . La forme du déplacement proposée à travers l'épaisseur est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y), \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y),
\end{aligned} \tag{II.37}$$

$f(z)$  peut être considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

## **II.4. VERS L'UTILISATION D'UN MODELE DE COMPORTEMENT NON-LOCAL**

### **II.4.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non-locale**

Comme le note Eringen dans la préface de son ouvrage « Nonlocal continuum theories » (2002), toutes les théories physiques possèdent un champ d'application en dehors duquel elles sont incapables de fournir des résultats précis et cohérents. Cela se traduit par des prédictions numériques qui divergent de façon notable par rapport aux résultats expérimentaux ou des résultats théoriques présentant des singularités mathématiques inacceptables.

La théorie classique de l'élasticité linéaire ne permet pas de rendre compte de « l'effet d'échelle », i.e. des conséquences physiques intervenant lorsqu'on modifie certaines dimensions d'un solide. Plusieurs études expérimentales ont permis de mettre en évidence ce phénomène sur des nanotubes de carbone ou des films minces. L'augmentation de la viscosité d'un fluide s'écoulant dans des canaux microscopiques relève aussi de « l'effet d'échelle ».

Pour expliquer les limites de la théorie classique de l'élasticité, la communauté scientifique avance plusieurs explications physiques (Di Paola et al. (2010)) parmi lesquelles l'influence croissante de l'énergie de surface aux petites échelles ou bien le rôle non négligeable de la microstructure interne du matériau. L'approche classique serait donc incapable de traiter des problèmes pour lesquels les événements se produisant à une échelle microscopique ou microstructurale ont une influence significative. Selon Eringen (1987, 2002), cette incapacité est liée à l'absence d'une longueur interne, caractéristique du matériau, dans le modèle de comportement élastique classique.

Dans ce contexte, l'approche non-locale se présente comme une alternative intéressante, à mi-chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable de prendre en compte l'influence de la microstructure. Les théories non-locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide.

Ce type d'approche, dont la formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

On peut grossièrement classer les théories non-locales en deux catégories :

- Les théories non-locales à gradient
- Les théories non-locales intégrales

#### II.4.2. Théories non-locales à gradient

Il existe deux formulations légèrement différentes de cette théorie.

La première repose sur la philosophie suivante. Pour matérialiser l'influence de la microstructure interne, chaque point matériel du solide possède des degrés de liberté supplémentaires, qui correspondent à des microcontraintes et des microdéformations additionnelles. Les bases de la théorie ont été posées dans les années 60 par plusieurs auteurs

(Toupin ,1963 ; Mindlin ,1963 ;Krumhans ,1967 ; Kunin ,1967). Dès le début des années 1970, Eringen a lui aussi contribué à son développement (Eringen ,1972).

Cette théorie a permis d'étudier de nouveaux modèles de comportement, à travers, notamment, la définition des milieux micromorphes, microstretchs ou micropolaires (Eringen ,2002). Dans ce type de modèle, le solide est constitué d'un ensemble de particules matérielles qui sont susceptibles de se dilater, se contracter ou tourner sur elles-mêmes. Ces degrés de libertés supplémentaires engendrent des micro-contraintes qui viennent s'ajouter à la contrainte classique prévue par la théorie locale.

Sur ce sujet, citons aussi les travaux de Gao (1999-a, 1999-b) qui introduit dans les équations d'équilibre non-locales les moments liés aux rotations relatives des particules les unes par rapport aux autres.

La seconde formulation est basée sur l'introduction de gradients de la déformation dans l'équation de comportement élastique. Cette approche est apparue plus récemment dans les travaux de Aifantis (1992, 1994), Askas et Aifantis (2002) ou encore, Altan et al. (1997).

Ces auteurs remarquent que la singularité au voisinage de la pointe de fissure disparaît lorsqu'on utilise une loi de comportement dans laquelle les contraintes ne dépendent pas uniquement du tenseur de déformation, mais aussi de ses dérivées secondes. Selon ces auteurs, l'introduction de gradients d'ordre supérieur permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau sur la loi de comportement.

Sous sa forme la plus simple, l'équation de comportement de la théorie des gradients s'écrit :

$$\sigma = C (\varepsilon - \ell^2 \nabla^2 \varepsilon) \quad (\text{II.38})$$

Où ( $\sigma$ ) et ( $\varepsilon$ ) correspondent respectivement au tenseur de contrainte de Cauchy et au tenseur de déformation linéarisé. Rappelons que l'opérateur nabla ( $\nabla$ ) a pour composantes en coordonnées cartésiennes,  $\nabla(\cdot) = (\partial \cdot / \partial x; \partial \cdot / \partial y; \partial \cdot / \partial z)$ .

Le paramètre «  $\ell$  » est homogène à une longueur, représentative de la microstructure interne du matériau. On peut d'ores et déjà remarquer que lorsque «  $\ell$  » s'annule, on retrouve le modèle classique de comportement élastique (loi de Hooke généralisée).

### II.4.3. Théories non-locales intégrales

Nous nous intéressons dans cette dernière partie à l'approche non-locale intégrale ou « théorie non-locale forte ».

Cette formulation a été développée initialement dans les années 1960 par Krumhanls (1963), Kroner (1967) et Kunin (1967). Ces auteurs partent du même constat : dans le cadre de l'élasticité classique, les forces de cohésion à l'intérieur d'un solide sont modélisées par des forces de contact dont la portée est nulle. Or, les forces de cohésion dans un matériau réel possèdent clairement une certaine portée et ont donc un rayon d'influence non nul.

Pour remédier à cette insuffisance, Kroner propose d'affiner la théorie des milieux continus élastiques en y introduisant des forces d'interaction à longue distance. De son côté, Krumhanls a travaillé sur la conversion de la théorie des réseaux en une théorie continue.

Une formulation améliorée de l'approche non-locale, qui précise les relations de comportement dans le cadre de la thermodynamique, est présentée par Eringen et Edelen (1972) au début des années 1970. Elle s'est ensuite enrichie des contributions plus récentes de Gao (1999) et Polizzotto (2001). Dans le cadre non-local, l'énergie interne en un point dépend du champ de déformation dans tout le solide.

De ce fait, le premier principe de la thermodynamique doit être intégré sur l'ensemble du domaine d'étude. Notons que plusieurs auteurs (Edelen et Laws ,1971 ; Edelen et al. ,1971), ont proposé une formulation « locale » du premier principe dans laquelle apparait un terme d'énergie résiduel supplémentaire. Ce résidu non-local représente l'énergie transmise en un point par tous les autres points du solide.

Pour le cas particulier d'un solide élastique non local, isotrope et linéaire, Eringen et Kim (1974) proposent une approche non-locale qui ne diffère de l'approche continue classique que par la relation entre les déformations et les contraintes. Dans ce cas, le champ de contrainte s'exprime le plus souvent comme une intégrale pondérée des déformations sur l'ensemble du domaine d'étude.

Le modèle de comportement fait par ailleurs intervenir un paramètre « $\ell$ » homogène à une longueur, qui définit la « portée » des interactions et permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau.

La loi de comportement proposée par Eringen peut se mettre sous la forme suivante :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha(|x' - x|, \ell) \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x') \quad (\text{II.39})$$

Où  $(t)$  et  $(\varepsilon)$  sont respectivement le tenseur de contrainte non-local et le tenseur des déformations linéarisé.

$$\varepsilon_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x) \right) \quad (\text{II.40})$$

$(C)$  correspond au tenseur d'élasticité et  $\alpha(|x'-x|, \ell)$  est la fonction de caractérisation non-locale. Le paramètre « $\ell$ » représente une longueur interne caractéristique du matériau.

D'après, l'équation (II.39) le tenseur de contrainte au point  $x$  dépend des déformations en tout point à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Ce modèle est donc très différent de la loi de Hooke généralisée où la contrainte dépend de la déformation en un point uniquement. La fonction de caractérisation, ou fonction d'atténuation, dépend de « $\ell$ » et de la distance euclidienne entre  $x$  et  $x'$ .

Plus cette distance est grande devant la longueur interne, plus la valeur de la fonction est faible. Au-delà d'un certain rayon,  $\alpha(|x'-x|, \ell)$  est quasi nulle. Cette propriété permet de prendre en compte l'atténuation des forces d'interaction dans le matériau. Les déformations aux points  $(x')$  éloignés du point  $(x)$  ont peu d'influence sur la valeur de la contrainte en ce point.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés à la théorie non locale intégrale d'Eringen.

## II.5. CONCLUSION

Le présent chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour étudier notre problématique. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions générales concernant les matériaux FGMs, un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de

déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) qui servent à analyser et modéliser le comportement des plaques fonctionnellement graduées sous différent chargement.

Enfin nous avons présenté différents types d'approches non-locales. Parmi celles-ci, la théorie non locale intégrale de l'élasticité est intéressante par le fait qu'elle ne nécessite pas l'introduction de conditions aux limites non conventionnelles pour la résolution d'un problème concret. Contrairement à l'élasticité classique, où la contrainte en un point dépend uniquement de la déformation au même point (loi de Hooke), le modèle de comportement non-local relie la contrainte en un point aux déformations dans l'ensemble du solide.

## **CHAPITRE III**

---

# **ETUDE DE LA VIBRATION LIBRE DES NANO PLAQUES FGM REPOSANT SUR DES FONDATION ELASTIQUES**

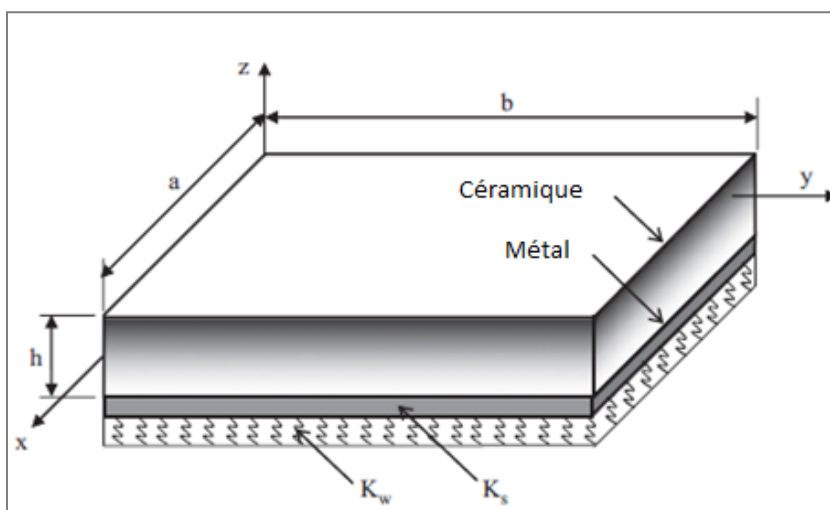
### III.1. INTRODUCTION

La théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro (**ZSDT**) est étendue pour la première fois pour l'analyse des vibrations des nano plaques fonctionnellement graduées noyé dans un milieu élastique. Cette théorie (**ZSDT**) est utilisé par Ray (2003) pour les plaques composites stratifiées et incorpore l'effet transversal de déformation de cisaillement à travers l'emploi de forces de cisaillement au lieu des angles de rotation comme dans les théories de déformation de cisaillement existantes. Le **ZSDT** utilise les mêmes cinq inconnues comme dans le **FSDT**, mais respecte les conditions des la contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans introduire le facteur de correction de cisaillement.

En outre, l'effet d'échelle est pris en compte en utilisant les relations constitutives non locales d'Eringen.

### III.2. DESCRIPTION DE LA NANO PLAQUE UTILISEE NOYEE DANS UN MILIEU ELASTIQUE

Considérons une nano plaque fonctionnellement graduée d'une longueur ( $a$ ), largeur ( $b$ ) et épaisseur ' $h$ ' reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, comme il est indiqué dans la figure (III.1).



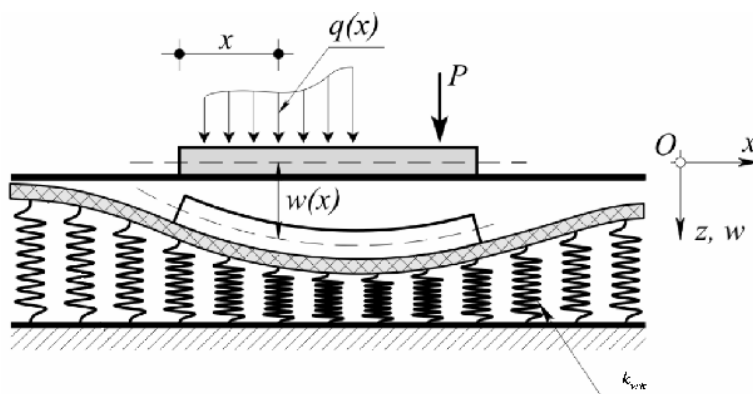
**Fig. III.1.** Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur des fondations élastique.



Comme Il existe de nombreuses études sur la modélisation de fondation élastique Winkler qui considère la base comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement voir (fig. III.2.). Zhou et Eisenberger ont étudié une solution générale aux vibrations des poutres sur différent fondation élastique de type Winkler.

En outre, certains chercheurs comme Ma 2009 et Civalek 2007 ont étudié l'analyse des fondations élastiques avec les modèles Winkler-Pasternak car Pasternak a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés. Benyoucef et al. (2010) étudièrent la réponse en flexion des plaques FG épaisses reposant sur des fondations élastiques de Pasternak. Ait Atmane et al. (2010) ont présentés une analyse en vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique à deux paramètres en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement des plaques.

Dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions structures-bases élastiques.



**Fig.III.2.** Cas d'une poutre repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak.

### III.3. MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES

Une nano plaque fonctionnellement graduée fabriquée à partir d'un matériau composé d'un mélange de deux phases, par exemple, le métal et la céramique. Pour permettre de contourner les problèmes liés à cette hétérogénéité, il est nécessaire d'appliqué le concept d'homogénéisation qui est généralement appelée la micromécanique ou la modélisation multi-échelle (Ch El Hage, 2006). Selon le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka, le module

effectif d'ampleur ( $K$ ) et le module effectif de cisaillement ( $G$ ) sont donnés par (Belabed et al, 2014; Valizadeh et al, 2013; Cheng and Batra, 2009; Qian et al, 2004) :

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \quad (\text{III-1a})$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{(G_c - G_m)}{G_m + f_1}} \quad (\text{III-1b})$$

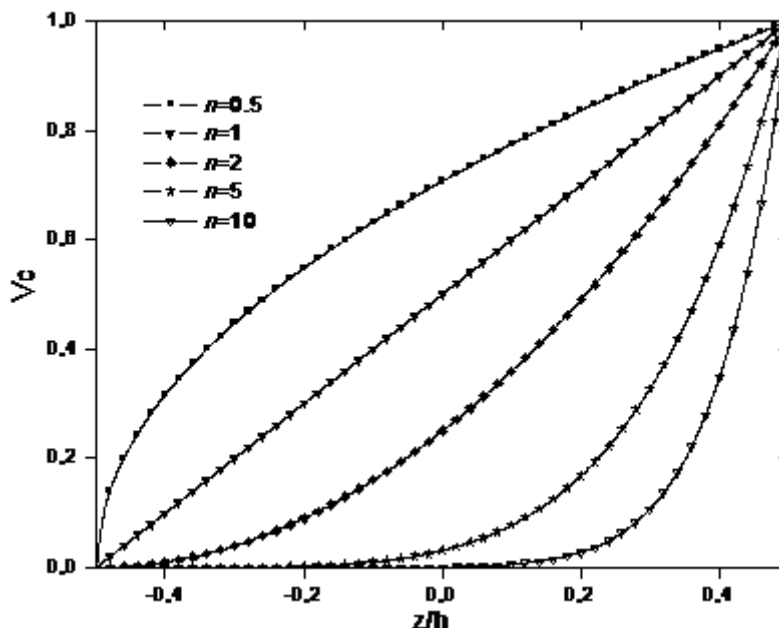
Avec:

$$f_1 = \frac{G_m (9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (\text{III-2})$$

$V_i$  ( $i = c, m$ ) est la fraction volumique de la phase matérielle. Les indices ( $c$ ) et ( $m$ ) se représentent respectivement les deux phases céramique et métal. Les fractions volumiques des phases céramique et métal sont reliées par  $V_c + V_m = 1$  et  $V_c$  est exprimé par:

$$V_c(z) = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^n, n \geq 0 \quad (\text{III-3})$$

Avec ( $n$ ) dans l'équation (III-3) présente l'indice matériel. La figure (III.3) présente la répartition de la fraction volumique de la phase céramique dans la direction de l'épaisseur ( $z$ ) des plaques fonctionnellement graduées.



**Fig.III.3.** Variation de la fraction volumique de phase céramique à travers l'épaisseur

Le module de Young effectif ( $E$ ) et le coefficient de poisson ( $\nu$ ) peuvent être calculés à partir des équations suivantes :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \tag{III-4a}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \tag{III-4b}$$

La densité de la masse effective ( $\rho$ ) est calculée à partir des lois de mélange de (Benachour et al., 2011; Natarajan et al., 2011; Hebali et al, 2014):

$$\rho = \rho_c V_c + \rho_m V_m \tag{III-5}$$

### III.4. CINEMATIQUE

Le champ de déplacement de la présent théorie ZSDT est considéré basé sur la supposition que les contraintes de cisaillement transversales changent selon une variation parabolique en fonction de l'épaisseur de la plaque et disparaissent sur les surfaces inférieures et supérieures des plaques, et, par conséquent, elle ne nécessite pas l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement.

En se basant sur les suppositions citées, le champ de déplacement peut être déterminé comme suit (Ray, 2003) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x(x, y, t) \quad (\text{III-6a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_y(x, y, t) \quad (\text{III-6b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III-6c})$$

( $u_0$ ) et ( $v_0$ ) sont respectivement les déplacements d'un point dans le plan médian de la plaque suivant les directions (x) et (y); ( $w_0$ ) est le déplacement transverse ; et (h) est l'épaisseur de la plaque.  $Q_x$  et  $Q_y$  sont les efforts tranchants ; et  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  sont des constantes inconnues définies à bases des efforts tranchants définie par :

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{iz} dz, \quad (i = x, y) \quad (\text{III-7})$$

Seulement les déformations non nulles sont liées aux champs du déplacement dans l'équation (III-6) sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-8})$$

Tel que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial Q_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Q_x}{\lambda_x} \\ \frac{Q_y}{\lambda_y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-9a})$$

Et :

$$f(z) = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] \text{ et } g(z) = \frac{df}{dz} = \frac{3}{2h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{III-9b})$$

### III.5. LA THEORIE NON LOCALE ET DES RELATIONS CONSTITUTIVES

Comme le note Eringen dans la préface de son ouvrage «Nonlocal continuum theories» (2002), toutes les théories physiques possèdent un champ d'application en dehors duquel elles sont incapables de fournir des résultats précis et cohérents. Cela se traduit par des prédictions numériques qui divergent de façon notable par rapport aux résultats expérimentaux ou des résultats théoriques présentant des singularités mathématiques inacceptables.

Dans ce contexte, l'approche non-locale se présente comme une alternative intéressante, à mi chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable de prendre en compte l'influence de la microstructure.

Les théories non-locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide. Ce type d'approche, dont la formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

En se basant sur le travail présenté par Eringen (1983), le tenseur des contraintes non-locale au point est donné par:

$$\sigma - \mu \nabla^2 \sigma = \tau \quad (\text{III-10})$$

Où  $(\tau)$  est le tenseur de contrainte locale à un point exprimé par rapport à la déformation par la loi de Hooke;  $\mu = (e_0 a)^2$  est le paramètre non local qui comprend le petit effet d'échelle,  $a$  est la longueur caractéristique interne et  $(e_0)$  est une constante appropriée à chaque matériau.

Pour un matériau à gradient fonctionnel, dans le cas à deux dimensions, la relation de comportement non local dans l'équation (III-10) prend les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III -11})$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III-4), les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés en tant que :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad (\text{III -12a})$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad (\text{III -12b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]}, \quad (\text{III -12c})$$

### III.6. EQUATIONS DE MOUVEMENT

Dans cette section, les équations des mouvements sont déterminées en utilisant le principe d'Hamilton. La forme analytique de ce principe est donné par (Reddy, 2007; Draiche et al., 2014; Ait Amar Meziane et al., 2014; Nedri et al., 2014; Mahi et al., 2015; Bourada et al., 2015; Al-Basyouni et al., 2015) :

$$0 = \int_0^t (\delta U_p + \delta U_f - \delta K) dt \quad (\text{III-13})$$

Tel que  $(\delta U_p)$  et  $(\delta U_f)$  sont les variations de l'énergie de déformation de la plaque et de la fondation respectivement, et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned}
\delta U_p &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}] dAdz \\
&= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_{xy} + P_x \delta \eta_x \\
&\quad + P_y \delta \eta_y + P_{xy} \delta \eta_{xy} + R_y \delta \gamma_{yz}^0 + R_x \delta \gamma_{xz}^0] dA
\end{aligned} \tag{III-14}$$

Les résultantes des contraintes  $N$ ,  $M$ ,  $P$  et  $R$  sont exprimées par :

$$(N_i, M_i, P_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \text{ et } (R_x, R_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{III-15}$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique est calculée par :

$$\delta U_f = \int_A \left[ K_w w \delta w + K_s \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy \tag{III-16}$$

Où  $(K_w)$  et  $(K_s)$  sont les coefficients transversales de cisaillement et de rigidité du milieu élastique, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est exprimée par :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz \\
&= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \\
&\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
&\quad + J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\delta \dot{Q}_x}{\lambda_x} + \frac{\dot{Q}_x}{\lambda_x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\delta \dot{Q}_y}{\lambda_y} + \frac{\dot{Q}_y}{\lambda_y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
&\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\dot{Q}_x \delta \dot{Q}_x}{\lambda_x^2} + \frac{\dot{Q}_y \delta \dot{Q}_y}{\lambda_y^2} \right) \\
&\quad - J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\delta \dot{Q}_x}{\lambda_x} + \frac{\dot{Q}_x}{\lambda_x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\delta \dot{Q}_y}{\lambda_y} + \frac{\dot{Q}_y}{\lambda_y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \} dA
\end{aligned} \tag{III-17}$$

L'indice supérieur du point indique la dérivée partielle par rapport au temps  $t$ ;  $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les inerties massiques définies par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, z^2, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (III-18)$$

Substituant les expressions de  $\delta U_p, \delta U_f$  et  $\delta K$  des équations (III-14), (III-16) et (III-17) dans l'équation (III-13) et l'intégration par parties, et en collectant les coefficients de  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta Q_x$  et  $\delta Q_y)$ , les équations de mouvement de la présente théorie sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + J_1 \frac{\ddot{Q}_x}{\lambda_x} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + J_1 \frac{\ddot{Q}_y}{\lambda_y} \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0 \\ & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \dot{w}_0 + J_2 \left( \frac{\partial \ddot{Q}_x}{\lambda_x \partial x} + \frac{\partial \ddot{Q}_y}{\lambda_y \partial y} \right) \\ \delta Q_x : \quad & \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_x = J_1 \ddot{u}_0 - J_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + K_2 \frac{\ddot{Q}_x}{\lambda_x} \\ \delta Q_y : \quad & \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - R_y = J_1 \ddot{v}_0 - J_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + K_2 \frac{\ddot{Q}_y}{\lambda_y} \end{aligned} \quad (III-19)$$

Où  $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$  est le laplacien operateur 2D système de coordonnées cartésiennes.

En substituant l'équation (III-8) dans l'équation (III-11) et les résultats subséquents dans l'équation (III-15), les résultantes des contraintes sont déterminées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^a \\ B & D & D^a \\ B^a & D^a & H^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \eta \end{Bmatrix}, R - \mu \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) = A^a \gamma, (III-20)$$



Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, \quad P = \{P_x, P_y, P_{xy}\}^t, \quad (\text{III-21a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^t, \quad \eta = \{\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}\}^t, \quad (\text{III-21b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III-21c})$$

$$B^a = \begin{bmatrix} B_{11}^a & B_{12}^a & 0 \\ B_{12}^a & B_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^a \end{bmatrix}, \quad D^a = \begin{bmatrix} D_{11}^a & D_{12}^a & 0 \\ D_{12}^a & D_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^a \end{bmatrix}, \quad H^a = \begin{bmatrix} H_{11}^a & H_{12}^a & 0 \\ H_{12}^a & H_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^a \end{bmatrix}, \quad (\text{III-21d})$$

$$R = \{R_x, R_y\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^a = \begin{bmatrix} A_{44}^a & 0 \\ 0 & A_{55}^a \end{bmatrix}, \quad (\text{III-21e})$$

Où,  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ , etc., sont les rigidités de la plaque, définies par:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^a & D_{11}^a & H_{11}^a \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^a & D_{12}^a & H_{12}^a \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^a & D_{66}^a & H_{66}^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III-22a})$$

$$\left( A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^a, D_{22}^a, H_{22}^a \right) = \left( A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^a, D_{11}^a, H_{11}^a \right), \quad (\text{III-22b})$$

$$A_{44}^a = A_{55}^a = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III-22c})$$

Les équations du mouvement de la présente théorie non locale de la nano plaque peuvent être rédigés en termes des déplacements  $(u_0, v_0, w_0, Q_x, Q_y)$  en remplaçant les résultantes des contraintes de l'équation (III-20) dans l'équation (III-19) :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{B_{11}^a}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{B_{12}^a}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + B_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} \right) = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + J_1 \frac{\ddot{Q}_x}{\lambda_x} \right) \quad \text{(III-23a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{B_{11}^a}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{B_{12}^a}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} + B_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} \right) = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + J_1 \frac{\ddot{Q}_y}{\lambda_y} \right) \quad \text{(III-23b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + (B_{12} + 2B_{66}) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + \\
 & D_{11}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial x^3} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} \right) + D_{12}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^3 Q_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + 2D_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} \right) + (1 - \mu \nabla^2) (-K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0) \\
 & = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \ddot{Q}_x}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial \ddot{Q}_y}{\partial y} \right) \right) \quad \text{(III-23c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12}^a \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - D_{11}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - D_{12}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{H_{11}^a}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{H_{12}^a}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} + \\
 & B_{66}^a \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - 2D_{66}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + H_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} \right) - A_{44}^a \frac{Q_x}{\lambda_x} \\
 & = (1 - \mu \nabla^2) \left( J_1 \ddot{u}_0 - J_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + K_2 \frac{\ddot{Q}_x}{\lambda_x} \right) \quad \text{(III-23d)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^a \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{12}^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - D_{11}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - D_{12}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{H_{11}^a}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \frac{H_{12}^a}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} + \\
 & B_{66}^a \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - 2D_{66}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + H_{66}^a \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} \right) - A_{55}^a \frac{Q_y}{\lambda_y} \\
 & = (1 - \mu \nabla^2) \left( J_1 \ddot{v}_0 - J_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + K_2 \frac{\ddot{Q}_y}{\lambda_y} \right) \quad \text{(III-23e)}
 \end{aligned}$$

### III.7. SOLUTION EXACTE DE LA NANO PLAQUE FONCTIONNELLEMENT GRADUEE SIMPLEMENT APPUYEES

Considérant une nano plaque rectangulaire avec longueur  $a$  et la largeur  $b$  simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur quatre cotés:

$$v_0 = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = N_x = M_x = 0 \quad \text{à } x = 0, a \quad \text{(III-24a)}$$

$$u_0 = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = N_y = M_y = 0 \quad \text{à } y = 0, b \quad \text{(III-24b)}$$

La solution de Navier définie ci-dessous satisfait les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{(III-24a)}$$

Où  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$  et  $Y_{mn})$  sont des coefficients arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence associé avec  $(m, n)$  ième mode propre,  $\alpha = m\pi/a$  et  $\beta = n\pi/b$ . En substituant les équations (III-24) dans l'équation (III-23), les solutions analytiques sont données sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \\ -\lambda\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(III-25)}$$

Dans lequel :

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad S_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = -\alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2)$$

$$S_{14} = \frac{B^a_{11}\alpha^2 + B^a_{66}\beta^2}{\lambda_x}, \quad S_{15} = \frac{\alpha\beta(B^a_{12} + B^a_{66})}{\lambda_y}, \quad S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{11}\beta^2$$

$$S_{23} = -\beta(B_{11}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \quad S_{24} = \frac{\alpha\beta(B_{12}^a + B_{66}^a)}{\lambda_x}, \quad S_{25} = \frac{B_{66}^a\alpha^2 + B_{11}^a\beta^2}{\lambda_y}$$

$$S_{33} = D_{11}(\alpha^4 + \beta^4) + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + \lambda(K_w + K_s(\alpha^2 + \beta^2)),$$

$$S_{34} = \frac{\alpha(-2D_{66}^a\beta^2 - D_{11}^a\alpha^2 - D_{12}^a\beta^2)}{\lambda_x}, \quad S_{35} = \frac{\beta(-D_{11}^a\beta^2 - D_{12}^a\alpha^2)}{\lambda_y},$$

$$S_{41} = B_{11}^a\alpha^2 + B_{66}^a\beta^2, \quad S_{42} = \alpha\beta(B_{12}^a + B_{66}^a), \quad S_{43} = \alpha(-2D_{66}^a\beta^2 - D_{11}^a\alpha^2 - D_{12}^a\beta^2)$$

$$S_{44} = \frac{H_{11}^a\alpha^2 + H_{66}^a\beta^2 + A_{44}^a}{\lambda_x}, \quad S_{45} = \frac{\alpha\beta(H_{12}^a + H_{66}^a)}{\lambda_y}, \quad S_{51} = \alpha\beta(B_{12}^a + B_{66}^a)$$

$$S_{52} = B_{66}^a\alpha^2 + B_{11}^a\beta^2, \quad S_{53} = \beta(-D_{11}^a\beta^2 - D_{12}^a\alpha^2), \quad S_{54} = \frac{\alpha\beta(H_{12}^a + H_{66}^a)}{\lambda_x}$$

$$S_{55} = \frac{H_{66}^a\alpha^2 + H_{11}^a\beta^2 + A_{55}^a}{\lambda_y} \quad (\text{III-26a})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = \frac{J_1}{\lambda_x}, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{25} = \frac{J_1}{\lambda_y}, \quad m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$m_{34} = -\alpha \frac{J_2}{\lambda_x}, \quad m_{35} = -\beta \frac{J_2}{\lambda_y}, \quad m_{41} = J_1, \quad m_{43} = -\alpha J_2, \quad m_{44} = \frac{K_2}{\lambda_x}, \quad m_{52} = J_1, \quad m_{53} = -\beta J_2$$

$$m_{55} = \frac{K_2}{\lambda_y}, \quad \lambda = 1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{III-26b})$$

### III.8. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons développé une théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT) pour l'étude du comportement vibratoire libre d'une nano plaque fonctionnellement graduées « FGM », noyée dans un milieu élastique. Le présent modèle considère l'effet de déformation de cisaillement par l'intermédiaire de l'utilisation des efforts tranchants au lieu des rotations comme dans le cas des théories de déformation de cisaillement existantes. Le modèle développé est capable d'introduire le paramètre non local en utilisant la théorie non locale d'Enrigen.

## **CHAPITRE IV**

---

# **RESULTATS ET DISCUSSION**

**IV.1. INTRODUCTION**

Dans cette dernière partie, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM à l'échelle macroscopique et à l'échelle nanométrique.

Les plaques fonctionnellement graduées posées sur des fondations élastiques ont été largement étudiées pour modéliser divers problèmes constructifs pendant les dernières décennies.

Dans ce présent chapitre, nous présenterons les résultats de la vibration libre pour des macros et nano plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées posées sur des fondations élastiques. En commençant en premier lieu par la validation et comparaison des théories de déformation de cisaillement d'ordre zéro à l'échelle locale et non locale à cinq variables avec d'autres théories de déformation de cisaillement à cinq variables et quatre variables connus dans la littérature.

**IV.2. ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES FGM A L'ECHELLE MACROSCOPIQUE**

Une plaque AL/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composée d'Aluminium (comme métal), et d'Alumina (comme céramique) est considérée. Le module de Young et la masse volumique de l'Aluminium sont  $E_m=70\text{GPa}$  et  $\rho_m=2702\text{Kg/m}^3$ , et ceux de l'Alumina sont  $E_c=380\text{GPa}$ ,  $\rho_c=3800\text{Kg/m}^3$ .

Le coefficient de poisson est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque et est pris égal à (0.3). Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont:

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \varpi = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad K_w = \frac{K_w a^4}{D_m}, \quad K_s = \frac{K_s a^2}{D_m}, \quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (\text{IV.1})$$

**IV.2.1. Validation des résultats**

Quelques exemples numériques sont présentés pour l'analyse de la vibration libre. On commence en premier lieu par étudier les plaques simplement appuyées pour différentes valeurs du rapport de l'épaisseur ( $h/a$ ), de l'indice matériel ( $n$ ) et des paramètres de la fondation élastique de type Pasternak-Winkler ( $k_w, k_s$ ).

La fréquence fondamentale adimensionnelle  $\hat{\omega}$  des plaques carrées est présentée dans le tableau (IV-1) Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par Baferani et al (2011) à partir de la théorie du troisième ordre (TSDT). Les résultats numériques de la présente théorie ont une bonne concordance avec les résultats des autres théories.

D'après le tableau (IV-1), on remarque que la fréquence fondamentale adimensionnelle croit lorsque les paramètres de la fondation élastique ( $k_w, k_s$ ) augmentent.

En outre, On déduit que le paramètre de fondation de Pasternak ( $k_s$ ) a un effet dominant sur l'augmentation de la fréquence par rapport au paramètre de Winkler ( $k_w$ ).

Tableau IV-1 : fréquence fondamentale adimensionnelle  $\hat{\omega}$  pour les plaques carrées.

$k_w$	$k_s$	h/a	Références	Indice matériel ( $n$ )						
				0	0.5	1	2	5		
0	0	0.05	Présente	0.0290	0.0246	0.0222	0.0202	0.0190		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.0291	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197		
		0.1	Présente	0.1133	0.0962	0.0868	0.0787	0.0740		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767		
		0.15	Présente	0.2452	0.2089	0.1885	0.1706	0.1589		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.2454	0.2121	0.1939	0.1778	0.1648		
		0.2	Présente	0.4150	0.3550	0.3204	0.2892	0.2667		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765		
		0	100	0.05	Présente	0.0405	0.0386	0.0377	0.0374	0.0376
					TSDT <sup>(a)</sup>	0.0406	0.0389	0.0382	0.0380	0.0381
0.1	Présente			0.1597	0.1525	0.1494	0.1477	0.1486		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.1599	0.1540	0.1517	0.1508	0.1515		
0.15	Présente			0.3511	0.3369	0.3303	0.3268	0.3285		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.3515	0.3407	0.3365	0.3351	0.3362		
0.2	Présente			0.6074	0.5857	0.5752	0.5694	0.5722		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.6080	0.5932	0.5876	0.5861	0.5879		
100	0			0.05	Présente	0.0297	0.0254	0.0232	0.0213	0.0204
					TSDT <sup>(a)</sup>	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.0210
		0.1	Présente	0.1161	0.0999	0.0910	0.0836	0.0795		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821		
		0.15	Présente	0.2516	0.2172	0.1981	0.1817	0.1716		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.2519	0.2204	0.2036	0.1889	0.1775		
		0.2	Présente	0.4268	0.3702	0.3380	0.3096	0.2901		
			TSDT <sup>(a)</sup>	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999		
		100	100	0.05	Présente	0.0410	0.0392	0.0384	0.0380	0.0383
					TSDT <sup>(a)</sup>	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
0.1	Présente			0.1617	0.1548	0.1518	0.1504	0.1514		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543		
0.15	Présente			0.3557	0.3421	0.3359	0.3328	0.3348		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.3560	0.3460	0.3422	0.3412	0.3427		
0.2	Présente			0.6156	0.5950	0.5852	0.5970	0.5833		
	TSDT <sup>(a)</sup>			0.6162	0.6026	0.5978	0.5800	0.5993		

(a) : Baferarni et al (2011).



### IV.3. ANALYSE EN VIBRATION LIBRE DES NANO PLAQUES FG A L'ECHELLE NANOMETRIQUE

L'analyse de la vibration libre est effectuée en supposant que la surface supérieure de la plaque est riche en céramique (Si3N4) et la surface inférieure est riche en métal (SUS304). La masse volumique ( $\rho$ ) et le module de Young E sont :  $\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_c = 348.43 \text{ e}^9 \text{ N/m}^2$  pour Si3N4 et  $\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_m = 201.04 \text{ e}^9 \text{ N/m}^2$  pour SUS304.

Le coefficient du poisson est considéré être constant, égale à (0.3) pour des raisons de simplification, les quantités non dimensionnelles suivantes sont utilisées dans les résultats numériques des graphes et des tableaux :

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}, \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, k_w = \frac{K_w a^4}{D_m}, k_s = \frac{K_s a^2}{D_m}, D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{IV.2})$$

Le rapport de fréquence sert comme un indice pour évaluer quantitativement l'effet du paramètre non local sur la réponse vibratoire d'une nano-plaque fonctionnellement graduée. Le taux de fréquence est défini comme :

$$\text{rapport de fréquence} = \frac{\bar{\omega}_{NL}}{\bar{\omega}_L}$$

Où ( $\bar{\omega}_{NL}$ ) et ( $\bar{\omega}_L$ ) sont les fréquences calculées en utilisant le modèle non local et le modèle local, respectivement.

#### IV.3.1. Validation des résultats

Pour confirmer en première lieu, la précision des modèles proposés, des plaques sans la présence des fondations élastiques sont considérées et les résultats calculés sont comparés avec ceux de Belkorissat et al. (2015) et Aghababaei et Reddy (2009) dans les tableaux (IV-3 et IV-4). La description des différents modèles de déplacement est présentée dans le tableau (IV-2).

**Tableau IV-2:** Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnus.

<b>Modèles</b>	<b>Théories</b>	<b>Nombre de fonctions inconnus</b>
CPT	Théorie classique des plaques (Classical plate theory)	3
TSDT	Théorie de déformation du cisaillement du troisième ordre (Third-order shear deformation theory, Aghababaei et Reddy 2009)	5
FSDT	Théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (First-order shear deformation theory, Aghababaei et Reddy 2009)	5
REF <sup>(a)</sup>	Théorie hyperbolique non locale de déformation de cisaillement	4
Présente théorie	Théorie non locale de la déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT)	5

Dans le premier cas, des nano plaques homogènes simplement appuyé sont examinées en considérant différentes valeurs du paramètre non local et des rapports géométriques des nano plaques.

Les résultats sont présentés dans le tableau (IV-3) et comparés avec ceux donnés par Belkorissat et al. (2015) et Aghababaei et Reddy (2009). On constate que les résultats numériques trouvés sont en très bon accord avec les résultats disponibles dans la littérature.

**Tableau IV-3 :** Comparaison des fréquences fondamentales ( $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ ) des nano plaques. ( $a = 10, E = 30 \times 10^6, \rho = 1, \nu = 0.3$ )

$a/b$	$a/h$	$\mu$	Présente	REF <sup>(a)</sup>	TSDT <sup>(b)</sup>	FSDT <sup>(b)</sup>	CPT <sup>(b)</sup>
1	10	0	0.0930	0.0930	0.0935	0.0930	0.0963
		1	0.0850	0.0850	0.0854	0.0850	0.0880
		2	0.0787	0.0787	0.0791	0.0788	0.0816
		3	0.0737	0.0737	0.0741	0.0737	0.0763
		4	0.0695	0.0695	0.0699	0.0696	0.0720
		5	0.0659	0.0659	0.0663	0.0660	0.0683
	20	0	0.0238	0.0238	0.0239	0.0239	0.0241
		1	0.0218	0.0218	0.0218	0.0218	0.0220
		2	0.0202	0.0202	0.0202	0.0202	0.0204
		3	0.0189	0.0189	0.0189	0.0189	0.0191
		4	0.0178	0.0178	0.0179	0.0178	0.0180
		5	0.0169	0.0169	0.0170	0.0169	0.0171
2	10	0	0.0588	0.0588	0.0591	0.0589	0.0602
		1	0.0555	0.0555	0.0557	0.0556	0.0568
		2	0.0527	0.0527	0.0529	0.0527	0.0539
		3	0.0503	0.0503	0.0505	0.0503	0.0514
		4	0.0481	0.0481	0.0483	0.0482	0.0493
		5	0.0463	0.0463	0.0464	0.0463	0.0473
	20	0	0.0149	0.0149	0.0150	0.0150	0.0150
		1	0.0141	0.0141	0.0141	0.0141	0.0142
		2	0.0134	0.0134	0.0134	0.0134	0.0135
		3	0.0127	0.0127	0.0128	0.0128	0.0129
		4	0.0122	0.0122	0.0123	0.0123	0.0123
		5	0.0117	0.0117	0.0118	0.0118	0.0118

(a): Belkorissat et al. (2015)

(b): Aghababaei and Reddy (2009)

Dans le deuxième cas, on considère des nano plaques fonctionnellement graduées (n=5) avec différentes valeurs du paramètre non local et des rapports géométriques sont

examinées. Les fréquences naturelles prédites à travers la présente formulation, sont comparés avec ceux de Belkorissat et al. (2015) dans le tableau (IV-4).

Encore une fois, un très bon accord est trouvé entre les différents résultats.

**Tableau IV-4:** Comparaison des fréquences naturelles des nano-plaques fonctionnellement graduées. ( $a = 10, n = 5$ )

$a/b$	$a/h$	$\mu$	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
			REF <sup>(a)</sup>	Présente	REF <sup>(a)</sup>	Présente	REF <sup>(a)</sup>	Présente
1	10	0	0.0432	0.0432	0.1029	0.1029	0.1915	0.1918
		1	0.0395	0.0395	0.0842	0.0842	0.1358	0.1360
		2	0.0366	0.0366	0.0730	0.0730	0.1110	0.1112
		4	0.0323	0.0323	0.0596	0.0596	0.0861	0.0862
	20	0	0.0111	0.0111	0.0274	0.0274	0.0536	0.0536
		1	0.0101	0.0101	0.0224	0.0224	0.0380	0.0380
		2	0.0094	0.0094	0.0194	0.0194	0.0310	0.0310
		4	0.0083	0.0083	0.0158	0.0158	0.0241	0.0241
2	10	0	0.1029	0.1029	0.1574	0.1576	0.2397	0.2402
		1	0.0842	0.0842	0.1177	0.1178	0.1587	0.1590
		2	0.0730	0.0730	0.0980	0.0981	0.1269	0.1272
		4	0.0596	0.0596	0.0772	0.0773	0.0968	0.0970
	20	0	0.0274	0.0274	0.0432	0.0432	0.0688	0.0688
		1	0.0224	0.0224	0.0323	0.0323	0.0455	0.0455
		2	0.0194	0.0194	0.0269	0.0269	0.0364	0.0364
		4	0.0158	0.0158	0.0212	0.0212	0.0277	0.0277

(a): Belkorissat et al. (2015)

### IV.3.2. Effet du paramètre non local, l'épaisseur de la plaque, l'indice matériel et les paramètres de la fondation élastique de type « Winkler –Pasternak » sur la fréquence fondamentale adimensionnels d'une nano plaque carré fonctionnellement graduée

La fréquence fondamentale adimensionnels de la nano plaque carré fonctionnellement graduée sont donnés dans le tableau (IV-5) pour différentes valeurs de paramètre non local, l'épaisseur de la plaque, l'indice matériel ( $n$ ) et les paramètres de fondation ( $k_w, k_s$ ). D'après les résultats illustrés dans le tableau (IV-5), il peut être conclu que la fréquence fondamentale adimensionnels augmente avec l'augmentation des paramètres de fondation ( $k_w, k_s$ ).

En comparaison avec le paramètre de Winkler ( $k_w$ ), on constate le paramètre de fondation de Pasternak ( $k_s$ ) a un impact dominant sur l'augmentation de la fréquence adimensionnelle.

On observe également qu'à la présence de fondation élastique, la plaque devient plus rigide, tandis que, le paramètre non local rend la plaque plus souple, en outre on peut voir que l'augmentation du paramètre de l'indice matériel ( $n$ ) conduit une réduction de la fréquence. Cela est dû au fait que le paramètre de la distribution matériel provoque une diminution de la rigidité de la nano plaque fonctionnellement graduée.

Le tableau (IV-6) présente la fréquence fondamentale adimensionnelle pour une plaque carré fonctionnellement graduée, et pour différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque, le rapport de forme de plaque, le paramètre non local et le paramètre de l'indice matériel en se basant sur la présente théorie. Les paramètres de fondation ( $k_w, k_s$ ) sont prises égales à 100.

On peut voir que l'augmentation du rapport de forme ( $a/b$ ) va augmenter les fréquences fondamentales, alors que, l'augmentation du paramètre de la distribution matériel causera une diminution de la fréquence fondamentale.

Ces résultats sont indépendantes des valeurs de paramètre non local. Encore une fois, on peut facilement trouver dans les tableaux (IV-3 à IV-6) que le paramètre non local joue un rôle important dans l'étude de la réponse vibratoire des nano-plaques fonctionnellement graduée et par conséquent ses effets ne peuvent être ignorés.

Tableau IV-5 : La fréquence fondamentale adimensionnels ( $\hat{\omega}$ ) d'une nano plaque carré FGM. ( $a = 10$ )

$k_w$	$k_s$	$a/h$	$\mu$	Indice materiel ( $n$ )						
				0	0.5	1	2	3	4	5
0	0	10	0	0.1409	0.0902	0.0793	0.0717	0.0686	0.0667	0.0655
			1	0.1288	0.0825	0.0725	0.0655	0.0626	0.0610	0.0599
			2	0.1193	0.0764	0.0672	0.0607	0.0580	0.0565	0.0555
			3	0.1117	0.0715	0.0629	0.0568	0.0543	0.0529	0.0519
			4	0.1053	0.0674	0.0593	0.0536	0.0512	0.0499	0.0490
		20	0	0.0361	0.0231	0.0203	0.0184	0.0176	0.0171	0.0168
			1	0.0330	0.0211	0.0186	0.0168	0.0161	0.0156	0.0153
			2	0.0306	0.0196	0.0172	0.0156	0.0149	0.0145	0.0142
			3	0.0286	0.0183	0.0161	0.0146	0.0139	0.0136	0.0133
			4	0.0270	0.0173	0.0152	0.0137	0.0131	0.0128	0.0125
0	20	10	0	0.1793	0.1198	0.1070	0.0980	0.0943	0.0922	0.0908
			1	0.1699	0.1141	0.1020	0.0936	0.0901	0.0881	0.0868
			2	0.1628	0.1098	0.0983	0.0903	0.0869	0.0851	0.0839
			3	0.1573	0.1064	0.0954	0.0877	0.0845	0.0827	0.0815
			4	0.1529	0.1037	0.0931	0.0856	0.0826	0.0808	0.0797
		20	0	0.0456	0.0304	0.0272	0.0249	0.0239	0.0234	0.0231
			1	0.0432	0.0290	0.0259	0.0237	0.0228	0.0223	0.0220
			2	0.0413	0.0278	0.0249	0.0229	0.0220	0.0216	0.0212
			3	0.0399	0.0270	0.0242	0.0222	0.0214	0.0209	0.0206
			4	0.0388	0.0263	0.0236	0.0217	0.0209	0.0204	0.0202
100	0	10	0	0.1516	0.0986	0.0872	0.0792	0.0759	0.0740	0.0728
			1	0.1403	0.0915	0.0810	0.0736	0.0706	0.0689	0.0677
			2	0.1317	0.0861	0.0763	0.0694	0.0666	0.0649	0.0639
			3	0.1248	0.0818	0.0725	0.0660	0.0633	0.0618	0.0608
			4	0.1192	0.0782	0.0694	0.0633	0.0607	0.0593	0.0583
		20	0	0.0387	0.0252	0.0223	0.0202	0.0194	0.0189	0.0186
			1	0.0358	0.0234	0.0207	0.0188	0.0180	0.0176	0.0173
			2	0.0336	0.0220	0.0194	0.0177	0.0170	0.0166	0.0163
			3	0.0319	0.0208	0.0185	0.0168	0.0161	0.0158	0.0155
			4	0.0304	0.0199	0.0177	0.0161	0.0155	0.0151	0.0148
100	20	10	0	0.1877	0.1262	0.1130	0.1036	0.0998	0.0976	0.0962
			1	0.1788	0.1208	0.1083	0.0994	0.0958	0.0938	0.0924
			2	0.1721	0.1167	0.1048	0.0963	0.0928	0.0909	0.0896
			3	0.1669	0.1135	0.1021	0.0939	0.0906	0.0887	0.0875
			4	0.1627	0.1110	0.0999	0.0920	0.0887	0.0869	0.0858
100	20	20	0	0.0477	0.0320	0.0287	0.0263	0.0253	0.0247	0.0244
			1	0.0454	0.0306	0.0274	0.0252	0.0243	0.0237	0.0234
			2	0.0436	0.0296	0.0265	0.0244	0.0235	0.0230	0.0227
			3	0.0423	0.0287	0.0258	0.0238	0.0229	0.0224	0.0221
			4	0.0412	0.0281	0.0253	0.0233	0.0224	0.0220	0.0217

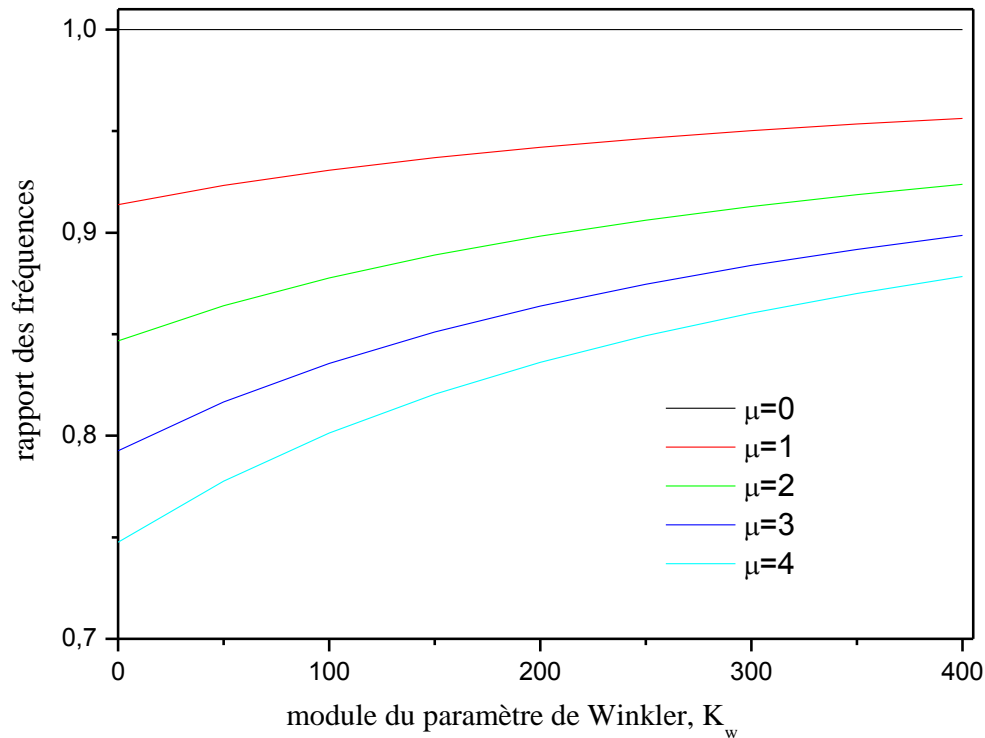
**Tableau IV-6 :** La fréquence fondamentale adimensionnel ( $\tilde{\omega} = \omega(a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ ) d'une nano plaque carré FGM ( $k_w = k_s = 100$ ,  $a = 10$ ).

a / b	a / h	$\mu$	Indice materiel (n)						
			0	0.5	1	2	3	4	5
0.5	10	0	22.2810	15.6101	14.1631	13.1234	12.6974	12.4624	12.3122
		1	22.0839	15.4947	14.0647	13.0366	12.6154	12.3832	12.2350
		2	21.9245	15.4014	13.9853	12.9665	12.5492	12.3193	12.1726
		3	21.7929	15.3245	13.9198	12.9088	12.4947	12.2666	12.1212
		4	21.6824	15.2599	13.8648	12.8603	12.4489	12.2225	12.0782
	20	0	22.4066	15.6998	14.2421	13.1933	12.7633	12.5259	12.3741
		1	22.2040	15.5812	14.1411	13.1041	12.6788	12.4443	12.2945
		2	22.0401	15.4855	14.0595	13.0321	12.6107	12.3785	12.2303
		3	21.9049	15.4065	13.9923	12.9727	12.5546	12.3243	12.1775
		4	21.7913	15.3403	13.9359	12.9230	12.5076	12.2788	12.1331
1	10	0	29.0449	20.1923	18.2786	16.9095	16.3490	16.0386	15.8392
		1	28.4751	19.8562	17.9918	16.6563	16.1096	15.8074	15.6136
		2	28.0595	19.6116	17.7831	16.4722	15.9357	15.6394	15.4497
		3	27.7428	19.4255	17.6245	16.3323	15.8036	15.5118	15.3253
		4	27.4934	19.2791	17.4997	16.2224	15.6997	15.4116	15.2276
	20	0	29.3436	20.3983	18.4597	17.0706	16.5011	16.1855	15.9825
		1	28.7497	20.0483	18.1608	16.8063	16.2509	15.9436	15.7465
		2	28.3163	19.7936	17.9435	16.6141	16.0691	15.7680	15.5751
		3	27.9859	19.5999	17.7782	16.4682	15.9311	15.6345	15.4449
		4	27.7257	19.4475	17.6484	16.3535	15.8226	15.5298	15.3427
2	10	0	51.6791	35.2203	31.6837	29.1759	28.1501	27.5777	27.2060
		1	47.9241	32.9674	29.7530	27.4691	26.5361	26.0177	25.6828
		2	45.9176	31.7707	28.7297	26.5665	25.6837	25.1945	24.8796
		3	44.6653	31.0259	28.0933	26.0059	25.1549	24.6843	24.3821
		4	43.8082	30.5161	27.6578	25.6228	24.7938	24.3362	24.0428
2	20	0	53.3636	36.3229	32.6507	30.0438	28.9753	28.3768	27.9868
		1	49.2611	33.8619	30.5376	28.1685	27.1977	26.6567	26.3063
		2	47.0613	32.5530	29.4166	27.1757	26.2575	25.7475	25.4186
		3	45.6857	31.7387	28.7205	26.5599	25.6747	25.1842	24.8687
		4	44.7430	31.1828	28.2458	26.1404	25.2779	24.8006	24.4944

### IV.3.3. Effet du paramètre de Winkler

Pour étudier l'influence des paramètres de fondations élastiques sur le comportement vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées, des variations du rapport de fréquence avec des modules de Winkler et de Pasternak sont présentés graphiquement. La fondation élastique est modélisée comme une fondation (i) de type Winkler et (ii) de type

Pasternak. Les fondations de Winkler et de Pasternak sont décrit respectivement par les rigidités ( $k_w$ ) et ( $k_s$ ).



**Fig. IV.1.** Effet du paramètre de la fondation de Winkler d'une nano plaque FG sur le rapport des fréquences ( $\bar{\omega}_{NL} / \bar{\omega}_L$ ) pour différentes valeurs du paramètre non local ( $\mu$ ), ( $a/h = 10$ ,  $n = 5$ ).

La figure (IV.1) montre l'effet du paramètre non locale sur la réponse vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées soutenus par un milieu élastique modélisé comme fondation de type Winkler, à partir de cette figure, on constate qu'il ya un effet significatif du paramètre du paramètre non local sur le comportement vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées soutenus par une fondation élastique.

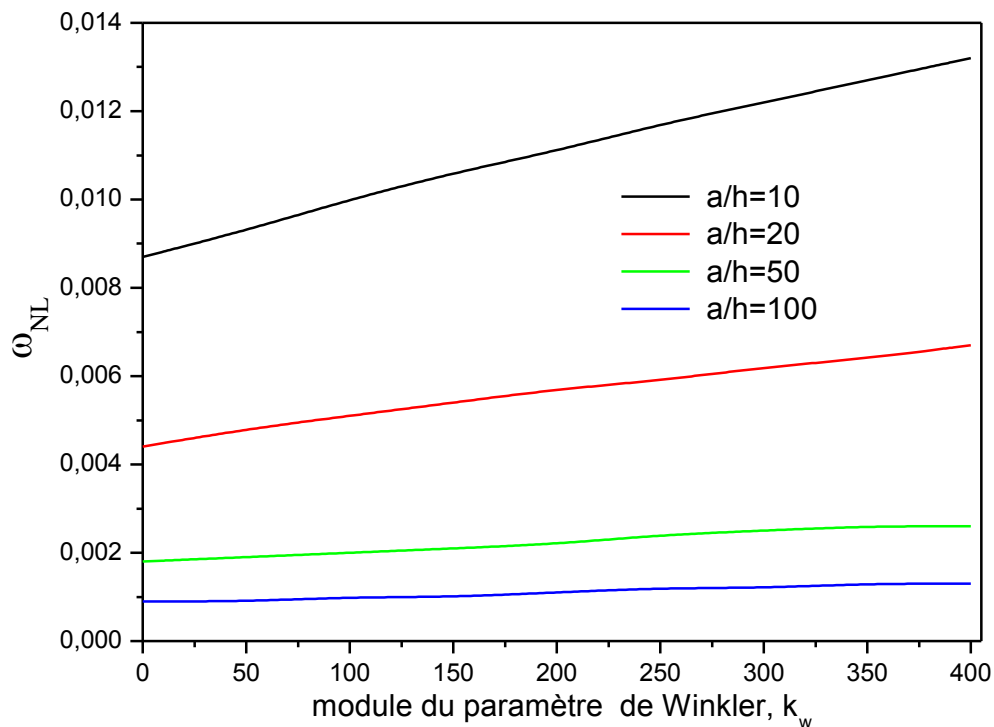
Les rapports de fréquences fondamentaux utilisant le modèle non local sont toujours inférieur que le modèle local ( $\mu = 0$ ). Cela implique que l'utilisation de la théorie de déformation de cisaillement locale d'ordre Zéro pour nano plaque fonctionnellement graduée conduirait à une surestimation de la fréquence. En outre, avec l'augmentation des valeurs du paramètre non local ( $\mu$ ), les fréquences prédit la théorie non locale deviennent plus petits par rapport au modèle locale (classique). De plus, on observe que l'augmentation du paramètre de module Winkler conduit à une augmentation du rapport de la fréquence.



Cette tendance de croissance est liée à la rigidité de la fondation élastique. Avec des valeurs importantes du module de Winkler, le taux d'augmentation du rapport de fréquence diminue. Cela implique que le comportement vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées perd son importance lorsque les valeurs du module de Winkler augmentent bien que l'effet non local rend les nano plaques plus souple. Par conséquent, il peut être conclu que l'effet non local devient plus important dans le cas des plaques sans fondation élastique.

La variation de la fréquence non locale en fonction du paramètre de module de Winkler est présentée dans la figure (IV.2). On constate que la fréquence non locale augmente linéairement avec l'augmentation du paramètre de Winkler et cela pour tous les rapports géométriques ( $a/h$ ) considérés.

Cependant, il est constaté que le changement dans la fréquence non local des nano plaques fonctionnellement graduées est influencé d'une façon significative par le rapport  $a/h$ . Pour des plaques minces ( $a/h=100$ ), l'effet du paramètre non local sur la fréquence est moins important que la plaque épaisse ( $a/h=10$ ). Par conséquent, le rapport ( $a/h$ ) de la nano plaque joue un rôle important dans la prédiction exacte du comportement vibratoire des nano plaques supporté par des fondations élastique.



**Fig. IV.2.** Effet du paramètre de Winkler sur la fréquence non locale ( $\bar{\omega}_{NL}$ ) d'une nano plaque carré FG pour différents valeurs du rapport géométriques ( $a/h$ ). ( $k_s = 0$ ,  $\mu = 2$ ,  $n = 5$ )

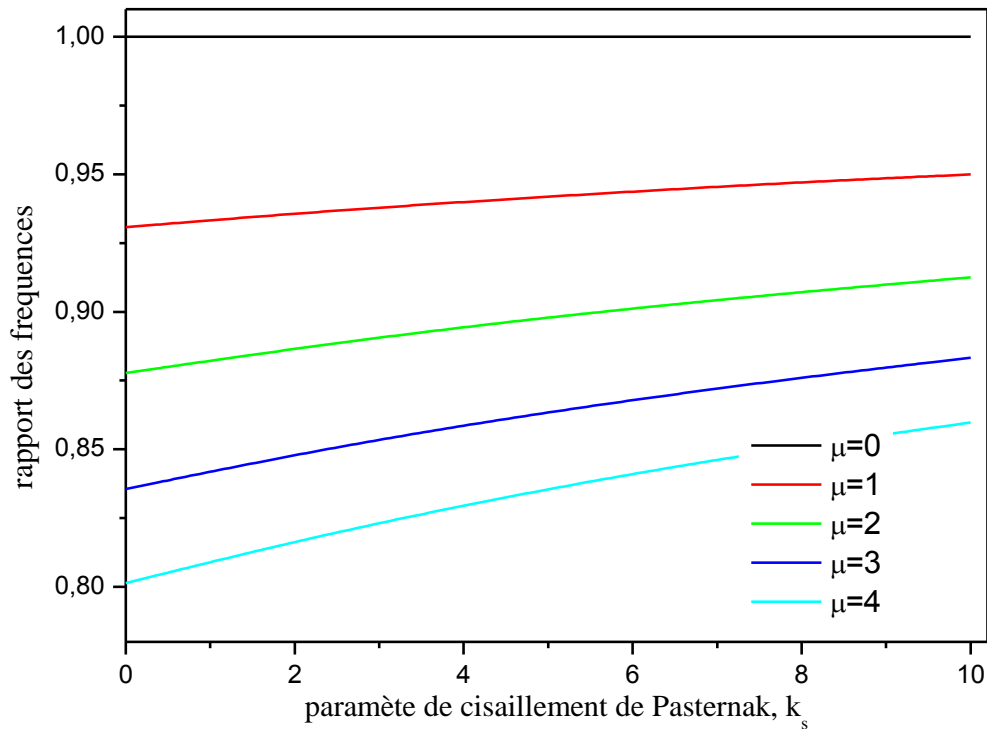
#### IV.3.4. Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak

La figure (IV.3) présente l'effet du paramètre non local sur le comportement dynamique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur milieu élastique modélisé comme une fondation du type Pasternak. Le module de Winkler ( $k_w$ ) est supposé égale à ( $k_w = 100$ ).

L'évolution du rapport de fréquence pour le premier mode est présentée dans la figure (IV.3) en fonction du paramètre de Pasternak.

Cependant, les rapports de fréquence incluant le modèle non local sont toujours inférieur que le modèle local.

Avec des valeurs élevées du paramètre non local ( $\mu$ ), les fréquences deviennent relativement petites. Contrairement à la variation du rapport de fréquence avec le paramètre de Winkler, qui est non linéaire, la variation de ce rapport avec le paramètre de Pasternak est linéaire.

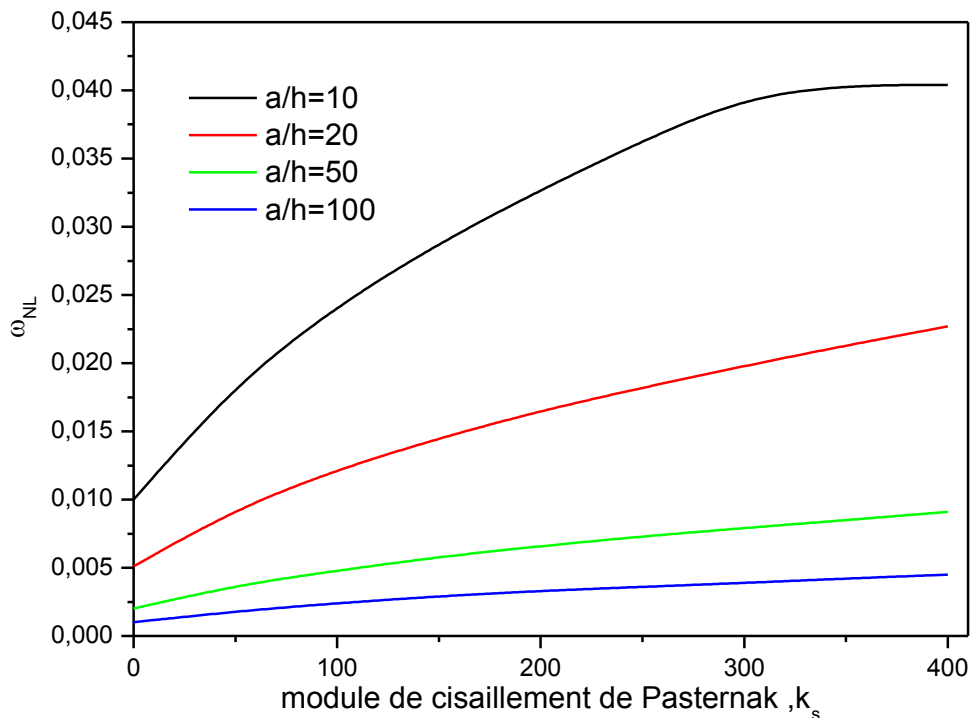


**Fig. IV.3.** Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak d'une nano plaque carré FG sur le rapport des fréquences ( $\bar{\omega}_{NL}/\bar{\omega}_L$ ) pour différent valeur du paramètre non local ( $\mu$ ), ( $k_w = 100$ ,  $a/h = 10$ ,  $n = 5$ ).

La figure (IV.4) montre la variation de la fréquence non locale en fonction du paramètre de Pasternak pour différent rapport ( $a/h$ ). L'inclusion de la fondation de Pasternak engendre des résultats important que ceux produit avec l'introduction de la fondation de Winkler.

La fréquence non locale augmente avec l'augmentation du paramètre de Pasternak. On constate que le comportement est de nature non linéaire.

Cependant, il est montré que le changement dans la fréquence non locale est très influencé par des valeurs petites du rapport géométrique ( $a/h=10$ ) comme il est constaté dans la figure (V.4).



**Fig. IV.4.** Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak sur la fréquence non locale ( $\bar{\omega}_{NL}$ ) d'une nano plaque carré FG pour différents valeurs du rapport géométriques ( $a/h$ ). ( $k_w = 100$  ,  $\mu = 2$  ,  $n = 5$  )

#### IV.4. CONCLUSION

Dans ce travail, l'analyse vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques est présentée sur la base d'une théorie non local de déformation de cisaillement d'ordre zéro. Le modèle proposé considère l'effet de la déformation de cisaillement par l'intermédiaire des efforts tranchants au lieu des rotations comme dans le cas des théories existante de déformation de cisaillement.

Le modèle développé est capable d'introduire le paramètre non local en utilisant la théorie non locale d'Eringen. La précision des résultats est examinée en comparant les résultats trouvés par ceux connus dans la littérature.

Il est à conclure que plusieurs facteurs tels que le paramètre non local, l'exposant de la fraction volumique, le paramètre de Winkler, le coefficient de Pasternak et les rapports géométriques jouent des rôles important dans la réponse dynamique des nano plaques fonctionnellement graduées.

## **CONCLUSION GENERALE**

---

## **CONCLUSION GENERALE**

---

La nanotechnologie est apte de produire des matériaux fonctionnellement gradués et des structures d'ingénierie à l'échelle nanométrique, ce qui génère une nouvelle classe des matériaux avec des propriétés plus élevées. Parmi ces structures, il existe les nano plaques qui grâce à leurs propriétés mécaniques, chimiques et électriques élevées, ils ont attiré l'attention de la communauté scientifique dans le domaine de la physique de l'état solide, la science des matériaux et la nano électronique. La compréhension du comportement mécanique des nano plaques est essentielle dans le développement des structures en raison de leurs grandes possibilités d'application dans l'ingénierie.

Cette thèse présente les activités de recherche liées à l'étude du comportement mécanique des nano plaques fonctionnellement gradués reposant sur des fondations élastiques à l'échelle nanométrique en utilisant les équations non locales constitutives d'Eringen. La principale problématique qui est traitée correspond à l'analyse vibratoire des nano plaques fonctionnellement graduées noyées dans un milieu élastiques à la base d'une théorie non local de déformation de cisaillement d'ordre zéro.

La formulation proposée est basée sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la nano plaque.

Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec ceux préalablement existants dans la littérature, notamment ceux de : Aghababaei et Reddy (2009), Belkorissat et al. (2015).

IL est à conclure que plusieurs facteurs tels que le paramètre non local, l'exposant de la fraction volumique, le paramètre de Winkler, le module de Pasternak et les rapports géométriques jouent des rôles important dans la réponse dynamique des nano plaques fonctionnellement graduées tel que :

- la présence de fondation élastique rend la plaque plus rigide ;
- le paramètre non local rend la plaque plus souple ;
- l'augmentation du paramètre de l'indice matériel ( $n$ ) conduit une réduction de la fréquence ;

- Pour les plaques minces ( $a/h=100$ ), l'effet du paramètre non local sur la fréquence est moins important que la plaque épaisse ( $a/h=10$ ).

Enfin, on peut dire que la présente théorie avec la prise en compte de l'effet d'échelle, est non seulement précise, mais fournit aussi une approche élégante et facilement réalisable pour la simulation du comportement vibratoire des structures en matériaux à gradient de propriété.

En perspective, il est prévu d'appliquer la théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro à cinq variables avec la prise en compte de l'effet d'étirement pour le calcul de différentes formes de structures en matériaux fonctionnellement gradués sous la combinaison des différents types de chargements (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dus à la température.

## **REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE**

---



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

**Adda Bedia**, W., Benzair, A., Semmah, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On the thermal buckling characteristics of armchair single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal continuum elasticity”, *Brazil. J. Phys.*, **45**(2), 225-233.

**Aghababaei**, R. and Reddy, J.N. (2009), “Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates”, *J. Sound Vib.*, **326**(1-2), 277-289.

**Afsset**, Agence française de sécurité sanitaire de l'environnement et du travail, les nanomatériaux « Évaluation des risques liés aux nanomatériaux pour la population générale et dans l'environnement », mars 2010.

**Aifantis** .E.C., (1992) ,On the role of gradients in the localization of deformation and fracture,, *Int. J. Eng. Sci.* 30, 1279-1299.

**Aifantis** .E.C., (1994), Gradient effects at macro micro and nano scales, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials* 5, 355-375.

**Aifantis** .E.C., (1999), Strain gradient interpenetration of size effects, *International Journal of Fracture* 95, 299-314.

**Aissani**, K., Bachir Bouiadjra, M., Ahouel, M. and Tounsi, A. (2015), “A new nonlocal hyperbolic shear deformation theory for nanobeams embedded in an elastic medium“, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **55**(4), 743-762.

**Ait Amar** Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.

**Ait Atmane**, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(2), 369-384.

**Ait Yahia**, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1143-1165.

**Al-Basyouni**, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.

**Alain Obadia**, Conseil économique et social- « les nanotechnologies », 2008. Agence nationale de la recherche ANR - n°5, « Les nanotechnologies : un nouveau paradigme », juillet 2012.

**Amara**, K., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda-Bedia, E.A. (2010), “Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field”, *Appl. Math. Model.*, **34**(12), 3933- 3942.

**Ansari**, R., Ashrafi, M.A., Pourashraf, T. and Sahmani, S. (2015), “Vibration and buckling characteristics of functionally graded nanoplates subjected to thermal loading based on surface elasticity theory”, *Acta Astronautica*, **109**, 42-51.

**Askes H.**, Aifantis C., (2002), Numerical modeling of size effects with gradient elasticity – Formulation, meshless discretization and examples, *International Journal of Fracture* 117, 347-358.

**Baron**. C., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.

**Bao**. G., L., (1995) Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.

**Belabed**, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274-283.

**Belkorissat**, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(4), 1063-1081.

**Belkorissat**, I., « Etude de la réponse dynamique des plaques FGM avec la prise en compte de l'effet d'échelle », Thèse de doctorat, université Djillali Liabès, Algérie, 2015.

**Benachour**, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, **42**(6), 1386-1394.

**Benguediab**, S., Tounsi, A., Zidour, M. and Semmah, A. (2014), “Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes”, *Composites Part B*, **57**, 21-24.

**Bennai**, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(3), 521-546.

**Benzair**, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. and Boumia, L. (2008), “The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **41**(22), 225404.

**Berrabah**, H.M., Tounsi, A., Semmah, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **48**(3), 351-365.

**Berthelot**, J.-M., (1992), *Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures*. Vol. 3: Masson Paris.

**Besseghier**, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Benzair, A. (2015), “Nonlinear vibration properties of a zigzag single-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, **3**(1), 29-37.

**Boch.P**, (1986), CHARTIER. HUTTEPAIN .M (1986) ,, « tape casting of al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/zrO<sub>2</sub> » laminated composites.

**Boch .P**, (1987) ,, «tape casting of layered composites, in processing of advanced ceramics ».edited by moya and aza sociedad espanola de ceramica y vidrio 1987.

**Bouchafa**, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(6), 1493-1515.

**Bouderba**, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **14**(1), 85-104.

**Bourada**, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.

**Bourada**, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 409-423.

**Bousahla**, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Computat. Method.*, **11**(6), 1350082.

**Bishop**. A, C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993), A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; **12** (19) :1516-18.

**Bunch**, J., van der Zande, A.M. and Verbridge, S.S. (2007), “Electromechanical resonators from grapheme sheets”, *Science*, **315**(5811), 490-493.

**Carrera**, E. and S. Brischetto,(2008), A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 62 (1) 010803-010803.

**Cerezo**. V, (2005), Propriétés mécanique, thermique et acoustique d’un matériau à base de particulaire végétales: approche expérimentale et modélisation théorique. Thèse de doctorat, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon, France.

**Chakraverty**, S. and Pradhan, K.K. (2014), “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **36**, 132-156.

**Cheng**, Z.-Q. and Batra, R.C. (2000), “Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate”, *Composites: Part B*, **31**(2), 97-106.

**Chi** . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

**Delale**. F., F. Erdogan, (1983), The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

**Draiche**, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 69-81.

**Di Paola** M., Failla G., Zingales M., The mechanically-based approach to 3D non-local linear elasticity theory : long-range central interactions, *Int. J. Solids Struct.* 47, 2347-2358, 2010.

**El hage** C, (2006), Modélisation du comportement élastique endommageable de matériaux composites à renfort tridimensionnel. Thèse, Université De Technologie De Compiegne.

- El Meiche**, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53**(4), 237-247.
- Eringen**, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, *Int. J. Eng. Sci.*, **10**(1), 1-16.
- Eringen**, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *J. Appl. Phys.*, **54**(9), 4703-4710.
- Eringen** .A.C. (1987), Theory of nonlocal elasticity and some applications, *Res Mechanica* 21 313-342.
- Eringen**. AC, (2002), *Nonlocal continuum field theories*, Springer New York.
- Fekrar**, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**(4), 795-810.
- Fu**, Y., Du, H. and Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, *Mater. Lett.*, **57**(20), 2995-2999.
- Gao** J., An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 1 : Quasicontinuum theory, *International Journal of Solids and Structures* 36, 2947-2958, 1999-a.
- Gao** J., An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 2 : Continuum field, *International Journal of Solids and Structures* 36, 2959-2971, 1999-b.
- Hamidi**, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5- unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 235-253.
- Hashemi**, S.H. and Samaei, A.T. (2011), “Buckling analysis of micro/nanoscale plates via nonlocal elasticity theory”, *Physica E: Low-dimension. Syst. Nanostruct.*, **43**(7), 1400-1404.

- Hebali**, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, **140**(2), 374-383.
- Heireche**, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M. and Adda Bedia, E.A. (2008a), “Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity”, *Physica E.*, **40**(8), 2791-2799.
- Heireche**, H., Tounsi, A. and Benzair, A. (2008b), “Scale Effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes with initial axial loading”, *Nanotechnology*, **19**(18), 185703.
- Hosseini-Hashemi**, S., Bedroud, M. and Nazemnezhad, R. (2013), “An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity”, *Compos. Struct.*, **103**, 108-118.
- Hildebrand**, F., E. Reissner, and G. Thomas, Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells 1949: NACA Technical Note No. 1833, Washington, DC.
- Jung**, W.-Y. and Han, S.-C. (2013), “Analysis of sigmoid functionally graded material (S-FGM) nanoscale plates using the nonlocal elasticity theory”, *Math. Probl. Eng.* DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/476131>.
- Karama**. M., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- Katsnelson**, M.I. and Novoselov, K.S. (2007), “Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics”, *Solid State Commun.*, **143**(1-2), 3-13.
- Khalfi**, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Computat. Method.*, **11**(5), 135007.

**Kirchhoff**. VG. , (1850), Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe.  
J Die Reine Angew Math 1850; (40):51–88.

**Kieback** .B., Neubrand A., Riedel H. (2003), Processing techniques for functionally graded materials. Materials Science and Engineering: A, 362(1-2):81–106.

**Kurugöl**, S., Tanaçan, L. And Ersoy, H. S. (2008) ,Young’s modulus of fiber-reinforced and polymer-modified lightweight concrete composites, Construction and Building Materials 22, 1019–1028.

**Kunin** I.A.,(1967), The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag.

**Koizumi**, M. (1997), « FGM activities in Japan ». Composite Part B: Engineering, 28(1-2), 1–4.

**Kroner** E., (1967), Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces, International Journal of Solids and Structures 3, 731-742.

**Krumhansl** J.A., (1963), Generalized continuum field representation for lattice vibrations, In : Wallis R.F. (Ed.), Lattice Dynamics, Proc. of Int. Conference, Pergamon Press, London.

**Krumhansl** J.A., Some considerations of the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag, 1967.

**Laitinen**, M., H. Lahtinen, and S.G. Sjölin,(1995), Transverse shear correction factors for laminates in cylindrical bending, Communications in numerical methods in engineering, 11 (1) 41-47.

**Larbi** Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-



dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 425-442.

**Lee**, Z., Ophus, C., Fischer, L., Nelson-Fitzpatrick, N., Westra, K., Evoy, S., Radmilovic, V., Dahmen, U. and Mitlin, D. (2006), “Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al–Mo films”, *Nanotechnology*, **17**(12), 3063.

**Liang**, X., Wang, Z., Wang, L. and Liu, G. (2014), “Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation”, *J. Sound Vib.*, **333**(12), 2649-2663.

**Libove**, C. and S. Batdorf, A general small-deflection theory for flat sandwich plates, 1948, DTIC Document.

**Lo**. K. H., R. M. Christensen, and E. M.Wu. A higher-order theory of plate deformation. part I: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44:663–668, 1977a.

**Lo** .K. H., R. M. Christensen, and E. M.Wu. A higher-order theory of plate deformation. part II: Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44:669–676, 1977b.

**Love**, A.E.H., A treatise on the mathematical theory of elasticity: Cambridge University Press, 1934.

**Lu**, P., Zhang, P.Q., Lee, H.P., Wang, C.M. and Reddy, J.N. (2008), “Non-local elastic plate theories”, *Proceedings of the Royal Society A.*, **463**(2088), 3225-3240.

**Lu**, C., Wu, D. and Chen, W. (2011), “Nonlinear responses of nanoscale FGM films including the effects of surface energies“, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, **10**, 1321-1327.

**Lun**, F., Zhang, P., Gao, F. and Jia, H. (2006), “Design and fabrication of micro-optomechanical vibration sensor”, *Microfabrication Technology*, 120(1), 61-64.

- Mahi**, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, **39**(9), 2489-2508.
- Mantari** J. L, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43:1489–1499, 2012.
- Moser**, Y. and Gijs, M.A. (2007), “Miniaturized flexible temperature sensor”, *J. Microelectromech. Syst.*, **16**(6), 1349-1354.
- Mindlin** RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* (1951);18(1):31–8.
- Nami**, M.R. and Janghorban, M. (2013), “Static analysis of rectangular nanoplates using trigonometric shear deformation theory based on nonlocal elasticity theory”, *Beilstein J. Nanotech.*, **4**(1), 968-973.
- Natarajan**, S., Baiz, P., Ganapathi, M., Kerfriden, P. and Bordas, S. (2011), “Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates in thermal environment”, *Comput. Struct.*, **89**(15-16), 1535-1546.
- Natarajan**, S., Chakraborty, S., Thangavel, M., Bordas, S. and Rabczuk, T. (2012), “Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates”, *Computat. Mater. Sci.*, **65**, 74-80.
- Nedri**, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory” *Mech. Compos. Mater.*, **49**(6), 641-650.
- Nelson**. R. B. and D. R. Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 41:177–183, 1974.

**Nguyen** Huy Gia, Approche de la micromécanique pour la modélisation du comportement élastoplastique des composites : application aux mortiers en résine, thèse de doctorat, université de Cergy-Pontoise, France, 2008.

**Nguyen-Van**, H., Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures, Thèse de Doctorat, University of Southern Queensland, 2009, 295 pp.

**Nguyen**, D.T., Benchmark d'un modèle layer wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Thèse de Doctorat, Université Paris-Est., 2012, 160 pp.

**Okamura** .H. (1991), State of the art of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9.

**Ould Larbi**, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, Mech. Based Des. Struct. Mach., **41**(4), 421-433.

**Pai**, P.F.,(1995), A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates, International Journal of Solids and Structures, 32 (16) 2295-2313.

**Phan-Dao**, H., Nguyen-Xuan, H., Thai-Hoang, C., Nguyen-Thoi, T. and Rabczuk, T. (2013), “An edgebased smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates”, Int. J. Computat. Method., **10**(1), 1340005.

Polizzotto C., (2001) Nonlocal elasticity and related variational principles, International Journal of Solids and Structures 38, 7359-7380.

**Pradhan**, S.C. (2009), “Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory”, Phys. Lett. A, **373**(45), 4182-4188.

**Pradhan**, S.C. and Kumar, A. (2010), “Vibration analysis of orthotropic graphene sheets embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method”, Comput. Mater. Sci., **50**(1), 239-245.

**Pradhan**, S.C. and Phadikar, J.K. (2009), “Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models”, *Phys. Lett. A*, **373**(11), 1062-1069.

**Qian**, L., Batra, R. and Chen, L. (2004), “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov– Galerkin method”, *Compos. Part B: Eng.*, **35**(6-8), 685-697.

**Rahaeifard**, M., Kahrobaiyan, M. and Ahmadian, M. (2009), “Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials”, *Proceedings of the 3rd International Conference on Micro- and Nanosystems, San Diego, CA, USA, August-September*.

**Ray**, M.C. (2003), “Zeroth-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *J. Appl. Mech.*, **70**(3), 374-380.

**Reddy** .J.N., (1997), *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.

**Reddy**, J.N., (2003) , *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis.*: CRC press.

**Reddy**, J.N. (2007), “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”, *Int. J. Eng. Sci.*, **45**(2-8), 288-307.

**Reddy**, J.N. and Pang, S.D. (2008), “Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes”, *J. Appl. Phys.*, **103**(2), 023511.

**Reissner** .E., (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech*;12(2):69–72.

**Samaei**, A.T., Abbasion, S. and Mirsayar, M.M. (2011), “Buckling analysis of a single-layer grapheme sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory”, *Mech. Res. Commun.*, **38**(7), 481-485.

**Samaei**, A.T., Aliha, M.R.M. and Mirsayar, M.M. (2015), “Frequency analysis of a graphene sheet embedded in an elastic medium with consideration of small scale”, *Mater. Phys. Mech.*, **22**, 125-135.

**Steffens**. H.D., M. Dvorak., M. Wewel,(1990), Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43.

**Sarkar**, p. Nicholson (1996), « electrophoretic deposition mechanisms, kinetics, and application to ceramics » , volume 79N°8.

**Stölken**, J. and Evans, A. (1998), “A microbend test method for measuring the plasticity length scale”, *Acta Materialia*, **46**(14), 5109-5115.

**Sobhy**, M. (2014), “Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions”, *Acta Mechanica*, **225**(9), 2521-2538.

**Soldatos** KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech*;94(3):195–220, 1992.

**Site web** « <http://www.nanomicro.recherche.gouv.fr/docs/plaq.nanomonde.pdf> ».

**Thai**, C.H., Nguyen-Xuan, H., Nguyen-Thanh, N., Le, T.H., Nguyen-Thoi, T. and Rabczuk, T. (2012), “Static, free vibration and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach”, *Int. J. Numer. Method. Eng.*, **91**(6), 571-603.

**Takahashi**. M., Y. Itoh., H. Kashiwaya, (1990), Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34.

- Tounsi**, A., Semmah, A. and Bousahla, A.A. (2013a), "Thermal buckling behavior of nanobeam using an efficient higher-order nonlocal beam theory", *J. Nanomech. Micromech. (ASCE)*, **3**(3), 37-42.
- Tounsi**, A, Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A. and Zidour, M. (2013b), "Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes", *Adv. Nano Res., Int. J.*, **1**(1), 1-11.
- Tounsi**, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013c), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.
- Touratier**, M., An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, 29 (8) 901-916,1991.
- Valizadeh**, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, O.A., Rabczuk, T., Bui, T.Q. and Bordas, S.P.A. (2013), "NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter", *Compos. Struct.*, **99**, 309-326.
- Vlachoutsis**, S.,(1992), Shear correction factors for plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 (7) 1537-1552.
- Whitney**, J., The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates, *Journal of composite materials*, 3 (3) 534-547,1969.
- Witvrouw**, A. and Mehta, A. (2005), "The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications", In: *Materials Science Forum*, Volume 492-493, pp. 255-260.
- Yaghoobi**, H. and Torabi, M. (2013), "Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions", *J. Therm. Stresses*, **36**(9), 869-894.
- Yang**, P.C., C.H. Norris, and Y. Stavsky, (1966), Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *International Journal of Solids and Structures*, 2 (4) 665-684.

**Yang K**, (2008), Caractérisation du comportement mécanique des bétons de granulats légers: expérience et modélisation. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, France.

**Yin H.M.**, Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

**Zemri**, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(4), 693-710.

**Zeng Y.**, Jiang D., Watanabe T., (2000), Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 83 (12): 2999–3003.

**Zhou**, F.P., Lydon, F.D. and Barr, B.I.G., (1995). Effect of coarse aggregate on elastic modulus and compressive strength of high performance concrete, *Cement and Concrete Research*, 25(1), 177-186.

**Zhuang**, X., Huang, R., Zhu, H., Askes, H. and Mathisen, K. (2013), “A new and simple locking- free triangular thick plate element using independent shear degrees of freedom”, *Finite Elem. Anal. Des.*, **75**, 1-7.

**Ziane**, N., Meftah, S.A., Ruta, G., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Investigation of the Instability of FGM box beams”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(3), 579-595.

**Zidi**, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24-34.

**Zidour**, M., Daouadji, T.H., Benrahou, K.H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Hadji, L. (2014), “Buckling analysis of chiral single-walled carbon nanotubes by using the nonlocal Timoshenko beam theory”, *Mech. Compos. Mater.*, **50**(1), 95-104.

