REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Djillali Liabès
Faculté des Sciences Exactes
Sidi Bel Abbès

N° d'ordre: ....

Thèse de Doctorat

Présentée par

Amel BOURADA

Spécialité: Mathématiques
Option: Analyse non linéaire

Intitulée

Sur les équations et inclusions différentielles : existence et approximation asymptotique de solutions

Soutenue le jeudi 20 octobre 2016

Devant le jury composé de:

Président:	• Abderrahmane YOUSFATE, Professeur Université de Sidi Bel Abbès
Examinateurs:	• Rachid BEBBOUCHI, Professeur USTHB, Alger
	• Maamar BENBACHIR, Professeur Université de Khemis Meliana
	• Boutkhil CHAFI, MCA Université de Sidi Bel Abbès
Directeur de Thèse:	• Mustapha LAKRIB, Professeur Université de Sidi Bel Abbès
Co-directeur de thèse:	• Karim YADI, Professeur Université de Tlemcen

Mots clés : Equation différentielle, ordinaire, intégrale, floue, inclusion différentielle ordinaire, petit paramètre, moyennisation, approximation asymptotique, problème périodique, point fixe, solution, solution extrémale.

Classification AMS 2010 : 34A07, 34A60, 34C15, 34C29, 34K25, 34K33.

Dédicaces

A mes parents
A mon mari et mes enfants Aya et Abderrahmane
A toute ma famille

Remerciements

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Mustapha Lakrib qui a dirigé cette thèse. Ses conseils multiformes et la richesse de ses connaissances m'ont permis de mener à bien ce travail. Cette direction s'est caractérisée par une grande patience, une disponibilité permanante, des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce projet sous sa forme finale. J'ai eu un grand plaisir à travailler avec lui. Je désire lui exprimer toute ma gratitude et ma sincère reconnaissance.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur Karim Yadi pour ses suggestions et propositions très utiles pour l'amélioration de ce travail, par son soutien, son suivi et l'intêret apportés à cette thèse.

Je suis flattée de l'honneur que Monsieur le Professeur Abderrahmane Yousfate me fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Mes sincères remerciements vont à Messieurs les Professeurs Rachid Bebbouchi et Maamar Benbachir ainsi qu'à Monsieur le Docteur Boutkhil Chafi qui ont bien accepté, avec beaucoup de sympathie, de faire partie du Jury.

Amel Bourada
Sidi Bel Abbès

Table des matières

Acronymes

EDFP	:	Equation différentielle fonctionnelle perturbée.
EIFP	:	Equation intégrale fonctionnelle perturbée.
EDF	:	Equation différentielle floue.
EDO	:	Equation différentielle ordinaire.
EIF	:	Equation intégrale fonctionnelle.
IDO	:	Inclusion différentielle ordinaire.
PP	:	Problème périodique.

Introduction

Cette thèse est constituée de deux parties indépendantes, le tout étant réparti en cinq chapitre :

• Dans la première partie nous présentons, discutons et commentons les résultats dans [11, 12, 16] sur l'existence de solutions et de solutions extrémales de certaines équations différentielles et équations intégrales.

• La deuxième partie est consacrée à la justification de la technique de moyennisation dans le cadre des EDO, EDF et IDO basée sur des hypothèses moins restrictives que celles de la littérature.

Les cinq chapitres sont répartis comme suit :

Chapitre 1 : C'est un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle (espaces, opérateurs, théorèmes de point fixe, ...).

Chapitre 2 : Dans ce chapitre sont présentés, discutés et commentés les résultats obtenus par les auteurs de [11, 12, 16], ainsi que leurs hypothèses et preuves, dans les cas suivants :

- Cas du problème périodique (PP), associé à une équation différentielle ordinaire, du type :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)' &= g(t,x(t)) \quad p.p\ t \in J=[0,T],\ T>0 \\ x(0) &= x(T). \end{cases}$$

- Puis, cas du problème, associé à une équation différentielle fonctionnelle perturbée (EDFP), du type :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),Sx), & p.p\ \ t \in I=[0,a],\ a>0 \\ x(t) = Gx(t), & t \in I_0=[-r,0],\ r>0. \end{cases}$$

- Et enfin, cas de l'équation intégrale fonctionnelle (EIF) de la forme :

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in J=[0,1].$$

Chapitre 3 : C'est un rappel de quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité et prolongement des solutions d'EDO, EDF et IDO.

Chapitre 4 : Il concerne les EDO. Il commence par une présentation des approches classiques de référence. La partie principale du chapitre est alors dédiée à la présentation de la technique de moyennisation sous des hypothèses moins restrictives que celles rencontrées dans la littérature. Ainsi, sont prouvés des résultats de moyennisation pour des EDO rapidement oscillantes qui peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ est un paramètre réel petit.

En effet dans nos résultats, principalement, au lieu de la condition de Lipschitz sur la fonction f dans (1), qui est une hypothèse forte, nous supposons qu'elle est uniquement continue en la seconde variable uniformément par rapport à la première.

Dans le reste du chapitre, nous nous intéressons aux EDF rapidement oscillantes du type (1) avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $x_0 \in \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n$ étant l'espace des nombre flous et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre.

Nous rappelons un résultat classique qui traite l'équation (1) au moyen de la méthode de moyennisation et qui est exposé dans [52]. Puis nous démontrons un résultat de moyennisation pour les EDF. Les conditions que nous supposons sont plus générales que celles imposées dans la littérature, puisqu'en particulier, au lieu de la condition de Lipschitz sur f, nous supposons que c'est son intégrale qui vérifie une condition de Lipschitz. Certains résultats préliminaires utilisés dans la preuve de notre résultat principal sont également montrés dans ce chapitre.

Chapitre 5 : Il est consacré à la justification de la méthode de moyennistation pour les IDO rapidement oscillantes qui s'écrivent sous la forme :

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x), \qquad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Nous commençons par présenter les résultats de référence, dûs à Plotnikov [5, 28, 53, 56], sur la justification de la méthode de moyennisation, dans les deux cas suivants : cas où il y a existence de la moyenne de la fonction multivoque F et cas où il n'y a pas d'existence de la moyenne de F, mais il y a existence de fonctions multivoques qui peuvent se substituer à elle.

Dans la suite du chapitre, nous exposons notre contribution qui est basée essentiellement sur l'affaiblissement des conditions de régularité sur la fonction multivoque F. Nous discutons alors de ces conditions et de leur rôle dans l'obtention des résultats proposés. Comme au chapitre 4, certains résultats préliminaires, qui sont utilisés dans les preuves de nos résultats de moyennisation, sont également présentés dans ce chapitre.

Première partie :

Sur l'existence de solutions et de solutions extrémales d'équations différentielles et intégrales

Analyse fonctionnelle et argument du point fixe : notions préliminaires

1

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle (espaces, opérateurs, ...) et quelques théorèmes de point fixe qui nous seront utiles au chapitre 2 (voir [9, 10, 11, 14, 20, 27, 31, 63]).

1.1 Espaces et algèbres

Définition 1.1 (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1 *Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Les espaces :*
- *$\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$,*
- *$\mathcal{L}^1(J,\mathbb{R})$, des fonctions intégrables, définies sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$,*
- *$\mathcal{B}(J,\mathbb{R})$, des fonctions bornées, définies sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$,*
- *$\mathcal{BM}(J,\mathbb{R})$, des fonctions mesurables et bornées, définies sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$,*

munis respectivement des normes suivantes :

$$\|x\|_C = \max_{t\in J} |x(t)|, \quad \|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_B = \|x\|_{BM} = \sup_{t\in J} |x(t)|$$

sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 (Algèbre) *Une algèbre A sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une multiplication*

$$u : A\times A \longrightarrow A, \qquad (u,b) \mapsto u(a,b) = a\circ b$$

qui est associative, distributive par rapport à l'addition (ainsi A est également un anneau) et $\mathbb{R}$-bilinéaire..

Remarque 1.1 *Pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, la notion de $\mathbb{K}$-algèbre se définit de manière analogue.*

Définition 1.3 (Algèbre de Banach) *On dit que A est une algèbre de Banach si A est à la fois un espace de Banach et une algèbre dont les lois sont compatibles avec la norme, et si de plus, pour tous $a, b \in A$, on a :*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Définition 1.4 *Soit K un sous-ensemble non vide fermé d'un espace vectoriel normé X.*

a) *K est dit un cône si :*
- $K + K \subset K$
- $\lambda K \subset K$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
- $\{-K\} \cap K = \{0\}$ *où 0 est l'élément neutre pour l'addition dans X.*

b) *K est dit cône normal si K est un cône et la norme $\|\cdot\|$ sur K est semi monotone, i.e.* $\exists N > 0\ \forall x, y \in K : y - x \in K \Longrightarrow \|x\| \leq N\|y\|$.

c) *Lorsque X est une algèbre de Banach et K est un cône de X, on dit que K est positif si $K \circ K \subseteq K$ où $\circ$ est la multiplication definissant la structure d'algèbre de X.*

Exemple 1.2 *Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'ensemble*

$$K = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\}$$

est un cône positif normal.

Remarque 1.2
- *Tout cône K d'un espace vectoriel X permet de définir sur X une relation d'ordre partiel de la manière suivante :*

$$\forall x, y \in X, \ \ x \preceq y \Rightarrow y - x \in K.$$

- *Dans ce cas, si $a, b \in X$, l'intervalle $[a, b]$ est défini comme suit :*

$$[a, b] = \{x \in X : a \preceq x \preceq b\}.$$

1.2 Opérateurs et fonctions

Définition 1.5 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach X dans lui même. $\mathcal{A}$ est dit borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|\mathcal{A}x\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.6 *Soit X un espace de Banach ordonné par un cône K. Un opérateur $\mathcal{A}$ défini de X dans lui même est dit :*
- *croissant si :* $\forall x, y \in X : \ x \preceq y \Rightarrow \mathcal{A}(x) \preceq \mathcal{A}(y)$.
- *décroissant si :* $\forall x, y \in X : \ x \preceq y \Rightarrow \mathcal{A}(y) \preceq \mathcal{A}(x)$..

Définition 1.7 (Opérateur continu) *Un opérateur $\mathcal{A}$ défini d'un espace de Banach X dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers $x \in X$, la suite $(\mathcal{A}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{A}x$.*

Soit $\mathcal{C}(J,X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X et soit M un sous ensemble de $\mathcal{C}(J,X)$.

Définition 1.8 (Ensemble équicontinu) *M est dit équicontinu si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall t_1, t_2 \in J, \|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.9 (Ensemble uniformément borné) *M est dit uniformément borné si :*

$$\exists\ c > 0 : \|f(t)\| \leq c \quad \forall t \in J \text{ et } \forall f \in M.$$

Définition 1.10 (Ensemble relativement compact) *M est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de M) est compact.*

Nous rappelons ci-après le théorème d'*Ascoli -Arzela* et le théorème de la convergence dominé de *Lebesgue* que nous utilliserons par la suite dans la démonstration de la complète continuité d'un opérateur.

Théorème 1.1 (Ascoli-Arzela, [63]) *M est relativement compact si et seulement si :*

1. *M est uniformement borné ;*
2. *M est équicontinu.*

Théorème 1.2 (Convergence dominée de Lebesgue, [31]) *Soit X un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de X dans lui même, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^1(X,X)$ et soit $f : X \longrightarrow X$. On suppose que :*

1. *La suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in X$.*
2. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq g(x)$, pour presque tout $x \in X$.*

Alors

$$f \in \mathcal{L}^1(X,X) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.11 (Opérateur compact) *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit compact si l'image de X par A, i.e. l'ensemble $\mathcal{A}(X)$, est relativement compact.*

Définition 1.12 (Opérateur totalement borné) *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit totalement borné si pour tout sous ensemble borné B de l'espace X, l'image de B par A, i.e. l'ensemble $\mathcal{A}(B)$, est relativement compact.*

Définition 1.13 (Opérateur complètement continu) *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.*

Définition 1.14 (Opérateur convexe) *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit convexe si :*

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \forall x,y \in X : \quad \mathcal{A}(tx + (1-t)y) \preceq t\mathcal{A}(x) + (1-t)\mathcal{A}(y).$$

Définition 1.15 (Contraction non linéaire) *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit D-lipschitzien s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante vérifiant*

$$\forall x, y \in X : \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \psi(\|x-y\|)$$

avec $\psi(0) = 0$.

- *La fonction ψ est appelée : D-fonction de Lipschitz.*
- *Si $\psi(r) = \alpha.r$, avec $\alpha > 0$, $\mathcal{A}$ est dit, opérateur lipschitzien de constante de Lipschitz α.*
- *En particulier si $\alpha < 1$, $\mathcal{A}$ est dit opérateur contractant et si $\psi(r) < r$ pour tout $r > 0$, A est dit opérateur contractant non linéaire. Si $\psi(r) = r$ pour tout $r > 0$, $\mathcal{A}$ est dit opérateur non expansif.*

Définition 1.16 (Fonction de Carathéodory) *Soit X un espace de Banach. Une fonction $f : J \times X \longrightarrow X$ est dite de Carathéodory si :*

1. *La fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable sur J, $\forall x \in X$.*
2. *La fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est continue pour presque tout $t \in J$.*

   Si de plus la fonction f vérifie la condition suivante :
3. *$\forall r > 0\ \exists h \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R})$ telle que $|f(t,x)| \leq h(t)$, p.p $t \in J$ et $\forall x : |x| \leq r$,*

f est dite $\mathcal{L}^1$-Carathéodory.

Définition 1.17 (Fonction de Chandrabhan) *Soit X un espace de Banach ordonné par un cône K. Une fonction $f : J \times X \longrightarrow X$ est dite de Chandrabhan si*

1. *La fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in X$.*
2. *La fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est croissante pour presque tout $t \in J$.*

   Si de plus la fonction f vérifie la condition suivante :
3. *$\forall r > 0$, $\exists h \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R})$ telle que : $|f(t,x)| \leq h(t)$, p.p. $t \in J$, $\forall x, |x| \leq r$,*

f est dite $\mathcal{L}^1$-Chandrabhan.

1.3 Argument du point fixe

Théorème 1.3 ([20]) *Soient X un espace de Banach et $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. Alors :*

1. *Soit l'equation $\mathcal{T}x = x$ admet une solution,*
2. *soit l'ensemble $\xi = \{u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda \mathcal{T}u = u\}$ est non borné.*

Théorème 1.4 ([9]) *Soient X un espace de Banach et $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ une contraction non linéaire. Alors $\mathcal{T}$ admet un point fixe unique.*

Théorème 1.5 ([14]) *Soit $\overline{B}(0,r)$ la boule fermée centrée en 0 et de rayon r, dans l'algèbre de Banach X. Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \overline{B}(0,r) \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :*

- *$\mathcal{A}$ est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz α ;*
- *$\mathcal{B}$ est compact et continu ;*
- *$\alpha M < 1$ où*
$$M = \|\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))\| = \sup\{\|\mathcal{B}x\| : x \in \overline{B}(0,r)\}.$$

Alors :

1. *Soit l'equation $\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$ admet une solution,*
2. *soit il existe $u \in X$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que : $\|u\| = r$ et $\lambda(\mathcal{A}u\mathcal{B}u) = u$.*

Théorème 1.6 ([10]) *Soit X une l'algèbre de Banach ordonné par un cône K et soit $a, b \in X$, avec $a \preceq b$. On Suppose que $\mathcal{A}, \mathcal{B} : [a,b] \longrightarrow K$ sont deux opérateurs tels que :*

- *$\mathcal{A}$ est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz α ;*
- *$\mathcal{B}$ est complètement continu ;*
- *$\mathcal{A}x\mathcal{B}x \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$;*
- *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont croissants ;*
- *$\alpha\ M < 1$ où*
$$M = \|\mathcal{B}\left([a,b]\right)\| = \sup\left\{\|\mathcal{B}x\| : x \in [a,b]\right\}.$$

Si le cône K est positif et normal, alors l'équation opérationelle $\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$ admet une solution maximale positive et une solution minimale positive dans $[a,b]$.

Théorème 1.7 ([11]) *Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}; X \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :*

- *$\mathcal{A}$ est linéaire et borné, et il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}^p$ est une contraction non linéaire ;*
- *$\mathcal{B}$ est complètement continu.*

Alors :

1. *Soit l'equation opérationelle $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x = x$ admet une solution,*
2. *soit l'ensemble $\xi = \{u \in X / \exists\lambda \in]0,1[: \mathcal{A}u + \lambda\mathcal{B}u = u\}$ est non borné.*

Théorème 1.8 ([27]) *Soit $[a,b]$ un intervalle ordonné du sous ensemble Y de l'algèbre de Banach X et soit $\mathcal{Q} : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ un opérateur croissant. Si pour toute suite monôtone $(x_n)_n \subset [a,b]$, la suite $(\mathcal{Q}x_n)_n \subset \mathcal{Q}([a,b]$ est convergente, alors la suite $(\mathcal{Q}^n a)_n$ (des $\mathcal{Q}$-itérations de a) converge vers le point fixe minimal x_* de $\mathcal{Q}$ et la suite $(\mathcal{Q}^n b)_n$ (des $\mathcal{Q}$-itérations de b) converge vers le point fixe maximal x^* de $\mathcal{Q}$ i.e.*

$$x_* = \min\{y \in [a,b] : y \geq \mathcal{Q}y\} \ \ et \ \ x^* = \max\{y \in [a,b] : y \leq \mathcal{Q}y\}.$$

Solutions et solutions extrémales pour certaines équations différentielles et équations intégrales

2

Ce chapitre est consacré aux études, telles que faites dans [11, 12, 16], sur l'existence et l'unicité de solutions et de solutions extrémales pour certains types d'équations différentielles et intégrales. Nous y discutons les conditions imposées par ces auteurs et nous y proposons des affaiblissement pour certaines d'entre elles.

2.1 Sur un problème périodique d'équations différentielles ordinaires

On s'intérèsse à l'existence de solutions et de solutions extrémales dans l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ pour le problème périodique (PP) du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)' &= g(t,x(t)) \;\; p.p\; t \in J \\ x(0) &= x(T) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $J = [0, T], f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et $g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

On se propose dans cette partie du chapitre d'affaiblir une des hypothèses imposées par Dhage *et al.* dans [16] dans le traitement du problème (2.1) et d'apporter une correction à une autre hypothèse, elle aussi, imposée dans [16].

Définition 2.1 *Une solution du problème (2.1) est une fonction $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :*

– *La fonction $t \longmapsto \left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)$ est absolument continue sur J.*

– *x vérifie le problème (2.1).*

On considère les hyporthèses suivantes :

(A_1) La fonction f est telle que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(0,x) = f(T,x)$.

(A_2) La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe une fonction $l \in \mathcal{B}(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l(t)|x-y| \quad p.p\ t \in J,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(A_3) La fonction g est de Carathéodory.

(A_4) Il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une fonction $\eta \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$ telles que $\eta(t) > 0$ p.p $t \in J$ satisfaisant

$$|g_k(t,x)| \leq \eta(t)\psi(|x|) \quad p.p\ t \in J,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Discussion 2.1

– Les hypothèses (A_2)-(A_3) sont dans Dhage *et al.* [16].
– L'hypothèse (A_4) constitue un affaiblissement de l'hypothèse correspondante, imposée dans [16], où la fonction ψ est supposée croissante.
– L'hypothèse (A_1) constitue une correction (mineure) de l'hypothèse correspondante, imposée dans [16], où f est supposée périodique, ce qui n'est pas adapté car f n'est définie que sur $J \times \mathbb{R}$.

2.1.1 Existence de solutions

Le résultat suivant est utilisée dans la preuve du résultat auxiliaire ci-après qui, lui-même, interviendra dans la preuve du résultat principal de ce paragraphe (Théorème 2.1, page 15).

Lemme 2.1 ([16]) *Pour toutes fonctions $k, \sigma \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}^+)$, x est solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} x' + k(t)x(t) = \sigma(t) \quad p.p\ t \in J \\ x(0) = x(T) \end{cases} \tag{2.2}$$

si est seulement si elle est solution de l'équation intégrale :

$$x(t) = \int_0^T G_k(t,s)\sigma(s)ds \tag{2.3}$$

où G_k est la fonction de Green associée à (2.2), définie par

$$G_k(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{K(s)-K(t)}}{1-e^{-K(T)}}, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ \dfrac{e^{K(s)-K(t)-K(T)}}{1-e^{-K(T)}} & 0 \leq t \leq s \leq T, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $K(t) = \int_0^t k(s)ds$.

Remarque 2.1

– *La fonction de Green G_k est positive pour tous $t, s \in [0, T]$ et $K(t) > 0, \forall t > 0$.*

– *Notons que le problème (2.1) est équivalent au problème suivant :*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}\right)' + k(t)\left(\dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}\right) &= g_k(t, x(t)) \;\; p.p \;\; t \in J \\ x(0) &= x(T) \end{cases} \tag{2.5}$$

où $k \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et la fonction $g_k : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$g_k(t, x) = g(t, x) + k(t)\left(\frac{x}{f(t, x)}\right). \tag{2.6}$$

Toute solution du problème (2.1) est solution du problème (2.5) et réciproquement.

Lemme 2.2 ([16]) *Supposons que l'hypothèse (A_1) est satisfaite. Alors pour tout $k \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}^+)$, x est solution de l'équation (2.5) si est seulement si elle est solution de l'equation intégrale :*

$$x(t) = [f(t, x(t))]\left(\int_0^T G_k(t, s) g_k(t, x(s)) ds\right) \tag{2.7}$$

où la fonction de Green $G_k(t, s)$ est definie par (2.4).

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses (A_1)-(A_4) sont vérifiées, et qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que :*

$$r > \frac{F M_k \|\eta\|_{L^1} \max_{y\in[0,r]} \psi(y)}{1 - L M_k \|\eta\|_{L^1} \max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)}, \tag{2.8}$$

où

$$L M_k \|\eta\|_{L^1} \max_{y\in[0,r]} \psi(y) < 1, \qquad F = \sup_{t\in[0,T]} |f(t, 0)|, \qquad L = \sup_{t\in[0,T]} l(t),$$

et

$$M_k = \max\{G_k(t, s) : t, s \in J\}.$$

Alors, le PP (2.1) admet au moins une solution sur J.

Démonstration. On montre l'existence de solutions dans l'espace $X = \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

Soit $\overline{B}(0, r)$ la boule fermée de rayon $r > 0$ où r est tel que (2.8). On définit les deux opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur $\overline{B}(0, r)$ comme suit :

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)), \;\; t \in J, \;\; x \in X$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = \int_0^T G_k(t, s) g_k(s, x(s)) ds, \;\; t \in J, \;\; x \in X.$$

L'équation intégrale (2.7) est équivalente à l'équation opérationnelle :

$$x(t) = \mathcal{A}x(t)\mathcal{B}x(t), \quad t \in J, \ x \in X. \tag{2.9}$$

Nous vérifions que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient les hypothèses du Théorème 1.5, page 11.

Etape 1 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est lipschitzien sur X. Soit $x, y \in X$ et $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| &\leq |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \\ &\leq l(t)|x(t) - y(t)| \\ &\leq L\|x - y\|. \end{aligned}$$

En passant à la norme on obtient

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq L\|x - y\|.$$

D'où $\mathcal{A}$ est un opérateur lipschitzien.

Etape 2 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu et compact.

1. $\mathcal{B}$ est continu. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente dans X vers $x \in X$. Montrons que $(\mathcal{B}x_n)_n$ converge vers $\mathcal{B}x$. Soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}x_n(t) - \mathcal{B}x(t)| &\leq |\int_0^T G_k(t,s)g_k(s, x_n(s))ds \\ &\qquad - \int_0^T G_k(t,s)g_k(s, x(s))ds| \\ &\leq M_k \int_0^T |g_k(s, x_n(s)) - g_k(s, x(s))|ds \\ &\leq M_k\|g_k(., x_n(.)) - g_k(., x(.))\|_{L^1}. \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2, page 9), on déduit que :

$$\|g_k(., x_n(.)) - g_k(., x(.))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où :

$$\|\mathcal{B}x_n - \mathcal{B}x\| \leq M_k\|g_k(., x_n(.)) - g_k(., x(.))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est continu.

2. $\mathcal{B}$ est compact. Pour cela, nous vérifions que l'image de $\overline{B}(0, r)$ par l'opérateur $\mathcal{B}$ est borné et équicontinu.

- Montrons que l'ensemble $\mathcal{B}(\overline{B}(0, r))$ est un ensemble uniformement borné. Soit $x \in \overline{B}(0, r)$ et $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x(t)| &\leq |\int_0^T G_k(t,s)g_k(s,x(s))ds| \\
&\leq M_k\int_0^T [\eta(s)\psi(|x(s)|)]ds \\
&\leq M_k\int_0^T \eta(s)\max\{\psi(y): y\in[0,r]\}ds \\
&\leq M_k\|\eta\|_{L^1}\max\{\psi(y): y\in[0,r]\}.
\end{aligned}$$

En passant à la norme sur le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus, on trouve : $\|\mathcal{B}x\| \leq M\ \forall x \in \overline{B}(0,r)$ où $M = M_k\|\eta\|_{L^1}\max\{\psi(y) : y \in [0,r]\}$. Donc $\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))$ est un ensemble uniformément borné.

- Montrons que l'ensemble $\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))$ est équicontinu. Posons, pour tout $t \in J$:

$$y(t) = \int_0^T G_k(t,s)g_k(s,x(s))ds.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
|y'(t)| &\leq \left|\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}G_k(t,s)g_k(s,x(s))ds\right| \\
&= \left|\int_0^T \Big(-k(s)\Big)G_k(t,s)g_k(s,x(s))ds\right| \\
&\leq NM_k\|\eta\|_{L^1}\max\{\psi(y): y\in[0,r]\} =: c
\end{aligned}$$

où $N = \sup\limits_{t\in J} k(t)$. D'où, pour tous $t,\tau \in [0,T]$ on a :

$$|\mathcal{B}x(t) - \mathcal{B}x(\tau)| \leq c|t-\tau| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \tau.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))$ est équicontinu.

D'après le Théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.2, page 9) $\mathcal{B}$ est un opérateur compact et continu.

Etape 3 : Montrons que : $LM < 1$ où

$$M = \|\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))\| = \sup\{\|\mathcal{B}x\| : x \in \overline{B}(0,r)\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
M &= \|\mathcal{B}(\overline{B}(0,r))\| = \sup\{\|\mathcal{B}x\| : x\in\overline{B}(0,r)\} \\
&\leq \sup\left\{\sup_{t\in J}\int_0^t G_k(t,s)|g_k(s,x(s))|ds : x\in\overline{B}(0,r)\right\} \\
&\leq M_k\int_0^T \eta(s)\max\{\psi(y): y\in[0,r]\}ds = M_k\|\eta\|_{L^1}\max\{\psi(y): y\in[0,r]\}
\end{aligned}$$

et delà : $LM \leq LM_k\|\eta\|_{L^1}\max\{\psi(y) : y \in [0,r]\} < 1$.

Ainsi les conditions du Théorème 1.5, page 10, sont vérifiées.

Etape 4 : Montrons que la deuxième l'alternative du Théorème 1.5, page 11, n'est pas vérifiée. Soit $u \in X$ et $\lambda \in]0,1[$ telles que : $\|u\| = r$ et $\lambda(\mathcal{A}u\mathcal{B}u) = u$. Pour $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \lambda |f(t,u(t))| \left| \int_0^T G_k(t,s) g_k(s,u(s)) ds \right| \\
&\leq \lambda \Big(|f(t,u(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \Big) \int_0^T |G_k(t,s) g_k(s,u(s)| ds \\
&\leq \Big(l(t)|u(t)| + F \Big) \int_0^T M_k \eta(s) \psi(|u(s)|) ds \qquad (2.10) \\
&\leq l(t) M_k |u(t)| \int_0^T \eta(s)\psi(|u(s)|) ds + F M_k \int_0^T \eta(s)\psi(|u(s)|) ds \\
&\leq L M_k \|\eta\|_{L^1} |u(t)| \max_{y\in[0,r]} \psi(y) + F M_k \|\eta\|_{L^1} \max_{y\in[0,r]} \psi(y).
\end{aligned}$$

En passant à la norme sur u on trouve :

$$\|u\| \leq \frac{F M_k \|\eta\|_{L^1} \max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)}{1 - L M_k \|\eta\|_{L^1} \max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)}.$$

Puisque $\|u\| = r$ on aura finalement :

$$r \leq \frac{F M_k \|\eta\|_{L^1} \max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)}{1 - L M_k \|\eta\|_{L^1} \max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)},$$

ce qui contredit l'inégalité (2.8).

Ainsi l'équation opérationnelle $\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$ et par conséquent le problème PP (2.1), admet au moins une solution. □

Discussion 2.2 La preuve du Théorème 2.1 est identique à celle du théorème correspondant dans [16]. La seule modification que nous y apportons, générée par nos hypothèses, intervient aux différentes étapes où, dans les majorations concernées, nous avons remplacé la quantité $\psi(r)$ par $\max\limits_{y\in[0,r]} \psi(y)$.

2.1.2 Existence de solutions extrémales

Dans l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, nous considérons le cône K défini par

$$K = \{x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\}.$$

Le cône K est positif et normal dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. Il définit une relation d'ordre sur $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ par : $\forall u,v \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}), u \preceq v \Longleftrightarrow u(t) \leq v(t)\ \forall t \in J$.

Définition 2.2 *Une fonction $a \in \mathcal{AC}(J,\mathbb{R})$ est dite sous solution du PP (2.1) sur J si :*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a(t)}{f(t,a(t))}\right)' & \leq g(t,a(t)) \;\; p.p \; t \in J \\ a(0) & \leq a(T). \end{cases}$$

Définition 2.3 *Une fonction $b \in \mathcal{AC}(J,\mathbb{R})$ est dite sur solution du PP (2.1) sur J si :*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{b(t)}{f(t,b(t))}\right)' & \geq g(t,b(t)) \;\; p.p \; t \in J \\ b(0) & \geq b(T). \end{cases}$$

On considère les hypothèses suivantes :

(B_0) Les fonctions f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}^+$, respectivement.

(B_1) Les fonctions $f = f(t,x)$ et $g = g(t,x)$ sont croissantes par rapport à x, pour presque tout $t \in J$.

(B_2) Le PP (2.1) admet une sous solution a et une sur solution b telles que $a \preceq b$.

(B_3) La fonction définie par :

$$h(t) = |g_k(t,b(t))|, \; t \in J \tag{2.11}$$

est Lebesgue intégrable.

(B_4) La sous solution a est positive.

(B_5) La fonction f est telle que, pour tout $t \in J$ et tous $x,y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{f(t,x)} \leq \frac{y}{f(t,y)} \;\; i.e. \;\; xf(t,y) \leq yf(t,x).$$

Discussion 2.3 Dans [16], les auteurs imposent seulement les hypothèses (B_0) -(B_2), plus une hypothèse (B_3) plus restrictive que celle que nous proposons ici. Il s'agit de la condition suivante :

(B_3) La fonction définie par :

$$h(t) = |g_k(t,a(t))| + |g_k(t,b(t))|, \; t \in J$$

est Lebesgue intégrable.

Avec ces hypothèses, nous avons constaté que la preuve de leur résultat principal correspondant au Théorème 2.2 ci-après, est incorrecte, et que les hypothèses (B_4) et (B_5) que nous proposons permettent, elles, de valider ce résultat.

Par ailleurs, l'hypothèse (B_3) que nous proposons, et qui est moins restrictive que celle imposée dans [16], est suffisante pour valider le résultat recherché.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses (A_1)-(A_3) et (B_0)-(B_5) sont vérifiées. Supposons que $LM_k\|h\|_{L^1} < 1$ où la fonction h est définie par (2.11) et $L = \sup_{t\in J} l(t)$. Alors, le PP (2.1) admet une solution maximale positive et une solution minimale positive.*

Démonstration. La preuve est basée sur le Théorème 1.6, p. 11. Donc, nous allons vérifier que les hypothèses de ce théorème sont satisfaites.

Le PP (2.1) est équivalent à l'équation intégrale (2.7). On définit les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $X = \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ dans lui-même, par les formules :

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)), \quad x \in X, \quad t \in J$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = \int_0^T G_k(t,s) g_k(s, x(s)) ds, \quad x \in X, \quad t \in J.$$

D'ou l'équation intégrale (2.7) est équivalente à l'équation opérationnelle $x(t) = \mathcal{A}x(t)\mathcal{B}x(t)$ dans l'algèbre de Banach X.

Etape 1 : L'opérateur $\mathcal{A}$ est lipschitzien. En effet, d'après la démonstration du Théorème 2.1, p. 15, l'opérateur $\mathcal{A}$ est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz L.

Etape 2 : L'opérateur $\mathcal{B}$ est continu et compact. De même que pour l'étape 1, la preuve du Théorème 2.1, p. 15, fournie la preuve que $\mathcal{B}$ est continu et compact.

Etape 3 : Montrons que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont croissants sur $[a, b]$. En effet, soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x \preceq y$ et soit $t \in J$. Nous avons :

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)) \leq f(t, y(t)) = \mathcal{A}y(t).$$

De même, pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}x(t) &= \int_0^T G_k(t,s) g_k(s, x(s)) ds \\ &\leq \int_0^T G_k(t,s) g_k(s, x(s)) ds \\ &= \mathcal{B}y(t). \end{aligned}$$

Ainsi, les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont croissants sur $[a, b]$.

Etape 4 : Montrons que $\mathcal{A}x\mathcal{B}x \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $x \in [a, b]$ et $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned} a(t) &\leq f(t, a(t)) \int_0^T G_K(t,s) g_k(s, a(s)) ds \\ &\leq f(t, x(t)) \int_0^T G_K(t,s) g_k(s, x(s)) ds \\ &\leq f(t, b(t)) \int_0^T G_K(t,s) g_k(s, b(s)) ds \\ &\leq b(t). \end{aligned}$$

D'où
$$a(t) \leq \mathcal{A}x(t)\mathcal{B}x(t) \leq b(t) \text{ pour } t \in J \text{ et tout } x \in [a,b].$$

Etape 5 : Montrons que : $LM < 1$ où $M = \|\mathcal{B}([a,b])\| = \sup\{\|\mathcal{B}x\| : x \in [a,b]\}$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} M & = & \|\mathcal{B}([a,b])\| = \sup\{\|\mathcal{B}x\| : x \in [a,b]\} \\ & \leq & \sup\left\{\sup\limits_{t\in J} \int_0^t G_k(t,s)|g_k(s,x(s))|ds : x \in [a,b]\right\} \\ & \leq & M_k \int_0^T h(s)ds = M_k\|h\|_{L^1}. \end{array}$$

Puisque $LM \leq LM_k\|h\|_{L^1} < 1$, alors d'après le Théorème 1.6, p. 11, le PP (2.1) admet une solution maximale positive et une solution minmale positive sur J. □

Discussion 2.4 La preuve du Théorème 2.2 est similaire à celle proposée dans [16]. Nos hypothèses interviennent comme ceci :

– La condition (B_4) assure que l'image de tout $x \in [a,b]$ par les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est dans K. Ce qui fait défaut dans la preuve proposée dans [16].
– Etape 3 : pour montrer que l'opérateur $\mathcal{B}$ est croissant, la condition (B_5) assure à l'opérateur $\mathcal{B}$ cette propriété et pour cela la fonction $g_k = g_k(t,x)$ intervenant dans la définition de $\mathcal{B}$ doit être croissante par rapport à la variable x. C'est-à-dire, qu'elle doit vérifier que, si $x, y \in [a,b]$ sont tels que $x \preceq y$, alors
$$g_k(t,x) = g(t,x) + k(t)\left(\frac{x}{f(t,x)}\right) \leq g(t,y) + k(t)\left(\frac{y}{f(t,y)}\right) = g_k(t,y).$$
Les conditions imposées dans [16] à f et g ne suffisent pas pour que cette inégalité soit vérifiée. Elle le devient en rajoutant la condition (B_5).
– Etape 5 : nous utilisons la fonction h donnée par l'hypothèse (B_3) en remplacement de celle correspondante, imposée dans [16]. Cette hypothèse (B_3) est donc suffisante.

2.2 Sur un problème d'équations différentielles fonctionnelles

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à des équations différentielles fonctionnelles perturbées (EDFP) du type :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),Sx), & p.p. \quad t \in I = [0,a] \\ x(t) = Gx(t), & \qquad t \in I_0 = [-r,0] \end{cases} \tag{2.12}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $S, G : \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions données et $J = I_0 \cup I$.

Une solution de l'EDFP (2.12) est une fonction $x \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie le problème (2.12).

On se propose ici d'affaiblir une des hypothèses imposées par Dhage dans [12] dans le traitement du problème (2.12).

2.2.1 Existence de solutions

On considère les hypothèses suivantes :

(A_1) L'opérateur $S : \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n)$ est continu.

(A_2) L'opérateur $G : \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ est compact et continu. Soit $N = \sup\{\|Gx\| : x \in \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n)\}$.

(A_3) La fonction f est Carathéodory.

(A_4) Il existe une fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une fonction $\gamma \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\gamma(t) > 0 \quad p.p \quad t \in I$ et

$$|f(t, x, y)| \leq \gamma(t)\phi(|x|) \quad p.p \quad t \in I \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall y \in \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n.)$$

Discussion 2.5

– Les hypothèses (A_1), (A_2) et (A_4) sont identiques à celles dans [12].
– L'hypothèse (A_3) constitue un affaiblissement de l'hypothèse correspondante, imposée dans [12], dans laquelle f est supposée L^1-Carathéodory.

Théorème 2.3 *Supposons que les hypothèses (A_1)-(A_4) sont satisfaites et que*

$$\int_N^\infty \frac{ds}{\phi(s)} > \|\gamma\|_{L^1}.$$

Alors l'EDFP (2.12) admet au moins une solution sur J.

Démonstration. L'EDFP (2.12) étant équivalente à l'équation intégrale fonctionnelle perturbée (EIFP) suivante :

$$x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds & t \in I \\ Gx(s), & t \in I_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

on définit l'opérateur $\mathcal{T}$ sur $X = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ par, pour tout $x \in X$,

$$\mathcal{T}x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

On vérifie que l'opérateur $\mathcal{T}$ vérifie les hypothèses du Théorème 1.3, p. 10.

Etape 1 : Montrons que $\mathcal{T}$ est un opérateur continu. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente dans X vers $x \in X$. On vérifie que $(\mathcal{T}x_n)$ converge vers $\mathcal{T}x$. Soit $t \in J$. Nous avons

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x_n(s), Sx_n) - f(s, x(s), Sx)|ds \\ &\leq \|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1}.\end{aligned}$$

On applique alors le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2, p. 9) pour s'assurer que :

$$\|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, soit

$$u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto u_n(t) = f(t, x_n(t), Sx_n)$$

et

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto u(t) = f(t, x(t), Sx).$$

Nous avons $u_n(t)$ converge vers $u(t)$ p.p $t \in I$. Par continuité de la fonction f par rapport à la deuxième variable, et puisque S est un opérateur continu on a : $x_n \to x$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ alors $Sx_n \to Sx$ et $f(t, x_n(t), Sx_n) \to f(t, x(t), Sx)$. Il reste à trouver une fonction $g \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|u_n(t)\| \leq g(t).$$

Puisque la suite $(x_n)_n$ est convergente dans $\mathcal{C}$ alors : $\exists r_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| < r_1$ et $\|x\| \leq r_1$. Nous avons :

$$|x_n(t)| \leq \|x_n\| \leq r_1, \ \forall n \in N, \ \forall t \in I.$$

Delà,

$$|u_n(t)| = |f(t, x_n(t), Sx_n)| \leq \gamma(t)\phi(|x_n(t)|) \leq \gamma(t)\phi(|r_1|) = g(t).$$

Les conditions du Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2, p. 9) sont ainsi satisfaites. On déduit que

$$\|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Maintenant, pour $t \in I_0$, nous avons :

$$|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x(t)| \leq |Gx_n(t) - Gx(t)| \leq \|Gx_n - Gx\|.$$

Puisque G est un opérateur continu alors :

$$\|Gx_n - Gx\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Ainsi nous avons vérifié que :

$$\|\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est un opérateur continu.

Etape 2 : Montrons que $\mathcal{T}$ transforme tout borné en un ensemble relativement compact. Soit Y un ensemble borné dans X. Il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in Y$, $\forall t \in I$, $|x(t)| \leq \|x\| \leq k$.

2.1. Montrons que $\mathcal{T}(Y)$ est un ensemble uniformement borné. Soit $x \in Y$ et $t \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x(t)| &\leq N + \int_0^t |f(s,x(s),Sx)|ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|x(s)|)ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(k)ds \\ &\leq N + L\int_0^t \gamma(s)ds \\ &\leq N + L\|\gamma\|_{L^1} \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $L = \phi(k)$, en tenant compte du fait que $\forall s \in [0,t] \subset [0,a] = I : \phi(|x(s)|) \leq \phi(k)$.

Pour $t \in I_0$, nous avons :

$$|\mathcal{T}x(t)| \leq |Gx(t)| \leq N.$$

Ainsi $\|\mathcal{T}x\| \leq M \ \forall x \in Y$ où $M = N + L\|\gamma\|_{L^1}$. Ce qui prouve que $\mathcal{T}(Y)$ est un ensemble uniformement borné.

2.2 Montrons que $\mathcal{T}(Y)$ est un ensemble equicontinu. Soit $x \in Y$ et $t, \tau \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}x(\tau)| &\leq \left| \int_0^t f(s,x(s),Sx)ds - \int_0^\tau f(s,x(s),Sx)ds \right| \\ &\leq \left| \int_\tau^t f(s,x(s),Sx)ds \right| \\ &\leq \int_\tau^t |f(s,x(s),Sx)|ds \\ &\leq \left| \int_\tau^t \gamma(s)\phi(|x(s)|)ds \right| \\ &\leq L\int_\tau^t \gamma(s)ds = L|p(t) - p(\tau)| \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $p(t) = \displaystyle\int_0^t \gamma(s)ds$ et $L = \phi(k)$.

De même, pour $t, \tau \in I_0$, nous avons :

$$|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}x(\tau)| = |Gx(t) - Gx(\tau)|.$$

Puisque l'opérateur G est compact et continu sur X, $G(Y)$ est relativement compact, et par conséquent $G(Y)$ est un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$.
D'où

$$|Gx(t) - Gx(\tau)| \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ t \longrightarrow \tau.$$

Si $\tau \in I_0$ et $t \in I$ alors on a :

$$|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}x(\tau)| \leq |\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}x(0)| + |\mathcal{T}x(0) + \mathcal{T}x(\tau)|.$$

D'où, dans tout les cas nous avons : :

$$|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}x(\tau)| \to 0 \text{ lorsque } t \to \tau,$$

ce qui prouve que $\mathcal{T}(Y)$ est équicontinu et d'après le Théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.2, p. 9) $\mathcal{T}$ est un opérateur compact.

Ainsi $\mathcal{T}$ étant complètement continu, les conditions du Théorème 1.3, p. 10, sont satisfaites, alors soit la première alternative du Théorème 1.3 est vérifiée soit la deuxième est réalisée.

Etape 3 : Montrons que la deuxième alternative du Théorème 1.3 n'est pas réalisée. C'est-à-dire que nous allons vérifier que l'ensemble

$$\xi = \{u \in X \ / \ \exists \lambda \in]0,1[: \ \lambda \mathcal{T}u = u\}$$

est borné. Soit $u \in \xi$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que, pour $t \in I$,

$$u(t) = \lambda \mathcal{T}u(t) = \lambda[Gu(0) + \int_0^t f(s, u(s), Su)ds]$$

et pour $t \in I_0$ on a :

$$u(t) = \lambda \mathcal{T}u(t) = \lambda Gu(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq N + \left| \int_0^t f(s, u(s), Su)ds \right| \\ &\leq N + \int_0^t |f(s, u(s), Su)|ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|u(s)|)ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|u(s)|)ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Soit $w(t) = N + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)\phi(u(s))ds$ pour $t \in I$. On a $|u(t)| \leq w(t)$ $\forall t \in I$.
Puisque ϕ est croissante, en dérivant w on obtient :

$$\begin{cases} w'(t) \leq \gamma(s)\phi(w(t)) \\ w(0) = N. \end{cases} \tag{2.18}$$

Par intégration, on déduit que :

$$\int_0^t \frac{w'(s)ds}{\phi\,(w(s))} \leq \int_0^t \gamma(s)ds.$$

En faisant un changement de variables on trouve :

$$\int_0^{w(t)} \frac{ds}{\phi(s)} \leq \int_0^t \gamma(s)ds \leq \|\gamma\|_{L^1} < \int_0^\infty \frac{ds}{\phi(s)}.$$

Donc il existe une constante positive M telle que $w(t) \leq M$ pour tout $t \in J$.
On aura

$$|u(t)| \leq w(t) \leq M, \; si \; t \in I$$

et

$$|u(t)| \leq \lambda |Gu(t)| \leq \|Gu\| \leq N, \; si \; t \in I_0.$$

D'où $|u(t)| \leq \max\{M, N\}$ pour tout $t \in J$.

Ainsi la deuxième alternative du Théorème 1.3 n'est pas réalisée, alors l'EDFP (2.12) admet au moins une solution. □

Discussion 2.6 La preuve du Théorème 2.3 est la même que celle proposée dans [12]. Nous y apportons quelques modifications en utilisant nos hypothèses. Ces modifications interviennent comme ceci :

- Etape 2 : dans les majorations (2.15) et (2.16), nous utilisons les hypothèses (A_3) et (A_4) au lieu de l'hypothèse sur f imposée dans [12] (i.e., f est L^1-Carathéodory).
- Etape 3 : dans les majorations (2.17), nous utilisons les mêmes arguments que ceux évoqués au point précédent.

2.2.2 Résultat d'unicité

Dans cette partie nous discutons le second résultat établi par Dhage dans [12] concernant le problème (2.12).

On considère les hypothèses suivantes :

(B_1) La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie :

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq \max\left\{\frac{|x_1 - x_2|}{a + |x_1 - x_2|}, \frac{\|y_1 - y_2\|}{a + \|y_1 - y_2\|}\right\} \quad p.p \;\; t \in I,$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n)$.

(B_2) L'opérateur $S : \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n)$ est non expansif.

(B_3) L'opérateur $G : \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ satisfait la condition suivante :

$$|Gx(t) - Gy(t)| \leq \frac{|x(t) - y(t)|}{a + |x(t) - y(t)|} \quad p.p \;\; t \in I_0, \quad \forall x, y \in \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}^n).$$

Théorème 2.4 ([12]) *On suppose que les hypothèses (B_1)-(B_3) sont satisfaites. Alors l'EDFP (2.12) admet une solution unique sur J.*

Démonstration. Soit $X = C(J, \mathbb{R}^n)$ et soit l'opérateur $\mathcal{T}$ défini sur X par, pour $x \in X$,

$$\mathcal{T}x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.19}$$

On montre que $\mathcal{T}$ est une contraction non linéaire sur X. En effet, d'après l'hypothèse (B_1) on a, pour tous $x, y \in X$ et tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}y(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x(s), Sx) - f(s, y(s), Sy)|\, ds \\
&\leq \int_0^t \left(\max\left\{ \frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|Sx - Sy\|}{a + \|Sx - Sy\|} \right\} \right) ds \\
&\leq \int_0^t \left(\max\left\{ \frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|} \right\} \right) ds \\
&\leq \int_0^t \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|} ds \leq \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

De même pour $t \in I_0$, on a :

$$|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}y(t)| \leq |Gx(t) - Gy(t)| \leq \frac{|x(t) - y(t)|}{a + |x(t) - y(t)|} \leq \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|}.$$

En passant à la norme, on obtient

$$\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| \leq \psi(\|x - y\|)$$

avec $\psi(r) = \dfrac{ar}{a + r} < r$; ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est une contraction non linéaire.

D'où, d'après le Théorème 1.4, p. 15, l'opérateur T admet un point fixe unique et par conséquent l'EDFP (2.12) admet une solution unique. □

Discussion 2.7

• La preuve reproduite ci-dessus est celle proposée dans [12].

• Le résultat du Théorème 2.4 n'est pas justifié car les majorations (2.20) ne sont pas correctes.

En effet, si $x, y \in X$ et $t \in I$, nous avons en fait :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}y(t)| &\leq |Gx(0) - Gy(0)| + \int_0^t |f(s, x(s), Sx) - f(s, y(s), Sy)| ds \\
&\leq \frac{|x(0) - y(0)|}{a + |x(0) - y(0)|} \\
&\qquad + \int_0^t \left(\max\left\{ \frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|Sx - Sy\|}{a + \|Sx - Sy\|} \right\} \right) ds \\
&\leq \frac{|x(0) - y(0)|}{a + |x(0) - y(0)|} + \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|} \\
&\leq \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|} + \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|} = (1 + a)\frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|}.
\end{aligned}$$

En posant $\psi(r) = (1+a)\dfrac{r}{a+r}$, nous remarquons que ψ ne vérifie pas : $\psi(r) < r,\ \forall r > 0$. En conclusion, $\mathcal{T}$ n'est pas nécessairement une contraction non linéaire.

• Nous constatons, par contre, que le Théorème 2.4 s'applique pour un problème du type particulier qui a d'ailleurs motivé l'étude faite par Dhage dans [12]. Il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x(t),x_t) \quad p.p \quad t \in I \\ x(t) &= \varphi(t) \qquad\qquad\qquad t \in I_0 \end{cases} \tag{2.21}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{C}(I_0,\mathbb{R}^n)$.

Dans ce cas, puisque nous avons :

$$|Gx(0) - Gy(0)| = |\phi(0) - \phi(0))| = 0,$$

les majorations (2.20) deviennent alors justifiées.

2.2.3 Existence de solutions extrémales

On considère les hypothèses suivantes :

(C_1) L'opérateur $S : \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n)$ est croissant.

(C_2) La fonction f est Chandrabhan.

(C_3) L'opérateur $G : \mathcal{BM}(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(I_0,\mathbb{R}^n)$ est croissant.

(C_4) L'EDFP (2.12) admet une sous solution a et une sur solution b, avec $a \preceq b$.

Discussion 2.8

• Supposons que les conditions (C_1)-(C_4) sont satisfaites. Nous définissons la fonction $h : J \to \mathbb{R}^+$ par :

$$h(t) = |f(t,b(t),Sb)| \quad \forall t \in I. \tag{2.22}$$

Alors h est Lebesgue intégrable et vérifie

$$|f(t,x(t),Sx)| \leq h(t), \quad \forall t \in I, \quad \forall x \in [a,b].$$

Cette fonction h interviendra dans la preuve du Théorème 2.5 ci-dessous.

• Dans [12], l'auteur choisit comme fonction h, la fonction, plus restrictive, suivante :

$$h(t) = |f(t,a(t),Sa)| + |f(t,b(t),Sb)|, \quad t \in J. \tag{2.23}$$

En fait, la fonction h que nous proposons dans (2.22), et qui est moins restrictive que celle imposée dans [12], est suffisante pour valider le résultat du Théorème 2.5.

Théorème 2.5 ([12]) *On suppose que les hypothèses (A_2),(C_1)-(C_4) sont satisfaites. Alors l'EDFP (2.12) admet au moins une solution maximale et une solution minimale sur J.*

Démonstration. La preuve du Théorème 2.5 est bassé sur le Théorème 1.8. En conséquance, nous allons vérifier que les hypothèses de ce dernier sont satisfaites.

L'EDFP (2.12) est équivalente à l'EIFP (2.13). Pour $X = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ l'opérateur défini par, pour $x \in X$,

$$\mathcal{T}x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t), & t \in I_0, \end{cases} \tag{2.24}$$

l'EFIP (2.13) se tronsforme en l'équation opérationnelle suivante : $\mathcal{T}x = x$ dans X.

Etape 1. On montre que $\mathcal{T}$ est croissant. Soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x \preceq y$. Nous avons d'une part, pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}x(t) &= Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds \\ &\leq Gy(0) + \int_0^t f(s, y(s), Sy)ds \\ &= \mathcal{T}y(t) \end{aligned}$$

et d'autre part, pour $t \in I_0$:

$$\mathcal{T}x(t) = Gx(t) \leq Gy(t) = \mathcal{T}y(t).$$

Donc l'opérateur $\mathcal{T}$ est croissant sur $[a, b]$.

Etape 2. On montre que l'opérateur $\mathcal{T}$ envoi l'intervalle $[a, b]$ dans lui même. Nous avons, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq Ga(0) + \int_0^t f(s, a(s), Sa)ds \\ &\leq Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds \\ &\leq Gb(0) + \int_0^t f(s, b(s), Sb)ds \\ &\leq b(t). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \in I_0$:

$$a(t) \leq \mathcal{T}a(t) = Ga(t) \leq Gx(t) \leq \mathcal{T}x(t) \leq Gb(t) \leq b(t).$$

Ainsi $a(t) \leq \mathcal{T}x(t) \leq b(t), \forall t \in J$, et par conséquent $\mathcal{T}x \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]$.

Etape 3. Soit $(x_n)_n$ une suite monotone dans $[a, b]$. Montrons que la suite $(Tx_n)_n$ converge dans $T([a, b])$. La suite $(\mathcal{T}x_n)_n$ est monotone dans $\mathcal{T}([a, b])$. On montre que la suite $(\mathcal{T}x_n)_n$ est uniformément borné et équicontinue.

3.1. $(\mathcal{T}x_n)_n$ est uniformément bornée. Soit $t \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x_n(t)| &\leq N + \int_0^t |f(s, x_n(s), Sx)|ds \\ &\leq N + \int_0^t h(s)ds \\ &\leq N + \|h\|_{L^1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Si $t \in I_0$, nous avons :

$$|\mathcal{T}x_n(t)| \leq |Gx_n(t)| \leq N.$$

Ainsi $\|\mathcal{T}x_n\| \leq M$ où $M = N + \|h\|_{L^1}$. Donc $(\mathcal{T})_n x_n$ est uniformément bornée dans X.

3.2 $(\mathcal{T}x_n)_n$ est équicontinue. Soit $t, \tau \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| &\leq \left| \int_0^t f(s, x_n(s), Sx)ds - \int_0^\tau f(s, x_n(s), Sx)ds \right| \\ &\leq \int_\tau^t |f(s, x_n(s), Sx)|ds \\ &\leq \int_\tau^t h(s)ds \\ &\leq |p(t) - p(\tau)| \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $p(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$ est une fonction uniformément continue. On déduit que :

$$|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| \to 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \tau.$$

De même pour $t, \tau \in I_0$

$$|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| = |Gx_n(t) - Gx_n(\tau)|$$

puisque l'opérateur G est compact et continu sur X, $(Gx_n)_n$ est relativement compact, et par conséquent est un ensemble équicontinu dans X.

D'où

$$|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| = |Gx_n(t) - Gx_n(\tau)| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \tau.$$

Si $\tau \in I_0$ et $t \in I$ alors on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| &\leq |Gx_n(\tau) - Gx_n(0)| + \left| \int_0^t f(s, x_n(s), Sx)ds \right| \\ &\leq |Gx_n(\tau) - Gx_n(0)| + \int_0^t h(s)ds. \end{aligned}$$

Notons que si $|t - \tau| \longrightarrow 0$ alors nécessairement on a : $t \to 0$ et $\tau \to 0$.

D'après ce qui précède on déduit que :

$$|\mathcal{T}x_n(t) - \mathcal{T}x_n(\tau)| \to 0, \text{ lorsque } t \to \tau.$$

Ainsi $(\mathcal{T}x_n)_n$ est uniformément bornée et équicontinu. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.2, p. 9), $(\mathcal{T}x_n)_n$ est alors relativement compact et donc elle est convergente.

Ainsi d'après le Théorème 1.8 l'EDFP (2.12) admet une solution maximale et une solution minimale sur J. □

Discussion 2.9 La preuve ci-dessus du Théorème 2.5 est identique à celle proposée dans [12]. La seule différence est dans ceci :

-Etape 3 : dans les majorations (2.25) et (2.26) nous utilisons la fonction h donnée par (2.22) en remplacement de celle correspondante, imposée dans [12], et donnée par (2.23). Notre hypothèse est donc suffisante.

2.3 Sur un problème d'équations intégrales fonctionnelles

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'existence de solutions d'une équation intégrale fonctionnelle du type :

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in J \qquad (2.27)$$

où $J = [0,1]$, $q : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $v, k : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R}$ et $\mu, \theta, \sigma, \eta : J \longrightarrow J$ sont des fonctions données.

On se propose ici d'affaiblir une des hypothèses imposées par Dhage dans [11] dans le traitement de l'équation intégrale (2.27).

2.3.1 Existence de solutions

On considère les hypothèses suivantes :

(H_0) Les fonctions $\mu, \theta, \sigma, \eta : J \longrightarrow J$ sont continues avec $\mu(t), \theta(t), \sigma(t), \eta(t) \leq t$ pour tout $t \in J$.

(H_1) La fonction $q : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H_2) Les fonctions $v, k : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

(H_3) La fonction g est Carathéodory.

(H_4) Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R})$ et une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, continue et croissante, telles que

$$|g(t,x)| \leq \phi(t)\psi(|x|) \ p.p \ t \in J, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Discussion 2.10

- Les hypothèses (H_0)-(H_2) et (H_4) sont celles de [11].
- L'hypothèse (H_3) constitue un affaiblissement de l'hypothèse considérée dans [11] où la fonction g est supposée être L^1-Carathéodory.

Théorème 2.6 ([11]) *Supposons que les hypothèses* (H_0)*-*(H_4) *sont satisfaites. Supossons de plus que*

$$\int_{\|q\|_{BM}}^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > C \tag{2.28}$$

où $C = \max\{V, K\|\phi\|_{L^1}\}$, $V = \max_{t,s\in J} |v(t,s)|$ *et* $K = \max_{t,s\in J} |k(t,s)|$. *Alors l'EIF (2.27) admet au moins une solution.*

Démonstration. Posons $X = \mathcal{BM}(J,\mathbb{R})$. On définit les deux opérateurs

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \longrightarrow X$$

par les formules :

$$\mathcal{A}x(t) = \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds, \;\; x \in X, t \in J.$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \;\; x \in X, t \in J.$$

L'EIF (2.27) est alors équivalente à l'équation opérationnelle $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x = x$, $x \in X$. On vérifie que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont les conditions du Théorème 1.7, p. 11.

Etape 1 : On remarque que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire. On montre qu'il est borné. Soit $x \in X$. Nous avons,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x\|_{BM} &= \sup_{t,s\in J} \left| \int_0^{\mu(t)} v(t,x)x(\theta(s))ds \right| \\
&\leq \sup_{t,s\in J} \int_0^{\mu(t)} |v(t,x)||x(\theta(s))|ds \\
&\leq V\|x\|_{BM} \int_0^1 ds \\
&= V\|x\|_{BM}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est borné.

Etape 2 : On montre qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}^p$ est une contraction. Soit $x, y \in X$ et soit $t \in J$. Nous avons,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \\
= \;& |\int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds - \int_0^{\mu(t)} v(t,s)y(\theta(s))ds| \\
= \;& |\int_0^{\mu(t)} v(t,s)(x(\theta(s)) - y(\theta(s)))ds| \\
\leq \;& \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)||x(\theta(s)) - y(\theta(s))|ds \\
\leq \;& \int_0^{t} V\|x-y\|_{BM} ds \\
\leq \;& V\|x-y\|_{BM}.
\end{aligned}$$

Par passage à la norme on obtient

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_{BM} \leq V\|x - y\|_{BM}.$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}^2x(t) - \mathcal{A}^2y(t)| &= \left|\int_0^{\mu(t)} v(t,s) \int_0^{\mu(s)} v(s,\tau)x(\theta(\tau))d\tau ds\right. \\
&- \left.\int_0^{\mu(t)} v(s,t) \int_0^{\mu(s)} v(s,\tau)y(\theta(\tau))d\tau ds\right| \\
&\leq \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)| \int_0^{\mu(s)} |v(s,\tau)||x(\theta(\tau)) - y(\theta(\tau))|d\tau ds \\
&\leq \int_0^t V \int_0^s v\|x - y\|_{BM} d\tau ds \\
&\leq V^2\|x - y\|_{BM} \int_0^t \int_0^s d\tau ds \\
&\leq \frac{V^2}{2!}\|x - y\|_{BM}
\end{aligned}$$

En passant à la norme on obtient

$$\|\mathcal{A}^2x - \mathcal{A}^2y\|_{BM} \leq \frac{V^2}{2!}\|x - y\|_{BM}.$$

On a par récurrence :

$$\|\mathcal{A}^nx - \mathcal{A}^ny\| \leq \frac{V^n}{n!}\|x - y\|_{BM},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \dfrac{V^n}{n!} = 0$, on déduit l'existence d'un entier p tel que :

$$\frac{V^p}{p!} < 1$$

C'est-à-dire que $\mathcal{A}^p$ est une contraction.

Etape 3 : On montre que $\mathcal{B}$ est complètement continu.

3.1 *Continuité de* $\mathcal{B}$: Soit $(x_n)_n$ une suite convergente dans X vers $x \in X$. On montre que $(\mathcal{B}x_n)_n$ converge vers $\mathcal{B}x$. La suite $(x_n)_n$ étant convergente, elle est bornée et donc il existe $r > 0$ tel que $\|x_n\| \leq r$. Soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{B}x_n(t) - \mathcal{B}x(t)| \\
\leq\ & \left|\int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x_n(\eta(s))ds - \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s))ds\right| \\
\leq\ & \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s)||g(s,x_n(\eta(s)) - g(s,x(\eta(s))|ds \\
\leq\ & \int_0^1 |k(t,s)||g(s,x_n(\eta(s)) - g(s,x(\eta(s))|ds \\
\leq\ & K\|g(.,x_n(\eta(.)) - g(.,x(\eta(.))\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

D'après le Théorème de la convergente dominée de Lebesgue (Théorème 1.2, p. 9) :

$$\|g(.,x_n(\eta(.))) - g(.,x(\eta(.)))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque

- $\forall n \in \mathbb{N}, g(.,x_n(\eta(.))) \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R})$,
- la suite $(g(t,x_n(\eta(t))))_n$ converge vers $g(t,x(\eta(t)))$, pour presque tout $t \in J$, puisque g est continue en la deuxième variable,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J : |g(t,x_n(\eta(t)))| \leq \psi(r)\|\phi\|_L^1$,

alors, $\|\mathcal{B}x_n - \mathcal{B}x\| \leq K\|g(.,x_n(\eta(.))) - g(.,x(\eta(.)))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\mathcal{B}$ est un opérateur continu.

3.2 *Relative compacité de l'image par $\mathcal{B}$ de tout borné*. Soit S un ensemble borné dans $\mathcal{BM}(J,\mathbb{R})$. Il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in S, \forall t \in J, |x(t)| \leq \|x\| \leq r$. On montre que :

3.2.1. $\mathcal{B}(S)$ est uniformément borné. En effet, soit $x \in S$. On a,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}x\|_{BM} &\leq \sup_{t\in J}|q(t)| + \sup_{t\in J}\int_0^{\sigma(t)} |k(t,s)||g(s,x(\eta(s)))|ds \\
&\leq \|q\|_{BM} + K\int_0^1 \phi(s)\psi(|x(\eta(s))|)ds \\
&\leq \|q\|_{BM} + K\psi(r)\|\phi\|_{L^1},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{B}(S)$ est uniformément borné.

3.2.2. $\mathcal{B}(S)$ est équicontinu. En effet, soit $x \in S$ et soit $t, \tau \in J$. Nous avons,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x(t) - \mathcal{B}x(\tau)| &\leq |q(t) - q(\tau)| + |\int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds \\
&- \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)g(s,x(\eta(s)))ds| \\
&\leq \left|\int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds\right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)g(s,x(\eta(s)))ds\right| \\
&\quad\quad +|\int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)g(s,x(\eta(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)g(s,x(\eta(s)))ds| + |q(t) - q(\tau)| \\
&\leq \left|\int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} k(\tau,s)(g(s,x)(\eta(s)))ds\right| \\
&\quad + \int_0^{\sigma(t)} [k(t,s) - k(\tau,s)]g(s,x(\eta(s))ds| \\
&\quad\quad +|q(t) - q(\tau)| \\
&\leq K\psi(r)|p(t) - p(\tau)| \\
&\quad + \int_0^1 |k(t,s) - k(\tau,s)|\psi(r)\phi(s)ds + |q(t) - q(\tau)| \\
&= \psi(r)\|\phi\|_{L^1}\int_0^1 |k(t,s) - k(\tau,s)|ds \\
&\quad\quad +K\psi(r)|p(t) - p(\tau)| + |q(t) - q(\tau)|
\end{aligned} \tag{2.30}$$

où $p(t) = \int_0^{\sigma(t)} \phi(s)ds$.

Puisque les fonctions p, q et k sont continues sur J, elles sont uniformément continues sur J. D'où l'on déduit que

$$|\mathcal{B}x(t) - \mathcal{B}x(\tau)| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \tau$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}(S)$ est équicontinu.

D'après le Théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.2, p. 9), $\mathcal{B}(S)$ est complètement continu.

En conclusion, les conditions du Théorème 1.7, p. 11, sont satisfaites. On déduit que soit la conclusion 1 du Théorème 1.7 est réalisée, soit c'est la conclusion 2 qui l'est.

Etape 4 : On montre que la conclusion 2 n'est pas réalisée. C'est-à-dire qu'on va vérifier que l'ensemble $\xi = \{u \in X/\exists\lambda \in]0,1[: \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = u\}$ est borné. Soit $x \in \xi$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que, pour $t \in J$,

$$x(t) = \lambda q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)x(\theta(s))ds + \lambda \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds, \quad t \in J.$$

Alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |q(t)| + \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)||x(\theta(s))|ds \\ &\qquad + \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s)||g(s,x(\eta(s)))|ds \qquad (2.31) \\ &\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{\mu(t)} V|x(\theta(s))|ds + \int_0^{\sigma(t)} K\phi(s)\psi(|x(\eta(s))|)ds. \end{aligned}$$

Soit $w(t) = \max_{s\in[0,t]} |x(s)| = |x(t^*)|$ pour $t \in [0,t]$ et t^* est fixé dans $[0,t]$. On a $|x(t)| \leq w(t)\ \forall t \in J$.

D'après ce qui précède on a :

$$\begin{aligned} w(t) = |x(t*)| &\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{\mu(t^*)} V|x\theta(s))|ds + \int_0^{\sigma(t^*)} K\phi(s)\psi(|x(\eta(s))|)ds \\ &\leq \|q\|_{BM} + \int_0^{t^*} Vw(s)ds + \int_0^{t^*} K\phi(s)\psi(w(s))ds \\ &\leq \|q\|_{BM} + V\int_0^t w(s)ds + K\|\phi\|_{L^1}\int_0^t \psi(w(s))ds \\ &\leq \|q\|_{BM} + C\int_0^t [w(s) + \psi(w(s))]ds \end{aligned}$$

où $C = \max\{V, K\|\phi\|_{L^1}\}$.

Posons $u(t) = \|q\|_{BM} + C\int_0^t [w(s) + \psi(w(s))]ds, \quad t \in J$. Alors $u(0) = \|q\|_{BM}$ et $w(t) \leq u(t), \quad t \in J$.

On a alors :

$$u'(t) = C[w(t) + \psi(w(t))] \leq C[u(t) + \psi(u(t))], \ \forall t \in J.$$

Qui s'écrit encore

$$\frac{u'(t)}{u(t) + \psi(u(t))} \leq C, \quad \forall t \in J.$$

En intégrant entre 0 et t on obteint

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s) + \psi(u(s))} ds \leq \int_0^t C ds \leq C, \ t \in J.$$

En faisant un changement de variable, on obteint

$$\int_{\|q\|_{BM}}^{u(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \leq C < \int_{\|q\|_{BM}}^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}, \ t \in J.$$

De cette inégalité on conclut que

$$\exists M > 0 \ \forall t \in J : u(t) \leq M.$$

Ainsi

$$|x(t)| \leq w(t) \leq M, \ \forall t \in J;$$

ce qui implique que $\|x\|_{BM} \leq M$ et donc l'ensemble ξ est borné. La deuxième alternative du Théorème 1.7 n'est pas satisfaite et par consequent c'est l'EIF (2.27) qui admet au moins une solution. □

Discussion 2.11 La preuve ci-dessus du Théorème 2.6 est similaire à celle proposée dans [11] à ceci près : Notre hypothèse (H_3) intervient comme ceci :

- Etape 3 : Dans les majorations (2.29) et (2.30), nous avons utilisé (H_3) et nous nous sommes appuyé sur l'hypothèse (H_4) afin de majorer la fonction g.
- Etape 4 : Dans les majorations (2.31), nous avons utilisé le même procédé que celui utilisé à l'étape précédente.

Deuxième partie :

Sur la moyennisation dans les équations différentielles ordinaires et floues, et dans les inclusions différentielles ordinaires

Equations différentielles ordinaires, équations différentielles floues et inclusions différentielles ordinaires : notions préliminaires

3

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base d'existence et d'unicité des solutions pour les EDO, les EDF et les IDO, avec quelques autres propriétés (voir [3, 19, 25, 42, 45, 50, 51, 52, 66, 69]).

3.1 Equations différentielles ordinaires

3.1.1 Définitions

Soient $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 3.1 *Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur $\mathbb{U}$ est une relation du type*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

où $\dot{x} = dx/dt$.

Définition 3.2 *Soit x une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.*

1. *La fonction x est dite solution de l'équation (3.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I et si $(t, x(t)) \in \mathbb{U}$, pour tout $t \in I$.*
2. *Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$ donné. La fonction x est dite solution du problème à valeur initiale associé à l'équation (3.1) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x soit solution de l'équation sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.*

Remarque 3.1 *Pour* $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$ *donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation différentielle (3.1) est également exprimé sous l'écriture suivante :*

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.2}$$

et une solution de (3.2) est également dite solution de l'équation (3.1) à valeur initiale x_0 *à l'instant initial* t_0 *(ou encore, de condition initiale* (t_0, x_0)*).*

Définition 3.3 *Pour* $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$ *donné, une solution du problème (3.2) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

Remarque 3.2 *Si le problème (3.2) admet une solution unique, celle-ci est généralement notée par* $x = x(\cdot; t_0, x_0)$*.*

Proposition 3.1 *[25] Pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$*, le problème (3.2) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

3.1.2 Existence, unicité et prolongement des solutions

Théorème 3.1 (Existence, [25]) *Soient* $\mathbb{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. Pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$*, le problème (3.2) admet au moins une solution.*

Corollaire 3.1 ([25]) *Soient* $\mathbb{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. Si* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ *sont tels que* $\mathbb{W}$ *est fermé et borné (c-à-d compact), et* $\mathbb{V}$ *est ouvert avec* $\overline{\mathbb{V}} \subset \mathbb{U}$*, alors il existe* $\mathbb{L} > 0$ *tel que, pour toute condition initiale* $(t_0, x_0) \in \mathbb{W}$*, il existe une solution* x *du problème (3.2) définie au moins sur l'intervalle* $[t_0 - \mathbb{L}, t_0 + \mathbb{L}]$*.*

Définition 3.4 *Soient* $\mathbb{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ *une fonction. On dit que* $f = f(t, x)$ *est localement lipschitzienne en* x *si pour tout fermé et borné (c-à-d. compact)* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{U}$*, il existe une constante* $L > 0$ *telle que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

pour tous $(t, x_1) et (t, x_2)$ *dans* $\mathbb{K}$*.*

Théorème 3.2 (Unicité, [25]) *Soit* $\mathbb{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Si* $f = f(t, x) : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ *est continue et localement lipschitzienne en* x*, alors pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathbb{U}$*, le problème admet une solution unique.*

$\mathbb{U}$ étant un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on suppose que $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ est continue.

Définition 3.5 *Soit* x *une solution de l'équation (3.1) et* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle sur lequel* x *est définie.*

- *Une fonction* $\check{x}$ *est appelée prolongement de* x *si elle est définie sur un intervalle* $\check{I}$ *contenant strictement* I*, coïncide avec* x *sur* I*, et vérifie la relation (3.1) sur* $\check{I}$*.*
- *La solution* x *est dite maximale (on dit aussi no prolongeable) si elle n'admet pas de prolongement ; c'est-à-dire que l'intervalle* I *est l'intervalle maximal d'existence de la solution* x*.*

Théorème 3.3 (Prolongement, [21]) *Soit x une solution maximale de l'équation (3.1) et soit $I =]a,b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout fermé et borné (c-à-d. compact) $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{U}$, il existe $t^1_{\mathbb{W}}$ et $t^2_{\mathbb{W}}$ tels que $(t, x(t)) \notin \mathbb{W}$ pour $t \in]a, t^1_{\mathbb{W}}]$ et $t \in [t^2_{\mathbb{W}}, b[$.*

Corollaire 3.2 ([25]) *Soient x une solution maximale de l'équation (3.1) et $I =]a,b[$ son intervalle maximal d'éxistence. Alors $(t, x(t))$ va vers le bord de $\mathbb{U}$ lorsque t tend vers a et b.*

3.2 Equations différentielles floues

3.2.1 Définitions

Notons par $\mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des parties non vides, compactes et convexes de $\mathbb{R}^n$. La métrique de Hausdorff est définie sur $\mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\rho(A,B) = \max(\beta(A,B), \beta(B,A)), \quad A, B \in \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$$

où β est la semi-distance de Hausdroff :

$$\beta(U,V) = \sup_{u\in U} \delta(u,V) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in V} |u - v|.$$

L'espace métrique $(\mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n), \rho)$ est complet.

Définition 3.6 *L'ensemble des nombres flous, noté $\mathbb{E}^n$, est l'ensemble des applications $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *x est normale, c'est-à-dire qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x(u_0) = 1$;*
2. *x est convexe floue, c'est-à-dire que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$, on a :*
$$x(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(x(u), x(v));$$
3. *x est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que, pour tous $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(u_0, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition $|u - u_0| < \delta$, on a : $x(u) \leq x(u_0) + \varepsilon$*

L'élément zéro dans $\mathbb{E}^n$, noté $\hat{0}$, est définie par $\hat{0}(u) = 1$ pour $u = 0$ et $\hat{0}(u) = 0$ si $u \neq 0$.

Remarque 3.3 *Dans la définition de l'ensemble des nombres flous, il est parfois imposé aux applications $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ de vérifier, en plus des conditions de la Définition 3.6, la condition suivante : La fermeture de l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^n : x(u) > 0\}$ est compacte.*

Exemple 3.1 (Représentation d'un nombre flou) *L'expression "les nombres réels proches de zéro" peut être représentée par le nombre flou suivant :*

$$x : \mathbb{R} \to [0,1], \quad u \mapsto \frac{1}{1+u^2}.$$

Il est à noter que cette représentation n'est pas unique.

Pour $\alpha \in]0,1]$, la α-section de l'application $x \in \mathbb{E}^n$, notée $[x]^\alpha$, est définie par $[x]^\alpha = \{u \in \mathbb{R}^n : x(u) \geq \alpha\}$. La section nulle de l'application $x \in \mathbb{E}^n$ est définie par la fermeture de l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^n : x(u) > 0\}$.

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, $[x]^\alpha \in \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 3.2 (α-section) *Soit le nombre flou x défini sur l'intervalle* $[40,100]$ *de la manière suivante pour décrire la température d'une chambre :*

$$x(u) = \begin{cases} 0 & si\ 40 \leq u < 50 \\ \dfrac{u-50}{10} & si\ 50 \leq u < 60 \\ 1 - \dfrac{u-60}{10} & si\ 60 \leq u < 70 \\ 0 & si\ 70 \leq u \leq 100. \end{cases}$$

Pour $0 < \alpha \leq 1$, *les* α*-sections du nombre x sont données par :*

$$[x]^\alpha = [50 + 10\alpha, 70 - 10\alpha],\ [x]^1 = \{60\},\ [x]^{\frac{1}{2}} = [55,65]\ et\ [x]^0 = [50,70].$$

L'addition et la multiplication des nombres floues sont définies par :

$$[x+y]^\alpha = [x]^\alpha + [y]^\alpha, \quad [\lambda x]^\alpha = \lambda [x]^\alpha, \quad x,y \in \mathbb{E}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0.1].$$

L'ensemble des nombres floues $\mathbb{E}^n$ est un cône convexe sous l'addition et la multiplication.

La métrique dans $\mathbb{E}^n$ est définie par

$$D(x,y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \rho\left([x]^\alpha, [y]^\alpha\right), \quad x,y \in \mathbb{E}^n$$

où ρ est la métrique de Hausdorff.

La borne supérieure dans la définition de D peut ne pas être atteinte, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.3 *Si* $x,y \in \mathbb{E}^1$ *sont tels que*

$$[x]^\alpha = [y]^\alpha = [0,1] \quad pour \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

et

$$[x]^\alpha = 0, \quad [y]^\alpha = [0, 2(1-\alpha)] \quad pour \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1$$

alors

$$\rho([x]^\alpha, [y]^\alpha) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq \alpha < \dfrac{1}{2} \\ 2(1-\alpha) & si\ \dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Delà, on déduit que

$$D(x,y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \rho\left([x]^\alpha, [y]^\alpha\right) = 1$$

en remarquant que cette borne supérieure de $\rho([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ *n'est atteinte pour aucune valeur de* $\alpha \in [0,1]$ *.*

La métrique D est telle que :

1. $(\mathbb{E}^n, D)$ est un espace métrique complet ;
2. $D(x+z, y+z) = D(x,y)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}^n$;
3. $D(kx, ky) = |k| D(x,y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{E}^n$ et $k \in \mathbb{R}$.

Définition 3.7 *Une application $h : I \to \mathbb{E}^n$ est fortement mesurable si pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'application $h_\alpha : I \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ définie par $h_\alpha(t) = [h(t)]^\alpha$ est Lebesgue mesurable.*

Définition 3.8 *Soit $h : I \to \mathbb{E}^n$. L'intégrale de h sur I, notée par $\int_I h(t)dt$, est définie par :*

$$\begin{aligned}\left[\int_I h(t)dt\right]^\alpha &= \int_I h_\alpha(t)dt \\ &= \left\{\int_I \phi(t)dt : \ \phi : I \to \mathbb{R}^n \text{ est une selection mesurable de } h_\alpha\right\}\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in]0,1]$.

Une application fortement mesurable et intégrablement borné $h : I \to \mathbb{E}^n$ est dite intégrable sur I si $\int_I h(t)dt \in \mathbb{E}^n$.

Proposition 3.2 ([42]) *Soit $h, g : I \to \mathbb{E}^n$ des applications intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $\int_I (h(t) + g(t))dt = \int_I h(t)dt + \int_I g(t)dt;$
2. $\int_I \lambda h(t)dt = \lambda \int_I h(t)dt;$
3. $D\left(\int_I h(t)dt, \int_I g(t)dt\right) \leq \int_I D(h(t), g(t))dt.$

Définition 3.9 *Une application $h : I \to \mathbb{E}^n$ est dite continue en $t_0 \in I$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que : pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - t_0| < \delta$ on a $D(h(t), h(t_0)) < \varepsilon$.*

Une application $h : I \to \mathbb{E}^n$ est continue sur I si elle est continue en tout point $t_0 \in I$.

Proposition 3.3 ([42]) *Si $h : I \to \mathbb{E}^n$ est continue, elle est intégrable.*

Définition 3.10 *Une application $h : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est continue en $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$ tel que : pour tous $t \in I$ et $x \in \mathbb{E}^n$, vérifiant $|t - t_0| < \delta$ et $D(x, x_0) < \delta$ on a : $D(h(t,x), h(t_0, x_0)) < \varepsilon$.*

Une application $h : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est continue sur $I \times \mathbb{E}^n$ si elle est continue en tout point $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}^n$.

Soit $x, y \in \mathbb{E}^n$. S'il existe $z \in \mathbb{E}^n$ tel que $x = y + z$, on appelle z la H-différence de x et y, notée par $x - y$.

Définition 3.11 *Une application $h : I \to \mathbb{E}^n$ est différentiable en $t_0 \in I$ s'il existe $\dot{h}(t_0) \in \mathbb{E}^n$ tel que les limites*

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{h(t_0+\Delta)-h(t_0)}{h} \quad et \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{h(t_0)-h(t_0-\Delta)}{h} \tag{3.3}$$

existent et sont égales à $\dot{h}(t_0)$.

Si $h : I \to \mathbb{E}^n$ est différentiable en $t_0 \in I$, alors on appelle $\dot{h}(t_0)$ la dérivée floue de h en t_0.

Une application $h : I \to \mathbb{E}^n$ est dite différentiable sur I si elle est différentiable en tout point $t_0 \in I$.

Remarque 3.4 *La limite dans (3.3) est définie dans l'espace métrique $(\mathbb{E}^n, D)$.*

3.2.2 Existence et unicité de solutions

Soient $f : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ une fonction, avec $I = [0, a]$, $a > 0$, et $x_0 \in \mathbb{E}^n$. On considère le problème à valeur initiale suivant associé à une équation différentielle floue :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.4}$$

Définition 3.12 *Une fonction $x : I \to \mathbb{E}^n$ est dite solution de (3.4) si elle est continue et vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Théorème 3.4 (Existence, [42]) *Supposons que la fonction $f : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est continue et vérifie*

$$D(f(t,u), \hat{0}) \leq M, \quad \forall t \in I, \forall u \in \mathbb{E}^n.$$

Alors le problème (3.4) admet au moins une solution sur I.

Théorème 3.5 (Unicité, [42]) *Supposons que la fonction $f : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est continue et vérifie la condition de Lipschitz :*

$$D(f(t,u), f(t,v)) \leq KD(u,v) \quad \forall t \in I, \forall u, v \in \mathbb{E}^n.$$

Alors le problème (3.4) admet une solution unique définie sur I.

3.3 Inclusions différentielles

3.3.1 Définitions

Nous allons utiliser les notations suivantes :

-$\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\}$,

-$\mathcal{P}_p(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y$ possède la propriété "p"$\}$, où $p = f$ (fermé), $p = b$ (borné), $p = cp$ (compacte), $p = cv$ (convexe), etc.

Ainsi,

$$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ convexe}\}, \quad \mathcal{P}_f(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ fermé}\},$$
$$\mathcal{P}_b(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ borné}\}, \quad \mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ compact}\},$$
$$\mathcal{P}_{cp,cv}(X) = \mathcal{P}_{cp}(X) \cap \mathcal{P}_{cv}(X), \text{ etc.}$$

Définition 3.13 *Une fonction multivoque (dite aussi, multifonction) F d'un ensemble X vers un ensemble Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (la notation $F : X \longrightarrow 2^Y$ est aussi utilisée dans la littérature).*

Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une fonction multivoque.

Définition 3.14 *On appelle graphe de la fonction multivoque F l'ensemble*

$$Graph(F) = \Gamma_F = \{(x,y) : x \in X,\ y \in F(x)\}.$$

F est dite à graphe fermé si Γ_F est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

Définition 3.15 *On appelle image de F l'union des images $F(x)$, i.e*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

et domaine de F l'ensemble

$$DomF = \{x \in X : F(x) \neq \phi\}.$$

Définition 3.16

(a) *F est dite à valeurs fermées (resp. convexes) si $F(x) \in \mathcal{P}_f(Y)$ (resp. $F(x) \in \mathcal{P}_{cv}(Y)$) pour tout $x \in X$.*

(b) *F est dite bornée sur les bornés si l'ensemble*

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} \{F(x)\}$$

est borné dans Y pour chaque sous-ensemble $A \in \mathcal{P}_b(X)$, i.e.

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{|y| :\ y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Définition 3.17

(a) *F est dite semi-continue supérieurement (en abrégé s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y avec $F(x_0) \subseteq U$, il existe un ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on a $F(x) \subseteq U$.*

(b) *F est dite semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert $W \subset Y$:*

$$F(x_0) \cap W \neq \emptyset \Longrightarrow \exists U_{x_0} :\ \forall x \in U_{x_0} : F(x) \cap W \neq \emptyset.$$

Définition 3.18 *Soit X un espace de Banach et* $F : J \longrightarrow \mathcal{P}_{cv,cp}(X)$ *une fonction multivoque. F est dite mesurable si, pour tout* $x \in X$*, la fonction*

$$t \longrightarrow d(x, F(t)) = \inf\{|x - z| : z \in F(t)\}$$

est mesurable sur J.

Nous présentons maintenant un résultat très important en analyse multivoque : le théorème de sélection de Michael.

Définition 3.19 (Sélection) *Soit* $F : X \to P(Y)$ *une fonction multivoque. Une fonction* $f : X \to Y$ *est dite sélection de F si*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall x \in X.$$

Théorème 3.6 (Théorème de sélection de Michael, [45]) *Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et* $F : X \to P_{f,cv}(Y)$ *s.c.i. Alors il existe* $f : X \to Y$ *une selection continue de F.*

3.3.2 Existence de solutions

Définition 3.20 *Soient J un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et X un espace de Banach. Une fonction* $x : J \longrightarrow X$ *est dite absolument continue si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable* $[a_k, d_k]$ *de J, on a :*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_k |x(b_k) - x(a_k)| < \varepsilon.$$

Toute fonction absolument continue x est continue, dérivable presque partout et peut s'écrire

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)ds.$$

On désigne par $AC(J, X)$, l'espace des fonctions absolument continues sur J et à valeurs dans X.

Soit le problème à valeur initiale associé à une inclusion différentielle ordinaire

$$\dot{x} \in F(t, x) \qquad\qquad x(0) = x_0 \tag{3.5}$$

où $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction multivoque, $J = [0, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.21 *Une fonction* $x \in AC(J, \mathbb{R}^n)$ *est dite solution de (3.5) si x vérifie l'inclusion différentielle* $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ *p.p sur J et la conditions* $x(t_0) = x_0$*.*

Théorème 3.7 (Théorème de Filippov, [19]) *Soient* $y : J \to \mathbb{R}^n$ *une fonction absolument continue et* $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *une fonction multivoque. Supposons que*

i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*,* $F(\cdot, x)$ *est mesurable ;*

ii) il existe $\beta > 0$ *et une fonction Lebesgue intégrable k tels que :*

$$\forall x, z \in y(t) + \beta\mathbb{B}, \quad \rho(F(t, x), F(t, z)) \leq k(t)|x - z| \quad p.p\ t \in [0, T];$$

iii) il existe une fonction Lebesgue intégrable b telle que $d(\dot{y}(t), F(t, y(t))) \leq b(t)$.
On supposons en outre que $\chi(T) \leq \beta$, alors il existe une solution x de (3.5) telle que :

$$|x(t) - y(t)| \leq \chi(t), \quad t \in J \;\; et \quad |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| \leq k(t)\chi(t) + b(t), \quad p.p \;\; t \in J$$

où

$$\chi(t) = e^{\int_0^t k(s)ds} \left(|x_0 - y(0)| + \int_0^t b(s)ds \right).$$

Théorème 3.8 ([66]) *Soit $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque. Supposons que*

1. *La fonction multivoque $x \to F(t, x)$ est semi-continue supérieurement pour presque tout $t \in J$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une sélection mesurable $t \to f(t, x)$ vérifiant $f(t, x) \in F(t, x)$.*
3. *Il existe une fonction Lebesgue intégrable b telle que $|f(t, x)| \leq b(t), \quad \forall t \in J$.*

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy (3.5) admet au moins une solution.

Moyennisation dans les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles floues

4

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler différentes approches et quelques résultats de référence, relatifs à la méthode de moyennisation pour les EDO et EDF, puis nous présentons nos résultats élaborés dans [37, 38]. Les résultats classiques, reproduits dans ce chapitre, présentent les approches de Sanders et verhulst dans [61, 62], qui sont cités dans la thèse de Lakrib [35], puis l'approche développée par Artstein dans [2].

4.1 Présentation générale

La moyennisation est une méthode largement répandue dans la littérature concernée par la théorie des oscillations non stationnaires. Elle prend ses racines dans la mécanique céleste. Mais sous ce nom elle est habituellement attribuée à Krylov, Bogolyubov et Mitropolsky. Quelques ouvrages de référence sont Bogolyubov et Mitropolsky [6], Bogolyubov, Mitropolsky et Samoilenko [7], Hale [25], Krylov et Bogolyubov [32], Mitropolsky [46, 47], Sanders et Verhulst [61, 62] et Volosov [68].

Elle concerne, d'un point de vue asymptotique, la construction de solutions approximatives, essentiellement du premier ordre, d'EDO rapidement oscillantes en la variable temps, qui se ramènent à la forme

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ est un paramètre réel destiné à tendre vers zéro. A cette équation est associée l'EDO autonome suivante

$$\dot{y} = f^o(y) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, y, 0)d\tau \tag{4.2}$$

obtenue à partir de l'équation (4.1) en prenant la moyenne, dont on suppose l'existence, par rapport à la variable temps de son membre de droite pour $\varepsilon = 0$ et appelée équation moyennisée. Le principe de la méthode consiste alors à affirmer que le comportement d'une trajectoire de l'équation (4.1) est très proche de celui de la trajectoire de l'équation (4.2), issue de la même condition initiale (ou même d'une condition initiale proche de celle de la première trajectoire), sur des intervalles finis de temps.

L'intuition derrière cette approximation est la suivante : pour ε petit, l'équation (4.1) correspond à un champ de vecteurs dépendant du temps soumis à des oscillations très rapides au cours de son évolution. Il est donc naturel d'estimer qu'en première approximation les solutions de l'équation (4.1) obéissent uniquement à l'effet moyen du champ de vecteurs $f(t, x, 0)$. Le principe qui en découle alors consiste à ne retenir que ce qui "produit un effet", en négligeant ce qui est, par contre, "sans influence notable".

Introduisons dans l'équation (4.1) un changement dans l'échelle de temps en posant $t = \varepsilon\tau$. Celle-ci devient

$$x' = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon). \tag{4.3}$$

Faisons de même avec l'équation (4.2). L'équation moyennisée s'écrit alors

$$y' = \varepsilon f^o(y). \tag{4.4}$$

L'étude des équations de la forme (4.3), appelée forme normale, a été initiée par Bogolyubov [6]. Malgré la gêne engendrée par l'apparition explicite du paramètre ε dans l'équation moyennisée (4.4), il est devenu une tradition dans la littérature classique de formuler et discuter les résultats sur les fondements de la méthode de moyennisation pour des équations mises sous la forme (4.3).

Il est à noter que les écritures (4.1) et (4.3) sont équivalentes. L'étude du problème à l'une ou à l'autre échelle de temps t ou $\tau = t/\varepsilon$ conduit, indifféremment, aux mêmes résultats.

Dans la littérature classique, différentes techniques de calcul pour justifier les résultats de moyennisation ont été élaborées. Nous en citons deux des plus importantes :

• La décomposition dite de Bogolyubov-Hale [6, 25]. Elle consiste à introduire un changement de variable faisant apparaître l'équation (4.3) comme une perturbation (régulière) de l'équation moyennisée (4.4).

Ainsi on montre l'existence d'une fonction $u(\tau, z, \varepsilon)$, vérifiant certaines propriétés dont celle-ci : la fonction $\varepsilon u(\tau, z, \varepsilon)$ tend vers zéro, avec ε, uniformément en τ dans $\mathbb{R}$ et en z dans les compacts de $\mathbb{R}^n$; de sorte que le changement de variable, proche de l'identité

$$x = z + \varepsilon u(\tau, z, \varepsilon)$$

transforme l'équation (4.3) en l'équation

$$z' = \varepsilon f^o(z) + \varepsilon F(\tau, z, \varepsilon).$$

Puis on néglige le terme $\varepsilon F(\tau, z, \varepsilon)$, supposé tendre vers zéro, avec ε, uniformément en τ dans $\mathbb{R}$ et en z dans les compacts de $\mathbb{R}^n$, pour obtenir l'équation moyennisée (4.4).

Sous des conditions convenables, la méthode aboutit finalement à un résultat du type :

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq C\varepsilon$$

pour tout $\tau \in [0, L/\varepsilon]$ où $L > 0$ et C sont des constantes indépendantes de ε.

• Le concept de moyenne locale dû à Eckhaus [22]. Il s'agit de définir la notion de moyenne locale du second membre de l'équation (4.3). Les solutions de l'équation qui lui est associée constituent alors des solutions intermédiaires entre celles de l'équation (4.3) et l'équation moyennisée (4.4).

Ainsi l'idée est de considérer l'équation moyennisée locale associée à l'équation (4.3) donnée par

$$z' = \varepsilon f_T(\tau, z) = \varepsilon \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t, z, 0) dt$$

et de vérifier par des évaluations d'intégrales, moyennant des hypothèses convenables, qu'uniformément par rapport à $\tau \in [0, L/\varepsilon]$, $L = cte > 0$, on a d'une part

$$|x(\tau) - z(\tau)| \leq C\varepsilon T$$

et d'autre part

$$|y(\tau) - z(\tau)| \leq \frac{C\delta(\varepsilon)}{\varepsilon T}$$

où la jauge, que nous appellerons, jauge d'Eckhaus, $\delta(\varepsilon)$, définie par

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{x} \sup_{\tau \in [0, L/\varepsilon]} \varepsilon \left| \int_0^{\tau} [f(t, x) - f^o(x)] dt \right| \tag{4.5}$$

est supposée petite avec ε. Enfin, le choix du paramètre T tel que : $\varepsilon^2 T^2 = \delta(\varepsilon)$ donne le résultat recherché

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq C\delta^{1/2}(\varepsilon). \tag{4.6}$$

4.2 Approche d'Artstein

L'idée directrice de l'approche que propose Artstein dans [2] a la particularité suivante :

- Elle diffère de la décomposition de Bogolyubov-Hale [6, 25] (Section 4.1), qui se base sur un changement de variables (difféomorphisme).

- Elle rejoint le concept dû à Eckhaus [22] (Section 4.1), qui se base, lui, sur la moyenne locale et l'estimation des erreurs emploie une comparaison d'intégrales faisant intervenir la jauge (4.5).

En outre, contrairement aux autres approches, les preuves des résultats, que nous omettons ici, qui montrent les estimations, reposent sur le principe de contraction de Banach dans un espace de fonctions approprié.

4.2.1 Cas général

On considère ainsi le problème à valeur initiale associé à l'équation (4.3) en supposant, afin d'allèger l'étude, que le second membre de celle-ci est indépendant de ε. Ainsi, le problème considéré s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \tag{4.7}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée et continue. A (4.7), on associe le problème moyennisé correspondant :

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f^o(y), \qquad y(0) = x_0 \tag{4.8}$$

où la fonction moyenne f^o est définie, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, par

$$f^o(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t,y)dt \tag{4.9}$$

avec la condition que la limite dans (4.9) est uniforme en $t_0 \geq 0$.

On note que f^o peut ne pas exister. Dans le cas où elle existe, on s'intéresse alors à la détermination de nombres positifs $\Delta(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ ayant la propriété suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta(\varepsilon)/\varepsilon} \left[f(t,x) - f^o(x)\right] dt \right| \leq \eta(\varepsilon) \tag{4.10}$$

pour tout $0 \leq t_0 \leq \varepsilon^{-1}(1 - \Delta(\varepsilon))$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$. A l'échelle du temps $s = \varepsilon t$, l'inégalité (4.10) devient :

$$\frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \left| \int_{s_0}^{s_0+\Delta(\varepsilon)} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) - f^o(x) \right] ds \right| \leq \eta(\varepsilon) \tag{4.11}$$

pour tout $0 \leq s_0 \leq (1 - \Delta(\varepsilon))$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

La paire $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ est appelée : taux de moyennisation de la fonction f.

Théorème 4.1 ([2]) *On suppose que la fonction $f = f(t,x)$ est K-lipschitienne en x et est bornée par une constante M. On suppose que la moyenne f^o dans (4.9) existe et soit $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ le taux de moyennisation de f définie par (4.11). Soient x la solution de (4.7) et y la solution de (4.8). Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{2K}[(K+2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)]. \tag{4.12}$$

C'est-à-dire que l'écart entre x et y est de l'ordre de $\max(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$, uniformément sur l'intervalle $[0, 1/\varepsilon]$.

Remarque 4.1 *Pour obtenir la meilleure estimation pour le taux de convergence, il est souhaitable d'obtenir le plus petit $\Delta(\varepsilon)$ de sorte que $\eta(\varepsilon)$ dans (4.10) ou (4.11) peut être remplacé par $c\Delta(\varepsilon)$ avec c une constante indépendante de ε. Le critère (4.11) prend alors la forme suivante :*

$$\frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \left| \int_{s_0}^{s_0+\Delta(\varepsilon)} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) - f^0(x) \right] ds \right| \leq c\Delta(\varepsilon). \tag{4.13}$$

Dans ce cas on dit que $\Delta(\varepsilon)$ est le taux de moyennisation de f.

4.2.2 Cas périodique

Dans le cas où la fonction $f = f(t, x)$ est T-périodique en t, sa moyenne f^o définie par (4.8) devient, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$f^o(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, y)dt. \tag{4.14}$$

Dans ce cas, le théorème classique de moyennisation (voir [1, 61]) devient un cas particulier du résultat ci-après qui est une conséquence du Théorème 4.1 avec $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)) = (\varepsilon T, 0)$.

Théorème 4.2 ([2]) *On suppose que la fonction $f = f(t, x)$ est T-périodique en t, K-lipschitzienne en x et est bornée par M. Soient x la solution de (4.7) et y la solution de (4.8). Alors, la majoration (4.12) devient, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$,*

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon MT(2 + K)e^{2K}. \tag{4.15}$$

Exemple 4.1 *[2] Soient le problème à valeur initiale*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(1 + x^2 \cos t), \qquad x(0) = 2 \tag{4.16}$$

et le problème moyennisé qui lui est associé

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon, \qquad y(0) = 2. \tag{4.17}$$

La solution de (4.17) est $y(t) = 2 + \varepsilon t$ et elle est définie pour tout t. En posant $s = \varepsilon t$ dans celle-ci, elle s'écrit alors : $y(s) = 2 + s$. Sur $[0, 1]$, cette solution est bornée par 4.

Dans la (région) boule de centre zéro et de rayon 4 la fonction $1 + x^2 \cos t$ est bornée par 17 et la constante de Lipschitz par rapport à x est 8. D'après le Théorème 4.2, les solutions de (4.16), qui sont définies et bornées par 4 dans l'intervalle $[0, 1/\varepsilon]$, sont uniformément approchées par $y(t) = 2 + \varepsilon t$ (une estimation de l'écart est $340\pi e^{34}\varepsilon$).

4.2.3 Comparaison avec une jauge classique

Une jauge classique intervenant dans l'estimation de l'écart entre les solutions des équations (4.7) et (4.8) est représentée par l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t, x)dt - f^o(x) \right| \leq \frac{c}{T^\alpha} \tag{4.18}$$

où $c = cte. \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$, $t_0 \geq 0$ et $T > 0$.

Si une fonction f^o donnée vérifie (4.18), alors elle satisfait (4.9) et constitue donc le second membre de l'équation moyennisée (4.8).

Contrairement au résultat classique connu (voir [61, 62, 67]), qui impose des conditions fortes sur la fonction f et sa dérivée partielle par rapport à x, on montre, sous des hypothèses plus générales, le résultat suivant (avec une estimation fine de l'écart) :

Théorème 4.3 *[2] On suppose que la fonction $f = f(t,x)$ est K-lipschitienne en x et est bornée par une constante M. On suppose que (4.18) est vérifiée par une certaine fonction f^o. Soient x la solution de (4.7) et y la solution de (4.8). Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{2K}[(K+2)M + c]\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{4.19}$$

C'est-à-dire que l'écart entre x et y est de l'ordre de $\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, uniformément sur l'intervalle $[0, 1/\varepsilon]$.

4.2.4 Comparaison avec la jauge d'Eckhaus

Rappelons que la jauge d'Eckhaus, pouvant intervenir dans l'estimation de l'écart entre les solutions des équations (4.7) et (4.8), est représentée par la fonction $\delta(\varepsilon)$ définie par

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{x} \sup_{t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]} \varepsilon \left| \int_0^t (f(\tau, x) - f^o(x))\, d\tau \right| \tag{4.20}$$

où f^o est ici la fonction définie par

$$f^o(y) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t,y)dt \tag{4.21}$$

obtenue en posant $t_0 = 0$ dans (4.9).

Sous des hypothèses similaires à celles du Théorème 4.1, on retrouve dans le résultat ci-après (Corollaire 4.1) l'estimation induite par la jauge (4.20) dans l'écart entre les solutions des équations (4.7) et (4.8), qui est de l'ordre de $\delta^{1/2}(\varepsilon)$ comme indiqué dans l'estimation (4.6) (voir [43, 61, 62]).

La proposition suivante montre, en particulier, que si f^o est définie par (4.21) et si la jauge (4.20) est telle que $\delta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε, alors f^o vérifie (4.9).

Proposition 4.1 *[2] On suppose que f^o définie par (4.21) existe et que $\delta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε. Alors f^o constitue le second membre de l'équation moyennisée (4.8), c'est-à-dire que (4.9) est vérifiée ; en plus $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)) = (\delta(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, 2\delta(\varepsilon)^{\frac{1}{2}})$ détermine le taux de moyennisation de f.*

Du Théorème 4.1 et de la Proposition 4.1 on déduit la résultat suivant :

Corollaire 4.1 *[2] On suppose que la fonction $f = f(t,x)$ est K-lipschitienne en x et est bornée par une constante M. On suppose que la moyenne f^o dans (4.21) existe et que $\delta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε. Soient x la solution de (4.7) et y la solution de (4.8). Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{2K}[(K+2)r + 2]\delta(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.22}$$

4.2.5 Quelques généralisations

L'approche présentée plus haut peut être appliquer, parfois avec quelques modifications mineures, sous des conditions générales, à d'autres cas comme présenté ci-après.

• *Cas d'espace de Banach.* Afin d'obtenir les estimations souhaitées, il suffit de considérer la forme intégrale de l'équation différentielle considérée ; celle-là étant définie dans un espace de Banach [44, Chapitre 6]. Par conséquent, les résultats (y compris les estimations d'approximation) restent valable dans le cas où l'équation différentielle est définie dans d'autres espaces de Banach, comme le montre l'exemple ci-après (d'autres exemples peuvent être trouvés dans [18, 26]).

Exemple 4.2 (Cas des équations à retard) *On considère l'équation différentielle fonctionnelle à retard [26]*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x(t), x(t-h(t))) \tag{4.23}$$

où $h : \mathbb{R}_+ \to [0, h_0]$. La condition initiale associée à (4.23) est une fonction ψ_0 définie sur $[-h_0, 0]$. La dynamique induite par (4.23) est de dimension infinie, i.e. elle est dans l'espace de Banach $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h_0, 0], \mathbb{R}^n)$.

Pour une fonction $x : [-h_0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ continue et $t \geq 0$, on note $x_t(\tau) = x(\tau + t)$ pour $\tau \in [-h_0, 0]$, alors $x_t \in \mathcal{C}$. Si, pour $t \geq 0$ et $\psi \in \mathcal{C}$, on pose

$$F(t, \psi) = f(\psi(0), \psi(-h(t))) \tag{4.24}$$

alors le problème à valeur initiale, associé à l'équation (4.23) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(t, x_t), \qquad x_0 = \psi_0. \tag{4.25}$$

Si h est T-périodique, alors F est T-périodique aussi en t. L'équation moyennisée est alors déterminée par la fonction

$$F^o(x) = \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, x_t) d\tau.$$

L'équation moyennisée associée à (4.23) est l'équation à retard suivante :

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y(t), y(t-h(\tau))) d\tau. \tag{4.26}$$

Proposition 4.2 *[2] On suppose que la fonction f est K-lipschitienne et est bornée par une constante M. On suppose que h est T-périodique et que $\psi_0 \in \mathcal{C}$. Soient x la solution de (4.23) de condition initiale ψ_0 et y la solution de (4.26) de même condition initiale. Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq (2+K) M T e^{2K} \varepsilon. \tag{4.27}$$

• *Cas de la mesurabilité de la fonction f en t.* Les estimations proposées peuvent être appliquées aux équations différentielles avec second membres qui sont seulement mesurables en la variable de temps t. Ainsi, tous les résultats restent valide lorsque la continuité de $f(t,x)$ en t est remplacée par la mesurabilité [60, chapitre 2].

• *Cas des perturbations non-lipschitziènnes.* La preuve du Théoréme 4.1 se base sur les deux arguments importants suivants : le principe de la contraction (point fixe) et l'estimation des intégrales.

Pour l'argument de contraction il suffit que le second membre de l'une des deux équations (4.7) ou (4.8) soit lipschitzien. Pour l'estimation d'intégrales il est possible d'affaiblir la condition de Lipschitz comme proposé ci-après.

Dans le résultat suivant, la condition de Lipschitz sur le second membre de l'équation (4.7) est remplacée par une condition sur son module de continuité.

Rappelons qu'une fonction croissante $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est un module de continuité de la fonction continue $h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ l'inégalité $|h(x) - h(y)| \leq m(|x-y|)$ est vérifie.

Théorème 4.4 *[2] On suppose que la fonction $f = f(t,x)$ est mesurable en t, est bornée par une constante M et admet un module de continuité m en x, indépendant de t. On suppose que la moyenne f^0 dans (4.9) existe et est K-lipschitienne. Soit $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ le taux de moyennisation de f défini par (4.11). Soient x une solution de (4.7) et y la solution de (4.8). Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{2K}[m(M\Delta(\varepsilon)/2) + (K/2+2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)]. \tag{4.28}$$

C'est-à-dire que l'écart entre x et y est de l'ordre de $\max\left(m(M\Delta(\varepsilon)/2), \Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)\right)$, *uniformément sur l'intervalle $[0, 1/\varepsilon]$.*

Exemple 4.3 *[2] Soit le problème à valeur initiale suivant*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon|x|^{\frac{1}{2}} \cos t, \qquad x(0) = 0 \tag{4.29}$$

et soit le problème moyennisé qui lui est associé

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 0. \tag{4.30}$$

La solution de (4.30) est $y(t) \equiv 0$. Le second membre de l'équation (4.29) n'étant pas lipschitzien et donc il n'y a pas d'unicité de solutions, il est possible d'utiliser ici le Théorème 4.4, avec comme module de continuité la fonction $m(r) = r^{\frac{1}{2}}$. Dans la (région) boule centrée en zéro et de rayon 1, le second membre de l'équation (4.29) est borné par 1. Un taux de moyennisation pour l'équation est alors $(2\pi\varepsilon, 0)$, et d'après le Théorème 4.4, si x est une solution de (4.29), son écart de 0 est inférieur à $(\varepsilon\pi)^{\frac{1}{2}} + 4\varepsilon\pi$.

• *Cas de la dépendance de la fonction f en ε.* L'étude (avec la technique qui lui est associée) s'étend également à des problèmes à valeurs initiales, associés à des équations du type

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x,\varepsilon), \qquad x(0) = 0. \tag{4.31}$$

Le problème moyennisé associé est alors

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f^o(y,0), \qquad y(0) = x_0 \tag{4.32}$$

où la moyenne f^o est définie, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, par :

$$f^o(y,0) = \lim_{\varepsilon \to 0, T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t,y,\varepsilon)dt; \tag{4.33}$$

la limite étant supposée uniforme en $t_0 \geq 0$.

Le taux de moyennisation est défini de manière similaire au cas ε-indépendant (4.10) par l'inégalité

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta(\varepsilon)/\varepsilon} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) - f^o(x) \right] ds \right| \leq \eta(\varepsilon). \tag{4.34}$$

Tous les résultats précédemment énoncés s'étendent au cas de l'équation (4.31) comme le résultat suivant :

Théorème 4.5 *[2] On suppose que la fonction $f = f(t,x,\varepsilon)$ est K-lipschitiènne en x et est bornée par une constante M. On suppose que la moyenne f^o définie par (4.33) existe. Soit $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ le taux de moyennisation de f défini par (4.34). Soient x la solution de (4.32) et y la solution de (4.33). Alors, pour tout $t \in [0, 1/\varepsilon]$, on a*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{2K}((K+2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)). \tag{4.35}$$

4.3 Nos résultats pour les EDO

Nous reprenons le problème à valeur initiale (4.7), réécrit à l'échelle de temps $\tau = \varepsilon t$ (sans risque de confusion, nous remplaçons ici la notation τ par t) :

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right), \qquad x(0) = x_0, \tag{4.36}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Associé au problème (4.36), nous considèrons le problème moyennisé (4.8) (réécrit à l'échelle de temps $\tau = \varepsilon t$) :

$$\dot{y} = f^o(y), \qquad y(0) = x_0 \tag{4.37}$$

où la fonction $f^o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, y)d\tau = f^o(y). \tag{4.38}$$

La technique utilisée ici consiste à réécrire les problèmes (4.36) et (4.37) sous forme d'équations intégrales

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x(\tau)\right) d\tau \quad \text{et} \quad y(t) = x_0 + \int_0^t f^o(y(\tau))d\tau,$$

puis, à l'aide essentiellement de la définition de la moyenne (4.38), montrer des approximations d'intégrales conduisant à l'approximation uniforme des solutions de (4.36) par celles de (4.37).

Nos hypothèses sont moins restrictives que celles correspondant aux approches rappelées plus haut (et en général, à celles de la littérature). Principalement, nous supposons que la fonction $f = f(t, x)$ est continue et que cette continuité en x est uniforme par rapport à t.

Il est à noter qu'avec nos hypothèses, qui sont assez générales, il n'est pas possible d'obtenir des estimations de l'écart entre les solutions de (4.36) et (4.37).

4.3.1 Résultats principaux

Nos hypothèses dans le traitement du problème (4.36) sont les suivantes :

(H1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

(H2) La continuité de f en $x \in \mathbb{R}^n$ est uniforme par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) Il existe une fonction localement intégrable $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une constante $M > 0$, telles que :

$$|f(t,x)| \leq m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t)dt \leq M(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

(H4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la limite (4.38) existe.

Notre résultat principal s'énonce comme ceci :

Théorème 4.6 *Soient $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Alors, pour tous $L > 0$ et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \delta) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute solution x_ε de (4.36), il existe une solution y de (4.37) vérifiant : $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \delta$ pour tout $t \in [0, L]$.*

Remarque 4.2

– *Notons que d'après les conditions (H1) et (H3) le problème à valeur initiale (4.36) est bien définie et toutes ses solutions existent pour tout $t \geq 0$.*

– *D'après les conditions (H1)-(H4) on déduit que la moyenne de la fonction f, c'est-à-dire, la fonction $f^o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dans (H4), est continue et bornée (voir Lemme 4.1, plus bas). Donc le problème (4.37) est bien définie et toutes ces solutions existent pour tout $t \geq 0$.*

Dans le cas où le problème (4.37) admet une solution unique, nous avons le résultat suivant qui est un cas particulier du Théorème 4.6.

Corollaire 4.2 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Supposons également que :*

(H5) Le problème à valeur initiale (4.37) admet une solution unique.

Soit y la solution (unique) de (4.37). Alors, pour tous $L > 0$ et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \delta) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, toute solution x_ε de (4.36) vérifie : $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \delta$ pour tout $t \in [0, L]$.

Discussion 4.1 Si la fonction $f = f(t, x)$ est périodique ou plus généralement presque périodique en t, certaines des hypothèses imposées peuvent être affaiblies ou supprimées.

En effet, si f est périodique en t, l'hypothèse (H2) se déduit de la continuité et de la périodicité. La périodicité implique également l'hypothèse (H4). La moyenne de f est alors donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau = f^o(x) \tag{4.39}$$

où T est la période. Dans le cas où f est presque périodique en t, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la limite

$$\lim_{T\to\infty}\int_s^{s+T} f(\tau, x)d\tau = f^o(x) \tag{4.40}$$

existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$, et donc l'hypothèse (H4) est satisfaite pour $s = 0$.

Dans certains cas la fonction f est une somme de fonctions périodiques en t. Comme dans le cas périodique, la condition (H2) est alors satisfaite.

Ainsi, nous avons le résultat important suivant.

Corollaire 4.3 (Cas périodique et presque périodique) *La conclusion du Théorème 4.6 (respectivement, Corollaire 4.2) reste vraie si :*

– *la fonction $f = f(t, x)$ satisfait les conditions (H1) et (H3) (resp., (H1), (H3) et (H5)) et est périodique (ou somme de fonctions périodiques) en t.*
– *la fonction $f = f(t, x)$ satisfait les conditions (H1), (H2) et (H3) (resp., (H1), (H2), (H3) et (H5)) et elle est presque périodique en t.*

4.3.2 Lemmes techniques

Dans cette partie nous montrons quelques résultats préliminaires en prévision de la preuve du Théorème 4.6.

Lemme 4.1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfait les conditions (H1)-(H4). Alors la fonction $f^o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dans (4.38) est continue et uniformément bornée par la constante M associée à la condition (H3).*

Démonstration.

Continuité de f^o. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. D'après la condition (H2), pour tout $\xi > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| \leq \delta$ implique que

$$|f(\tau, x) - f(\tau, x_0)| \leq \xi, \qquad \forall\tau \in \mathbb{R}_+. \tag{4.41}$$

D'après (H4) on déduit que, pour tout $\eta > 0$, il existe $T_0 = T_0(x_0, x, \eta) > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$ on a

$$\begin{aligned}|f^o(x) - f^o(x_0)| \leq & \left|f^o(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau\right| \\ & + \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x_0)d\tau\right| \\ & + \left|f^o(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x_0)d\tau\right| \\ \leq & \, 2\eta + \frac{1}{T}\int_0^T |f(\tau, x) - f(\tau, x_0)|d\tau \leq 2\eta + \xi.\end{aligned}$$

Puisque la valeur de η est arbitraire, on déduit alors que $|f^o(x) - f^o(x_0)| \leq \xi$. D'où la continuité de f^o

Bornitude de f^o par M. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. De la condition (H3) on déduit que, pour tout $\eta > 0$, il existe $T_0 = T_0(x_0, \eta) > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$ on a

$$\begin{aligned}|f^o(x)| & \leq \left|f^o(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau\right| + \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau\right| \\ & \leq \eta + \frac{1}{T}\int_0^T |f(\tau, x)|d\tau \leq \eta + M.\end{aligned}$$

Puisque la valeur de η est arbitraire, on déduit alors le résultat recherché. $\square$

Lemme 4.2 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H1) et (H4). Alors, pour tous $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\alpha}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau = f^o(x).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ et $\alpha > 0$.

Cas 1 : $t = 0$. D'après la condition (H4), on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^{\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau = f^o(x).$$

Cas 2 : $t > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\alpha} & \int_{t/\alpha}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau \\ & = \frac{1}{\alpha/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau - \frac{1}{\alpha/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau \\ & = \frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon}\left(\frac{t}{\alpha} + 1\right)\int_0^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau - \frac{t}{\alpha}\frac{1}{t/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau \qquad (4.42) \\ & = \frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau \\ & + \frac{t}{\alpha}\left[\frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau - \frac{1}{t/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau\right].\end{aligned}$$

D'après la condition (H4), en peut déduire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau = f^o(x)$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{t/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau = f^o(x).$$

D'où le résultat. □

Lemme 4.3 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H1) et (H3). Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L > 0$. Alors la famille $\{x_\varepsilon\}$ de solutions du problème (4.36) converge uniformément vers une fonction continue y dans l'intervalle $[0, L]$ lorsque ε tend vers 0^+.*

Démonstration. Soit $\{x_\varepsilon\}$ la famille de solutions du problème (4.36). Pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $t, \tau \in [0, L]$ on a $|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + ML$ et $|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(\tau)| \leq M|t-\tau|$ ce qui prouve que la famille $\{x_\varepsilon\}$ est uniformément bornée et équicontinue sur $[0, L]$. D'où, d'après le Théorème d'Ascoli-Arzela, il existe une fonction continue $y : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{t\in[0,L]} |x_\varepsilon(t) - y(t)| = 0.$$

□

Lemme 4.4 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H1)-(H4). Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L > 0$. Soit $\{x_\varepsilon\}$ la famille de solutions du problème (4.36), qui converge uniformément, d'après le Lemme 4.3, vers une fonction continue y sur $[0, L]$ lorsque ε tend vers 0^+. Alors pour $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,x_\varepsilon(t))d\tau = f^o(y(t)). \tag{4.43}$$

Démonstration. Soit $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$. on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,x_\varepsilon(t))d\tau - f^o(y(t))\right| \\
&\qquad\leq \frac{\varepsilon}{\alpha}\left|\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,x_\varepsilon(t))d\tau - \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,y(t))d\tau\right| \qquad (4.44)\\
&\qquad\quad + \left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,y(t))d\tau - f^o(y(t))\right|.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.2, page 60, le second terme du membre de droite de (4.44) tend vers 0 avec ε. Pour le premier terme du membre de droite de (4.44) on écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{\alpha}\left|\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,x_\varepsilon(t))d\tau - \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,y(t))d\tau\right| \\
&\qquad = \frac{1}{\alpha}\left|\int_t^{t+\alpha} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon},x_\varepsilon(t)\right)d\tau - \int_t^{t+\alpha} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon},y(t)\right)d\tau\right| := \frac{1}{\alpha}\xi.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.3, page 61, et la condition (H2), on a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \xi = 0$. Donc on peut déduire que tous les termes du membre de droite de l'inégalité (4.44) tendent vers zéro avec ε ; ce qui achève de montrer la propriété (4.43). $\square$

Lemme 4.5 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H1)-(H4). Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L > 0$. Soit $\{x_\varepsilon\}$ la famille de solutions du problème (4.36), qui converge uniformément, d'après le Lemme 4.3, vers une fonction continue y sur $[0, L]$ lorsque ε tend vers 0^+. Alors, pour tout $t \in [0, L]$, on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{t\in[0,L]} \left| \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_0^t f^o(y(\tau))d\tau \right| = 0.$$

Démonstration. Soit $L > 0$ et $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_m < ... < t_p \leq L < t_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$ une partition de $[0, L]$ avec $\alpha = \alpha(\varepsilon) := t_{m+1} - t_m, m = 0, \cdots, p$ et $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \alpha = 0$. Soit $t \in [t_m, t_{m+1}]$, $m = 0, \cdots, p$. Alors

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_0^t f^o(y(\tau))d\tau \right| \\ &\quad \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^o(y(\tau))d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_m}^{t} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_{t_m}^{t} f^o(y(\tau))d\tau \right|. \end{aligned} \tag{4.45}$$

D'après la condition (H3) et le Lemme 4.1 on a :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_m}^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_{t_m}^t f^o(y(\tau))d\tau \right| \\ &\quad \leq \int_{t_m}^t \left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) \right| d\tau + \int_{t_m}^t |f^o(y(\tau))| \, d\tau \leq 2M\alpha. \end{aligned}$$

Pour tout $i = 0, ..., m-1$ et $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$, par la condition (H3) on peut déduire que $|x_\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(t_i)| \leq M\alpha$ et d'après la condition (H2) et la continuité de f^o (Lemme 4.1, page 59), on a

$$\left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) - f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t_i)\right) \right| \leq \gamma_i = \gamma_i(\varepsilon)$$

et

$$|f^o(y(\tau)) - f^o(y(t_i))| \leq \delta_i = \delta_i(\varepsilon)$$

avec $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \gamma_i = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_i = 0$. D'après (4.45) on a :

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_0^t f^o(y(\tau))d\tau \right| \\ &\quad \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t_i)\right) d\tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^o(y(t_i))d\tau \right| \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma_i + \delta_i) d\tau + 2M\alpha. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Pour tout $i = 0, ..., m-1$, on a :

$$\begin{aligned} \beta_i &:= \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t_i)) d\tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^o(y(t_i)) d\tau \right| \\ &= \alpha \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_i/\varepsilon}^{t_i/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x_\varepsilon(t_i)) \, d\tau - f^o(y(t_i)) \right| := \alpha . \varrho_i \leq \alpha \varrho_m \end{aligned}$$

où $\varrho_m = \max\{\varrho_i = \varrho_i(\varepsilon) : i = 0, ..., m-1\}$ avec $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varrho_i = 0$.
Alors :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \leq \varrho_m \sum_{i=0}^{m-1} \alpha = \varrho_m \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) = \varrho_m t \leq \varrho_m L.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma_i + \delta_i) d\tau \leq \eta_m \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau = \eta_m t \leq \eta_m L,$$

où $\eta_m = \eta_m(\varepsilon) = \max\{\gamma_i + \delta_i : i = 0, ..., m-1\}$ avec $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (\gamma_i + \delta_i) = 0$.
Finalement, d'après (4.46) on obtient :

$$\sup_{t \in [0,L]} \left| \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right| \leq (\varrho + \eta) L + 2M\alpha \tag{4.47}$$

où $\varrho = \max\{\varrho_m : m = 0, ..., p-1\}$ et $\eta = \max\{\eta_m : m = 0, ..., p-1\}$. Puisque le second membre de (4.47) tend vers zéro avec ε, le lemme est prouvé. □

4.3.3 Preuve du Théorème 4.6

Supposons que les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites. Soient $L > 0$ et $\{x_\varepsilon\}$ la famille de solutions du problème (4.36). D'après le Lemme 4.3, page 61, il existe une fonction continue $y : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{t \in [0,L]} |x_\varepsilon(t) - y(t)| = 0. \tag{4.48}$$

Pour tout $t \in [0, L]$, la fonction y est telle que :

$$\begin{aligned} &\left| y(t) - x_0 - \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |y(t) - x_\varepsilon(t)| + \left| x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,L]} |y(t) - x_\varepsilon(t)| \\ &\quad + \sup_{t \in [0,L]} \left| \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau - \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right|. \end{aligned} \tag{4.49}$$

D'après (4.48) et le Lemme 4.5, page 62, le second membre de (4.49) tend vers zéro avec ε. D'où l'on déduit que la fonction y est une solution du problème (4.37). □

4.4 Nos résultats pour les EDF

4.4.1 Rappel d'un résultat classique de référence

On considère le problème à valeur initiale, associé à une EDF perturbée, du type :

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) \qquad x(0) = x_0. \tag{4.50}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $x_0 \in \mathbb{E}^n$ espace des nombres flous et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Associé au problème (4.50), on considère le problème moyennisé suivant :

$$\dot{y} = \varepsilon f^o(y), \qquad y(0) = x_0, \tag{4.51}$$

où la fonction $f^o : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est définie, pour tout $x \in \mathbb{E}^n$, par

$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x)d\tau, f^o(x)\right) = 0. \tag{4.52}$$

Théorème 4.7 *[52] On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{E}^n\}$ les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H1) La fonction $f = f(t,x)$ est continue, uniformément bornée par une constante M et satisfait la condition de Lipschitz λ ; i.e : $\forall t \geq 0$, $\forall x, x_1, x_2 \in D$,

$$D(f(t,x), \hat{0}) \leq M, \qquad D(f(t,x_1), f(t,x_2)) \leq \lambda D(x_1,x_2);$$

(H2) la limite (4.52) existe uniformément par rapport à x ;

(H3) pour tout $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, la solution de (4.51) entourée d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, est contenue dans le domaine D.

Alors pour tous $\eta > 0$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$ on a :

$$D(x(t), y(t)) \leq \eta. \tag{4.53}$$

4.4.2 Résultat principal

Nous reprenons le problème (4.50) avec $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$, $\mathbb{U}$ étant un ouvert de $\mathbb{E}^n$, $x_0 \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Associé au problème (4.50) nous considérons le problème moyennisé (4.51) où la fonction $f^o : \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$ est définie par la limite (4.52).

Comme pour le cas des EDO, la technique que nous utilisons consiste à réécrire les problèmes (4.50) et (4.51) sous forme d'équations intégrales puis, moyennant la définition de la moyenne (4.52), nous montrons des approximations d'intégrales conduisant à l'approximation uniforme des solutions de (4.50) par celles de (4.51).

Les conditions que nous supposons dans cette partie sont moins restrictives que celles imposées dans le Théorème 4.7, en particulier, et de celles de la littérature, en général.

Nous considérons ainsi, associées aux problèmes (4.50) et (4.51), les conditions suivantes :

(H_1) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$ dans (4.50) est continue.

(H_2) Il existe une fonction localement intégrable $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une constante $M > 0$ telles que :

$$D(f(t,x),\hat{0}) \leq m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{U}$$

avec

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t)dt \leq M(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_1 \in \mathbb{R}_+.$$

(H_3) Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour toutes les fonctions continues $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{U}$ et tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, t_1 \leq t_2$, on a

$$D\left(\int_{t_1}^{t_2} f(\tau,u(\tau))d\tau, \int_{t_1}^{t_2} f(\tau,v(\tau))d\tau\right) \leq \lambda \int_{t_1}^{t_2} D(u(\tau),v(\tau))d\tau. \tag{4.54}$$

(H_4) Pour tout $x \in \mathbb{U}$, la limite (4.52) existe.

Théorème 4.8 *Suposons que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Soient $x_0 \in \mathbb{U}$ et x_ε une solution de (4.50) et $I_\varepsilon = [0, \omega_\varepsilon)$, $0 < \omega_\varepsilon \leq \infty$ son intervalle positif maximal de définition. Soit y la solution (unique) de (4.51) et $J = [0, \omega_0)$, $0 < \omega_0 \leq \infty$ son intervalle maximal de définition. Alors, pour tous $L > 0, L \in I_\varepsilon \cap J$ et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \delta) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ on a :*

$$D(x_\varepsilon(t), y(t)) < \delta, \quad \forall t \in [0, L].$$

Discussion 4.2 Les hypothèses proposées dans le Théorème 4.8 sont plus générales que celles imposées dans le Théorème 4.7. En effet au lieu de la conditions de Lipschitz sur la fonction f nous supposons que c'est son intégrale qui est lipschitzienne et au lieu de la condition d'uniforme bornitude nous supposons que la fonction f est bornée par une fonction localement intégrable.

D'autre part, au lieu de considérer un domaine D quelconque, puis imposer la condition (H3) dans le Théorème 4.7, il suffit de considérer un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{E}^n$; ce qui rend l'hypothèse (H3) en question automatiquement vérifiée.

4.4.3 Lemmes techniques

Comme pour le cas des EDO, nous montrons quelques résultats utiles pour la suite et tout particulièrement pour la preuve du Théorème 4.8.

Lemme 4.6 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H2)-(H4). Alors la fonction moyenne $f^o : \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$ dans (4.52) est uniformément bornée par la constante M définie dans la condition (H_2), c'est-à-dire que, $D(f^o(x),\hat{0}) \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{U}$, et elle satisfait la condition de Lipschitz avec la constante λ définie dans la condition (H_3).*

Démonstration.

- *Bornitude de f^o par M.* La preuve est identique à celle du lemme 4.1, page 59.

-*f^o est lipschitzienne.* Soit $x, x' \in \mathbb{U}$. D'après les conditions (H_3) et (H_4) on peut déduire que, pour tout $\eta > 0$, il existe $T_0 = T_0(x, x', \eta) > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$ on a :

$$\begin{aligned} D(f^o(x), f^o(x')) &\leq D\left(f^o(x), \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x)d\tau\right) \\ &\quad + \frac{1}{T}D\left(\int_0^T f(\tau, x)d\tau, \int_0^T f(\tau, x')d\tau\right) \\ &\quad + D\left(f^o(x'), \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x')d\tau\right) \\ &\leq 2\eta + \frac{1}{T}\lambda\int_0^T D(x, x')d\tau = 2\eta + \lambda D(x, x'). \end{aligned}$$

Puisque la valeur de η est arbitraire, on déduit alors que :

$$D(f^o(x), f^o(x')) \leq \lambda D(x, x').$$

□

Lemme 4.7 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{E}^n$ une fonction satisfaisant les conditions (H1) et (H4). Alors, pour tous $x \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$ et $\alpha > 0$, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x)d\tau, f^o(x)\right) = 0.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du Lemme 4.2, page 60. □

Le corollaire suivant est une conséquence du Lemme 4.7

Corollaire 4.4 *Supposons que la fonction f dans (4.50) satisfait les conditions (H_1)-(H_4). Soient $x_0 \in \mathbb{U}$, y la solution (unique) de (4.51) et $J = [0, w_0[$, $0 < w_0 \leq \infty$ son intervalle maximal de définition. Soit $L > 0$ tel que $L \in J$. Alors, pour tous $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, y(t))d\tau, f^o(y(t))\right) = 0. \tag{4.55}$$

Lemme 4.8 *Supposons que la fonction f dans (4.50) satisfait les conditions (H_1)-(H_4). Soient $x_0 \in \mathbb{U}$, y la solution (unique) de (4.51) et $J = [0, w_0[$, $0 < w_0 \leq \infty$ son intervalle maximal de définition. Soit $L > 0$ tel que $L \in J$. Alors, pour tout $t \in [0, L]$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0, L]} D\left(\int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right)d\tau, \int_0^t f^o(y(\tau))d\tau\right) = 0.$$

Démonstration. Le principe de la démonstation est identique à celui du Lemme 4.5, page 62. □

4.4.4 Preuve du Théorème 4.8

Supossons que les conditions du Théorème 4.8 sont satisfaites. Pour tout $t \in [0, L] \subset I_\varepsilon \cap J$, utilisons la condition (H_3) pour obtenir :

$$\begin{aligned} D(y(t), x_\varepsilon(t)) &= D\left(\int_0^t f^o(y(\tau))d\tau, \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right)d\tau\right) \\ &\leq D\left(\int_0^t f^o(y(\tau))d\tau, \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right)d\tau\right) \\ &\quad + D\left(\int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right), \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right)d\tau\right) \\ &\leq \sigma + \lambda \int_0^t D(y(\tau), x_\varepsilon(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{4.56}$$

où

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) := \sup_{t\in[0,L]} D\left(\int_0^t f^o(y(\tau))d\tau, \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right)d\tau\right).$$

D'après le Lemme 4.8, page 66, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma = 0$. Moyennant le Lemme de Gronwall et l'inégalité (4.56) on déduit que :

$$D(y(t), x_\varepsilon(t)) \leq \sigma e^{\lambda t} \leq \sigma e^{\lambda L}$$

pour obtenir finalement :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[0,L]} D(y(t), x_\varepsilon(t)) = 0.$$

□

Moyennisation dans les inclusions différentielles ordinaires

5

Dans ce chapitre, après un rappel de quelques résultats classiques de référence dûs à Plotnikov [5, 28, 53, 56], nous montrons et discutons quelques résultats de moyennisation pour certaines inclusions différentielles perturbées [8] sous des conditions plus faibles que celles de la littérature (voir [5, 28, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59]).

5.1 Rappel de résultats classiques

Nous présentons ici les résultats de Plotnikov sur la justification de la méthode de moyennisation dans le cadre des inclusions différentielles ordinaires sur des intervalles de temps finis. Le cas où la moyenne n'existe pas est également présenté.

5.1.1 Moyennisation totale

Soit le problème à valeur initiale, associé à une inclusion différentielle ordinaire perturbée, du type :

$$\dot{x} \in \varepsilon F\left(t, x\right), \qquad x(0) = x_0 \tag{5.1}$$

où $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ un petit paramètre et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction multivoque. Associé au problème (5.1), on considère le problème moyennisé suivant :

$$\dot{y} \in \varepsilon \overline{F}(y), \qquad y(0) = x_0 \tag{5.2}$$

où

$$\overline{F}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt. \tag{5.3}$$

L'intégrale dans (5.3) est compris dans le sens d'Aumann et la convergence dans le sens de la métrique de Hausdorff.

• **Cas où F est continue**

Théorème 5.1 ([53, 56]) *On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) La fonction multivoque $F = F(t,x)$ est continue, uniformément bornée par une constante M et satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x ;

(H2) la limite (5.3) existe uniformément par rapport à x ;

(H3) pour tout $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.2), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0,\rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$ on a les énoncés suivants :

1. *Pour toute solution y de (5.2), il existe une solution x de (5.1) telle que*
$$|x(t) - y(t)| \leq \eta. \tag{5.4}$$
2. *Pour toute solution x de (5.1), il existe une solution y de (5.2) telle que l'inégalité (5.4) soit vérifiée.*

Remarque 5.1 *La condition (H3) peut être affaiblie et remplacée par la suivante :*

(H3') Pour tout $x_0 \in D$, les solutions de (5.2), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans D, pour $t \in [0, L^*/\varepsilon]$.

Dans ce cas, la conclusion du Théorème 5.1 devient alors :
Pour tous $\eta \in]0,\rho]$ et $L \in]0, L^*]$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que, pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$, les énoncés 1. et 2. du Théorème 5.1 sont vrais.

Dans le cas où F n'est pas uniformément bornée et qu'il n'y a pas convergence uniforme dans (H2), Plotnikov a prouvé le théorème suivant :

Théorème 5.2 ([53, 56]) *On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) La fonction multivoque $F = F(t,x)$ est continue et satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x ;

(H2) la limite (5.3) existe pour tout $x \in D$;

(H3) pour tous $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.2), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0,\rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L, x_0) > 0$ tel que, pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$ les énoncés 1. et 2. du Théorème 5.1 sont vrais.

Exemple 5.1 ([28]) *Soit le problème à valeur initiale suivant :*

$$\dot{x} \in \{\varepsilon a x \sin t, a \in [1,2]\}, \qquad x(0) = x_0. \tag{5.5}$$

Le problème moyennisé associé est alors

$$\dot{y} = 0, \qquad y(0) = x_0.$$

Nous avons

$$|x(t) - y(t)| = |x_0 e^{\varepsilon a \int_0^t \sin(s)ds} - x_0| = |x_0| \left(e^{\varepsilon a(1-\cos(t))} - 1 \right). \tag{5.6}$$

Le problème (5.5) ne satisfait pas les conditions du Théorème 5.1. Par contre, les conditions du Théorème 5.2 sont satisfaites. En effet, le second membre de (5.5) n'est pas uniformément borné et

$$\rho \left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t,x)dt, \overline{F}(x) \right) \leq \frac{2|x|}{T} \int_0^T \sin t dt = \frac{2|x|}{T}(1 - \cos T) \tag{5.7}$$

est majoré par $\frac{4|x|}{T}$ *qui tend vers* 0 *lorsque* $T \to \infty$. *Mais la valeur* $T(\delta)$ *dépend de* x. *Ainsi, la condition de la convergence uniforme dans (5.7) n'est pas vérifiée. D'après (5.6), il existe* $\varepsilon^o(\eta, L, x_0) > 0$ *tel que pour tous* $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ *et* $t \in]0, L/\varepsilon]$ *l'estimation* $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ *est vraie. Par exemple, on peut prendre* $\varepsilon^o = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\eta}{|x_0|} \right)$. *Mais pour* η *et* L *fixés, la fonction* $\varepsilon_0(\eta, L, x_0) \to 0$ *lorsque* $|x_0| \to \infty$, *et donc pour (5.6) il ne peut y avoir d'estimation uniforme par rapport à* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si l'application $F = F(t,x)$ est périodique en t, il est possible d'obtenir une meilleure estimation.

Théorème 5.3 ([28]) *On suppose que dans le domaine* $Q = \{t \geq 0, \ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *les conditions (H1) et (H3) sont satisfaites et la fonction multivoque* $F = F(t,x)$ *est* 2π*-périodique en* t. *Alors, pour tout* $L > 0$, *il existe* $\varepsilon^o(L) > 0$ *et* $C(L) > 0$ *tels que pour tous* $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ *et* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *on a les énoncés suivants qui sont vérifiés :*

1. *Pour toute solution* y *de (5.2), il existe une solution* x *de (5.1) telle que*

$$|x(t) - y(t)| \leq C\varepsilon. \tag{5.8}$$

2. *Pour toute solution* x *de (5.1), il existe une solution* y *de (5.2) telle que l'inégalité (5.8) est vérifiée.*

• Cas où F est semi-continue supérieurement

Plotnikov a également considéré le cas où $F = F(t,x)$ n'est pas continue en x mais seulement semi-continue supérieurement en x.

Théorème 5.4 *[5] On suppose que dans le domaine* $Q = \{t \geq 0, \ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *les conditions suivantes sont vérifiées.*

(H1) La fonction multivoque $F : Q \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *est mesurable en* t, *semi-continue supérieurement en* x, *uniformément bornée par une fonction* M *vérifiant, pour tous* $t_2 > t_1 \geq 0$, *l'inégalité suivante :*

$$\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leq M_0(t_2 - t_1);$$

(H2) la limite (5.3) existe uniformément par rapport à x ;

(H3) la fonction multivoque $\overline{F}$ est lipschitziènne ;

(H4) pour tous $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.2), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0, \rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et toute solution x de (5.1), il existe une solution y de (5.2) telle que, pour tout $t \in [0, L/\varepsilon]$,

$$|y(t) - x(t)| \leq \eta. \tag{5.9}$$

Remarque 5.2 *Seule une approximation unilatérale est obtenue dans le Théorème 5.4 : les solutions de (5.1) sont approximées par celles de (5.2), mais pas la réciproque.*

5.1.2 Cas où la moyenne n'existe pas

• Cas où des sous et sur moyennes existent

Dans [5, 59] Plotnikov a considéré le cas où la limite (5.3) n'existe pas, mais il existe des fonctions multivoques $F^-, F^+ : D \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\lim_{T\to\infty} \beta \left(F^-(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(t,x)dt \right) = 0 \tag{5.10}$$

et

$$\lim_{T\to\infty} \beta \left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t,x)dt, F^+(x) \right) = 0 \tag{5.11}$$

où β est la semi-distance au sens de Hausdroff :

$$\beta(A, B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} |a - b|.$$

Associé au problème (5.1) on considère les problèmes suivants :

$$\dot{x}^- \in \varepsilon F^-(x^-), \qquad x^-(0) = x_0 \tag{5.12}$$

et

$$\dot{x}^+ \in \varepsilon F^+(x^+), \qquad x^+(0) = x_0. \tag{5.13}$$

Le premier résultat ci-après concerne l'approximation des solutions de (5.12) par celles de (5.1).

Théorème 5.5 *[59] On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) la fonction multivoque $F = F(t, x)$ est mesurable en t, satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x et est uniformément bornée par une constante M ;

(H2) la fonction multivoque F^- satisfait une condition de Lipschitz et est uniformément bornée par la constante M ;

(H3) la limite (5.10) existe uniformément par rapport à x ;

(H4) pour tous $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.12), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0, \rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que, pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$, pour toute solution x^- de (5.12), il existe une solution x de (5.1) telle que

$$|x^-(t) - x(t)| \leq \eta. \tag{5.14}$$

Le résultat suivant apporte une approximation des solutions de (5.13) par celles de (5.1).

Théorème 5.6 *[59] On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) la fonction multivoque $F = F(t, x)$ est mesurable en t, satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x et est uniformément bornée par une constante M ;

(H2) la fonction multivoque F^+ satisfait une condition de Lipschitz et est uniformément bornée par la constante M ;

(H3) la limite (5.11) existe uniformément par rapport à x ;

(H4) pour tous $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.13), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0, \rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$, pour toute solution x^+ de (5.13), il existe une solution x de (5.1) telle que

$$|x^+(t) - x(t)| \leq \eta. \tag{5.15}$$

Remarque 5.3 *Seules des approximations unilatérales sont obtenues dans les Théorèmes 5.5 et 5.6.*

• Cas où une moyenne partielle existe

Dans [57] Plotnikov a considéré le cas où la limite (5.3) n'existe pas, mais une fonction multivoque $\overline{F} : D \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \rho \left(\int_0^T F(t, x) dt, \int_0^T \overline{F}(t, x) dt \right) = 0 \tag{5.16}$$

existe. Alors, associé au problème (5.1), il considère le problème partiellement moyennisé suivant :

$$\dot{y} \in \varepsilon \overline{F}(t, y), \qquad y(0) = x_0 \tag{5.17}$$

et il montre le résultat suivant qui donne une approximation des solutions de (5.17) par celles de (5.1) et inversement (approximation bilatérale).

Théorème 5.7 *[57] On suppose que dans le domaine $Q = \{t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) Les fonctions multivoques $F = F(t, x)$ et $\overline{F} = \overline{F}(t, x)$ sont continues, uniformément bornées par une constante M et satisfont une condition de Lipschitz par rapport à x ;

(H2) la limite (5.16) existe uniformément par rapport à x ;

(H3) pour tous $x_0 \in D$ et $t \geq 0$, les solutions de (5.17), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, sont contenues dans le domaine D.

Alors, pour tous $\eta \in]0, \rho]$ et $L > 0$, il existe $\varepsilon^o(\eta, L) > 0$ tel que, pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^o]$ et $t \in [0, L/\varepsilon]$, on a les énoncés suivants qui sont vérifiés :

1. *Pour toute solution y de (5.17), il existe une solution x de (5.1) telle que*

$$|x(t) - y(t)| \leq \eta. \tag{5.18}$$

2. *Pour toute solutions x de (5.1), il existe une solution y de (5.17) telle que l'inégalité (5.18) est vérifiée.*

Remarque 5.4 *Si les fonctions multivoques $F = F(t, x)$ et $\overline{F} = \overline{F}(t, x)$ sont périodiques en t alors dans l'estimation (5.18), il est possible de remplacer η avec $C\varepsilon$ où C est une constante indépendante de ε.*

5.2 Nos résultats pour les IDO

Soit $\mathbf{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbf{U}$ et $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque. Soit $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Nous reprenons le problème à valeur initiale (5.1), réécrit à l'échelle de temps $\tau = \varepsilon t$ (sans risque de confusion, nous remplaçons ici la notation τ par t) :

$$\dot{x}(t) \in F\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t)\right), \qquad x(0) = x_0 \tag{5.19}$$

sur l'intervalle de temps fini $[0, L]$, $L = cte. > 0$. Associé au problème (5.19), nous considèrons le problème moyennisé (5.2) (réécrit à l'échelle de temps $\tau = \varepsilon t$) :

$$\dot{y}(t) \in \overline{F}(y(t)), \qquad y(0) = x_0 \tag{5.20}$$

où la fonction moyenne multivoque $\overline{F} : \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est définie par la limite (5.3) et que nous reprenons ici :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, x) d\tau =: \overline{F}(x). \tag{5.21}$$

5.2.1 Résultats principaux

Associé aux problèmes (5.19) et (5.20), nous considèrons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour tout $x \in \mathbf{U}$, la fonction multivoque $F(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est mesurable.

(H2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction multivoque $F(t, \cdot) : \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est continue.

(H3) La continuité de la fonction multivoque $F = F(t, x)$ en x est uniforme par rapport à t.

(H4) Il existe une fonction localement Lebesgue intégrable $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une constante $B > 0$ telles que

$$\|F(t, x)\| \leq b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbf{U}$$

avec

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t)dt = B.$$

(H5) Pour tout $x \in \mathbb{U}$, la limite (5.21) existe.

(H6) Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour toutes les fonctions continues $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{U}$ et tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, t_1 \leq t_2$, on a :

$$\rho\left(\int_{t_1}^{t_2} F(\tau, u(\tau))d\tau, \int_{t_1}^{t_2} F(\tau, v(\tau))d\tau\right) \leq \lambda \int_{t_1}^{t_2} |u(\tau) - v(\tau)|d\tau. \tag{5.22}$$

Discussion 5.1 Les hypothèses que nous imposons sont plus générales que celles correspondant aux différents résultats de Plotnikov, rappelés plus haut. En effet au lieu de la condition d'uniforme bornitude de la fonction f nous supposons qu'elle est bornée par une fonction admettant une moyenne, et au lieu de la condition de Lipschitz sur f, nous supposons que c'est son intégrale qui vérifie une condition de Lipschitz.

D'autre part, au lieu de considérer un domaine D quelconque, puis imposer aux solutions de (5.20), entourées d'un voisinage tubulaire de rayon ρ donné, d'être contenues dans le domaine D, il suffit de considérer un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$; ce qui rend l'hypothèse en question automatiquement vérifiée.

Notre premier résultat important s'énonce comme ceci :

Théorème 5.8 *Soient $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque et $x_0 \in \mathbf{U}$. Supposons que les conditions (H1)-(H5) sont satisfaites. Alors, pour tous $L > 0$ et $\mu > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \mu) > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute solution x_ε de (5.19) définie sur $[0, L]$, il existe une solution y de (5.20) tel que y est définie sur $[0, L]$ et vérifie $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \mu$ pour tout $t \in [0, L]$.*

Nous notons que sous les hypothèses (H_2)-(H_3) il est seulement possible d'obtenir une approximation unilatérale, c'est-à-dire l'approximation des solutions du problèmes (5.19) par celles du problème moyennisé (5.20) (comme indiqué dans le Théorème 5.8). L'approximation inverse est, en général, fausse, même pour les équations différentielles ordinaires, comme il est montré dans l'exemple suivant :

Exemple 5.2 *On considère le problème à valeur initiale*

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)} + \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad x(0) = 0. \tag{5.23}$$

Le problème moyennisé associé est

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)}, \qquad y(0) = 0. \tag{5.24}$$

Il n'y a aucune solution du problème (5.23) qui approxime la solution triviale $y(t) \equiv 0$ du problème moyennisé (5.24).

Si le problème (5.20) admet une solution unique (dans ce cas l'inclusion différentielles (5.20) se comporte comme une équation différentielle ordinaire), cette solution est approximée par toutes les solutions du problème (5.19) comme il est énoncé dans le résultat suivant :

Théorème 5.9 *Soient $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque et $x_0 \in \mathbf{U}$. Supposons que les conditions (H1)-(H5) sont vérifiées. Supposons que le problème à valeur initiale (5.20) admet une solution unique, notée y. Alors, pour tout $L > 0$ tel que y est définie sur $[0, L]$ et tout $\mu > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \mu) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, toute solution x_ε de (5.19) est définie sur $[0, L]$ et vérifie $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \mu$ pour $t \in [0, L]$.*

Si dans le Théorème 5.8, au lieu des hypothèses (H1)-(H5) on considère les hypothèses (H1), (H4)-(H6), la conclusion du Théorème 5.8 reste vraie, c'est-à-dire que l'approximation des solutions du problème (5.19) par celles du problème moyennisé (5.20) est vérifiée (voir (i) dans le Théorème 5.10 si dessous). En outre l'approximation inverse est maintenant satisfaite. D'où :

Théorème 5.10 *Soient $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque et $x_0 \in \mathbf{U}$. Supposons que les hypothèses (H1), (H4)-(H6) sont vérifiées. Alors, pour tous $L > 0$ et $\mu > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, L, \mu) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour toute solution x_ε de (5.19) qui est définie sur $[0, L]$, il existe une solution y de (5.20) telle que y est définie sur $[0, L]$ et satisfait $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \mu$ pour tout $t \in [0, L]$

(ii) Pour toute solution y de (5.20) qui est définie sur $[0, L]$, il existe une solution x_ε de (5.19) telle que x_ε est définie sur $[0, L]$ et satisfait $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \mu$ pour tout $t \in [0, L]$.

Pour montrer les Théorèmes 5.8 et 5.10 nous devons établir des résultats préliminaires. Ce qui est fait dans la section qui suit.

La preuve du Théorème 5.9 est basée sur le résultat du Théorème 5.8 et la propriètè du prolongement des solutions des inclusions différentielles ordinaires.

5.2.2 Lemmes techniques

Dans cette partie du chapitre, nous montrons quelques résultats préliminaires intervenant dans les preuves des Théorèmes 5.8 et et 5.10.

Lemme 5.1 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque.*

(i) Si F satisfait les hypothèses (H1)-(H5), alors sa moyenne $\overline{F}$ dans l'hypothèse (H5) est continue et uniformément bornée par la constante B définie dans l'hypothèse (H4).

(ii) Si F satisfait les hypothèses (H1) et (H4)-(H6), alors sa moyenne $\overline{F}$ dans l'hypothèse (H5) est uniformément bornée par la constante B définie dans l'hypothèse (H4) et satisfait la condition de Lipschitz avec la constante λ définie dans l'hypothèse (H6) comme constante de Lipschitz.

Démonstration.

(i) Supposons que F vérifie les conditions (H1)-(H5).

1. *Uniforme bornitude de $\overline{F}$ par la constante B.* La preuve est identique à celle du Lemme 4.1, page 59.
2. *Continuité de $\overline{F}$.* La preuve est similaire à celle du Lemme 4.1, page 59.

(ii) Supposons que F vérifie les hypothèses (H1) et (H4)-(H6).

1. *Uniforme bornitude de $\overline{F}$ par la constante B.* La preuve est la même que celle dans (i).
2. *$\overline{F}$ est lipschitzienne.* La preuve est identique à celle du Lemme 4.6, page 65.

□

Lemme 5.2 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque. Supposons que F vérifie les hypothèses (H1) et (H4)-(H5). Alors, pour tous $x \in \mathbf{U}$, $t \geq 0$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} F(\tau, x) d\tau, \overline{F}(x) \right) = 0.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du Lemme 4.2, page 60. □

Lemme 5.3 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque. Supposons que F vérifie les hypothèses (H1)-(H5) ou (H1) et (H4)-(H6). Soit $x_0 \in \mathbf{U}$ et $L > 0$.*

(i) Si une solution y du problème (5.20) est définie sur $[0, L]$, alors pour tous $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} F(\tau, y(t)) d\tau, \overline{F}(y(t)) \right) = 0.$$

(ii) Si la famille $\{x_\varepsilon\}$ des solutions du problème (5.19) est définie et converge uniforément sur $[0, L]$ vers une fonction continue $\widetilde{x}_0$ lorsque ε tend vers zéro, alors pour tous $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} F(\tau, x_\varepsilon(t)) d\tau, \overline{F}(\widetilde{x}_0(t)) \right) = 0.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du Lemme 4.4, page 61. □

Lemme 5.4 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{U} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ une fonction multivoque. Supposons que F vérifie les hypothèses (H1)-(H5) ou (H1) et (H4)-(H6). Soit $x_0 \in \mathbf{U}$ et $L > 0$.*

(i) Si une solution y du problème (5.20) est définie sur $[0, L]$, alors pour tous $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0,L]} \rho \left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right) d\tau, \int_0^t \overline{F}(y(\tau)) d\tau \right) = 0.$$

(ii) Si la famille $\{x_\varepsilon\}$ des solutions du problème (5.19) est définie et converge uniformément sur $[0, L]$ vers une fonction continue $\widetilde{x}_0$ lorsque ε tend vers zéro, alors pour tous $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0,L]} \rho \left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau, \int_0^t \overline{F}(\widetilde{x}_0(\tau)) d\tau \right) = 0.$$

Démonstration.

Cas 1 : F vérifie les hypothèses (H1)-(H5).

Soit $x_0 \in \mathbf{U}$ et $L > 0$. Nous allons montrer (i) et (ii). Posons $u = \widetilde{u} = y$ dans le cas (i) et $u = x_\varepsilon$ et $\widetilde{u} = \widetilde{x}_0$ dans le cas (ii).

Soit $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_m < ... < t_p = L, p \in \mathbb{N}$, une partition de $[0, L]$, avec $\alpha = \alpha(\varepsilon) := t_{m+1} - t_m, m = 0, \cdots, p-1$ et $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha = 0$. Soit $t \in [t_m, t_{m+1}]$ pour $m = 0, \cdots, p-1$. Alors

$$\begin{aligned} &\rho \left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right) d\tau, \int_0^t \overline{F}(\widetilde{u}(\tau)) d\tau \right) \\ &\qquad \leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right) d\tau, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{F}(\widetilde{u}(\tau)) d\tau \right) \\ &\qquad\quad + \rho \left(\int_{t_m}^{t} F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right) d\tau, \int_{t_m}^{t} \overline{F}(\widetilde{u}(\tau)) d\tau \right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

D'après l'hypothèse (H4) et le Lemme 5.1 on a

$$\begin{aligned} &\rho \left(\int_{t_m}^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right) d\tau, \int_{t_m}^t \overline{F}(\widetilde{u}(\tau)) d\tau \right) \\ &\qquad \leq \left\| \int_{t_m}^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right) d\tau \right\| + \left\| \int_{t_m}^t \overline{F}(\widetilde{u}(\tau)) d\tau \right\| \\ &\qquad \leq \int_{t_m}^t b\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) d\tau + \alpha B \leq \int_{t_m}^{t_{m+1}} b\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) d\tau + \alpha B. \\ &\qquad = \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_m/\varepsilon}^{t_m/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} b(\tau) d\tau \right) + \alpha B. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Cependant, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_m/\varepsilon}^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau) d\tau - B &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau) d\tau - \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^{t_m/\varepsilon} b(\tau) d\tau - B \\ &= \left(\frac{t_m}{\alpha} + 1 \right) \left[\frac{1}{t_m/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} \int_0^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau) d\tau - B \right] \\ &\quad - \left(\frac{t_m}{\alpha} \right) \left[\frac{1}{t_m/\varepsilon} \int_0^{t_m/\varepsilon} b(\tau) d\tau - B \right] \end{aligned}$$

à partir de laquelle on déduit

$$\begin{aligned} & \left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_m/\varepsilon}^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau)d\tau - B\right| \\ \leq\ & \left(\frac{L}{\alpha}+1\right)\left|\frac{1}{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon}\int_0^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau)d\tau - B\right| \\ & +\frac{L}{\alpha}\left|\frac{1}{t_m/\varepsilon}\int_0^{t_m/\varepsilon} b(\tau)d\tau - B\right| \end{aligned} \tag{5.27}$$

où $|\cdot|$ est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. D'après l'hypothèse (H_4) on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{1}{t_m/\varepsilon}\int_0^{t_m/\varepsilon} b(\tau)d\tau - B\right| = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{1}{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon}\int_0^{t_m/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(\tau)d\tau - B\right| = 0.$$

Donc le second membre de (5.27) tend vers zéro avec ε et l'inégalité (5.26) donne alors

$$\begin{aligned} & \rho\left(\int_{t_m}^{t} F(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau))d\tau, \int_{t_m}^{t}\overline{F}(\widetilde{u}(\tau))d\tau\right) \\ & \leq \alpha(B+\xi_m)+\alpha B \leq \alpha(B+\xi)+\alpha B = \alpha(2B+\xi) \end{aligned} \tag{5.28}$$

où $\xi = \xi(\varepsilon) = \max\{\xi_m = \xi_m(\varepsilon) : m = 0, ..., p-1\}$ avec $\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_m = 0$.

Soit $k \in \{0, ..., m-1\}$ et $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$. On considère les deux cas suivants :

1. $u = y$. On a :

$$|y(\tau) - y(t_k)| \leq \alpha B. \tag{5.29}$$

2. $u = x_\varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(t_k)| &\leq \int_{t_k}^{\tau} b\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds \\ &\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} b\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds = \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_k/\varepsilon}^{t_{k+1}/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} b(s)ds\right) \\ &\leq \alpha(B+\xi_k) \leq \alpha(B+\xi_m) \end{aligned} \tag{5.30}$$

où $\xi_m = \xi_m(\varepsilon) = \max\{\xi_k = \xi_k(\varepsilon) : k = 0, ..., m-1\}$ avec $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\xi_k = 0$.

Dans les deux cas, d'après les hypothèses (H2)-(H3) et la continuité de $\overline{F}$ (Lemme 5.1, (i), page 76) on a respectivement

$$\begin{aligned} & \rho\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right)d\tau, \int_{t_k}^{t_{k+1}} F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(t_k)\right)d\tau\right) \\ & \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}}\rho\left(F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(\tau)\right)d\tau, F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u(t_k)\right)\right)d\tau \\ & \leq \gamma_k\alpha \leq \gamma_m\alpha. \end{aligned} \tag{5.31}$$

et

$$\begin{aligned}\rho\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\overline{F}(\widetilde{u}(\tau))d\tau,\int_{t_k}^{t_{k+1}}\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))d\tau\right)\\ \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}}\rho\left(\overline{F}(\widetilde{u}(\tau))d\tau,\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))\right)d\tau\\ \leq \delta_k\alpha\leq\delta_m\alpha\end{aligned}\tag{5.32}$$

où $\gamma_m=\gamma_m(\varepsilon)=\max\{\gamma_k=\gamma_k(\varepsilon):k=0,...,m-1\}$ et
$\delta_m=\delta_m(\varepsilon)=\max\{\delta_k=\delta_k(\varepsilon):k=0,...,m-1\}$ avec $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_k=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_k=0$.
Par conséquent, d'aprèrs (5.25) on a :

$$\begin{aligned}\rho\left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u(\tau)\right)d\tau,\int_0^t\overline{F}(\widetilde{u}(\tau))d\tau\right)\\ \leq\sum_{k=0}^{m-1}\rho\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}F\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u(t_k)\right)d\tau,\int_{t_k}^{t_{k+1}}\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))d\tau\right)\\ +(\gamma_m+\delta_m)t+\alpha(2B+\xi).\end{aligned}\tag{5.33}$$

Nous considérons maintenant le premier terme du second membre de l'inégalité (5.33). Pour tout $k=0,...,m-1$, on a

$$\begin{aligned}\beta_k &:= \rho\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}F\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u(t_k)\right)d\tau,\int_{t_k}^{t_{k+1}}\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))d\tau\right)\\ &= \alpha\rho\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_k/\varepsilon}^{t_{k+1}/\varepsilon+\alpha/\varepsilon}F(\tau,u(t_k))d\tau,\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))\right):=\alpha\varrho_k\leq\alpha.\varrho_m\end{aligned}$$

où $\varrho_m=\max\{\varrho_k(\varepsilon):k=0,...,m-1\}$ et d'après le Lemme 5.3, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varrho_k=0$.
Alors

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\rho\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}F\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u(t_k)\right)d\tau,\int_{t_k}^{t_{k+1}}\overline{F}(\widetilde{u}(t_k))d\tau\right)\\ &=\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k\leq\varrho_m\sum_{k=0}^{m-1}\alpha=\varrho_m\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)\leq\varrho_m t.\end{aligned}$$

Enfin, à partir de (5.33), nous obtenons

$$\begin{aligned}\rho\left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u(\tau)\right)d\tau,\int_0^t\overline{F}(\widetilde{u}(\tau))d\tau\right) &\leq (\varrho_m+\gamma_m+\delta_m)t+\alpha(2B+\xi)\\ &\leq (\varrho+\gamma+\delta)t+\alpha(2B+\xi)\end{aligned}\tag{5.34}$$

où $\varrho+\gamma+\delta=\max\{\varrho_m+\gamma_m+\delta_m:m=0,...,p-1\}$. Comme le second membre de (5.34) tend vers zéro avec ε, le lemme est démontré.

Cas 2 : F satisfait les hypothèses (H1) et (H4)-(H6).

La preuve est similaire à la preuve du cas 1 ci-dessus. La seule différence est que les inégalités (5.31) et (5.32) seront obtenues par l'utilisation de l'hypothèse (H6) et la condition de Lipschitz de $\overline{F}$ (Lemme 5.1, (ii), page 76) à la place des hypothèses (H2)-(H3) et la continuité de $\overline{F}$ (Lemme 5.1, (i), page 76). □

5.2.3 Preuve du Théorème 5.8

On suppose que les hypothèses (H1)-(H5) sont satisfaites.

Soit $L > 0$. Supposons que la famille $\{x_\varepsilon\}$ des solutions du problème (5.19) est définie sur $[0, L]$. Pour ε suffisamment petit, la famille $\{x_\varepsilon\}$ est équicontinue et uniformément bornée sur $[0, L]$. En effet, soit $t, \tau \in [0, L]$ avec $t > \tau$. Comme pour l'inégalité (5.30) dans la démonstration du Lemme 5.4, nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(\tau)| &\leq \int_\tau^t b\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = (t-\tau)\left(\frac{\varepsilon}{t-\tau}\int_{\tau/\varepsilon}^{t/\varepsilon} b(s)ds\right) \\ &\leq (t-\tau)(B+1). \end{aligned} \tag{5.35}$$

D'autre part, d'après (5.35) on déduit que :

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + (B+1)L, \qquad \forall t \in [0, L].$$

Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzela il existe une fonction continue $y : [0, L] \to \mathbf{U}$ telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t\in[0,L]} |x_\varepsilon(t) - y(t)| = 0. \tag{5.36}$$

Vérifions maintenant que la fonction y est solution du problème (5.20). Si $t \in [0, L]$ la fonction y est telle

$$\begin{aligned} &\delta\left(y(t), x_0 + \int_0^t \overline{F}(y(\tau))d\tau\right) \\ &\qquad \leq |y(t) - x_\varepsilon(t)| + \delta\left(x_\varepsilon(t), x_0 + \int_0^t \overline{F}(y(\tau))d\tau\right) \\ &\qquad \leq \sup_{t\in[0,L]} |y(t) - x_\varepsilon(t)| \\ &\qquad\qquad + \sup_{t\in[0,L]} \rho\left(\int_0^t F(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau))d\tau, \int_0^t \overline{F}(y(\tau))d\tau\right). \end{aligned} \tag{5.37}$$

D'après (5.36) et le Lemme 5.4 (avec $u = x_\varepsilon$ et $\widetilde{u} = \widetilde{x}_0 = y$), le second membre de (5.37) tend vers zéro avec ε, de sorte que l'on peut conclure que la fonction y est solution de problème (5.20).

La preuve du Théorème 5.8 est achevée. □

5.2.4 Preuve du Théorème 5.9

Nous supposons que les hypothèses (H1)-(H5) et (H7) sont vérifiées.

Soit $L \in J$. Fixons $\zeta > 0$ tel que le voisinage compact autour de

$$\Gamma = \{y(t) : t \in [0; L]\}$$

donné par $W = \{z \in \mathbb{R}^n / \exists t \in [0, L] : |z - y(t)| \leq \zeta\}$ soit inclus dans U. Soient x_ε une solution du problème (2.1) et A le sous-ensemble de $[0, L]$ défini par

$$A = \{L_1 \in [0, L] / x_\varepsilon \text{ est défini sur } [0, L_1] \text{ et } x_\varepsilon(t) \in W, t \in [0, L_1]\}.$$

L'ensemble A est non vide ($0 \in A$) et borné par L. Soit L_0 la borne supérieure de A et soit $L_1 \in A$ telle que $L_0 - \varepsilon < L_1 \leq L_0$. Puisque $x_\varepsilon(L_1) \in W$, la solution x_ε peut être prolongée sur un intervalle $[L_1, L_1 + \Delta]$ où $\Delta > 0$ est indépendant de ε.

Soit $L_1' := L_1 + \varepsilon$. Pour ε suffisamment petit, nous avons $[0, L_1'] \subset [0, L_1 + \Delta]$. En tenant compte de l'hypothèse de l'unicité de la solution de (5.20), d'après le Théorème 5.8 , nous avons : y est définie sur $[0, L_1']$ et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0, L_1']} |x_\varepsilon(t) - y(t)| = 0. \tag{5.38}$$

Il reste à vérifier que $L \leq L_1'$. Si ce n'est pas vrai, alors x_ε est définie sur $[0, L_1']$ et $\{x_\varepsilon(t) : t \in [0, L_1']\} \subset W$ implique $L_1' \in A$. Cela contredit le fait que $L_1' > L_0$. Ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

5.2.5 Preuve du Théorème 5.10

Supposons que les hypothèses (H1) et (H4)-(H6) sont vérifiées.

(i) La preuve utilise le Lemme 5.1, (ii), page 76 et le Lemme 5.4, page 77. Puisque la preuve est similaire à la preuve du Théorème 5.8, page 75, elle est omise.

(ii) Nous allons construire une suite d'approximations successives de Cauchy $\{x_{\varepsilon,k}\}_k$ qui converge vers une solution du problème (5.19).

Soit $L > 0$. Soit y une solution de (5.20) et supposons qu'elle est définie sur $[0, L]$. Pour tout $t \in [0, L]$ on a :

$$\begin{aligned} &\delta \left(y(t), x_0 + \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right) d\tau \right) \\ &\qquad \leq \sup_{t \in [0,L]} \rho \left(\int_0^t \overline{F}(y(\tau)) d\tau, \int_0^t F(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)) d\tau \right) := \xi \quad (\xi = \xi_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.39}$$

D'après le Lemme 5.4 (avec $u = \tilde{u} = y$), $\lim_{\varepsilon \to 0} \xi = 0$.

D'après le théorème des sélections continues ([19], Proposition 3.4, b) il existe une fonction continue $x_{\varepsilon,1} : [0, L] \to \mathbf{U}$ telle que, pour tout $t \in [0, L]$:

(1) $x_{\varepsilon,1}(t) \in x_0 + \displaystyle\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\right) d\tau.$

(2) $|y(t) - x_{\varepsilon,1}(t)| = \delta \left(y(t), x_0 + \displaystyle\int_0^t F(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)) d\tau \right).$

La propriété (2) et l'inégalité (5.39) impliquent que, pour tout $t \in [0, L]$, on a :

$$|y(t) - x_{\varepsilon,1}(t)| \leq \xi.$$

Nous supposons que nous pouvons définir une suite de fonctions continue $\{x_{\varepsilon,k}\}_k$ avec $x_{\varepsilon,0} = y$, qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $t \in [0, L]$:

(3) $x_{\varepsilon,k}(t) \in x_0 + \displaystyle\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,k-1}(\tau)\right) d\tau.$

(4) $|x_{\varepsilon,k}(t) - x_{\varepsilon,k-1}(t)| \leq \xi \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$, avec la constante λ de l 'hypothèse (H6).

Supposons que nous avons définie sur $[0, L]$ les fonctions $x_{\varepsilon,k}$ jusqu'à l'ordre $k = p$, satisfaisant les propriétés (3) et (4). Par le théorème des sélections continues, il existe une fonction continue $x_{\varepsilon,p+1} : [0; L] \to \mathbf{U}$ satisfaisant, pour tout $t \in [0, L]$:

(5) $x_{\varepsilon,p+1}(t) \in x_0 + \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,p}(\tau)\right) d\tau.$

(6) $|x_{\varepsilon,p}(t) - x_{\varepsilon,p+1}(t)| = \delta\left(x_{\varepsilon,p}(t), x_0 + \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,p}(\tau)\right) d\tau\right).$

On a, pour tout $t \in [0, L]$

$$\begin{aligned}
|x_{\varepsilon,p+1}(t) - x_{\varepsilon,p}(t)| &\leq \rho\left(\int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,p}(\tau)\right) d\tau, \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,p-1}(\tau)\right) d\tau\right) \\
&\leq \lambda \int_0^t |x_{\varepsilon,p}(\tau) - x_{\varepsilon,p-1}(\tau)| d\tau \\
&\leq \lambda \int_0^t \xi \frac{(\lambda\tau)^{p-1}}{(p-1)!} d\tau = \xi \frac{(\lambda t)^p}{p!},
\end{aligned}$$

qui termine la preuve par induction.

Maintenant, la propriété (4) implique que $\{x_{\varepsilon,k}\}_k$ est une suite de Cauchy de fonctions continues, convergeant uniformément vers une fonction continue x_ε. De plus, en tenant compte de l'hypothèse (H6) on obtient que, pour tout $t \in [0, L]$

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} \delta\left(x_{\varepsilon,k}(t), x_0 + \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\varepsilon,k-1}(\tau)\right) d\tau\right) \\
&= \delta\left(x_\varepsilon(t), x_0 + \int_0^t F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau)\right) d\tau\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, x_ε est solution du problème (5.19).

Finalement, par la propriété (4), nous avons

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,L]} |x_{\varepsilon,k}(t) - y(t)| \\
&\qquad \leq \sup_{t\in[0,L]} \left(|x_{\varepsilon,k}(t) - x_{\varepsilon,k-1}(t)| + \cdots + |x_{\varepsilon,1}(t) - y(t)|\right) \\
&\qquad \leq \xi \sup_{t\in[0,L]} \left(\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + 1\right) \leq \xi \sup_{t\in[0,L]} e^{\lambda t} = \xi e^{\lambda L}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Comme le second membre de (5.40) tend vers zéro avec ε, cela prouve (ii).

La preuve du théorème est achevée □

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Second Ed., Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] Z. Artstein, Averaging of time-varying differential equations revisited, *J. Diff. Equ.*, 243 (2007), pp. 146-167.

[3] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] R. J. Aumann, Integrals of set-valued functions, *J. Math. Anal. Appl.* 12 (1965), pp. 1-12.

[5] V. I. Blagodatskikh and A. F. Filippov, Differential inclusions and optimal control, *in collection of surveys*, Topology, Ordinary differential equations and dynamical systems, *Trudy Mat. Inst. Steklov*. 169 (1985), pp. 194-252 (in Russian).

[6] N. N. Bogolyubov et Yu. A. Mitropolsky, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauhiers Villars, Paris, 1962.

[7] N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolsky and A. M. Samoilenko, *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Hindustan Publ. Co. and Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[8] A. Bourada, R. Guen, M. Lakrib and K. Yadi, Some Averaging Results for Ordinary Differential Inclusions, *Disc. Math. Diff. Incl., Cont. and Opt*. 35 (2015) pp. 47-63.

[9] F. E Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1976.

[10] B. C. Dhage, Fixed point theorems in ordered Banach algebras and applications, *Panamer. Math. J.*, 94 (1999), pp. 93-102.

[11] B. C. Dhage, On a fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaffer type, *EJQTDE*, No. 6 (2002), pp. 1-9.

[12] B. C. Dhage, Existence theory for functional initial value problems of ordinary differential equations, *EJQTDE*, No. 15 (2004), pp 1-14.

[13] B. C. Dhage, Some nonlinear alternatives in Banach algebras with applications, *Nonlinear stud.* No 3 (2005), pp. 271-282.

[14] B. C. Dhage, Nonlinear functional boundary value problems in Banach algebras involving Carathéodorie's, *Kyungpook Math. J.*, 46, No. 4 (2006), pp. 527-541.

[15] B.C. Dhage, Some algebraic fixed point theorems for multi-valued mappings with applications, *Disc. Math., Diff. Incl., Cont. and Opt.* 26 (2006) pp. 5-55.

[16] B. C. Dhage, J. Henderson and S. K. Ntouyas, Periodic Boundary value problemes of first order ordinary differential equations in Banach algebras, *J. Nonlinear Funct. Anal and Diff. Equ.* 1 (2007), pp. 103-120.

[17] B. C. Dhage, S. N Salunkhe, Ravi P. Agarwal and W. Zhang, A Functional differntial equation in Banach algebras, *Math. Inequal. Appl.*, No. 1 (2005) pp. 89-99.

[18] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lecture Notes in Math., 596, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[19] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, 1992.

[20] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed point theory*, Monographie Math, Warsaw, 1982.

[21] R. D. Driver, *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 20, Springer-Verlag, New York, 1977.

[22] W. Eckhaus. New approach to the asymptotic method in the theory of nonlinear oscillations and wave-propagation, *J. Math. Anal. Appl.* 49 (1975), pp. 575-611.

[23] A. N, Filatov, *Asymptotic Methods in the Theory of the Differential and Integro-Differential Equations*, Fan, Tashkent, 1974.

[24] A. F. Filippov, Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side, *SIAM J. Control* 5 (1967) pp. 609-621.

[25] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[26] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[27] S. Heikkila and V. Lakshmikantham, *Monotone Iterative Techniaue for Nonlinear Discontinues Differential Equations*, Marcel Dekker Inc., 1994.

[28] S. Klymchuk, A. Plotnikov and N. Skripnik, Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions, *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 241, No. 22 (2012), pp. 1932-1947.

[29] O. D. Kichmarenko and N. V. Skripnik, Averaging of fuzzy differential equations with delay, *Nonlinear Oscillations*, 11, No.3 (2008), pp. 331-344.

[30] O. Kichmarenko and N. V. Skripnik, One Scheme of Averaging of Fuzzy Differential Equations with Maxima, *J. Adv. Resear. Appl. Math.* 3, Issue 1 (2011), pp. 94-103.

[31] A. Kolmogorov et S. Fomnie, Element de la theorie des fonctions et de l'analuse fonctionnelle. *Edition Mir*, Moscou, 1977.

[32] N. M. Krylov and N. N. Bogolyubov, *Introduction to Nonlinear Mechanics* (in Russian), Patent No. 1, Kiev, 1937.

[33] M. Lakrib, The method of averaging and functional differential equations with delay, *Int. J. Math. Math. Sci.* 26, No. 8 (2001), pp. 497-511.

[34] M. Lakrib, On the averaging method for differential equations with delay, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2002, No. 65 (2002), pp. 1-16.

[35] M. Lakrib, *Stroboscopie et moyennisation dans les équations différentielles fonctionnelles à retard*. Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Haute Alsace, Mulhouse, 2004 (http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00444149/fr).

[36] M. Lakrib, An averaging theorem for ordinary differential inclusions, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 16, No. 1 (2009), pp. 13-29.

[37] M. Lakrib, R. Guen and A. Bourada, Averaging for Fuzzy Differential Equations, *Surv. Math. Appl.* Vol. 9 (2014), pp.93-104.

[38] M. Lakrib, T. Kherraz and A. Bourada, Averaging for ordinary differential equations perturbed by a small parameter, *Math. Bohemica*, Vol. 141, No. 2, 2016, pp. 143-151.

[39] M. Lakrib and T. Sari, Averaging results for functional differential equations, *Sibirsk. Mat. Zh.* 45, No.2 (2004), pp. 375-386 ; translation in *Siberian Math. J.* 45, No.2 (2004), pp. 311-320.

[40] M. Lakrib and T. Sari, Time averaging for ordinary differential equations and retarded functional differential equations, *Electron. J. Diff. Eqns.* No.40 (2010), pp. 1-24.

[41] M. Lakrib, Time averaging for functional differential equations, *J. Appl. Math.* No. 1 (2003), pp. 1-16.

[42] V. Lakshmikantham and R. N. Mohapatra, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor and Francis, London, 2003.

[43] P. Lochak and C. Meunier, *Multiphase Averaging for Classical Systems. with Applications to Adiabatic Theorems*, Appl. Math. Sci., 72, Springer-Verlag, New York, 1988.

[44] R. H. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Pure Appl. Math, Wiley-Interscience, New York, 1976.

[45] E. Michael, Continuous Selections, *I. Ann. Math.* 63(2) (1956), pp. 361-381.

[46] Yu. A. Mitropolsky, *Problème de la théorie des oscillations non stationnaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1966.

[47] Yu. A. Mitropolsky, *Certains aspects des progrès de la méthode de centrage*, CIME, Edizione Cremonese, Roma, 1973.

[48] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López and D. N. Georgiou, Fuzzy differential systems under generalized metric spaces approach, *Dynam. Syst. Appl.* 17 (2008), pp. 1-24.

[49] A. I. Panasyuk and V. I. Panasyuk, About one equation arized from a differential inclusion, *Mat. Zametky* 3 (1980), pp. 429-437 (in Russian).

[50] G. Pianigiani, On the fundamental theory of multivalued differential equations, *J. Diff. Equ.* f1 (1977), pp. 30-38.

[51] A. Plio, Trajectories and quasi-trajectories of an orientor field, *Bull. Acad. Pol. Aci. Ser. Sci. Math., Astr. Phys.* 6 (1963), pp. 369-370.

[52] A. V. Plotnikov and T. A. Komleva, Averaging of the Fuzzy Differential Equations, *J. Uncert. Syst.* 6, No. 1 (2012), pp. 30-37.

[53] A. V. Plotnikov, *Asymptotic Methods in Optimal Control Problems*, Odessa State University, Odessa, 1976 (in Russian).

[54] A. V. Plotnikov, *The Averaging Method in Control Problems*, Lybid, Kiev 1992 (in Russian).

[55] A. V. Plotnikov and A. N. Vityuk, *Differential Equations with a Multivalued Right-Hand Side. Asymptotic Methods*, Astro-Print, Odessa, 1999 (in Russian).

[56] A. V. Plotnikov, Averaging method for differential inclusions and its application to optimal control problems, *Differ. Uravn*, 8 (1979), pp. 1427-1433 (in Russian).

[57] A. V. Plotnikov, Partial averaging of differential inclusions, *Mat. Zametki*, 6 (1980), pp. 947-952 (in Russian).

[58] A. V. Plotnikov, Averaging of differential inclusions, *Ukrain. Mat. Zh.* 5 (1979), pp. 573-576 (in Russian).

[59] V. A. Plotnikov and V. M. Savchenko, On the averaging of differential inclusions when the average of the right-hand side is absent, *Ukrainian Math. J.* 11 (1996), pp. 1779-1784.

[60] W.T. Reid, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1971.

[61] J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[62] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second Ed., Applied Mathematical Sciences, 59, Springer-Verlag, New York, 2007.

[63] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann edition des sciences et des arts, Paris, 1992.

[64] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Syst.* 24 (1987), pp. 319-330.

[65] N. V. Skripnik, Averaging of impulsive differential inclusions with Hukuhara derivative, *Neliniini Koliv*, 10, No. 3 (2007), 416-432 (Russian) ; translation in *Nonlinear Oscil.* 10 , No. 3 (2007), pp. 422-43.

[66] G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Graduate Studies in Math. 4, American Math. Soc. Providence, 2002.

[67] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control, Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[68] V. M. Volosov. Averaging in Systems of Ordinary Differential Equations, *Russian Math. Surveys*, 17 (1968), pp. 251-294.

[69] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. Control*, 8 (1965), pp. 338-353.