

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Science des matériaux**

Présentée par

KACI Abdelhakim

**Sujet de thèse**

**ETUDE ET ANALYSE NON LINEAIRE DES  
PLAQUES MINCES NON HOMOGENE EN  
FLEXION CYLINDRIQUE**

Soutenu le 23 Octobre 2012 devant le Jury composé de :

Mr. E.A. ADDA BEDIA	Professeur	UDL-SBA	Président
Mr. A. TOUNSI	Professeur	UDL-SBA	Rapporteur
Mr. <b>K. AMARA</b>	MC A	C.U.AIN TEMOUCHENT	Examineur
Mr. S. BENYOUCEF	MC A	UDL-SBA	Examineur
Mr. T.H. DAOUADJI	MC A	U.TIARET	Examineur
Mr. <b>N.ELMEICHE</b>	MC A	U. MASCARA	Examineur

# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbas.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Monsieur **Abdelouahed Tounsi**, professeur à l'université Djillali liabes de Sidi Bel Abbas, de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur **ADDA BEDIA EL ABASS**, professeur à l'université Djillali liabes de Sidi Bel Abbas, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes plus vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs **K. AMARA**, **S.BENYOUCEF** et **T.H. DAOUADJI** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leurs exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous mes amis avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma personnalité et leur contribution a apportée un soutien scientifique important à ce travail.

# *DEDICACE*

*À ma famille,*

*À mon épouse,*

*À mes enfants,*

*À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.*

# **Table des matières**

# Table des Matières

Résumé	
Abstract	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des symboles	
Introduction Générale .....	1
 <b>CHAPITRE I: GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES</b>	
I.1. Introduction.....	5
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés .....	6
I.3. Historique de développement du FGM .....	7
I.4. Les méthodes de fabrication du Matériau à Gradient de propriétés .....	9
I.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	9
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	11
I.4.3. Dépôt par Electrophorèse.....	11
I.4.4. Compaction sèche des Poudres .....	11
I.4.5. Projection plasma.....	12
I.4.6. C. V. D. et P. V. D. ....	12
I.4.7. Frittage et Infiltration.....	12
I.4.8. Frittage Laser Différentiel.....	12
I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering) .....	13
I.4.10. Dépôt par Centrifugation.....	13
I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	14
I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM : .....	15

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	16
I.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM : .....	17
I.6. Conclusion .....	18

## **CHAPITRE II : GENERALITES SUR LES MATERIAUX NANOCOMPOSITE**

II.1. Introduction .....	19
II.2. Définition d'un nanocomposite .....	21
II.3. Les formes traditionnelles du carbone .....	23
II.3.1. Le graphite .....	23
II.3.2 Le diamant .....	23
II.4 Les nouvelles formes du carbone.....	24
II.4.1 Fullerènes et dérivés .....	24
II.4.2 Nanotubes multifeuillets (ou multiparois) .....	25
II.4.3 Nanotubes monofeuillets (ou monoparois).....	26
II.5 Synthèse de nanotubes .....	30
II.5.1 Méthode de l'arc électrique .....	30
II.5.2 Méthode d'ablation laser .....	32
II.5.3 Méthode de dépôt chimique en phase vapeur .....	32
II.5.4 Décomposition catalytique : HiPCO .....	33
II.6 Propriétés physiques des nanotubes de carbone .....	33
II.6.1 Propriétés mécaniques .....	33
II.6.2 Propriétés thermiques .....	34
II.6.3 Propriétés électroniques.....	35
II.7 Exploitation des propriétés des nanotubes de carbone.....	35
II.8. Méthode de simulation de dynamique moléculaire .....	37
II.8.1. Calcul de la fraction volumique CNT.....	38
II.8.2. Calcul de l'énergie d'interaction polymère/CNT .....	38
II.9. Conclusion.....	39

## **CHAPITRE III : THEORIE DES PLAQUES**

<i>III.1. Introduction.....</i>	<i>40</i>
III.2. Définition d'une plaque : .....	40

III.3. Les modèles analytiques des plaques FGM .....	41
III.3.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	41
III.3.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	42
III.3.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	45
III.4. Analyse non linéaire des plaques.....	46
III.4.1. Relations déformation-déplacement .....	46
III.4.2. Relations contrainte-déformation.....	47
III.4.3. Equations des efforts et des moments .....	48
III.4.4. Détermination des équations d'équilibre par le principe des travaux virtuels .....	50
III.4.5. Energie potentielle totale minimale (Méthode de Ritz).....	51
III.4.6. Flexion cylindrique d'une plaque longue .....	52
III.4.7. Conclusion .....	52

#### **CHAPITRE IV : SOLUTION MATHEMATIQUE NON LINEAIRE DES PLAQUES FGM EN FLEXION CYLINDRIQUE**

IV.1. Introduction .....	53
IV.2. Gradient des Propriétés matérielles des plaques FGM .....	53
IV.2.1 Les propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	54
IV.2.2 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	56
IV.3-Les équations constitutives de la flexion cylindrique non linéaire des plaques FGM ...	57
IV-4. Solution générale.....	62
IV-4.1 Analyse non linéaire .....	62
IV-4.2 Analyse linéaire .....	63
IV-5. Résultats numériques et discussions .....	64
IV-6. Conclusion .....	74

#### **CHAPITRE V : ANALYSE NON LINEAIRE DES PLAQUES COMPOSITES RENFORCEES PAR DES NANOTUBES DE CARBONE EN FLEXION CYLINDRIQUE**

V.1. Introduction .....	76
V.2. Propriétés matérielle à gradient de propriétés des plaques composites renforcées .....	78

## *Table des matières*

---

V.3. Equations constitutives non linéaire des plaques FG-CNTRC en flexion .....	80
V.4. Flexion cylindrique .....	83
V.5. Solution générale d'une plaque soumise à un chargement transverse .....	84
V.5.1. Analyse non linéaire .....	84
V.5.2. Analyse linéaire.....	85
V.6. Résultats numériques et discussion .....	86
V.7. Conclusion .....	94

## **CHAPITRE VI: ANALYSE NON LINEAIRE DE LA FLEXION DES PLAQUES « SANDWICHES » EN FGM EN UTILISANT LA THEORIE D'ORDRE ELEVE A DEUX VARIABLES**

VI.1.Introduction.....	95
VI.2.Formulation théorique .....	98
VI.2.1. Configuration géométrique.....	98
VI.2.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT) .....	100
VI.2.3. La théorie d'ordre élevé à deux variables .....	101
VI .2.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables .....	101
VI. 2.3.2. Cinématique et équations constitutives .....	102
VI.2.4. Les contraintes .....	103
VI.2.5. Détermination des équations d'équilibre .....	104
VI.2.6. Détermination des coefficients de rigidité .....	105
VI.2.7. Formulation des équations différentielles .....	106
VI.3. Energie potentielle totale minimale .....	107
VI.4. Résultats numériques et discussions.....	109
VI.5. Conclusion .....	114
Conclusion Générale .....	115
Références bibliographiques.....	124

# Résumé

## Résumé

L'intérêt de cette thèse est l'étude et l'analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique. En effet, ce travail de thèse s'articule autour de trois parties distinctes, on commence par étudier le comportement non linéaire des plaques mince en matériau à gradient de propriétés (FGM) en flexion cylindrique. Les propriétés du matériau de la plaque FGM varie suivant la direction de l'épaisseur selon une fonction sigmoïde (S-FGM) ou une fonction exponentielle (E-FGM) soumise à un chargement transversal. Les déformations de Von Karman sont utilisées pour étudier l'effet de la non linéarité géométrique. Les équations régissant sont réduites à l'équation différentielle linéaire qui aboutit à un procédé simple de solution. Les résultats prouvent que les plaques en matériau à gradient de propriétés montrent le comportement différent des plaques faites de matériaux purs en flexion cylindrique. Des résultats numériques sont présentés pour illustrer l'effet de la distribution de matériel sur les flèches et les contraintes.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés comme dans la première partie de notre travail à l'étude en flexion cylindrique non linéaire des plaques nanocomposites à gradients de propriétés renforcés par des nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT). Les plaques sont soumises à une charge uniforme dans des environnements thermiques et leur non-linéarité géométrique est introduite dans les équations de déformations selon les hypothèses de Von-Karman. Les propriétés des matériaux de SWCNTs sont supposées être dépendantes de la température et sont obtenus à partir des méthodes de simulations de dynamique moléculaire. Les propriétés du composites renforcées par des nanotubes de carbone à gradient de propriétés (FG-CNTCRs) sont supposées variable dans la direction de l'épaisseur, et sont estimés par un modèle micromécanique. Les équations qui régissent sont réduites à l'équation différentielle linéaire simple. Les résultats numériques sont présentés pour illustrer l'effet de la distribution du matériau sur les flèches et les contraintes.

Enfin pour terminer, nous avons introduit la théorie d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse non linéaire de la flexion des plaques sandwiches à gradients de propriétés. La

théorie présentée est conforme, ne nécessitant pas de facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à des variations de contraintes de cisaillement transversale de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient parabolique à travers l'épaisseur, qui satisfait les conditions de contraintes à surface libre. Les plaques sandwiches sont soumises à une charge de pression et la non-linéarité géométrique est introduite dans les équations déformation-déplacement en se basant sur les hypothèses de Von Karman. Le concept d'énergie avec la théorie actuelle et les théories de premier et de troisième ordre de déformation de cisaillement (FSDT et TSDT) sont utilisés pour prédire la grande flèche et la contrainte à travers l'épaisseur des plaques sandwiches à gradients de propriétés. Les faces de la plaque sandwich sont supposées être isotropes, et le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, les coefficients de dilatation thermique sont supposés être variables selon une loi de distribution de puissance en termes de volume de fractions des constituants. La couche centrale reste homogène et réalisée en un matériau isotrope céramique. Les résultats obtenus pour la plaque avec différents épaisseurs en utilisant la présente théorie ne sont pas seulement beaucoup plus précis que celles obtenues en utilisant la théorie classiques des plaques, mais sont presque comparables à ceux obtenus en utilisant des théories d'ordre supérieur.

**Mots clés:** Matériaux à gradient de propriétés (S-FGM et E-FGM); Comportement non linéaire ; Nano-composites ; Modélisation analytique ; Méthode énergétique ; Théorie classique de plaque (CPT) ; Théorie d'ordre élevé à deux variable ; théorie de déformation de cisaillement; plaques sandwiches.

# **Abstract**

## **Abstract**

The interest of this thesis is the study the nonlinear cylindrical bending of thin plates. Indeed, this thesis focuses on three distinct parts; one begins in first phase to consider the problems of nonlinear cylindrical bending of sigmoid functionally graded plates (S-FGM) or exponential functionally graded plate (E-FGM) in which material properties vary through the thickness. The nonlinear strain-displacement relations in the von Karman sense are used to study the effect of geometric nonlinearity. The governing equations are reduced to linear differential equation with nonlinear boundary conditions yielding a simple solution procedure. Numerical results are presented to show the effect of the material distribution on the deflections and stresses.

In the second part, we looked like in the first part of our work the nonlinear cylindrical bending of simply supported, functionally graded nanocomposite plates reinforced by single-walled carbon nanotubes (SWCNTs), is studied. The plates are subjected to uniform pressure loading in thermal environments and their geometric nonlinearity is introduced in the strain-displacement equations based on Von-Karman assumptions. The material properties of SWCNTs are assumed to be temperature-dependent and are obtained from molecular dynamics simulations. The material properties of functionally graded carbon nanotube-reinforced composites (FG-CNTCRs) are assumed to be graded in the thickness direction, and are estimated through a micromechanical model. The governing equations are reduced to linear differential equation with nonlinear boundary conditions yielding a simple solution procedure. Numerical results are presented to show the effect of the material distribution on the deflections and stresses.

Finally to conclude, in this part we introduced an efficient and simple refined theory is presented for nonlinear bending analysis of functionally graded sandwich plates. The theory presented is variationally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. The sandwich plates are

subjected to pressure loading and their geometric nonlinearity is introduced in the strain–displacement equations based on Von-Karman assumptions. The energy concept along with the present theory and the first- and third-order shear deformation theories (FSDT and TSDT) are used to predict the large deflection and through the thickness stress of functionally graded sandwich plates. The sandwich plate faces are assumed to have isotropic, two-constituent material distribution through the thickness, and the modulus of elasticity, Poisson’s ratio of the faces, and thermal expansion coefficients are assumed to vary according to a power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic ceramic material. The results obtained for plate with various thickness ratios using the theory are not only substantially more accurate than those obtained using the classical plate theory, but are almost comparable to those obtained using higher order theories.

**Keywords:** Sigmoid functionally graded materials; Exponential functionally graded materials; Nonlinear behavior, Nano-composites; Analytical modeling; functionally graded materials; Refined plate theory; Nonlinear analysis; Energy method; Sandwich plate; Functionally graded material.

ملخص

## ملخص

الهدف هذه من هذه العمل هو دراسة وتحليل الغير الخطية للصفائح الرقيقة الغير المتجانسة في الانحناء أسطواني، هذا العمل ينقسم إلى ثلاثة أجزاء منفصلة، في الجزء الأول من هذه الدراسة نبدأ من خلال دراسة السلوك الغير الخطية للوحات الرقيقة المصنوعة من المواد المتدرجة الخاصة (FGM) في الانحناء أسطواني. خصائص المواد تتغير في اتجاه سمك اللوحة حسب الدالة السنية (S-FGM) أو الدالة الآسية (E-FGM) مع تحميل عرضية. وتستخدم تشوهات فون كرمان لدراسة تأثير الغير الخطي هندسي. المعادلات تؤدي إلى معادلة تفاضلية خطية التي تؤدي إلى حل بسيط. وأظهرت النتائج أن خصائص الصفائح المركبة من المواد المتدرجة الخاصة أظهرت سلوك مختلفة من لوحات مصنوعة من مواد واحد في الانحناء أسطواني. يتم عرض النتائج العددية لتوضيح تأثير توزيع المواد على الأسهم والقيود.

في الجزء الثاني، ونحن مهتمون كما في الجزء الأول من عملنا لدراسة الانحناء أسطواني الغير خطي للوحات nanocomposites من المواد المتدرجة الخاصة المعززة بأنايب الكربون النانوية أحادية الجدار (SWCNT). يتعرض لوحات لحمولة موحدة في البيئات الحرارية ويتم استخدام التصرفات الغير الخطية الهندسية في معادلات التشوهات وفقا افتراضات فون كرمان. ويفترض أن لوحات nanocomposites من المواد المتدرجة الخاصة المعززة بأنايب الكربون النانوية (FG-CNTCRs) تتغير في اتجاه سمك اللوحة. المعادلات تؤدي إلى معادلة تفاضلية خطية التي تؤدي إلى حل بسيط. يتم عرض النتائج العددية لتوضيح تأثير توزيع المواد على الأسهم والقيود.

أخيرا، استعملنا نظرية جديدة ذو الترتيب العالي لمتغيرين لدراسة الغير الخطية للانحناء الصفائح ساندويتش المركبة من المواد المتدرجة الخاصة. هذه النظرية متناسقة، لا تتطلب معامل التصحيح القص. تتعرض لوحات ساندويتش لحمولة الضغط ويتم استخدام التصرفات الغير الخطية الهندسية في معادلات التشوهات وفقا افتراضات فون كرمان. استعمل مفهوم الطاقة على النظرية الحالية ونظريات FSĐT و TSĐT وتستخدم للتنبؤ انحراف كبير والإجهاد من خلال سمك لوحات ساندويتش مع التدرجات في الخصائص. ويفترض على جانبي لوحة ساندويتش ليكون موحد الخواص، ويفترض أن معامل المرونة، معاملات التمدد الحراري يكون متغير وفقا لتوزيع من حيث حجم الكسور المكونات. الطبقة الأساسية هي مادة متجانسة وموحد الخواص مصنوعة من السيراميك. نتائج لوحة مع سمك مختلفة باستخدام هذه النظرية ليست فقط أكثر دقة بكثير من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام نظرية الكلاسيكية للوحات، ولكن يمكن مقارنتها تقريبا مع تلك التي تم الحصول عليها باستخدام نظريات مرتبة أعلى.

**الكلمات الرئيسية:** خصائص التدرج المواد (E-FGM- S-FGM) السلوك غير الخطي؛ نانو المركبات؛ التحليلية أسلوب النمذجة، الطاقة، نظرية الكلاسيكية لوحة (CPT) ، نظرية النظام عالية، لوحات ساندويتش.

## **Liste des figures**

# Liste des figures

## Chapitre I

<b>Figure I.1</b>	Caractéristiques de FG.....	7
<b>Figure I.2</b>	Principe de la méthode coulage en bande .....	10
<b>Figure I.3</b>	Disposition du procédé frittage laser différentiel .....	13
<b>Figure I.4</b>	Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	14
<b>Figure I.5</b>	Géométrie d'une plaque en FGM.....	15
<b>Figure I.6</b>	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM. ....	16
<b>Figure I.7</b>	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM. ....	17
<b>Figure I.8</b>	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM .....	18

## Chapitre II

<b>Figure II.1</b>	Structure d'un nanotube de carbone .....	20
<b>Figure II.2</b>	Schéma montrant la grande flexibilité des nanotubes de carbone .....	21
<b>Figure II.3</b>	Structure du graphite hexagonal.....	23
<b>Figure II.4</b>	Structure du diamant.....	24
<b>Figure II.5</b>	Fullerène C <sub>60</sub> .....	24
<b>Figure II.6</b>	Structure schématique d'un MWNT, où l'on voit bien l'arrangement Concentrique des feuilles de graphène. ....	25
<b>Figure II.7</b>	Structure d'un plan de graphène en deux dimensions. Le réseau hexagonal est décrit à partir des deux vecteurs de base $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ .....	27
<b>Figure II.8</b>	Exemples d'hélices dessinées à la surface des nanotubes.....	28

<b>Figure II.9</b>	Nanotubes de carbone monofeuillets .....	29
<b>Figure II.10</b>	Schéma d'un cristal de 7 nanotubes.....	29
<b>Figure II.11</b>	Production de nanotubes de carbone par la méthode de l'arc électrique .....	31
<b>Figure II.12</b>	(a) et (b) Manipulation d'un nanotube de carbone par AFM .....	34

### Chapitre III

<b>Figure III.1</b>	Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.....	41
<b>Figure III.2</b>	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff .....	42
<b>Figure III.3</b>	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	44
<b>Figure III.4</b>	Illustration de la plaque d'ordre élevé .....	45
<b>Figure III.5</b>	Forces et moments agissant sur un élément de plaque.....	49

### Chapitre IV

<b>Figure IV.1</b>	Géométrie d'une plaque de FGM.....	54
<b>Figure IV.2</b>	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.....	56
<b>Figure IV.3</b>	Variation le module de Young de la plaque E-FGM pour différents rapports $E_1/E_2$ .....	57
<b>Figure IV.4</b>	Plan moyen d'une plaque FGM déformée .....	57
<b>Figure IV.5</b>	Variation de la flèche maximale adimensionnelle $w_{\max}$ de la plaque S-FG avec $p = 2$ en fonction de $q''$ .....	65
<b>Figure IV.6</b>	Variation de la flèche maximale adimensionnelle $w_{\max}$ de la plaque E-FG en fonction de $q''$ .....	65
<b>Figure IV.7</b>	Variation de la flèche adimensionnelle sous chargement transversal $q = 1 \text{ KN/m}^2$ en fonction de la longueur de la plaque S-FGM avec $p = 2$ .....	66
<b>Figure IV.8</b>	Variation de la flèche adimensionnelle sous chargement transversal $q = 1 \text{ KN/m}^2$ en fonction de la longueur pour différent $E_1 / E_2$ en analyse linéaire. ....	67

<b>Figure IV.9</b> Flèche adimensionnelle due au chargement transversal $q = 1 \text{ KN/m}^2$ en fonction de la longueur adimensionnelle pour différents $E_1 / E_2$ en analyse non linéaire.....	67
<b>Figure IV.10</b> Variation de la flèche maximale adimensionnelle $w_{\max}$ de la plaque S-FG en fonction de $q^n$ pour différents paramètres matériels.....	68
<b>Figure IV.11</b> Variation de la flèche maximale adimensionnelle $w_{\max}$ de la plaque E-FG en fonction de $q^n$ pour différent $E_1 / E_2$ .....	69
<b>Figure IV.12</b> Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque S-FG à travers l'épaisseur soumise à $q = 1 \text{ KN/m}^2$ pour différents paramètre matériels en analyse linéaire .....	70
<b>Figure IV.13</b> Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque S-FG soumise à $q = 1 \text{ KN/m}^2$ à travers l'épaisseur pour différents paramètre matériels en analyse non linéaire .....	70
<b>Figure IV.14:</b> Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque E-FG à travers l'épaisseur soumise à $q = 1 \text{ KN/m}^2$ pour différents $E_1 / E_2$ en analyse linéaire .....	71
<b>Figure IV.15</b> Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque E-FG à travers l'épaisseur soumise à $q = 1 \text{ KN/m}^2$ pour différents $E_1 / E_2$ en analyse non linéaire.....	72
<b>Figure IV.16</b> Flèche adimensionnelle de la plaque S-FG en fonction de la flèche adimensionnelle de la plaque en métal pour différents paramètre, matériel en analyse non linéaire ( $q = 1 \text{ KN/m}^2$ ).....	73
<b>Figure IV.17</b> Flèche adimensionnelle de la plaque E-FG en fonction de la flèche adimensionnelle de la plaque homogène pour différents paramètre matériel en analyse non linéaire .....	74

## Chapitre V

<b>Figure V.1</b> Géométrie de composites renforcées par des nanotubes de carbone: (a)UD-CNTRC and (b) FG-CNTRC.....	79
<b>Figure V.2</b> Variation des flèches adimensionnelles de la plaque CNTRC soumise à une charge uniforme transversale $q = 1 \text{ KN/m}^2$ en fonction de la longueur adimensionnelle pour $V_{CN}^* = 0.11$ , $T = 300 \text{ K}$ .....	89
<b>Figure V. 3:</b> Effets de la fraction de volume de nanotube en comportement non linéaire en flexion des plaques CNTRC sous chargement uniforme $q = 1 \text{ KN/m}^2$ et $T = 300 \text{ K}$ .....	90

**Figure V.4** Variation de la flèche adimensionnelle maximale au centre  $w_{\max}$  de la plaque CNTRC en fonction de  $q^n$  pour différentes fraction de volume  $V_{CN}^*$  .....91

**FigureV. 5** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  au milieu de la plaque CNTRC à travers l'épaisseur soumise à  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  pour  $V_{CN}^* = 0.11$  et  $T = 300 \text{ K}$  .....92

**Figure V. 6** Effet de la fraction de volume des nanotubes sur la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  au milieu de la plaque CNTRC soumise à  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  et  $T = 300 \text{ K}$  .....93

**Figure V. 7** Effets du changement de la température dans un comportement non linéaire en flexion d'une plaque CNTRC sous charge uniforme  $q = 100 \text{ KN/m}^2$  pour  $V_{CN}^* = 0.17$  .....94

## Chapitre VI

**Figure.VI.1** Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.....99

**Figure VI.2** Flèche au centre en fonction du paramètre de matériau  $k$  sous charge  $Q = -400$  avec rapport  $a/h = 20$  et  $t_c/h = 0.8$  ..... 110

**Figure VI.3:** Flèche adimensionnelle au milieu en fonction du paramètre matériel  $k$  sous chargement  $Q = -25$  avec élancement  $a/h = 2$  et  $t_c/h = 0.8$  ..... 111

**Figure VI.4:** Contrainte axiale adimensionnelle au milieu de la plaque sandwich sous la charge  $Q = -25$ , avec  $a/h = 2$ , le paramètre matériel  $k = 2$  et  $t_c/h = 0.8$ . ..... 112

**Figure VI.5:** Variation de la flèche adimensionnelle  $W$  au milieu de la plaque sandwich avec  $a/h = 10$ , le paramètre matériel  $k = 0.2$  et  $t_c/h = 0.8$  en fonction de  $Q$  ..... 113

**Figure VI.6:** Flèche adimensionnelle au milieu de la plaque sandwich en fonction du chargement de pression uniforme pour différentes épaisseur de du cœur de la plaque ..... 114

# Liste des tableaux

# Liste des tableaux

## Chapitre I

**Tableau I.1:** comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. ....6

## Chapitre II

**Tableau II.1.** Comparaison des résultats numériques pour un composite PmPV–CNT. ....38

## Chapitre V

**Tableau V.1**.... .Propriétés des matériaux dépendant de la température pour SWCNT (10, 10)  
( $L= 9.26$  nm;  $R= 0.68$  nm;  $h= 0.067$  nm;  $\nu_{12}^{CN} = 0.175$  ). ....87

**Tableau V.2.** Comparaison des modules de Young des composites PmPV/CNT renforcés par  
des tube (10,10) sous  $T = 300$  K .....88

# Liste des symboles

### Liste des symboles

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$p$	Paramètre du matériau
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$
$\varphi_x, \varphi_y$	Les rotations autour des axes $x$ et $y$
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta W_{int}$	Travail virtuel intérieur
$\delta W_{ext}$	Travail virtuel extérieur
$\Pi$	Energie potentielle totale
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel

## Liste des symboles

---

$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$i$ et $j$	Sont des nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$T$	Chargement thermique
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice

# **Introduction générale**

# Introduction Générale

Les plaques apparaissent très fréquemment autour de nous sous diverses formes comme par exemple les films minces, les toiles, les membranes biologiques, les tôles, les plaques continentales, les nanotubes. . . Cela tient en partie à leur bonne résistance mécanique, leur souplesse dans le domaine élastique, couplées à leur légèreté. Pourtant, malgré plus d'un siècle d'études des comportements des structures minces élastiques, encore de nombreuses questions sont ouvertes, notamment du point de vue des non linéarités provenant des grandes déformations.

Le modèle linéaire de plaque qui nous sert de base est celui publié en 1892 par A. Love[1] fournissant les équations d'équilibre sous l'hypothèse des déplacements infinitésimaux (hypothèse des petites perturbations : HPP). Cette théorie fondée sur les hypothèses de G. Kirchhoff s'inspire de celle des poutres d'Euler-Bernoulli. Il s'agit d'une description simple de la déflexion d'une plaque élastique mince. Bien entendu le modèle linéaire modélise des petits déplacements et se révèle insuffisant pour décrire la flexion forte d'une plaque élastique. C'est pour prendre en compte les non-linéarités géométriques induites par les déplacements modérés que l'ingénieur hongrois Von Karman proposa en 1910 un modèle que nous allons utiliser par la suite de notre travail.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de nature différente qui permet d'augmenter les performances exigées. Cependant, la discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants du matériau composite, provoque des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques et thermiques, spécialement dans un environnement thermique ultra-chaud, la différence relative du coefficient d'expansion thermique provoque des contraintes résiduelles importantes. A cet effet, le concept du matériau à gradient des propriétés (Functionally Graded Materials « FGM ») est introduit pour satisfaire la demande dans un environnement ultra haute température et aussi pour éliminer les contraintes singulières.

Le matériau à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM ») découvert par une équipe de chercheurs japonais à la fin des années 80 dont les propriétés mécaniques varient lentement et de façon continue dans la direction de l'épaisseur de la structure [2] et ce, pour surmonter le problème concernant les structures multicouches classiques ou des couches homogènes sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustique,...) de la structure (plaques, structures renforcées par matériaux composites,...) qui provoque la création des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire aux délaminages, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre.

Cette étude permet de mettre en évidence les principales différences entre le comportement linéaire et non-linéaire des plaques minces.

Les travaux réalisées au cours de cette thèse et présentés dans ce mémoire, s'inscrivent dans cette thématique "étude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique". Les principaux objectifs sont d'une part, l'étude du comportement de plaque mince avec différentes propriétés matérielle (E-FGM) et (S-FGM) du matériau à gradient de propriétés, en non linéarité géométrique et d'autre part, l'étude du comportement non linéaire en flexion cylindrique des plaques nanocomposites à gradient de propriétés renforcées par des nanotubes de carbone simple-murés (SWCNTs) avec des fractions volumiques faibles de nanotube de carbone (CNTs). On suppose que les propriétés matérielles de SWCNTs sont dépendantes de la taille et de la température et est obtenu par des méthodes de dynamique moléculaires (MD).

Aussi dans le même principe concernant maintenant l'analyse non linéaire de la flexion des plaques « sandwiches » en FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé à deux variables avec seulement quatre fonctions inconnues développées pour l'analyse non linéaire de flexion des plaques sandwiches à gradient de propriétés. Les équations constitutives pour les plaques rectangulaires sandwiches en FGM ont été obtenues en utilisant la théorie de Von Karman pour les grands déplacements et la solution a été obtenue par la méthode de minimisation de l'énergie potentielle totale. Pour illustrer la précision de la théorie actuelle, les résultats

obtenus sont comparés avec ceux de la théorie classique des plaques, de premier ordre et la théorie d'ordre élevé de troisième ordre avec cinq fonctions inconnues.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse est organisé en six chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre présente un rappel de la situation bibliographique sur l'étude des nanocomposites (focalisé sur les modes de préparation, de caractérisation et le comportement rhéologique).

Le troisième chapitre passe en revue les différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Le quatrième chapitre a pour objectif de présenter une solution mathématique non linéaire des plaques FGM en flexion cylindrique par la théorie classique des plaques (classical plates théorie « CPT ») soumise à un chargement transversal et de comparer le comportement des plaques en matériau isotrope et celle des plaques en F.G.M. Les propriétés matérielles de la plaque F.G.M changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant les fonctions sigmoïdes (*S-F.G.M*) et exponentielles (*E-F.G.M*).

Le cinquième chapitre concerne le comportement non linéaire des plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone (CNTRCs) dans un environnement thermique en flexion cylindrique par la théorie classique des plaques (classical plates théorie « CPT »). Le concept des matériaux à gradient de propriétés est appliqué aux plaques nanocomposite renforcées par des nanotubes simple-murés de carbone SWCNTs avec des fractions volumiques faibles de nanotube. Les équations régissant sont basées sur une théorie des plaques de déformation non linéaire du type Von Karman en introduisant l'effet thermique. Dans ce chapitre sera détaillé le nouveau mode de préparation utilisé pour l'élaboration des nanocomposites.

Le sixième chapitre et le dernier est consacré à l'étude du comportement non linéaire en flexion de plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse du comportement mécanique en utilisant la méthode de Ritz.

Enfin une conclusion générale tire le bilan de ce travail en termes d'efficacité et de fiabilité du modèle mis en œuvre et présente également quelques perspectives de développement liées à l'approche utilisée. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.

**Chapitre I**  
**Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés**

# Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

## **I.1. Introduction**

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultra-hautes. Les FGM sont au microscope des matériaux composites non homogènes. Ces matériaux sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique. L'avantage d'utiliser ces matériaux est qu'ils peuvent résister à de hautes températures tout en maintenant leur propriété structurelle. Les FGM possèdent des propriétés qui changent graduellement et sans interruption afin de réaliser une fonction désirée. Un FGM typique, avec un effet élevé de couplage flexion-membrane, est un composite homogène fabriqué à partir de différentes phases de composants de matériaux (le plus souvent en céramique et métal). La composition change d'une surface en céramique à une surface en métal avec une variation voulue de la fraction volumique des deux matériaux entre les deux surfaces.

Le matériau à gradients de propriétés a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais [3,4]. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion [5,6,7]. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température.

Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures [8].

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [9]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [2].

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

**Tableau I.1:** comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

## **I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés**

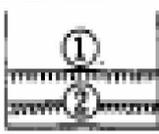
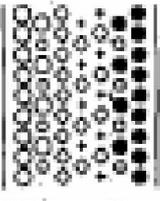
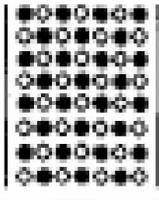
Le concept du matériau à gradient de propriété (FGM) est proposé comme étant un matériau capable de résister à une température de surface de 2000 K et à une variation de température de 1000 K à travers une section inférieure à 10 mm. Les changements continus de la composition, de la microstructure, de la porosité de ces matériaux résultent des changements des propriétés telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique. Depuis 1984, les couches minces de FGM ont été largement recherchées, et sont presque une réalité commerciale.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) représente un des derniers développements du 21<sup>ème</sup> siècle. Le concept de FGM a non seulement beaucoup d'importance dans la conception pratique des matériaux réfractaires mais également dans le développement de divers matériaux graduels.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) dont lesquels la fraction volumique des fibres des constituants changent sans interruption en fonction de la position le long d'une direction. L'avantage du matériau à gradient de propriétés (FGM) est d'éviter la concentration

des contraintes d'interfaces développées dans les matériaux composites conventionnels. La composition et la microstructure changent dans l'espace suivant une loi de distribution prédéfinie. Les matériaux composites offrent de nombreuses propriétés supérieures, comme la haute résistance et la rigidité élevée. Actuellement, aucun matériau industriel ne peut résister à de tels chargements thermomécaniques.

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.1

Function/ Property	① Mechanical Strength ② Thermal Conductivity		
Structure/ Texture	Constituent Elements: Ceramics (○) Metal (●) Fiber (◇+) Micropore (○)		
Materials	Example	FGM	non-FGM

**Figure I.1.** Caractéristiques de FGM [10]

### I.3. Historique de développement du FGM

Un groupe de scientifiques, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [10]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [11].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la

relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [10].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [12].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [13].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but

d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

#### **I.4. Les méthodes de fabrication du Matériau à Gradient de propriétés**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [14].

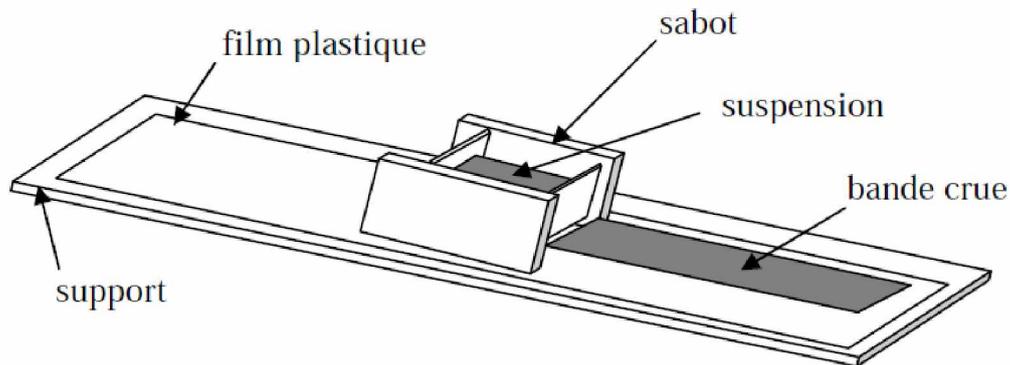
Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après:

##### **I.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-

aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.2). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.2 :** Principe de la méthode coulage en bande [13].

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947 (voir réf. [15]), et depuis d'autres travaux ont été réalisés [16,17]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et surtout pour les condensateurs à base de  $\text{BaTiO}_3$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ( $\text{BaTiO}_3$  principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par

Mistler [18], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [16,17].

#### **I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [19]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

#### **I.4.3 Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [20].

#### **I.4.4. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [21].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.4.5. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [22].

#### **I.4.6 C. V. D. et P. V. D.**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées, [23].

#### **I.4.7. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [24].

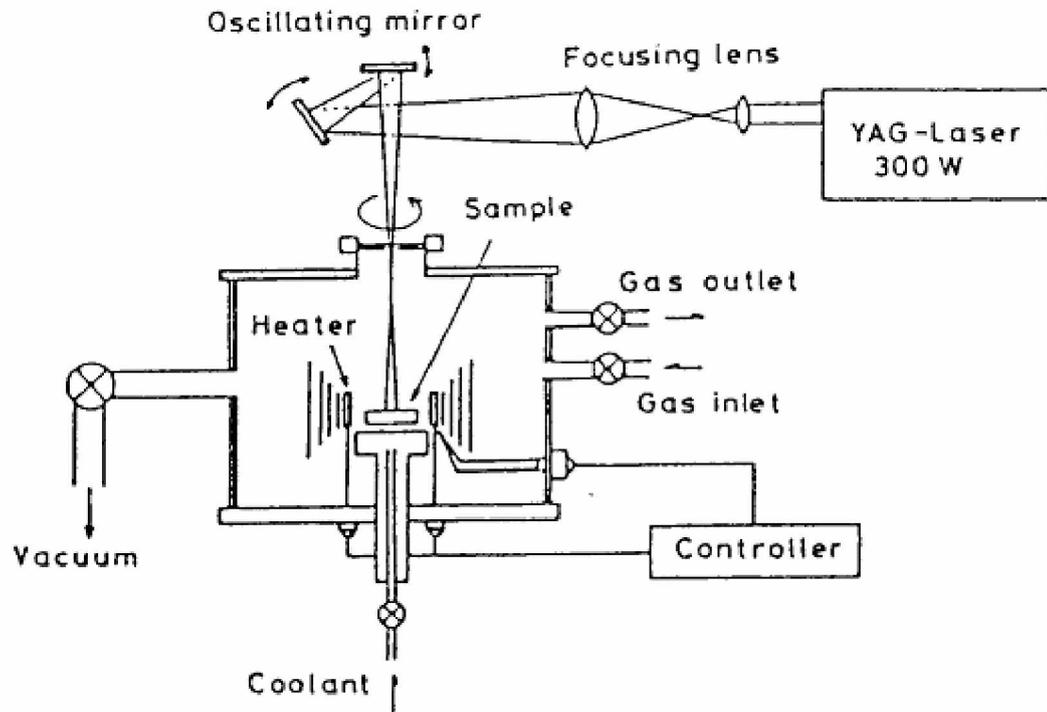
Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **I.4.8 Frittage Laser Différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents

points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et al. [25] ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.3 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.



**Figure I.3.** Disposition du procédé frittage laser différentiel [25].

#### **I.4.9 Implantation Ionique (Sputtering)**

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [20].

#### **I.4.10 Dépôt par Centrifugation**

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.4) [20].

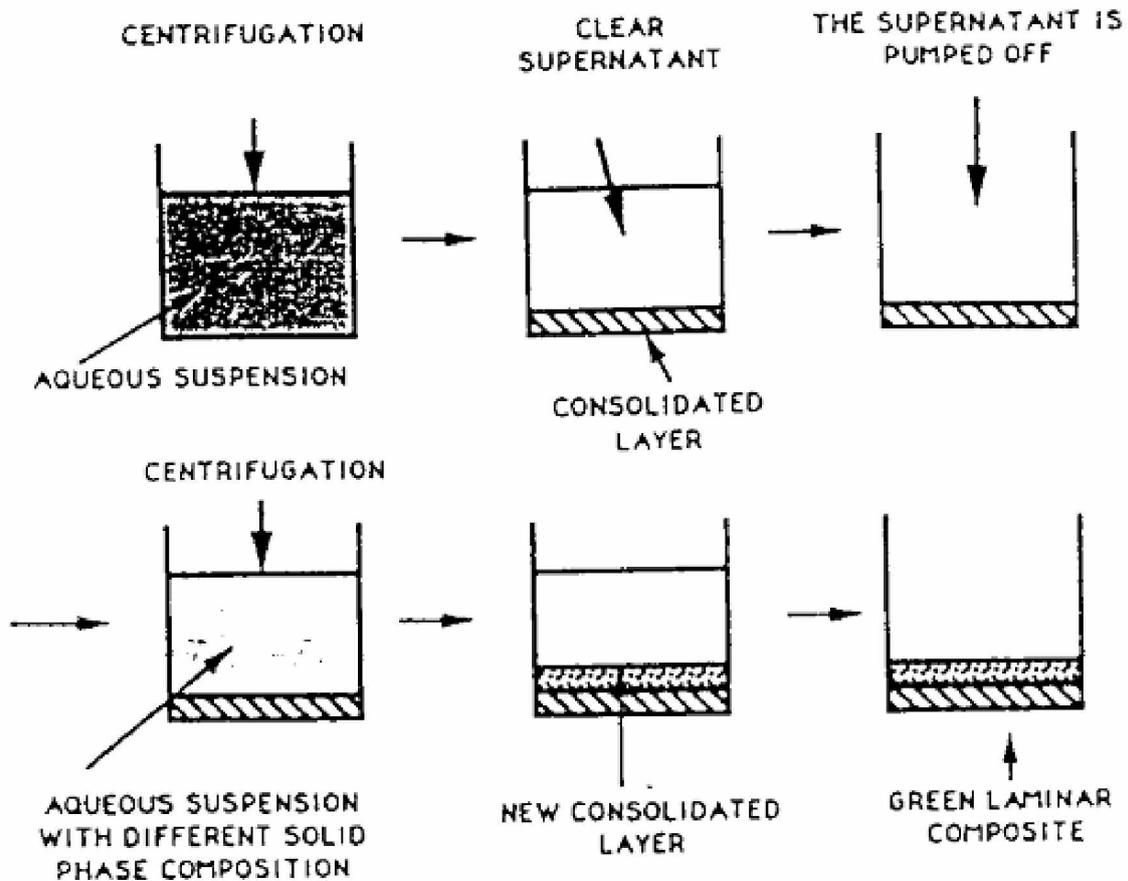


Figure I.4. Schéma du procédé dépôt par centrifugation [20]

### I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros -propriétés graduées sans interruption. Un **FGM** peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

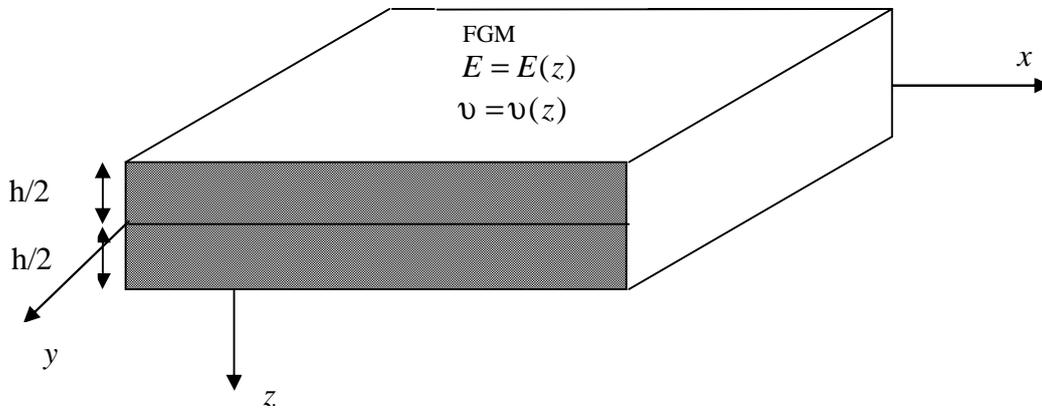


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z), \nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [26] :

$$(\text{I.2})$$

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z)$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

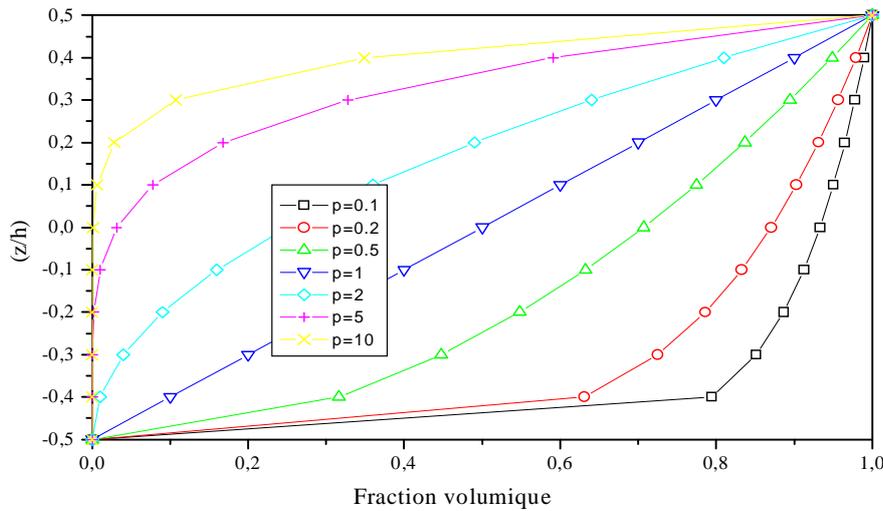


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [26]. Par conséquent, Chung et chi [27] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

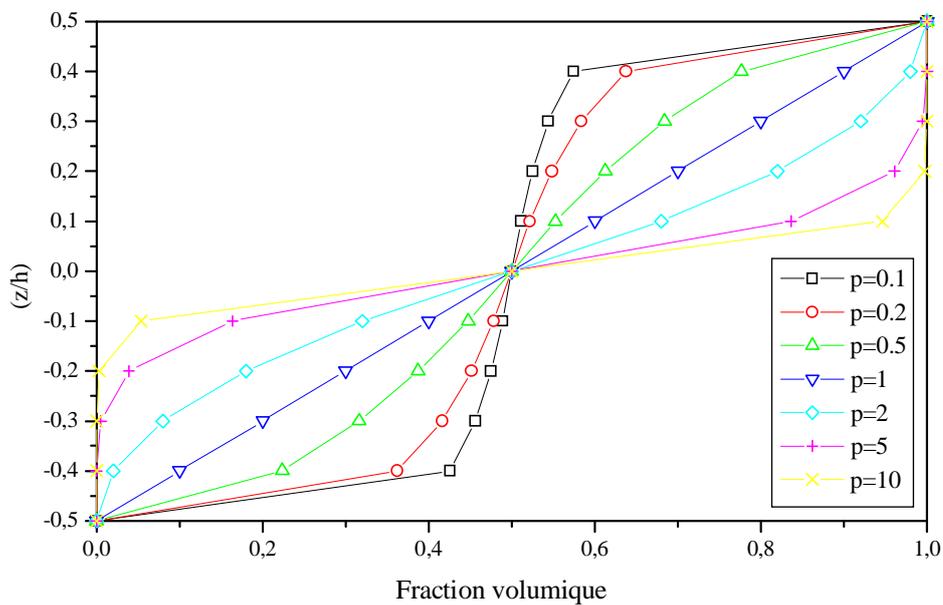


Figure I.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

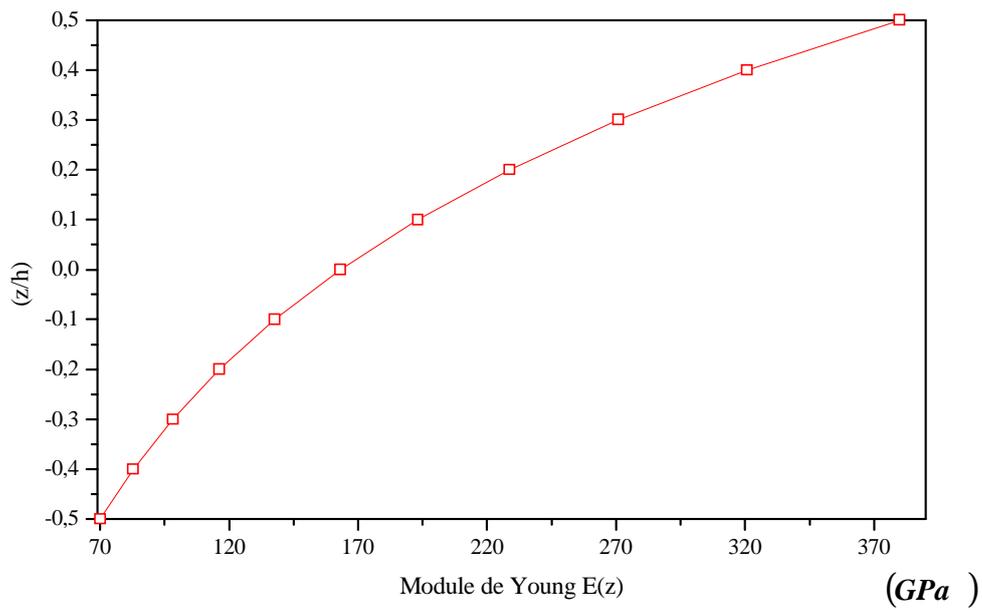
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [28] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.



**Figure I.8 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

## I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

## **Chapitre II**

# **Généralités Sur Les Matériaux nanocomposites**

# Chapitre II : Généralités Sur Les Matériaux nanocomposites

## **II.1. Introduction**

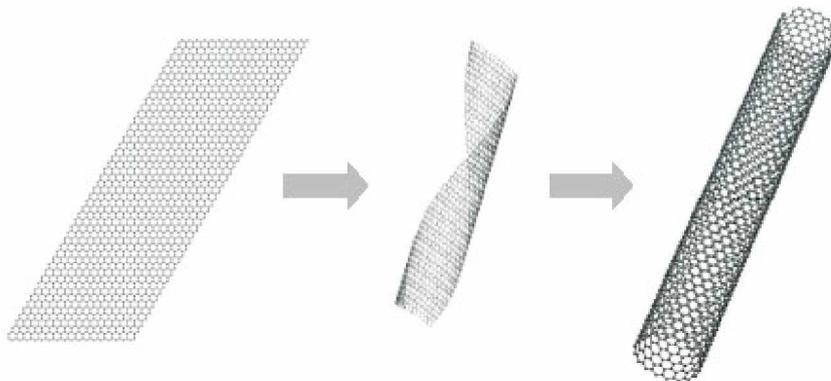
Un monde nouveau est en train de naître, un monde qui nous promet des produits plus petits, plus légers, moins onéreux, un monde qui nous propose des ordinateurs plus performants, des moyens de communication plus rapides, des traitements médicaux plus efficaces, un environnement plus propre, un cadre de vie plus agréable. Ce monde, c'est le nanomonde, c'est-à-dire le monde des nanosciences et des nanotechnologies. Ce monde fascinant vise à élaborer de nouveaux matériaux et des composants toujours plus petits, à construire « atome par atome » de nouvelles molécules puis à les assembler pour réaliser de nouvelles fonctions, et à exploiter des phénomènes nouveaux qui n'apparaissent qu'à l'échelle du nanomètre. Une part importante de ces activités concerne les nanomatériaux, structures dont au moins une des phases possède une dimension inférieure à 100 nanomètres (1 nanomètre est 1 million de fois plus petit qu'un mètre). Ils constituent une étape élémentaire vers la réalisation de nouveaux produits industriels issus des nanotechnologies.

Les industries automobile, aéronautique, spatiale recherchent des matériaux de plus en plus performants, multifonctionnels, exploitant plusieurs caractéristiques (mécanique, résistance à la chaleur, électrique...). Cela aboutit souvent à l'utilisation de composites car ils possèdent de meilleurs jeux de propriétés que les composés pris séparément. L'utilisation de renforts de taille nanométrique aboutit à l'appellation nanocomposite.

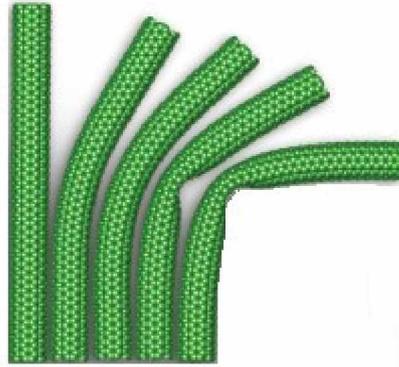
Actuellement, les travaux sur les composites renforcés par des nanotubes de carbone sont devenus un point très important dans la recherche scientifique et ce, car les nanotubes de carbone (CNTs) possèdent des propriétés mécaniques, électriques et thermiques exceptionnelles dans les composites de matrice de polymère. La propriété la plus importante des nanotubes de carbone est sa rigidité combinée avec son excellente résistance. Par conséquent, l'introduction des nanotubes de carbone dans des polymères peut améliorer leurs applications dans les domaines de renforcement des composites comme les dispositifs électroniques.

Découverts en 1991, les nanotubes de carbone sont le fer de lance des nanotechnologies. Un nanotube est un feuillet de graphite formé d'atomes de carbone disposés en réseau hexagonal (figure II.1), comme un nid d'abeilles, et enroulé sur lui-même comme un cigare. Son diamètre est de l'ordre du nanomètre, sa longueur peut atteindre plusieurs micromètres. À chacune de ses deux extrémités se trouve une demi-molécule de fullerène. Cette molécule est constituée de 60 atomes de carbone, son diamètre est d'environ un nanomètre et elle est formée d'hexagones et de pentagones qui lui donnent une forme presque sphérique, semblable à un ballon de football.

100 000 fois plus fin qu'un cheveu, un nanotube de carbone est 100 fois plus résistant et 6 fois plus léger que l'acier. Ses avantages ne s'arrêtent pas là : il est aussi flexible (figure II.2) et conducteur, possède d'excellentes propriétés mécaniques, thermiques et électroniques. Ses propriétés mécaniques, telles que résistance et flexibilité, en font un matériau de choix dans le domaine sportif. On en trouve déjà dans les raquettes de tennis, les clubs de golf, les cadres de vélo ou les carrosseries de Formule 1. Il représente ainsi la « fibre de carbone ultime », qui lui



**Figure II.1** - Structure d'un nanotube de carbone



**Figure II.2** - Schéma montrant la grande flexibilité des nanotubes de carbone

permet de conserver tous les avantages sans en avoir les inconvénients. En effet, alors que la fibre de carbone est fragile, le nanotube de carbone, constitué d'une seule molécule, jouit d'une cohésion atomique parfaite. Et alors que la fibre de carbone se casse dès qu'on la courbe, le nanotube peut s'enrouler et même se tisser !

Même lorsqu'il est en mélange, il est encore possible de profiter de tous ses avantages : ajouter 3 % de nanotubes à un caoutchouc synthétique multiplie par 10 sa rigidité. Les nanotubes sont également utilisés en poudre. Comme la surface de contact avec l'air est très grande (plusieurs centaines de mètres carrés par gramme), il est envisagé de l'utiliser pour le stockage de gaz (batteries de voitures à hydrogène), la catalyse chimique ou le filtrage de polluants. Les nanotubes ont également des applications en électronique. Selon l'angle d'enroulement du feuillet de graphite, ils peuvent se comporter soit en conducteurs d'électricité, soit en semi-conducteurs. Un câblage de nanotubes supporte ainsi des densités de courant 1000 fois supérieures à celles du cuivre.

Grâce à ses propriétés mécaniques, électriques et thermiques exceptionnelles, le nanotube de carbone constitue le renfort par excellence pour les nanocomposites à haute performance. De nombreuses expériences ont été conduites sur ce type de matériaux, mais plus rares sont les outils qui permettent de prédire leurs propriétés. L'objectif principal de la recherche est de prédire le comportement élastique d'un nanocomposite à base de nanotubes de carbone à parois simples.

## **II.2. Définition d'un nanocomposite**

Un matériau composite est constitué de plusieurs composants élémentaires, dont l'association confère un ensemble de propriétés qu'aucun des composants, pris séparément, ne possède. Le but que l'on recherche le plus souvent en substituant un matériau composite à un

matériau traditionnel, est pour une même rigidité de structure, un gain de masse appréciable.

Un matériau composite est constitué de deux phases :

§ La matrice.

§ Le renfort ou la charge.

Les nanocomposites constituent une classe de matériaux à part entière: bien qu'ils aient la même composition que les composites classiques, notamment concernant la nature de la matrice, leur différence réside dans la taille des composants (matrice ou renfort) et dans le fait que certaines propriétés spécifiques n'apparaissent qu'à l'échelle du nanomètre.

Les composites avec des renforts micrométriques ont montré certaines de leurs limites. Leurs propriétés résultent de compromis : l'amélioration de la résistance, par exemple, se fait au détriment de la plasticité ou de la transparence optique. Les nanocomposites peuvent pallier à certaines de ces limites et présentent des avantages face aux composites classiques à renforts micrométriques :

- Une amélioration significative des propriétés mécaniques notamment de la résistance sans compromettre la ductilité du matériau car la faible taille des particules ne crée pas de larges concentrations de contraintes.
- Une augmentation de la conductivité thermique et de diverses propriétés notamment optiques qui ne s'expliquent pas par les approches classiques des composants. Les nanoparticules, ayant des dimensions en deçà des longueurs d'onde de la lumière visible (380-780 nm), permettent au matériau de conserver ses propriétés optiques de départ ainsi qu'un bon état de surface.

La diminution de la taille des renforts que l'on insère dans la matrice conduit à une très importante augmentation de la surface des interfaces dans le composite. Or, c'est précisément cette interface qui contrôle l'interaction entre la matrice et les renforts, expliquant une partie des propriétés singulières des nanocomposites. A noter que l'ajout de particules nanométriques améliore, de manière notable, certaines propriétés avec des fractions volumiques beaucoup plus faibles que pour les particules micrométriques.

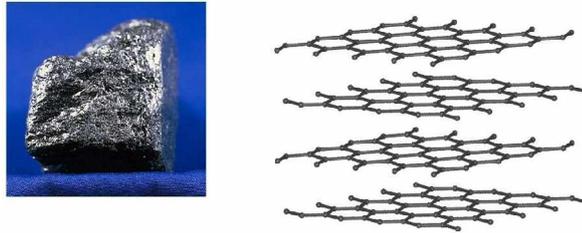
On obtient ainsi à performances égales, un gain de poids important ainsi qu'une diminution des coûts puisque l'on utilise moins de matières premières (sans tenir compte du surcoût des nano-renforts), une meilleure résistance pour des dimensions structurales similaires et une augmentation des propriétés barrières pour une épaisseur donnée.

## **II.3. Les formes traditionnelles du carbone**

### **II.3.1. Le graphite**

Le graphite présente une structure lamellaire constituée d'un empilement de feuillets. Chaque feuillet, ou plan de graphène, est constitué d'atomes de carbone en état d'hybridation  $sp^2$ , formant un réseau hexagonal de paramètre de maille 0,243 nm, la longueur de la liaison C-C étant de 0,142 nm. Il existe deux façons d'empiler les plans de graphène sur eux-mêmes, résultant en deux formes cristallines différentes de graphite.

La forme cristalline stable est le graphite hexagonal [30]. Les plans de graphène sont empilés, comme sur la figure II.3. La distance inter-feuillets est de 0,335 nm.



**Figure II.3 - Structure du graphite hexagonal**

L'autre forme cristalline possible est le graphite rhomboédrique, phase métastable du graphite hexagonal. Les plans de graphène sont ici aussi empilés, mais chaque plan est décalé d'une longueur de liaison par rapport au plan précédent. La distance inter-feuillets est également de 0,335 nm.

Le graphite se rencontre rarement sous la forme d'un monocristal, bien que la croissance de monocristaux macroscopiques soit possible. Le graphite courant, celui des mines de crayon, est un polycristal, constitué de cristallites de graphite hexagonal orienté aléatoirement.

### **II.3.2 Le diamant**

Le diamant est une forme allotropique tridimensionnelle du carbone. Dans le diamant, les atomes de carbone sont en état d'hybridation  $sp^3$ , et donc tétravalents. Il existe plusieurs structures cristallines du diamant [31], comme le diamant hexagonal ou la lonsdaléite, mais la structure la plus courante est de loin le diamant cubique (figure II.4). La maille de cette structure est de type cubique faces centrées, avec un paramètre de maille de 0,356 nm, et une distance interatomique de 0,154 nm.

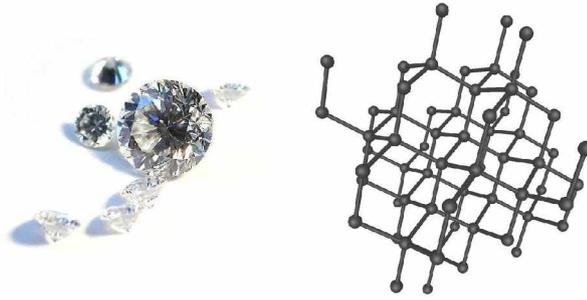


Figure II.4 - Structure du diamant

## II.4 Les nouvelles formes du carbone

### II.4.1 Fullerènes et dérivés

L'élément principal du graphite, et également point de départ pour la construction de nouvelles nanostructures carbonées, est le plan de graphène, que l'on peut se représenter comme une feuille plane pavée d'hexagones. Il est possible de briser virtuellement la planéité de la feuille de graphène en insérant des défauts dans la structure, de type pentagone ou heptagone [32]. L'ajout d'un pentagone dans un plan d'hexagones crée une courbure positive. L'ajout d'un heptagone créera, dans le même plan, une courbure négative. La courbure créée par chaque type de défaut s'annule, et une feuille de graphène dans laquelle on aurait inséré un pentagone et un heptagone resterait globalement plane.

En 1985 trois chercheurs, Harold Kroto, Richard Smalley et Robert Curl font une découverte qui leur vaut le prix Nobel de chimie en 1996 : la molécule de fullerène. De forme sphérique, constituée de soixante atomes de carbone, cette molécule a un diamètre d'environ un nanomètre et est formée d'hexagones et de pentagones (figure II.5). La molécule de fullerène se rencontre aux deux extrémités d'un nanotube de carbone.

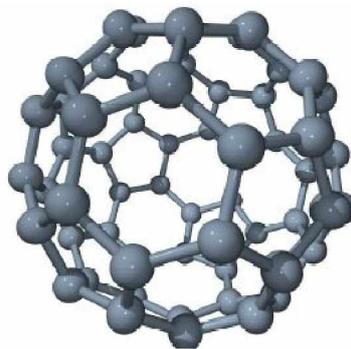


Figure II.5- Fullerène C<sub>60</sub>

Cette nouvelle molécule de 60 atomes de carbone, ou C<sub>60</sub>, a été appelée buckminsterfullerène, par analogie avec les dômes géodésiques de l'architecte R. Buckminster

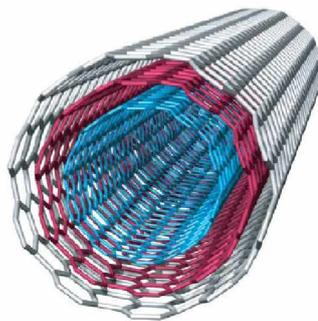
Fuller. Depuis, le nom a évolué, et nous nous référons maintenant à cette molécule en tant que fullerène, ou plus simplement  $C_{60}$ .

Le fullerène  $C_{60}$  est le représentant le plus connu de la famille des fullerènes, molécules « cages » de plus de 60 atomes de carbone [33]. Les fullerènes doivent obéir à de fortes conditions de stabilité chimique ; toutes les structures géométriquement possibles n'existent donc pas. Les fullerènes les plus connus sont les  $C_{60}$  et  $C_{70}$ , mais il existe également les  $C_{76}$ ,  $C_{78}$ ,  $C_{82}$ ,  $C_{84}$ ...

Depuis leur synthèse initiale par ablation laser, les moyens de production de fullerènes ont progressé. En 1990, Krätschmer réussit la première synthèse à grande échelle de fullerènes par la sublimation d'une électrode en graphite par arc électrique [34]. Aujourd'hui, des méthodes de synthèse du  $C_{60}$  par voie organique existent, ouvrant la voie à une production de masse des fullerènes [35].

#### **II.4.2 Nanotubes multifeuillets (ou multiparois)**

La découverte des fullerènes en 1985 créa un véritable engouement pour la recherche et la caractérisation de nouvelles nanostructures carbonées. Les techniques de caractérisation, et notamment la microscopie électronique, permirent à Sumio Iijima de mettre en évidence en 1991 [36], dans le produit d'évaporation du graphite par arc électrique, des nanostructures graphitiques unidimensionnelles, baptisées nanotubes multifeuillets (Multi-Walled Carbon NanoTubes, MWCNTs).



**Figure II.6-** Structure schématique d'un MWNT, où l'on voit bien l'arrangement Concentrique des feuilles de graphène.

Ces nanotubes multifeuillets sont constitués d'un arrangement concentrique de feuilles de graphène, repliées sur elles-mêmes de manière à former des cylindres (figure II.8). Cette structure est communément appelée poupée russe, par analogie avec le jeu de poupées qui s'emboîtent les unes dans les autres. Le diamètre du plus petit tube interne détermine la taille

du canal central du nanotube. Le diamètre interne d'un nanotube multifeuillet est de l'ordre de deux nanomètres, tandis que le diamètre externe est de l'ordre d'une vingtaine de nanomètres. Cependant, les diamètres des nanotubes multifeuillets peuvent aller jusqu'à la centaine de nanomètres de diamètre. La façon dont les différentes couches graphitiques des nanotubes multifeuillets s'empilent est a priori aléatoire. Il n'a pas été mis en évidence un empilement selon des règles préférentielles entre les différents feuillets. La distance moyenne inter-feuillets est de 0,344 nm, ce qui rapproche sa structure de celle du graphite turbostratique.

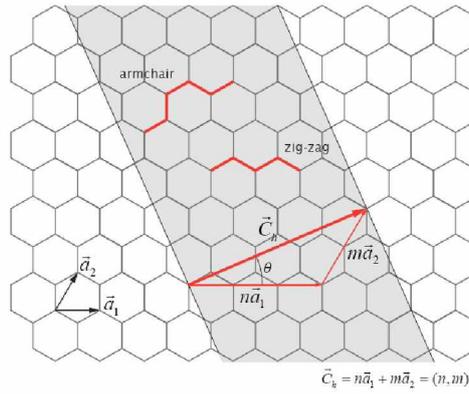
La structure des nanotubes multifeuillets de type poupée russe décrite précédemment est communément admise, mais ce n'est pas la seule structure possible. Ainsi, certaines études expérimentales [37] laissent envisager que les nanotubes multifeuillets pourraient avoir une structure de type rouleau de parchemin. D'autres études [38] suggèrent, surtout dans le cas des gros nanotubes, que les deux types de structure coexistent au sein des tubes multifeuillets, les tubes de petit diamètre, au centre, présentant une structure de type poupée russe, tandis que les tubes extérieurs possèdent une structure plus défectueuse de type rouleau de parchemin.

Enfin, une étude postérieure [39] montre que la structure de type poupée russe est la plus fréquemment rencontrée, les nanotubes ne croissant selon le type rouleau de parchemin que dans des conditions particulières.

#### **II.4.3 Nanotubes monofeuillets (ou monoparois)**

Les nanotubes de carbones monofeuillets (SingleWall NanoTubes, SWNT) ont été découverts en parallèle par Béthune [40] et Iijima [41] en 1993.

Un nanotube monofeuillet est une feuille de graphène enroulée sur elle-même, de manière à former un cylindre unique. Le nano-objet obtenu est alors unidimensionnel. Les atomes de carbone restent dans un état d'hybridation  $sp^2$ . Le nanotube idéal ainsi formé présente deux extrémités, qui peuvent être fermées par deux dômes, comme des demi-fullerènes, mais pouvant comporter des défauts dans le cas d'un nanotube réel. L'enroulement de la feuille de graphène va définir la structure et les propriétés du nanotube formé.



**Figure II.7** - Structure d'un plan de graphène en deux dimensions. Le réseau hexagonal est décrit à partir des deux vecteurs de base  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ .

Une feuille de graphène est un pavage hexagonal à deux dimensions d'atomes de carbone de côté  $a_{C-C} = 0.142\text{nm}$  (cf. figure II.9). Ce réseau hexagonal est défini par la base  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ . On

$$\text{note } a = \|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = \sqrt{3}a_{C-C} = 0.246 \text{ nm}$$

La feuille de graphène possède deux atomes par maille. Le nanotube est obtenu en repliant la feuille de graphène de façon à faire coïncider deux sites cristallographiques équivalents reliés par le vecteur chiral  $\vec{C}_h$ .

Le vecteur chiral  $\vec{C}_h$  est une combinaison linéaire des vecteurs de base du graphène  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ :

$$\vec{C}_h = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 \quad (\text{II-1})$$

Où  $(n, m)$  est un couple de nombres entiers. Ce couple  $(n, m)$  définit entièrement la structure du nanotube.

Il existe deux bases possibles pour définir des coordonnées sur un plan hexagonal comme le graphène. L'angle entre les vecteurs de base  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  peut être de  $60^\circ$  ou de  $120^\circ$ . Hamada [42] a utilisé une base de  $120^\circ$  pour définir les coordonnées des nanotubes, tandis que Dunlap [43] a utilisé une base de  $60^\circ$ . La notation à deux indices retenue aujourd'hui utilise la base de  $60^\circ$  de Dunlap, mais est appelée, abusivement, relation de Hamada.

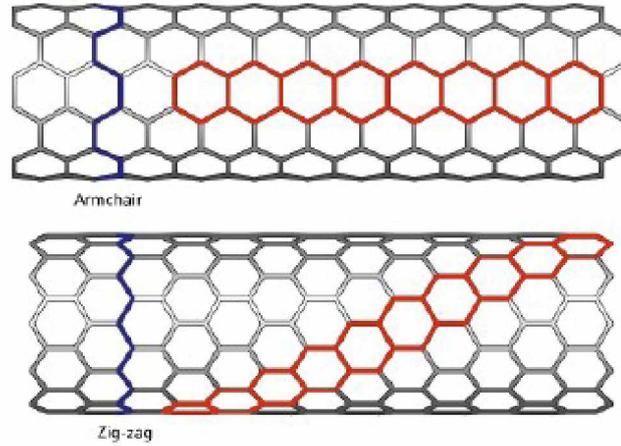
L'angle  $\theta$  entre  $\vec{C}_h$  et le vecteur de base  $\vec{a}_1$  est appelé angle chiral. Les nanotubes se divisent en deux familles : les nanotubes chiraux et les nanotubes non chiraux. Les nanotubes non chiraux possèdent une symétrie miroir, ce qui n'est pas le cas des nanotubes chiraux. Les hexagones dessinent une hélice sur la surface du nanotube.

Les nanotubes peuvent être classés selon leur hélicité. Il existe trois hélicités différentes:  $\theta = 0^\circ$  ( $n=0$  ou  $m=0$ ) : le nanotube est non chiral, de type zigzag ;

$\theta = 30^\circ$  ( $n=m$ ) : le nanotube est non chiral, de type chaise ;

$\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 30^\circ$  ( $n, m$ ): le nanotube est chiral.

Le nom des deux types de nanotubes non chiraux (zigzag et chaise) provient de la forme dessinée par une couronne d'atomes du nanotube (figures II.8 et II.9).



**Figure II.8- Exemples d'hélices dessinées à la surface des nanotubes**

Il existe un certain nombre de relations permettant de calculer le diamètre, l'hélicité, etc. à partir de la seule connaissance du couple ( $n, m$ ) [44] :

- vecteur  $\vec{C}_h$  :  $\|\vec{C}_h\| = a\sqrt{n^2 + m^2 + nm}$

- diamètre du tube :  $d_t = a \frac{\sqrt{n^2 + m^2 + nm}}{\pi} = a_{C-C} \frac{\sqrt{3}\sqrt{n^2 + m^2 + nm}}{\pi}$

- angle chiral :  $\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}m}{m + 2n}\right) = \arccos\left(\frac{2n + m}{2\sqrt{n^2 + m^2 + nm}}\right)$

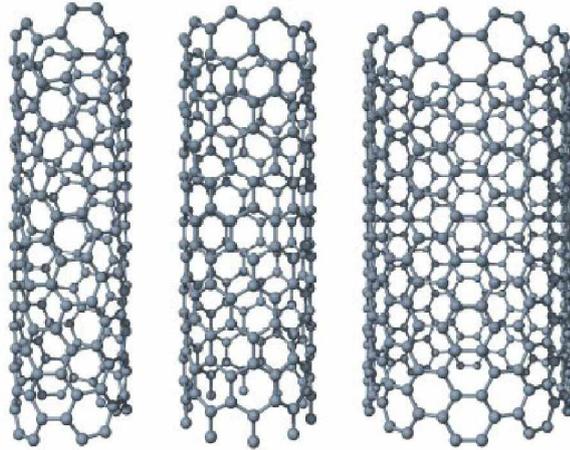
- longueur de la maille élémentaire :  $L = a_{C-C} \frac{\sqrt{3}\sqrt{n^2 + m^2 + nm}}{d_R}$ ;  $d_R = PGCD(2m + n, 2n + m)$

- nombre d'atomes par maille :  $N = 4 \frac{n^2 + m^2 + nm}{d_R}$

Où  $a$  est le paramètre de maille de la feuille de graphène ( $a = 2,49$ ) et  $a_{C-C}$  la longueur de la liaison carbone-carbone ( $a_{C-C} = 1,42$ ).

La structure des nanotubes monofeuillets expliquée précédemment décrit uniquement le nanotube sous forme isolée. Les techniques de synthèse actuelles ne permettent généralement pas d'obtenir de tels nanotubes isolés. Les nanotubes monofeuillets produits présentent un arrangement bidimensionnel hexagonal compact sous forme de nanocristaux couramment appelés faisceaux (figure 2.8).

La maille est de type hexagonal, la distance séparant deux nanotubes étant légèrement inférieure à la distance inter-feuillets dans le graphite qui est de 0,335 nm. La taille de ces faisceaux (également appelés fagots) est variable : ils peuvent contenir d'une dizaine à quelques centaines de tubes, pour des diamètres variant de quelques nanomètres à quelques dizaines de nanomètres. Généralement, la dispersion de diamètre des nanotubes à l'intérieur d'un même fagot est faible ; tous les nanotubes composant le fagot croissent dans les mêmes conditions de synthèse.



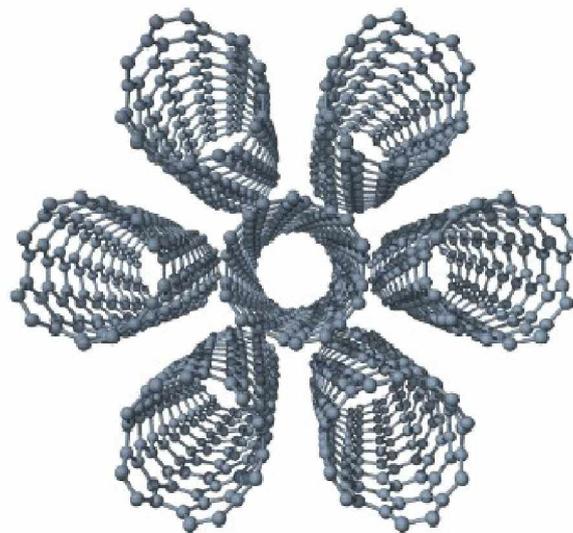
**Figure II.9- Nanotubes de carbone monofeuillets[29].**

À gauche : nanotube chiral (6,4)

Au centre : nanotube non chiral, de type zigzag (10,0)

À droite : nanotube non chiral, de type chaise (10,10)

Les tubes sont représentés à l'échelle et ont pour diamètres respectifs 0.68 nm, 0.78 nm et 1.36 nm.



**Figure II.10 - Schéma d'un cristal de 7 nanotubes**

## **II.5 Synthèse de nanotubes de carbones**

Depuis la découverte des nanotubes de carbone, de nombreux efforts ont été déployés pour améliorer leur synthèse. Les premiers nanotubes de carbone ont été produits par une décharge électrique en utilisant des électrodes en graphite dans un environnement contenant un gaz inerte.

Cette méthode, d'un coût relativement peu élevé, a permis de produire d'importantes quantités de nanotubes. Cependant, elle produit également des impuretés telles que du carbone amorphe, sans aucun contrôle précis de la longueur et du rayon des nanotubes [45]. Les nanotubes de carbone peuvent également être synthétisés par une technique d'ablation laser produisant des nanotubes de haute qualité mais avec un rendement moins important. Une méthode simple de synthèse des nanotubes de carbone est réalisée par un dépôt chimique en phase vapeur (CVD : Chemical Vapor Deposition) à une forte température, typiquement supérieure à 700°C [46]. La production des nanotubes de carbone est assurée par des gaz d'hydrocarbone décomposés sur des surfaces catalytiques. Ce processus CVD permet de contrôler précisément la localisation de la croissance des nanotubes en utilisant des catalyseurs calibrés [47]. Ce procédé peut aussi être utilisé à de plus basses températures pour faire croître des nanostructures en carbone sur des surfaces recouvertes de catalyseur.

La différence majeure entre la production de nanotubes multiparois et de nanotubes monoparois est la nécessité d'utiliser un catalyseur, allié à un gaz carboné, le tout à une température adaptée afin d'obtenir la forme monoparoi des nanotubes de carbone. Il existe plusieurs enjeux dans la production des nanotubes de carbone monoparois. Tout d'abord, il faut avoir un contrôle de la distribution en diamètre et de la chiralité des échantillons, la chiralité représentant la façon dont la feuille de graphène est enroulée. De plus, selon l'utilisation souhaitée, il peut s'avérer nécessaire d'avoir un contrôle sur la « pureté » des échantillons. Enfin, en ce qui concerne les éventuelles applications industrielles, la production de nanotubes en grande quantité est la première étape à réaliser.

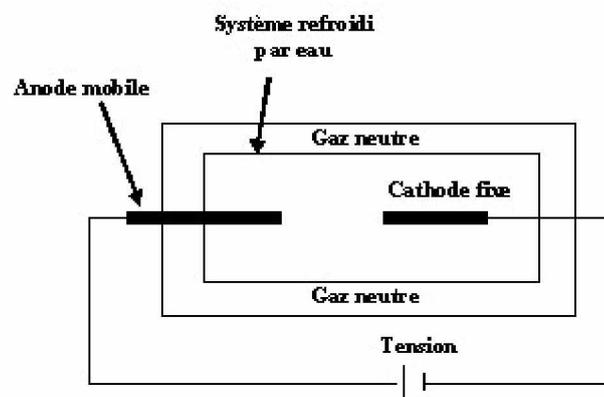
Nous présenterons ici les procédés de synthèse les plus répandus en exposant les avantages et les inconvénients de chacun d'eux. Nous allons examiner successivement la méthode de l'arc électrique, d'ablation laser, de dépôt chimique en phase vapeur et enfin la méthode dite HiPCO[48].

### **II.5.1 Méthode de l'arc électrique**

La technique de l'arc électrique est un procédé de synthèse haute température. Cette technique a permis de synthétiser les fullerènes en grande quantité [34], et de produire les premiers nanotubes multifeuillets identifiés par S. Iijima [36].

Cette technique est basée sur l'évaporation du graphite par un arc électrique, amorcé entre deux électrodes en graphite (figure II.11). Un plasma chaud (environ 6000 K) est formé et maintenu entre ces deux électrodes, l'anode étant progressivement sublimée. Les espèces carbonées sublimées dans le plasma vont se recombinaer à l'extérieur, et les produits formés vont se déposer sur les parois du réacteur. Les conditions de température à l'intérieur de l'enceinte sont très importantes pour la qualité et la quantité des nanotubes formés. La température est contrôlée en utilisant un gaz inerte (He, Ar...) à une certaine pression. Un collecteur refroidi par eau peut également être utilisé, suivant la géométrie du réacteur employé.

La synthèse de nanotubes de carbone monofeuillets nécessite l'emploi d'une anode en graphite.



**Figure II.11** - Production de nanotubes de carbone par la méthode de l'arc électrique contenant également des catalyseurs métalliques. Ces catalyseurs vont être sublimés avec le graphite lors de la création du plasma, et vont permettre aux fagots de nanotubes de croître [40, 41]. Les catalyseurs les plus employés sont Ni, Fe, Co, Pt, Pd, Rh, Y, La, Lu... À l'issue de la synthèse, la proportion la plus importante de nanotubes monofeuillets se retrouve dans une zone appelée collerette, autour de la cathode, qui présente un aspect spongieux.

Notons qu'en 1997, C. Journet et al. ont amélioré la technique de l'arc électrique en employant un mélange de catalyseur Ni/Y [49, 50]. Ce mélange a permis d'obtenir des rendements de synthèse élevés, ce qui a ouvert la voie à la production de masse des nanotubes monofeuillets.

Aujourd'hui, un certain nombre de sociétés (Nanolegde [51] et Mer Inc. [52] entre autres) commercialisent des nanotubes produits par cette technique.

### **II.5.2 Méthode d'ablation laser**

La technique de synthèse par ablation laser est la méthode qui a permis à Kroto et Smalley de découvrir les fullerènes en 1985. Cette technique repose sur l'évaporation d'un disque de graphite par irradiation laser, la cible étant placée dans un four à 1200°C [53]. Comme dans le cas de la synthèse par arc électrique, il est nécessaire d'utiliser un catalyseur métallique mélangé à la cible en graphite pour former des nanotubes monofeuillets.

Cette technique est complexe dans sa mise en œuvre car elle repose sur l'utilisation de deux impulsions lasers successives de fréquences différentes. Une méthode de synthèse par ablation laser plus simple a également été développée [54]. Cette méthode utilise un laser CO<sub>2</sub> continu émettant à 10,6 μm à température ambiante [29].

### **II.5.3 Méthode de dépôt chimique en phase vapeur**

La synthèse de nanotubes de carbone par la méthode de dépôt chimique en phase vapeur (abrégée en CVD pour Chemical Vapor Deposition) a été effectuée pour la première fois par Endo et al. [55]. Dans cette méthode, des hydrocarbures (CH<sub>4</sub>, C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>...) et de l'hydrogène sont mis en présence de catalyseurs métalliques (Fe, Co, Ni...), le tout dans un four porté à haute température (> 700C). Les nanotubes se forment alors sur les plots de catalyseurs. L'un des avantages de cette méthode est que les nanotubes se forment de façon continue (contrairement à la méthode d'ablation laser par exemple). Nous pouvons espérer trouver des conditions expérimentales permettant de fabriquer des nanotubes purs avec un contrôle parfait du diamètre et de la chiralité. Cependant, cela est encore loin d'être la réalité.

Un autre avantage de cette méthode est que l'on peut faire croître les nanotubes à des endroits prédéterminés. Cela peut s'avérer très intéressant pour toutes les applications en nanoélectronique, par exemple, pour fabriquer des matrices de transistors à base de nanotubes de carbone. Il existe également une technique de synthèse de forêts de SWNT par CVD assistée avec de l'eau qui supprime le carbone amorphe et permet ainsi une croissance non limitée : les SWNT ainsi créés peuvent atteindre une hauteur de plus de 2 cm ! De plus, il est possible d'aligner les nanotubes entre eux, perpendiculairement à la surface. Nous obtenons alors des « pelouses » de nanotubes. Cette propriété est très intéressante pour toutes les utilisations des propriétés d'émission de champ des nanotubes. En revanche, un inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas, pour le moment, de fabriquer de grandes quantités de nanotubes monoparois. En effet, si la production de nanotubes de carbone multiparois est relativement facile, celle de nanotubes de carbone monoparois est difficile.

## **II.5.4 Décomposition catalytique : HiPCO**

Le procédé HiPCO (High Pressure dismutation of CO : décomposition sous haute pression de CO) a été développé par le groupe de R. Smalley [56]. Ce procédé fait partie de la famille des procédés de décomposition catalytique à moyenne température.

Un flux continu de pentacarbonyle de fer ( $\text{Fe}(\text{CO})_5$ ) et de monoxyde de carbone (CO) est introduit sous une pression de 10 atm dans une enceinte chauffée à  $1200^\circ\text{C}$ . L'originalité du procédé tient au fait que le catalyseur, nécessaire à la croissance des tubes monofeuillets, est formé in situ par la décomposition du gaz précurseur. De surcroît, le monoxyde de carbone utilisé comme source de carbone pour la croissance des tubes ne se pyrolyse pas à  $1200^\circ\text{C}$ , ce qui permet d'obtenir des nanotubes de carbone monofeuillets exempts de toute impureté graphitique.

Les nanotubes formés par cette technique sont assez originaux. Ils présentent une large distribution de longueurs (dont des nanotubes très petits), mais contiennent beaucoup de catalyseur résiduel. Cette technique permet la synthèse à grande échelle de nanotubes monofeuillets. Le procédé de fabrication est à flux continu, ce qui est très positif pour une industrialisation. Une société commerciale (Carbon Nanotech Inc [57]) propose des nanotubes synthétisés par cette technique.

En outre, le fait de pouvoir obtenir des nanotubes avec un diamètre moyen très petit (de l'ordre de 0,7 nm) est un avantage en ce qui concerne les propriétés optiques puisque cela ramène la bande interdite des nanotubes semi-conducteurs vers des régions spectrales où les détecteurs sont les plus sensibles.

## **II.6 Propriétés physiques des nanotubes de carbone**

### **II.6.1 Propriétés mécaniques**

La liaison C-C du graphite est une liaison chimique forte. L'énergie de dissociation de cette liaison est en effet de  $348 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ . C'est la raison pour laquelle les fibres (et notamment les nanotubes) ont des propriétés mécaniques uniques.

Depuis leur découverte, de nombreux travaux théoriques ont prévu un module d'Young très élevé pour les nanotubes. Lu, en utilisant un modèle empirique [58], prévoit un module d'Young de 0.97 et 1.1 TPa pour les nanotubes multiparois et monoparois respectivement. Il montre aussi que le module d'Young, ainsi que d'autres modules élastiques (cisaillement, ...) sont indépendants des caractéristiques géométriques des tubes (chiralité, diamètre...). Par

comparaison, les toiles d'araignée, qui sont réputées pour posséder une forte résistance à la traction, ont un module d'Young comparable à celui du Kevlar (4 GPa) [59].

Yakobson et al. [60] ont montré que les nanotubes peuvent être soumis à d'importantes contraintes (longitudinales ou transverses) sans montrer de signe de déformation plastique, de fracture fragile ou de réarrangement atomique. Ils montrent également que les théories classiques utilisant un modèle continu peuvent être utilisées pour les grandes déformations des nanotubes (pour lesquelles l'élasticité linéaire n'est plus valable).

Avec une extrémité libre, les nanotubes vibrent sous l'effet du mouvement brownien. En étudiant leur vibration par TEM (Transmission Electron Microscopy), il est possible de remonter à leur module d'Young. Krishnan et al. [61] obtiennent par cette méthode une valeur de  $1.25 \pm 0.5$  TPa pour des nanotubes monoparois.

Par AFM, Yu et al. [62] ont estimé le module d'Young de cordes de nanotubes monoparois à  $1.04 \pm 0.17$  TPa. Ils montrent aussi qu'il faut exercer une contrainte de l'ordre de 0.40 TPa pour briser la corde. Par la mesure de 3 points en AFM, la même contrainte a été estimée à  $0.45 \pm 0.07$  TPa. Ces valeurs sont environ 20 fois supérieures à celles des aciers les plus rigides.

Enfin, la nanomanipulation par AFM a permis de montrer que les nanotubes peuvent encaisser de larges déformations réversibles. Sur la figure II.12 (a), le nanotube est coudé à  $180^\circ$ . Par nanomanipulation avec la pointe d'AFM, il peut être remis dans une configuration linéaire (figure II.13 (b)) [64]

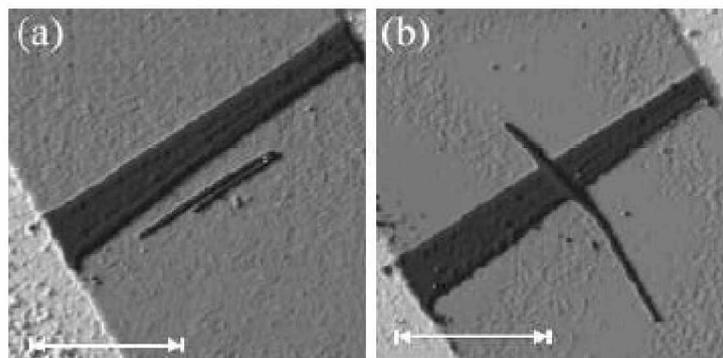


Figure II.12 - (a) et (b) Manipulation d'un nanotube de carbone par AFM [63].  
L'échelle, indiquée par la flèche, est de  $1 \mu\text{m}$ .

### **II.6.2 Propriétés thermiques**

Le diamant présente la conductivité thermique la plus élevée de tous les matériaux connus à ce jour (environ  $10^3 \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  à 300 K). Le plan de graphène possède une

conductivité comparable. La structure particulière des nanotubes permet de penser que leur conductivité doit également être importante le long de l'axe du nanotube.

La mesure des propriétés thermiques d'un nano-objet comme le nanotube est délicate. Cependant, quelques études expérimentales ont permis de mesurer la conductivité thermique de nanotubes multifeuillets. Leur conductivité est grande (de 600 à 2000  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ), mais significativement plus faible que celle du graphite. Ces résultats sont a priori décevants, mais ils peuvent s'expliquer en considérant le fait que tous les feuillets ont participé à la conduction thermique alors que seul le feuillet externe a été utilisé pour les mesures. Ces considérations permettent d'estimer la magnitude de la conduction d'un tube monofeuillet au même ordre de grandeur que celle du graphite.

### **II.6.3 Propriétés électroniques**

L'une des caractéristiques importantes des nanotubes de carbone est le lien étroit existant entre leur structure spatiale (la nature du repliement) et leurs propriétés électroniques. Ainsi, en fonction de leur chiralité, les nanotubes de carbone peuvent être métalliques ou semi-conducteurs.

Un nanotube est métallique si  $2n + m$  est un multiple de 3 [65], ou de manière équivalente, si  $n - m$  est un multiple de 3. Les nanotubes de type chaise, définis par le couple  $(n, n)$ , sont donc métalliques ; les autres tubes sont semi-conducteurs en raison des effets de courbure. D'un point de vue technologique, les nanotubes de carbone présentent des propriétés très attrayantes. Métalliques, les nanotubes peuvent porter des densités de courant très grandes,  $10^9 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}$  [66], valeur extrêmement élevée quand nous la comparons à celle d'un métal usuel,  $10^6 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Semi-conducteurs, une application centrale vise à les intégrer dans des dispositifs tels que les transistors à effet de champ constituant ainsi des portes logiques laissant, ou non, passer le courant [67].

### **II.7 Exploitation des propriétés des nanotubes de carbone**

Etant donné que les nanotubes de carbone possèdent des propriétés physiques et mécaniques exceptionnelles, ils sont utilisés comme des renforts pour les matériaux nanocomposites. Une des premières études concernant les composites polymère/nanotubes de carbone a été faite par Ajayan et al. [45], dans leurs recherches, les nanotubes multifeuillets (ou multiparois) (MWNT) sont dispersés de façon aléatoire dans une résine époxy liquide par mélange mécanique. Depuis lors, de nombreuses autres études ont établi le fait que l'incorporation d'un petit pourcentage des nanotubes de carbone en poids dans des matrices

polymères pourrait améliorer les propriétés mécaniques [30,32-35] et électriques [36,37] du polymère composites.

Il est bien clair que la performance d'un composite renforcé par des fibres dépend des caractéristiques au niveau de l'interface fibres/matrice. La théorie classique des composites renforcés par des fibres estime que les composite à interfaces fibre-matrice solides conduire à un composite de rigidité et résistance élevée et vice versa [38]. Avec les composites à base de renforts nanotubes, il peut également être le cas que les interfaces solides conduirait à une grande rigidité et résistance du composite. Il y a eu énormément de spéculation de savoir si la résistance de l'interface entre les NTC et les matrices polymères est estimable et les méthodes expérimentales pour sa mesure sont plutôt difficile. Wagner et al. [39] a examiné la fragmentation des nanotubes multifeuillets (ou multiparois) (MWNT) dans des films de polymère et a estimé que l'efficacité de transfert de contrainte de MWNT-matrice est d'au moins un ordre de grandeur plus grand que celui de composite classique à base de fibres. Cooper et al. [40] ont conclu que le module d'Young de SWNT dispersé dans un composite (de mélange résine époxy/nanotube) pourrait être plus de 1 TPA et que celui de MWNT est environ 0,3 TPa. Qian et al. [41] ont indiqué que l'ajout de 1 % en poids de CNT dans une matrice PS de 36-42% qui engendre une augmentation de 25% dans le module d'élasticité et la contrainte à la rupture, respectivement, indiquant un renforcement significatif [30,42]. Des résultats similaires ont également été signalés par Xu et al. [43] pour les résines composites MWNT/époxy. Cadek et al. [44] rapporté le rôle de surface de nanotubes dans le renforcement de matrices polymères. Ils ont suggéré que le degré de renforcement échelles linéairement avec le totale surface de nanotubes dans les films, ce qui indique que les petits diamètres et NTC bien dispersées serait donner les meilleurs résultats pour le renforcement mécanique.

La mesure dans laquelle le renforcement mécanique peut être atteint dépend de plusieurs facteurs, y compris l'uniformité de la dispersion du degré d'alignement des nanotubes de carbone, et de la force de la liaison interfaciale du polymère-CNT. Comme il est difficile de contrôler et mesurer un grand nombre de ces propriétés expérimentalement, la modélisation informatique peut fournir certaine informations cruciales. Pour cette raison, des méthodes théorique et computationnelle ont été largement appliquées à l'étude des composites Polymère/CNT. Premiers principes de la technique, méthodes mécanique moléculaires et la théorie de la mécanique des milieux continus, ou des combinaisons de ceux-ci, ont été tentées pour l'étude des systèmes composites. La résistance interfaciale et le transfert de contrainte entre CNT et polymères dans leur composites a été étudiée par Wagner [45] en utilisant le

modèle élargi de Kelly-Tyson et par Lau [46], respectivement. Lordi et Yao [47,48] ont utilisé une approche mécanique moléculaire pour étudier les caractéristiques interfaciale des composites polymères/CNT. Outre le comportement interfacial, plusieurs groupes ont également utilisé la simulation informatique pour calculer les propriétés mécaniques des composites polymère/NTC [49,50]. Les résultats de leurs recherches montrent le renforcement après incorporation de nanotubes de carbone dans la matrice polymère. Malgré cela, la relation entre les propriétés élastiques et le comportement interfacial reste encore mal comprise.

En général, les polymères thermoplastiques semi-cristallins peuvent présenter relativement d'importantes déformations par rapport à d'autres matériaux dans lesquels seule une faible déformation élastique peut être générée avant, soit une fracture ou rendement a lieu. Depuis la résistance à la traction ou limite d'élasticité sont régies par la présence de défauts, puis la grande échelle microstructure du matériau est plus pertinente que la structure atomique locale. Par conséquent, il est mathématiquement très difficile de calculer la force de systèmes polymères purs, et aussi dans les systèmes composites subissant de grandes déformations plastiques en utilisant le procédé de la dynamique moléculaire. C'est pour cette raison que des études menées actuelles focalisent sur le calcul de l'intensité de faible déformation élastique seulement, avec pour motivation principale étant une élucidation de l'effet d'énergie d'interaction interfaciale entre NTC et la matrice polymère sur les modules d'élasticité de leurs composites. Cependant, il est certain que ces phénomènes interfaciaux affectent également la résistance du composite.

## **II.8. Méthode de simulation de dynamique moléculaire**

La dynamique moléculaire (notée ci-après MD pour « Molecular Dynamics ») est une méthode de base de la physique moléculaire permettant de réaliser des « expériences virtuelles ». Elle consiste à faire évoluer les positions d'un groupe d'atomes ou de molécules en interaction, en utilisant la mécanique classique (2<sup>ème</sup> lois de Newton). La MD permet de prendre en compte l'effet de la température et de reproduire de façon physiquement assez réaliste l'évolution temporelle d'un système initialement placé dans un état hors équilibre. De plus, il est possible de rajouter des effets extérieurs en cours de simulation.

Dans notre travail, La méthode de simulation de dynamique moléculaire a été appliquée pour la construction de modèles atomique des composites polymères/CNT par la mise en place de fonction de potentiel interatomique appropriée sous contrainte constante.

Des MD sont utilisés pour étudier le comportement temporel des systèmes dans une variété de cas où la configuration de l'échantillonnage thermique dans l'espace est nécessaire. Après avoir fini l'équilibrage de la température, une méthode de minimisation de l'énergie a été appliquée pour calculer les modules élastiques des structures des modèles calculés à partir des simulations de dynamique moléculaire. Des conditions aux limites périodiques ont été appliquées aux modèles le long du tube à la fois dans les directions longitudinales.

### II.8.1. Calcul de la fraction volumique CNT

La fraction volumique des CNTs est une variable importante dans la détermination des propriétés mécaniques des composites. À cet effet, les nanotubes de carbone CNTs ne pénètrent pas dans la matrice polymère, et le SWCNT (10,10) utilisé possède un rayon de 1,34 nm, le tube est traité comme une poutre solide. Alors la fraction volumique efficace,  $V_{CN}^*$ , comprend l'ensemble CNT de section transversale est défini par :

$$V_{CN}^* = \frac{\pi \left( R_{CNT} + \frac{h_{vdw}}{2} \right)^2}{A_{cell}} \quad (II-1)$$

Où  $h_{vdw}$  est la distance de séparation d'équilibre de Van der Waals entre le CNT et la matrice, et  $A_{cell}$  est la section transversale de l'axe de nanotube.

Un exemple est donné dans le tableau II.1 qui présente le module de Young transversal et longitudinal trouvé par la dynamique moléculaire et la loi de mélange pour un composite PmPV–CNT pour différentes fractions volumiques des CNT.

$V_{CN}^*$ (%)	Dynamique moléculaire		Loi de mélange	
	T (GPa)	L (GPa)	T (GPa)	L (GPa)
0.0	2.1	2.1	2.1	2.1
11.0	2.2	94.8	2.3	67.9
14.0	2.3	120.2	2.4	85.8
17.0	3.5	145.6	2.4	103.7

T : module de Young transversal et L : module de Young longitudinal

**Tableau II.1.** Comparaison des résultats numériques pour un composite PmPV–CNT

### II.8.2. Calcul de l'énergie d'interaction polymère/CNT

Une forte interaction interfaciale entre le tube en CNT et la matrice est essentielle pour avoir une excellente rigidité et la force des nanotubes de carbones pour le renforcement. En l'absence de la liaison chimique covalente, l'interface force de liaison provient essentiellement de l'électrostatique et force de van der Waals dans le système moléculaire. La

force d'adhérence interfaciale entre la CNT et le polymère peut être quantifiée par l'énergie d'interaction,  $\Delta E$  [68], qui est donné par la différence d'énergie entre l'énergie totale interne du composite et la sommes des énergies individuelle des molécules:

$$\Delta E = E_{total} - (E_{CNT} + E_{polymer})$$

Où  $E_{total}$  est l'énergie totale interne du système polymère /CNT,  $E_{CNT}$  est l'énergie du nanotube de carbone (CNT) et  $E_{polymer}$  est l'énergie de la matrice polymère.

## **II.9. Conclusion**

Leur dimension nanométrique et leurs propriétés spécifiques font des nanotubes de carbone des matériaux très intéressants du point de vue des applications.

En outre, les nanotubes sont d'excellents matériaux pour le renforcement de matrices polymères par exemple. Ils seraient également susceptibles d'être employés comme muscles artificiels.

Ils peuvent aussi être utilisés pour des composites à haute valeur ajoutée, comme par exemple les articles de sport, la défense, l'aéronautique. Il existe d'ailleurs déjà des prototypes utilisés par des sportifs de haut niveau (cyclistes utilisant des vélos dont le cadre est un matériau composite contenant des nanotubes, joueurs de tennis utilisant des raquettes à base de nanotubes de carbone, joueurs de hockey utilisant des crosses dopées en nanotubes de carbone).

# **Chapitre III**

## **Théorie Des Plaques**

## **Chapitre III : Théorie Des Plaques**

### III.1. Introduction

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports et le génie civil. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement des plaques. La littérature sur le thème des études du comportement en linéaire est abondante. Cependant, l'hypothèse des comportements linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, les structures couramment utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux de chargement toujours plus importants. Cela conduit à des déplacements importants, pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable, et nécessitant une modélisation non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est d'écrire un modèle discret représentant le comportement de structures, en non linéaire géométrique. Après une présentation des différents modèles analytiques des plaques possibles, on rappelle donc l'écriture des équations de déformation non linéaire de type Von Karman pour les plaques.

### **III.2. Définition d'une plaque :**

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure III.1). On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;

- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(O, x, y)$ , d'équation  $z = 0$  ;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .

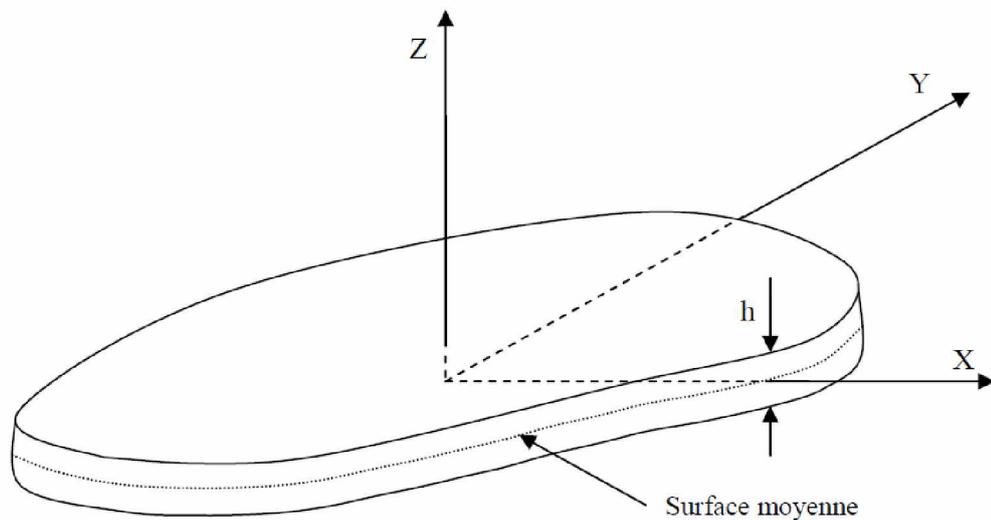


Figure III.1. Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

### III.3. Les modèles analytiques des plaques FGM

#### III.3.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (figure III.2). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement liée à l'élancement ( $L/h$ ). Elle suppose les hypothèses ci-après:

1. La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
2. Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ( $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).  
On admet dans ce cas que **la déformation due à l'effort tranchant est nulle** et ne participe pas à la rigidité.
3. le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du plan neutre ;
4. l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ) ;

Le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).

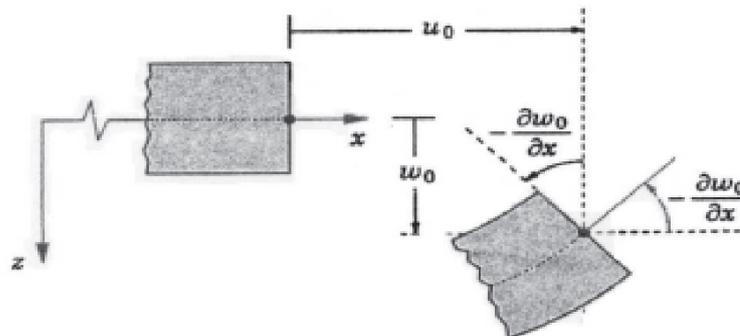


Figure III.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [69].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### III.3.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par (Kirchhoff 1850) :

1. Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque;
2. La contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes;
3. Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après déformation;
4. L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

La troisième hypothèse veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Wittrick (1987) a précisé qu'en excluant ces effets, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur. Si la théorie de plaque de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée de plaque est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories de plaques épaisses prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. Reissner (1944,1945) a proposé la théorie de plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin (1951) a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur  $k$  de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que :

- L'effet de l'inertie de rotation est inclu.

Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin, Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure III.3) est exprimé sous la forme [Mindlin (1951)]:

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{III.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{III.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.2.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

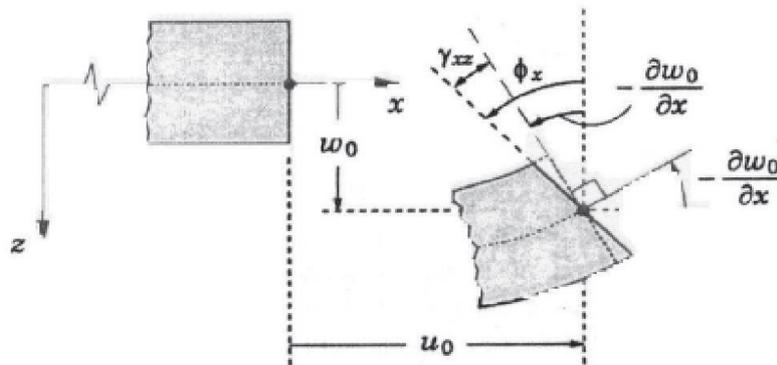


Figure III.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [69].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### III.3.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al [70]., 1949 ; Naghdi [71], 1957 ; Reissner [72], 1975 ; Reddy [73], 1984 ; Kant et Swaminathan [74], 2002 ). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

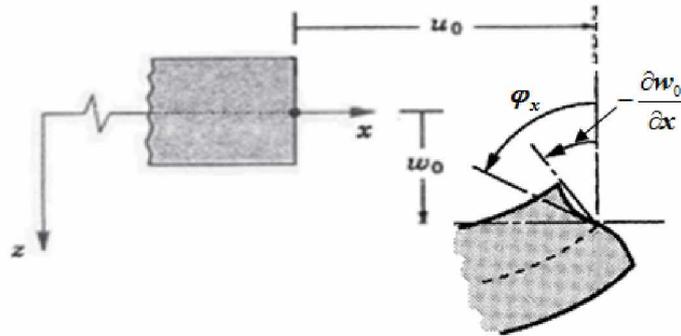


Figure III.4: Illustration de la plaque d'ordre élevé [69].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{III.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.3.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes  $y$  et  $x$ , respectivement  $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de

cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [69,70] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{III.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [75] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [76] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{III.6})$$

### **III.4. Analyse non linéaire des plaques**

#### **III.4.1. Relations déformation-déplacement**

Dans la majorité des problèmes abordés dans la littérature, les déplacements et les déformations de la structure ont été supposés implicitement petits. D'un point de vue pratique, ceci veut dire que la géométrie des éléments reste quasiment inchangée lorsque ceux-ci sont

soumis à des sollicitations; par conséquent, on peut utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinitésimales.

En pratique, de telles hypothèses sont fréquemment mises à défaut, même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée. Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques [77].

Dans le cas des grands déplacements, le tenseur de déformation de Lagrange, également appelé tenseur de déformation de Green–Lagrange ou tenseur de déformation de Green–Saint-Venant, est défini en termes de dérivées partielles de déplacement comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{(III. 7)}$$

Où  $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, x_1 = x, x_2 = y$  et  $x_3 = z$ .

Le tenseur symétrique du second ordre s'exprime classiquement par la somme de deux tenseurs :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{NL} \quad \text{(III. 8)}$$

Où  $\varepsilon_{ij}^L$  est la partie linéaire du tenseur  $\varepsilon_{ij}$  :

$$\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{(III. 9)}$$

Et  $\varepsilon_{ij}^{NL}$  est la partie quadratique du tenseur  $\varepsilon_{ij}$  traduisant la non-linéarité géométrique

$$\varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{(III. 10)}$$

Dans la théorie de **Von Karman** (1910,1939) ou la théorie de la non-linéarité géométrique des plaques, on suppose que les déplacements dans le plan ( $u$  et  $v$ ) sont infinitésimaux et seulement les termes non-linéaires dépendant du déplacement transversal ( $w$ ) dans l'équation (III.7) sont considérés [78]. Tous les autres termes non-linéaires sont négligés.

#### **III.4.2. Relations contrainte-déformation**

Nous considérons les relations linéaires entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke généralisée). Pour les matériaux orthotropes, la relation liant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{(III. 11)}$$

Telle que :

$[C]$  : matrice de constantes élastiques.

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{16} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes (équation (III-9)) auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 13})$$

Pour une plaque en matériau à gradient de propriétés, le module de Young et le coefficient de Poisson ( $E(z)$  et  $\nu(z)$ ) dépendent de la position  $z$ . D'où les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont donnés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad (\text{III. 14a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad (\text{III. 14b})$$

$$Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1-\nu(z))}. \quad (\text{III. 14c})$$

### III.4.3. Equations des efforts et des moments

Les équations exprimant les forces et les moments internes (figure III.5) sont obtenues par l'intégration des contraintes :

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} dz \quad (\text{III. 15a})$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} dz \quad (\text{III. 15b})$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{III. 15c})$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad (\text{III. 15d})$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad (\text{III. 15e})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \quad (\text{III. 15f})$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz \quad (\text{III. 15g})$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{III. 15h})$$

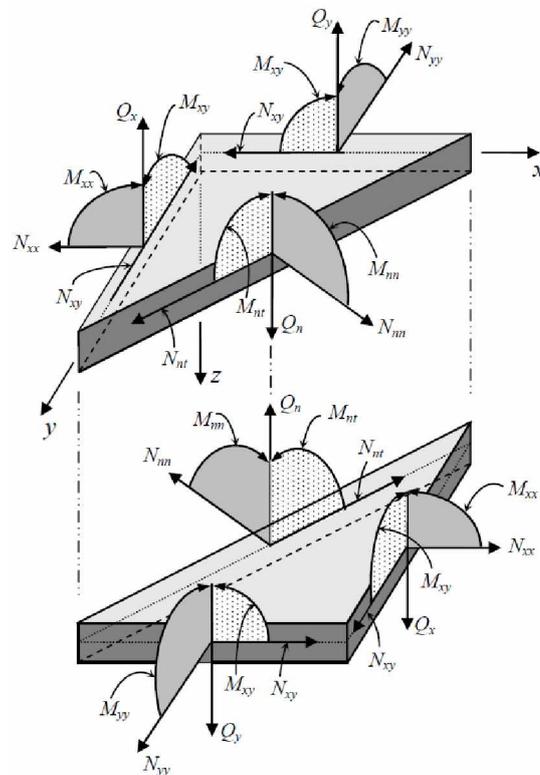


Figure III.5: Forces et moments agissant sur un élément de plaque

### III.4.4. Détermination des équations d'équilibre par le principe des travaux virtuels :

Soit un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume  $f_i^V$ , de surface  $f_i^S$ , et des forces concentrées  $Q_i$ . Considérons un champ de déplacement virtuel  $\delta u_i$  cinématiquement admissible.

Le théorème des travaux virtuels exprime le bilan des travaux virtuels interne et externe, lorsque le corps est en équilibre :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i^V \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS + Q_i \delta u_i \quad (\text{III.16})$$

V : est le volume du corps ;

S : la surface extérieure du corps où les forces surfaciques sont appliquées ;

$f_i^V$  : Forces volumiques ;

$f_i^S$  : Forces surfaciques appliquées à la surface extérieure S du corps ;

$Q_i$  : Forces concentrées ;

$\sigma_{ij}$  : Tenseur des contraintes ;

$\varepsilon_{ij}$  : Tenseur des déformations infinitésimales

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f_V\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{f_S\} dS + \sum_i \{\delta u\}^T \{Q_i\} \quad (\text{III.16})$$

$\{\delta \varepsilon\}^T$  : Vecteur des déformations, transposé ;

$\{\sigma\}$  : Vecteur des contraintes ;

$\{\delta u\}^T$  : Vecteur des déplacements, transposé ;

$\{f_V\}$  : Vecteur des forces volumiques ;

$\{f_S\}$  : Vecteur des forces surfaciques ;

$\{Q_i\}$  : Vecteur des forces concentrées.

On peut introduire la fonctionnelle énergie potentielle totale V, et le principe du travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \delta W$$

Ou :

$$\delta V = \delta(U - W) \quad (\text{III.17})$$

Avec :

$V$  : Énergie potentielle totale.

$U$  : Énergie de déformation.

$W$  : Travail des forces appliquées.

### III.4.5. Energie potentielle totale minimale (Méthode de Ritz):

Dans un corps élastique linéaire, l'énergie de déformation interne dû à la déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV, \quad (\text{III.17})$$

L'énergie de déformation pour un milieu tridimensionnel sur le système de coordonnées cartésiennes est :

$$U = \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \quad (\text{III.18})$$

Le travail de forces externes  $q(x)$  et  $F$  se déplaçant à travers les déplacements transversal  $w(x)$  et longitudinal  $D$  est donnée par

$$V = \frac{1}{2} \int_l q(x) w(x) dl + \frac{1}{2} \{F\}^T \{D\}, \quad (\text{III.19})$$

Et la fonction d'énergie potentielle totale est donnée par

$$\Pi = U + V \quad (\text{III.20})$$

Pour un solide élastique en équilibre, l'expression  $U=V$  est une déclaration du principe du travail réel: le travail des forces extérieures sur un solide élastique est complètement stocké sous forme d'énergie de déformation dans le solide.

L'expression  $\delta\Pi = 0$  est le principe d'énergie potentielle totale minimum.

Parmi tous les déplacements possibles compatibles avec les réactions, l'état correct de déplacement est celui qui minimise l'énergie potentiel totale.

Si les déplacements peuvent être exprimées en termes d'un ensemble de coefficients,  $a = \{a_1, a_2, \dots\}$  alors ces coefficients deviennent les variables inconnues, et les valeurs correctes des ces coefficients sont celles qui minimisent l'énergie potentielle. En minimisant l'énergie potentielle totale par rapport aux coefficients correspond à poser la variation dans l'énergie potentiel total par rapport aux coefficients égale à zéro, et on obtient un système

d'équation qu'on doit résoudre pour ces coefficients. La variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux coefficients  $a_i$  est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (\text{III.21})$$

#### **III.4.6. Flexion cylindrique d'une plaque longue**

On s'intéresse aux problèmes pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à une dimension. Ce sont les plaques ayant un rapport longueur sur largeur assez élevé pour que la déformation de la plaque puisse être considérée comme indépendante de la coordonnée suivant la longueur de la plaque. Un tel comportement est appelé flexion cylindrique.

#### **III.4.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation de Von Karman dans le cas des grands déplacements est utilisé pour obtenir les relations déformation déplacement. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient de propriétés est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée et enfin pour terminer la définition du principe des travaux virtuel et l'énergie potentielle totale minimum.

## **Chapitre IV**

# **Solution Mathématique Non Linéaire Des Plaques FGM en Flexion Cylindrique**

# Chapitre IV : Solution Mathématique Non Linéaire Des Plaques FGM en Flexion Cylindrique

## IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à une dimension. Le premier type de problème concerne les plaques ayant un rapport longueur sur largeur est assez élevé pour que la déformation de la plaque puisse être considérée comme indépendante de la coordonnée suivant la longueur de la plaque. Un tel comportement est appelé flexion cylindrique.

L'objectif de cette recherche est de présenter une solution analytique non linéaire des plaques en matériau à gradient de propriétés (FGM) en flexion cylindrique soumise à un chargement transversal et de comparer le comportement des plaques traditionnelles faites de matériaux purs à celui des plaques de FGM. Les propriétés matérielles sont supposés graduelles suivant la direction d'épaisseur selon une distribution simple en termes de fractions volumiques des constituants.

Les déformations de Von Karman sont employées pour construire les équations régissant le problème.

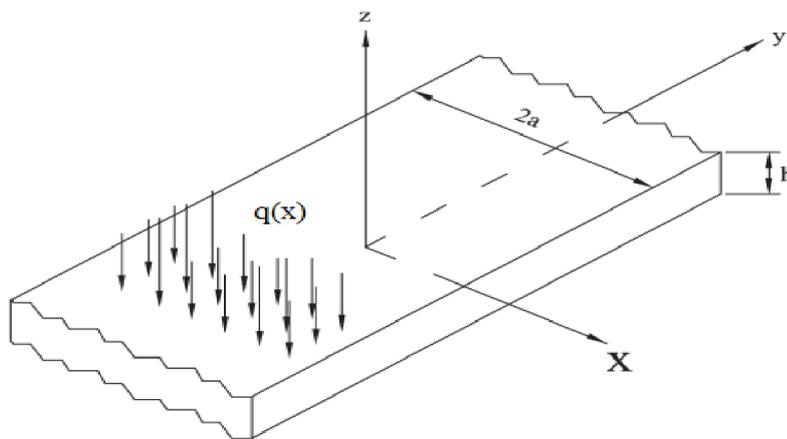
Les effets du paramètre matériel de la fraction volumique sur le comportement de flexion cylindrique sont étudiés.

## IV.2. Gradient des Propriétés matérielles des plaques FGM

Le matériau à gradation de propriétés (FGM) peut être fabriqué en faisant varier en continu les matériaux constituants multi-phases dans un profil prédéterminé. Les caractéristiques les plus distinctes d'un FGM sont une microstructure non-uniforme avec une macro-propriété en permanence graduelle. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de

volume dans la direction d'épaisseur. La plupart des chercheurs utilisent la fonction en loi de puissance (P-MGF), fonction exponentielle(E-MGF) ou fonction sigmoïde(S-MGF) pour décrire les fractions volumiques. Par conséquent, la plaque en FGM avec une fonction sigmoïde et exponentielle sera prise en compte dans le présent chapitre.

Considérons une plaque rectangulaire élastique, comme montré dans la figure IV.1 de coordonnées  $x$  et  $y$  définissant le plan de la plaque, l'axe des  $z$  avec origine au milieu de la surface de la plaque est suivant la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, le module de Young et le coefficient de Poisson, de la surface supérieure et inférieure sont différents mais sont prédéterminés pour satisfaire les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson de la plaque changent de façon continue seulement dans la direction de l'épaisseur (axe  $z$ ) c'est-à-dire,  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Elle est appelée plaque en matériau à gradient de propriétés (FGM). Delale et Erdogan ,1983 [79] ont montré que l'effet du coefficient de Poisson dans la déformation est très faible par rapport à celui du module de Young. A cet effet, le coefficient de Poisson de la plaque est supposé constant. Cependant, le module de Young de la plaque FGM dans la direction de l'épaisseur varie suivant une fonction sigmoïde (S-FGM) ou une fonction exponentielle (E-FGM).



**Figure IV.1 : géométrie d'une plaque de FGM**

#### **IV.2.1 Les propriétés matérielles de la plaque S-FGM**

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [80]. Par conséquent, Chung et chi [81] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes pour toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par [82, 83]:

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{IV.1a})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{IV.1b})$$

Où  $p$  est le paramètre matériel.

On utilisant la loi de mélange, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{IV.2a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{IV.2b})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface ( $z = +h/2$ ) et de la surface ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM

La fraction volumique de la plaque S-FGM varie à travers l'épaisseur suivant deux fonctions de loi de puissance conformément à l'expression (IV-1) pour plusieurs valeurs du paramètre matériel  $p$ .

La figure IV.2 montre la répartition de la fraction volumique de la phase céramique à travers l'épaisseur pour plusieurs valeurs du paramètre matériel  $p$  de la loi de puissance. La variation de la composition de la céramique et le métal est linéaire pour  $p=1$ . La fraction de volume change rapidement à proximité des surfaces supérieure et inférieure pour  $p<1$  mais varie rapidement près de la surface du milieu pour  $p>1$ . Par conséquent, si la plaque S-FG est utilisée comme la sous-couche dans un matériau stratifié, la répartition de matière avec  $p>1$  est le meilleur choix.

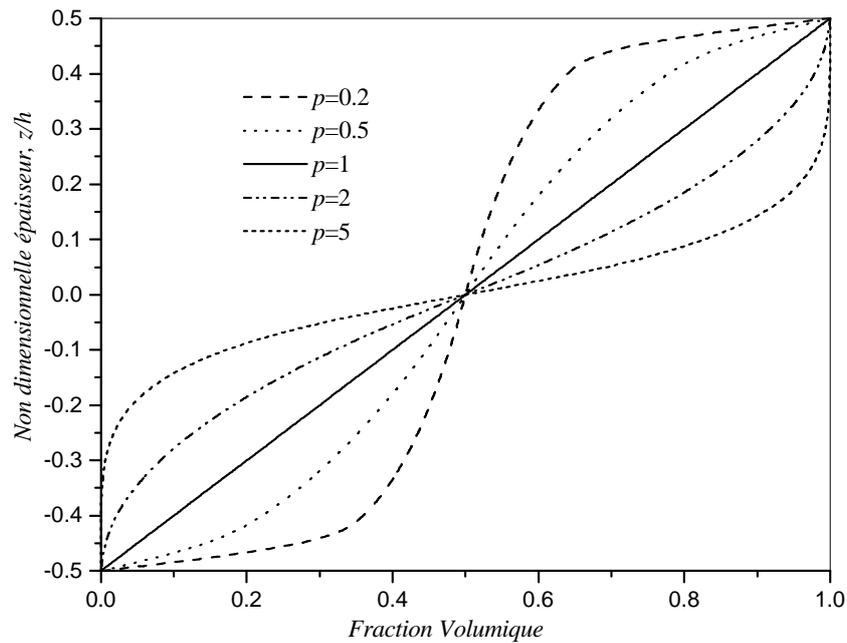


Figure IV.2 variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM

#### IV.2.2 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par, [84] ;

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (IV.3a)$$

Avec

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (IV.3b)$$

On suppose que le module de Young pour la surface inférieure (Aluminium) de la plaque E-FGM est  $E_2 = 70 \text{ GPa}$ , et le module de Young pour la surface supérieure (Alumine) de la plaque E-FGM est  $E_1$  qui change avec le rapport  $E_1/E_2$ .

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure IV.3.

La figure IV.3 montre que, plus le rapport  $E_1/E_2$  est grand, plus la variation du module de Young est rapide au niveau de la surface supérieure de la plaque E-FGM.

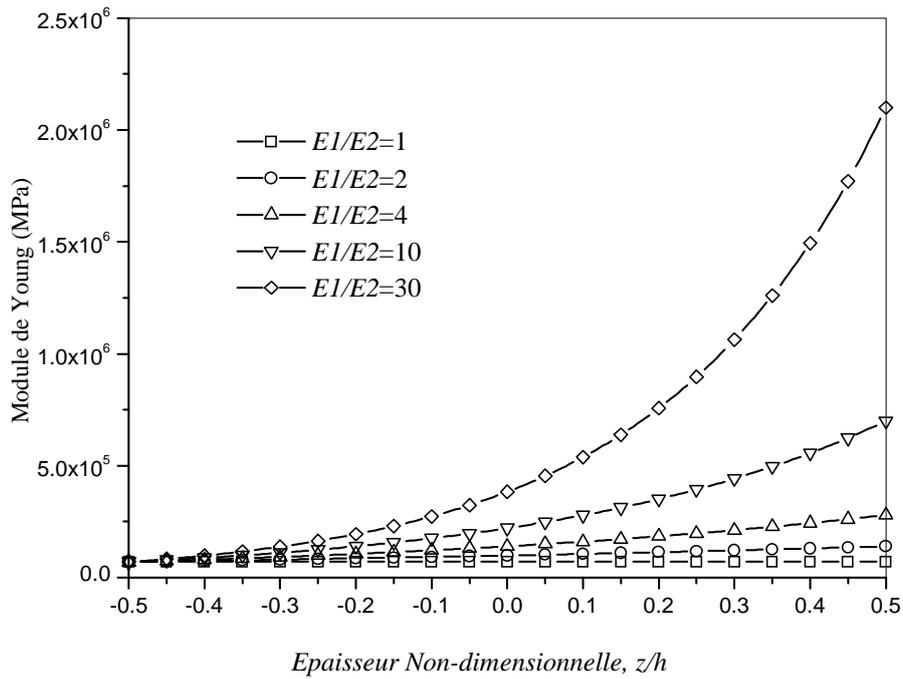


Figure IV.3: variation le module de Young de la plaque E-FGM pour différents rapports  $E_1/E_2$

**IV.3-Les équations constitutives de la flexion cylindrique non linéaire des plaques FGM :**

Considérons une plaque FGM soumise à un chargement transversal uniforme. L'utilisation de la théorie classique des plaques (CPT) suppose que les hypothèses de Kirchhoff soient vérifiées (voir figure IV.4). Le champ de déplacement sera comme suit :

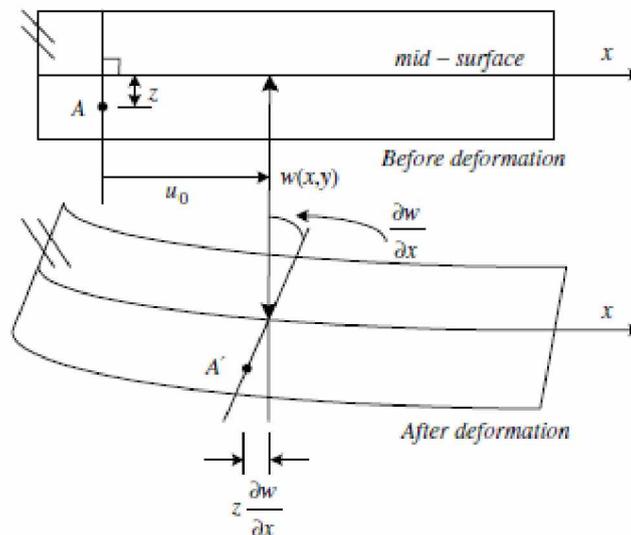


Figure IV.4 : Plan moyen d'une plaque FGM déformée (Shyang-Ho Chi a, Yen-Ling Chung)

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV.4}$$

Où  $(u, v, w)$  sont les déplacements dans les directions  $(x, y, z)$ . Aussi  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements du plan moyen dans les directions  $(x, y, z)$ , respectivement.

Les relations (déformations-déplacements) non-linéaire basées sur l'hypothèse de Von-Karman sont données par :

$$\begin{cases}
 \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
 \gamma_{xz} = \left( -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \\
 \gamma_{yz} = \left( -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0, \\
 \epsilon_{zz} = 0.
 \end{cases}
 \tag{IV.5}$$

Les relations constitutives pour des déformations non nulle sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{IV.6}$$

Les coefficients de rigidités  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés comme :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \\
 Q_{12} &= \frac{\nu(z) \cdot E(z)}{1-\nu(z)^2}, \\
 Q_{66} &= \frac{E(z)}{2 \cdot (1-\nu(z))}.
 \end{aligned}
 \tag{IV.7}$$

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour

tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta w_{\text{int}} + \delta w_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Le travail des efforts externes :

$$w_{\text{ext}} = - \int_{-a}^a q w dx \quad (\text{IV.9})$$

Le travail externe élémentaire, est:

$$\delta w_{\text{ext}} = - \int_{-a}^a q \delta w dx \quad (\text{IV.10})$$

Le travail des efforts internes :

$$w_{\text{int}} = \int_V [\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}] dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}] d\Omega dz \quad (\text{IV.11})$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque.

En remplaçant les déformations par leurs expressions, on obtient :

$$w_{\text{int}} = \int_{-a-h/2}^a \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dz dx \quad (\text{IV.12a})$$

$$w_{\text{int}} = \int_{-a-h/2}^a \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{xx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \sigma_{xx} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dz dx \quad (\text{IV.12b})$$

En introduisant les efforts globaux, on obtient :

$$w_{\text{int}} = \int_{-a}^a \left[ N_x \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \quad (\text{IV.13})$$

Le travail interne élémentaire est :

$$\delta w_{\text{int}} = \int_{-a}^a \left[ N_x \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - M_x \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx \quad (\text{IV.14})$$

Où

$$(N_x, M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_x z) dz \quad (\text{IV.15}) \quad (8)$$

Soit en additionnant (IV-10) et (IV-14), on obtient :

$$\delta w_{\text{int}} + \delta w_{\text{ext}} = - \int_{-a}^a q \delta w dx + \int_{-a}^a \left[ N_x \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - M_x \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx = 0 \quad (\text{IV.16})$$

En faisant l'intégration par partie de l'équation (IV.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta w_{\text{int}} + \delta w_{\text{ext}} = \\ - \int_{-a}^a q \delta w dx + (N_x \delta u_0) - \int_{-a}^a N_{x,x} \delta u_0 dx + (N_x w_{,x} \delta w) - \int_{-a}^a N_x w_{,xx} \delta w dx - (M_x \delta w_{,x}) + \int_{-a}^a M_{x,x} \delta w_{,x} dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

On intégrant la deuxième partie pour la deuxième fois :

$$\int_{-a}^a M_{x,x} \delta w_{,x} dx = M_{x,x} \delta w - \int_{-a}^a M_{x,xx} \delta w dx$$

L'expression (IV-17) devient

$$\begin{aligned} \delta w_{\text{int}} + \delta w_{\text{ext}} = \\ - \left( \int_{-a}^a N_{x,x} dx \right) \delta u_0 + (N_x \delta u_0 + N_x w_{,x} \delta w + M_{x,x} \delta w - M_x \delta w_{,x}) - \left( \int_{-a}^a N_x w_{,xx} dx + \int_{-a}^a M_{x,xx} dx + \int_{-a}^a q dx \right) \delta w = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

L'équation (IV.18) devant être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels  $\delta u_0$  et  $\delta w$  cinématiquement admissible, on en déduit les équations d'équilibre :

$$(\text{IV.19})$$

$$\delta u : N_{x,x} = 0$$

$$\delta w : M_{x,xx} + N_x \cdot w_{,xx} + q = 0 \quad (\text{IV.20})$$

D'après (IV.19) on peut conclure que  $N_x$  est constante soit :

$$N_x = N_x^0 = \text{constante} \quad (\text{IV.21})$$

En conséquence, l'équation (IV.20) devient :

$$M_{x,xx} + N_x^0 \cdot w_{,xx} + q = 0 \quad (\text{IV.22})$$

D'après l'équation (IV.15) on a :

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \varepsilon_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left( u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 - z w_{,xx} \right) dz \\ N_x &= \left( u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{0,x})^2 \right) \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} dz - w_{,xx} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \cdot z dz \\ N_x &= A_{11} \left( u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) - B_{11} w_{,xx} \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Et

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot Q_{11} \cdot \varepsilon_{xx} dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot Q_{11} \cdot \left( u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{0,x})^2 - z \cdot w_{,xx} \right) dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot Q_{11} \cdot u_{0,x} dz + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 - \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot Q_{11} dz - w_{,xx} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \cdot z^2 dz \\
 M_x &= B_{11} \left( u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) - D_{11} \cdot w_{,xx}
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

Où:  $A_{11}, B_{11}, D_{11}$ , représentent le coefficient de rigidité de membrane, couplage membrane – flexion et de flexion de la plaque respectivement et sont donnés par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2) dz \tag{IV.25}$$

D'après l'équation (IV.23) :

$$u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 = \frac{N_x}{A_{11}} + \frac{B_{11}}{A_{11}} \cdot w_{,xx} \tag{IV.26}$$

On remplace l'expression (IV-26) dans (IV-24), on obtient :

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}} \cdot N_x^0 + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) w_{,xx} \tag{IV.27}$$

En remplaçant l'expression (IV-27) dans l'équation (IV-22) on aura :

$$\begin{aligned}
 \left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) w_{,xxxx} - N_x^0 \cdot w_{,xx} - q &= 0 \\
 w_{,xxxx} - \frac{N_x^0}{\left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right)} \cdot w_{,xx} - \frac{q}{\left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right)} &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.28}$$

Nous obtenons ainsi, l'équation différentielle du quatrième ordre avec second membre:

$$w_{,xxxx} - k^2 w_{,xx} = q_0 \tag{IV.29}$$

Ou

$$k^2 = N_x^0 / \left( D_{11} - B_{11}^2 / A_{11} \right) \tag{IV.30}$$

$$q_0 = q / \left( D_{11} - B_{11}^2 / A_{11} \right) \tag{IV.31}$$

**IV-4. Solution générale:**

Dans cette étude nous considérons une plaque fabriquée en matériau à gradient de propriétés (FGM) soumise à un chargement transversal uniforme  $q$  appliqué à sa surface supérieure. Le but de cette étude est de déterminer des solutions analytiques pour des plaques qui travaillent en flexion.

**IV-4.1 Analyse non linéaire:**

Nous supposons que l'équation régissant fondée sur l'hypothèse de grands déplacements de Von Karman est donnée par l'équation (IV.29) pour le type de problème en flexion cylindrique. Cette équation différentielle du quatrième ordre est linéaire et peut être résolue facilement. Si les conditions aux limites sont symétriques, la solution générale de l'équation (IV.29) est de la forme suivante:

$$w(x) = C_1 \cosh(kx) + C_2 - \frac{q_0}{2k^2} x^2 \quad (IV.32)$$

Où  $C_1$ ,  $C_2$  sont des constantes d'intégration qui peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites au niveau des extrémités de la plaque. Nous supposons que l'origine du système de coordonnées est située au milieu d'une plaque simplement appuyée d'où les conditions aux limites suivantes doivent être satisfaites:

$$w(a) = w(-a) = 0 \quad (IV.33a)$$

$$M_x(a) = M_x(-a) = 0 \quad (IV.33b)$$

$$u(a) = u(-a) = 0 \quad (IV.33c)$$

Est  $N_x^0$  est une constante le long de l'axe  $x$ , substituons l'expression de  $w_{,xx}$  dans l'équation (IV.27).

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^0 + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \left( C_1 k^2 \cosh(kx) - \frac{q_0}{k^2} \right) \quad (IV.34)$$

On applique les conditions aux limites  $w(a) = 0$ ,  $M_x(a) = 0$  pour les deux équations (IV.32) et (IV.34), on trouve :

$$w(a) = C_1 \cosh(ka) + C_2 - \frac{q_0}{2k^2} a^2 = 0 \quad (IV.35)$$

$$M_x(a) = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^0 + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \left( C_1 k^2 \cosh(ka) - \frac{q_0}{k^2} \right) = 0 \quad (IV.36)$$

A partir de l'équation (IV-36), on détermine  $C_1$ .

$$C_1 = \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} + \frac{q_0}{k^4} \right) / \cosh(ka) \quad (IV.37)$$

A partir de l'équation (IV-35), on détermine  $C_2$

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{q_0}{k^2} a^2 - C_1 \cosh(ka) \quad (IV.38)$$

L'équation de déplacement  $u(a)=0$  peut être déterminée par l'intégration de l'équation (IV-26) qui doit satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(a) = & \frac{N_x^0}{A_{11}} a + \frac{B_{11}}{A_{11}} k C_1 \sinh(ka) - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{q_0}{k^2} a - \frac{1}{6} \frac{q_0^2}{k^4} a^3 + q_0 \frac{C_1}{k^3} [ak \cosh(ka) - \sinh(ka)] \\ & - \frac{1}{2} k^2 C_1^2 \left[ \frac{\sinh(2ka)}{4k} - \frac{1}{2} a \right] = 0 \end{aligned} \quad (IV.39)$$

La résolution de l'équation de déplacement  $u(a)=0$ , nous permettra de déterminer  $N_x^0$ . Celle-ci doit être remplacée dans (IV-37) et (IV-38) pour déterminer  $C_1$  et  $C_2$ .

#### **IV-4.2 Analyse linéaire :**

Considérons la théorie des petites déformations, le terme non linéaire des déformations de type Von Kerman est négligé. La solution linéaire du champ de déplacement peut être déterminée à partir l'équation (IV.29) (en posant  $k = 0$ ) avec les conditions aux limites appropriées.

$$w_{,xxxx} = q_0 \quad (IV.40)$$

$$w(x) = \frac{q_0}{24} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (IV.41)$$

$$M(x) = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) w_{,xx} = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \left( \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 + C_2 \right) \quad (IV.42)$$

$$u(x) = \frac{N_x}{A_{11}} x + \frac{B_{11}}{A_{11}} \left( \frac{q_0}{6} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \right) + C_5 \quad (IV.43)$$

Les conditions aux limites sont :

$$w(a) = w(-a) = 0 \quad (IV.44a)$$

$$M_x(a) = M_x(-a) = 0 \quad (IV.44b)$$

$$u(a) = u(-a) = 0 \quad (IV.44c)$$

La résolution du système d'équations, nous permet de déterminer les constantes:

$$C_1 = C_3 = C_5 = 0 \quad (IV.45)$$

$$C_2 = -\frac{1}{6}q_0a^2 \frac{(-2B_{11}^2 + 3D_{11}A_{11})}{D_{11}A_{11}} \quad (IV.46)$$

$$C_4 = \frac{1}{24}q_0a^4 \frac{(-4B_{11}^2 + 5D_{11}A_{11})}{D_{11}A_{11}} \quad (IV.47)$$

$$N_x = \frac{1}{3}q_0a^2 \frac{B_{11}}{D_{11}} \left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \quad (IV.48)$$

Soit les solutions suivantes pour une analyse linéaire:

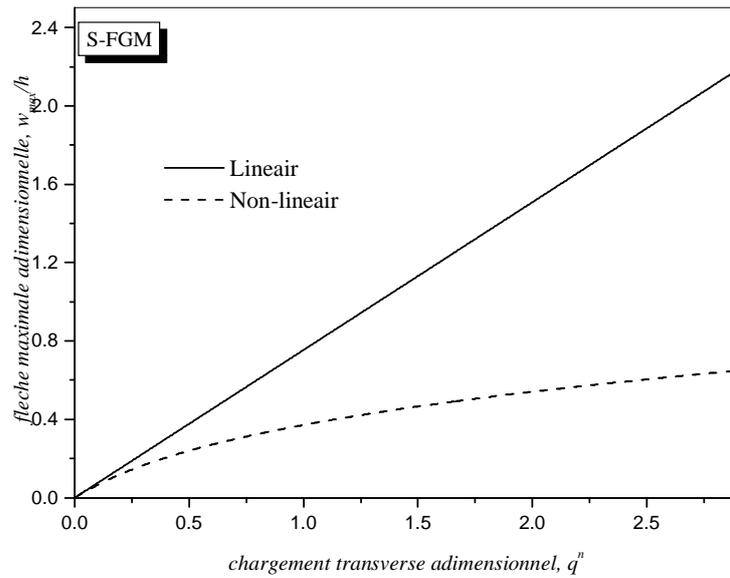
$$w(x) = \frac{1}{24}q_0(x^4 - a^4) + \frac{1}{12} \left( \frac{2B_{11}^2 - 3D_{11}A_{11}}{D_{11}A_{11}} \right) q_0a^2(x^2 - a^2) \quad (IV.49)$$

$$u(x) = \frac{1}{6}q_0x^3 \frac{B_{11}}{A_{11}} - \frac{1}{6}q_0a^2x \frac{B_{11}}{A_{11}} \quad (IV.50)$$

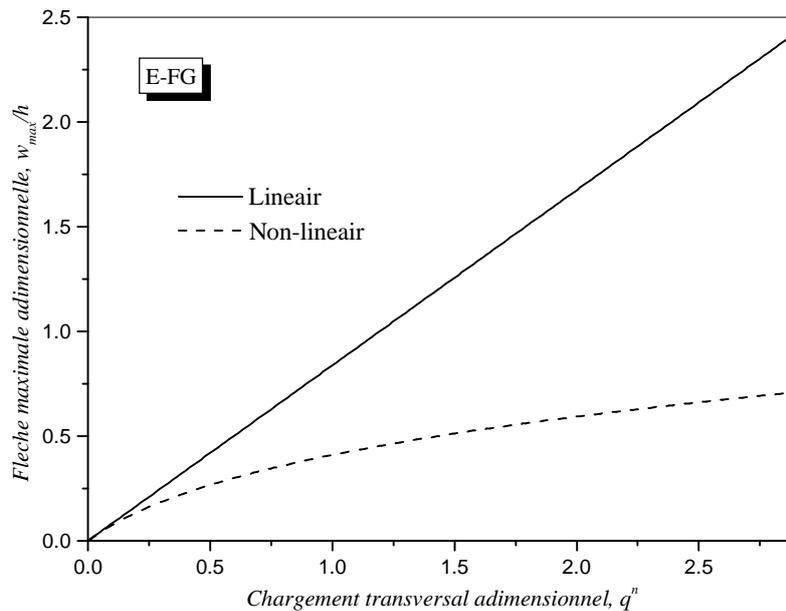
#### **IV-5. Résultats numériques et discussions :**

Pour étudier le comportement non linéaire des plaques en matériaux à gradients de propriétés S-FGM et E-FGM en flexion cylindrique, il a été considéré comme exemple une plaque composée d'aluminium et d'alumine soit respectivement le métal et la céramique. Le module de Young de l'aluminium est de 70 GPa tandis que pour l'alumine est de 380 GPa. On note que le coefficient de Poisson est choisi ici constant et égale à 0,3 pour les deux constituants. Pour tout ce qui suit, la surface inférieure de la plaque est supposée être riche en métal (aluminium) et la surface supérieure d'être riche en céramique (alumine). La géométrie de la plaque est choisie de sorte que  $h=5$  mm et  $a=0,5$  m. Les résultats obtenus sont présentés sous formes de termes adimensionnels comme suit :

- Longueur adimensionnelle  $\bar{x} = x/a$ ,
- Epaisseur adimensionnelle  $\bar{z} = z/h$ ,
- Flèche adimensionnelle  $\bar{w} = w/h$ ,
- Contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / [Q_{11m}(h/a)^2]$ , ( $Q_{11m}$  coefficient de rigidité de la plaque en métal),
- Paramètre de charge  $q^n = q_0a^4 / (E_m h^4)$ .



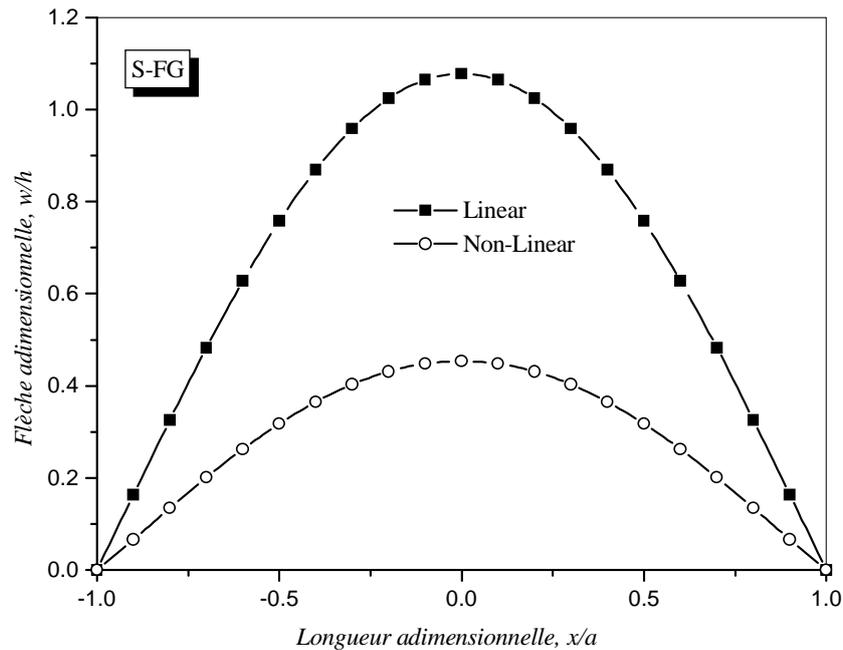
**Figure IV.5:** Variation de la flèche maximale adimensionnelle  $w_{max}$  de la plaque S-FG avec  $p = 2$  en fonction de  $q^n$ .



**Figure IV.6:** Variation de la flèche maximale adimensionnelle  $w_{max}$  de la plaque E-FG en fonction de  $q^n$ .

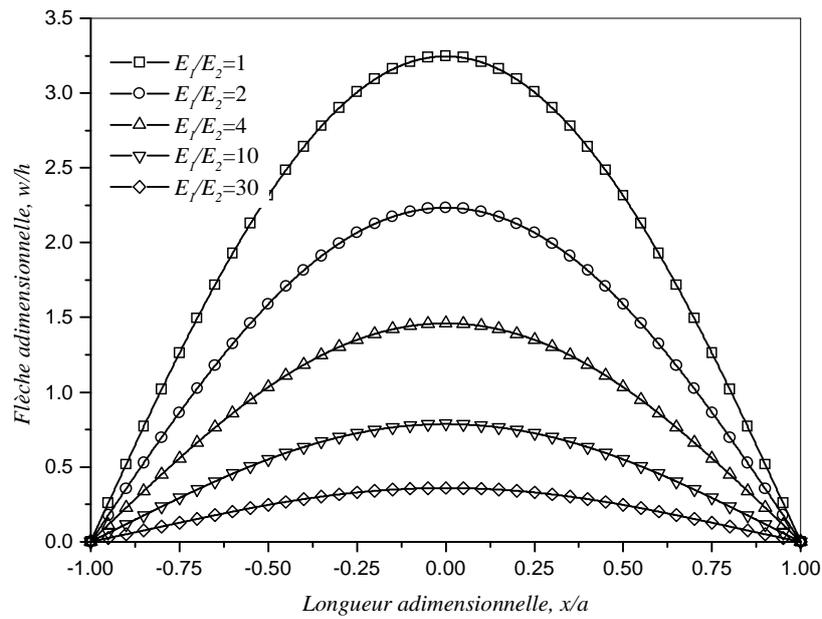
Les Figure IV.5 et IV.6 présentent la variation de la flèche maximale adimensionnelle en fonction du paramètre de charge  $q^n$  pour les plaques S-FG et E-FG. A travers ces graphes, on remarque que la flèche maximale, supérieure à  $0.2h$  pour la plaque S-FG et à  $0.25h$  pour la plaque E-FG respectivement, la solution non linéaire est requise. Aussi ces figures montrent

non seulement la différence entre les solutions linéaires et non linéaires mais également les différentes flèches pour des chargements positifs. Avec l'augmentation du chargement transversal, on remarque une divergence ou la flèche relative à l'analyse non linéaire est plus petite que celle en analyse linéaire. Un tel comportement est signalé dans la littérature concernant les composites stratifiés asymétriques [15, 16, 18].

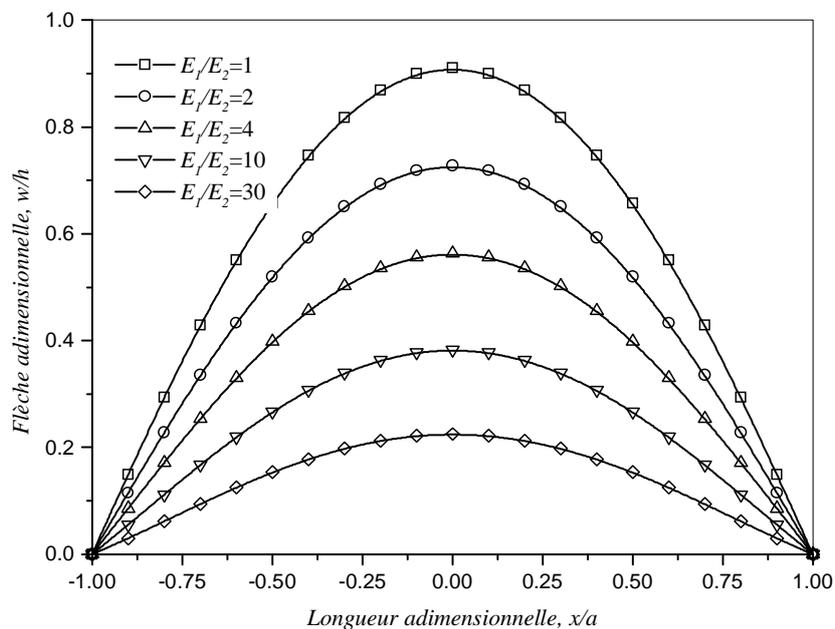


**Figure IV.7:** Variation de la flèche adimensionnelle sous chargement transversal  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  en fonction de la longueur de la plaque S-FGM avec  $p = 2$ .

Pour  $p = 2$  et une charge transverse  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  la flèche adimensionnelle est tracée en fonction de la longueur de la plaque. La solution linéaire surestime la flèche de la plaque S-FG.

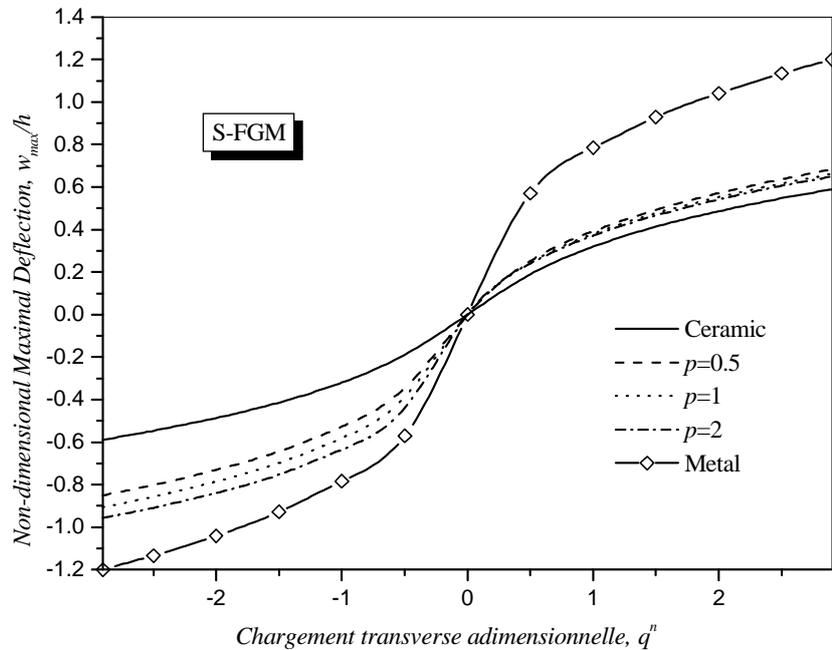


**Figure IV.8:** Variation de la flèche adimensionnelle sous chargement transversal  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  en fonction de la longueur pour différent  $E_1 / E_2$  en analyse linéaire.



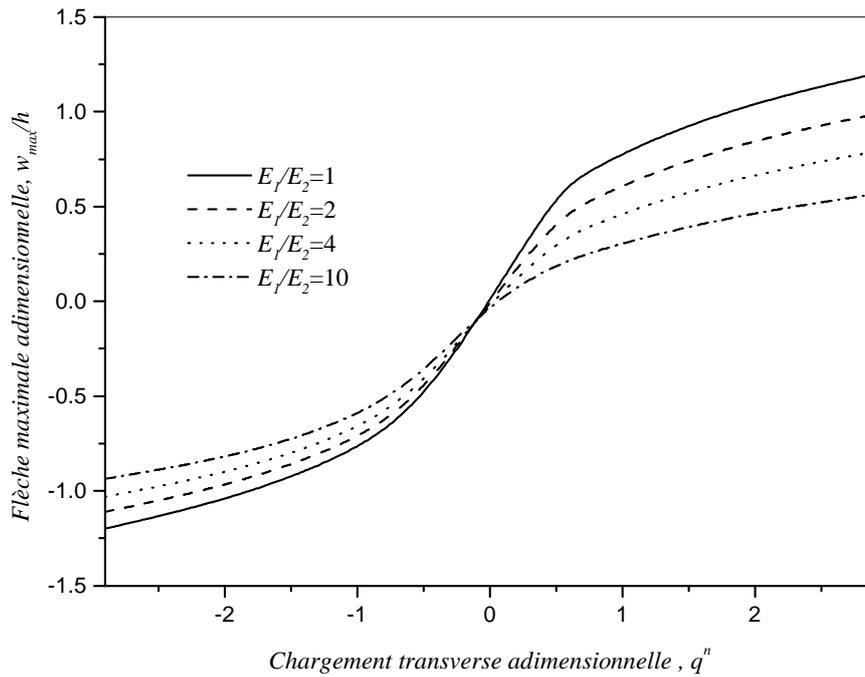
**Figure IV.9:** Flèche adimensionnelle due au chargement transversal  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  en fonction de la longueur adimensionnelle pour différents  $E_1 / E_2$  en analyse non linéaire.

Les Figure IV.8 et IV.9 montrent que (i) plus  $E_1 / E_2$  est grand, la flèche  $w$  devient de plus en plus petite, en raison de la grande rigidité de la plaque E-FG ; (ii) la solution linéaire surestime le flèche de la plaque E-FG.



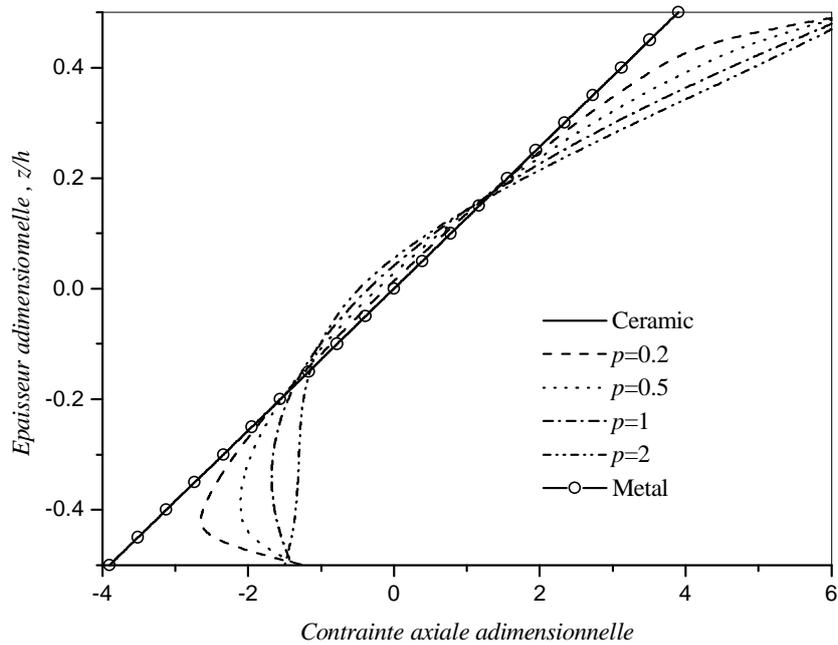
**Figure IV.10:** Variation de la flèche maximale adimensionnelle  $w_{max}$  de la plaque S-FG en fonction de  $q^n$  pour différents paramètres matériels.

La figure IV-10 présente la variation de la flèche maximale adimensionnelle en analyses non linéaires pour la plaque S-FG avec différentes valeurs du paramètre matériel  $p$  soumise à un chargement transversal. Les résultats montrent qu'une plaque fabriquée par du métal pur a des flèches très importantes. Ceci s'explique par le fait que la plaque en métal possède une rigidité inférieure à celle en céramique et en S-FG. Les déformées de la plaque S-FG sont comprises entre celles de plaque en céramique et en métal. Elle montre aussi que la plaque présente des comportements différents pour des charges transversales positives et négatives. Dans le chargement négatif, au début du chargement, l'analyse non linéaire donne de grandes déformées. Dans ce cas de charge, on remarque un effet important de paramètre du matériau que dans le cas de chargement positif.

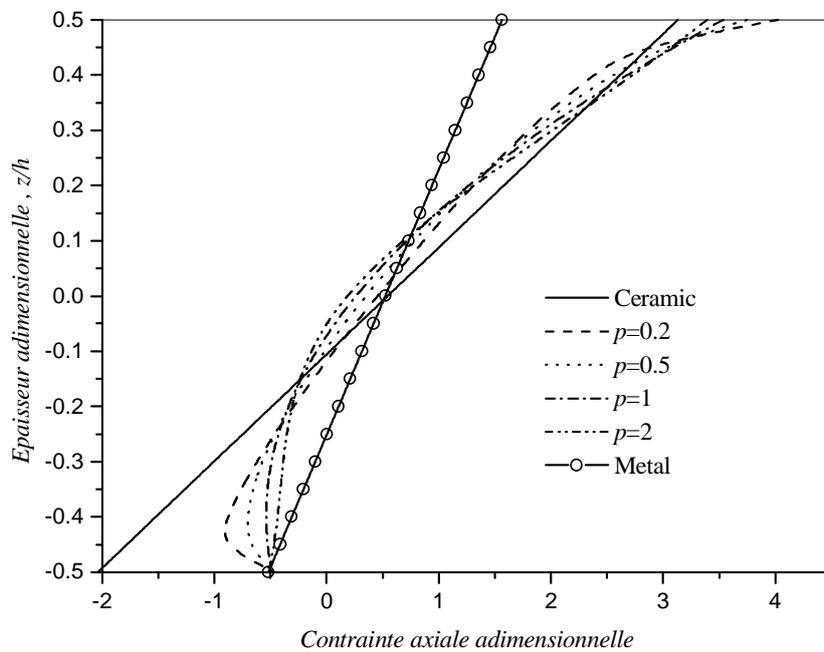


**Figure IV.11:** Variation de la flèche maximale adimensionnelle  $w_{\max}$  de la plaque E-FG en fonction de  $q^n$  pour différent  $E_1 / E_2$ .

La figure IV-11 présente la variation de la flèche maximale adimensionnelle en analyses non linéaires pour la plaque E-FG avec différentes valeurs de  $E_1 / E_2$  soumise à un chargement transversal. Les résultats montrent que la plaque homogène ( $E_1 / E_2 = 1$ ) possède la plus grande déformée. Elle montre aussi que la plaque présente des comportements différents pour des charges transversales positives et négative. Dans le chargement négatif, au début du chargement, l'analyse non linéaire donne de grandes déformées. Toutefois, dans le chargement positif, on remarque un effet important de  $E_1 / E_2$  que dans le cas de chargement négative.



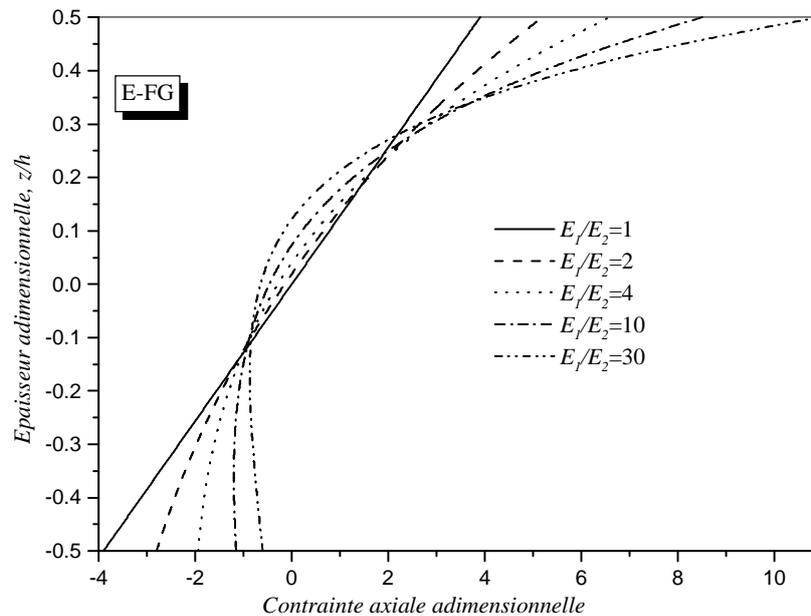
**Figure IV.12:** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  de la plaque S-FG à travers l'épaisseur soumise à  $q=1\text{KN/m}^2$  pour différents paramètre matériels en analyse linéaire.



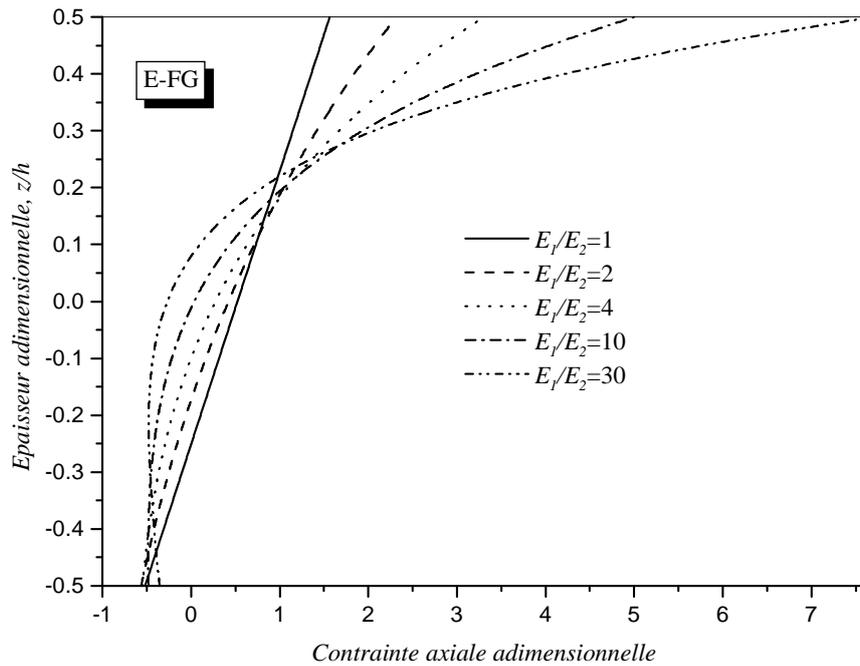
**Figure IV.13:** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  de la plaque S-FG soumise à  $q=1\text{KN/m}^2$  à travers l'épaisseur pour différents paramètre matériels en analyse non linéaire

Les figures IV.12 et IV.13 présentent la distribution adimensionnelle des contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur pour une plaque S-FG soumise à un chargement  $q=1\text{KN/m}^2$  pour différents valeurs du paramètre matériel  $p$  dans l'analyse linéaire et non linéaire respectivement. Sous l'application de la charge de pression, les contraintes sont de compression à la surface inférieure et de traction à la surface supérieure. Pour différent valeur du paramètre matériel, la plaque correspondant à  $p=2$  en analyse linéaire donne des contraintes de traction maximale à la surface supérieure. Il s'agit de la surface de céramique riche. Cependant, la plaque correspondant à  $p=0.2$  en analyse non linéaire donne la contrainte de traction maximale à la surface supérieure.

L'allure de la contrainte pour une plaque en matériau isotrope change linéairement à travers l'épaisseur pour les deux analyses linéaires et non linéaires. Contraire à la solution non-linéaire, la solution linéaire donne des résultats identiques pour des plaques en céramique et métal.

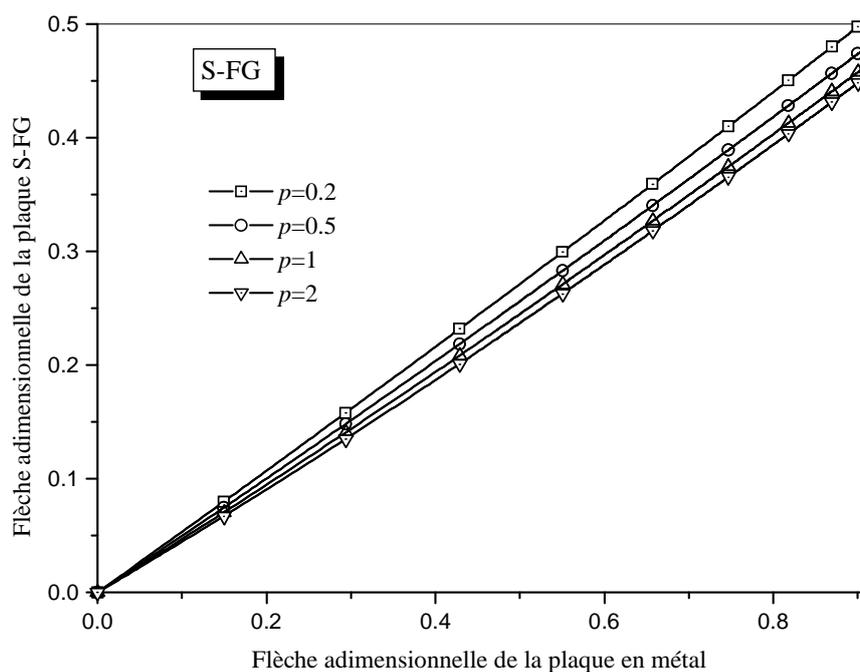


**Figure IV.14:** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  de la plaque E-FG à travers l'épaisseur soumise à  $q=1\text{KN/m}^2$  pour différents  $E_1/E_2$  en analyse linéaire



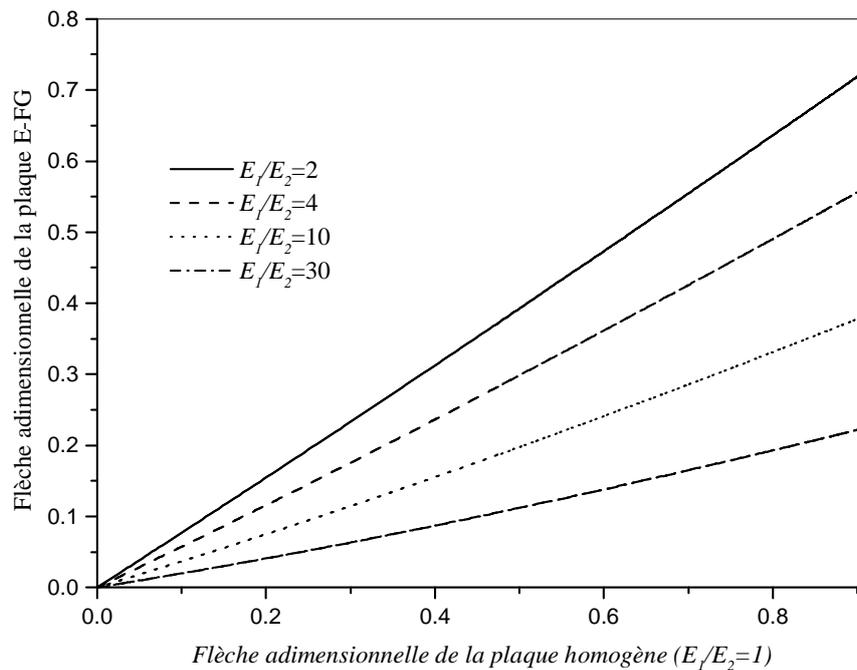
**Figure IV.15:** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  de la plaque E-FG à travers l'épaisseur soumise à  $q = 1 \text{KN/m}^2$  pour différents  $E_1 / E_2$  en analyse non linéaire.

Les figures IV.14 et IV.15 représentent la distribution des contraintes adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque E-FG soumis à un chargement  $q = 1 \text{KN/m}^2$  pour  $E_1 / E_2$  différent en analyses linéaires et non linéaires, respectivement. Sous l'application de la charge de pression, les contraintes de compression sont à la surface inférieure et de traction à la surface supérieure. Dans le cas d'une analyse linéaire, on peut voir que pour une plaque homogène dans laquelle  $E_1 / E_2 = 1$ , les contraintes de traction et de compression sont égaux et situé au niveau des surfaces supérieure et inférieure. Toutefois, dans le cas de l'analyse non linéaire, cette remarque n'est pas valable. L'allure des contraintes de plaques homogènes changent linéairement à travers l'épaisseur pour les solutions à la fois linéaires et non linéaires. A travers ces figures, il peut être observé que quand le rapport  $E_1 / E_2$  augmente, l'intensité des contraintes de traction et de compression n'est plus égale.



**Figure IV.16:** Flèche adimensionnelle de la plaque S-FG en fonction de la flèche adimensionnelle de la plaque en métal pour différents paramètre, matériel en analyse non linéaire ( $q = 1 \text{ KN/m}^2$ ).

La figure IV.16 montre que les déformées adimensionnelles à travers la longueur de la plaque S-FG sont directement proportionnelles à celles de la plaque métallique. Par conséquent, on peut prédire les déformations de S-FG plaques en sachant celle des plaques homogènes.



**Figure IV.17:** Flèche adimensionnelle de la plaque E-FG en fonction de la flèche adimensionnelle de la plaque homogène pour différents paramètre matériel en analyse non linéaire ( $q = 1 \text{ KN/m}^2$ ).

La figure IV.17 montre que les déformées adimensionnelles à travers la longueur de la plaque E-FG sont directement proportionnelles à celles de la plaque homogène. Par conséquent, on peut prédire les déformations de E-FG plaques en sachant celle des plaques homogènes.

#### IV-6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude non linéaire des plaques FGM en flexion cylindrique soumises à un chargement transverse en utilisant une solution analytique simple et de comparer le comportement des plaques traditionnelles faites de matériaux purs à celui des plaques en FGM.

Dans cette étude, nous avons utilisés des propriétés matérielles de la plaque FGM qui changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions sigmoïdes (S- FG) et exponentielle (E-FG).

Les déformations de Von Kerman sont utilisées, lorsque le déplacement transverse  $w$  est grand devant  $u$  et  $v$ . Ces dernières sont employées pour constituées les équations régissant le problème.

Les équations globales des plaques sont obtenues à partir du principe du travail virtuel

en utilisant la théorie classique des plaques (C.P.T) qui suppose que les hypothèses de Kirchhoff sont réunies. On constate que les équations des plaques selon la théorie des grandes flèches peuvent être exprimées en équations linéaires pour la flèche. Cette linéarité des équations simplifie considérablement l'analyse de la flèche. De cette étude on conclut qu'en raison du couplage membrane-flexion, la théorie des grandes flèches des plaques doit être utilisée même pour les flèches qui sont considérées petites.

Pour le cas d'un chargement transverse, les contraintes et les déformations sont calculées pour les plaques avec deux différents mélanges métal-céramique. Les résultats numériques montrent la figure relative à la flèche des plaques en FGM est située entre ceux des plaques isotropes fabriquées en céramique et en métal et que la distribution des contraintes axiales est non linéaire pour les analyses linéaires et non linéaires. En conséquence, le calcul non linéaire des réponses de la plaque est important, d'autre part, les résultats indiquent que l'effet de la non linéarité est de réduire l'intensité de la déformée transversale. En outre, les contraintes sur la partie supérieure et inférieure de la plaque FGM ne sont pas symétriques par rapport à la contrainte du plan moyen. En comparaison de l'analyse non linéaire, la solution linéaire surestime la flèche et la contrainte axiale dans le cas où le chargement transversal est positif, mais pour le cas où le chargement transversal est négatif, quand l'importance du chargement est petite, la solution linéaire sous-estime les résultats pour quelques valeurs du paramètre matériel. Pour les plaques homogènes la théorie linéaire, qui néglige l'action de membrane, est satisfaisante jusqu'à une valeur particulière de la flèche tandis que pour les plaques en FGM avec un chargement transverse positif, cette valeur change avec le mélange céramique-métal et est plus petite que celle des plaques homogènes.

En outre, nous avons tracé des abaques de travail, permettant de déterminer les contraintes axiales et la flèche de n'importe quel matériau FGM connaissant seulement la valeur de la contrainte axiale du matériau pur « Aluminium »,

Par ailleurs, on remarque d'après l'élaboration des graphes des contraintes axiales et flèches pour des plaques en FGM dont les propriétés matérielles changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon les différentes fractions de volume des matériaux constitutifs, étudié dans cette partie présentent les mêmes allures toutefois les grandeurs changent du S-FGM au E-FGM.

## **Chapitre V**

### Analyse Non Linéaire Des Plaques Composites Renforcées Par Des Nanotubes De Carbone en Flexion Cylindrique

# Chapitre V : Analyse Non Linéaire Des Plaques Composites Renforcées Par Des Nanotubes De Carbone en Flexion Cylindrique

## **V.1. Introduction**

Actuellement, les travaux sur les composites renforcés par des nanotubes de carbone sont devenus un point très important dans la recherche scientifique et ce, car les nanotubes de carbone (CNTs) possèdent des propriétés mécaniques, électriques et thermiques exceptionnelles dans les composites de matrice de polymère. La propriété la plus importante des nanotubes de carbone est sa rigidité combinée avec son excellente résistance. Par conséquent, l'introduction des nanotubes de carbone dans des polymères peut améliorer leurs applications dans les domaines de renforcement des composites comme les dispositifs électroniques.

La plupart des études sur les composites renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRCs) se sont concentrées sur leurs propriétés matérielles. Plusieurs recherches ont montré que l'addition d'un pourcentage de nanotube de carbone peut considérablement améliorer les propriétés mécaniques, électriques et thermiques des composés polymères. L'utilisation des composites renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRCs) dans des applications structurales réelles est le but final pour le développement de cette classe avancée des matériaux. En conséquence, il y a un besoin d'observer la réaction globale de CNTRCs dans un élément structural réel. Wuite et Adali [84] ont examiné la flèche et la contrainte des poutres nano-composite renforcé par des nanotubes. Ils ont constaté qu'un petit pourcentage du renfort de nanotube mène aux améliorations significatives de la rigidité de poutre.

L'approche traditionnelle de fabrication des nano-composites implique que le nanotube est distribué uniformément ou aléatoirement tels que les propriétés mécaniques,

thermiques, ou physiques ne changent pas dans l'espace au niveau macroscopique. Les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) sont une nouvelle génération de matériaux composites où les détails microstructuraux changent dans l'espace par la distribution non-uniforme de la phase renfort. Suresh et Mortensen [85] ont présenté le grand problème de déformation des composites multicouche sous chargements thermomécaniques. Quand le chargement thermomécanique atteint une déformation élevée devient non linéaire, le champ des déformations de type Von Karman doivent être utilisées. Basé sur la première théorie de plaque de déformation de cisaillement, Praveen et Reddy [86] ont analysé la réponse statique et dynamique non linéaire des plaques en FGM soumises aux chargements mécaniques transversaux et à une conduction régulière unidimensionnelle de la chaleur en utilisant la méthode d'élément fini. Shen [87,88] a présenté une analyse en flexion non linéaire des plaques rectangulaires en FGM déformable simplement supportées soumises à un chargement de cisaillement uniforme transversal et à un chargement sinusoïdal dans les environnements ou la conduction thermique de la chaleur. Yang et Shen [89,90] ont développé une méthode semi-analytique numérique pour examiner la grande flèche des plaques rectangulaires déformable minces et le cisaillement FGM soumises aux chargements mécaniques et thermiques combinés dans de diverses conditions de borne. D'ailleurs, Na et Kim [91] ont étudié la flexion non linéaire des plaques rectangulaires de FGM soumises à une pression uniforme transversale et à des chargements thermiques en utilisant une méthode d'élément fini à trois dimensions. Dans les investigations mentionnées ci-dessus [86–91], les FGM sont les matériaux à gradient de propriétés céramique-métal, et les propriétés matérielles sont supposés évaluées dans la direction d'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance en termes de fractions de volume des constituants.

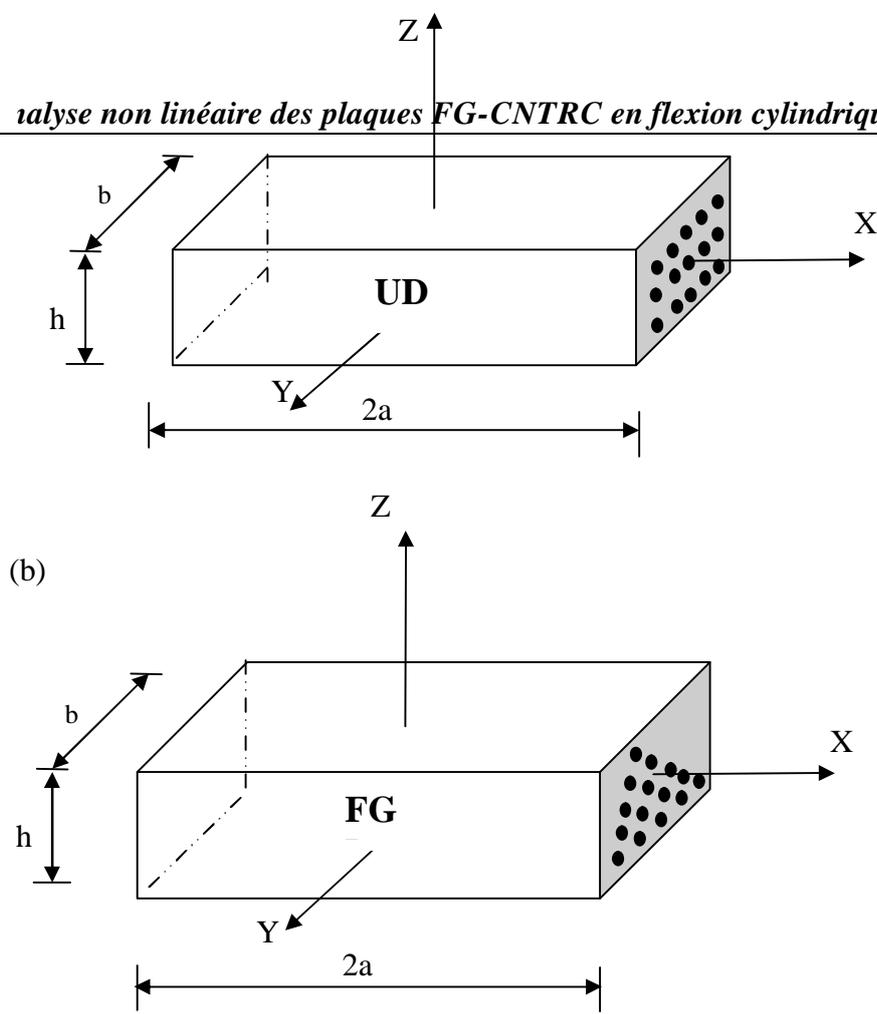
Dans ce travail, le comportement non linéaire en flexion cylindrique des plaques nanocomposites à gradient de propriétés renforcées par des nanotubes de carbone simple-murés (SWCNTs) avec des fractions volumiques faibles de nanotube de carbone (CNTs). On suppose que les propriétés matérielles de SWCNTs sont dépendantes de la taille et de la température et est obtenu par des méthodes de simulation de la dynamique moléculaires (MD).

Les propriétés matérielles de FG-CNTRCs sont supposées à gradient de propriétés dans la direction d'épaisseur, et sont estimées par un modèle micromécanique dans lequel le paramètre d'efficacité de CNT est estimé en déterminant le module élastique du CNTRCs observé des résultats de simulation MD avec les résultats numériques obtenus à partir

de la loi de mélange. La théorie classique des plaques (CPT) et les déformations non linéaires du type Von Karman sont utilisées pour déterminer les équations régissant et incluent des effets thermiques. Des résultats numériques sont présentés pour montrer l'influence des propriétés du matériau, la géométrie de la plaque et le chargement mécanique sur le résultat de la déformée et contrainte non linéaire des plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone à gradient de propriétés (FG-CNTRCs) sous différents ensembles de conditions environnementales.

## **V.2. Propriétés matérielle à gradient de propriétés des plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone :**

La figure V.1 montre une plaque composite renforcée par des nanotubes de carbone d'épaisseur  $h$  ou la distribution du renfort de CNTs est uniformément distribuée à travers l'épaisseur dans la figure. V.1 (a) (UD-CNTRC) et non uniforme et à gradient de propriétés dans la direction d'épaisseur dans la figure. V.1(b) (FG-CNTRC), respectivement. Nous supposons que la plaque de CNTRC est faite à partir d'un **mélange de SWCNT**, de distribution à gradient de propriétés dans la direction d'épaisseur, et de **la matrice** qui est supposé isotrope. La question clé est première pour déterminer les propriétés matérielles pertinentes de CNTRCs. En termes de modèle micromécanique les propriétés matérielles pertinentes peuvent être estimées par l'arrangement de Mori-Tanaka [92, 93] ou la loi des mélanges [94, 95]. L'arrangement de Mori-Tanaka est applicable aux nanoparticules et la loi des mélanges est simple et commode pour s'appliquer pour prévoir les propriétés et les réactions matérielles globales des structures. L'exactitude de la loi des mélanges a été discutée et un synergisme remarquable entre l'arrangement de Mori-Tanaka et la règle du mélange pour les poutres céramique-métal à gradient de propriétés a été rapporté dans [96]. Selon la loi des mélanges, le module de Young et le module de cisaillement peuvent être exprimés comme suit :



**Figure V.1** : Géométrie de composites renforcées par des nanotubes de carbone: (a)UD-CNTRC and (b) FG-CNTRC

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m, \quad (V.1a)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m}, \quad (V.1b)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m}, \quad (V.1c)$$

$$\alpha_{11} = V_{CN} \alpha_{11}^{CN} + V_m \alpha^m, \quad (V.1d)$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{CN}) V_{CN} \alpha_{22}^{CN} + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12} \alpha_{11} \quad (V.1e)$$

Ou  $E_{11}^{CN}$ ,  $E_{22}^{CN}$ ,  $G_{12}^{CN}$ ,  $\alpha_{11}^{CN}$  et  $\alpha_{22}^{CN}$  sont les modules de Young, modules de cisaillement et les coefficients de dilatation thermique du nanotube de carbone, et  $E^m$ ,  $G^m$  et  $\alpha^m$  correspondent aux propriétés de la matrice.  $\nu_{12}^{CN}$  et  $\nu^m$  sont les coefficients de Poisson, respectivement, du nanotube de carbone et matrice. Pour expliquer la dépendance des propriétés du matériau Eq.(V-1) on introduit  $\eta_j$  ( $j=1,2,3$ ) qui s'appelle le paramètre

d'efficacité du CNT, et sera déterminée plus tard en faisant correspondre le module d'élasticité du CNTRCs observées à partir des résultats de simulation de dynamique moléculaire MD avec les résultats numériques obtenus à partir de la loi de mélange.  $V_{CN}$  et  $V_m$  sont les fractions volumique de nanotube de carbone et de la matrice et sont reliés par ;

$$V_{CN} + V_m = 1 \quad (V.2a)$$

Nous supposons que la fraction volumique  $V_{CN}$  évolue comme suit:

$$V_{CN} = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CN}^* \quad (V.2b)$$

Dans laquelle

$$V_{CN}^* = \frac{W_{CN}}{W_{CN} + (\rho_{CN} / \rho_m) - (\rho_{CN} / \rho_m)W_{CN}} \quad (V.2c)$$

Où  $W_{CN}$  est la fraction massique du nanotube, et  $\rho_{CN}$  et  $\rho_m$  sont les densités de nanotube de carbone et la matrice, respectivement. De cette façon, les deux cas de répartition uniformément (UD), c.-à-d.  $V_{CN} = V_{CN}^*$ , et fonctionnellement gradués (FG) CNTRCs auront la même valeur de la fraction massique de nanotubes.

Le coefficient de Poisson est supposé être distribué uniformément, c.à.d.

$$\nu_{12} = V_{CN}^* \nu_{12}^{CN} + V_m \nu^m \quad (V.2c)$$

On le suppose que les propriétés matérielles du nanotube et de la matrice est en fonction de la température, de sorte que les propriétés matérielles du CNTRCs, comme le module de Young, le module de cisaillement et les coefficients d'expansion thermique, sont des fonctions de la température et de la position.

### **V.3. Equations constitutives non linéaire des plaques FG-CNTRC en flexion**

Dans cette partie, nous allons décrire les équations fondamentales en analyse en grande déplacement des plaques FG-CNTRC d'épaisseur constante  $h$  soumise à un chargement transversal combiné avec un chargement thermique. Basé sur les hypothèses de Kirchhoff et la théorie des grandes déformations de Von-Karman, les relations (déformations-déplacements) peuvent être écrites de la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}, & \varepsilon_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0\end{aligned}\quad (\text{V. 3})$$

Où

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, & \varepsilon_y^0 &= v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ k_x &= -w_{,xx}, & k_y &= -w_{,yy} \quad \text{and} \quad k_{xy} = -2w_{,xy}\end{aligned}\quad (\text{V. 4})$$

Où  $(u, v, w)$  sont les déplacements du plan moyen dans les directions  $(x, y, z)$ , respectivement. Aussi,  $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$  et  $(k_x, k_y, k_{xy})$  sont les déformations et courbures du plan moyenne. Les virgules en indice représentent la différenciation.

Les relations contraintes -déformations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{22} \Delta T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\quad (\text{V. 5})$$

Où  $\Delta T = T - T_0$  est la différence de température et  $T_0$  est la température de référence ou la contrainte thermique est nulle.

En utilisant les propriétés du matériaux définies par les éq.(V-1), les coefficients de rigidités ,  $Q_{ij}$ , peuvent êtres exprimés comme suit

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}\quad (\text{V. 6})$$

Où  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  ont leurs significations habituelles, en particulier pour une couche CNTRC ils sont donnés en détail dans les équations. (V-1) et (V-2).

L'utilisation de l'équation. (V-5) en liaison avec les composants de contrainte de l'équation. (V-3), la relation constitutive de la plaque CNTRC peut être écrite comme

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix}\quad (\text{V. 7})$$

Où  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont des matrices  $(3 \times 3)$  données par

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz\quad (\text{V. 8})$$

$N$  et  $M$  sont des matrices ( $3 \times 3$ ) de la résultante des forces normales et des moments de flexion, respectivement, définies de la manière habituelle, c'est-à-dire

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z) dz \quad (V. 9)$$

Les chargements thermiques équivalentes ( $N^T$  et  $M^T$ ) sont définis par les relations

$$(N^T, M^T) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \alpha_j \Delta T(1, z) dz \quad (V. 10)$$

L'utilisation du principe de Hamilton permet d'obtenir les équations d'Euler-Lagrange (Reddy, 2003)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - W) dt = 0 \quad (V. 11)$$

Où  $U$  est l'énergie de déformation interne et  $W$  est le travail des forces externes.

$$U = \int_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}] dV \quad (V. 12)$$

Et 
$$W = \int_{\Omega} q w d\Omega \quad (V. 13)$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque.

Utilisons l'éq. (V.3), l'éq. (V.11) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w dx dy \right] dt = 0 \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left( \sigma_x (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} - z \delta w_{,xx})_x + \sigma_y (\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y} - z \delta w_{,yy})_y \right) \right. \\ & \quad \left. + \tau_{xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y} + w_{,y} \delta w_{,x} - 2z w_{,xy}) \right] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w dx dy \Big] dt = 0 \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \left( N_x (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) - M_x \delta w_{,xx} + N_y (\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) - M_y \delta w_{,yy} \right) \right. \\ & \quad \left. + N_{xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y} + w_{,y} \delta w_{,x}) - 2M_{xy} w_{,xy} \right] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w dx dy \Big] dt = 0 \quad (V. 14) \end{aligned}$$

Intégrons l'éq.(V.14) par partie et regroupons les coefficients de  $\delta u$ ,  $\delta v$  et  $\delta w$ , nous obtenons les équation d'équilibre suivantes :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (V.15a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (V.15b)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q = 0 \quad (V.15c)$$

Où  $q$  est le chargement transverse dans la plaque.

#### V.4. Flexion cylindrique

Dans le cas de la flexion cylindrique, la déformation de la plaque est supposée être indépendante de l'un des axes dans le plan de la plaque. Si cet axe est choisi comme y, les déplacements sont exprimés comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x), \quad \mathbf{v} = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(x) \quad (\text{V-16})$$

Ainsi, la plaque reste dans un l'état de déformation plane dans le plan  $x$ - $z$ . Compte tenu des déplacements donnés par l'équation. (V-16), les équations d'équilibre de la plaque (V-15) se simplifient en

$$N_{x,x} = 0 \quad (\text{V-17})$$

Et

$$M_{x,xx} + N_x \cdot w_{,xx} + q = 0 \quad (\text{V-18})$$

L'équation (V-17) donne

$$N_x = \mathbf{constant} = N_x^0 \quad (\text{V-19})$$

Par conséquent, l'équation (V-18) devient

$$M_{x,xx} + N_x^0 \cdot w_{,xx} + q = 0 \quad (\text{V-20})$$

A partir de l'équation (V-7)

$$\{N\} = [A]\{\epsilon^0\} + [B]\{k\} - \{N^T\} \quad (\text{V-21a})$$

$$\{M\} = [B]\{\epsilon^0\} + [D]\{k\} - \{M^T\} \quad (\text{V-21a})$$

Pour le cas de la flexion cylindrique,

$$N_x = A_{11}\epsilon_x^0 + B_{11}k_x - N_x^T \quad (\text{V-22a})$$

$$M_x = B_{11}\epsilon_x^0 + D_{11}k_x - M_x^T \quad (\text{V-22b})$$

Maintenant substituons les valeurs de  $\epsilon_x^0$  et  $k_x$  de l'Eq. (V-4) donne

$$N_x = N_x^0 = A_{11}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) - B_{11}w_{,xx} - N_x^T \quad (\text{V-23a})$$

$$M_x = B_{11}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) - D_{11}w_{,xx} - M_x^T \quad (\text{V-23b})$$

L'équation (V-23) devient

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}}(N_x^0 + N_x^T) + \left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11}\right)w_{,xx} - M_x^T \quad (\text{V-24})$$

Remplaçons l'éq. (V-24) dans l'éq. (V-18), donne

$$\left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) w_{,xxxx} + N_x^0 w_{,xx} + q = 0 \quad (V.25)$$

Qui peut être mis sous la forme

$$w_{,xxxx} - p^2 w_{,xx} = q_0 \quad (V.26)$$

Ou

$$p^2 = \frac{N_x^0}{(D_{11} - B_{11}^2 / A_{11})} \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{q}{(D_{11} - B_{11}^2 / A_{11})} \quad (V.27)$$

### V.5. Solution générale d'une plaque soumise à un chargement transverse

Dans cette étude, nous considérons une plaque FG-CNTRC soumise à un chargement transverse  $q$  à sa surface supérieure. Nous nous intéressons ici à obtenir une solution analytique non linéaire d'une plaque FG-CNTRC en flexion.

#### V.5.1. Analyse non linéaire

L'éq. (IV.26) est une équation différentielle linéaire ordinaire du quatrième ordre dont la solution est déjà disponible. La solution générale est la suivante

$$w(x) = C_1 \cosh(px) + C_2 - \frac{q_0 x^2}{2p^2} \quad (V.28)$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes, qui doivent être déterminées en utilisant les conditions aux limites à chaque bord de la plaque. Supposons que l'origine du système de coordonnées est située à mi-portée de la plaque; En conséquence, les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée sont

$$w(\pm a) = 0, \quad M_x(\pm a) = 0 \quad \text{et} \quad u(\pm a) = 0 \quad (V.29)$$

Substituons l'éq.(V.28) dans l'éq. (V.24)

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}} (N_x^0 + N_x^T) + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \left( C_1 p^2 \cosh(px) - \frac{q_0}{p^2} \right) - M_x^T \quad (V.30)$$

Qui, par application de la condition au limite  $M_x(\pm a) = 0$ , donne

$$C_1 = \frac{1}{\cosh(pa)} \left\{ \frac{1}{N_x^0} \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^T - M_x^T \right) + \frac{B_{11}}{A_{11}} + \frac{q_0}{p^4} \right\} \quad (V.31)$$

La condition au limite  $w(\pm a) = 0$  donne

$$C_2 = \frac{q_0 a^2}{2p^2} - C_1 \cosh(pa) \quad (V.32)$$

Intégrons l'éq.(V.23a) par rapport à  $x$ , et l'application de la condition au limite  $u(\pm a) = 0$  conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{N_x^0 + N_x^T}{A_{11}} + \frac{B_{11}}{A_{11}} p C_1 \sinh(pa) - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{q_0 a}{p^2} - \frac{q_0^2 a^3}{6p^4} + \frac{p^2 C_1^2 a}{4} \\ & - \frac{p C_1^2}{8} \sinh(2pa) + \frac{C_1 q_0}{p^3} [pa \cosh(pa) - \sinh(pa)] = 0 \end{aligned} \quad (V.33)$$

Les équations (V.31)-(V.33) contiennent trois quantités inconnues:  $C_1, C_2$  et  $N_x^0$  et une méthode numérique doit être utilisé pour obtenir la solution.

Si  $N_x^0$  est négatif, la solution de l'équation. (V.26) devient

$$w(x) = C_1 \cos(px) + C_2 + \frac{q_0 x^2}{2p^2} \quad (V.34)$$

Qui, en appliquant les conditions aux limites de l'équation (V.29), donne

$$C_1 = \frac{1}{\cos(pa)} \left\{ \frac{1}{N_x^0} \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^T - M_x^T \right) + \frac{B_{11}}{A_{11}} + \frac{q_0}{p^4} \right\} \quad (V.35)$$

$$C_2 = \frac{-q_0 a^2}{2p^2} - C_1 \cos(pa) \quad (V.36)$$

Et

$$\begin{aligned} & \frac{N_x^0 + N_x^T}{A_{11}} a - \frac{B_{11}}{A_{11}} p C_1 \sin(pa) + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{q_0 a}{p^2} - \frac{q_0^2 a^3}{6p^4} - \frac{p^2 C_1^2 a}{4} \\ & + \frac{p C_1^2}{8} \sin(2pa) + \frac{C_1 q_0}{p^3} [-pa \cos(pa) + \sin(pa)] = 0 \end{aligned} \quad (V.37)$$

Encore une fois, l'Eq. (V.37) est une équation transcendante et les équations.(V.35)-(V.37) sont à résoudre numériquement.

### V.5.2. Analyse linéaire

Les équations de déplacement selon la théorie classique linéaire peuvent être obtenues en mettant  $p = 0$  en équation. (V.26), soit

$$w_{,xxxx} = q_0 \quad (V.37)$$

La solution suivante pour l'analyse linéaire est obtenue:

$$w(x) = \frac{q_0 x^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (\text{V.38})$$

A cause de la symétrie,  $C_1 = C_3 = 0$ . L'équation (V.38) est réduite à

$$w(x) = \frac{q_0 x^4}{24} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_4 \quad (\text{V.38})$$

Substituons l'éq.(V.38) dans l'éq. (V.24)

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}}(N_x^0 + N_x^T) + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \left( \frac{q_0 x^2}{2} + C_2 \right) - M_x^T \quad (\text{V.39})$$

Intégrons l'éq.(V.23a) par rapport à  $x$ , et l'application de la condition au limite  $u(\pm a) = 0$ , la valeur de  $N_x^0$  est

$$N_x^0 = \frac{B_{11}}{D_{11}} M_x^T - \frac{q_0 a^2}{3} \frac{B_{11}(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}{A_{11}D_{11}} - N_x^T \quad (\text{V.40})$$

En appliquant la condition aux limites  $M_x(\pm a) = 0$ , donne

$$C_2 = \frac{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}{D_{11}(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} M_x^T + \frac{2B_{11}^2 - 3A_{11}D_{11}}{6A_{11}D_{11}} q_0 a^2 \quad (\text{V.41})$$

La condition aux limites  $w(\pm a) = 0$  donne

$$C_4 = -\frac{q_0 a^4}{24} - \frac{C_2 a^2}{2} \quad (\text{V.42})$$

La solution suivante pour l'analyse linéaire est obtenue:

$$w(x) = \frac{q_0}{24} (x^4 - a^4) - \left( \frac{3D_{11}A_{11} - 2B_{11}^2}{12D_{11}A_{11}} \right) q_0 a^2 (x^2 - a^2) - \frac{M_x^T}{2D_{11}} (x^2 - a^2) \quad (\text{V.43a})$$

$$u(x) = \frac{B_{11}}{6A_{11}} q_0 x (x^2 - a^2) \quad (\text{V.43b})$$

## V.6. Résultats numériques et discussion

Soit une plaque mince fabriquée par des composites renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRCs) soumises à une charge transversal uniforme. Nous devons d'abord déterminer les propriétés matérielles du CNTRCs. Le poly {(m-phenylene vinylene)-Co-[(2.5-dioctoxy-p-phenylene) vinylene]}, désigné sous le nom de PmPV, est choisi comme matrice, et les propriétés du matériau sont supposés être  $\nu^m = 0.34$ ,  $\alpha^m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} / \text{K}$  et  $E^m = (3.51 - 0.0047T) \text{ GPa}$ , dans laquelle  $T = T_0 + \Delta T$  et  $T_0 = 300 \text{ K}$  (température ambiante). De cette fait,  $\alpha^m = 45.0 \times 10^{-6} / \text{K}$  et  $E^m = 2.1 \text{ GPa}$  à  $T_0 = 300 \text{ K}$ . Le SWCNTs (10, 10) sont choisis en tant que renforts. Il a été démontré [98-100],

que les propriétés du matériau SWCNTs sont anisotropes, chiralité et dépendant de la taille et de la température. Par conséquent, toutes les propriétés élastiques effectives d'un SWCNT doivent être soigneusement déterminées, sinon les résultats peuvent être incorrects.

À partir de la simulation par la dynamique moléculaire (MD) résulte les propriétés du matériau dépendant de la taille et de la température pour SWCNT (10,10) de type chaise peuvent être obtenue numériquement [87]. Des résultats typiques sont indiqués dans le tableau 1. Il est à noter que l'épaisseur de paroi effective obtenue pour un tube (10, 10) est  $h=0,067$  nm.

**Tableau V.1:** Propriétés des matériaux dépendant de la température pour SWCNT (10, 10) ( $L= 9.26$  nm;  $R= 0.68$  nm;  $h= 0.067$  nm;  $\nu_{12}^{CN} = 0.175$ ).

Temperature (K)	$E_{11}^{CN}$ (TPa)	$E_{22}^{CN}$ (TPa)	$\alpha_{11}^{CN} (\times 10^{-6} / K)$
300	5.6466	7.0800	3.4584
500	5.5308	6.9348	4.5361
700	5.4744	6.8641	4.6677

La question clef pour une bonne application de la loi des mélanges à CNTRCs est de déterminer le paramètre d'efficacité du nanotube de carbone (CNT) $\eta_1$ . Pour les composites à fibres courtes  $\eta_1$  est généralement considéré comme égal à 0,2 [97]. Cependant, il n'y a pas d'expériences qui ont été menées pour déterminer la valeur de  $\eta_j$  pour CNTRCs. Récemment, Shen (2009) donne une estimation des paramètres d'efficacité  $\eta_1$  et  $\eta_2$  en faisant correspondre les modules de Young  $E_{11}$  et  $E_{22}$  du CNTRCs obtenus par la loi des mélanges à ceux obtenus par la méthode de simulation de dynamique moléculaire donnée par Han et Elliott (2007). Par comparaison, nous constatons que les modules de Young obtenus à partir de la loi des mélanges et celui de simulation de dynamique moléculaire peuvent correspondre très bien si les paramètres d'efficacité du nanotube de carbone (CNT) $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont bien choisis, comme indiqué dans le tableau V. 2.

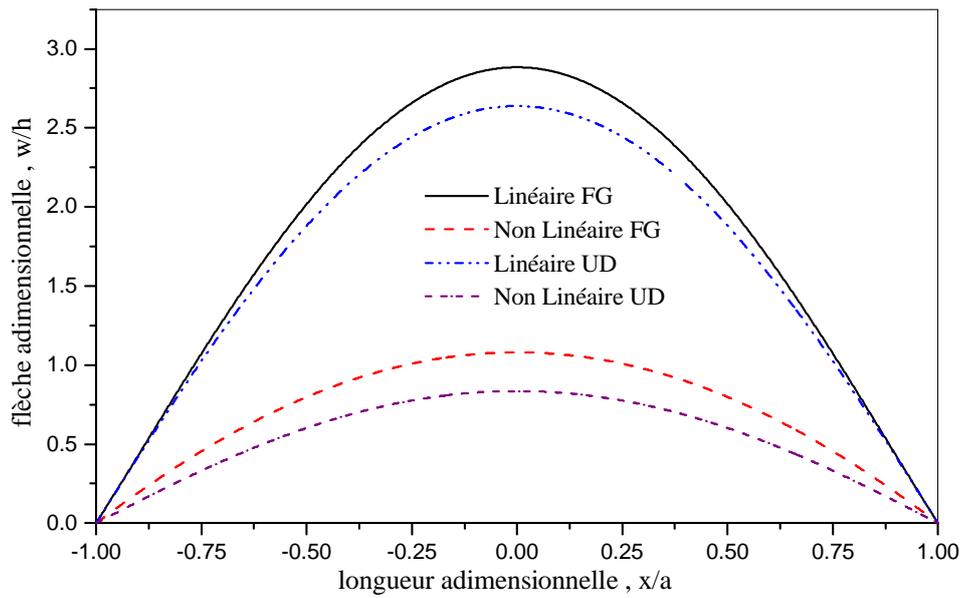
**Tableau V.2:** Comparaison des modules de Young des composites PmPV/CNT renforcés par des tube (10,10) sous  $T = 300 \text{ K}$ .

$V_{CN}^*$	MD (Han and Elliott, 2007)		Règle de mélange			
	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$E_{11}$ (GPa)	$\eta_1$	$E_{22}$ (GPa)	$\eta_2$
0.11	94.8	2.2	94.57	0.149	2.2	0.934
0.14	120.2	2.3	120.09	0.150	2.3	0.941
0.17	145.6	3.5	145.08	0.149	3.5	1.381

La géométrie de la plaque est choisie telle que  $h = 5 \text{ mm}$  et  $a = 0.5 \text{ m}$ . Les résultats obtenus à partir de l'analyse sont présentés dans des termes paramétriques non dimensionnels des flèches et contraintes comme suit:

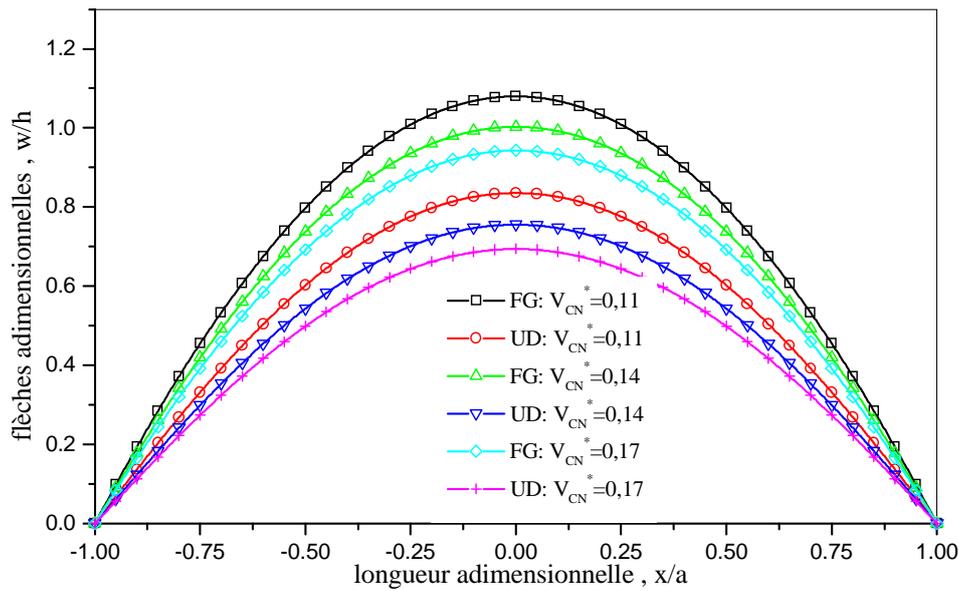
- Longueur adimensionnelle  $\bar{x} = x / a$ ,
- Epaisseur adimensionnelle  $\bar{z} = z / h$ ,
- Flèche adimensionnelle  $\bar{w} = w / h$ ,
- Contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x = \sigma_x h^2 / [(q + 10^{-6} E_{22}^{CN} \alpha_{22}^{CN} \Delta T) a^2]$ ,
- Paramètre de charge  $q^n = q a^4 / (E_{22}^{CN} h^4)$ .

La plaque CNTRC est soumise à une charge transversale de  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  par exemple. La déflexion adimensionnelle est montrée dans la Figure V.2 dans les conditions thermiques  $T = 300 \text{ K}$ . Dans cette figure, on considère également un autre critère de comparaison des plaques CNTRC à gradient de propriétés (FG) et CNTRC uniformément répartis (UD). Il peut être vu que la solution linéaire surestime les déflexions des deux modèles de plaques FG- et UD- CNTRC et les déflexions de la plaque FG-CNTRC sont plus grandes que celle de la plaque UD- CNTRC.



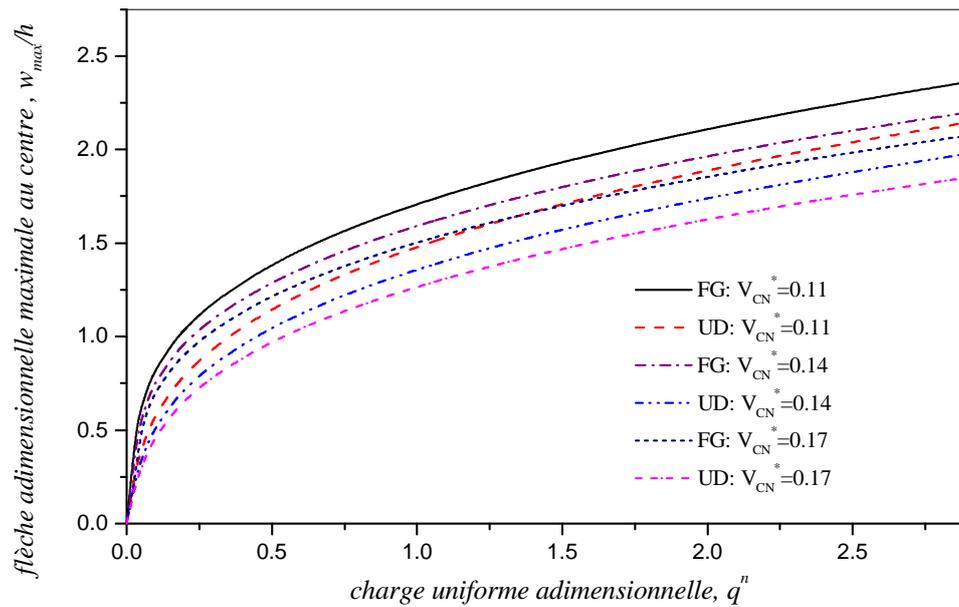
**Figure V.2:** Variation des flèches adimensionnelles de la plaque CNTRC soumise à une charge uniforme transversale  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  en fonction de la longueur adimensionnelle pour  $V_{CN}^* = 0.11$ ,  $T = 300 \text{ K}$ .

La figure V.3 présente l'effet de la fraction volumique des nanotubes sur la déflexion non-dimensionnelle de plaques CNTRC pour différentes valeurs de la fraction volumique de nanotubes  $V_{CN}^* = (0.11, 0.14, 0.17)$  soumis à un chargement uniforme dans des conditions de l'environnement thermique  $T = 300 \text{ K}$  dans une analyse non linéaire. Il peut être vu que la plaque a une plus grande flèche quand il a une fraction de volume faible. Il peut être également constaté que les flèches de la plaque FG-CNTRC sont plus grandes que celles de la plaque UD-CNTRC.



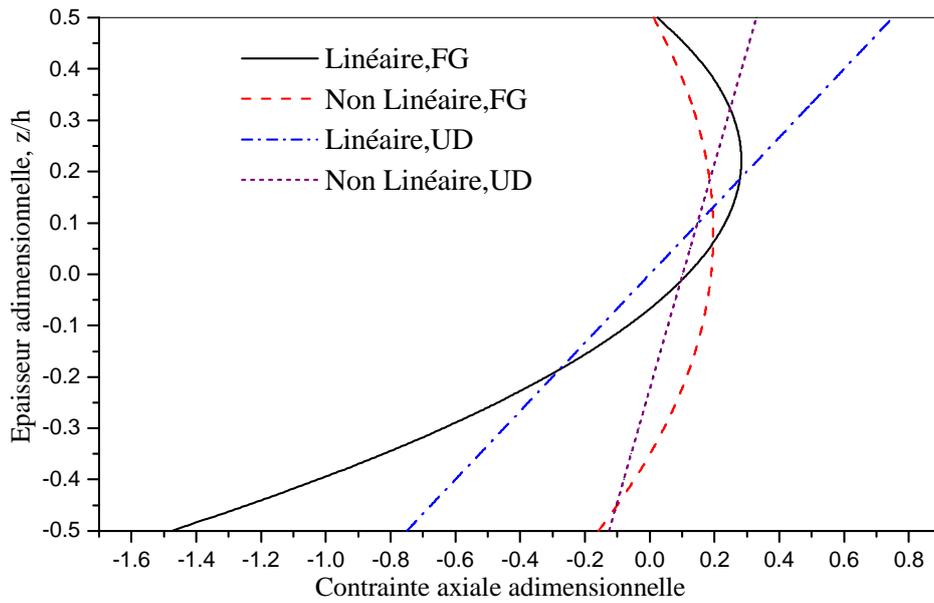
**Figure V. 3:** Effets de la fraction de volume de nanotube en comportement non linéaire en flexion des plaques CNTRC sous chargement uniforme  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  et  $T = 300 \text{ K}$ .

La figure V.4 présente les courbes flèches-charge pour les plaques FG-et UD-CNTRC avec des valeurs différentes de la fraction volumique des nanotubes  $V_{CN}^* = (0.11, 0.14, 0.17)$  soumises à un chargement uniforme dans des conditions de l'environnement thermique  $T = 300 \text{ K}$  dans une analyse non linéaire. Il peut être constaté que la flèche centrale de la plaque FG-CNTRC est plus grande que celle de la plaque UD-CNTRC, et la différence devient plus importante lorsque le chargement transversal est suffisamment grand. Il peut être également vu que la plaque a une plus grande flèche quand il a fraction de volume plus faible.



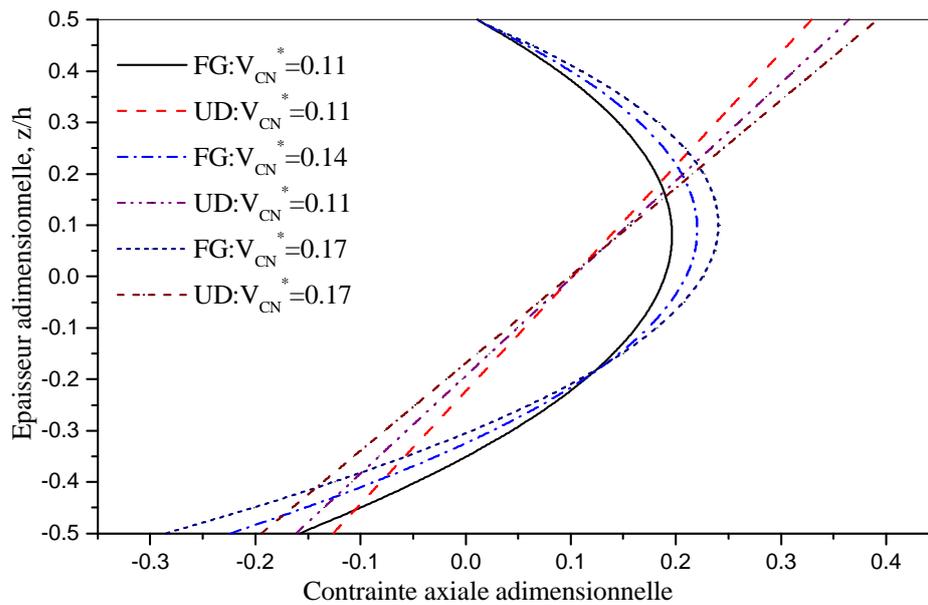
**Figure V.4:** Variation de la flèche adimensionnelle maximale au centre  $w_{\max}$  de la plaque CNTRC en fonction de  $q^n$  pour différentes fraction de volume  $V_{CN}^*$ .

La figure V.5 montre la distribution de la contrainte axiale non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la plaque CNTRC soumise à  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  dans de condition environnementale thermique  $T = 300 \text{ K}$ . Sous l'application de la charge de pression, les contraintes de compression sont à la surface inférieure et de traction à la surface supérieure. Dans le cas d'une analyse linéaire, on peut voir que pour une plaque UD-CNTRC, l'amplitude des contraintes de traction et de compression sont égaux et situé au niveau des surfaces supérieure et inférieure. Toutefois, dans le cas de l'analyse non linéaire, cette remarque n'est pas exacte. L'allure des contraintes pour les plaques en UD-CNTRC change linéairement à travers l'épaisseur pour à la fois les solutions linéaires et non linéaires.



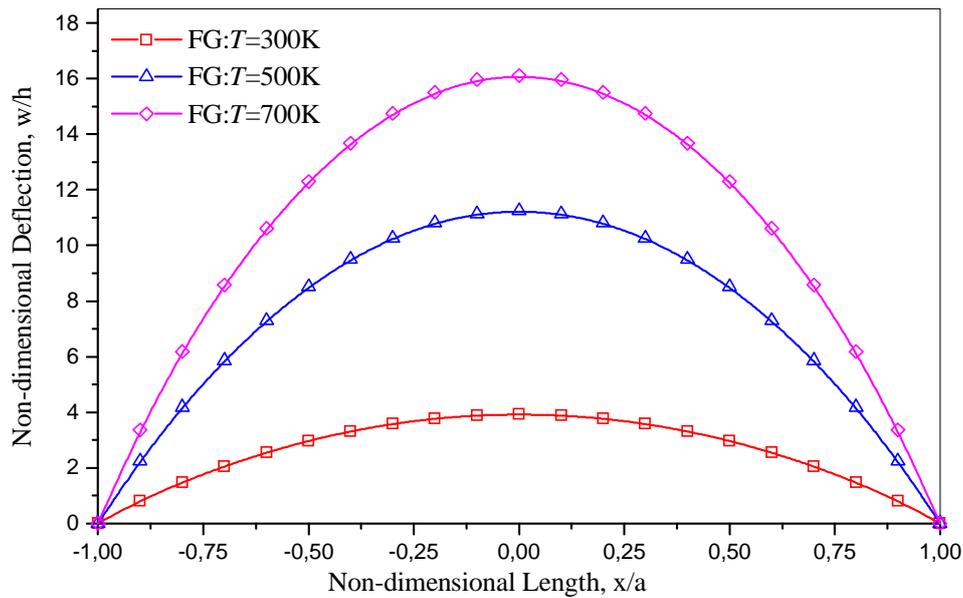
**Figure V.5:** Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  au milieu de la plaque CNTRC à travers l'épaisseur soumise à  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  pour  $V_{CN}^* = 0.11$  et  $T = 300 \text{ K}$ .

La figure V.6 représente l'effet de la fraction volumique de nanotubes sur la contrainte non-dimensionnelle axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur des plaques CNTRC pour différentes valeurs de la fraction volumique de nanotubes  $V_{CN}^* = (0.11, 0.14, 0.17)$  soumis à une pression uniforme dans de condition de l'environnement thermique  $T = 300 \text{ K}$  dans une analyse non linéaire. Il peut être vu que la contrainte axiale non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  augmente avec la fraction volumique.



**Figure V.6:** Effet de la fraction de volume des nanotubes sur la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  au milieu de la plaque CNTRC soumise à  $q = 1 \text{ KN/m}^2$  et  $T = 300 \text{ K}$ .

La figure V.7 présente la déformée non-dimensionnelle des plaques CNTRC soumis à une pression uniforme et sous trois cas de conditions environnementales thermiques  $T = 300 ; 500$  and  $700 \text{ K}$  en utilisant une analyse non linéaire. Étant donné que les propriétés des matériaux à la fois pour la matrice et SWCNTs sont supposées être dépendantes de la température, la variation de la température réduit le module d'élasticité et dégrade la force des nanocomposites. Il peut être vu que les déformées augmentent avec l'augmentation de la température.



**Figure V.7:** Effets du changement de la température dans un comportement non linéaire en flexion d'une plaque CNTRC sous charge uniforme  $q = 100 \text{ KN/m}^2$  pour  $V_{CN}^* = 0.17$ .

### V.7. Conclusion

La flexion cylindrique non linéaire de plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone à gradient de propriétés (CNTRCs) soumises à des charges transversales est étudiée en utilisant une solution analytique simple. Les propriétés des matériaux de FG-CNTRC sont supposées être variables à travers l'épaisseur et sont estimées par la loi de mélange. Les équations de Navier selon la théorie de grandes déplacements peuvent être exprimées comme des équations linéaires pour la déformée, en laissant les conditions aux limites non linéaires. Cette linéarité des équations différentielles simplifie grandement l'analyse de la déformation importante. De cette étude, il est conclu qu'en raison du couplage membrane-flexion, la théorie de grande déformation des plaques doit être utilisée même pour les déformées qui sont normalement considérées comme petites. En comparaison avec l'analyse non linéaire, les solutions linéaires présentent des surestimations. Les résultats montrent également que la plaque a de grandes déformées quand la fraction de volume est faible et les déformées de plaque FG-CNTRC sont plus grandes que celles de la plaque UD-CNTRC.

## **Chapitre VI**

Analyse Non Linéaire de la Flexion des  
Plaques « Sandwiches » en FGM en Utilisant  
la Théorie d'Ordre Elevé à Deux Variables

# Chapitre VI: Analyse Non Linéaire de la Flexion des Plaques « Sandwiches » en FGM en Utilisant la Théorie d'Ordre Elevé à Deux Variables

## **VI.1. Introduction**

Les structures sandwich ont été largement utilisés dans l'aérospatiale, l'aéronautique, l'automobile, les structures navales, sous-marin ainsi que dans le domaine du bâtiment. Les plaques sandwich peuvent être utilisées pour la construction de structures légères à haute résistance avec rapport rigidité-poids, le bruit, vibration et dureté (NVH), isolation thermique, ou la construction de structures avec des couches discrètes à gradient de propriétés. Dans de nombreuses applications, la plaque sandwich est une construction stratifiée, qui se compose de deux ou plusieurs couches rigides (y compris les couches de face) et un ou plusieurs noyaux de grande épaisseur de faible résistance flexibles. Étant donné que, les variations de la rigidité et les propriétés des matériaux des couches sont beaucoup plus importantes dans les plaques sandwich avec des noyaux tendre par rapport aux plaques traditionnelles composites, l'influence du cisaillement transversal et les déformations normales et les contraintes sont plus importantes dans les plaques sandwich mentionnés.

Toutefois, la demande d'efficacité structurelle améliorée dans de nombreux domaines de l'ingénierie a abouti à l'élaboration d'une nouvelle classe de matériaux, appelés matériaux à gradient de propriétés (FGM) [101-103]. Les FGM sont des matériaux hétérogènes dans lesquels les propriétés des matériaux varient continuellement à partir d'un point à un point. Ceci est réalisé en faisant varier la fraction de volume des constituants, par exemple, de la céramique et le métal d'une manière prédéterminée. Cette composition variant en continu élimine les problèmes d'interface, et donc, les distributions de contraintes sont lisses. Le FGM

sont maintenant mis au point pour un usage général comme éléments structuraux dans différentes applications.

Reddy [104] a présenté des solutions pour les plaques rectangulaires FGM en se basant sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT). Cheng et Batra [105] ont rapporté les déformés d'une plaque polygonale en FGM simplement appuyée, proposée par la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT) à celles d'une plaque homogène de Kirchhoff équivalente. Cheng et Batra [106] ont également présenté les résultats pour le flambage et l'étude de cas des vibrations d'une plaque polygonale en FGM simplement appuyée basée sur la théorie des plaques de Reddy. Des solutions analytiques 3D pour les plaques sont utiles car elles fournissent des résultats de référence pour évaluer l'exactitude des différentes théories de la plaque 2D et des formulations éléments finis. Cheng et Batra [107] ont également utilisé la méthode de développement asymptotique pour étudier les déformations thermoélastiques 3D d'une plaque en FGM elliptique. Récemment, Vel et Batra [108] ont présenté une solution exacte en 3D pour la déformation thermoélastique des plaques FGM simplement appuyée de dimensions finies. Zenkour [109] a présenté le problème de flexion sous charge transversale agissant sur une plaque rectangulaire en utilisant les deux solutions 2D et 3D d'élasticité trigonométrique. En outre, Zenkour [110, 111] a présenté une solution 2D pour des analyses de vibration de plaques sandwich simplement appuyées en FG métal-céramique.

Un large éventail des résultats sur le comportement linéaire de plaques à gradient de propriétés sont disponibles dans la littérature [104-110]. Dans ces études, les diverses théories de la plaque telles que classique ou théories de cisaillement d'ordre supérieur ont été utilisées. Cependant, les travaux dans le domaine non linéaire de plaques FGM en fonction de chargement mécanique sont en nombre limité. Par exemple, la méthode de Poincaré [112] a été utilisée pour examiner la grande flèche induite thermiquement dans une plaque mince simplement appuyée avec le module d'Young variant symétriquement à travers l'épaisseur. En outre, la bifurcation du flambement élastique de plaques FGM sous une charge de compression dans le plan en utilisant une combinaison d'approches micromécaniques et structurelle a été rapporté [113]. Une analyse complète par la M.E.F de la réponse statique et dynamique non linéaire des plaques à gradient de propriétés céramique-métal soumises simultanément à des charges thermiques et mécanique transversal en utilisant la théorie des

plaques de déformation de cisaillement du premier ordre serait trouvé dans le travail présenté par Praveen et Reddy [114].

En outre, en utilisant la théorie des grandes déformations de Von Karman, les résultats des solutions analytiques pour les plaques et coques sous chargement mécanique transversal et un champ de température ont été présentés par Woo et Meguid [115]. Dans ce qui suit, la réponse de grande flèche en post-flambage des plaques rectangulaires en FGM sous chargement transversale et dans le plan en utilisant une approche semi-analytique ont été menées [116]. En outre, l'analyse post-flambage de plaques FGM avec actionneurs piézoélectriques sous charges thermo-électro-mécaniques a été présentée par Shen [117]. En outre, l'étude mentionnée présente une analyse post-flambage d'une plaque en FGM simplement appuyée et de cisaillement avec actionneurs piézoélectriques soumis à l'application simultanée des charges mécaniques, électriques et thermiques. En plus, le post-flambage des coques cylindriques FGM hybrides avec actionneurs piézoélectriques soumis à une compression axiale combinée avec des charges électriques dans des environnements thermiques a été étudiée par Shen [118]. Par ailleurs, les relations entre la réponse de flexion et de flambage axisymétrique de plaques circulaires en FGM sur la base de la théorie des plaques de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la théorie classique des plaques (CPT) ont été présentés par Ma et Wang [119]. Les résultats d'une étude sur les effets non linéaires de la géométrie sur les réponses statiques et dynamiques en utilisant un élément poutre isotrope, composite et FGM pourraient être trouvé dans le travail présenté par Agarwal et al. [120]. Plus récemment, une étude sur le comportement des grandes déformations de plaques à gradient de propriétés soumis à des charges de pression a été réalisée en utilisant le concept d'énergie [121]. Dans cette étude, les propriétés du matériau ont été supposées être distribuées dans le sens de l'épaisseur selon une fonction simple loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. En ce qui concerne la condition aux limites, la plaque a été considérée comme simplement appuyée sur ses quatre côtés. Les équations constitutives pour les plaques rectangulaires de FGM ont été obtenues en utilisant la théorie de Von-Karman en grands déplacements et la solution a été obtenue par la minimisation de l'énergie potentielle totale.

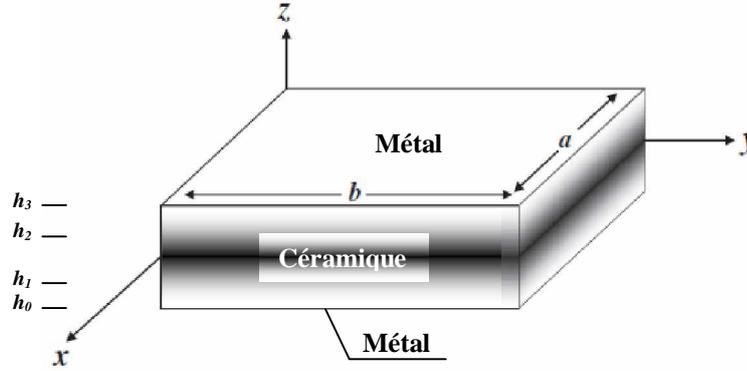
Récemment, El Meiche et al. [122] a développé une théorie nouvelle de plaque raffinée pour les plaques FGM avec seulement quatre fonctions inconnues. Cependant, diverses théories d'ordre supérieur de déformation de cisaillement sont développées en utilisant cinq fonctions inconnues. Les théories bien connues de la plaque d'ordre supérieur avec cinq fonctions inconnues sont les suivantes: (i) théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) [104], (ii) la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdal (SSDT) [110,111], et (iii) la théorie de la déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) [123]. En utilisant la même méthodologie présentée par El Meiche et al. [122], dans cet article une théorie simple et efficace raffinée avec seulement quatre fonctions inconnues est développé pour l'analyse non linéaire de flexion des plaques sandwich à gradient de propriétés. Les propriétés des matériaux des plaques FG, tels que le module de Young, sont supposées varier à travers l'épaisseur de la plaque avec une distribution de loi de puissance de la fraction de volume des constituants alors que le coefficient de Poisson est constant. Les équations constitutives pour les plaques rectangulaires sandwich en FGM ont été obtenues en utilisant la théorie de Von-Karman pour les grands déplacements et la solution a été obtenue par la minimisation de l'énergie potentielle totale. Pour illustrer la précision de la théorie actuelle, les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la théorie classique des plaques, de premier ordre et la théorie d'ordre élevé de troisième ordre avec cinq fonctions inconnues.

## **VI.2. Formulation théorique**

### **VI.2.1. Configuration géométrique**

Considérons une plaque sandwich plane composée de trois couches (métal-céramique, céramique, céramique-métal) conformément à la figure VI.1. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires  $(x, y, z)$  sont utilisés pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque sandwich à trois couches élastiques occupant la région  $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$  dans la configuration de référence sans contrainte. Le plan médian est défini par  $z = 0$  et ses plans de délimitation extérieures étant définie par  $z = \pm h/2$ . Les couches de surface de la plaque sandwich sont en un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles variant doucement dans la direction  $z$  (épaisseur) seulement. La couche centrale est faite d'un matériau isotrope homogène. Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre le noyau

et des couches faces, et la surface supérieure sont désignés respectivement par  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3 = h/2$ . L'épaisseur totale de la plaque FG est  $h$ , où  $h = t_c + t_{FGM}$  et  $t_c = h_2 - h_1$ .  $t_c$  et  $t_{FGM}$  sont l'épaisseur de couche de l'âme et l'ensemble des couches FGM, respectivement.



**Figure.VI.1.** Géométrie d'une plaque sandwich en F.G.M.

Les propriétés du matériau efficaces pour chaque couche, comme le module de Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique, peut être exprimée par :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{VI. 1})$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété du matériau effective du FGM de la couche  $n$ .  $P_m$  et  $P_c$  sont les propriétés des faces inférieure et supérieure de la couche 1 ( $h_0 \leq z \leq h_1$ ), respectivement, et vice versa pour la couche 3 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ) en fonction de la fraction volumique  $V^{(n)}$  ( $n=1,2,3$ ). Notez que  $P_m$  et  $P_c$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes du métal et de céramique de la plaque sandwich FGM. La fraction volumique  $V^{(n)}$  des FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance le long de la direction de l'épaisseur [22]:

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (\text{VI.2a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{VI.2b})$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{VI.2c})$$

Où  $k$  est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale est indépendante de la valeur de  $k$  qui est une couche entièrement en céramique. Cependant, lorsque  $k$  prend la valeur zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique. Les fractions volumiques en loi de puissance donnée par les équations. (2a) et (2c) reflète une simple règle de mélanges utilisés pour obtenir les propriétés effectives des faces de la plaque de métal-céramique et céramique-métal (voir figure.VI.1). Noter que la fraction volumique du métal est élevée à proximité du fond et des surfaces supérieure de la plaque, et que de la céramique est élevée à proximité des interfaces.

### **VI.2.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT)**

Les déplacements d'un point matériel situé au  $(x, y, z)$  dans la plaque peut être écrit comme

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z)\theta_x \quad (\text{VI.3a})$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z)\theta_y \quad (\text{VI.3b})$$

$$w = w_0(x, y) \quad (\text{VI.3c})$$

où,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont des déplacements dans  $x$ ,  $y$ ,  $z$  directions, Les déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont ceux d'un point du plan moyen  $(x, y, z = 0)$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations due à la flexion des plans  $yz$  et  $xz$ , respectivement.  $\Psi(z)$  représente la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques mince (classical thin plate theory CPT) est facilement obtenu en posant  $\Psi(z) = 0$ . Le déplacement de la théorie du premier ordre de cisaillement de déformation (first-order shear deformation theory FSDT) est obtenu en posant  $\Psi(z) = z$ . En outre, le déplacement de la théorie d'ordre élevé de troisième ordre (third-order shear deformation theory TSDT) de Reddy [4] est obtenu en posant

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{VI.4})$$

### **VI.2.3. La théorie d'ordre élevé à deux variables**

La présente théorie a les caractéristiques suivantes:

- Il s'agit d'une théorie à base de déplacement qui inclut les effets de cisaillement transversal.
- Le nombre de fonction inconnue impliqué dans présente théorie n'est que de quatre. Même dans la théorie de Reissner et Mindlin (FSDT), cinq fonctions inconnues sont impliquées.
- La théorie est cohérente variationnellement.
- La contrainte de cisaillement transversal de cisaillement zéro satisfait les conditions aux limites de contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre parfaitement.
- La théorie élimine la nécessité d'introduire le facteur de correction de cisaillement.

#### **VI .2.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables**

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes:

- (i) Les déplacements sont très petits en comparaison à l'épaisseur  $h$  de la plaque et, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- (ii) La composante du déplacement transversale ( $w$ ) peut être dissociée en deux termes (équation VI.5) : le premier ( $w_b$ ) représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que la dérivée de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le second terme ( $w_s$ ), représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{VI.5})$$

- (iii) La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable en comparaison au deux contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- (iv) Les déplacements  $u$  dans la direction ( $x$ ) et  $v$  dans la direction ( $y$ ) se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions ( $x$ ) et ( $y$ ) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{VI.6})$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane. Les deuxièmes composante  $u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{VI.7})$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, en collaboration avec  $w_s$ , une variation parabolique de déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque. Les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  sont donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{VI.8})$$

### VI. 2.3.2. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (VI.5) - (VI.8):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{VI.9.a})$$

Où la fonction  $f(z)$  appelée fonction de cisaillement et choisie de la forme.

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \sec^2 h^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \quad (\text{VI.9.b})$$

Les équations déformations – déplacement non-linéaires de Von Karman sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w_b}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{VI.10}$$

Sur la base du champ de déplacement donnée dans l'équation.(VI.9), l'équation.(VI.10) devient

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{VI.11}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
 \end{aligned} \tag{VI.12}$$

#### VI.2.4. Les contraintes

L'expression des contraintes pour un FGM élastique et isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \tag{VI.13}$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation IV.1, les coefficients de rigidité,  $Q_{ij}$ , sont exprimées par :

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (VI.14a)$$

$$Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (VI.14b)$$

$$Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (VI.14c)$$

### VI.2.5. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta w_{int} + \delta w_{ext} = 0 \quad (VI.15)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{\Omega} q(x) \delta w d\Omega = 0 \quad (VI.16)$$

Qui s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_y^{(n)} \delta \varepsilon_y + \sigma_z^{(n)} \delta \varepsilon_z + \tau_{xy}^{(n)} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz}^{(n)} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz + \int_{\Omega} q(x) \delta w d\Omega = 0$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque.

En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions, ensuite, en introduisant les efforts globaux et en faisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} + q(x) &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} + q(x) &= 0 \end{aligned} \quad (VI.17)$$

Avec

$$\bar{N} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_x \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_{xy} \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial x} + N_y \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial y} \right] \quad (\text{VI.18})$$

Ou  $q(x)$  est le chargement transversal sur la surface supérieure de la plaque.

Dans l'équation. (VI.17) les efforts résultants sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{VI.19a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (\text{VI.19b})$$

Ou  $h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les cotes suivant  $z$  de la  $n^{\text{ème}}$  couche de surface supérieure et inférieure

### VI.2.6. Détermination des coefficients de rigidité

En reportant les équations (VI.13) dans l'équation (III.19), on obtient les expressions suivantes des résultantes en membrane  $N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t$ , en flexion pure  $M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t$ , en flexion supplémentaire dû au cisaillement  $M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$ , et en cisaillement pur  $S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t$  :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (\text{VI.20})$$

Ou

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{VI.21a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (\text{VI.21b})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{VI.21c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.21d})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.21e})$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.21f})$$

Où:  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc., sont les coefficients de rigidité de la plaque sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{bmatrix} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{bmatrix} dz, \quad (\text{VI.22a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{VI.22b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{VI.22c})$$

### VI.2.7. Formulation des équations différentielles

L'équation. (VI.17) peut être exprimé en terme de déplacements ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) en substituant l'éq.(VI.20), les équations d'équilibre (VI.17) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (\text{VI.23a})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (\text{VI.23b})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} + q(x) = 0
 \end{aligned} \quad (VI.23c)$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} + q(x) = 0
 \end{aligned} \quad (VI.23d)$$

### VI.3. Energie potentielle totale minimale :

L'énergie potentielle totale ( $\Pi$ ) de la plaque carrée sandwich en FGM est déterminée par sommation de l'énergie de déformation et de la variation de l'énergie potentielle de la charge externe uniformément appliquée et s'écrit comme

$$\Pi = U + V \quad (VI.24)$$

Ici,  $V$  est l'énergie potentielle de la plaque sous chargement uniforme, et est égal à

$$V = \int_0^a \int_0^a q(w_b + w_s) dx dy \quad (VI.25)$$

Où  $q$  est la charge uniformément répartie et  $a$  est la longueur limite de la plaque sandwichées en FGM dans le plan  $xy$ , l'énergie de déformation ( $U$ ) est défini comme

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \left[ \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz \right] dx dy \quad (VI.26)$$

Maintenant, considérons les conditions aux limites d'une plaque sandwich en FGM simplement appuyée, le principe de l'énergie potentielle minimale est appliquée en supposant une solution comme première estimation pour les déplacements considérés (c.-à-d- $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$ ) sur la surface médiane de la plaque tel que l'équation. (25).

$$v_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \quad (VI.27a)$$

$$v_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (VI.27b)$$

$$M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \quad (VI.27c)$$

$$u_0(x,0) = w_b(x,0) = w_s(x,0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x,0) = 0 \quad (\text{VI.27d})$$

$$u_0(x,a) = w_b(x,a) = w_s(x,a) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x,a) = 0 \quad (\text{VI.27e})$$

$$M_y^b(x,0) = M_y^s(x,0) = M_y^b(x,a) = M_y^s(x,a) = 0 \quad (\text{VI.27f})$$

Le champs de déplacement  $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$  qui satisfont aux conditions aux limites, sont définis par l'équation. (VI.28) [23]

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ C \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \\ W_0^b \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ W_0^s \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.28})$$

Ou  $C$ ,  $W_0^b$ , et  $W_0^s$  sont des paramètres arbitraires et sont déterminés en minimisant l'énergie potentielle totale comme indiqué dans l'équation. (VI.29).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial (C, W_0^b, W_0^s)} = 0 \quad (\text{VI.29})$$

L'équation. (VI.29) fournit un ensemble de trois équations d'équilibre non linéaires en termes de  $C$ ,  $W_0^b$  et  $W_0^s$  qui doivent être résolus. Les constantes obtenues sont ensuite utilisées pour calculer les déplacements (Eq. (VI.28)) et par la suite les déformations et les contraintes sont trouvés en utilisant l'équation. (VI.11) et (VI.13).

#### **VI.4. Résultats numériques et discussions**

Pour illustrer l'approche proposée, une plaque sandwich céramique-métal en matériau à gradient de propriétés est considérée. La combinaison des matériaux est constituée d'alumine et de l'aluminium. Le module de Young et le coefficient de Poisson ont été sélectionnés pour être égal à 70 GPa et 0,3 pour l'aluminium; et 380 GPa et 0,3 pour l'alumine, respectivement. Plusieurs modèles de plaques sandwiches sont présentées selon l'épaisseur de la couche de cœur ( $t_c / h$ ).

## *Chapitre VI: Analyse Non Linéaire de la Flexion des Plaques « Sandwiches » en FGM en Utilisant la Théorie d'Ordre Elevé à Deux Variables*

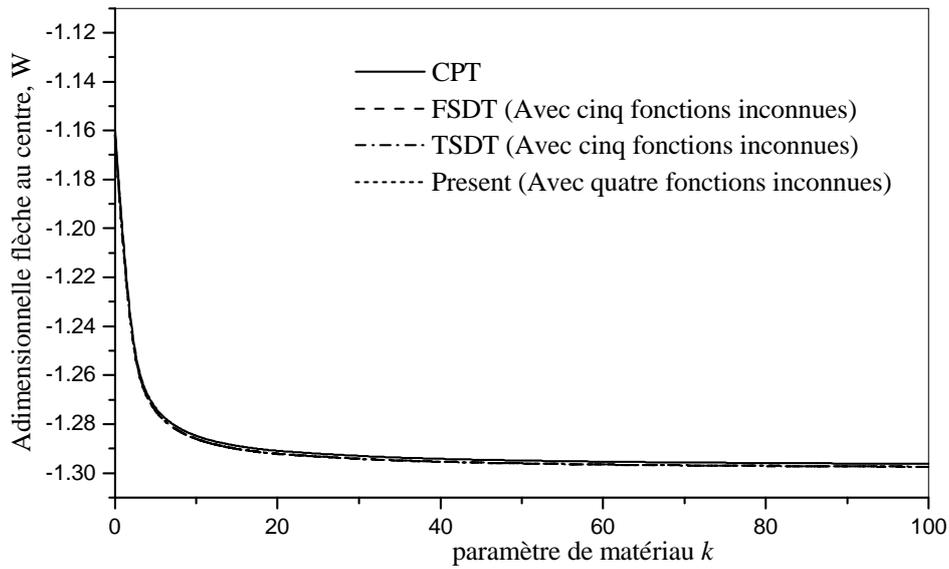
---

Les résultats obtenus à partir de l'analyse sont donnés sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes comme suit:

- Flèche adimensionnelle  $W = w / h$
- Paramètre de charge  $Q = qa^4 / (E_m h^4)$
- Contrainte axiale  $\sigma = \sigma_x a^2 / (E_m h^2)$
- Epaisseur adimensionnelle  $Z = z / h$

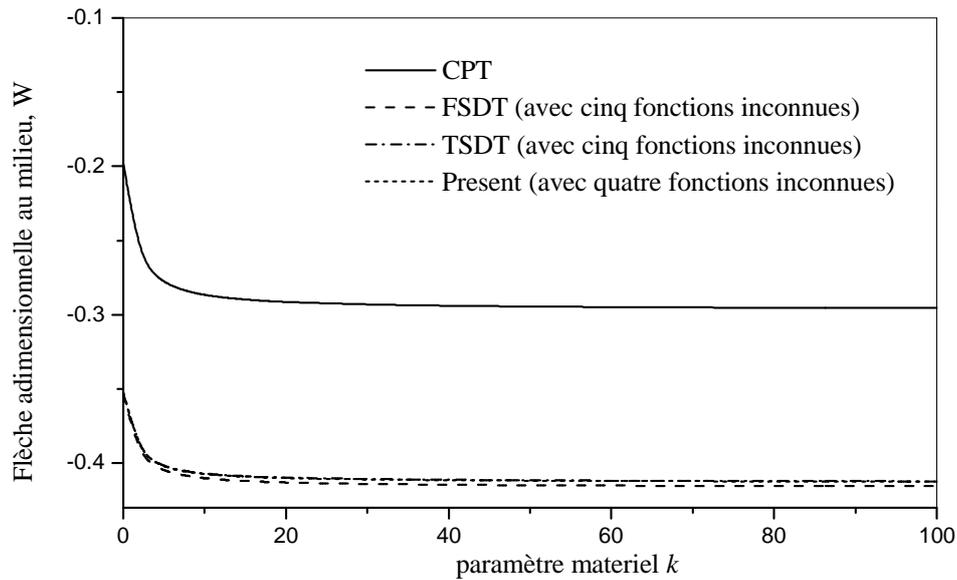
Où  $q$  est une charge de pression uniformément répartie. L'analyse est effectuée sur la plaque carrée de côté  $a = 200\text{mm}$  et d'épaisseur  $h = 10\text{mm}$  avec les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés.

La figure VI.2 représente la flèche au centre de la plaque sandwich avec rapport longueur sur épaisseur de  $a/h = 20$  et d'épaisseur de la couche centrale  $t_c = 0.8h$ . Comme on le voit, les résultats obtenus par la théorie actuelle et à la fois par FSDT et TSDT coïncident avec les résultats de CPT. Ceci est bien expliqué par la valeur de l'élancement élevé  $a/h = 20$ . Pour une telle plaque la contrainte de cisaillement dans le plan à cause de l'épaisseur mince est négligeable et, par conséquent toutes les théories appliquées aboutissent à des résultats similaires. Basé sur cette figure, on peut observer que les théories mentionnées ne sont pas affectées par les valeurs du paramètre de matériau " $k$ " pour les plaques minces en FGM.



**Figure VI.2:** Flèche au centre en fonction du paramètre de matériau  $k$  sous charge  $Q = -400$  avec rapport  $a/h = 20$  et  $t_c/h = 0.8$ .

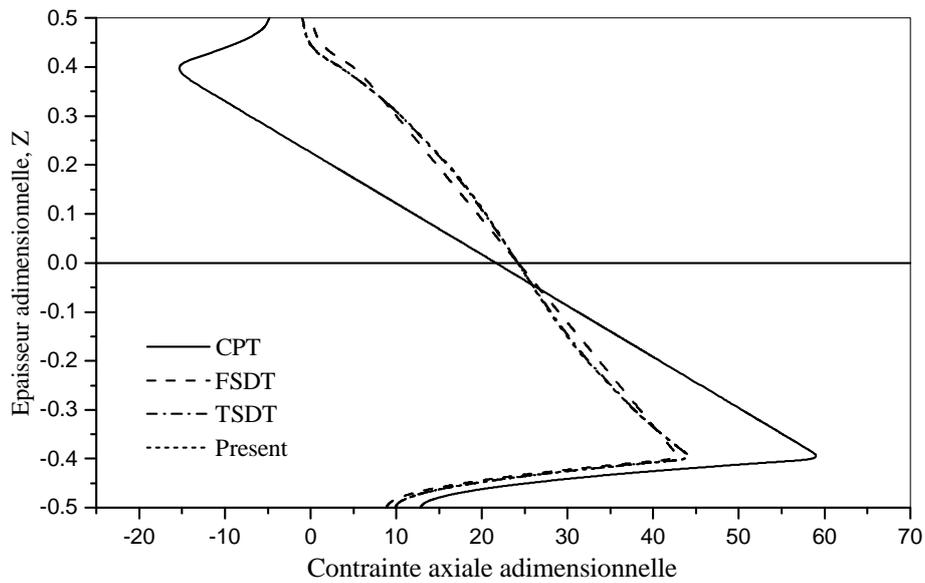
La figure VI.3 montre les résultats obtenus par les théories appliquées avec un rapport longueur sur épaisseur  $a/h = 2$ . Comme on le voit, pour des valeurs petites du paramètre de matériau “ $k$ ”, la plaque sera riche en céramique (alumine), qui a un grand module de Young, et, par conséquent sa flèche sera faible. En outre, en se basant sur la figure, le CPT montre des flèches plus petites que les trois autres théories et les prédictions de la théorie actuelle, FSDT et TSDT sont proches, même si celui-ci donne de plus grande flèche de la plaque.



**Figure VI.3:** Flèche adimensionnelle au milieu en fonction du paramètre matériel  $k$  sous chargement  $Q = -25$  avec élancement  $a/h = 2$  et  $t_c/h = 0.8$ .

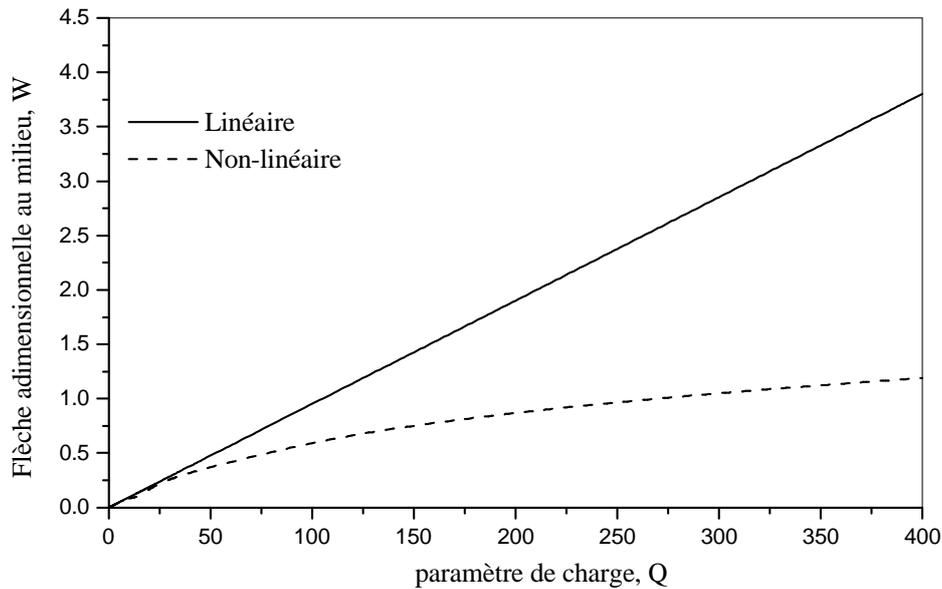
Comme on le voit à partir des figures VI.2 et VI.3, la flèche du centre de la plaque sandwich diminue avec la diminution du paramètre matériel  $k$ . Ainsi, la diminution de la flèche d'une plaque sandwich en FGM pourrait être attribuée à la propriété de la céramique. Un paramètre matériel  $k$  petit indique que la céramique est le constituant principal dans les plaques sandwich en FGM.

La figure VI.4 représente la contrainte axiale de la plaque carrée sandwich en FGM à travers l'épaisseur avec le rapport longueur-épaisseur  $a/h = 2$  et le paramètre matériel  $k = 2$ . On observe que les résultats obtenus à l'aide de la présente théorie des plaques sont en bon accord avec ceux obtenus par TSDT. Les contraintes axiales sont dans un état de traction lorsque sont calculées en utilisant la théorie actuelle et l'utilisation de FSDT et TSDT.



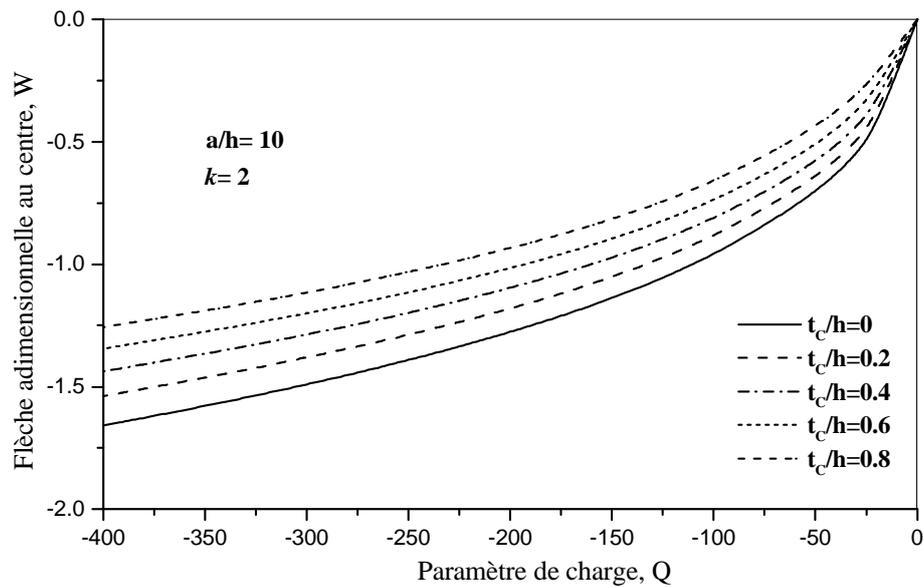
**Figure VI.4:** Contrainte axiale adimensionnelle au milieu de la plaque sandwich sous la charge  $Q = -25$ , avec  $a/h = 2$ , le paramètre matériel  $k = 2$  et  $t_c/h = 0.8$ .

La figure VI.5 présente la variation de la flèche au centre de la plaque sandwich carré en FGM avec l'épaisseur de l'âme  $t_c = 0.8h$ , le paramètre matériel  $k = 0.2$  et  $a/h = 10$  en fonction du paramètre de charge  $Q$ . Il est remarqué que pour les flèches maximales supérieures à  $0.5h$ , la solution non linéaire est nécessaire. L'augmentation de la grandeur de charge engendre la flèche non linéaire plus petite que celle de l'analyse linéaire.



**Figure VI.5:** Variation de la flèche adimensionnelle  $W$  au milieu de la plaque sandwich avec  $a/h = 10$ , le paramètre matériel  $k = 0.2$  et  $t_c/h = 0.8$  en fonction de  $Q$ .

La figure VI.6 montre la variation de la flèche au centre de la plaque sandwich carré en FGM en fonction du paramètre de charge  $Q$  pour différentes épaisseurs du noyau ( $t_c$ ). Le rapport longueur sur l'épaisseur  $a/h$  est supposé être 10. On observe que la flèche au centre augmente avec le paramètre de charge  $Q$  et diminue à mesure que l'épaisseur de la couche FGM ( $t_c/h$ ) augmente. Les résultats indiquent que la flèche au centre de plaques en matériau à gradient de propriétés est agrandie le constituant métallique.



**Figure VI.6:** Flèche adimensionnelle au milieu de la plaque sandwich en fonction du chargement de pression uniforme pour différentes épaisseur de du cœur de la plaque

### VI.5. Conclusion

Une théorie des plaques efficace et simple mais raffiné, a été développé avec succès pour l'analyse non linéaire de plaques sandwich en FGM. Les plaques sandwich sont soumis à une charge de pression et leur non linéarité géométrique est introduite dans les équations déformation-déplacement sur la base des hypothèses de Von Karman. Le concept d'énergie avec la théorie actuelle et les théories de premier et de troisième ordre de déformation de cisaillement (FSDT et TSDT) sont utilisés pour prédire la grande déflexion et la contrainte à travers l'épaisseur des plaques sandwich en FGM. Il peut être conclu que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace dans la prédiction de la réponse non linéaire de flexion de la plaque sandwich en FGM par rapport à d'autres théories de cisaillement déformation de la plaque comme FSDT et TSDT.

# **Conclusion générale**

## Conclusion Générale

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse apporte plusieurs solutions aux problèmes relatifs à l'étude du comportement non linéaire des plaques minces en matériaux à gradient de propriétés en flexion.

Dans cette thèse trois sujets différents, et en même temps strictement liées ont été traités. On s'est intéressé en premier lieu à l'étude non linéaire des plaques FGM en flexion cylindrique soumises à un chargement transverse en utilisant une solution analytique simple et de comparer le comportement des plaques traditionnelles faites de matériaux purs à celui des plaques en FGM.

Dans cette étude, nous avons utilisés des propriétés matérielles de la plaque FGM qui changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions sigmoïdes (S-FG) et exponentielle (E-FG).

Les déformations de type Von Kerman sont utilisées, lorsque le déplacement transverse  $w$  est grand devant  $u$  et  $v$ . Ces dernières sont employées pour constituer les équations régissant le problème.

Les équations globales des plaques sont obtenues à partir du principe du travail virtuel en utilisant la théorie classique des plaques (C.P.T) qui suppose que les hypothèses de Kirchhoff sont réunies. On constate que les équations des plaques selon la théorie des grandes flèches peuvent être exprimées en équations linéaires pour la flèche. Cette linéarité des équations simplifie considérablement l'analyse de la flèche. De cette étude on conclut qu'en raison du couplage membrane-flexion, la théorie des grandes flèches des plaques doit être utilisée même pour les flèches qui sont considérés petites.

Pour le cas d'un chargement transverse, les contraintes et les déformations sont calculés pour les plaques avec deux différents mélanges métal-céramique. Les résultats numériques montrent la figure relative à la flèche des plaques en FGM est située entre ceux des plaques isotropes fabriquées en céramique et en métal et que la distribution des contraintes axiale est non linéaire pour les analyses linéaires et non linéaires. En conséquence, Le calcul non linéaire des réponses de la plaque est important, d'autre part, les résultats indiquent que l'effet de la non linéarité est de réduire l'intensité de la déformée transversale. En outre, les contraintes sur la partie supérieure et inférieure de la plaque FGM ne sont pas symétriques par rapport à la contrainte du plan moyen. En comparaison de l'analyse non linéaire, la solution linéaire surestime la flèche et la contrainte axiale dans le cas où le chargement transversal est positif, mais pour le cas où le chargement transversal est négatif, quand l'importance du chargement est petite, la solution linéaire sous-estime les résultats pour quelques valeurs du paramètre matériel. Pour les plaques homogènes la théorie linéaire, qui néglige l'action de membrane, est satisfaisante jusqu'à une valeur particulière de la flèche tandis que pour les plaques en FGM avec un chargement transverse positif, cette valeur change avec le mélange céramique-métal et est plus petite que celle des plaques homogènes.

En outre, nous avons tracé des abaques de travail, permettant de déterminer les contraintes axiales et la flèche de n'importe quel matériau FGM connaissant seulement la valeur de la contrainte axiale du matériau pur « Aluminium ».

Par ailleurs, on remarque d'après l'élaboration des graphes des contraintes axiales et flèches pour des plaques en FGM dont les propriétés matérielles changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon les différentes fractions de volume des matériaux constitutifs, étudiés dans cette partie présentent les mêmes allures toutefois les grandeurs changent du S-FGM au E-FGM.

En second lieu on traite la flexion cylindrique non linéaire des plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone à gradient de propriétés (CNTRCs) soumises à des charges transversales est étudiée en utilisant une solution analytique simple [124]. Les propriétés des matériaux de FG-CNTRC sont supposées être variables à travers l'épaisseur et sont estimées par règle de mélange. Les équations de Navier selon la théorie de grandes déformations peuvent être exprimées comme des équations linéaires pour la déformée, en laissant les conditions aux limites non linéaires. Cette linéarité des équations différentielles

## *Conclusion Générale*

---

simplifie grandement l'analyse de la déformation importante. De cette étude, il est conclu qu'en raison du couplage membrane-flexion, la théorie de grande déformation des plaques doit être utilisée même pour les déformées qui sont normalement considérées comme petites. En comparaison avec l'analyse non linéaire, les solutions linéaires présentent des surestimations. Les résultats montrent également que la plaque a de grandes déformées quand la fraction de volume est faible et les déformées de plaque FG-CNTRC sont plus grandes que celles de la plaque UD-CNTRC.

Et pour terminer une théorie des plaques efficace et simple mais raffinée, la théorie d'ordre élevé à deux variables, a été développé avec succès pour l'analyse non linéaire de plaques sandwich en FGM. Les plaques sandwich sont soumises à une charge transversal et leur non linéarité géométrique est introduite dans les équations de déformation-déplacement sur la base des hypothèses de Von Karman. Le concept d'énergie avec la théorie actuelle et les théories de premier et de troisième ordre de déformation de cisaillement (FSDT et TSDT) sont utilisés pour prédire la grande déflexion et la contrainte à travers l'épaisseur des plaques sandwich en FGM. Il peut être conclu que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace dans la prédiction de la réponse non linéaire de flexion de la plaque sandwich en FGM par rapport à d'autres théories de cisaillement déformation de la plaque comme FSDT et TSDT.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés.

# **Références bibliographiques**

## Références BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Lions J.-L., Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris : Dunod : Gauthier-Villars , (1968).

[2] C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.

[3] Overall view of the P/M fabrication of functionally gradient materials.  
Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan, pp.59–64.

[4] The concept of FGM.  
*Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34, 3–10.

[5] Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan,  
*Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.

[6] Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine,  
*International Journal of Thermal Science*, 40, 255-261.

[7] The activities of FGM on new applications.  
*Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.

[8] Rajesh K., Bhangale, N., Ganesan, Chandramouli Padmanabhan, Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006) 341–371

[9] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.

- [10] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan
- [11] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [12] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [13] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [14] B. KIEBACK, A. NEUBRAND, H. Riedel «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
- [15] WILLIAMS, J.C., Doctor-Blade Process, in *Treatise on Materials Science and Technology*, New York: Academic Press, 1976, p. 173-98.
- [16] BOCH, P., CHARTIER, T. & HUTTEPAIN, M., Tape Casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192.
- [17] BOCH, P. Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*. Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, 1987, p. 103-112.
- [18] MISTLER, R.E., High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 1973, Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.
- [19] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.

[20] ABDIZADEH, H., Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine», Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.

[21] BISHOP, A, LIN, C. Y., NAVARATNAM, M., RAWLINGS, R.D., & McSHANE, H.B., A Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process, Journal of Materials Science Letters, 1993, Vol. 12, p.1516-18.

[22] STEFFENS, H. D., DVORAK, M. & WEWEL, M., Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, 1990, p. 139-43.

[23] KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, 1990, p. 77-82.

[24] TAKAHASHI, M., ITOH, Y. & KASHIWAYA, H., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, 1990, p.129-34.

[25] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, 1991, p. 203

[26] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, 1995.

[27] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.

- [28] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [29] Izard Nicolas, Nanotubes de carbone : systèmes pour la limitation optique, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II (2004)
- [30] Park B., Shim J.W., Choi H.J., Park Y.W. Synthetic Metals, 56 :3258 (1993)
- [31] Yin M.T. et Cohen M.L. Physical Review Letter, 50 :2006 (1983)
- [32] Daedulus. New Scientist (1966)
- [33] Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F. et Smalley R.E. Nature, 318 :162 (1985)
- [34] Krätschmer W., Lamb L.D., Fostiropoulos K. et Human D.R. Nature, 347 :354 (1990)
- [35] Scott L.T., Boorum M.M., McMahon B.J., Hagen S., Mack J., Blank J., Wegner H. et de Meijere A. Science, 295 :1500 (2002)
- [36] Iijima S. Nature, 354 :56 (1991)
- [37] Zhou O., Fleming R.M., Murphy D.W., Chen C.H., Haddon R.C., Ramirez A.P. et Glarum S.H. Science, 263 :1744 (1994)
- [38] Amelinckx S., Bernaerts D., Zhang X.B., Van Tendeloo G. et Van Landuyt J. Science, 267 :1334 (1995)
- [39] Ruland W., Schaper A.K., Hou H. et Greiner A. Carbon, 41 :423 (2003)
- [40] Bethune D.S., Kiang C.H., de Vries M.S., Gorman G., Vasquez J. et Beyers R. Nature, 363 :605 (1993)
- [41] Iijima S. et Ichihashi T. Nature, 363 :603 (1993)
- [42] Hamada N., Sawada S. et Oshiyama A. Physical Review Letter, 68 :1579 (1992)
- [43] Dunlap B.I. Physical Review B, 46 :1933 (1992)
- [44] Saito R., Dresselhaus G. et Dresselhaus M.S., Physical Properties of Carbon Nanotubes. Imperial College Press (1998). ISBN n°1-86094-093-5
- [45] Ajayan P.M., Ebbesen T.W., Rep. Prog. Phys. 60, 1025-1062 (1997)

[46] Li W.Z., Xie S.S., Qian L.X., Chang B.H., Zou B.S., Zhou W.Y., Zhao R.A., et Wang G., *Science* 274, 1701 (1996)

[47] Dai H., Rinzler A.G., Nikolaev P., Thess A., Colbert D.T., Smalley R., *Chem. Phys. Lett.* 260, 471-475 (1996)

[48] Lauret Jean-Sébastien, Etude des propriétés optiques des nanotubes de carbone, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2003)

[49] Journet C., Maser W.K., Bernier P., Loiseau A., Lamy de la Chapelle M., Lefrant S., Deniard P., Lee R. et Fischer J.E. *Nature*, 388 :756 (1997)

[50] Journet Catherine. La production de nanotubes de carbone. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II (1998)

[51] <http://www.nanoledge.com>

[52] <http://www.opus1.com/~mercorp>

[53] Thess A., Lee R., Nikolaev P., Dai H., Petit P., Robert J., Xu C., Hee Lee Y., Gon Kim S., Rinzler A.G., Colbert D.T., Scuseria G.E., Tomanek D., Fischer J.E. et Smalley R.E. *Science*, 273 :483 (1996)

[54] Maser W.K., Mu Noz E., Benito A.M., Martínez M.T., de la Fuente G.F., Maniette Y., Anglaret E. et Sauvajol J.L., *Chemical Physics Letters*, 292 :587-593 (1998)

[55] Endo M. et al. *Carbon*, 33 :873, 1995

[56] Nikolaev P., Bronikowski M.J., Kelley Bradley R., Rohmund F., Colbert D.T., Smith K.A. et Smalley R.E. *CPL*, 313 :91-97 (1999)

[57] <http://www.cnanotech.com>

[58] Lu J.P., Elastic Properties of Carbon Nanotubes and Nanoropes, *Physical Review Letters* 79, 1297 (1997)

- [59] Scheibel T., Spider silks : recombinant synthesis, assembly, spinning, and engineering of synthetic proteins, *Microbial Cell Factories*, 3 :14 (2004)
- [60] Yakobson B.I., Brabec C.J., Bernholc J., Nanomechanics of Carbon Tubes : Instabilities Beyond the Linear Response, *Physical Review Letters* 76, 2511 (1996)
- [61] Krishnan A., Dujardin E., Ebbesen T.W., Yianilos P.N., Treacy M.M.J., *Physical Review B* 58 (20), 14013 (1998)
- [62] Yu M.F., Files B.S., Arepalli S., Ruo\_ R.S., *Physical Review Letters* 84 (24), 5552 (2000)
- [63] Avouris P., Hertel T., Martel R., Schmidt T., Shea H.R., and Walkup R.E., *Appl. Surf. Sci.*, 141, 201 (1999)
- [64] Decossas Sébastien, Nanotribologie par Microscopie de Force Atomique (AFM) sur des nanotubes de carbone, Thèse de Doctorat (2001), Université Grenoble I - Joseph Fourier
- [65] Saito R., Fujita M., Dresselhaus G., and Dresselhaus M.S., *Appl. Phys. Lett.*, 60 (18), 2204 (1992)
- [66] Fischer J.E., Dai H., Thess A., Lee R., Hanjani N.M., Dehaas D.L., Smalley R.E., *Phys. Rev. B* 55, R4921-R4924 (1997)
- [67] Site web de l'équipe de P. Avouris au Nanoscale science department d'IBM  
<http://www.research.ibm.com/nanoscience/>
- [68] J. Gou, B. Minaie, B. Wang, Z. Liang, C. Zhang, *Computational Materials Science* 31 (2004) 225–236.
- [69] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

- [70] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [71] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380 1957.
- [72] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502, 1975.
- [73] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [74] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344, 2002.
- [75] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.
- [76] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [77] Zienkiewicz., O.C., (1979), La méthode des éléments finis. McGraw-Hill Book Inc. Paris.
- [78] Amabili, M., (2008), Nonlinear vibrations and stability of shells and plates Cambridge university press. New york,
- [79] Delale, F., Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics 1983; 50: 609 –614.
- [80] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, 1995.

- [81] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [82] Chung Y.L., Chi S.H. The residual stress of functionally graded materials. *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering* 13, 2001, 1–9.
- [83]Sallai B-O., Tounsi A, Mechab I, Bachir Bouiadjra M, Meradjah M, Adda Bedia E.A. “A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams” *Computational Materials Science* 44, 2009, 1344 – 1350.
- [84] Wuite J, Adali S. Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis. *Compos Struct* 2005;71:388–96.
- [85] Suresh S, Mortensen A. Functionally graded metals and metal–ceramic composites: Part2 Thermomechanical behaviour. *Int Mater Rev* 1997;42: 85–116.
- [86] Praveen GN, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998;35: 4457–76.
- [87] Shen H-S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *Int J Mech Sci* 2002;44:561–84.
- [88] Shen H-S. Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction. *Compos Part B* 2007;38:201–15.
- [89] Yang J, Shen H-S. Nonlinear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-Linear Mech* 2003;38:467–82.
- [90] Yang J, Shen H-S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Compos Part B* 2003;34:103–15.

[91] Na K-S, Kim J-H. Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads. *J Therm Stress* 2006;29:245–61.

[92] Seidel GD, Lagoudas DC. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mech Mater* 2006;38:884–907.

[93] Li X, Gao H, Scrivens WA, Fei D, Xu X, Sutton MA, et al. Reinforcing mechanisms of single-walled carbon nanotube-reinforced polymer composites. *J Nanosci Nanotechnol* 2007;7:2309–17.

[94] Esawi AMK, Farag MM. Carbon nanotube reinforced composites: potential and current challenges. *Mater Des* 2007;28:2394–401.

[95] Fidelus JD, Wiesel E, Gojny FH, Schulte K, Wagner HD. Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites. *Compos Part A* 2005;36:1555–61.

[96] Librescu L, Oh S-Y, Song O. Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability. *J Therm Stress* 2005;28:649–712.

[97] Fukuda ,H., Kawata ,K. , (1974), “On Young’s modulus of short fibre composites”,*Fibre Sci. Technol.*,**7**,207–222.

[98] Elliott, J.A., Sandler, J.K.W., Windle, A.H., Young, R.J., Shaffer, M.S.P., (2004), “Collapse of single wall carbon nanotubes is diameter dependent”, *Phys. Rev. Lett.*, **92**,095501.

[99] Jin,Y., Yuan,F.G. ,(2003), “Simulation of elastic properties of single-walled carbon nanotubes”, *Compos. Sci. Technol.*,**63**, 1507–1515.

[100] Chang, T., Geng, J., Guo, X., (2005), “Chirality- and size-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes”, *Appl. Phys. Lett.*, **87**,251929.

- [101] Koizumi, M. The concept of FGM Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, **34**, 3–10 (1993)
- [102] Koizumi, M. FGM activities in Japan. Compos Part B: Eng **28**(1–2), 1–4 (1997)
- [103] Suresh, S., Mortensen A. Fundamentals of functionally graded materials, IOM Communications, London (1998)
- [104] Reddy, J.N. Analysis of functionally graded plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering **47**, 663–684 (2000)
- [105] Cheng, Z.Q., Batra, R.C. Deflection relationships between the homogeneous kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. Archives of Mechanics **52**(1), 143–158 (2000)
- [106] Cheng, Z.Q., Batra, R.C. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. Journal of Sound and Vibration **229**, 879–895 (2000)
- [107] Cheng, Z.Q., Batra, R.C. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate. Compos Part B: Eng **31**(2), 97–106 (2000)
- [108] Vel, S.S., Batra, R.C. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. AIAA Journal **40**(7), 1421–1433 (2002)
- [109] Zenkour, A.M. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. Archive of Applied Mechanics **77**(4), 197–214 (2007)

- [110] Zenkour, A.M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1-deflection and stresses. *Int J Solids Struct* **42**(18–19), 5224–5242 (2005)
- [111] Zenkour, A.M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* **42**(18–19), 5243–5258 (2005)
- [112] Mizuguchi, F., Ohnabe, H. Large deflections of heated functionally graded simply supported rectangular plates with varying rigidity in thickness direction. In: Proceedings of the 11th technical conference of the American Society for composites, Technomic Publ Co. Inc., October 7–9, 957–66 (1996)
- [113] Feldman, E., Aboudi, J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos Struct* **38**, 29–36 (1997)
- [114] Praveen, G.N., Reddy, JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* **35**(33), 4457–76 (1998)
- [115] Woo, J., Meguid, SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct* **38**, 7409–21 (2001)
- [116] Yang, J., Shen, H.S. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-linear Mech* **38**, 467–82 (2003)
- [117] Shen, H.S. Post buckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings. *Int J Solids Struct* **42**(23), 6101–21 (2005)

[118] Shen, HS. Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. *Compos Sci Technol* **65**, 1675–90 (2005)

[119] Ma, L.S., Wang, T.J. Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory. *Int J Solids Struct* **41**, 85–101 (2004)

[120] Agarwal, S., Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. Large deformation analysis for anisotropic and inhomogeneous beams using exact linear static solutions. *Compos Struct* **72**(1), 91–104 (2006)

[121] GhannadPour, SAM, Alinia, M.M. Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads. *Compos Struct* **75**, 67–71 (2006)

[122] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences* **53**, 237–247 (2011)

[123] Reddy, JN. *Mechanics of laminated composite plates*, Boca Raton: CRC Press (1997)

[123] Abdelhakim Kaci, Abdelouahed Tounsi, Karima Bakhti and El Abbas Adda Bedia, Nonlinear cylindrical bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Steel and Composite Structures*, Vol. 12, No. 6 (2012) 491-504