

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



## THÈSE

**Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat**

**Spécialité Génie Civil**

**Option Structures & Matériaux**

**Par : HAMIDI AHMED**

**Intitulée**

# **COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES PLAQUES SANDWICHES NON SYMETRIQUES EN FGM : CAS DE LA FLEXION**

Soutenue publiquement le 07/04/2015 devant le jury composé de :

|                     |      |                    |            |
|---------------------|------|--------------------|------------|
| Mr. E.A. ADDA BEDIA | Pr   | UDL-SBA            | Président  |
| Mr. A. TOUNSI       | Pr   | UDL-SBA            | Rapporteur |
| Mr. A. BENACHOUR    | MC A | UDL-SBA            | Examineur  |
| Mr. T.H. DAOUADJI   | MC A | U.I.K-TIARET       | Examineur  |
| Mr. K. AMARA        | MC A | C.U.AIN TEMOUCHENT | Examineur  |
| Mr. M. AMEUR        | MC A | ENSET ORAN         | Examineur  |

**Année universitaire 2014/2015**

# REMERCIEMENTS

---

## Remerciements

---

### Remerciements

Je voudrais profiter de l'occasion qui m'est présentée pour remercier toutes les personnes sans qui le présent travail n'aurait jamais pu voir le jour.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabess de Sidi Belabess, sous la supervision du Professeur **ABDELOUAHED TOUNSI**, enseignant à l'Université Djilali Liabes de sidi belabess .

En premier lieu, je remercie chaleureusement mon encadreur qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur le Professeur **ADDA BEDIA EL ABASS**, enseignant à l'Université Djilali Liabes de sidi belabess et directeur du laboratoire, Je le remercie sincèrement d'autant plus qu'il a apporté un intérêt constant à cette thèse. Il en a aussi favorisé le déroulement en associant sympathie et professionnalisme chaque fois que j'ai eu besoin de son aide.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **A. BENACHOUR, T.H. DAOUADJI, K. AMARA** et **M. AMEUR** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues et personnes du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djillali Liabes, qui m'ont aidé tout le long de cette étude, pour les contacts humains particulièrement stimulants que nous avons pu partager. Parmi ces personnes, je tiens à associer pleinement Monsieur **HOUARI MOHAMMED SID AHMED** enseignant à la faculté des Sciences et technologie de l'Université de Mascara.

Mes remerciements vont également aux membres de ma famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse.

# DEDICACES

---

*Je dédie cette thèse :* À la mémoire de ma Mère  
À la mémoire de mon Père  
À la mémoire de ma sœur Fouzia  
À ma famille  
À mon épouse  
À ma fille Bouchra  
À mon fils Abdelouahed

ملخص

---

ملخص

قمنا بدراسة السلوك الحراري الميكانيكي للصفائح المركبة ذات الخصائص المتدرجة باستعمال نظرية جديدة للصفائح بأربع مجاهيل. بخلاف النظريات الأخرى، فإن عدد الدوال المجهولة في هذه النظرية المقترحة فقط أربعة، بينما تقترح النظريات الأخرى الخاصة بتشوهات القص خمسة مجاهيل.

هذه النظرية متناسقة المتغيرات، لا تتطلب معامل تصحيح القص، و تعطي وصفا مكافئا لإجهادات القص العرضي عبر سمك الصفيحة. بالإضافة إلى ذلك، هذه النظرية تحقق انعدام إجهادات القص على الحافة العلوية و السفلية للصفيحة. تتشكل أسطح الصفيحة المركبة من مزيج من مادتين مختلفتين موزعتين عبر السمك بحيث نعتبر أن الخصائص المادية مثل معامل المرونة و معامل التمدد الحراري متغيرة حسب قانون توزيع متعدد الحدود بدلالة دالة الحجم للمكونات. نفرض أن الطبقة المركزية متجانسة و مكونة كاملة من السيراميك. صحة هذه النظرية محققة من خلال مقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج التي تقدمها نظرية الدرجة الأولى و باقي نظريات الترتيب العالي. قمنا بدراسة تأثيرات تشوهات القص العرضي، الشحنة الحرارية، نسبة أبعاد الصفيحة (a/b) ، نسبة الطول على السمك (a/h) و دليل دالة الحجم (k).

قمنا أيضا بالتحقق من النتائج الرقمية للإزاحة و الإجهادات في الصفائح المركبة ذات الخصائص المتدرجة. نستطيع أن نستخلص بأن النظرية المقترحة دقيقة، و بسيطة من أجل دراسة سلوك الصفائح ذات الخصائص المتدرجة التي تخضع للتحميل الحراري الميكانيكي.

**كلمات مفتاحية:** صفائح، حراري ميكانيكي، تمثيل تحليلي، المواد ذات الخصائص المتدرجة.

# RESUME

---



### Résumé

Le comportement thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées est étudié en utilisant une nouvelle théorie des plaques à quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnus impliqués dans cette théorie est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement nécessitent cinq inconnus.

La présente théorie est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, cette théorie assure la nullité de la contrainte de cisaillement dans les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les peaux de la plaque sandwich sont constituées d'un mélange de deux matériaux différents distribués à travers l'épaisseur où les propriétés matérielles telles que le module de « young » et le coefficient de dilatation thermique sont supposées variables selon une loi de distribution polynomiale en fonction des fractions volumiques des constituants. La couche centrale (l'âme) est supposée homogène et constituée entièrement de la céramique. La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats déterminés par cette théorie à ceux obtenus par la théorie de premier ordre et les autres théories d'ordre élevé. Les effets de la déformation de cisaillement transversale, la charge thermique, le rapport des dimensions de la plaque ( $a/b$ ), le rapport longueur-épaisseur ( $a/h$ ), et l'exposant de la fraction volumique ( $k$ ) sont étudiés.

Les résultats numériques des déplacements et des contraintes des plaques sandwiches fonctionnellement graduées sont examinés. On peut conclure que la présente théorie est précise, et simple pour étudier le comportement flexionnel des plaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermomécanique.

**Mots clé :** Plaques, thermomécanique, modélisation analytique, matériaux à gradient de propriétés.

# ABSTRACT

---

### Abstract

The thermomechanical bending response of functionally graded sandwich plates has been investigated by the use of the new four variable refined plate theory. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The theory presented is variationally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. The sandwich plate faces are assumed to have isotropic, two-constituent material distribution through the thickness, and the modulus of elasticity, Poisson's ratio of the faces, and thermal expansion coefficients are assumed to vary according to a power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic ceramic material. The validity of the present theory is investigated by comparing some of the present results with those of the classical, the first-order and the other higher-order theories. The influences played by the transverse shear deformation, thermal load, plate aspect ratio, side-to- thickness ratio, and volume fraction distribution are studied. Numerical results for deflections and stresses of functionally graded sandwich plates are investigated. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the thermomechanical bending behavior of functionally graded plates.

**Keywords:** Plate, Thermomechanical, Analytical modelling, Functionally graded material.

# SOMMAIRE

---

# Sommaire

|   |     |
|---|-----|
| ملخص  | i   |
| RESUME  | ii  |
| ABSTRACT  | iii |
| LISTE DES TABLEAUX  | iv  |
| LISTE DES FIGURES   | v   |
| LISTE DES NOTATIONS   | ix  |
| <b>Introduction générale</b> .....  | 1   |
| <b>Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés</b>  |     |
| I.1. Généralité .....   | 5   |
| I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....  | 6   |
| I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM .....   | 9   |
| I.3.1. pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté).....                 | 9   |
| I.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique)..... | 12  |
| I.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC....                                      | 13  |
| I.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM.....  | 19  |
| I.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM.....  | 19  |
| I.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM.....  | 23  |
| I.5 L'intérêt d'utilisation des FGM.....  | 25  |
| I.6 Méthodes d'élaboration des FGM.....   | 26  |
| I.6.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....  | 27  |
| I.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....   | 28  |
| I.6.3 Compaction Sèche des Poudres.....   | 28  |
| I.6.4 Dépôt par Electrophorèse.....   | 29  |
| I.6.5 Compaction Sèche des Poudres.....   | 29  |
| I.6.6 Projection Plasma.....  | 29  |
| I.6.7 C. V. D. et P. V. D. ....   | 29  |
| I.6.8 Frittage et Infiltration.....   | 30  |
| I.6.9 Frittage Laser Différentiel.....  | 30  |
| I.6.10 Implantation Ionique (Sputtering) .....  | 31  |

|   |    |
|---|----|
| I.6.11 Dépôt par Centrifugation.....  | 31 |
| I.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.....  | 31 |
| I.8. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM..... | 32 |
| I.8.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....  | 33 |
| I.8.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....  | 34 |
| I.8.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....  | 35 |

## **Chapitre II : Revue des recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés**

|  |    |
|--|----|
| II.1. Généralité.....  | 37 |
| II.2. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés.....  | 39 |
| II.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés.....                                      | 41 |
| II.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement..... | 42 |

## **Chapitre III : Les théories des structures FGM**

|  |    |
|--|----|
| III.1. Généralité.....   | 47 |
| III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....             | 47 |
| III.2.1. Approche monocouche équivalente.....  | 47 |
| III.2.1.1.Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) .....        | 48 |
| III.2.1.2.Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT). ..... | 49 |
| III.2.1.3.Les modèles d'ordre supérieur.....   | 50 |
| III.2.2. Approche par couche.....  | 54 |
| III.2.2.1. Les modèles zig-zag.....  | 55 |
| III.2.2.2. Les modèles couches discrètes.....  | 57 |

## **Chapitre IV : Formulation théorique du comportement thermomécanique des plaques sandwichs**

|  |    |
|--|----|
| IV.1. Formulation théorique.....   | 59 |
| IV.1.1. Configuration géométrique.....                                   | 59 |
| IV.1.2. La théorie des plaques d'ordre élevé .....                       | 60 |
| IV.1.3. La théorie des plaques raffinée pour les FGM.....                | 61 |
| IV.1.3.1. Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT) .....      | 62 |
| IV.1.3.2. Cinématique et équations constitutives.....                    | 63 |
| IV.1.4. Les équations d'équilibre .....                                  | 64 |
| IV.2. La Solution exacte pour une plaque sandwich FGM simplement appuyée | 67 |

## **Chapitre V : Résultats et Discussions**

|  |    |
|--|----|
| V.1. Introduction.....   | 70 |
| V.2. Résultats numériques.....   | 70 |
| V.2.1. Partie A : plaque sandwich sans effet de déformation normale.....   | 71 |
| V.2. 1.1. Validation des résultats .....                                   | 71 |
| V.2.2. Partie B : plaque sandwich avec l'effet de déformation normale..... | 89 |

|                                 |           |
|---------------------------------|-----------|
| <b>Conclusion générale.....</b> | <b>97</b> |
|---------------------------------|-----------|

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Références bibliographiques.....</b> | <b>98</b> |
|---|-----------|

# LISTE DES TABLEAUX

---



## Liste Des Tableaux

---

### Chapitre I

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau I.1</b> | Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal..... | 07 |
|--------------------|---|----|

### Chapitre V

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau V.1</b> | Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes Plaques sandwichs carrées en FGM..... | 72 |
|--------------------|---|----|

|                    |  |    |
|--------------------|--|----|
| <b>Tableau V.2</b> | Comparaison des contraintes de flexion $\bar{\sigma}_x$ non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM..... | 72 |
|--------------------|--|----|

|                    |  |    |
|--------------------|--|----|
| <b>Tableau V.3</b> | Comparaison des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM..... | 73 |
|--------------------|--|----|

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau V.4</b> | Valeurs des flèches Dimensionnelle pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM..... | 75 |
|--------------------|---|----|

|                    |  |    |
|--------------------|--|----|
| <b>Tableau V.5</b> | Influence du rapport $a/b$ sur la flèche des plaques sandwichs en FGM ( $k = 2$ ). ..... | 76 |
|--------------------|--|----|

|                    |  |    |
|--------------------|--|----|
| <b>Tableau V.6</b> | Valeurs des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ pour des plaques sandwichs carrés en FGM..... | 78 |
|--------------------|--|----|

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau V.7</b> | Valeurs des contraintes axiales $\bar{\tau}_{xz}$ pour des plaques sandwichs carrés en FGM..... | 79 |
|--------------------|---|----|

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau V.8</b> | Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes Plaques sandwichs carrées en FGM ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0$ , $t_2 = 100$ et $a/h = 10$ )..... | 90 |
|--------------------|---|----|

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Tableau V.9</b> | Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes Plaques sandwichs carrées en FGM..... | 91 |
|--------------------|---|----|

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Tableau V.10</b> | Comparaison des contraintes de flexion $\bar{\sigma}_x$ non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM..... | 93 |
|---------------------|--|----|

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Tableau V.11</b> | Comparaison des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM..... | 94 |
|---------------------|--|----|

# LISTE DES FIGURES

---

## Liste des Figures

---

### Chapitre I

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Figure. I.1</b>  | Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.....  | 6  |
| <b>Figure I.2</b>   | Concept des matériaux à gradient de propriétés.....  | 8  |
| <b>Figure I.3</b>   | Protection thermique.....  | 8  |
| <b>Figure I.4</b>   | Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....   | 9  |
| <b>Figure I.5</b>   | Résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » ..... | 11 |
| <b>Figure. I.6</b>  | Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie .....   | 13 |
| <b>Figure. I.7</b>  | (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C  | 14 |
| <b>Figure. I.7</b>  | changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re.....  | 15 |
| <b>Figure. I.8</b>  | Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches.....   | 16 |
| <b>Figure. I.9</b>  | Photo des électrodes symétriques graduées de $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe.....                     | 17 |
| <b>Figure. I.10</b> | schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W.....  | 18 |
| <b>Figure. I.11</b> | La relation entre la conduction thermique et l'émissivité.....   | 18 |
| <b>Figure. I.12</b> | Processus de traitement des Poudre pour les FGM.....   | 20 |
| <b>Figure. I.13</b> | Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM  | 21 |
| <b>Figure. I.14</b> | Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ ).....  | 22 |

## Liste des Figures

---

|                     |   |    |
|---------------------|---|----|
| <b>Figure. I.15</b> | Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM..... | 23 |
| <b>Figure. I.16</b> | (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans $Al_2O_3/ZrO_2$ .....                            | 23 |
| <b>Figure. I.17</b> | Principe de la méthode coulage en bande.....  | 27 |
| <b>Figure I.18</b>  | Disposition du procédé frittage laser différentiel.....   | 30 |
| <b>Figure I.19</b>  | Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....   | 31 |
| <b>Figure. I.20</b> | Modèles analytiques pour une couche en FGM.....   | 32 |
| <b>Figure I.21</b>  | Les dimensions de la plaque FGM.....  | 33 |
| <b>Figure I.22</b>  | La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....  | 34 |
| <b>Figure I. 23</b> | La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.....  | 35 |
| <b>Figure I. 24</b> | La variation du module de Young de la plaque E-FGM.....   | 36 |

### Chapitre II

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Figure II.1</b> | Variation de la fraction volumique des matériaux constitutants dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés.....          | 38 |
| <b>Figure II.2</b> | Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al [18] et le modèle de Mori-Tanaka..... | 41 |
| <b>Figure II.3</b> | Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumises à un chargement transverse.....   | 44 |
| <b>Figure II.4</b> | Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique.....                                | 45 |
| <b>Figure II.5</b> | Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ( $Si_3N_4/SUS304$ ) .....   | 46 |

### Chapitre III

|                      |  |    |
|----------------------|--|----|
| <b>Figure.III. 1</b> | Cinématique de Love-Kirchhoff. ....                              | 48 |
| <b>Figure. III.2</b> | Cinématique de Reissner-Mindlin. ....                            | 49 |
| <b>Figure. III.3</b> | Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3 f'(x_3)$ | 50 |

## Liste des Figures

---

|                        |  |    |
|------------------------|--|----|
|                        | suivant l'épaisseur. ....  |    |
| <b>Figure .III.4</b>   | Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....   | 51 |
| <b>Figure. III.5</b>   | Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....  | 53 |
| <b>Figure. III.6</b>   | Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....  | 53 |
| <b>Figure. III.7</b>   | Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.....  | 55 |
| <b>Figure. III.8</b>   | Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....  | 55 |
| <b>Figure. III.9</b>   | Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre...   | 56 |
| <b>Figure.III.10</b>   | Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur...  | 56 |
| <br><b>Chapitre IV</b> |  |    |
| <b>Figure. IV.1</b>    | Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec une épaisseur uniforme suivant des coordonnées cartésiennes.....   | 59 |
| <b>Figure. IV.2</b>    | La variation du matériau à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich  | 60 |
| <br><b>Chapitre V</b>  |  |    |
| <b>Figure. V.1</b>     | Influence du rapport d'aspect $a/b$ sur la flèche centrale $\bar{w}$ pour le cas des plaques sandwiches en FGM symétriques et non symétriques ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1).....              | 80 |
| <b>Figure. V.2</b>     | Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques en FGM, symétrique et non symétrique ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1).....   | 81 |
| <b>Figure. V.3</b>     | Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur des plaques en FGM, symétrique et non symétrique ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1) ..... | 82 |

## Liste des Figures

---

|                     |   |    |
|---------------------|---|----|
| <b>Figure. V.4</b>  | variation de la flèche central $\bar{w}$ en fonction du rapport $(a/h)$ d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de $k$ et les différents types de plaques, (a) La plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-1-2) et la plaque (e) (2-2-1) .....     | 83 |
| <b>Figure. V.5</b>  | variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de $k$ et les différents types de plaques, (b) La plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-1-2), et la plaque (e) (2-2-1).....                                 | 84 |
| <b>Figure. V.6</b>  | variation de la contrainte $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction du rapport $(a/h)$ d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de $k$ et les différents types de plaques. (a) La plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-1-2), et la plaque (e) (2-2-1)..... | 85 |
| <b>Figure. V.7</b>  | Influence de la charge mécanique et de la charge thermique sur la flèche centrale d'une plaque sandwich (1-2-1) en FGM, ( $k = 1$ ) par rapport à $(a/h)$ et à $(a/b)$ .....  | 87 |
| <b>Figure. V.8</b>  | Influence de la charge mécanique et de la charge thermique sur la contrainte $\bar{\sigma}_x$ (a) et la contrainte $\bar{\tau}_{xz}$ (b) d'une plaque sandwich (1-2-1) en FGM, ( $k = 1.5$ ).....   | 88 |
| <b>Figure. V.9</b>  | Effet de la variation du rapport $(a/b)$ sur la flèche non dimensionnelle $\bar{w}$ pour les plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h, p = 2$ ).....   | 95 |
| <b>Figure. V.10</b> | Distributions de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ non dimensionnelle à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h, p = 2$ ).....  | 96 |
| <b>Figure. V.11</b> | Distributions de la de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h, p = 2$ ).....   | 96 |

# LISTE DES NOTATIONS

---

## Liste des notations

---

|   |  |
|---|--|
| $G$   | Module de cisaillement dans le plan (x, z)                             |
| $E_c$   | Module de Young de la céramique  |
| $E_m$   | Module de Young du métal   |
| $\nu$   | Coefficient de Poisson   |
| $G(z)$  | Module de cisaillement en fonction de « z »                            |
| $E(z)$  | Module de Young en fonction de « z »                                   |
| $\nu(z)$                                      | Coefficient de Poisson en fonction de « z »                            |
| $V(z)$  | Fraction volumique   |
| $k$   | Paramètre du matériau  |
| $a$   | Longueur de la plaque  |
| $b$   | Largeur de la plaque   |
| $h$   | Épaisseur de la plaque   |
| $u_0, v_0, w_0$                               | Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque |
| $u, v, w$                                     | Les déplacements dans les directions x, y, z.                          |
| $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$             | Les rotations autour des axes x, y et z,                               |
| $\Psi(z)$                                     | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)        |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$                | Contraintes normales   |
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}$                        | Contraintes de cisaillement  |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformation dans la direction x, y et z                                |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}$                    | Déformations de distorsion   |
| $\Psi'(z)$                                    | La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z    |
| $\Psi''(z)$                                   | La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z    |
| $\delta u, \delta v, \delta w$                | Champ virtuel de déplacement   |
| $\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$        | Champ de déformation transversal virtuel                               |
| $N_x, N_y, N_z, N_{xy}$                       | Efforts normaux  |
| $M_x, M_y, M_{xy}$                            | Moments de flexion   |
| $Q$   | Effort de cisaillement   |
| $\partial$                                    | Dérivée partielle  |



|   |   |
|---|---|
| $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$ | Champ de déformation longitudinal virtuel           |
| $\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$                          | Champ de déformation transversal virtuel            |
| $N_x, N_y, N_z, N_{xy}$   | Efforts normaux                                     |
| $M_x, M_y, M_{xy}$  | Moments de flexion                                  |
| $M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$  | Moments de flexion                                  |
| $S_x, S_y, S_{xy}$  | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse |
| $M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$  | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse |
| $S_{xz}^s, S_{yz}^s$  | Effort de cisaillement                              |
| $Q_{xz}, Q_{yz}$  | Effort de cisaillement                              |
| $\partial$  | Dérivée partielle                                   |
| $i$ et $j$  | Sont des nombres naturels.                          |
| $A_{ij}$  | Termes de rigidité en membrane de la plaque         |
| $B_{ij}$  | Termes de rigidité de couplage de la plaque         |
| $D_{ij}$  | Termes de rigidité de flexion de la plaque          |
| $A_{ij}^a$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $B_{ij}^a$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $D_{ij}^a$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $F_{ij}^a$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $A_{ij}^s$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $B_{ij}^s$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $D_{ij}^s$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $H_{ij}^s$  | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement     |
| $T(x, y, z)$  | Chargement thermique                                |
| $\{\Delta\}$  | Le vecteur des déplacements généralisés             |
| $\{f\}$   | Le vecteur des efforts généralisés                  |
| $\{ \}$   | Vecteur colonne                                     |
| $[ ]$   | Matrice   |

# INTRODUCTION GENERALE

---

# Introduction générale

---

Au cours de ces dernières années, l'industrie et l'usage mondial des matériaux composites ont bénéficié d'une croissance rapide et régulière, soutenue en particulier par la diversité des applications. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ") [1].

Cette classe de matériaux, qui fait l'objet de récentes études, est caractérisée par une variation spatiale de la microstructure. Ces matériaux offrent l'avantage d'avoir une gradation des propriétés et permettent ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [2].

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [3].

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en

# Introduction générale

---

FGM pendant le 21<sup>ème</sup> siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Les axes de recherches qui ont conduit à l'établissement de l'architecture des FGM sont les suivants:

- 1- Établissement des définitions et des théories mathématiques pour les structures FGM.
- 2- Développement de systèmes de conception et de modélisation assistés par ordinateur.
- 3- Développement de processus rentables.
- 4- Évaluation des propriétés graduelles.
- 5- Établissement d'une base de données pour l'architecture de FGM.

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement mécanique des structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles thermomécanique liées à un chargement thermique donné en chaque point de la structure.

La détermination des contraintes thermiques (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différant entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées [4].

Une analyse précise et détaillée des déplacements et des contraintes dans une plaque FGM soumise à des charges thermiques et mécaniques a attiré l'attention de nombreux chercheurs à ce jour.

La théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, est inexacte pour l'analyse de la distribution des déplacements et des contraintes dans les plaques FGM. L'inexactitude est due à la négligence des effets de cisaillement transverse dans les plaques FGM. Afin de prendre en compte cet effet, un certain nombre de théories de déformation de cisaillement de premier ordre ont été développées. Cependant, ces théories supposent une distribution uniforme des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. A cet effet, des facteurs de correction de cisaillement sont introduites pour contourner ce problème. La précision des solutions de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre sera

## Introduction générale

---

fortement liée à la meilleure estimation des facteurs de correction de cisaillement. Il a été montré que la théorie classique et la théorie du premier ordre sont inadéquates pour prédire les solutions exactes des plaques FGM.

Reddy [5] a présenté la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) dans laquelle les contraintes de cisaillement transverses varient d'une façon quadratique à travers l'épaisseur, et par conséquent elle n'exige aucun facteur de correction de cisaillement. Un modèle d'éléments finis basé sur cette théorie a été aussi développé. Cheng et Batra [6] ont trouvés des relations liant les flèches d'une plaque polygonale FGM simplement appuyée, obtenues par les théories de déformation de cisaillement du premier ordre et du troisième ordre, à celles d'une plaque homogène équivalente de Kirchhoff. Cheng et Batra [7] ont aussi présentés des résultats pour les vibrations et le flambement d'une plaque polygonale FGM simplement appuyée, en se basant sur la théorie des plaques de Reddy. Les solutions analytiques en 3D pour les plaques sont utilisées puisqu'elles fournissent des résultats de référence afin d'évaluer l'exactitude des diverses théories des plaques en 2D et les formulations des éléments finis. Cheng et Batra [8] ont également utilisé la méthode d'expansion asymptotique pour étudier les déformations thermo-élastique 3D d'une plaque FGM elliptique. Vel et Batra [9] ont présentés une solution exacte en 3D pour les déformations thermo-élastique des plaques FGM simplement appuyée de dimensions finies. Récemment, Ying et al. [10] ont utilisés une méthode semi-analytique pour étudier les déformations thermiques des plaques FGM épaisses où l'analyse est directement basée sur la théorie de l'élasticité en 3D.

Récemment, une théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a été développée pour les plaques isotropes par Shimpi [11]. Ensuite cette théorie a été étendue aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel [12]. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques (CLPT) dans certains aspects tels que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour le comportement statique et thermo-élastique des plaques FGM par Mechab et al. [13] et Houari et al. [14]. Par conséquent, il semble important d'étendre cette théorie à l'analyse de déformation thermomécanique des plaques sandwichs en FGM.

Dans ce travail, une nouvelle théorie des plaques à quatre variables est développée pour la flexion thermomécanique des plaques sandwichs en FGM. La plaque est supposée isotrope à

# Introduction générale

---

n'importe quel point dans son volume, avec un module de Young variant à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La présente théorie satisfait aux conditions d'équilibre dans les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour les plaques FGM simplement appuyées. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants et du rapport épaisseur-longueur sur les flèches, les déplacements axiaux et les distributions de la contrainte axiale sont étudiés en détail. Des résultats numériques pour les flèches et les contraintes ont été étudiés et des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie en comparant les résultats obtenus avec ceux déterminés par d'autres théories.

L'étude que nous présentons comprend cinq parties essentielles.

Dans le chapitre I, nous exposons d'une façon claire des généralités sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en « FGM ».

Le deuxième chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les structures en matériaux à gradient de propriétés en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Nous abordons au chapitre III les différentes approches qui régissent les plaques composites, en commençant par les théories bidimensionnelles puis nous allons citer les théories par couche.

Le quatrième chapitre présente une formulation théorique du comportement thermomécanique des plaques sandwichs.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwichs non symétriques en FGM.

Ce travail de thèse se termine par des conclusions relatives à ce travail de recherche.

# CHAPITRE I

---

## **GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES**

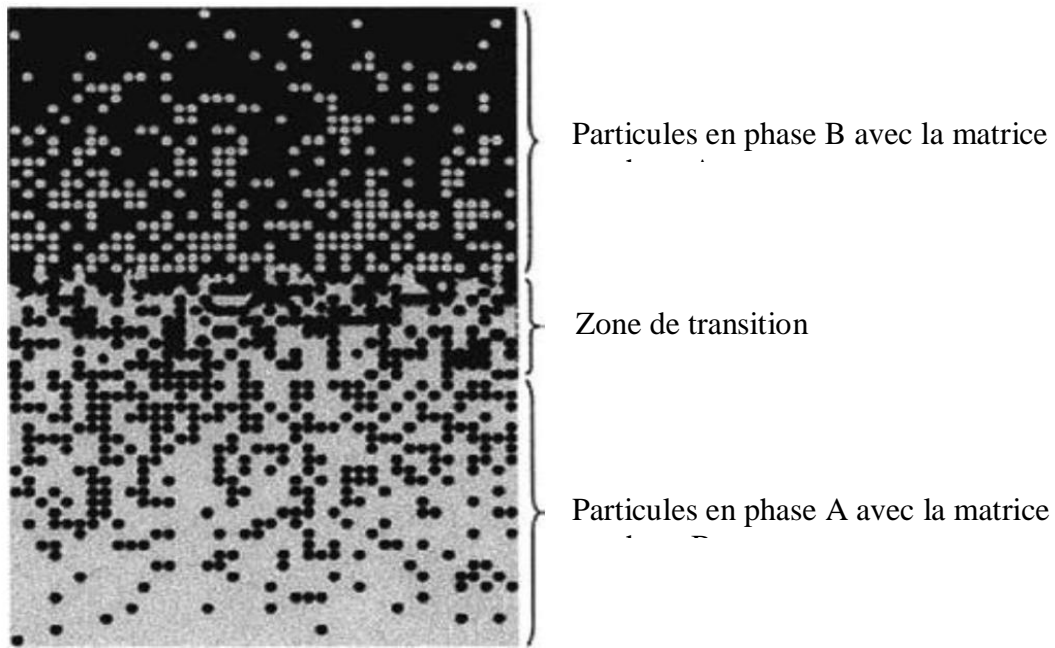
### I.1. Généralité :

Les matériaux composites légers, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées dues à leur faible dureté. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière [1].

Le concept MGF origine au Japon en 1984 au cours du projet avion spatial, (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [15, 16, 17].

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées [1]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.1 [18]





**Figure. I.1 :** Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [18]

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc .... D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [19], des déclencheurs [20], des armures metal/ceramic [21], des détecteurs photoélectriques [22] et des implants dentaires [23]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériaux ont été éditées pendant les deux dernières décennies [24, 25, 26, 27, 28]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [29].

## **I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés**

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'ya aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [30].

La solution envisagée est la mise en oeuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

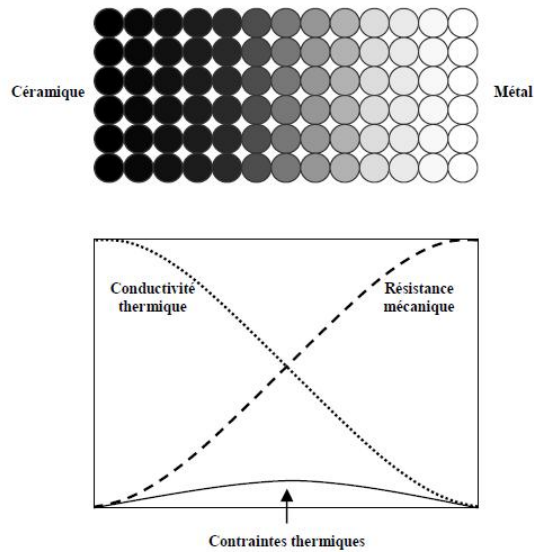
Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [25]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes [30].

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

**Tableau I.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [4].

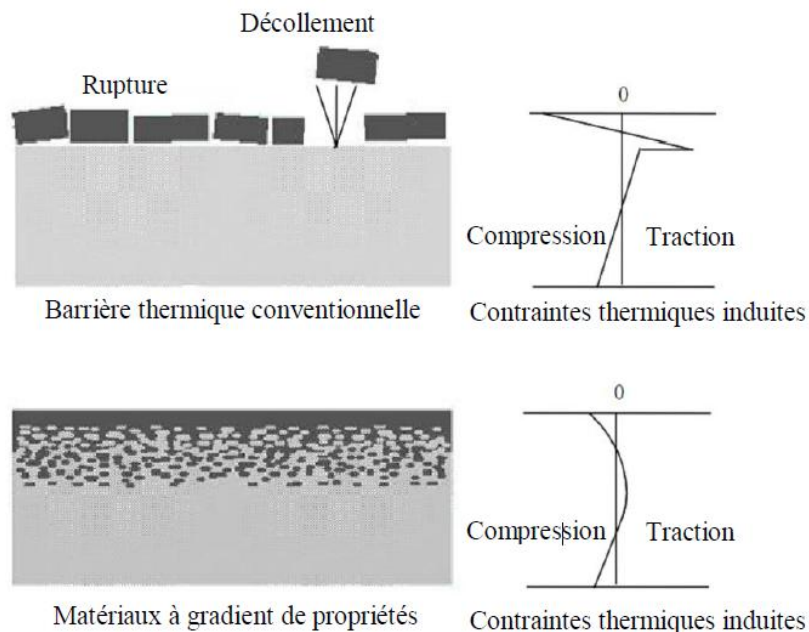
|   |                 |  |
|---|-----------------|--|
| La face à haute température   | Céramique       | - Bonne résistance thermique ;<br>- Bonne résistance à l'oxydation ;<br>- Faible conductivité thermique. |
| Continuité du matériau d'un point à l'autre<br>« couches intermédiaires » | Céramique-métal | -Élimination des problèmes de l'interface ;<br>-Relaxer les contraintes thermiques.                      |
| La face à basse température   | Métal           | - Bonne résistance mécanique ;<br>-Conductivité thermique élevée,<br>- Très bonne ténacité.              |

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.2. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [31].



**Figure I.2 :** Concept des matériaux à gradient de propriétés [31].

La figure I.3 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles [4].

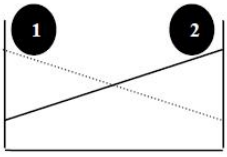
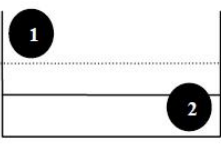
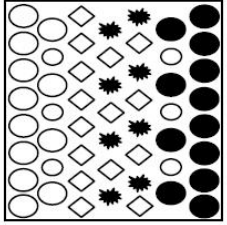
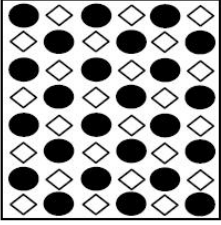


**Figure I.3 :** Protection thermique.

**I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM**

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la Figure I.4 [32]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [33].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives [1].

|                          |  |  |   |
|--------------------------|--|--|---|
| <p><b>Propriétés</b></p> | <p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>  |  |  |
| <p><b>Structure</b></p>  | <p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p> fibre ◈</p> |  |  |
| <p><b>Matériaux</b></p>  | <p>exemple</p>   | <p>FGM</p>   | <p>NON-FGM</p>  |

**Figure I.4 :** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [32]

**I.3.1. pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté)**

La véritable lancée de ce matériau à commencée en 1987. À cette époque là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un

budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

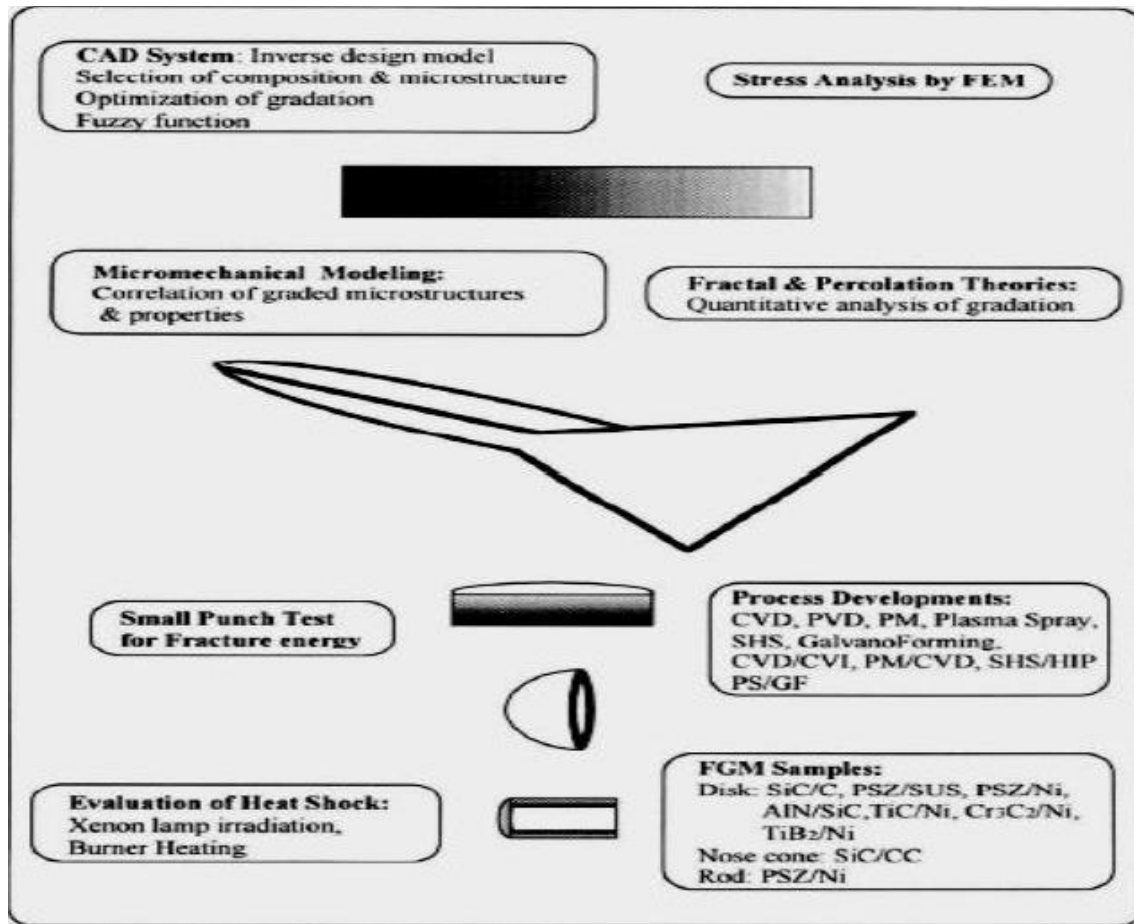
A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci a été de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
2. Ténacité du matériau côté basse température;
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [34].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté hautes températures) et des métaux (côté basse température).

La figure. I.5 montre les principaux résultats du programme de recherche [35], [36]. Par exemple, du côté de la conception et de la modélisation, ils ont développé un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisés des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service. Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établis une approche micromécanique pour corréler les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées; la méthode FEM a été employée pour modéliser la distribution des efforts internes.



**Figure I.5 :** résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD, PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub>/Ni, TiB<sub>2</sub>/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

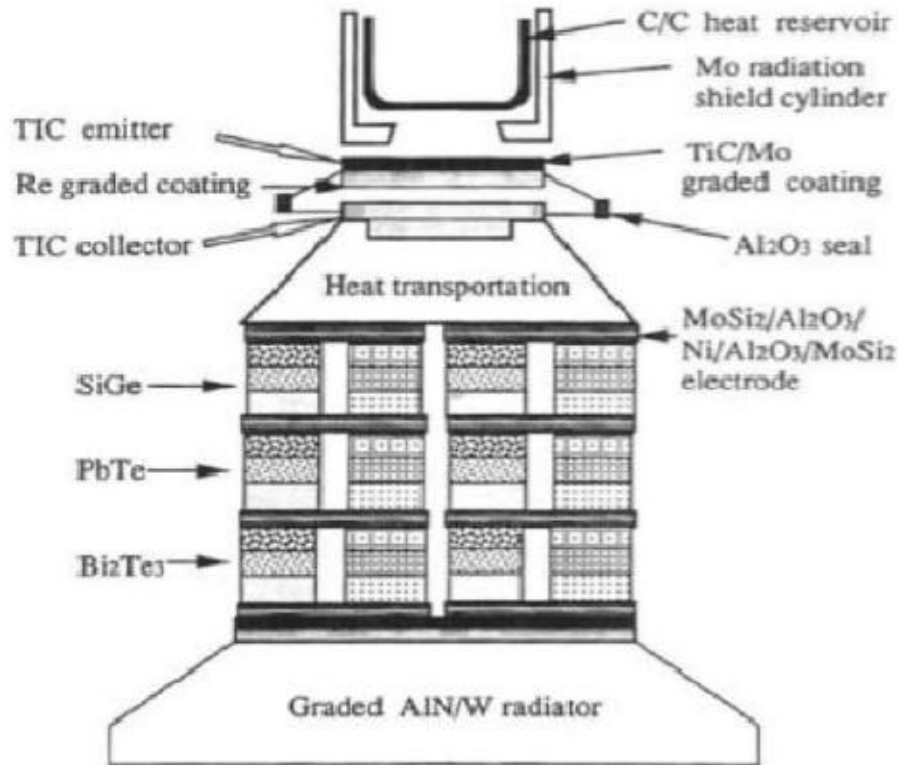
Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par une forte lampe en xénon et une méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur. Les petites chambres de combustion pour des moteurs-fusées faites de formations

SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO<sub>2</sub>/Ni par jet de plasma/galvano ont subis des essais de combustion au laboratoire aérospatial national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. A nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés [36]. Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

### **I.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :**

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoïoniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La figure. I.6 montre ce programme continu; Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de ~2000°K à ~300°K. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.



**Figure. I.6 :** Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie [36].

### I.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC

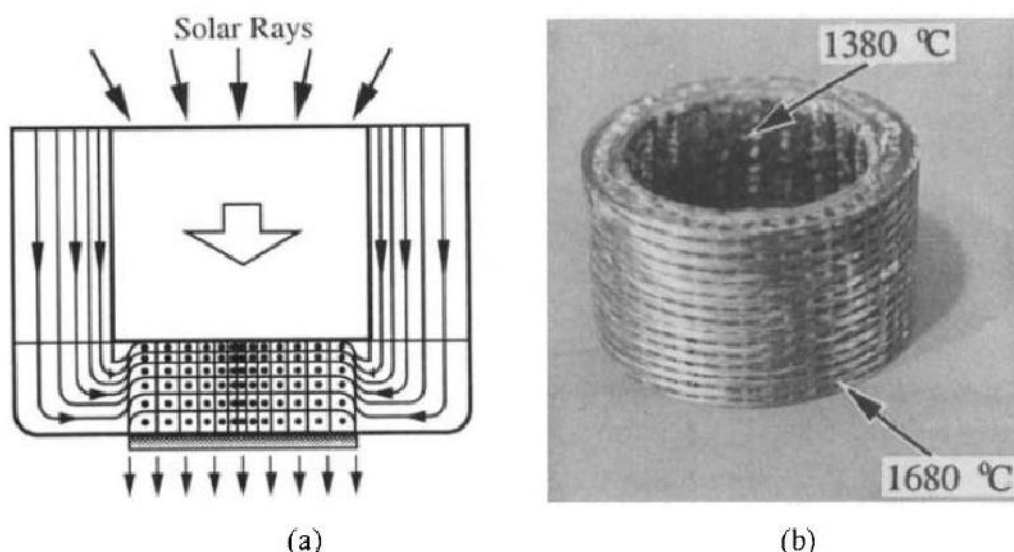
Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

#### a/ un réservoir de chaleur gradué(C/C) :

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon Oil Company Ltd. [36]. Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent, l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes.



Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La figure I.7 (a) montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la figure I.7 (b) est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.



**Figure. I.7 :** (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C [36].

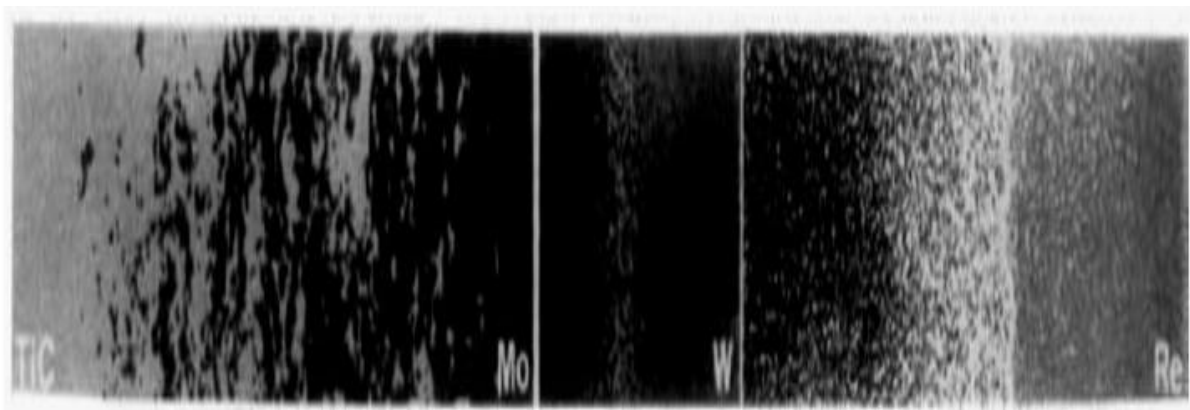
Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal  $M_0$  (Figure. I.7). Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

- **un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re) :**

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui permet l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TIC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au japon [38]. Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re [36]. W et Re ont été déposés sur un substrat  $M_0$  par CVD. La couche graduée est formée à travers l'interdiffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une graduation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La figure. I.7 montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-Mo relaxent efficacement la contrainte thermique.



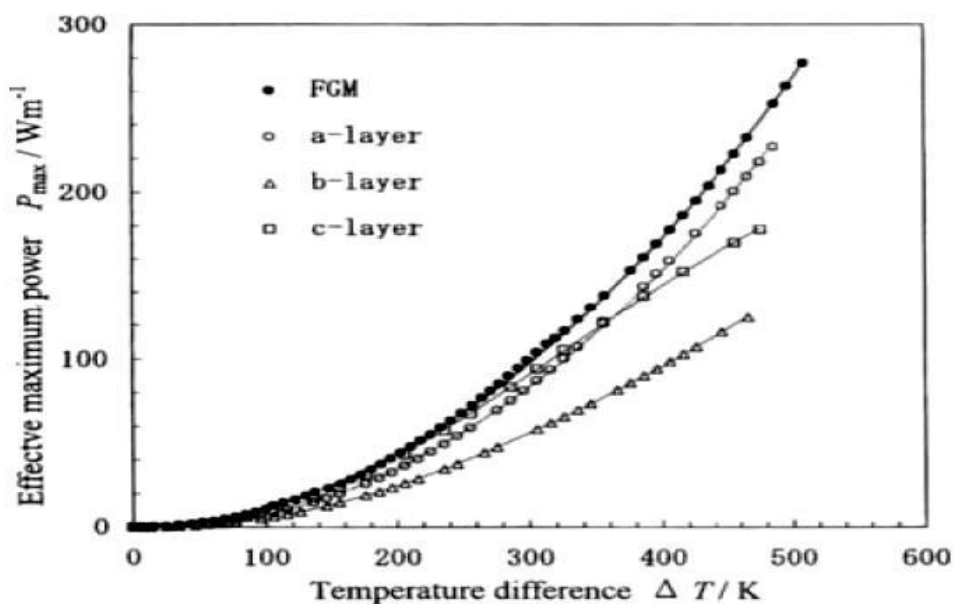
**Figure. I.7 :** changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re [36].

L'électrode du collecteur a été façonnée au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode  $M_0$ . Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm<sup>2</sup> obtenue à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co.Ltd. [36].

#### - Matériel thermoélectrique gradué en PbTe

Pour les dispositifs TEC tels que Bi<sub>3</sub>Te<sub>2</sub>, PbTe, et SiGe, exposés dans le preceding d'ichiro [36], les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de conversion d'un pourcentage considérable par la graduation des compositions. La figure I.8 compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (a-couche  $3.51 \times 10^{25}/m^3$ , b-couche  $2.6 \times 10^{25}/m^3$ , c-couche  $2.26 \times 10^{25}/m^3$ ), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une graduation du dopant Pbl<sub>2</sub> a été préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température

ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour  $\Delta T=486^\circ\text{K}$ , 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.



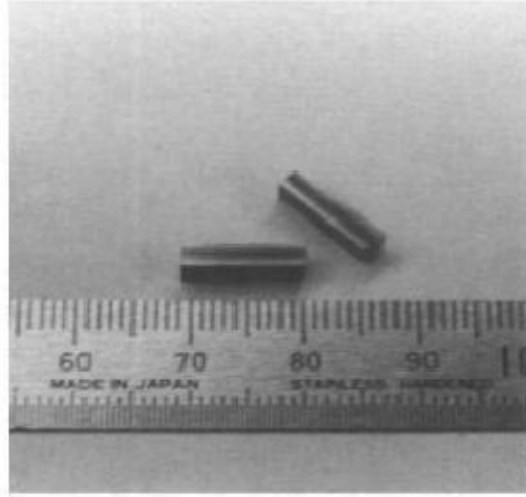
**Figure. I.8 :** Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches [36].

- **Une électrode symétriquement graduée  $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$  pour un TEC SiGe**

Dans le cas du dispositif TEC,  $\text{MoSi}_2$  est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevée ( $2030^\circ\text{C}$ ), avec une résistivité appropriée de  $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega\text{-cm}$  à  $1000^\circ\text{C}$ ), et une excellente résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique ( $3\text{-}4 \text{ MPA}\cdot\text{m}^{1/2}$ ) est faible. Pour façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de  $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$  (représenté sur la figure I.9) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP).

Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de  $\text{MoSi}_2$  due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du  $\text{MoSi}_2$  jusqu'à  $5,8 \text{ MPA}\cdot\text{m}^{1/2}$ .  $\text{Al}_2\text{O}_3$  agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ  $800^\circ\text{C}$ . Un aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à  $800^\circ\text{C}$  il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 ans.

Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd) en utilisant des inters couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C[36].



**Figure. I.9:** Photo des électrodes symétriques graduées de  $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$  fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe [36].

- **matériau radiatif gradué AIN/W**

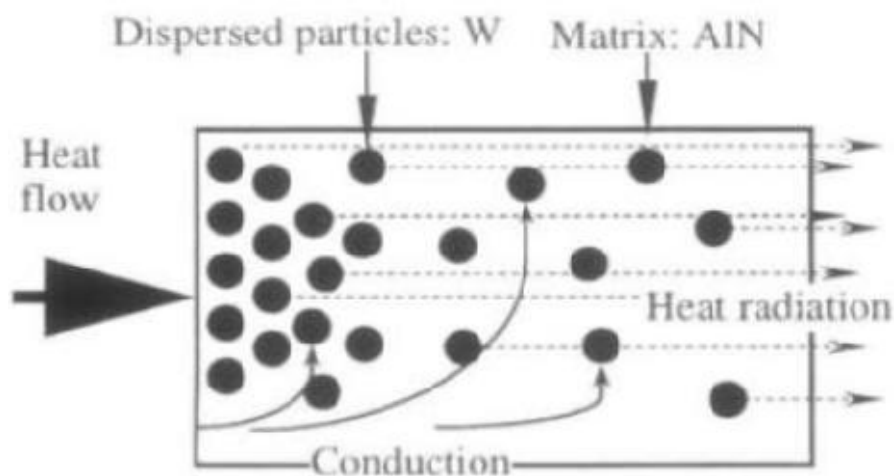
Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries, Ltd. Au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AIN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C. L'AIN dense possède une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AIN, peut être reflétée par les particules W, comme illustré sur la figure. I.10. Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité.

Suivant les indications de la figure. I.11, la structure graduée AIN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels [36].

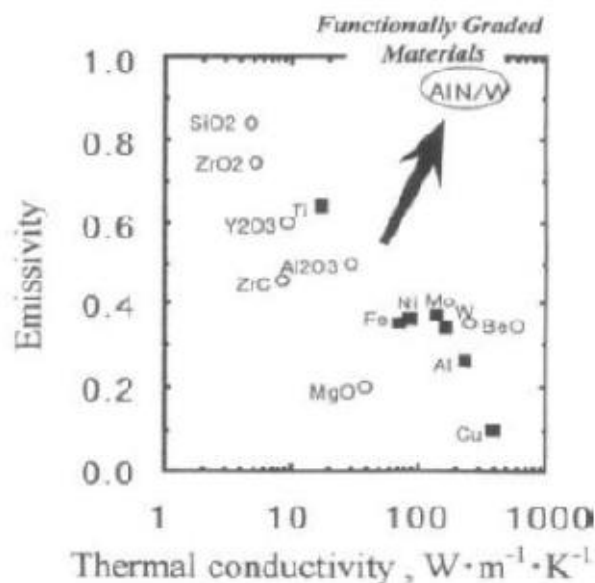
Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants:

1. Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;

2. Synthèse des graduations p et n type ( $\text{Bi}_3\text{Te}_2$ ,  $\text{PbTe}$ , et  $\text{SiGe}$ ) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
3. La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des pertes d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
4. fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15%.
5. Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.



**Figure. I.10 :** schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W [36]



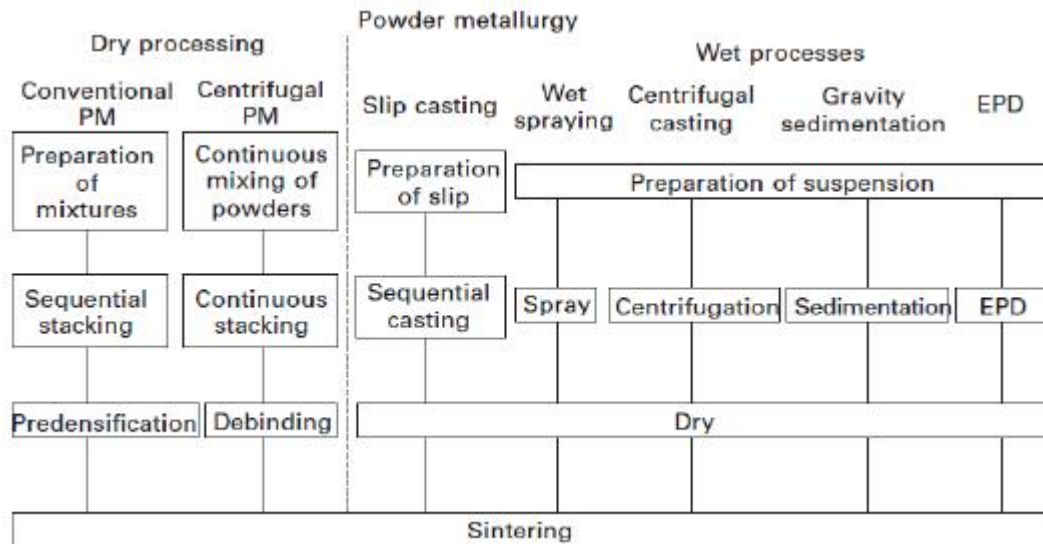
**Figure. I.11:** La relation entre la conduction thermique et l'émissivité [36].

#### I.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM

S'il y'a Une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles [37]. Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand en choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrême importance. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé. Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

##### I.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, ce corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de graduation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (figure I.12) [38]. Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.



**Figure. I.12 :** Processus de traitement des Poudre pour les FGM [38].

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage diffèrent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre [39]. En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption [40].

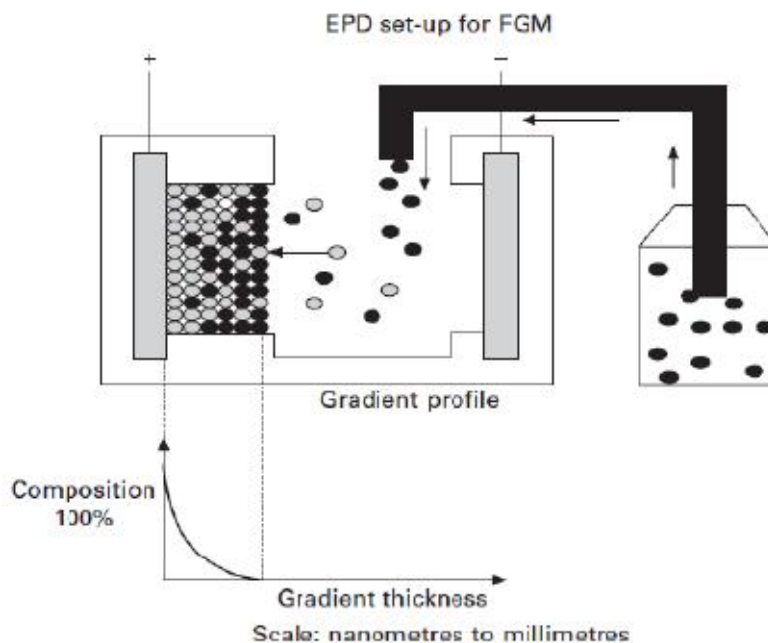
Dans un processus appelé la pulvérisation humide [41], des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créée en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation [42] est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale. Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en

céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle [43]. La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM.

Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électro phorétique de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse [44] parce que c'est un processus assez rapide qui ne coûte pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électro phorétique est un processus en deux étapes (figure. I.13). Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse). Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposée est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (figure. I.13).

L'adaptation Judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue.



**Figure. I.13 :** Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [37].



Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres, et en polymères [45]. Généralement la seule limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ ,  $\text{ZrO}_2/\text{WC}$ , et  $\text{WC}/\text{Co}$  ont déjà été explorés au moyen du processus EPD [37]. requise une pré réquisition d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen d'EPD s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen d'EPD [46]. Comme exemple, en présente une composition d'un profil (figure. I.14) et sa microstructure (figure. I.15) ; c'est un disque en FGM  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$  [47] avec un noyau homogène (75% volume d' $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), une couche  $\text{Al}_2\text{O}_3$  extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90% volume d' $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graphe, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses contraintes de traction au noyau du disque. Les phases  $\text{ZrO}_2$  (blanc) et  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (grises) peuvent être clairement différenciées dans la microstructure. La phase  $\text{ZrO}_2$  est bien dispersée dans la matrice  $\text{Al}_2\text{O}_3$  dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

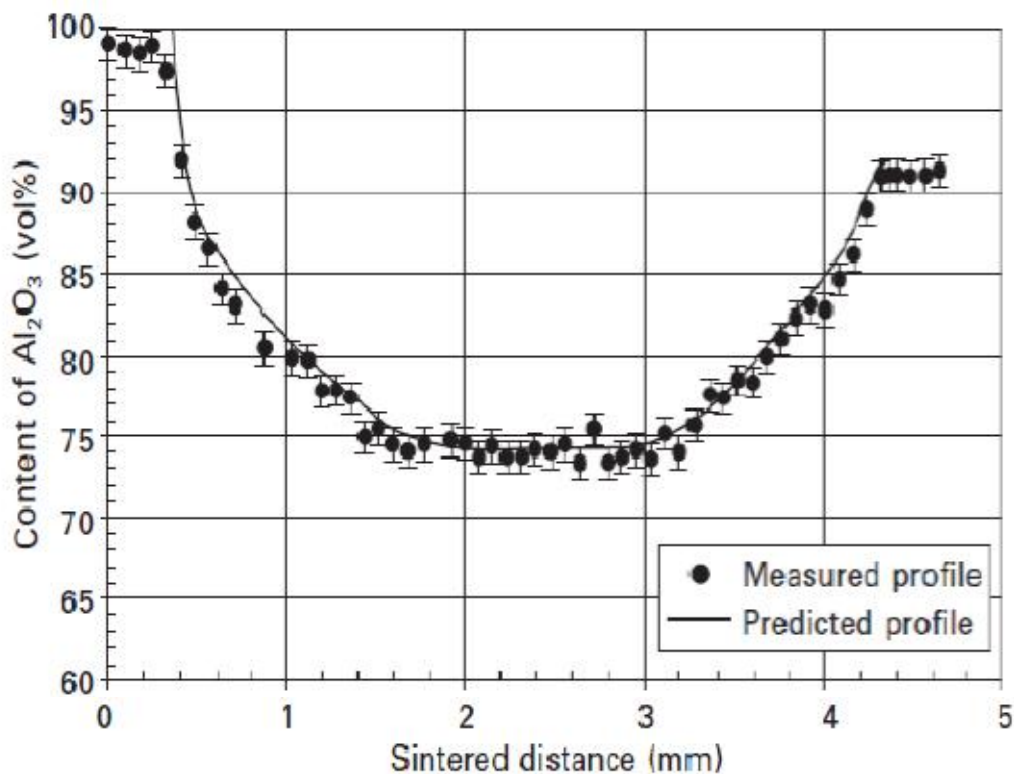
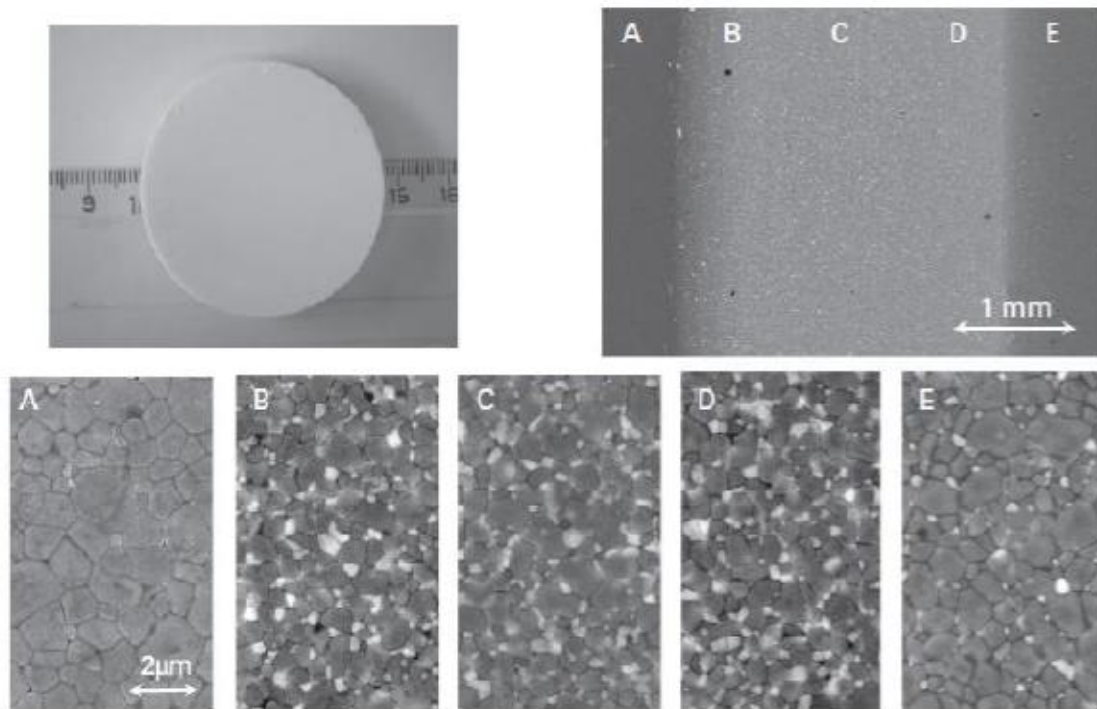


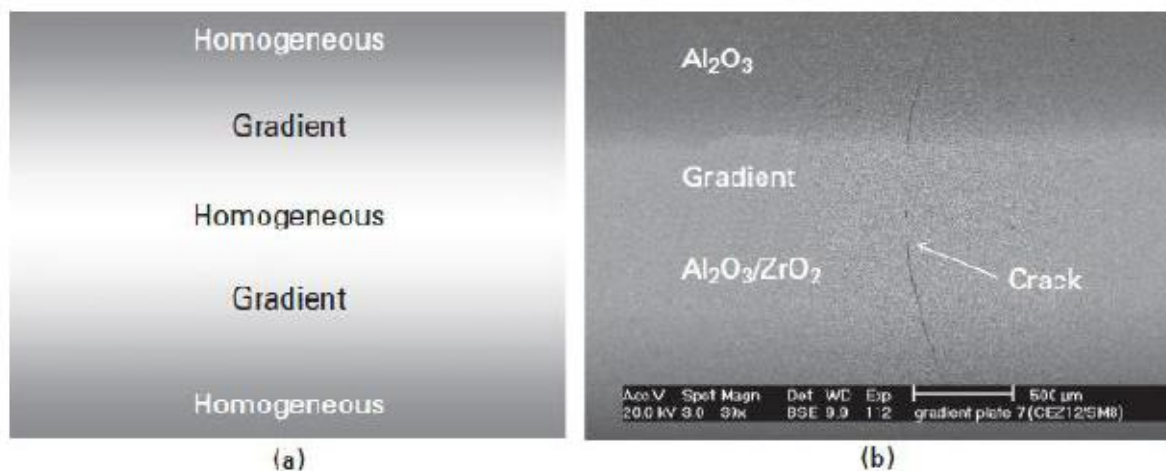
Figure.I.14 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ ) [37]



**Figure.I.15 :** Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [37].

#### I.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. A cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent être observés dans le composant FGM final à moins que des corrections soient apportées [48].



**Figure.I.16:** (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$  [37].

La figure. I.16 montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ , formés par les dépôts électrophorétiques et densifiés par frittage à basse pression. À partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en  $\text{ZrO}_2$  d'un disque symétrique fritté en TZP/ $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. Hillman [49] a observé des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$  sur les surfaces et une couche médiane en  $\text{ZrO}_2$ . Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dû au coefficient de dilatation thermique élevé de zircone. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ . Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitationnels.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les différentes couches [50-51] ou en ajustant la densité verte des différentes couches [52]. Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement Pendant le frittage [51]. Les forces résiduelles pendant Le cycle de chauffage sont diminuées par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent ; ceci est probablement dû à La relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de frittage des deux composants [37]. Dans un FGM métal/ céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles [38]. Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés

voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM [37]. C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que des méthodes conventionnelles. Le frittage de plasma en étincelle des FGM utilise un gradient de température dans le système, qui permet une densification homogène des FGM en correspondant le gradient de température au gradient de taux de retrait du compact. Avec un système de plasma d'étincelle, une grande masse FGM (céramique/métal) (~100 millimètres de section) peut être homogènement densifié en peu de temps avec des temps de chauffage et d'entreposage à moins d'une heure. Parmi les systèmes de frittage de plasma en étincelle rapportés on cite des matériaux à base de WC (WC/Co, WC/Co/steel, WC/Mo), des composés à base de  $ZrO_2$  ( $ZrO_2$ /acier,  $ZrO_2$ /TiAl,  $ZrO_2$ /Ni),  $Al_2O_3$ /TiAl, ...etc. [37].

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique [53]. Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenu par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

### **I.5 L'intérêt d'utilisation des FGM**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier

les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

### **I.6 Méthodes d'élaboration des FGM**

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention a tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

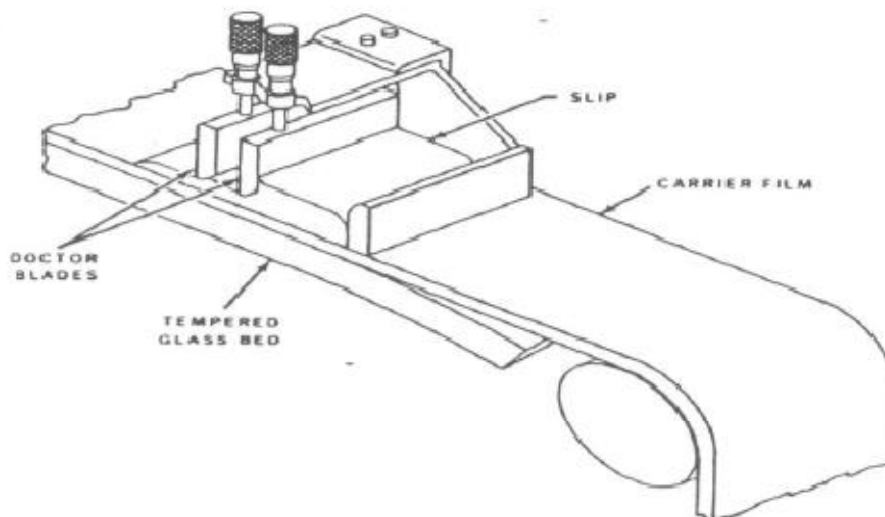
Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

### I.6.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.17). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 $\mu$ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.



**Figure. I.17** : Principe de la méthode coulage en bande [54].

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés [31]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type  $Al_2O_3$  et surtout pour les condensateurs à base de  $BaTiO_3$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M

puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ( $\text{BaTiO}_3$  principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par MISTLER [55].
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [31].

### **I.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.6.3 Compaction Sèche des Poudres**

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par

une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [56]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.6.4 Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [34].

#### **I.6.5 Compaction Sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [56]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.6.6 Projection Plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [57].

#### **I.6.7 C. V. D. et P. V. D.**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.



### I.6.8 Frittage et Infiltration

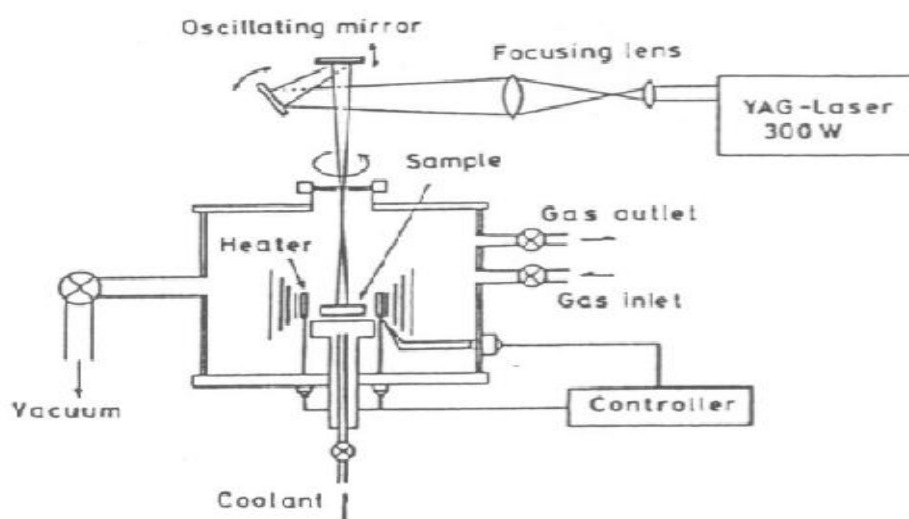
Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### I.6.9 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.18 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.



**Figure I.18 :** Disposition du procédé frittage laser différentiel [58].

### I.6.10 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [34].

### I.6.11 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.19) [34].

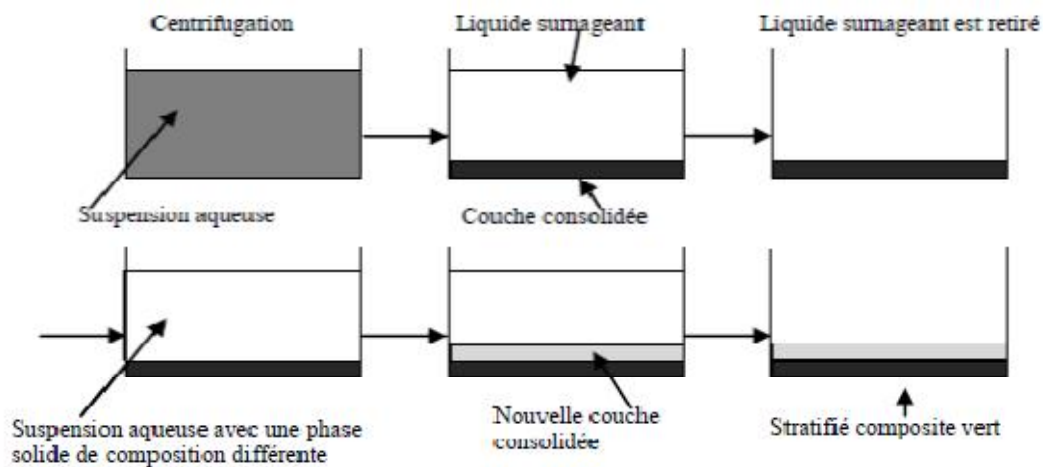


Figure I.19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [34].

## I.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

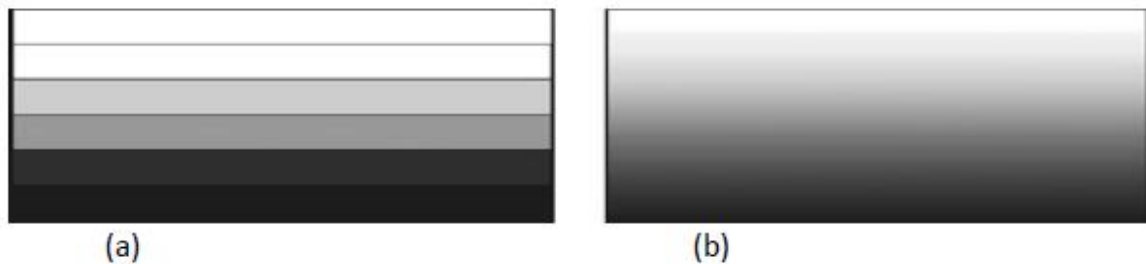
Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même

fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.20a).

- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.20b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).



**Figure.I.20 :** Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance et exponentielles.

### **I.8. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM**

Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure I.21). Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, module de Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe  $z$ ),  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Delale et Erdogan [59] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque; d'ailleurs cette propriété est sensiblement la même pour les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors, le module de Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

Notant que  $S$  représente la propriété mécanique qui varie selon l'épaisseur ; donc elle peut être le module de Young  $E(z)$  ou la densité  $\rho = \rho(z)$ .

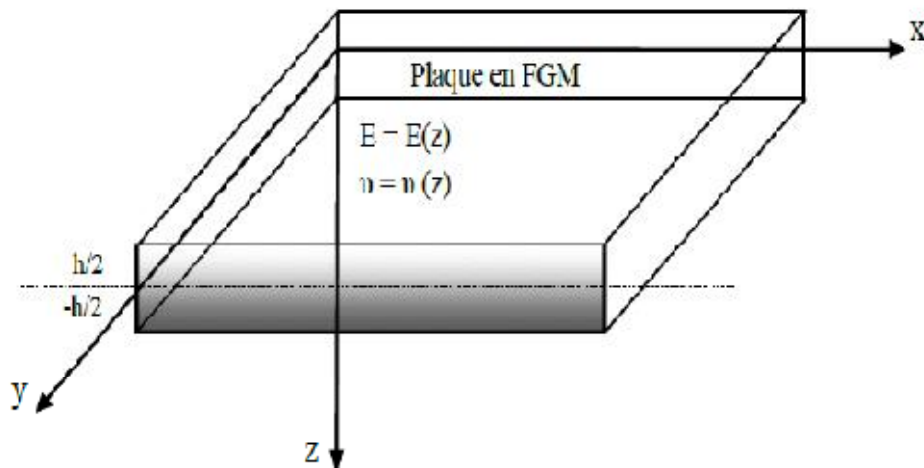
### I.8.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$g(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)].S_2 \quad (\text{I.2})$$



**Figure I.21 :** Les dimensions de la plaque FGM.

Où  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.22, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ .

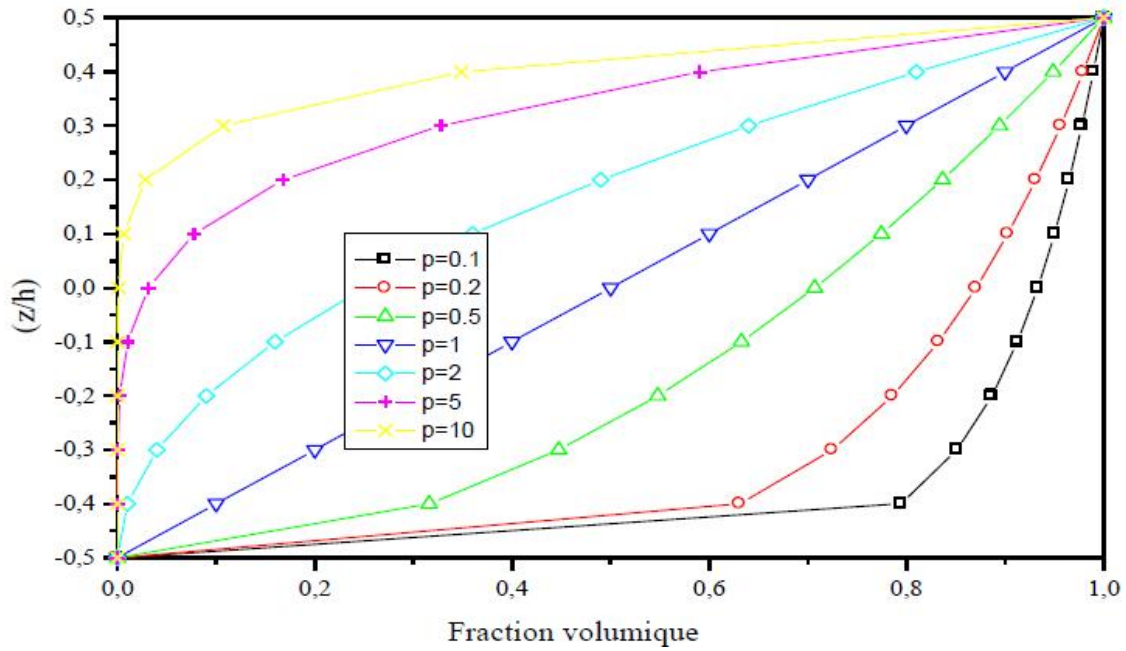


Figure I.22 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la figure I.22, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites (modèle de Voigt). Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité  $\rho$  et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \tag{I.3}$$

Là où  $S_j$  et  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche  $jj$ (Figure.I.20.a), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \tag{I.4}$$

### I.8.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des

contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.a})$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.b})$$

La figure I.23 montre que la variation du module de Young selon les équations (I.6.a) et (I.6.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

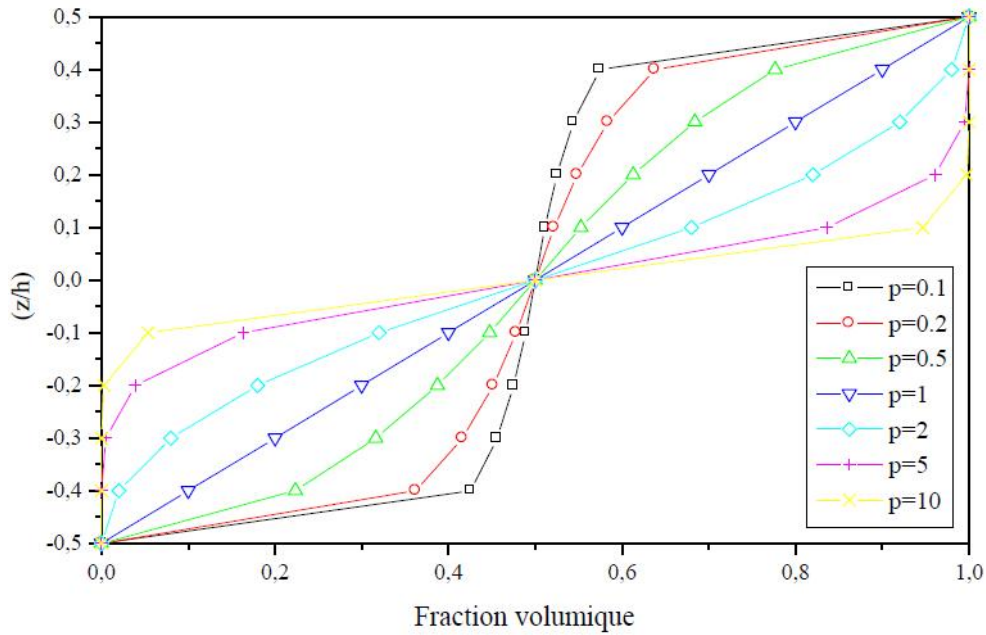


Figure I. 23 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

### I.8.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

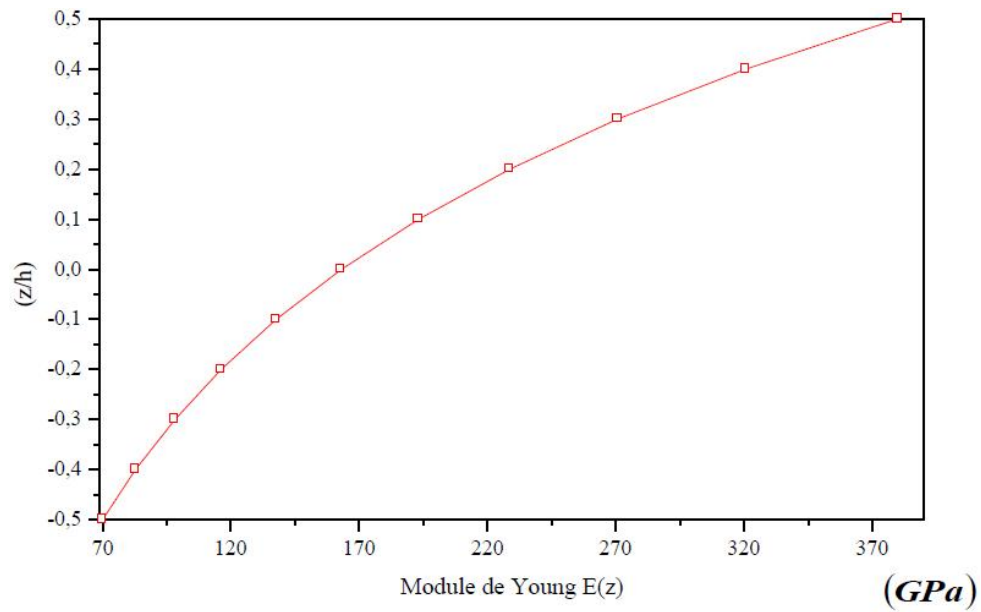
Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [59] :

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (\text{I.7.a})$$

Avec

$$A = S_2 \text{ Et } B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left( \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (\text{I.7.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.24.



**Figure I. 24 :** La variation du module de Young de la plaque E-FGM.

# CHAPITRE II

---

**REVUE DES RECHERCHES SUR LES  
STRUCTURES EN MATERIAUX A GRADIENT DE  
PROPRIETES**



## **II.1. Généralité:**

Ce chapitre est consacré à une revue des Recherches et quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés. Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont reflétées dans ce chapitre. Ils comprennent l'homogénéisation des particules FGM, les problèmes de transfert de chaleur, analyse des contraintes, de la stabilité et l'analyse dynamique des structures en FGM.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressants dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte. Un certain nombre de revues traitant les divers aspects des FGM ont été publiés ces dernières années ([60],[30],[61],[62]). Les colloques internationaux sur les FGM ont également mis en lumière les recherches les plus récentes sur ces matériaux, leur fabrication, la compréhension de leur comportement mécanique, leurs propriétés thermiques, et leurs applications [63].

Actuellement, les FGM sont généralement associées à des particules composites où la fraction volumique des particules varie dans une ou plusieurs directions de l'espace. L'un des avantages de la variation continue de la fraction volumique des phases constitutives est l'élimination de la discontinuité des contraintes qui est souvent rencontrées dans les composites stratifiés et sandwichs, et en conséquence, éviter les problèmes liés aux délaminages et à la rupture. Les FGM peuvent être développés en utilisant des couches renforcées de fibres avec une fraction volumique de fibres qui varie à travers l'épaisseur de la structure, on obtient une optimisation des propriétés de l'ensemble ou une optimisation de la réponse de la structure vis-à-vis des types des chargements appliqués ([64], [65]). Si les particules de matériaux composites peuvent être localement isotropes, ils sont hétérogènes à cause de la variation spatiale des fractions de volume des phases constitutives. Un exemple de ce matériau est illustré dans la figure II.1 [49] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope.



**Figure II.1 :** Variation de la fraction volumique des matériaux constitutifs dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés [18].

Un matériau FGM peut avoir des architectures différentes qui se traduisent par un comportement orthotrope. Un FGM peut comprendre plus de deux phases constitutives. Nemat-Alla a analysé un matériau FGM constitué de deux phases différentes (céramique et métallique) dont la fraction volumique varie dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance [66]. Il est à noter que la distribution de la matière dans des structures à gradient de propriétés peut être conçue pour diverses caractéristiques spatiales. Un matériau FGM représente un composite à particule avec une distribution prescrite des fractions volumiques des phases constitutives.

Plusieurs chercheurs utilisent une variation par couches de la fraction volumique des particules de la céramique, c.-à-dire., des couches (céramique/métal) quasi-homogène. D'autre part, plusieurs chercheurs supposent que la fraction volumique de céramique peut être représentée par une fonction de lois de puissance suivant l'épaisseur:

$$g(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la structure, et  $p$  est un exposant de la fraction volumique. En conséquence, la distribution du module d'élasticité pour un FGM isotrope et son coefficient de Poisson peut être définie en termes de constantes de matériau des phases constitutives basées sur une approche d'homogénéisation choisie.

Le présent chapitre se concentre sur plusieurs aspects qui sont importants pour le développement et la conception des structures en matériaux à gradient de propriétés. Il comprend les approches d'homogénéisation des matériaux FGM, les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements, statiques, dynamiques, y compris les chargements thermiques.

## **II.2. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés**

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [67] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et les modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références [68]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et al [69] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [70] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes.

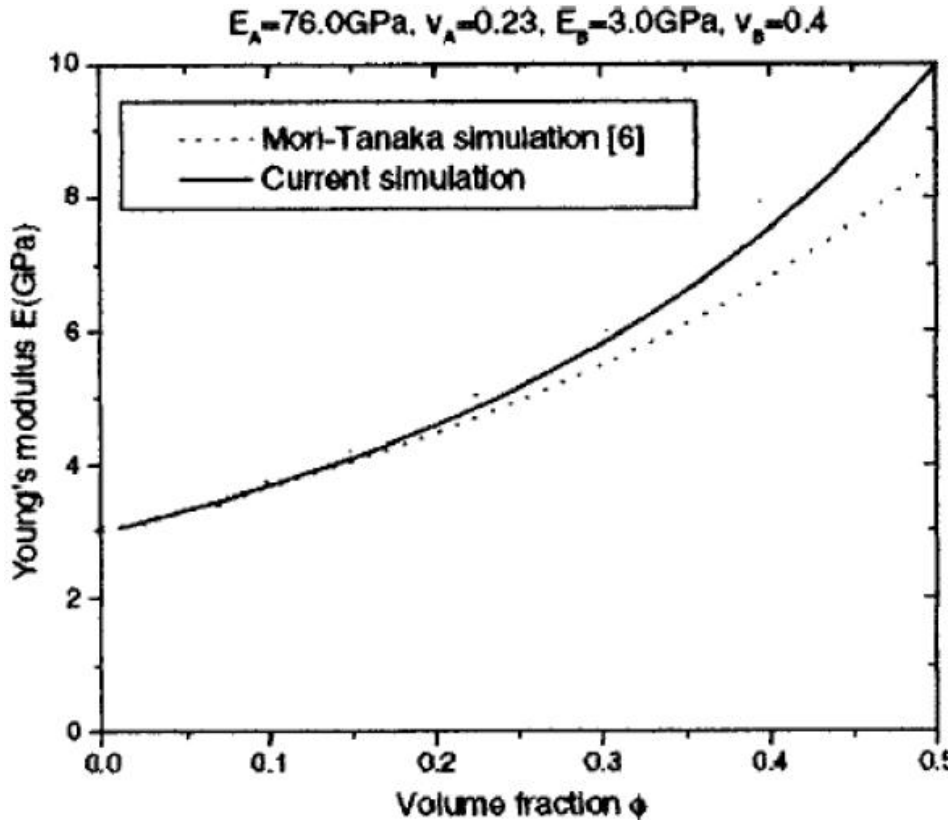
Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié [18]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans figure II.2, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [18] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le

modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.



**Figure II.2 :** Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al [18] et le modèle de Mori-Tanaka.

### II.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin [71] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces

sont soudainement refroidis à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa [72] où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al [73] en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrits et un cylindre avec une température constante appliquée sur sa surface.

#### **II.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement**

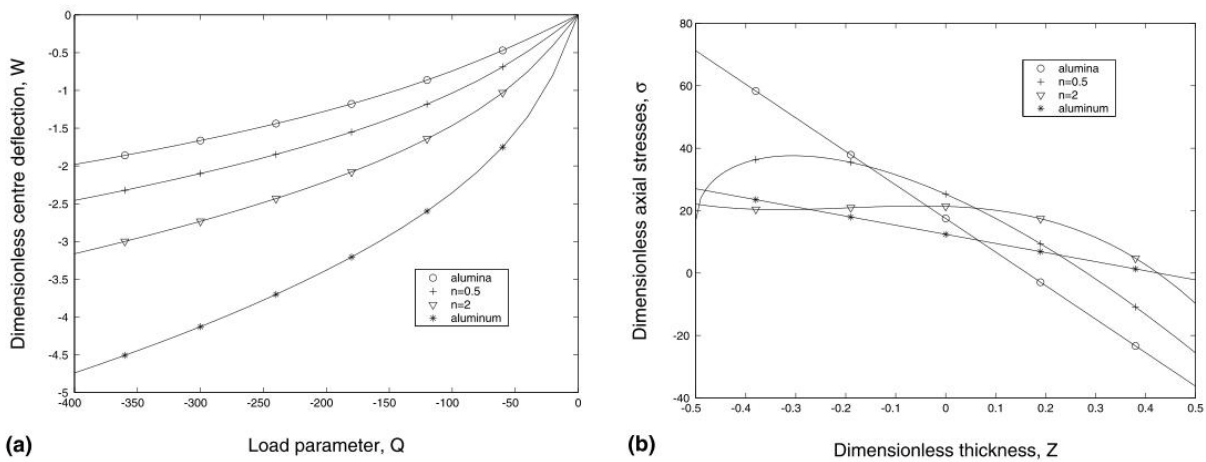
Sankar et Tzeng [74] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar [75] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la poutre élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produit sur la surface de chargement est plus élevée dans une poutre en FGM par rapport une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée pour la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [76]. Le problème thermoélastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen [77] en utilisant un maillage locales par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [5] en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. Reddy et Cheng [78] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [9] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement. La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan [79] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang [80,81] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Zenkour [82,83] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwichs en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoïdale » de la théorie de déformation de cisaillement. Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid [84].



**Figure II.3 :** Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse [84].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la Figure II.3. On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ( $n = 2$ ) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes.

Tarn [85] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant le cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami [86-87]. Na et Kim [88] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. [89] qui ont considéré que les propriétés des matériaux



des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al [90]. Un exemple de cette analyse est illustré sur la Figure II.4, où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga [91] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. [92] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda [24] ont étudié le flambement d'une plaque FGM (ZrO2/ Ti-6Al-4V) sous un chargement thermique.

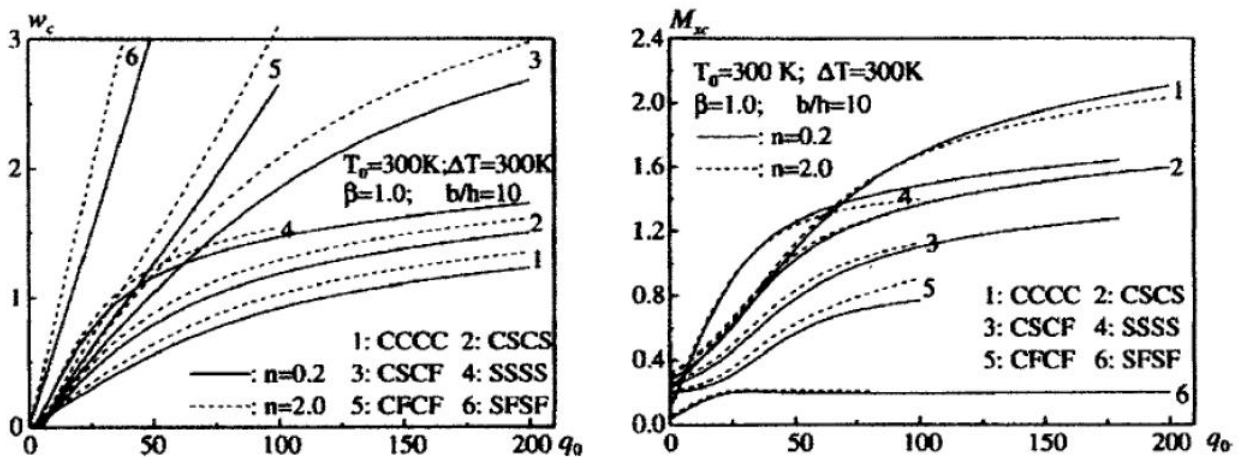


Figure II. 4: Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [90].

Zenkour et Sobhy [93] ont utilisée la version sinusoidale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude récente publiée par Park et Kim [94] contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la figure II.5.

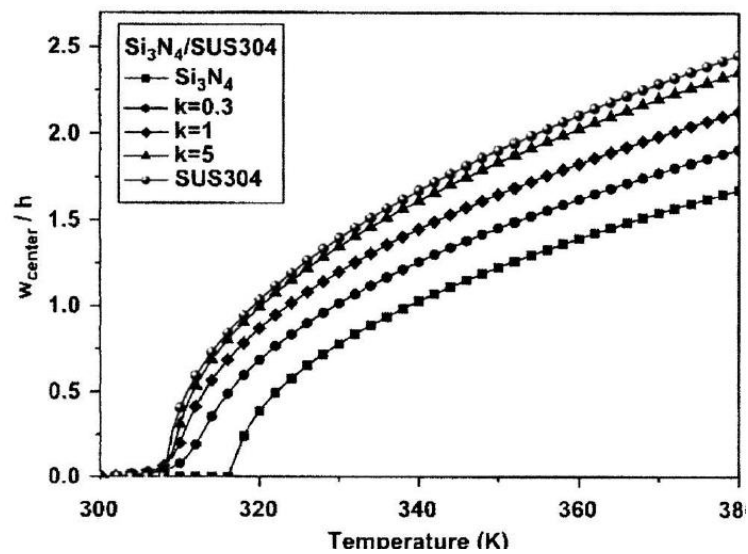


Figure II.5 : Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ( $Si_3N_4/SUS304$ ) [94].

# CHAPITRE III

---

## LES THEORIES DES STRUCTURES FGM

**III.1. Généralité:**

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [95-96-97-98] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [99], [100], [101], [102]. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

**III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles****III.2.1.Approche monocouche équivalente**

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

### III.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [103]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [104] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation (Figure. III.1).

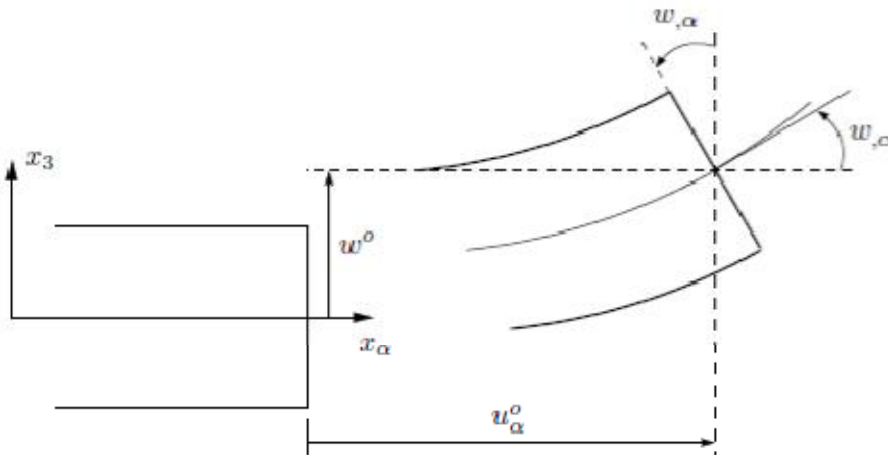


Figure. III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.1})$$

Avec,

$u_\alpha^0$  : Le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$ ,

$w$  : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

**III.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)**

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

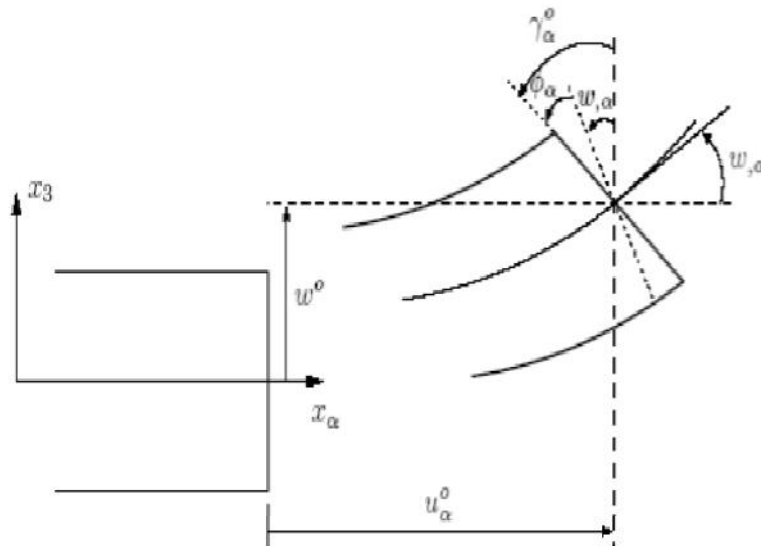
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.III.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (III.2)$$

Avec,

$\phi_\alpha$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$ ,

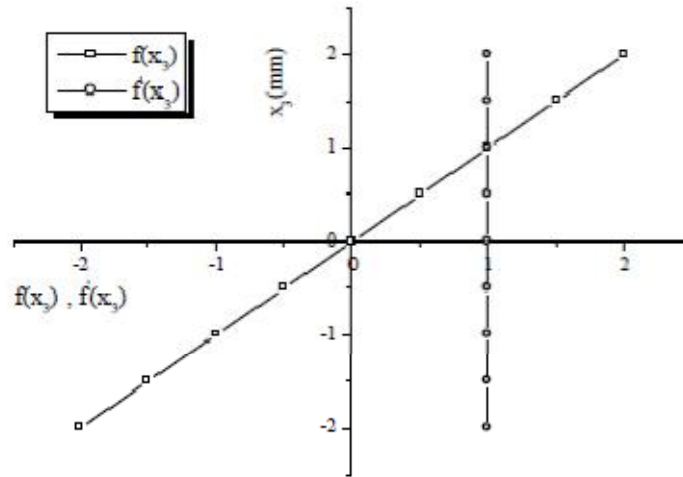
$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.



**Figure. III.2 :** Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [105]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.



**Figure. III.3:** Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### III.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4) [105-106-107-108]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3<sup>ème</sup> ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de  $\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2, 3, 4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$ ,  $\phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

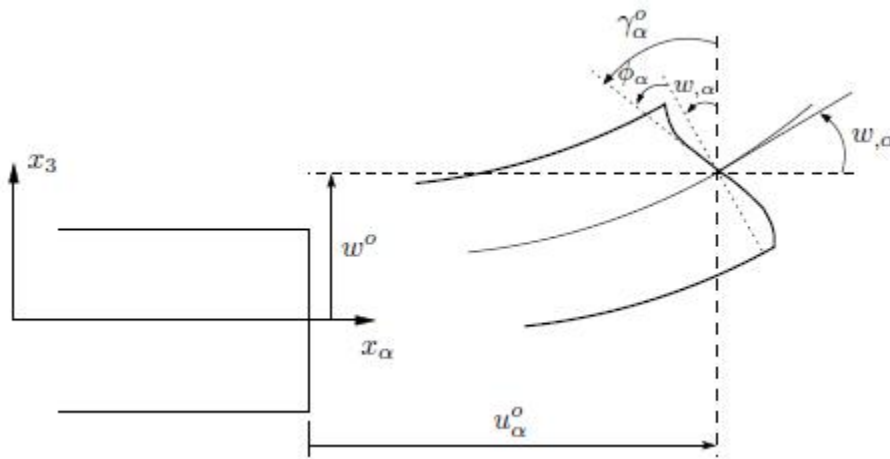


Figure .III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- L'approche d'Ambartsumyan [109] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III.5})$$

- L'approche de Reissner [110]:



$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

➤ L'approche de Reddy [111] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

Dans le modèle de Reddy [111], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

➤ L'approche de Touratier [107] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [112].

Récemment, Afaq et al. [113] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{III.10}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

➤ L'approche de Aydogdu [114] avec ;

$$f(z) = z\alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \tag{III.11}$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

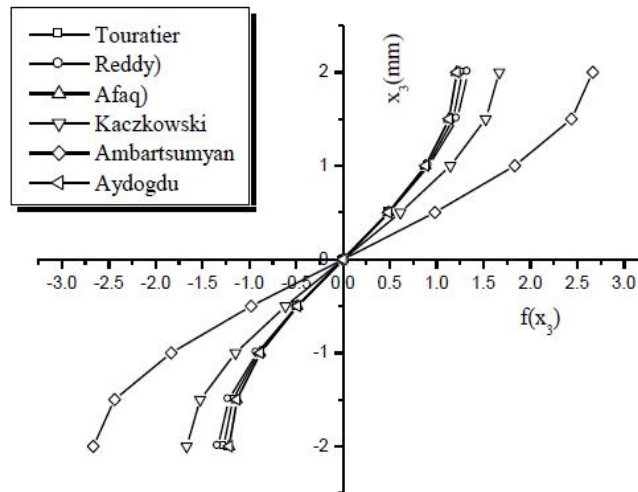


Figure. III.5: Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur

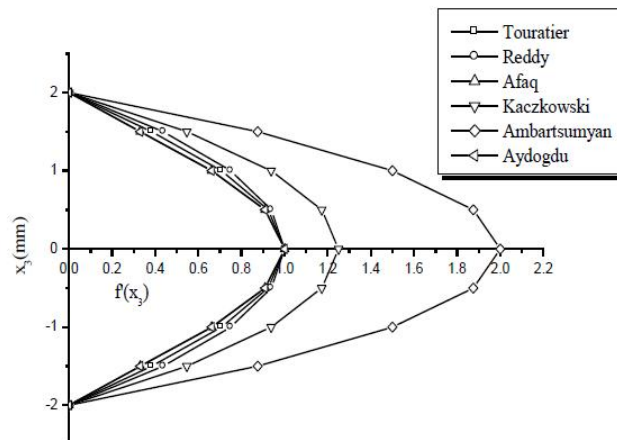


Figure. III.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures. III.5 et III.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

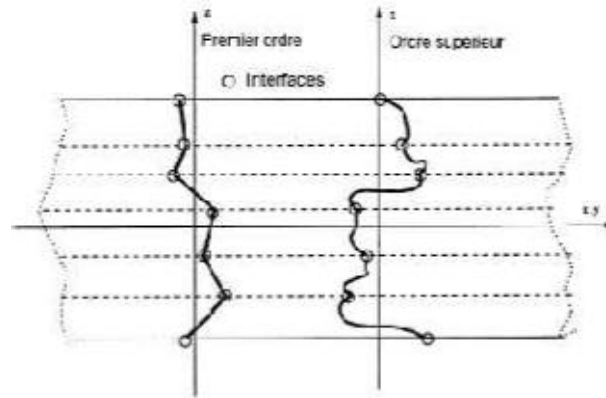
Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche parait très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

### **III.2.2. Approche par couche**

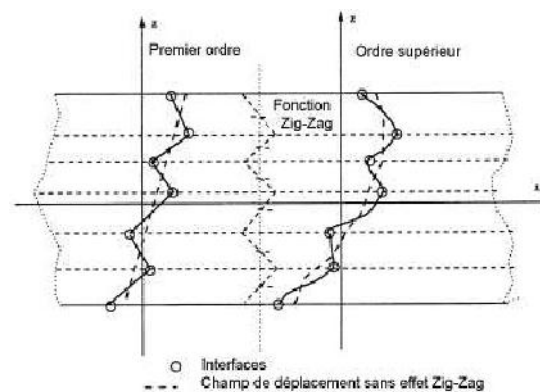
Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure. I.20.a et les Equations (I.3) et (I.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [115-98-113-112 -116]. Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes :

- les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. III.7 et III.8).



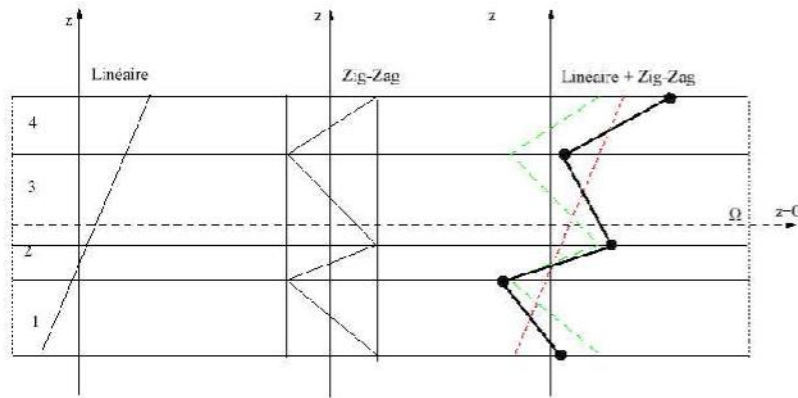
**Figure. III.7 :** Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [108]



**Figure. III.8 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [108]

### III.2.2.1. Les modèles zig-zag

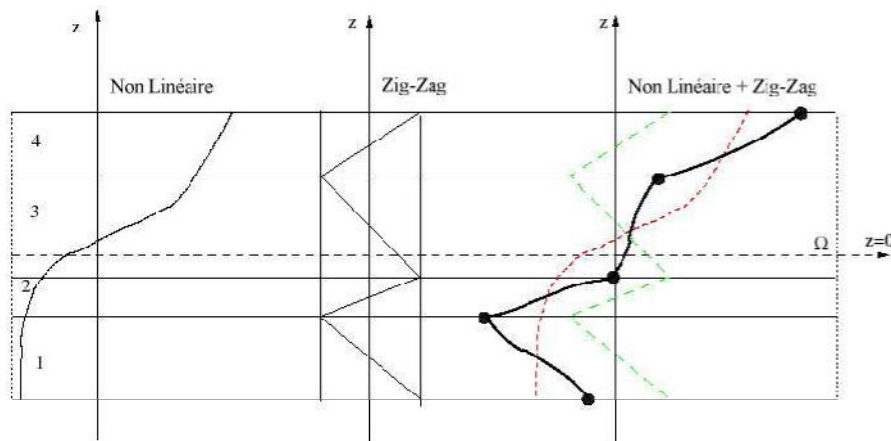
Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [116]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure. III.9 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [108].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de Di Sciuva [117], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [108]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure. III.10 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [108].

Dans les travaux de Karama et Ossadzow [118-119], la fonction sinus de Touratier [107] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [113] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'éclatement diminue [120]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type  $C1$  demandée qui complique leur implémentation numérique.

### III.2.2.2. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.7). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de Srinivas, Reddy et Tahani [102-111-121], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de Ren, Kassapoglou et Yin [122-123-124] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi Ren [122] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans Kassapoglou [123], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans Yin [124], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiales dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local

dans Pagano [125]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [108].

# CHAPITRE IV

---

**FORMULATION THEORIQUE  
DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE  
DES PLAQUES SANDWICHES**



## IV.1. Formulation théorique

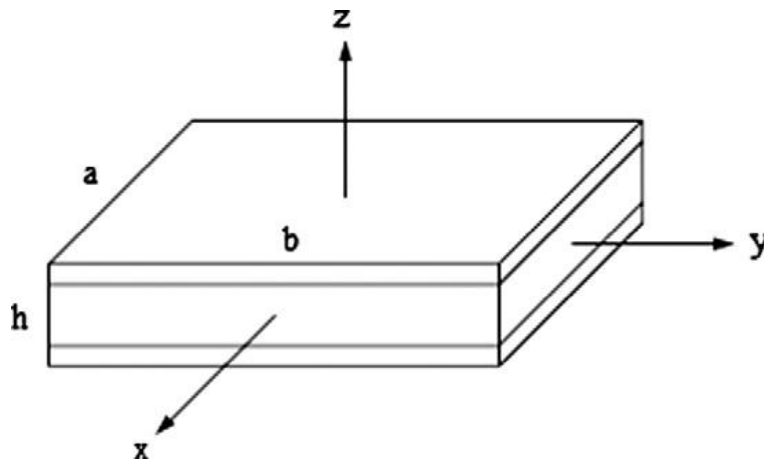
### IV.1.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwich en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  comme le montre la figure IV.1

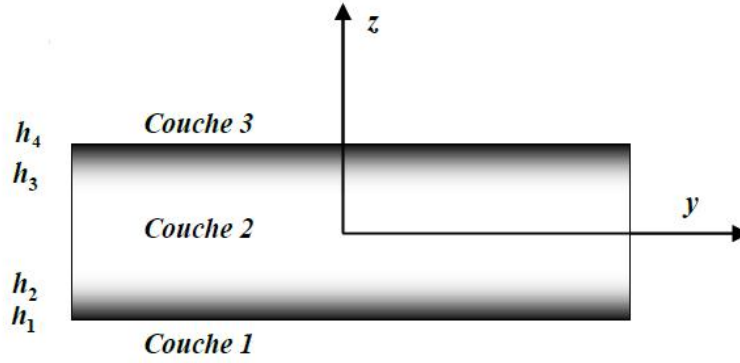
Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques: "couche 1", "couche 2" et "couche 3" du bas vers le haut de la plaque (Figure IV.2). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par:  $h_1 = -h/2$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4 = h/2$ , respectivement. Le volume et la surface supérieure qu'est soumise à une charge transversale  $q(x, y)$ , sont notés par  $V$  et  $\Omega$ , respectivement. Pour des raisons simplificatrices, le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-0-1", "2-1-2" et ainsi de suite.

On suppose que la fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur :



**Figure. IV.1 :** Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec une épaisseur uniforme suivant des coordonnées cartésiennes.



**Figure. IV.2 :** La variation du matériau à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich en FGM.

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1b})$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.1c})$$

Où  $V^{(n)}$ , ( $n=1,2,3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;  $k$  est l'indice de la fraction volumique, qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , peuvent être exprimées par la loi de mélange [126] :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.2})$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété de matérielle effective de la couche  $n$ .  $P_m$  et  $P_c$  correspondent à la propriété des faces inférieure et supérieure respectivement de la couche 1 ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ), et vice versa pour la couche 3 ( $h_3 \leq z \leq h_4$ ), selon la fraction de volume  $V^{(n)}$  ( $n=1,2,3$ ). On Note que  $P_m$  et  $P_c$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes au métal et à la céramique de la plaque sandwich FGM. Pour plus de simplicité, dans cette étude le coefficient de poisson de la plaque est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young [59]

#### IV.1.2. La théorie des plaques d'ordre élevé

Le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque et de coordonnées  $(x, y, z)$  peut être écrit comme suit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \theta_x \quad (\text{IV.3a})$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \theta_y \quad (\text{IV.3b})$$

$$w = w_0(x, y) \quad (\text{IV.3c})$$

Où  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont les déplacements suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement,  $u_0$ ,  $v_0$ , et  $w_0$  sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations dues à la flexion suivant  $X$  et  $Y$  respectivement.  $\Psi(z)$  représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations de cisaillement transversales et les contraintes à travers l'épaisseur. Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques minces (CPT) est obtenu facilement en posant  $\Psi(z) = 0$ . Le déplacement de la théorie de plaque de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDPT) est obtenu en définissant  $\Psi(z) = z$ . En outre, le déplacement de la théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) de Reddy [112] est donné comme suit :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{IV.4a})$$

La théorie des plaques de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDPT) de Touratier [107] et de Zenkour et Alghamdi [127] est donnée comme suit :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{IV.4b})$$

En outre, la théorie des plaques de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama et al. [61] est donnée comme suit :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{IV.4c})$$

### IV.1.3. La théorie des plaques raffinée pour les FGM

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie raffinée (RPT) actuelle est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement [112, 107, 127, 61], le nombre d'inconnus est cinq. La théorie présentée est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement, et mène à

une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions des surfaces libres.

#### IV.1.3.1. Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT)

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes :  $w_b$  due à la flexion et  $w_s$  due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées  $x$  et  $y$  seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV.5)$$

- La contrainte normale transverse  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Le déplacement  $u$  suivant la direction  $x$  et  $v$  suivant la direction  $y$  sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (IV.6)$$

Les composants de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie des plaques classiques. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  et  $v_b$  peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (IV.7)$$

Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent lieu, en relation avec  $w_s$ , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  et des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  seront nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de  $u_s$  et  $v_s$  peut être donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV.8)$$

### IV.1.3.2. Cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations (IV.5) – (IV.8):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.9a})$$

Où :

$$f(z) = z - \Psi(z) \text{ et } \Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{IV.9b})$$

Les déformations associées aux déplacements de l'équation (IV.9) sont donnés comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{IV.12})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (IV.1), les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.13a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.13b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.13c})$$

#### IV.1.4. Les équations d'équilibre

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Dans ce présent travail, ce principe est donné comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque.

En substituant les équations (IV.10) et (IV.12) dans l'équation (IV.14) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.14) peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x^s & N_y^s & N_{xy}^s \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV.16a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (\text{IV.16a})$$

Et  $h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les coordonnées inférieure et supérieure de la  $n^{\text{ième}}$  couche.

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues à partir de l'équation (IV.15) en intégrant par parties et en fixant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  nulles séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie:

$$\begin{aligned}
 \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

En substituant l'équation (IV.12) dans l'équation (IV.16), les résultantes des efforts de la plaque sandwich composée de trois couches seront:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \tag{IV.18}$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{IV.19a}$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \tag{IV.19b}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{IV.19c}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV.19d}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \tag{IV.19e}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \tag{IV.19f}$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, \dots$  sont les éléments de la matrice de rigidités définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz, \tag{IV.20a}$$

$$\text{et} \quad (A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV.20b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{IV.20c})$$

Les efforts et les moments résultants :  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$ , et  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  due à la charge thermique sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV.21})$$

Considérons la distribution de la température  $T(x, y, z)$  dans le volume de la plaque sous la forme :

$$T(x, y, z) = T_z(z) T_\Omega(x, y) \quad (\text{IV.22})$$

Où  $T_z(z)$  représente le profil de la température à travers l'épaisseur de la plaque suivant la coordonnée  $z$ , tandis que  $T_\Omega(x, y)$  est la distribution de la température dans le domaine surfacique  $\Omega$ .

Dans le cas général, la forme de  $T_z(z)$  est le résultat de la solution d'un problème de transfert de chaleur. La solution de ce problème est un polynôme non linéaire de  $z$ , et souvent de forme transcendante [128]. Dans le cas d'une structure multicouche épaisse,  $T_z(z)$  nécessiterait une discrétisation par couches [129], c'est-à-dire que la théorie des plaques pour des champs de déplacement d'ordre élevé (ou layerwise) est nécessaire pour avoir le même profil de la température provenant de la solution du problème de transfert de la chaleur. Dans le présent travail, le domaine de distribution de la température  $T(x, y, z)$  est donné par Zenkour [127].

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\Psi(z)}{h} T_3(x, y), \quad (\text{IV.23})$$

Où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des charges thermiques. Dans le cas de la présente théorie raffinée des

plaques à quatre variables, nous considérons  $\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

En substituant l'équation (IV.18) dans l'équation (IV.17), on obtient :



$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = p_1, \quad (\text{IV.24a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = p_2, \quad (\text{IV.24b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = p_3 \quad (\text{IV.24c})$$

$$B_{11}^s d_{1111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = p_4 \quad (\text{IV.24e})$$

Où  $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}^t$  est le vecteur des forces généralisé,  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$ ,  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs de dérivations données comme suit :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV.25})$$

Les composantes du vecteur force généralisé  $\{p\}$  sont données comme suit :

$$p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, \quad p_3 = q - \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2}, \quad p_4 = q - \frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2} \quad (\text{IV.26})$$

## IV.2. La Solution exacte pour une plaque sandwich FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type de support utilisé. Dans ce travail, la solution exacte de l'équation (IV.24a-e) pour une plaque FGM simplement appuyée est considérée. Pour cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les surfaces libres :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à } x = -a/2, a/2 \quad (\text{IV.27a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{à } y = -b/2, b/2 \quad (\text{IV.27b})$$

Pour résoudre ce problème, Navier suppose que la charge mécanique transversale et le champ de température :  $q, T_1, T_2$ , et  $T_3$  sont sous la forme d'une série de Fourier donnée comme suit:

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.28})$$

Où :  $\lambda = \pi / a$ ,  $\mu = \pi / b$ ,  $q_0$ ,  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  et  $\bar{T}_3$  sont des constants.

En suivant la procédure de la solution de Navier, on suppose la forme de la solution suivante pour  $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$  qui satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.29})$$

Où  $U, V, W_b$ , et  $W_s$  sont des paramètres arbitraires à déterminer suivant que la solution de l'équation (IV.29) vérifie l'équation (IV.24). On obtient alors l'équation suivante :

$$[C]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (\text{IV.30})$$

Où :  $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$  et  $[C]$  est la matrice symétrique donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.31})$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 - A_{55}^s\lambda^2 - A_{44}^s\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Les composantes du vecteur généralisé du vecteur force  $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^t$  est données comme suit:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \lambda (A^T \bar{T}_1 + B^T \bar{T}_2 + {}^a B^T \bar{T}_3), \\
P_2 &= \mu (A^T \bar{T}_1 + B^T \bar{T}_2 + {}^a B^T \bar{T}_3), \\
P_3 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2) (B^T \bar{T}_1 + D^T \bar{T}_2 + {}^a D^T \bar{T}_3), \\
P_4 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2) ({}^s B^T \bar{T}_1 + {}^s D^T \bar{T}_2 + {}^s F^T \bar{T}_3)
\end{aligned} \tag{IV.33}$$

Où :

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz, \tag{IV.34a}$$

$$\{{}^a B^T, {}^a D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \bar{\Psi}(z) \{1, \bar{z}\} dz, \tag{IV.34b}$$

$$\{{}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)\} dz. \tag{IV.34c}$$

Avec :

$$\bar{z} = z/h, \bar{f}(z) = f(z)/h \text{ et } \bar{\Psi}(z) = \Psi(z)/h.$$

Dans la deuxième partie de cette étude, nous essayons d'étudier la plaque FGM, nous prenons en compte l'effet de la déformation de cisaillement ( $\varepsilon_z \neq 0$ ).

Dans ce cas le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque et de coordonnées (x, y, z) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z) \varphi(x, y, t)
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

La matrice symétrique [C] donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \tag{IV.36}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2) \\
a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\
a_{13} &= \lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\
a_{14} &= \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\
a_{15} &= L\lambda
\end{aligned} \tag{IV.37}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
a_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\
a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
a_{25} &= L\mu \\
a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\
a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\
a_{35} &= -L^a(\lambda^2 + \mu^2) \\
a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \\
a_{45} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2)) \\
a_{55} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R^a)
\end{aligned}$$

Les composantes du vecteur généralisé du vecteur force  $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}^t$  est données comme suit:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \lambda(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
P_2 &= \mu(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
P_3 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D^T t_3), \\
P_4 &= -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)({}^s B^T t_1 + {}^s D^T t_2 + {}^s F^T t_3), \\
P_5 &= -h(L^T t_1 + {}^a L^T t_2 + R^T t_3).
\end{aligned} \tag{IV.38}$$

Où :

$$(A^T, B^T, D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \left(1, \bar{z}, \bar{z}^{-2}\right) dz, \tag{IV.39a}$$

$$({}^a B^T, {}^a D^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{\Psi}(z) \left(1, \bar{z}\right) dz, \tag{IV.39b}$$

$$({}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{f}(z) \left(1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)\right) dz, \tag{IV.39c}$$

$$({}^L T, {}^L T_a, R^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2} (1 + 2\nu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{g}'(z) \left(1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)\right) dz, \tag{IV.39d}$$

Avec  $\bar{z} = z/h$ ,  $\bar{f}(z) = f(z)/h$  and  $\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$ .

# CHAPITRE V

---

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

### V.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré pour représenter les résultats numériques en deux parties. Dans une première partie nous allons présenter les résultats lorsqu'on ne prend pas en compte l'effet de la déformation normale ( $\varepsilon_z = 0$ ). L'influence de la prise en compte de la déformation normale peut être vu clairement dans la deuxième partie.

### V.2. Résultats numériques

#### V.2.1. Partie A : plaque sandwich sans effet de déformation normale :

La nouvelle théorie raffinée à quatre variables des plaques sandwichs en FGM est considérée, et des comparaisons avec d'autres théories de déformation de cisaillement connues dans la littérature sont établies. Des plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont étudiées. On note que l'âme de la plaque est entièrement en céramique tandis que les peaux supérieure et inférieure de la plaque sont riches en métal.

Plusieurs types de plaques sandwich sont utilisés :

- La plaque sandwich FGM: (1-0-1) est une plaque symétrique constituée de deux couches en FGM seulement et d'épaisseur égale (sans l'existence de la couche de l'âme). Ainsi, on aura  $h_2 = h_3 = 0$ .
- La plaque sandwich FGM (1-1-1): c'est une plaque symétrique constituée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons,  $h_2 = -h/6$ ,  $h_3 = h/6$ .
- La plaque sandwich en FGM (1-2-1): cette plaque est symétrique et nous avons  $h_2 = -h/4$ ,  $h_3 = h/4$ .
- La plaque sandwich en FGM (2-1-2): est une plaque symétrique et l'épaisseur de l'âme est la moitié de l'épaisseur des peaux. Dans ce cas, nous avons  $h_2 = -h/10$ ,  $h_3 = h/10$ .
- La plaque sandwich en FGM (2-2-1): c'est une plaque non symétrique et l'épaisseur de l'âme est identique à une des faces tandis qu'elle est double de l'autre. Ainsi,  $h_2 = -h/10$ ,  $h_3 = 3h/10$ .

#### V.2. 1.1. Validation des résultats

Pour vérifier l'exactitude de cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de la théorie actuelle et ceux obtenus par Zenkour et Alghamdi [127] comme indiqué dans les tableaux V.1-3. On peut voir que les résultats actuels sont en bon accord avec les résultats publiés pour des plaques FGM simplement appuyées.

**Tableau V.1 :** Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes plaques sandwichs carrées en FGM

| $k$ | Théorie     | $\bar{w}$ |          |          |          |
|-----|-------------|-----------|----------|----------|----------|
|     |             | 1-0-1     | 3-1-3    | 2-1-2    | 1-1-1    |
| 0   | Présente    | 0.808168  | 0.808168 | 0.808168 | 0.808168 |
|     | SSDPT [127] | 0.796783  | 0.796783 | 0.796783 | 0.796783 |
| 1   | Présente    | 1.077690  | 1.059613 | 1.050672 | 1.025367 |
|     | SSDPT [127] | 1.062840  | 1.045026 | 1.036213 | 1.011263 |
| 2   | Présente    | 1.137297  | 1.120582 | 1.111353 | 1.082911 |
|     | SSDPT [127] | 1.121608  | 1.105175 | 1.096094 | 1.068091 |
| 3   | Présente    | 1.157693  | 1.143856 | 1.135420 | 1.107475 |
|     | SSDPT [127] | 1.141655  | 1.128080 | 1.119793 | 1.092312 |
| 4   | Présente    | 1.157693  | 1.143856 | 1.135420 | 1.107475 |
|     | SSDPT [127] | 1.141655  | 1.128080 | 1.119793 | 1.092312 |
| 5   | Présente    | 1.170720  | 1.160948 | 1.153952 | 1.128152 |
|     | SSDPT [127] | 1.154412  | 1.144851 | 1.137993 | 1.112660 |

**Tableau V.2 :** Comparaison des contraintes de flexion  $\bar{\sigma}_x$  non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM

| $k$ | Théorie     | $\bar{\sigma}_x$ |           |           |           |
|-----|-------------|------------------|-----------|-----------|-----------|
|     |             | 1-0-1            | 3-1-3     | 2-1-2     | 1-1-1     |
| 0   | Présente    | -2.461177        | -2.461177 | -2.461177 | -2.461177 |
|     | SSDPT [127] | -2.388909        | -2.388909 | -2.388909 | -2.388909 |
| 1   | Présente    | -2.473903        | -2.562491 | -2.606343 | -2.730494 |
|     | SSDPT [127] | -2.406797        | -2.494126 | -2.537365 | -2.659816 |
| 2   | Présente    | -2.181780        | -2.263627 | -2.308903 | -2.448528 |
|     | SSDPT [127] | -2.118721        | -2.199231 | -2.243800 | -2.381343 |
| 3   | Présente    | -2.081815        | -2.149449 | -2.190823 | -2.328042 |
|     | SSDPT [127] | -2.020416        | -2.086818 | -2.127487 | -2.262512 |
| 4   | Présente    | -2.039172        | -2.095247 | -2.132710 | -2.264592 |
|     | SSDPT [127] | -1.978593        | -2.033567 | -2.070352 | -2.200020 |
| 5   | Présente    | -2.018086        | -2.065589 | -2.099863 | -2.226550 |
|     | SSDPT [127] | -1.957959        | -2.004482 | -2.038109 | -2.162596 |

**Tableau V.3 :** Comparaison des contraintes de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwiches en FGM

| $k$ | Théorie     | $\bar{\tau}_{xz}$ |          |          |          |
|-----|-------------|-------------------|----------|----------|----------|
|     |             | 1-0-1             | 3-1-3    | 2-1-2    | 1-1-1    |
| 0   | Présente    | 0.174481          | 0.174481 | 0.174481 | 0.174481 |
|     | SSDPT [127] | 0.171603          | 0.171603 | 0.171603 | 0.171603 |
| 1   | Present     | 0.272347          | 0.272511 | 0.274133 | 0.280495 |
|     | SSDPT [127] | 0.277018          | 0.278534 | 0.280890 | 0.289195 |
| 2   | Present     | 0.270952          | 0.268314 | 0.270427 | 0.281157 |
|     | SSDPT [127] | 0.272583          | 0.271861 | 0.275130 | 0.289157 |
| 3   | Present     | 0.270110          | 0.262832 | 0.264327 | 0.276238 |
|     | SSDPT [127] | 0.269608          | 0.264263 | 0.267073 | 0.282953 |
| 4   | Present     | 0.271755          | 0.259812 | 0.260366 | 0.272098 |
|     | SSDPT [127] | 0.270016          | 0.259822 | 0.261729 | 0.277764 |
| 5   | Present     | 0.274512          | 0.258437 | 0.258029 | 0.269077 |
|     | SSDPT [127] | 0.272070          | 0.257496 | 0.258433 | 0.273950 |

Dans ce qui suit, une analyse thermomécanique de la flexion est présentée pour des plaques constituées d'une combinaison de métal et de céramique. Les propriétés des matériaux choisis sont:

- Métal (Aluminium, Al) :  $E_M = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\alpha_m = 23 \times (10^{-6} / ^\circ\text{C})$ .
- Céramique (Alumina,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ):  $E_C = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\alpha_c = 7.4 \times (10^{-6} / ^\circ\text{C})$ .

Les paramètres non dimensionnelles suivants sont utilisés :

- La flèche centrale :  $\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + (10^3 \alpha_0 \bar{T}_2 a^2) / h} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$
- La contrainte axiale :  $\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / (h^2) + (10 E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a^2) / h^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$
- La contrainte de cisaillement :  $\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 a / (h) + (E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a) / 10 h} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$
- La coordonnée d'épaisseur :  $\bar{z} = z / h$

Où les valeurs de références des propriétés sont prises comme  $E_0 = 1 \text{ GPa}$  et  $\alpha_0 = 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .



Nous considérons aussi le facteur de correction de cisaillement  $K = 5/6$  dans la théorie du FSDPT. Des résultats numériques sont présentés dans les tableaux V.4–7 à l'aide des différentes théories des plaques. D'autres résultats sont représentés dans les figures V.1–4 en utilisant la présente théorie raffinée à quatre variables. Il est supposé, sauf dans le cas d'une indication contraire, que :  $a/h = 10$ ,  $a/b = 1$ ,  $\bar{T}_1 = 0$  et  $q_0 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = 100$ .

Le tableau V.4 présente les valeurs de la flèche centrale  $\bar{w}$  pour les plaques sandwiches FGM soumises à des charges mécaniques et thermiques. Les flèches considérées sont pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , et 5 et pour différents types de plaques sandwiches FGM. Il est montré à travers ces résultats que l'effet de la déformation de cisaillement mène à une augmentation de la flèche. Pour une plaque FGM, les flèches croissent au fur et à mesure que l'épaisseur de l'âme diminue et l'indice matériel  $k$  augmente. On constate aussi que les flèches maximales se produisent pour une plaque FGM sans l'âme (la plaque (1-0-1)) et cela quelle que soit la valeur de  $k$ . De plus, à travers les résultats présentés dans le Tableau V.4, on constate que la présente théorie des plaques avec quatre inconnues seulement donne des résultats identiques à ceux déterminés par TSDPT avec cinq inconnues.

**Tableau V.4 :** Valeurs des flèches Dimensionnelle pour différentes plaques carrées sandwiches en FGM

| $k$ | Théorie  | $w$          |              |              |              |              |
|-----|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     |          | 1-0-1        | 1-1-1        | 1-2-1        | 2-1-2        | 2-2-1        |
| 0   | Présente | 0.8043347124 | 0.8043347124 | 0.8043347124 | 0.8043347124 | 0.8043347124 |
|     | TSDPT    | 0.8043347125 | 0.8043347125 | 0.8043347125 | 0.8043347125 | 0.8043347125 |
|     | SSDPT    | 0.7927856965 | 0.7927856965 | 0.7927856965 | 0.7927856965 | 0.7927856965 |
|     | ESDPT    | 0.7808814442 | 0.7808814442 | 0.7808814442 | 0.7808814442 | 0.7808814442 |
|     | FSDPT    | 0.8931827588 | 0.8931827588 | 0.8931827588 | 0.8931827588 | 0.8931827588 |
|     | CPT      | 0.4497547192 | 0.4497547192 | 0.4497547192 | 0.4497547192 | 0.4497547192 |
| 1   | Présente | 1.964884913  | 1.666033864  | 1.457626671  | 1.807147618  | 1.549318590  |
|     | TSDPT    | 1.964884912  | 1.666033865  | 1.457626670  | 1.807147618  | 1.549318587  |
|     | SSDPT    | 1.938523379  | 1.643211493  | 1.437305750  | 1.782669529  | 1.527944802  |
|     | ESDPT    | 1.911191525  | 1.619566444  | 1.416280366  | 1.757295537  | 1.505819455  |
|     | FSDPT    | 2.157784230  | 1.833279079  | 1.607649328  | 1.986168609  | 1.706905038  |
|     | CPT      | 1.087209513  | 0.9232727827 | 0.8095037432 | 1.000444701  | 0.8596017205 |
| 2   | Présente | 2.266783348  | 1.880842579  | 1.590758654  | 2.075458635  | 1.714593047  |
|     | TSDPT    | 2.266783348  | 1.880842576  | 1.590758655  | 2.075458635  | 1.714593047  |
|     | SSDPT    | 2.237026245  | 1.856094446  | 1.569425584  | 2.048331859  | 1.691755229  |
|     | ESDPT    | 2.206181630  | 1.830398067  | 1.547286958  | 2.020178521  | 1.668064334  |
|     | FSDPT    | 2.486871297  | 2.060758378  | 1.745478552  | 2.273927595  | 1.881218643  |
|     | CPT      | 1.255634173  | 1.039408962  | 0.8799402952 | 1.147414765  | 0.9486969382 |
| 3   | Présente | 2.388647585  | 1.981366920  | 1.647074376  | 2.200330763  | 1.788187618  |
|     | TSDPT    | 2.388647587  | 1.981366918  | 1.647074375  | 2.200330763  | 1.788187622  |
|     | SSDPT    | 2.356872501  | 1.955572862  | 1.625371377  | 2.171611963  | 1.764595592  |
|     | ESDPT    | 2.324003487  | 1.928803122  | 1.602834015  | 2.141845714  | 1.740125397  |
|     | FSDPT    | 2.627770658  | 2.170714737  | 1.804675994  | 2.413509255  | 1.961303036  |
|     | CPT      | 1.328297830  | 1.095919328  | 0.9104812191 | 1.219154085  | 0.9899479173 |
| 4   | Présente | 2.444202556  | 2.038681548  | 1.677862242  | 2.268718042  | 1.829480490  |
|     | TSDPT    | 2.444202560  | 2.038681545  | 1.677862245  | 2.268718042  | 1.829480488  |
|     | SSDPT    | 2.411136606  | 2.012128419  | 1.655920930  | 2.238859465  | 1.805349279  |
|     | ESDPT    | 2.376982815  | 1.984597777  | 1.633138846  | 2.207955303  | 1.780334322  |
|     | FSDPT    | 2.695609991  | 2.235539167  | 1.837999915  | 2.492881088  | 2.007758371  |
|     | CPT      | 1.363415429  | 1.129332998  | 0.9277633300 | 1.260058944  | 1.013959067  |
| 5   | Présente | 2.472149769  | 2.075194076  | 1.697204926  | 2.310173272  | 1.855743366  |
|     | TSDPT    | 2.472149768  | 2.075194077  | 1.697204925  | 2.310173272  | 1.855743366  |
|     | SSDPT    | 2.438253331  | 2.048056160  | 1.675078186  | 2.279476882  | 1.831200215  |
|     | ESDPT    | 2.403272601  | 2.019944656  | 1.652111470  | 2.247739289  | 1.805772671  |
|     | FSDPT    | 2.731287538  | 2.277910028  | 1.859516495  | 2.542349163  | 2.038049471  |
|     | CPT      | 1.381918325  | 1.151201802  | 0.9389536918 | 1.285582900  | 1.029638687  |

Dans le tableau V.5 une comparaison de la flèche de différents types de plaques rectangulaires sandwichs FGM avec  $k = 2$  est présentée. Ces flèches diminuent au fur et à mesure que le rapport  $a/b$  augmente et une fois de plus les déformations maximales se produisent pour la plaque rectangulaire FGM (1-0-1).

**Tableau V.5 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la flèche des plaques sandwichs en FGM ( $k = 2$ ).

| rapport de l'épaisseur | Théorie  | $\bar{w}$    |              |              |               |               |
|------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
|                        |          | $a/b = 1$    | $a/b = 2$    | $a/b = 3$    | $a/b = 4$     | $a/b = 5$     |
| 1-0-1                  | Présente | 2.266783348  | 0.7171177119 | 0.2647815671 | 0.1139229492  | 0.05535870870 |
|                        | TSDPT    | 2.266783348  | 0.7171177121 | 0.2647815672 | 0.1139229493  | 0.05535870868 |
|                        | SSDPT    | 2.237026245  | 0.7077629008 | 0.2613348819 | 0.1124413159  | 0.05463905229 |
|                        | ESDPT    | 2.206181630  | 0.6980670080 | 0.2577625827 | 0.1109056930  | 0.05389317394 |
|                        | FSDPT    | 2.486871297  | 0.7863450319 | 0.2902902466 | 0.1248888020  | 0.06068511123 |
|                        | CPT      | 1.255634173  | 0.3993847931 | 0.1477259481 | 0.06360550630 | 0.03091893899 |
| 1-1-1                  | Présente | 1.880842579  | 0.5944829328 | 0.2194413150 | 0.09440482921 | 0.04587177759 |
|                        | TSDPT    | 1.880842576  | 0.5944829330 | 0.2194413148 | 0.09440482931 | 0.04587177757 |
|                        | SSDPT    | 1.856094446  | 0.5866900283 | 0.2165692262 | 0.09317006779 | 0.04527200181 |
|                        | ESDPT    | 1.830398067  | 0.5785996824 | 0.2135875934 | 0.09188822306 | 0.04464935841 |
|                        | FSDPT    | 2.060758378  | 0.6511842981 | 0.2403419636 | 0.1033908767  | 0.05023679014 |
|                        | CPT      | 1.039408962  | 0.3301887674 | 0.1220804522 | 0.05255448041 | 0.02554482624 |
| 1-2-1                  | Présente | 1.590758654  | 0.5025633808 | 0.1854866200 | 0.07979314551 | 0.03877089259 |
|                        | TSDPT    | 1.590758655  | 0.5025633804 | 0.1854866202 | 0.07979314549 | 0.03877089260 |
|                        | SSDPT    | 1.569425584  | 0.4958387883 | 0.1830077795 | 0.07872737599 | 0.03825318715 |
|                        | ESDPT    | 1.547286958  | 0.4888617029 | 0.1804359614 | 0.07762164575 | 0.03771607374 |
|                        | FSDPT    | 1.745478552  | 0.5513927244 | 0.2034902364 | 0.08753434159 | 0.04253137089 |
|                        | CPT      | 0.8799402952 | 0.2793664149 | 0.1032700171 | 0.04445325188 | 0.02160627015 |
| 2-1-2                  | Présente | 2.075458635  | 0.6562448449 | 0.2422664643 | 0.1042289858  | 0.05064649150 |
|                        | TSDPT    | 2.075458635  | 0.6562448446 | 0.2422664645 | 0.1042289858  | 0.05064649146 |
|                        | SSDPT    | 2.048331859  | 0.6477101024 | 0.2391214586 | 0.1028769659  | 0.04998977486 |
|                        | ESDPT    | 2.020178521  | 0.6388533739 | 0.2358578706 | 0.1014739783  | 0.04930830405 |
|                        | FSDPT    | 2.273927595  | 0.7187306908 | 0.2652950638 | 0.1141292856  | 0.05545546214 |
|                        | CPT      | 1.147414765  | 0.3646838011 | 0.1348567360 | 0.05805851121 | 0.02822108605 |
| 2-2-1                  | Présente | 1.714593047  | 0.5418628247 | 0.2000099751 | 0.08604404477 | 0.04180891790 |
|                        | TSDPT    | 1.714593047  | 0.5418628246 | 0.2000099751 | 0.08604404477 | 0.04180891793 |
|                        | SSDPT    | 1.691755229  | 0.5346710119 | 0.1973593898 | 0.08490450683 | 0.04125539525 |
|                        | ESDPT    | 1.668064334  | 0.5272120215 | 0.1946104340 | 0.08372269260 | 0.04068134051 |
|                        | FSDPT    | 1.881218643  | 0.5943961762 | 0.2193756477 | 0.09437035229 | 0.04585350597 |
|                        | CPT      | 0.9486969382 | 0.3013179256 | 0.1113994502 | 0.04795524476 | 0.02330902518 |

Les tableaux V.6 et V.7 présentent, respectivement la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , et 5 et pour différents types de plaques FGM. On peut voir que les deux contraintes  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\tau}_{xz}$  diminuent avec la diminution de l'épaisseur de l'âme. La plus petite contrainte (entre ces deux contraintes) se produit pour la plaque FGM (1-0-1). En général, l'augmentation de l'indice de la fraction volumique  $k$  mène à une réduction de la contrainte axiale et la contrainte de cisaillement.

**Tableau V.6 :** Valeurs des contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x$  pour des plaques sandwichs carrés en FGM

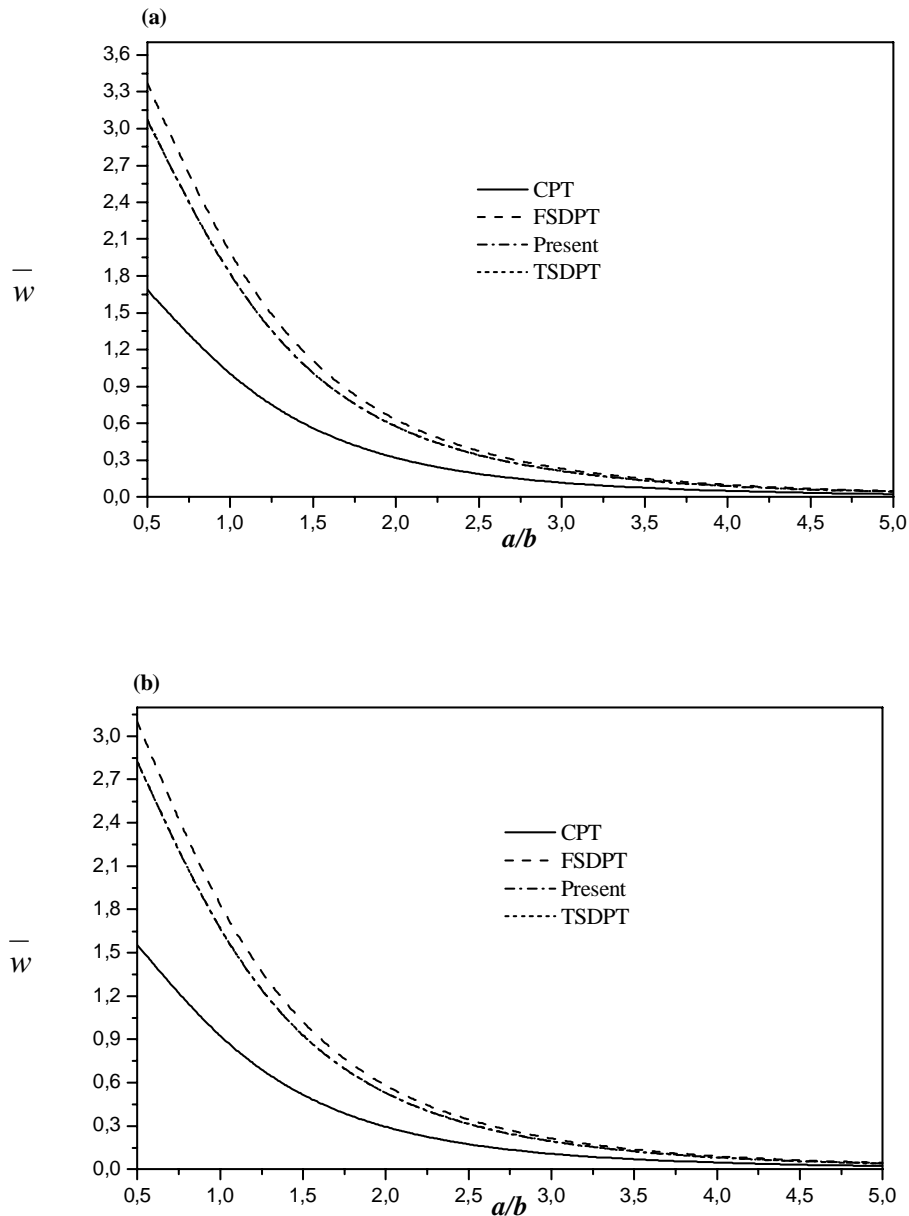
| $k$ | Théorie  | $\bar{\sigma}_x$ |              |              |              |              |
|-----|----------|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     |          | 1-0-1            | 1-1-1        | 1-2-1        | 2-1-2        | 2-2-1        |
| 0   | Présente | -8.88876411      | -8.88876411  | -8.88876411  | -8.88876411  | -8.88876411  |
|     | TSDPT    | -8.88876412      | -8.88876412  | -8.88876412  | -8.88876412  | -8.88876412  |
|     | SSDPT    | -8.64844630      | -8.64844630  | -8.64844630  | -8.64844630  | -8.64844630  |
|     | ESDPT    | -8.41681088      | -8.41681088  | -8.41681088  | -8.41681088  | -8.41681088  |
|     | FSDPT    | -12.60220334     | -12.60220334 | -12.60220334 | -12.60220334 | -12.60220334 |
|     | CPT      | -6.21129426      | -6.21129426  | -6.21129426  | -6.21129426  | -6.21129426  |
| 1   | Présente | -7.733609413     | -9.210188846 | -10.23954644 | -8.512928846 | -10.27535020 |
|     | TSDPT    | -7.733609420     | -9.210188839 | -10.23954645 | -8.512928853 | -10.27535021 |
|     | SSDPT    | -7.549689671     | -9.009041699 | -10.02613795 | -8.319845923 | -10.06114667 |
|     | ESDPT    | -7.370075294     | -8.811464944 | -9.815708692 | -8.130698189 | -9.849887804 |
|     | FSDPT    | -10.26400406     | -11.86478426 | -12.97800357 | -11.11051157 | -13.01832893 |
|     | CPT      | -5.089381559     | -5.898376895 | -6.459804601 | -5.517548741 | -6.479630701 |
| 2   | Présente | -6.242687650     | -8.149746007 | -9.582597797 | -7.188053923 | -9.609801979 |
|     | TSDPT    | -6.242687650     | -8.149746028 | -9.582597797 | -7.188053923 | -9.609801972 |
|     | SSDPT    | -6.075369000     | -7.958072783 | -9.374215483 | -7.007954510 | -9.401079182 |
|     | ESDPT    | -5.912945427     | -7.770597196 | -9.169317434 | -6.832444245 | -9.195762755 |
|     | FSDPT    | -8.640963860     | -10.74258337 | -12.29806249 | -9.691011224 | -12.32351598 |
|     | CPT      | -4.258239171     | -5.325267822 | -6.112214147 | -4.792280549 | -6.124129401 |
| 3   | Présente | -5.640602937     | -7.653340944 | -9.304598517 | -6.571233783 | -9.323076734 |
|     | TSDPT    | -5.640602930     | -7.653340944 | -9.304598531 | -6.571233783 | -9.323076713 |
|     | SSDPT    | -5.483125706     | -7.466786944 | -9.098033441 | -6.398915364 | -9.116836000 |
|     | ESDPT    | -5.330582979     | -7.284569615 | -8.895097944 | -6.231294692 | -8.914126958 |
|     | FSDPT    | -7.946369874     | -10.20019456 | -12.00606034 | -9.002555231 | -12.01657607 |
|     | CPT      | -3.899658399     | -5.046400343 | -5.961500731 | -4.438261196 | -5.965698544 |
| 4   | Présente | -5.366064524     | -7.370276706 | -9.152608902 | -6.233348524 | -9.165904154 |
|     | TSDPT    | -5.366064510     | -7.370276713 | -9.152608881 | -6.233348531 | -9.165904161 |
|     | SSDPT    | -5.214876573     | -7.187436000 | -8.947208699 | -6.066601217 | -8.961364420 |
|     | ESDPT    | -5.068598133     | -7.008942846 | -8.745471098 | -5.904546091 | -8.760388832 |
|     | FSDPT    | -7.612160692     | -9.880450524 | -11.84169477 | -8.611120517 | -11.84292684 |
|     | CPT      | -3.726359990     | -4.881510490 | -5.876216930 | -4.236403804 | -5.875687864 |
| 5   | Présente | -5.227964671     | -7.189936937 | -9.057124301 | -6.028495734 | -9.067727000 |
|     | TSDPT    | -5.227964685     | -7.189936930 | -9.057124308 | -6.028495734 | -9.067727000 |
|     | SSDPT    | -5.080817524     | -7.009958126 | -8.852629755 | -5.865844951 | -8.864468965 |
|     | ESDPT    | -4.938565483     | -6.834308524 | -8.651794469 | -5.707867350 | -8.664780811 |
|     | FSDPT    | -7.436555294     | -9.671468224 | -11.73557176 | -8.367191573 | -11.73171099 |
|     | CPT      | -3.635051864     | -4.773592270 | -5.820994709 | -4.110448126 | -5.817919663 |

Tableau V.7 : Valeurs des contraintes axiales  $\bar{\tau}_{xz}$  pour des plaques sandwichs carrés en FGM

| $k$ | Théorie  | $\bar{\tau}_{xz}$ |               |               |               |               |
|-----|----------|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|     |          | 1-0-1             | 1-1-1         | 1-2-1         | 2-1-2         | 2-2-1         |
| 0   | Présente | 0.08039295070     | 0.08039295070 | 0.08039295070 | 0.08039295070 | 0.08039295070 |
|     | TSDPT    | 0.08039296677     | 0.08039296677 | 0.08039296677 | 0.08039296677 | 0.08039296677 |
|     | SSDPT    | 0.05578224404     | 0.05578224404 | 0.05578224404 | 0.05578224404 | 0.05578224404 |
|     | ESDPT    | 0.02695106633     | 0.02695106633 | 0.02695106633 | 0.02695106633 | 0.02695106633 |
|     | FSDPT    | 0.1736235796      | 0.1736235796  | 0.1736235796  | 0.1736235796  | 0.1736235796  |
| 1   | Présente | 0.7934887372      | 1.045911811   | 1.172824387   | 0.9214842490  | 1.052705673   |
|     | TSDPT    | 0.7934887312      | 1.045911826   | 1.172824361   | 0.9214842320  | 1.052705673   |
|     | SSDPT    | 0.8481766632      | 1.147248562   | 1.292253551   | 1.001393572   | 1.150029539   |
|     | ESDPT    | 0.9019603432      | 1.251347483   | 1.415055036   | 1.082461938   | 1.248750919   |
|     | FSDPT    | 0.2932309505      | 0.2384709753  | 0.2181056711  | 0.2577224792  | 0.2298848400  |
| 2   | Présente | 0.6381933004      | 0.9894832601  | 1.177200284   | 0.8079991639  | 1.027439741   |
|     | TSDPT    | 0.6381933405      | 0.9894832719  | 1.177200280   | 0.8079991768  | 1.027439741   |
|     | SSDPT    | 0.6628429389      | 1.083868911   | 1.301428589   | 0.8698022656  | 1.121398556   |
|     | ESDPT    | 0.6853458705      | 1.181488591   | 1.430451664   | 0.9323680613  | 1.216999212   |
|     | FSDPT    | 0.3806363004      | 0.2723819570  | 0.2384709432  | 0.3073461075  | 0.2577224861  |
| 3   | Présente | 0.5392675005      | 0.9424031557  | 1.164314858   | 0.7241343689  | 1.002910751   |
|     | TSDPT    | 0.5392675031      | 0.9424031542  | 1.164314859   | 0.7241343611  | 1.002910712   |
|     | SSDPT    | 0.5421597612      | 1.028397651   | 1.286723461   | 0.7709703807  | 1.091650944   |
|     | ESDPT    | 0.5419306407      | 1.117349975   | 1.414228490   | 0.8179252192  | 1.181769869   |
|     | FSDPT    | 0.4473014250      | 0.2932309150  | 0.2501495889  | 0.3400874190  | 0.2743324724  |
| 4   | Présente | 0.4854481361      | 0.9105977264  | 1.156275658   | 0.6672539502  | 0.9879418447  |
|     | TSDPT    | 0.4854481367      | 0.9105977088  | 1.156275657   | 0.6672539420  | 0.9879418601  |
|     | SSDPT    | 0.4739779232      | 0.9903323163  | 1.276676382   | 0.7035893606  | 1.072918412   |
|     | ESDPT    | 0.4587321658      | 1.072682045   | 1.402185996   | 0.7395574697  | 1.159004208   |
|     | FSDPT    | 0.4998254278      | 0.3073460911  | 0.2577224837  | 0.3633092476  | 0.2853674510  |
| 5   | Présente | 0.4595058515      | 0.8885933042  | 1.151770880   | 0.6282540622  | 0.9786270210  |
|     | TSDPT    | 0.4595058201      | 0.8885933310  | 1.151770894   | 0.6282540649  | 0.9786270065  |
|     | SSDPT    | 0.4384074793      | 0.9637934858  | 1.270586374   | 0.6572092488  | 1.060984481   |
|     | ESDPT    | 0.4130555641      | 1.041315574   | 1.394442174   | 0.6854615154  | 1.144238058   |
|     | FSDPT    | 0.5422763715      | 0.3175361541  | 0.2630310597  | 0.3806363217  | 0.2932309206  |

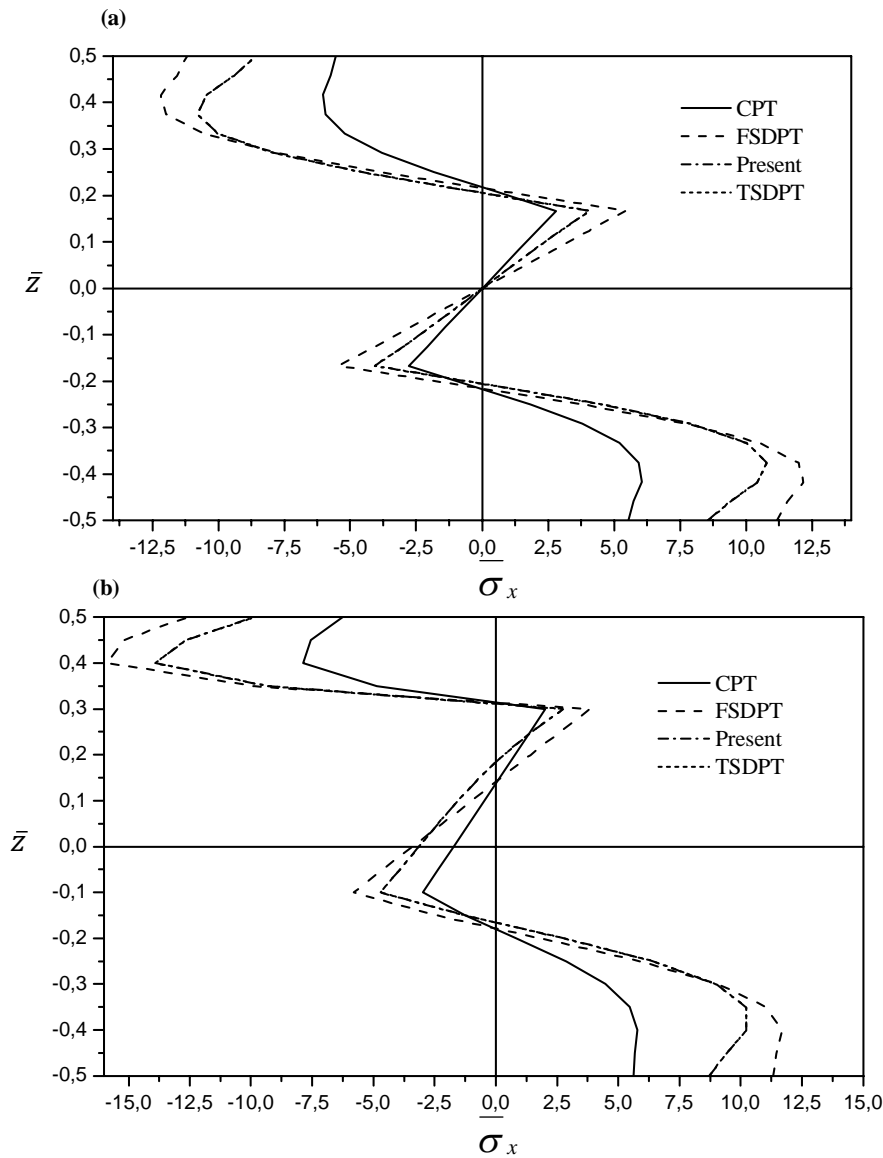
L'effet de la déformation de cisaillement sur la flèche et les contraintes, est également représenté dans les Figures V.1-3. En effet, la Figure. V.1 montre les effets du rapport  $a/b$  sur la flèche  $\bar{w}$  pour des plaques symétriques et non symétriques en FGM ( $k = 1.5$ ). La flèche déterminée en appliquant la FSDPT est supérieure que celle des autres théories. Les flèches calculées en utilisant les différentes théories de déformation de cisaillement diminuent avec l'augmentation du rapport  $a/b$ . Il est à noter que la flèche déterminée à partir de la théorie actuelle et du TSDPT prend des valeurs presque identiques, alors qu'elle prend des valeurs

intermédiaires entre celles calculées par FSDPT et la CPT. On peut voir que le CPT sous-estime la flèche des plaques.



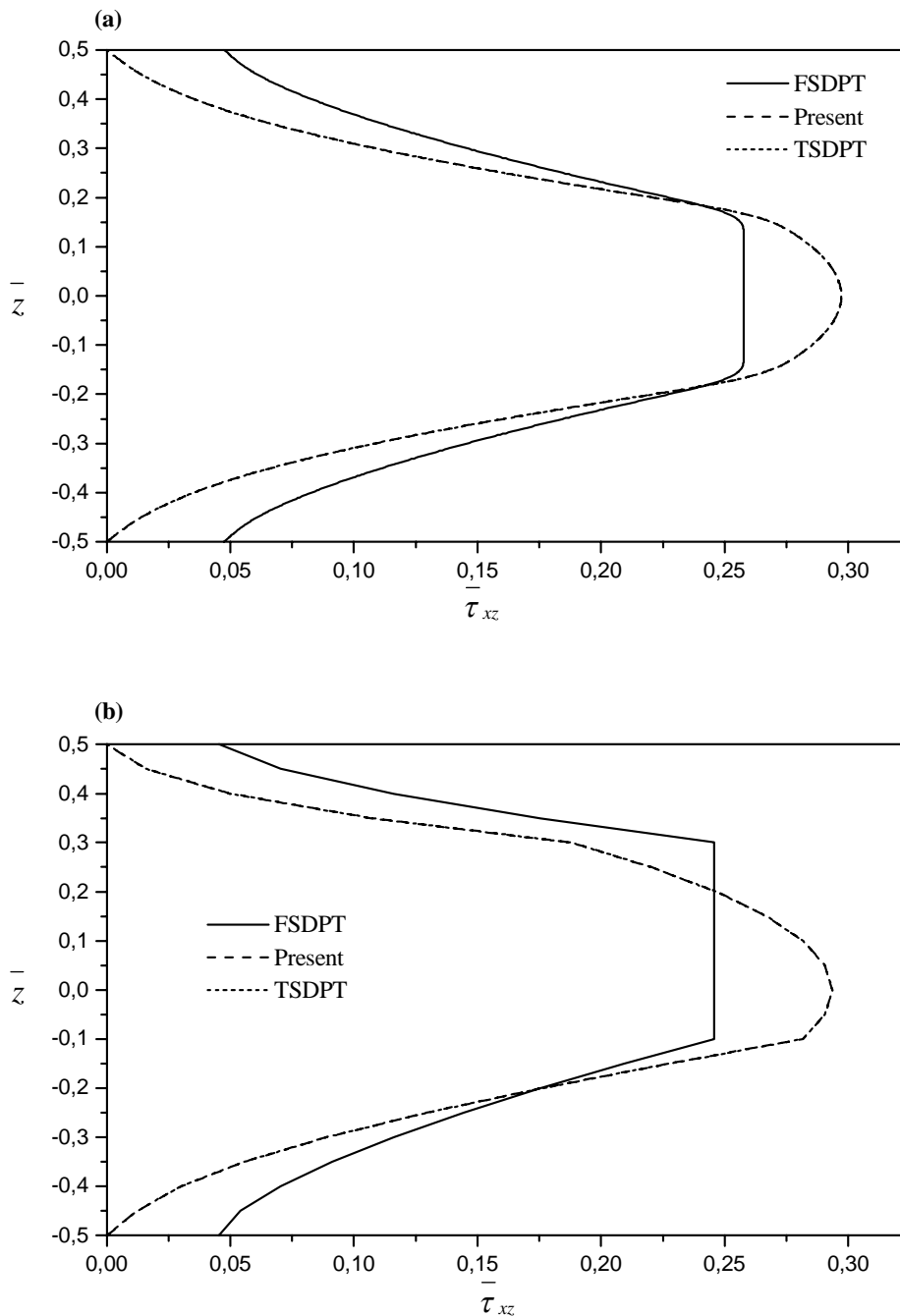
**Figure. V.1 :** Influence du rapport d'aspect  $a/b$  sur la flèche centrale  $\bar{w}$  pour le cas des plaques sandwiches en FGM symétriques et non symétriques ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1).

Les Figures V.2 et V.3 représentent les variations de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur pour les plaques symétriques et non symétriques en FGM ( $k = 1.5$ ) en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement. Il est également à noter que la présente théorie et la théorie TSDPT se coincident.



**Figure. V.2 :** Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur des plaques en FGM, symétrique et non symétrique ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1).

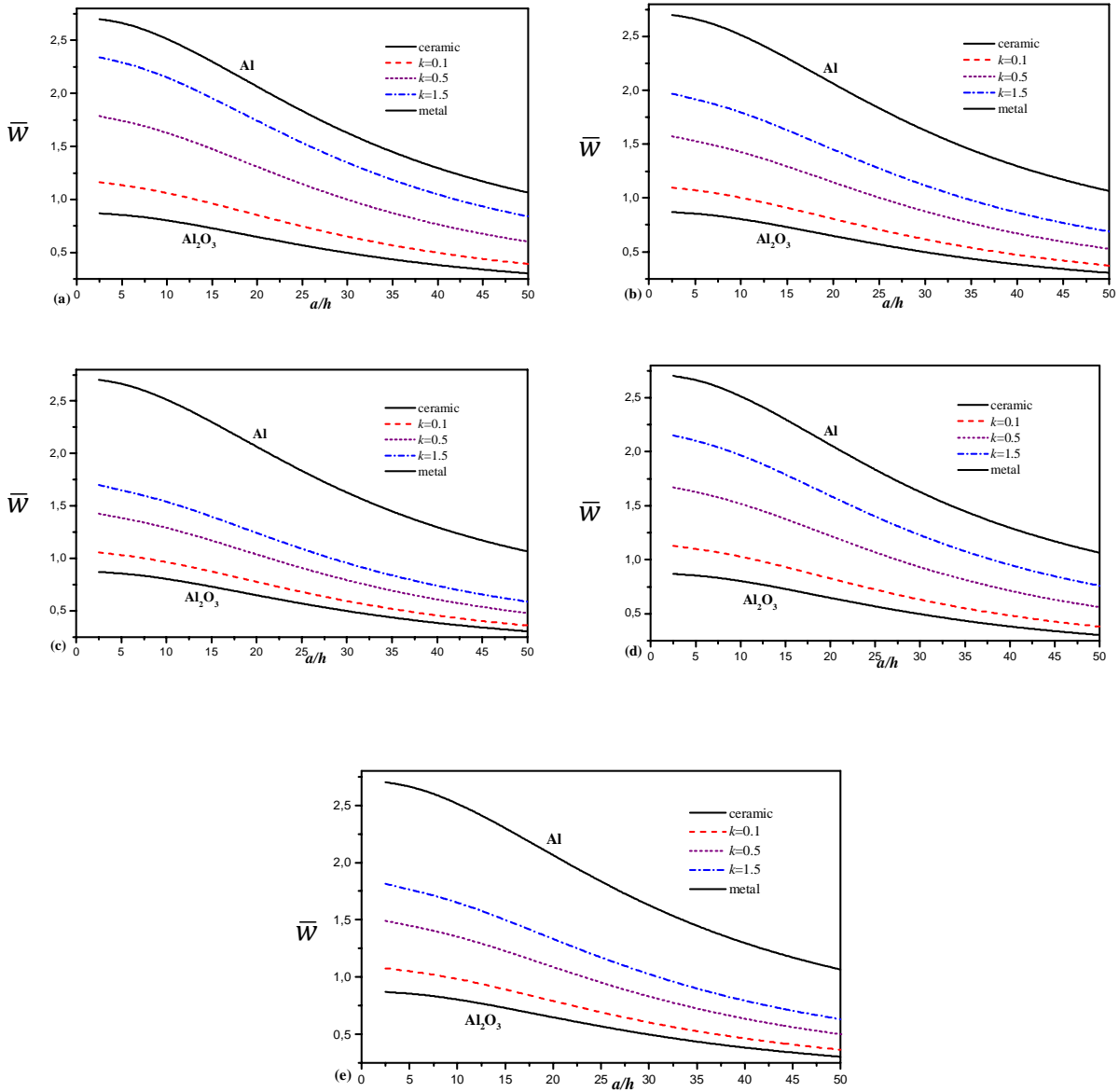




**Figure. V.3 :** Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur des plaques en FGM, symétrique et non symétrique ( $k = 1.5$ ) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement: (a) (1-1-1), et (b) (2-2-1).

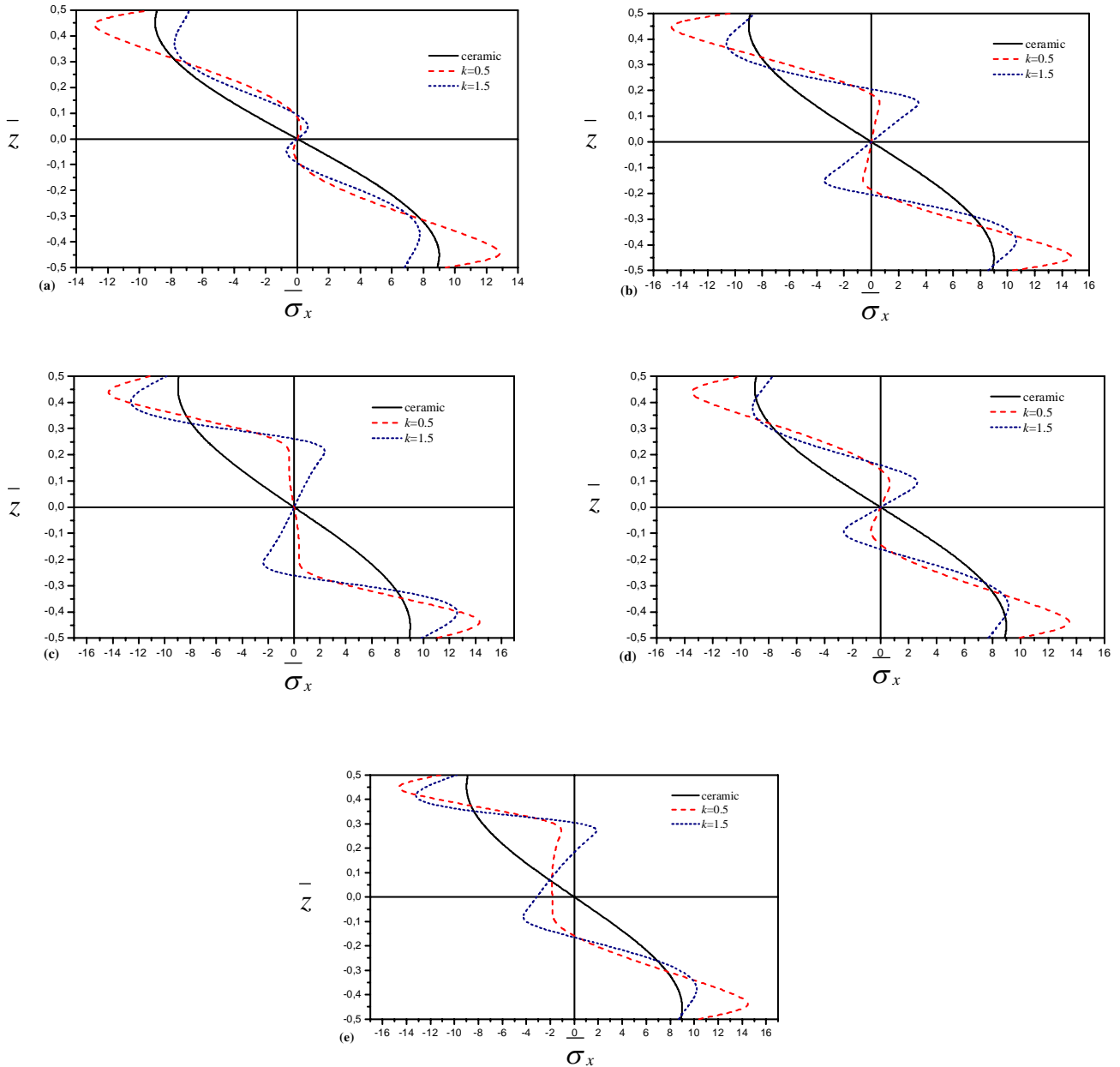
La Figure V.4 représente la variation de la flèche centrale  $\bar{w}$  en fonction du rapport  $a/h$  pour les différents types de plaques sandwiches en FGM. La flèche de ces plaques est entre ceux de la plaque en céramique ( $Al_2O_3$ ) et le métal (Al). Il peut être observé que la flèche pour une composition riche en métal est plus grande par rapport à celle d'une plaque riche en

céramique. Cela est due du fait que le module de Young pour le céramique ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ; 380 GPa) étant élevé par rapport à celui du métal (Al; 70 GPa). Par conséquent, pour les plaques en FGM, la flèche (transversale) diminue à mesure que l'indice de la loi de puissance  $k$  est diminué, de même si le rapport  $a/h$  augmente.



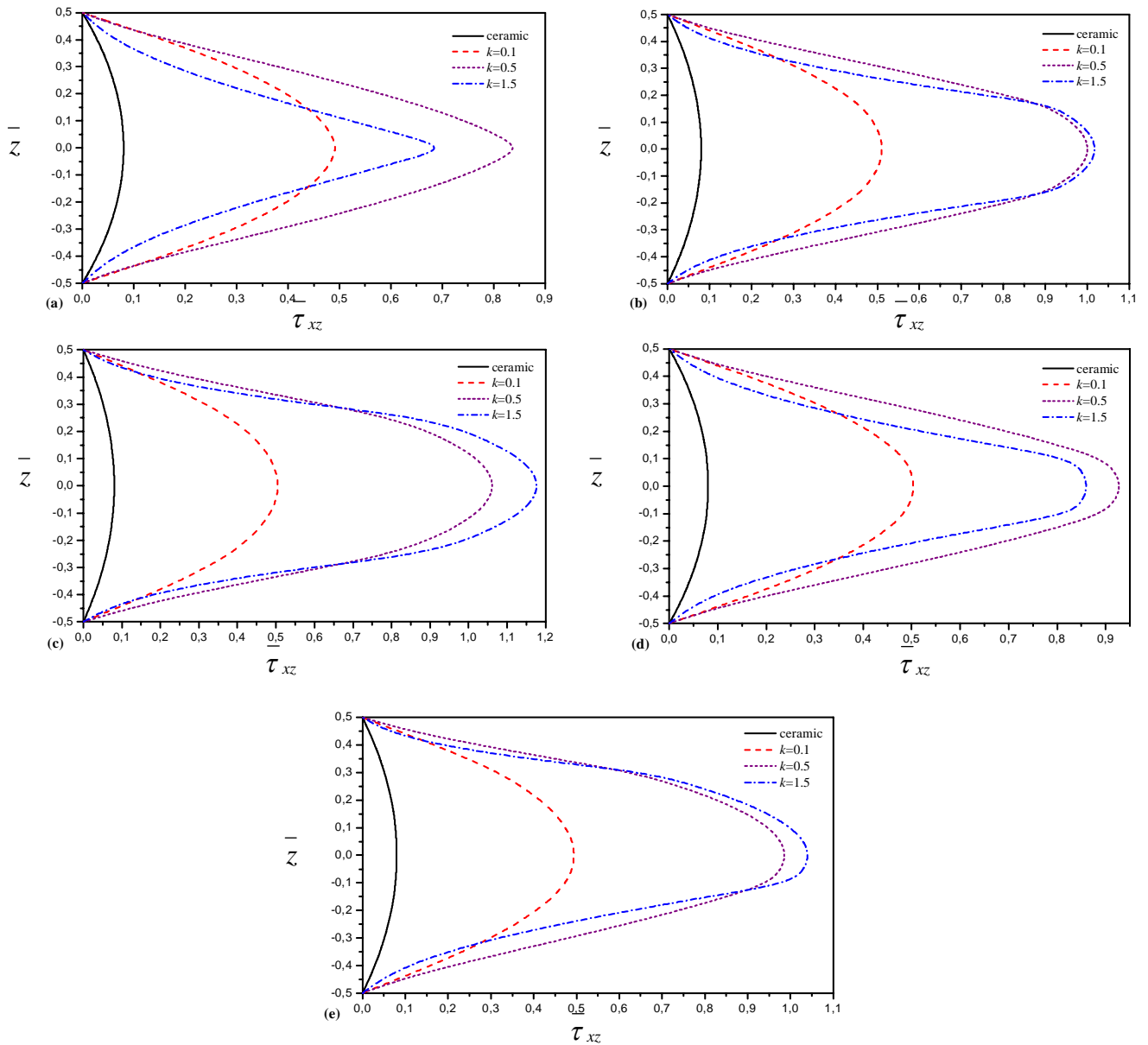
**Figure. V.4 :** variation de la flèche central  $\bar{w}$  en fonction du rapport ( $a/h$ ) d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de  $k$  et les différents types de plaques, (a) La plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-1-2) et la plaque (e) (2-2- 1).

La Figure V.5 représente la variation de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur des plaques en FGM. Les contraintes de traction sont à l'inférieur du plan médian et pour celles de la compression sont au-dessus du plan médian et peuvent être changées de traction à la compression, et vice versa. Les plaques FGM sont très sensibles à la variation de l'épaisseur. Il est observé que la contrainte maximale dépend de la valeur de l'indice de la fraction volumique  $k$  et de la nature de la plaque sandwich. Notez que la contrainte axiale est continue sur chaque couche d'interface.



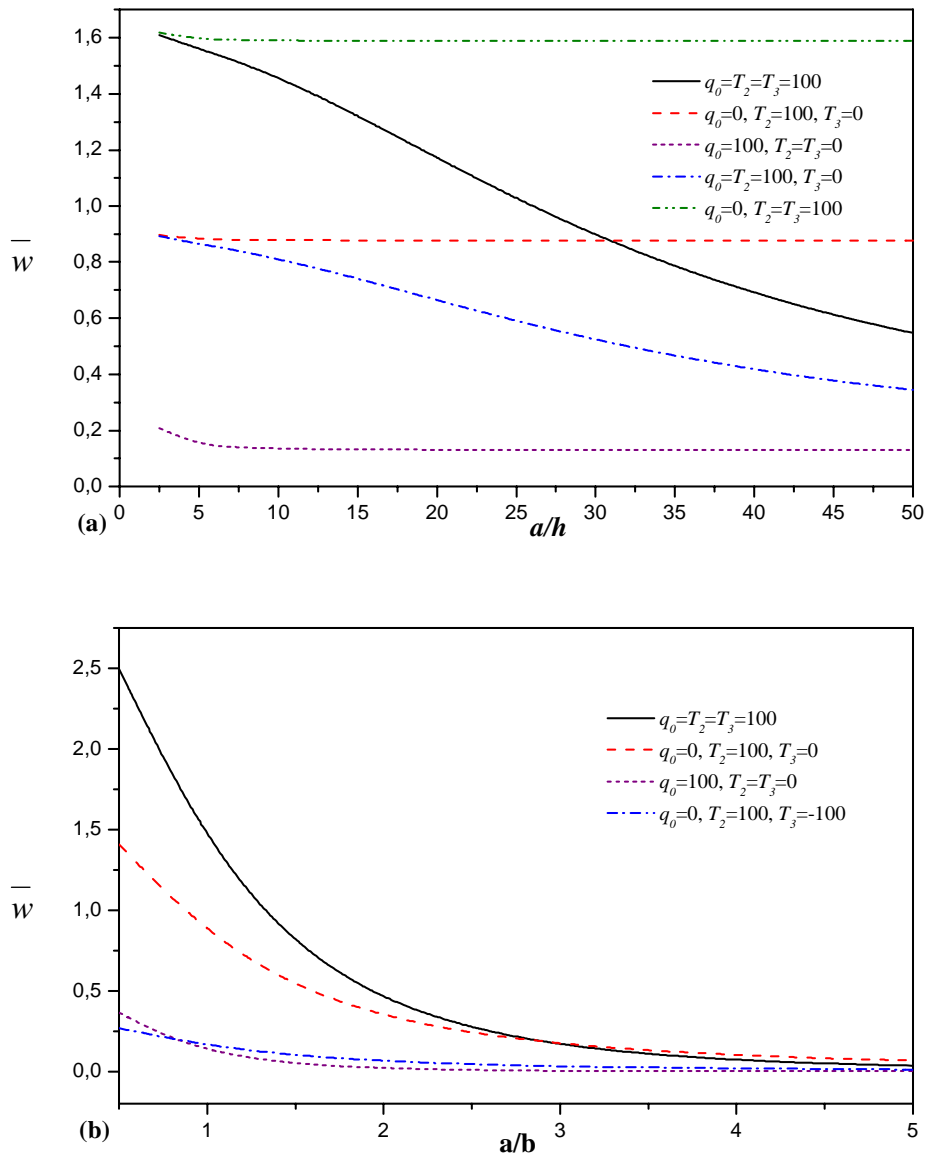
**Figure. V.5 :** variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_x$  d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de  $k$  et les différents types de plaques, (a) La plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-2-2), et la plaque (e) (2-2-1).

Dans la Figure V.6, nous avons tracé les distributions des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur pour  $k = 0, 0.1, 0.5, 1.5$ . La valeur maximale se produit à un point situé sur le plan médian de la plaque à l'exception pour la plaque (2-2-1), son amplitude est plus grande que celle de la plaque céramique homogène. On observe que la contrainte de cisaillement maximale dépend de la valeur de l'indice de la fraction volumique « k » et du genre de la plaque sandwich.



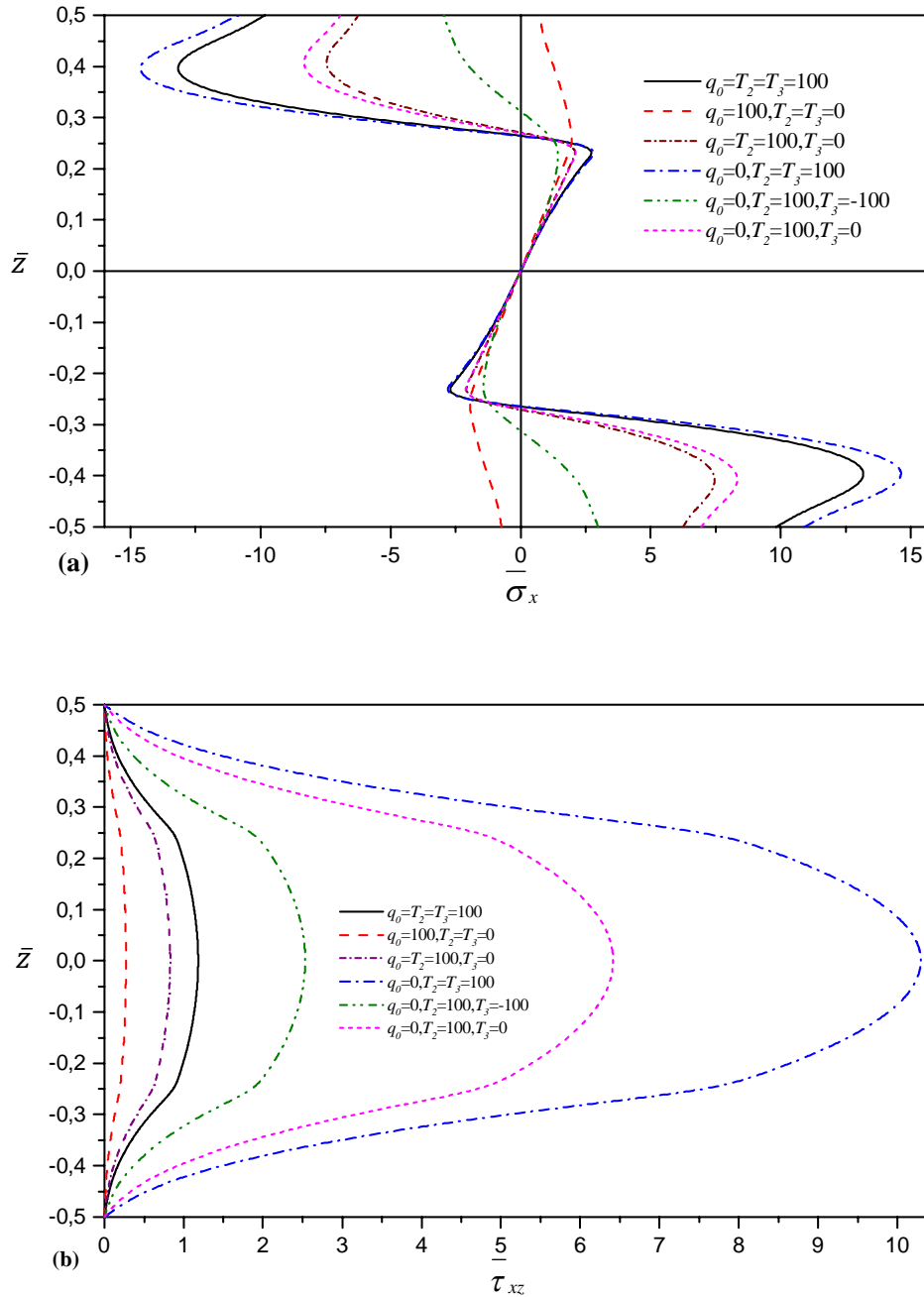
**Figure. V.6 :** variation de la contrainte  $\bar{\tau}_{xz}$  en fonction du rapport  $(a/h)$  d'une plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de  $k$  et les différents types de plaques. (a) la plaque (1-0-1), (b) la plaque (1-1-1), (c) la plaque (1-2-1), (d) la plaque (2-1-2), et la plaque (e) (2-2-1).

Les Figures V.7 et V.8 montrent l'effet des charges mécanique et thermique sur la flèche centrale  $\bar{w}$  et des contraintes pour les plaques sandwichs en FGM (1-2-1), ( $k = 1$ ). D'après les résultats illustrés dans la Figure V.7a, on peut voir que la flèche est plus grande pour les plaques soumises à une charge thermique seulement alors qu'elle est plus faible pour les plaques soumises à une charge mécanique. Avec l'inclusion de toutes les charges ( $q_0 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = 100$ ), la flèche diminue à mesure que les rapports  $a/h$  et  $a/b$  augmentent.



**Figure. V.7 :** Influence de la charge mécanique et de la charge thermique sur la flèche centrale d'une plaque sandwich (1-2-1) en FGM, ( $k = 1$ ) par rapport à ( $a/h$ ) et à ( $a/b$ ).

Dans la Figure V.8, nous avons représenté la variation des contraintes axiale  $\bar{\sigma}_x$  et transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  pour les plaques (1-2-1) en FGM et pour  $k = 1,5$ . Les courbes montrent la grande influence que jouent les charges thermique et de flexion pour analyser les contraintes axiale et transversale de cisaillement.



**Figure. V.8 :** Influence de la charge mécanique et de la charge thermique sur la contrainte  $\bar{\sigma}_x$  (a) et la contrainte  $\bar{\tau}_{xz}$  (b) d'une plaque sandwich (1-2-1) en FGM, ( $k = 1.5$ )

**V.2.2. Partie B : plaque sandwich avec l'effet de déformation normale :**

Cette partie est consacrée à l'étude de la plaque lorsqu'on prend en compte l'effet de la déformation normale ( $\varepsilon_z \neq 0$ ).

L'étude des tableaux V.8-11 révèle que la théorie actuelle avec cinq inconnues seulement, donne des résultats similaires à ceux prévus par la théorie hyperbolique des plaques (HPT) proposée par Saidi et al [130] et la théorie sinusoïdale des plaques (SPT) développée par Zenkour et Alghamdi [131] avec six inconnues ( $\varepsilon_z \neq 0$ ).

Cela prouve que la même précision est envisageable avec la théorie actuelle en utilisant un nombre inférieur d'inconnues que d'autres théories, en mettant clairement en évidence la façon dont cette théorie est plus simple et plus facile à déployer.

Le tableau V.8 présente une évaluation de la flèche centrale non dimensionnelle  $\bar{w}$  pour une plaque sandwich en FGM soumise à une distribution de température linéaire à travers l'épaisseur. Les flèches sont analysées pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , et  $5$  ; et pour différents types de plaques sandwich. Le tableau V.8 montre que l'effet d'étirement de l'épaisseur réduit la flèche.



**Tableau V.8 :** Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes plaques sandwichs carrées en FGM ( $q_0 = t_1 = t_3 = 0$ ,  $t_2 = 100$  et  $a/h = 10$ )

| k | Théorie                                       | $\bar{w}$       |                   |                   |                   |
|---|---|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|   |   | $t_{FGM}/h = 1$ | $t_{FGM}/h = 2/3$ | $t_{FGM}/h = 1/2$ | $t_{FGM}/h = 4/5$ |
| 0 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.461634        | 0.461634          | 0.461634          | 0.461634          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.449863        | 0.449863          | 0.449863          | 0.449863          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.461634        | 0.461634          | 0.461634          | 0.461634          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.480262        | 0.480262          | 0.480262          | 0.480262          |
| 1 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.614565        | 0.586124          | 0.563416          | 0.599933          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.594840        | 0.565276          | 0.542436          | 0.579538          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.614565        | 0.586124          | 0.563416          | 0.599933          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.636916        | 0.606292          | 0.582342          | 0.621098          |
| 2 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.647135        | 0.618046          | 0.590491          | 0.633340          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.627934        | 0.596416          | 0.567938          | 0.612832          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.647135        | 0.618046          | 0.590491          | 0.633340          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.671503        | 0.639361          | 0.609875          | 0.656142          |
| 3 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.658153        | 0.631600          | 0.602744          | 0.646475          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.639690        | 0.610125          | 0.579769          | 0.626505          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.658153        | 0.631600          | 0.602744          | 0.646475          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.683572        | 0.653671          | 0.622467          | 0.670275          |
| 4 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.662811        | 0.638705          | 0.609560          | 0.652890          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.644833        | 0.617502          | 0.586469          | 0.633395          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.662811        | 0.638705          | 0.609560          | 0.652890          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.688803        | 0.661291          | 0.629533          | 0.677321          |
| 5 | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.665096        | 0.642948          | 0.613842          | 0.656490          |
|   | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.647421        | 0.621990          | 0.590728          | 0.637353          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.665096        | 0.642948          | 0.613842          | 0.656490          |
|   | Ref <sup>(b)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.691420        | 0.665898          | 0.634003          | 0.681343          |

Ref<sup>(a)</sup> : Saidi et al [130]

Ref<sup>(b)</sup> : Zenkour and Alghamdi et al [131]

Le tableau V.9 donne une comparaison des flèches des différents types de plaques rectangulaires en FGM pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , et  $5$ . Il peut être conclu que l'inclusion de l'effet d'étirement d'épaisseur sert à rendre la plaque rigide, et, par conséquent, conduit à une réduction de la flèche. Par contre, la prise en compte de l'effet de la déformation de cisaillement rend la plaque plus souple et par conséquent, conduit à augmenter la flèche.

Tableau V.9 : Comparaison de flèches centrales non dimensionnelles pour différentes plaques sandwichs rectangulaires en FGM

| $k$ | Théorie                                       | $t_{FGM}/h = 0$ | $t_{FGM}/h = 0.2$ | $t_{FGM}/h = 0.4$ | $t_{FGM}/h = 0.6$ | $t_{FGM}/h = 0.8$ | $t_{FGM}/h = 1$ |
|-----|---|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 0   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.748424          | 0.748424          | 0.748424          | 0.748424          | 0.748424        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.771340          | 0.771340          | 0.771340          | 0.771340          | 0.771340        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.796783          | 0.796783          | 0.796783          | 0.796783          | 0.796783        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.808168          | 0.808168          | 0.808168          | 0.808168          | 0.808168        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 0.895735          | 0.895735          | 0.895735          | 0.895735          | 0.895735        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.457873          | 0.457873          | 0.457873          | 0.457873          | 0.457873        |
| 1   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.825607          | 0.891560          | 0.942936          | 0.979382          | 1.003408        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.841759          | 0.906271          | 0.959745          | 0.999391          | 1.026070        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.873745          | 0.941636          | 0.996334          | 1.036213          | 1.062840        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.886067          | 0.954808          | 1.010231          | 1.050672          | 1.077690        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 0.979641          | 1.054630          | 1.115684          | 1.160568          | 1.190728        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.501163          | 0.539886          | 0.571450          | 0.594688          | 0.610331        |
| 2   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.845883          | 0.930539          | 0.994421          | 1.035346          | 1.057609        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.860395          | 0.943946          | 1.011993          | 1.058388          | 1.084456        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.894003          | 0.981434          | 1.050237          | 1.096095          | 1.121608        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.906529          | 0.995042          | 1.064791          | 1.111352          | 1.137297        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 1.001204          | 1.097973          | 1.175402          | 1.227765          | 1.257304        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.512431          | 0.562536          | 0.602673          | 0.629859          | 0.645223        |
| 3   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.855272          | 0.948423          | 1.016599          | 1.056867          | 1.075460        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.869136          | 0.961579          | 1.035332          | 1.082231          | 1.104836        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.903467          | 0.999831          | 1.073875          | 1.119794          | 1.141655        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.916083          | 1.013647          | 1.088747          | 1.135420          | 1.157693        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 1.011279          | 1.118224          | 1.202080          | 1.255041          | 1.280741        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.517716          | 0.573152          | 0.616662          | 0.644176          | 0.657539        |
| 4   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.902511          | 0.958901          | 1.028393          | 1.067181          | 1.082846        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.874209          | 0.971671          | 1.048073          | 1.094108          | 1.113637        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.908934          | 1.010269          | 1.086624          | 1.131429          | 1.150192        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.921602          | 1.024208          | 1.101684          | 1.147260          | 1.166403        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 1.017115          | 1.129824          | 1.216678          | 1.268689          | 1.290961        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.520783          | 0.579240          | 0.624324          | 0.651345          | 0.662909        |
| 5   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )           | 0.748424        | 0.864347          | 0.943749          | 1.034550          | 1.072864          | 1.086419        |
|     | Ref <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.771340        | 0.877515          | 0.978164          | 1.055935          | 1.100868          | 1.118027        |
|     | SSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.796783        | 0.912488          | 1.016938          | 1.094427          | 1.137993          | 1.154412        |
|     | TSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.808168        | 0.925190          | 1.030958          | 1.109609          | 1.153952          | 1.170720        |
|     | FSDT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )   | 0.895735        | 1.020919          | 1.137289          | 1.225706          | 1.276497          | 1.296101        |
|     | CPT <sup>(a)</sup> ( $\varepsilon_z = 0$ )    | 0.457873        | 0.522783          | 0.583160          | 0.629064          | 0.655445          | 0.665606        |

Les tableaux V.10 et V.11 présentent, respectivement, les valeurs de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , et  $5$ , pour différents types de plaques FGM. En outre, les différentes théories d'ordre élevé (HSDT) tel que la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT), la théorie trigonométrique de déformation de cisaillement (TSDT) et la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) sont également prévus pour montrer l'importance d'inclure l'effet d'étirement de l'épaisseur. Les solutions des théories du HSDT sont calculés sur la base d'une variation non linéaire des déplacements dans le plan et un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur (à savoir, l'effet de l'épaisseur d'étirement est omis,  $\varepsilon_z = 0$ ).

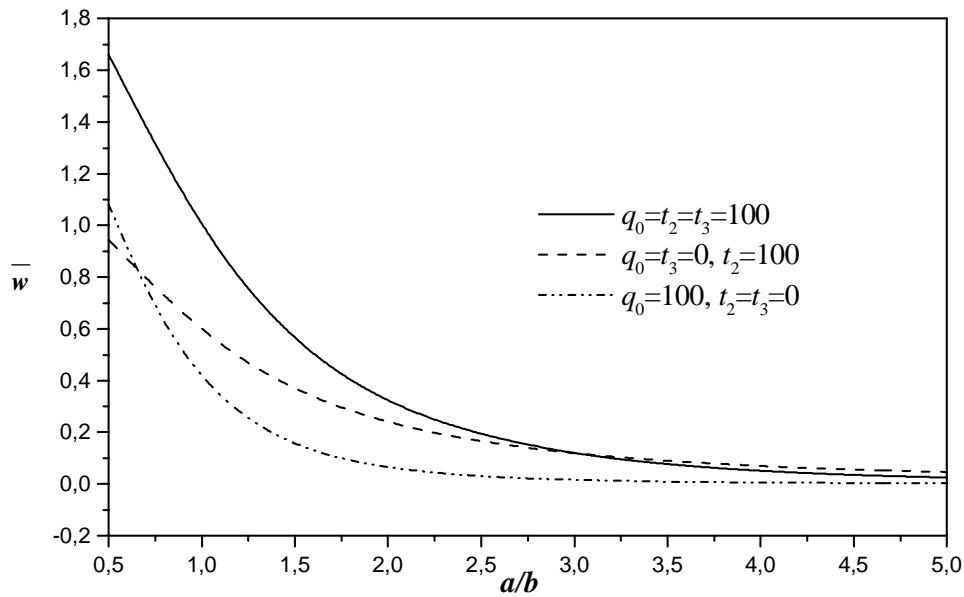
**Tableau V.10 :** Comparaison des contraintes de flexion  $\bar{\sigma}_x$  non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwiches en FGM

| $k$ | Théorie                             | $t_{FGM}/h = 0$ | $t_{FGM}/h = 0.2$ | $t_{FGM}/h = 0.4$ | $t_{FGM}/h = 0.6$ | $t_{FGM}/h = 0.8$ | $t_{FGM}/h = 1$ |
|-----|-------------------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 0   | Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | -2.528819       | -2.528819         | -2.528819         | -2.528819         | -2.528819         | -2.528819       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -2.388919         | -2.388919         | -2.388919         | -2.388919         | -2.388919       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -2.461177         | -2.461177         | -2.461177         | -2.461177         | -2.461177       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -3.597007         | -3.597007         | -3.597007         | -3.597007         | -3.597007       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -1.706393         | -1.706393         | -1.706393         | -1.706393         | -1.706393       |
| 1   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ )  | -2.528819       | -3.913321         | -3.489857         | -3.138470         | -2.876846         | -2.700416       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -3.333300         | -3.001265         | -2.733086         | -2.537374         | -2.406806       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -3.412724         | -3.076466         | -2.804750         | -2.606343         | -2.473903       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -4.504051         | -4.136892         | -3.838047         | -3.618476         | -3.471099       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -2.193219         | -2.003463         | -1.848793         | -1.734921         | -1.658265       |
| 2   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ )  | -2.528819       | -3.792865         | -3.245326         | -2.797887         | -2.490378         | -2.316178       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -3.234499         | -2.806645         | -2.469045         | -2.243809         | -2.118730       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -3.312889         | -2.879670         | -2.537489         | -2.308903         | -2.181780       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -4.398484         | -3.924721         | -3.545789         | -3.289757         | -3.145662       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -2.137999         | -1.892474         | -1.695789         | -1.562571         | -1.487285       |
| 3   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ )  | -2.528819       | -3.736478         | -3.130873         | -2.645068         | -2.332424         | -2.180056       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -3.188312         | -2.716593         | -2.353122         | -2.127496         | -2.020425       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -3.266245         | -2.788595         | -2.420027         | -2.190823         | -2.081815       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -4.349165         | -3.825600         | -3.415261         | -3.156414         | -3.031283       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -2.112102         | -1.840454         | -1.627241         | -1.492417         | -1.426935       |
| 4   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ )  | -2.528819       | -3.703803         | -3.065266         | -2.561174         | -2.252973         | -2.120478       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -3.161620         | -2.665468         | -2.290552         | -2.070361         | -1.978602       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -3.239292         | -2.736867         | -2.356554         | -2.132710         | -2.039172       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -4.320597         | -3.768831         | -3.343853         | -3.089733         | -2.981507       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -2.097076         | -1.810621         | -1.589696         | -1.457288         | -1.400620       |
| 5   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ )  | -2.528819       | -3.682505         | -3.023018         | -2.509154         | -2.207341         | -2.090458       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.388919       | -3.144264         | -2.632792         | -2.252244         | -2.038118         | -1.957968       |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -2.461177       | -3.221769         | -2.703791         | -2.317655         | -2.099863         | -2.018086       |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )        | -3.597007       | -4.301976         | -3.732298         | -3.299697         | -3.051612         | -2.956534       |
|     | CPT                                 | -1.706393       | -2.087272         | -1.791409         | -1.566468         | -1.437193         | -1.387402       |

**Tableau V.11 :** Comparaison des contraintes de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  non dimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwiches en FGM

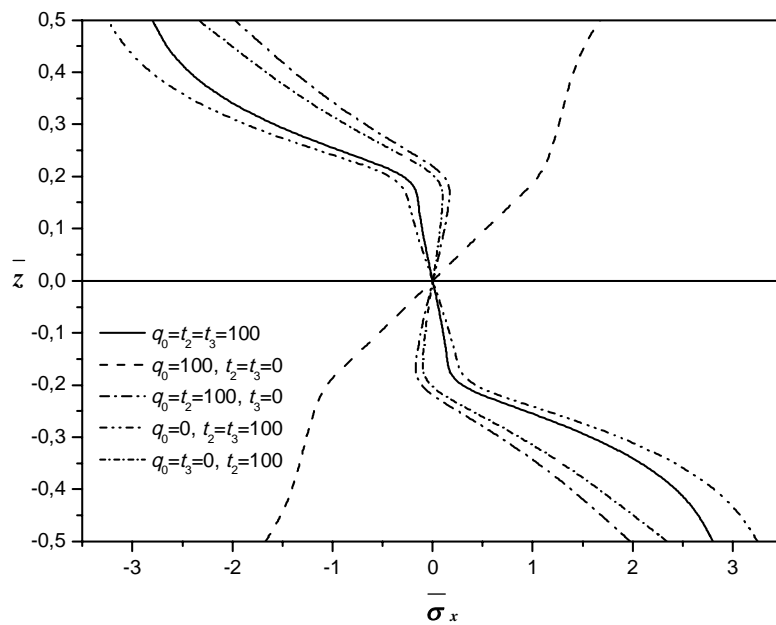
| $k$ | Théorie                            | $t_{FGM}/h = 0$ | $t_{FGM}/h = 0.2$ | $t_{FGM}/h = 0.4$ | $t_{FGM}/h = 0.6$ | $t_{FGM}/h = 0.8$ | $t_{FGM}/h = 1$ |
|-----|------------------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 0   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.193097          | 0.193097          | 0.193097          | 0.193097          | 0.193097        |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.171604          | 0.171604          | 0.171604          | 0.171604          | 0.171604        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.174481          | 0.174481          | 0.174481          | 0.174481          | 0.174481        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.173624          | 0.173624          | 0.173624          | 0.173624          | 0.173624        |
| 1   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.313620          | 0.349534          | 0.341568          | 0.324311          | 0.317474        |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.271618          | 0.300347          | 0.293865          | 0.280890          | 0.277019        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.264677          | 0.289538          | 0.284236          | 0.274133          | 0.272347        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.181504          | 0.190134          | 0.199626          | 0.210115          | 0.221768        |
| 2   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.338091          | 0.370811          | 0.346355          | 0.315647          | 0.308622        |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.292205          | 0.317892          | 0.298078          | 0.275130          | 0.272583        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.282950          | 0.304910          | 0.288355          | 0.270427          | 0.270952        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.184293          | 0.196359          | 0.210115          | 0.225945          | 0.244354        |
| 3   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.348104          | 0.376236          | 0.341227          | 0.304511          | 0.3023266       |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.300600          | 0.322239          | 0.294047          | 0.267073          | 0.269608        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.290349          | 0.308697          | 0.285154          | 0.264327          | 0.270110        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.185719          | 0.199626          | 0.215785          | 0.234789          | 0.257465        |
| 4   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.353399          | 0.377769          | 0.336004          | 0.296906          | 0.300779        |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.305016          | 0.323396          | 0.289951          | 0.261729          | 0.270017        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.294226          | 0.309711          | 0.281837          | 0.260366          | 0.271755        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.186586          | 0.201639          | 0.219335          | 0.240436          | 0.266029        |
| 5   | Présente( $\varepsilon_z \neq 0$ ) | 0.193097        | 0.356625          | 0.378076          | 0.331797          | 0.292004          | 0.301729        |
|     | SSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.171604        | 0.307694          | 0.323573          | 0.286687          | 0.258433          | 0.272071        |
|     | TSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.174481        | 0.296571          | 0.309879          | 0.279200          | 0.258029          | 0.274512        |
|     | FSDT ( $\varepsilon_z = 0$ )       | 0.173624        | 0.187168          | 0.203004          | 0.221768          | 0.244354          | 0.272062        |

La Figure. V.9 montre l'effet de la variation du rapport (a/b) sur la flèche non dimensionnelle  $\bar{w}$  pour les plaques sandwiches en FGM ainsi que celui des sollicitations mécaniques et thermiques. On peut constater que l'effet du rapport (a/b) est plus influant sur la flèche en flexion thermomécanique ( $q_0 = t_2 = t_3 = 100$ ).

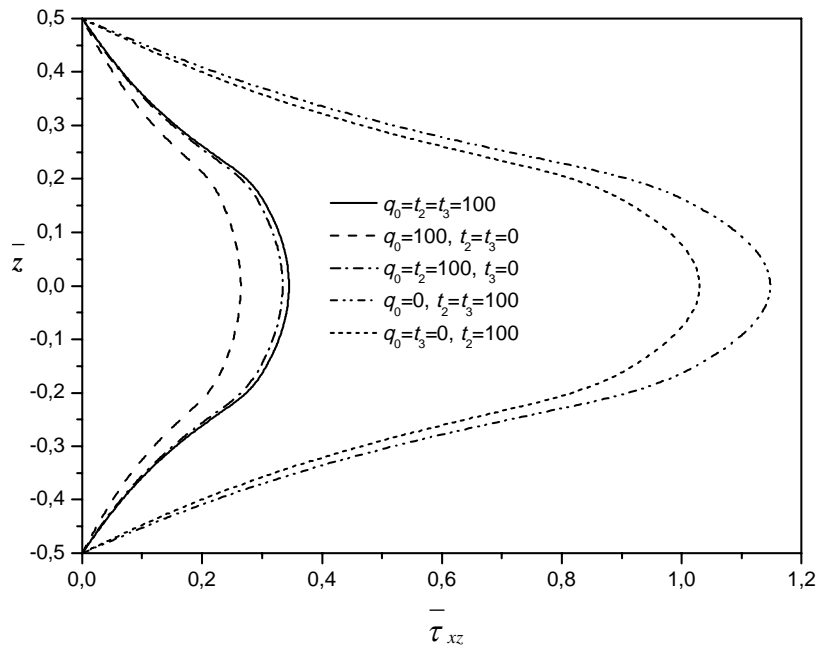


**Figure. V.9 :** Effet de la variation du rapport  $(a/b)$  sur la flèche non dimensionnelle  $\bar{w}$  pour les plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h$ ,  $k = 2$ ).

Sur les figures V.10 et V.11, nous avons tracé les distributions de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  non dimensionnelle et la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM, respectivement, pour  $k = 2$  et  $t = 0.6 h$ . Ces résultats montrent la grande influence jouée par les différentes charges thermiques et de la flexion sur les contraintes axiales et de cisaillement transversales.



**Figure. V.10 :** Distributions de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  non dimensionnelle à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h$ ,  $k = 2$ ).



**Figure. V.11 :** Distributions de la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM ( $t_{FGM} = 0.6h$ ,  $k = 2$ ).

# CONCLUSION GENERALE

---



## Conclusion générale

---

Dans ce travail, une nouvelle théorie à quatre variables (RPT) a été développée pour étudier le comportement thermomécanique des plaques simplement appuyées en FGM. Contrairement aux autres théories, la présente théorie utilise seulement quatre équations d'équilibre, avec un calcul moins consistant en comparaison avec les autres théories d'ordre élevé connues dans la littérature qui nécessitent un nombre important d'équations d'équilibre. Les résultats des théories de déformation de cisaillement sont comparés entre eux. En général, les plaques entièrement en céramique auront les plus petites flèches ainsi que les plus petites contraintes de cisaillement transversal. Les gradients des propriétés des matériaux jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques FGM.

Le mélange du céramique et du métal avec une variation continue des fractions volumiques permet d'éliminer les problèmes d'interface des plaques sandwiches et donc les distributions des contraintes seront lisses. Toutes les comparaisons effectuées ont démontrées que les déformations et les contraintes obtenues en utilisant la théorie actuelle raffinée (avec quatre inconnues) et les autres théories d'ordre élevé (avec cinq inconnues) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la présente théorie (RPT) est non seulement exacte mais aussi simple pour étudier le comportement thermomécanique en flexion des plaques en FGM.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

## Références bibliographiques

---

- [1] H. Ait Atmane. Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement, 2011.
- [2] A. Öchsner, G.E. Murch and M.J.S. de Lemos. Cellular and Porous Materials, WILEY-VCH, 398-417. 2008.
- [3] M. Savoia., J.N. Reddy, Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608, 1995.
- [4] MSA. Houari. Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances, 2011.
- [5] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Num Methods Eng* 2000;47:663–684.
- [6] Cheng ZQ, Batra RC. deflection relationships between the homogeneous kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. *Arch Mech* 2000; 52 (1):143–58.
- [7] Cheng ZQ, Batra RC. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J Sound Vib* 2000;229(4):879–95.
- [8] Cheng ZQ, Batra RC. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate. *Composites: Part B* 2000;31(2):97–106.
- [9] Vel SS, Batra RC. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J* 2002;40(7):1421–33.
- [10] Ying J, Lü CF, Lim CW. 3D thermoelasticity solutions for functionally graded thick plates. *J Zhejiang Univ Sci A* 2009;10(3):327–36.
- [11] Shimpi RP, Patel HG. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43(22):6783–99.
- [12] Shimpi RP, Patel HG. Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *J Sound Vib* 2006;296(4–5):979–99.

## Références bibliographiques

---

- [13] Mechab I, Ait Atmane H, Tounsi A, Belhadj HA, Adda bedia EA. A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates. *Acta Mech Sin* 2010;26(6):941.
- [14] Houari MSA, Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Adda bedia EA. Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Therm Stresses* 2011;34:315–34.
- [15] Hirai T. and Chen L. (1999), Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.
- [16] Chan S.H. (2001), Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.
- [17] Uemura S. (2003), The activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.
- [18] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.
- [19] Müller E., Drašar C., Schilz J., and Kaysser W.A. (2003), Functionally graded materials for sensor and energy applications, *Materials Science and Engineering*, A362, 17–39
- [20] Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H. (2003), Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121.
- [21] Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C. (2003), The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796.
- [22] Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Wosko M., Radziewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M. (2008), Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum*, 82, 389–394.

## Références bibliographiques

---

- [23] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T. (2004), Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Composites Science and Technology*, 64, 893–908.
- [24] Fuchiyama T. and Noda N. (1995), Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Review*, 16, 263–268.
- [25] Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995), Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.
- [26] Tanigawa Y. (1995), Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- [27] Noda N. (1999), Thermal stresses in functionally graded material, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.
- [28] Paulino G.H., Jin Z.H., and Dodds Jr. R.H. (2003), Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- [29] Hui- shen shen functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells 2009  
CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group
- [30] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [31] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 ( 8):191-192,1986.
- [32] Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan.
- [33] Boch. T Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated composites, 1986.

- [34] Abdizadeh H, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997 212 p
- [35] T.Hirai, Chapter 20,"Functional Gradient Materials", Mater. Sci. and Tech. vol.17B, R.W.Chan, P.Hassen and E.J.Kramer(eds.), VCH, Weinheim, Germany 293, 1996.
- [36] Ichiro chiota ; yoshinari miyamoto functionally graded materials 1996 elsevier.
- [37] Anné G, J Vleugels et O Van der biest, Katholieke University Leuven, Belgium Functionally graded ceramics Woodhead Publishing Limited, 2006.
- [38] Neubrand, A., Rödel, J., (1997), Gradient materials: an overview of a novel concept, Z. Metallk, 88(5), 358–371.
- [39] Requenna, J., Moya, J.S., Pena, P., (1993), „Al<sub>2</sub>TiO<sub>3</sub>–Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally gradient materials obtained by sequential slip casting", in Holt, J.B., Koisumi, M., Hirai, T., Munir, Z.A., Functionally Gradient Materials, American Ceramic Society, Westerville, O.H., 203–210.
- [40] Chu, J., Ishibashi, H., Hayashi, K., Takebe, H., Morinaga, K., (1993), „Slip casting of continuous functionally gradient material", J. Ceram. Soc. Japan, 101, 818–820.
- [41] Schindler, J., Meyer-Olbersleben, F., Kirbach, B., (1998), „Fabrication of FGM-foils for joining application by wet powder spraying", presented at 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 1998.
- [42] Watanabe, Y., Yamanaka, N., Fukui, Y., (1998), „Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method", Composites Part A, 29A, 595–601.
- [43] Bernhardt, R., Meyer-Olbersleben, F., Kieback, B., (1999), „The influence of hydrodynamic effects on the adjustment of gradient patterns through gravity sedimentation of polydisperse particle systems in newtonian and viscoelastic fluid", Mat. Sci. Forum, 308–311: 31–35.

## Références bibliographiques

---

- [44] Anné, G., Vanmeensel, K., Vleugels, J., (2004), "Electrophoretic deposition as a near net shaping technique for functionally graded biomaterials", *Mat. Sci. Forum*, 492–493, 213–218.
- [45] Van der Biest, O., Vandeperre, L., (1999), "Electrophoretic deposition of materials", *Ann. Rev. Mat. Sci.*, 29, 327–352.
- [46] Put, S., Vleugels, J., Van der Biest, O., (2003), "Gradient profile prediction in functionally graded materials processed by electrophoretic deposition", *Acta. Mater.*, 51(20), 6303– 6317.
- [47] Vleugels, J., Anné, G., Put, S., Van der Biest, O., (2003), "Thick plate-shaped Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> composites with a continuous gradient processed by electrophoretic deposition", *Mat. Sci. Forum.*, 423–425, 171–176.
- [48] Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G., (eds) (1999), *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, (Kluwer Academic Boston/Dordrecht/London).
- [49] Hillman, C., Suo, Z.G., Lange, F.F., (1996), "Cracking of laminates subjected to biaxial tensile stresses", *J. Am. Ceram. Soc.*, 79(8), 2127–2133.
- [50] Cai, P.Z., Green, D.J., Messing, G.L., (1997a), "Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 1. Experimental observations of processing defects", *J. Am. Ceram Soc.*, 80(8), 1929–1939.
- [51] Cai, P.Z., Green, D.J., Messing, G.L., (1997b), "Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 2. Viscoelastic stress computation", *J. Am. Ceram. Soc.*, 80(8), 1940–1948.
- [52] S., Beraniè, S., (2005), "Densification of step graded Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–ZrO<sub>2</sub> composites", *Mat. Sci. Forum*, 492–493, 207–212.
- [53] Zhao, C., Vleugels, J., Vandeperre, L., Van Der Biest, O., (2000), "Cylindrical Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/TZP functionally graded materials by EPD", *Brit. Cer. Trans.*, 99(6), 284–287.

## Références bibliographiques

---

- [54] Williams, J, C. Doctor-Blade Process, in Treatise on Materials Science and Technology, New York: Academic Press. 1976. p173-98.
- [55] Mistler, R, E. high strength substrates produced by multiple layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull. 1973 Vol .52 N° 11 p850-54.
- [56] Bishop, a, Lin, C.Y. NAVARATNAM, M. Rawlings.R.D MC. Chane a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters 1993.
- [57] Steffes.H.D. DvorakM.Wewel. Plasma sprayed functionally graded materials- processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan 1990.
- [58] Yuki, M., Murayama, T, Irisawa, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials- FGM'90-Sendai-Japan, 199, p. 203-208.
- [59] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614, 1983.
- [60] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. Composites Science and Technology; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [61] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [62] Suresh, S., and Mortensen, A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, IOM Communications, London, 1998.
- [63] O. Van der Biest., M. Gasik., J. Vleugels eds, Functionally graded materials VIII (FGM 2004), Proceedings of the eighth international symposium on multifunctional and functionally graded materials, materials science forum, vols. 492–493, trans tech publications ltd, uetikon-Zuerich, Switzerland.



- [64] M.A. Benatta., I. Mechab I., A. Tounsi., E.A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*; 44 (2): 765–773. 2008.
- [65] M. Bouremana., A. Tounsi., A. Kaci., I. Mechab., Controlling thermal deformation by using composite materials having variable fiber volume fraction. *Materials & Design*; 30(7): 2532-2537, 2009.
- [66] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two- dimensional functionally graded materials, *Int. J. Solids Struct*; 40 (26): 7339–7356,2003.
- [67] J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations,” *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.
- [68] T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [69] J. R. Cho., D.Y. Ha, Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196, 2001.
- [70] R. Pal, New Models for Effective Young’s modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523. 2005.
- [71] Z.-H. Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895. 2002.
- [72] Y. Ootao.,Y. Tanigawa, Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146, 2004.
- [73] J. Sladek., V. Sladek., Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504, 2003.
- [74] B. V. Sankar., J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232, 2002.

## Références bibliographiques

---

- [75] B. V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696, 2001.
- [76] A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539,2003.
- [77] H.K. Ching., S.C. Yen, Transient thermoelastic deformation of 2-d functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply, *Compos. Struct*; 73 (4): 381–393, 2006.
- [78] J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.
- [79] M. Kashtalyan, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.
- [80] Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part I: Analysis, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3657-3674, 2006.
- [81] Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3675-3691, 2006.
- [82] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflections and stresses, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5224–5242, 2005.
- [83] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5243–5258, 2005.
- [84] J. Woo., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.
- [85] J.-Q. Tarn, Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206, 2001.

## Références bibliographiques

---

- [86] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermoelastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials, *AIAA J*; 40 :162–169,2002.
- [87] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher-order theory, *J. Therm. Stresses*; 25 (7): 603–625, 2002.
- [88] K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.
- [89] J. Yang, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175, 2005.
- [90] J. Yang, J., H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.
- [91] H. Matsunaga, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86, 2009.
- [92] X. Zhao., YY. Lee., K.M. Liew, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*; 90 (2): 161–71, 2009.
- [93] A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.
- [94] J.-S. Park., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.
- [95] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [96] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear e\_effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.

## Références bibliographiques

---

- [97] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.
- [98] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [99] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [100] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [101] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463{1481, 1970.
- [102] S. Srinivas & A.K. Rao. Flexure of thick plates. *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [103] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [104] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [105] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [106] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [107] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [108] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

## Références bibliographiques

---

- [109] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co,1969.
- [110] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69, 77, 1945.
- [111] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [112] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [113] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [114] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47 (2005) 1740–1755.
- [115] A. Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [116] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [117] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279{295, 1984.
- [118] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [119] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2001.

## Références bibliographiques

---

- [120] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [121] M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [122] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [123] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [124] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminated/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [125] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [126] Marur PR. Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials, PhD thesis. Alabama: Auburn University; 1999.
- [127] Zenkour AM, Alghamdi NA. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mech Adv Mater Struct* 2010;17:419–32.
- [128] Tungikar VB, Rao KM. Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates. *Compos Stuct* 1994;27:419–27.
- [129] Carrera E. Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories. *AIAA J* 2002;40:419–27.
- [130] Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, 15(2), 221-245.

## Références bibliographiques

---

- [131] Zenkour, A.M, Alghamdi, N.A. (2008), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Materials Science*, **43**, 2574-2589.