

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure et matériaux

Présentée par

FEKRAR ABDELKADER

Sujet de thèse

**Analyse du flambement des plaques composites en
utilisant la théorie à ordre élevé**

Soutenu le devant le Jury composé de :

Mr. A. TOUNSI	Professeur	UDL-SBA	Président
Mr. E.A. ADDA BEDIA	Professeur	UDL-SBA	Rapporteur
Mr. K.H. BENRAHOU	Professeur	UDL-SBA	Examination
Mr. T.H.DAOUJJI	MC A	U de TIARET	Examineur
Mr. M.AMEUR	MC A	ENSET D'ORAN	Examineur
Mr. N.ELMEICHE	MC A	U. MASCARA	Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je pense à ma mère, mon père, ma femme ainsi ma famille, mes frères et ma sœur qui m'ont toujours encouragé. Et je n'oublierai pas qui m'apporte toujours leur soutien sans faille ; ainsi une partie de cette thèse leur revient.

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à Mr le professeur **ADDA BEDIA EL ABASS** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et leur amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M^r **Abdelouahed TOUNSI** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **K.H. BENRAHOU**, **T.H.DAOUJJI**, **M.AMEUR** et **N.ELMEICHE** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale.....	1
Chapitre I : généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	
I-1-introduction.....	5
I-2-Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	6
I-3-Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	9
I-3-1-Schéma de Mori-Tanaka.....	11
I-3-2-Schéma auto-cohérent de Hill.....	12
I-4- Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	14
I-4-1- Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	14
I-4-2- Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	15
I-4-3-Compaction sèche des Poudres.....	15
I-4-4- Projection plasma.....	15
I-4-5- Frittage et Infiltration.....	16
I-5- Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	16
I-6- Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	16
I-6-1- Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	17
I-6-2- Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	18
I-6-3- Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	19
I-7- Loi de mélange en (FGM) symétrique.....	20
I-8- Conclusion.....	22
Chapitre II : Les structures en matériaux à gradient de propriétés	
II-1-Introduction.....	24
II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM.....	25
II.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	26
II.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	27
II.2.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	29
II-3 Théories du comportement élastique des matériaux.....	32
II-3-1 Comportement élastique d'une plaque (FGM).....	33
II-3-2 Etat de contraintes planes.....	34
II-3-2 Champ des déformations.....	35
II-3-3 Expression des résultantes et moments.....	37
II-3-3-1 Résultantes en membrane.....	37
II-3-3-2 Moments par unité de longueur.....	38
II-3-4 Equation constitutive d'une plaque (FGM).....	39
II-3-4-1 Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des plaques (FGM) :.....	40
II-3-4-2 Relation d'élasticité.....	40

II-4-Conclusion.....	41
Chapitre III : Flambement des plaques FGM minces et épaisses	
III-1-Introduction.....	43
III-2- Détermination des propriétés des plaques S-FGM.....	44
III-3-Analyse d'une plaque S-FGM.....	46
III.4. Détermination des équations d'équilibre.....	48
III.4.1. Flambage des plaques S-FGM sous effet de température uniforme.....	49
III.4.2. Flambement des plaques S-FGM avec le changement de température linéaire.....	51
III.4.3.Flambement des plaques S-FGM sous le changement de température sinusoïdale.....	53
III.5.Conclusion.....	57
Chapitre IV : Analyse du flambement des plaques FGM par la théorie d'ordre élevé	
IV.1 Introduction.....	59
IV.2 Théorie des plaques raffinées pour les plaques FGM.....	60
IV.2.1 Cinématique.....	60
IV.2.2 Relations constitutives.....	62
IV.2.3. Équations régissant l'équilibre la plaque P-FGM.....	63
IV.3. Analyse de flambement des plaques soumis à un chargement dans le plan.....	66
IV.3.1. Etude de flambement d'une plaque rectangulaire.....	69
IV.4. Etudes comparatives et validation des résultats.....	70
IV.4.1. Études de paramètres d'une plaque (P-FGM) simplement appuyée.....	73
IV.5 .Conclusions.....	78
Chapitre V : Analyse du flambement des plaques « sandwiches » en FGM par la théorie d'ordre élevé à deux variables:	
V.1. Introduction.....	80
V.2. Modélisation des matériaux FGM.....	81
V.3. Théorie à quatre variables adaptés pour plaque raffinée.....	83
V.3.1.Les hypothèses de la théorie des plaques présente.....	83
V.3.2. Cinématique et équations d'équilibre.....	85
V.4. Analyse du flambement des plaques FGM hybride.....	88
V.4.1. Solution de Navier pour les plaques rectangulaires simplement appuyées.....	88
V.4.2. La solution de Ritz pour les plaques aux diverses conditions aux limites.....	90
V.5.Résultats et discussion.....	92
V.6. Conclusion.....	99
Conclusion générale.....	101

ملخص

الهدف من ه ذه الدراسة هو تحليل سلوك المرونة الحرارية على الصفائح السميكة المركبة من المواد المتدرجة الخاصة باستعمال نظرية جديدة ذو الترتيب العالي لمتغيرين و إجراء مقارنة بين مختلف النماذج التي تأخذ أو لا التشوهات العمودية و التي تستند على إدخال التوزيعات، الخطية، المكافئة، القطعية، الآسية و الجيبية على سمك مجال الإزاحة. على خلاف نظريات أخرى، عدد الدوال غير معروفة في النظرية المقترحة هم فقط أربعة، في حين خمسة أو أكثر في حالات أخرى لنظريات تشوه القص العرضي. النظرية المقترحة متناسقة المتغيرات تشبه النظرية الكلاسيكية للصفائح في جوانب عديدة لا تتطلب معامل تصحيح القص وتعطي وصفا مكافئا للاجهادات القص العرضي من خلال السمك بينما تحقق الشروط على الاجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف العلوية و السفلية للصفيحة. تمت دراسة نوعين من الصفائح المركبة من المواد متدرجة الخاصة (« نوع أ: مادة متدرجة الخاصة / سيراميك / مادة متدرجة الخاصة « ; « نوع ب: سيراميك / مادة متدرجة الخاصة / معدن «). نفرض أن معاملات المرونة و نسبة بواسون و معاملات التوزيع الجهد للصفيحة المركبة تتغير بدون انقطاع في اتجاه السمك وفق لقانون التوزيع بدلالة حدود في دالة الحجم للمكونات. استعملنا عدة أنواع من الصفائح المركبة بأخذ أو لا تماثل الصفيحة وسمك كل طبقة. النتائج المتحصل عليها بالنظرية المقترحة (مع أربعة مجاهيل) و النظريات الأخرى ذو الترتيب العالي للتشوه في القص العرضي (خمسة مجاهيل أو أكثر) تكاد تكون متطابقة. نستخلص أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة لحل سلوك المرونة لانحناء صفائح المواد المتدرجة الخاصة.

الكلمات الرئيسية: المواد المتدرجة الخاصة، نظرية الترتيب العالي لمتغيرين، نظرية تشوه القص العرضي، الصفائح المركبة.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, le flambement mécanique des plaques en matériaux fonctionnellement graduels (FGM) est concédéré en utilisant une nouvelle classe des théories des plaques à quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnues impliquées est de quatre alors que les autres théories de déformation de cisaillement nécessitent cinq variables. Cette présente théorie n'a pas besoin des coefficients de correction de cisaillement et donne une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur en satisfaisant l'annulation de la contrainte de cisaillement aux surfaces extrêmes de la plaque. Les propriétés matérielles de la plaque sont supposées être varier à travers l'épaisseur selon une loi de puissance. De plus le flambement thermique des plaques (FGM) a été aussi étudié en utilisant une approche simple et efficace basée sur la théorie classique des plaques et la théorie de premier ordre.

Mots clé : FGM, déformation, plaques sandwiches.

ABSTRACT

In this research, mechanical buckling of hybrid functionally graded plates is considered using a new four variable refined plate theory. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The theory presented is variation ally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolic ally across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. The plate properties are assumed to be varied through the thickness following a simple power law distribution in terms of volume fraction of material constituents. Governing equations are derived from the principle of minimum total potential energy. The closed-form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane loading has been obtained by using the Navier method. The effectiveness of the theories is brought out through illustrative examples.

In this research, mechanical buckling of hybrid functionally graded plates is considered using a new four variable refined plate theory. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The theory presented is variation ally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolic ally across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. The plate properties are assumed to be varied through the thickness following a simple power law distribution in terms of volume fraction of material constituents. In addition, the thermal buckling of functionally graded plates is studded using a simple and affection based on classical plate theory and fist shear deformation theory. Governing equations are derived from the principle of minimum total potential energy. The closed-form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane loading has been obtained by using the Navier method. The effectiveness of the theories is brought out through illustrative examples.

Keywords: Functionally graded materials, two-variable refined plate theory, shear deformation theory, Sandwich plate.

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Variation continue des propriétés	7
Figure I.2	Variation discrète des propriétés	8
Figure I.3	Variation continue de la microstructure (schématisée)	11
Figure I.4	Variation continue de la microstructure (photo)	13
Figure I.5	Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière	14
Figure I.6	Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique	15
Figure I.7	Principe de la méthode coulage en bande (L. Lostec,1997)	16
Figure I.8	Géométrie d'une plaque en FGM	17
Figure I.9	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	18
Figure I.10	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une plaque S- FGM pour les différent valeurs d'indice de gradient matériel k	19
Figure I.11	Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM	20
Figure I.12:	Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique	
Figure I.13:	Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique	
Figure I.14:	Variation de la fraction volumique de l'E-FGM symétrique	

CHAPITRE II

Figure II.1	Cinématique de Love-Kirchhoff (Afaq 2003a).....	24
Figure II.2	Cinématique de Reissner-Mindlin (Afaq 2003a).....	24
Figure II.3	Cinématique de la théorie d'ordre élevé (Afaq 2003a).....	27

Figure II.4	Profil de variation de $\psi(z)$ à travers l'épaisseur	30
Figure II.5	Profil de variation de $\psi'(z)$ à travers l'épaisseur	31
.....		
Figure II.6	Système d'axe d'une plaque en FGM	32
Figure. II-7	<i>Forces par unités de longueur</i>	
Figure. II-8	<i>Moments par unités de longueur</i>	

CHAPITRE III

Figure III.1	Configuration de système de coordonnées d'une plaque rectangulaire en (S-FGM)	7
Figure III.2	Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation uniforme de la température.	
Figure III.3	Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation linéaire de la température	11
Figure III.4	Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation sinusoïdal de la température	13
Figure III.5:	Effet de la variation de la température sur la température critique de flambement pour une plaque en S-FGM ($h/a = 0.2$)	
Figure III 6:	Elévation de la température critique de flambement d'une plaque S-FGM en fonction d'indice matériau k.	

CHAPITRE IV

Figure IV.1	Plaque rectangulaire soumise à un chargement dans plan	
--------------------	--	--

Figure IV.2	L'effet de la puissance de la FGM sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque carrée ($a=10h$) sous différentes conditions de chargement	63
Figure IV.3	L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque carrée ($a=10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)	63
Figure IV.4	L'effet du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la Plaque carré sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)	64

CHAPITRE V

Figure V.1	Variation de la fraction volumique en céramique le long de l'épaisseur de la plaque.	7 4
Figure V.2	Plaque rectangulaire soumise à un chargement dans le plan	7 5
Figure V.3	La charge critique de flambement de la plaque FGM hybride rapport à l'indice matérielle pour trois différents types de chargement avec $a/h = 10$ et $t_{FGM}/h = 0.8$	7 5
Figure V.4	La charge critique de flambement de la plaque FGM hybride rapport aux rapport mécanique pour trois différents types de chargement avec $a/h = 10$ et $p = 1$	7 6
Figure V.5	L'effet du rapport mécanique et la puissance du FGM (t_{FGM}/h) sur la charge critique de flambement de la plaque FGM hybride carré ($a/h = 10$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p = 1$	7 7
Figure V.6	L'effet du rapport mécanique et l'épaisseur de la plaque FGM carré (t_{FGM}/h) sur la charge critique de flambement avec ($a/h = 10$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p = 1$.	7 7

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$T(x, y, z)$	Chargement thermique
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{\}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	6
--------------------	---	---

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	Comparaison de la charge critique de flambement N_{cr} de la plaque FGM rectangulaire pour $(a/b=0,5, p=1)$	5 6
Tableau IV.2	Comparaison de la charge critique de flambement N_{cr} MN/m d'une plaque rectangulaire épaisse	5 7
Tableau IV.3	charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)	5 8
Tableau IV.4	Charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression le long de l'axe x et à la tension le long de l'axe y ($\gamma_1=-1, \gamma_2=1$)	5 9
Tableau IV.5	Charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression le long de l'axe x et à la tension le long de l'axe y ($\gamma_1=-1, \gamma_2=1$)	6 0

CHAPITRE V

Tableau V.1	Les conditions aux limites cinématiques de bord des plaques considérées	6 8
Tableau V.2	Comparaison de la charge critique de flambement (MN/m) de la plaque FGM rectangulaire	6 9
Tableau V.3	Comparaison de la charge critique de flambement (MN/m) de la plaque rectangulaire FGM	7 0
Tableau V.4	L'effet de l'indice matériel p et t_{FGM}/h sur la charge critique de flambement d'une plaque hybride avec $(a/h=10)$ sous différentes conditions de chargement.	7 1

Figure V.5 L'effet de l'indice matériel p et le rapport géométrique a/h sur la charge critique de flambement d'une plaque hybride avec $(t_{FGM}/h=0.8)$ sous différentes conditions de chargement.

Introduction générale

Introduction générale :

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques (FGM) dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Dans le chapitre I les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont présentés. Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [25]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Pour cela on a présenté dans le chapitre II les différentes théories dans leur ordre d'importance. C'est en (1888) que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

Dans le chapitre III, les équations d'équilibre et de stabilité d'une plaque rectangulaire SFGM sous des charges thermique sont déterminée en se basant sur la théorie du premier ordre .le système SFGM est constitué de céramique (Al_2O_3) et de métal (Al).ce mélange varie à travers l'épaisseur de la plaque selon des fonction sigmoïde .des charges thermique varient d'une façon uniforme ,linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur .l'influence des rapport géométrique des dimensions l'indice matérielle et de cisaillement transversale sur la température de flambement sont étudié.

Dans le chapitre IV, Une théorie des plaques raffinées simple et efficace, a été développée avec succès pour l'analyse du flambement des plaques (FGM). Cette théorie, qui a une forte similitude avec la théorie des plaques classique dans de nombreux de variable tenant en comptes pour une variation quadratique des contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions au limite sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement.

Dans le chapitre V, une nouvelle théorie des plaques à quatre variables est développée pour étudier le comportement du flambement des plaques FGM hybrides (céramique –FGM-métal) soumis à des charges axiales .en utilisant la solution de Navier ,les solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse du flambement de ces plaques .les effets du plusieurs variables ,tel-que l'épaisseur de la couche FGM, l'indice matérielle, le rapport des épaisseurs des couches et le rapport de dimensions de la plaque sur la charge critique de flambement des plaques FGM hybride seront discuté.

Chapitre I

**Généralités sur les matériaux à gradient
de propriétés**

I.1. Introduction :

Les matériaux composites, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. D'autres parts les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées vu leur faible résistance mécanique. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continuellement avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Z. Zhong et al, 2007). La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil, ils trouvent également des applications biomédicales (C. Baron et al, 2008). L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux. La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été

proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des chercheurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des poutres et des plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage. Le but de notre présent travail étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. Suresh et Mortensen (M. Savoia et al, 1995) ont publié une recherche bibliographique détaillée sur la technologie des matériaux à gradient fonctionnel en 1998. Birman et Byrd (Birman, V. et Byrd, L.W, 2007) ont également publié une recherche exhaustive sur les travaux dédiés au développement des FGM couvrant la période 1997-2007. Ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies.

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.1) ou discrète (figure I.2) à travers l'épaisseur (Hirai, 1996). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délaminage et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries

aéronautiques, aérospatiales, biomécaniques, automobiles et dans bien d'autres applications technologiques.

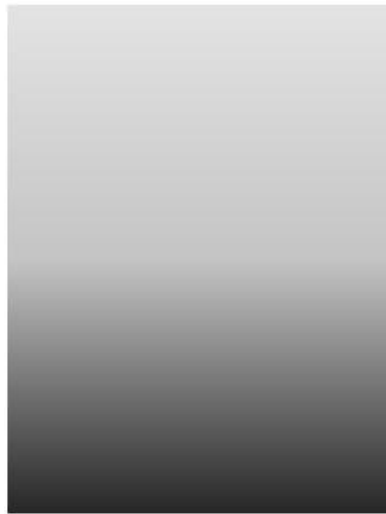


Figure I.1: Variation continue des propriétés.

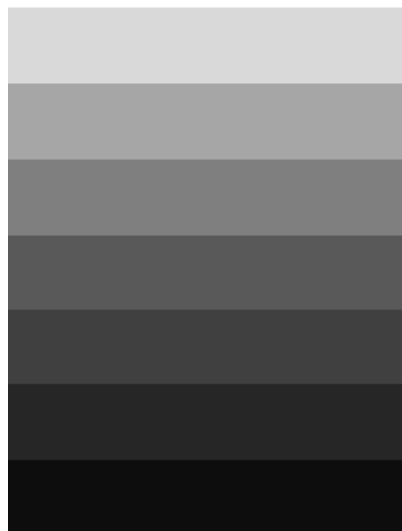


Figure I.2: Variation discrète des propriétés.

Généralement, les «FGM» sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (J.N. Reddy, 2000). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des «FGM» sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Céramique	- Bonne résistance thermique. - Bonne résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface. -Relaxation des contraintes thermiques.
Métal	- Bonne résistance mécanique. - Conductivité thermique élevée. - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau «FGM» est illustré dans la figure I.3. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des «FGM». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (S.N.R.K. Iyengar et al, 1982).

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

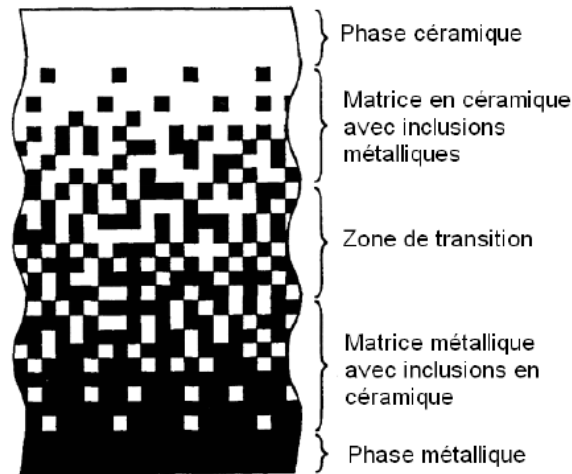


Figure I.3: Variation continue de la microstructure (schématisée).

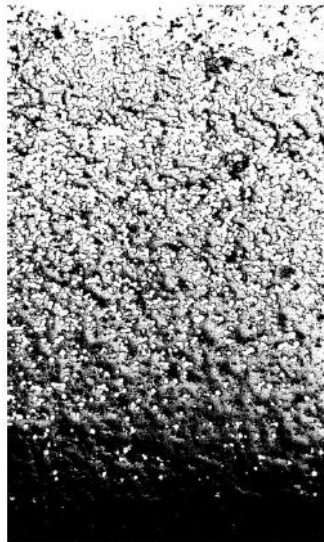


Figure I.4: Variation continue de la microstructure (photo).

Avec cette configurations des matériaux FGM, on peut alléger les concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau est distingué. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des

FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch ,1986).

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (N.D.Kuznetsov et al, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisées pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Reissner ,1980).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de Matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires japonaise de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (N.D.Kuznetsov et al, 1981).

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à

un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (H. Okamura,1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique (H. Okamura,1991).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

1.3.1 Schéma de Mori-Tanaka :

Les lois de mélange (P-FGM, S-FGM et E-FGM) sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales, existent. Le plus utilisé est basé sur le schéma de Mori et Tanaka (T. Mori et al ,1973) qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure I.5. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase

matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.

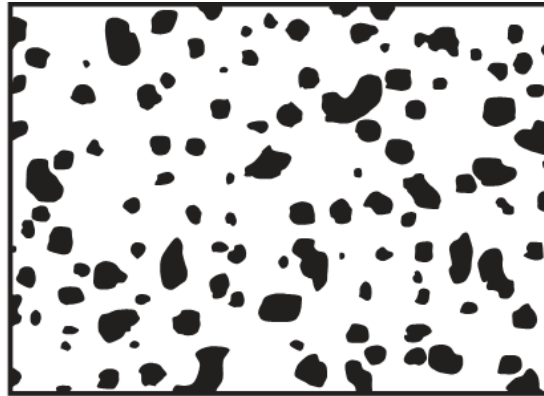


Figure I.5: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire

Si on note par E le module de compressibilité, par G le module de cisaillement et par V la fraction volumique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka (T. Mori et al ,1973), pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra (S.S.Vel et al, 2004)):

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + \frac{4G_1}{3})}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + \frac{4f_1}{3})}$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1 - K_1)}{(1/K_2) - (1 - K_1)}$$

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)}$$

α est le coefficient de dilatation thermique.

1.3.2 Schéma auto-cohérent de Hill :

La méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci

permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la Figure I.6.



Figure I.6: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} + \frac{V_2}{K - K_1}$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{G - G_2} + \frac{V_2}{G - G_1}$$

Où g est défini par :

$$g = \frac{K}{K + \frac{4G}{3}}$$

Et η est défini par:

$$\eta = \frac{1}{5}(3 - g)$$

A partir des équations précédentes, l'expression du module de élastiques est obtenue :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + \frac{4G}{3}} + \frac{V_2}{K_2 + \frac{4G}{3}}} - \frac{4}{3}G$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1}{K_1 + \frac{4G}{3}} + \frac{V_2}{K_2 + \frac{4G}{3}} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{G - G_2} + \frac{V_2 G_1}{G - G_1} \right] + 2 = 0$$

Pour les deux schémas précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{3K + G}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$$

La masse volumique est évaluée à partir de la loi de mélange selon :

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.7), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande (L. Lostec, 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

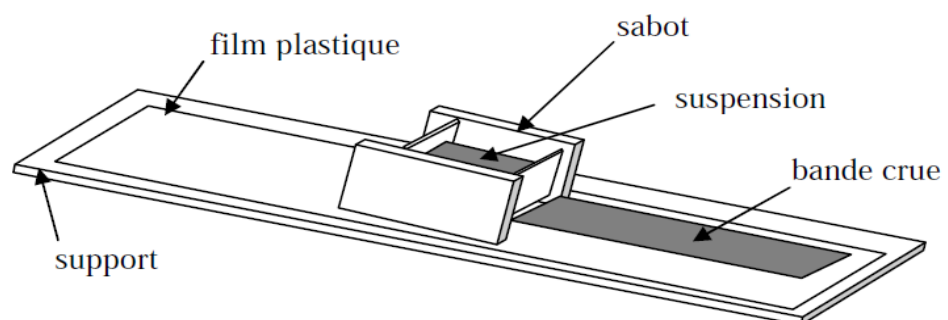


Figure I.7 : Principe de la méthode coulage en bande (L. Lostec, 1997)

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (R. E. Mistler, 1973) ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (P. Boch., 1986).

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (J.S. Moya et al, 1992);
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi,

généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (A Bishop. Et al, 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (H.D. Steffens et al,1990).

I.4.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (M. Takahashi et al ,1990). Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production

des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'épaisseur. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Pour voir les contextes des plaques FGM, on va considérer une plaque en FGM conçu en céramique et de métal.

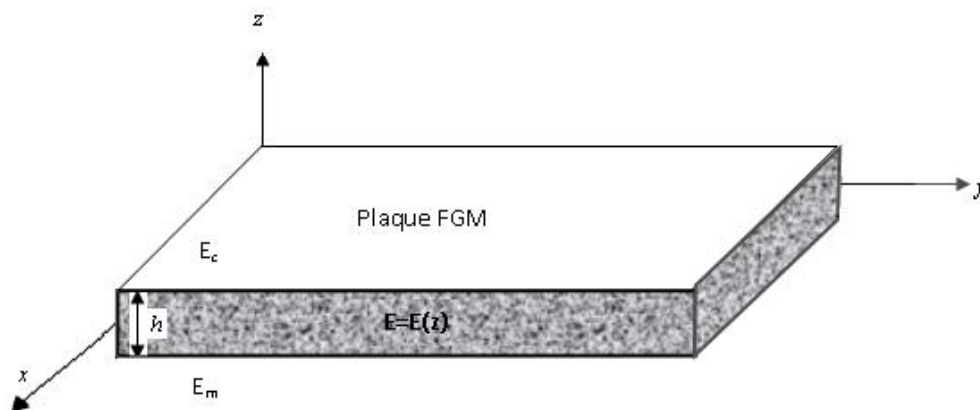


Figure I.8 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (G. Bao et al, 1995) :

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_m + (\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.9, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

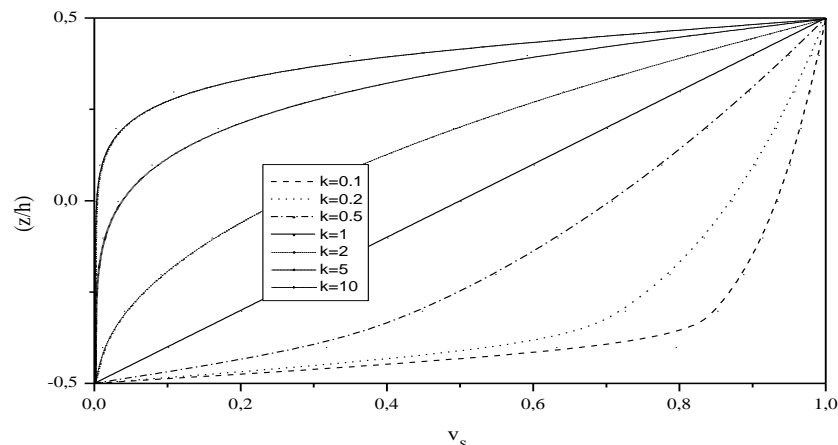


Figure I.9 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite de multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur les interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (G. Bao et al, 1995). Par conséquent, Chung et chi (Chi . Shyang-ho et al, 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

(I.3.a)

Et

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

(I.3.b)

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

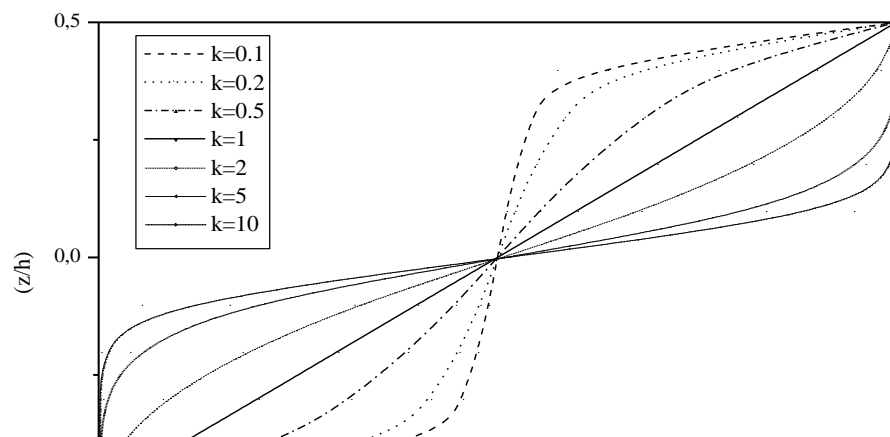
(I.4.a)

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

(I.4.b)

La figure I.10 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée

(Plaque S-FGM)



I.6.3. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, les chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (F. Delale et al, 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.11.

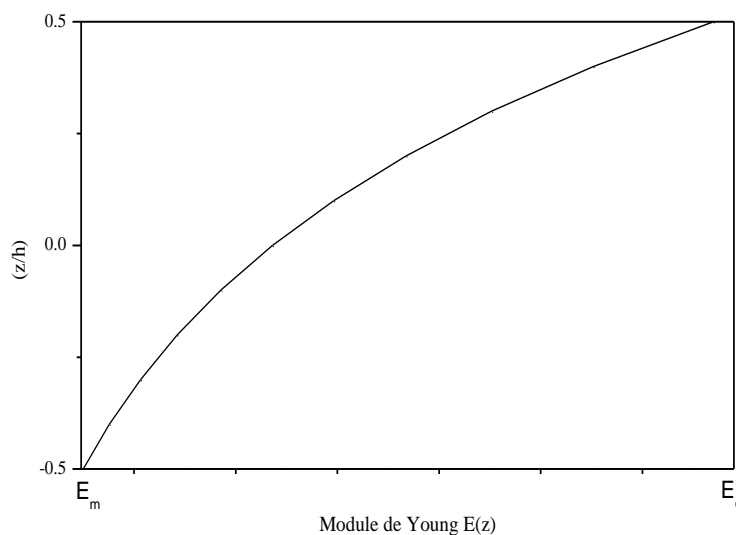


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une

I.7. Loi de mélange en (FGM) symétrique:

La propriété du P-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$P(z, T) = [P_b(T) - P_{mp}(T)] \left(\frac{-2z}{h} \right)^k + P_{mp}(T) \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_{mp}(T)] \left(\frac{2z}{h} \right)^k + P_{mp}(T) \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

La propriété du S-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$P(z, T) = [P_b(T) - P_{mp}(T)] [1 - 0.5(2 + 4z/h)^k] + P_{mp}(T) \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq -h/4$$

$$P(z, T) = [P_b(T) - P_{mp}(T)] [0.5(-4z/h)^k] + P_{mp}(T) \text{ Pour } -h/4 \leq z \leq 0$$

$$P(z, T) = [P_b(T) - P_{mp}(T)] [0.5(4z/h)^k] + P_{mp}(T) \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/4$$

$$P(z, T) = [P_b(T) - P_{mp}(T)] [1 - 0.5(2 - 4z/h)^k] + P_{mp}(T) \text{ Pour } h/4 \leq z \leq h/2$$

La propriété de l'E-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$P(z, T) = P_{mp}(T) e^{B_1(-z+h/2)} \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$P(z, T) = P_{mp}(T) e^{B_2(z+h/2)} \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

Avec

$$B_1 = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_b}{P_{mp}} \right) \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_t}{P_{mp}} \right)$$

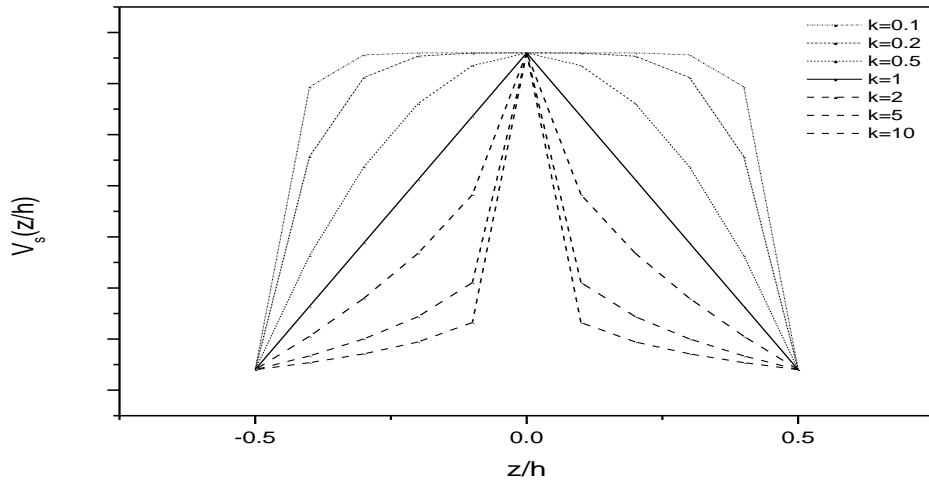


Figure I.12: Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique

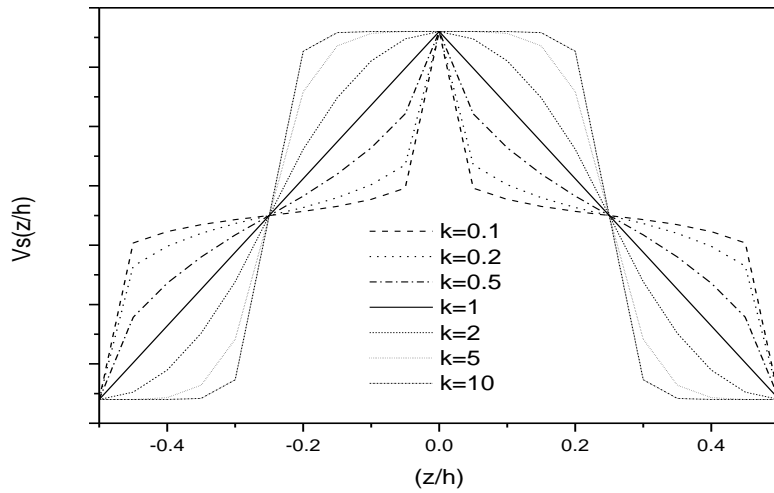


Figure I.13: Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique

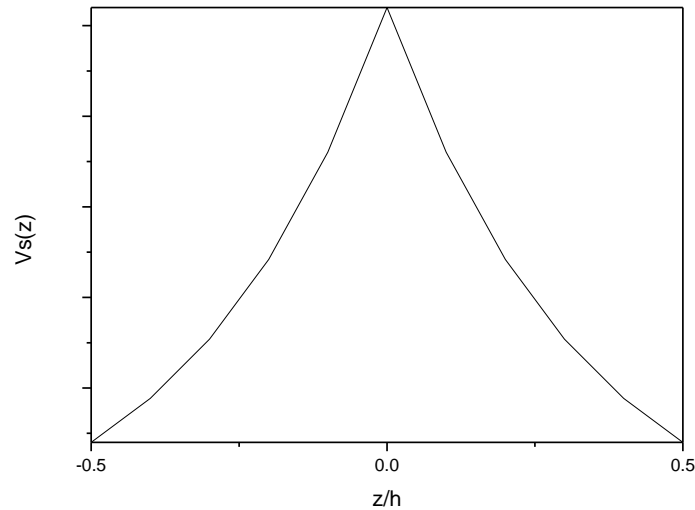


Figure I.14: Variation de la fraction volumique du E-FGM symétrique

Où P_t , P_b , P_{mp} sont les propriétés thermomécaniques au niveau des surfaces supérieure, inférieure et médiane et qui sont indépendantes de la température. Il faut noter que la distribution est symétrique lorsque $P_t = P_b$.

n et p sont les index des fractions volumiques qui pilotent le profil de variation des propriétés à travers l'épaisseur.

Les fractions volumiques du P-FGM symétrique, du S-FGM symétrique ainsi que le module de Young obéissant à la loi E-FGM symétrique sont représentées graphiquement sur les figures I.12, I.13 et I.14 respectivement.

I.8. Conclusion

Dans ce qui précède, les matériaux à gradient fonctionnel ont été définies et les différentes lois de mélange ont été présentées puis adaptées à des éléments structuraux symétriques. Les FGM ayant été conçus principalement pour résister à des environnements thermiques sévères, le paramètre température a été introduit et son influence sur les propriétés thermomécaniques des FGM a été mise en évidence à travers des représentations graphiques. Nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de

créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application.

Chapitre II

**Les structures en matériaux à gradient
de propriétés**

II-1-Introduction :

Les équations d'équilibre non linéaires et les équations de stabilité linéaires sont formulées pour les poutres, les plaques et les coques par (Brush et Almorth, 1975). L'objet principal de cette dernière référence est le comportement au flambement des éléments de structure construite en matériaux isotropes, soumises à des charges thermique. Par la suite, plusieurs chercheurs ont développé les équations d'équilibre et de la stabilité pour les plaques et les coques en matériaux composites, et ils les ont utilisées pour l'analyse du comportement de flambement et de vibration des structures, une synthèse sur le flambement des plaques composites stratifiées a été effectuée par (Leissa ,1992). Durant ces récentes années, plusieurs travaux de recherche ont considéré l'analyse du flambement des plaques composites sous des charges mécaniques et thermiques. Une formulation générale pour le flambement des plaques composites stratifiées symétriques sous des forces de compression uni axiales variant linéairement à été présenté par (Pandey et Sherbourne ,1991) en utilisant une méthode énergétique. (Chai et Hoon ,1992) ont utilisé l'approche de l'énergie potentielle totale et la méthode de Rayleigh-Ritz. Pour étudier le comportement au flambement des plaques composites stratifiées simplement appuyées et soumises à des charges axiales. La conception des plaques composites stratifiées pour des charges de voilement par des charges de cisaillement maximales en utilisant la méthode des éléments finis par (Chang et al, 1993). Le comportement au flambement des plaques composites soumises à un chargement bi-axial a été étudié expérimentalement et numériquement par (Kim et Hoa ,1995). (Islami et Javaheri, 1999) ont utilisé la méthode de l'énergie potentielle totale pour étudier le comportement au flambement des coques cylindriques en composite stratifié sous des charges mécaniques et thermiques.

Des études récentes sur des matériaux nouveaux performants connus par matériaux fonctionnellement gradués (FGM) qui ont une grande performance et une grande résistance à la température. Ils sont utilisés en aéronautique, industrie automobile, génie civil, etc.

Les matériaux (FGM) sont des matériaux composites non homogènes à l'échelle microscopique où les propriétés mécaniques varient d'une façon continue d'une surface à une autre (Suresh et Mortensen, 1998). Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et métal. On constate qu'à partir de la

littérature que la plupart des recherches sur les (FGM) sont limitées à l'analyse thermique, la rupture et l'optimisation du matériau. Très peu de travaux ont été effectués sur les analyses de la stabilité et le comportement vibratoire des structures fabriquées par les matériaux fonctionnellement gradués.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM

Afin de résoudre les problèmes des structures composées d'éléments tels que poutres et des plaques (FGM) dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en (1888) que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh ,1877 ; Timoshenko ,1921 ; Reissner ,1945 et Uflyand ,1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (S.P. Timoshenko, 1972). En (1877), Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de Timoshenko (S.P. Timoshenko, 1972) montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonance calculées, en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une

extension à la théorie des plaques quant au cisaillement transverse est proposée par (Reissner, 1945) dans le cas statique des plaques. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par (Uflyand, 1948). C'est cependant l'article de (Mindlin, 1951), publié trois ans plus tard qui fera date. Vers (1970), (Whitney et al, 1969 ; Whitney et Sun, 1973 ; Pagano, 1970 ; Srinivas et Rao, 1970) ont montré, grâce à leurs travaux respectifs, que les effets du cisaillement sont plus importants pour les plaques stratifiées que pour les plaques isotropes. Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan médian, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature, trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin, 1951 ; Reissner, 1945 ; Narasimhamurthy, 1957 ; Schmidt, 1977 ; Levinson, 1980 et Ambartsumyan, 1970). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Étant donné que la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

II.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie CPT (Classical Laminated Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff [KIRCHHOFF 1950].

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une section droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

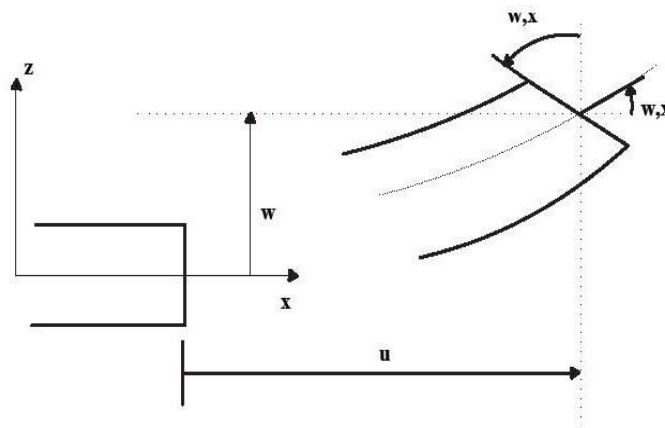


Figure II-1 cinématique de Love-Kirchhoff (Afaq 2003)

II.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Le principe de la théorie (FSDT) est de relaxer l'hypothèse de normalité des sections après déformation (figure II-2) de la théorie classique (CPT), on introduit alors les hypothèses des poutres de (Timochenko ,1972à ou des plaques de (Mindlin ,1951), l'approximation

des déplacements dans l'épaisseur prenant ainsi en compte la rotation de la section déformée par un développement au premier ordre du champ de déplacement dans l'épaisseur. Cette hypothèse se traduit par une déformation en cisaillement transverse constante dans l'épaisseur. Cependant, du fait que les contraintes ainsi calculées ne s'annulent pas sur les surfaces externes, cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

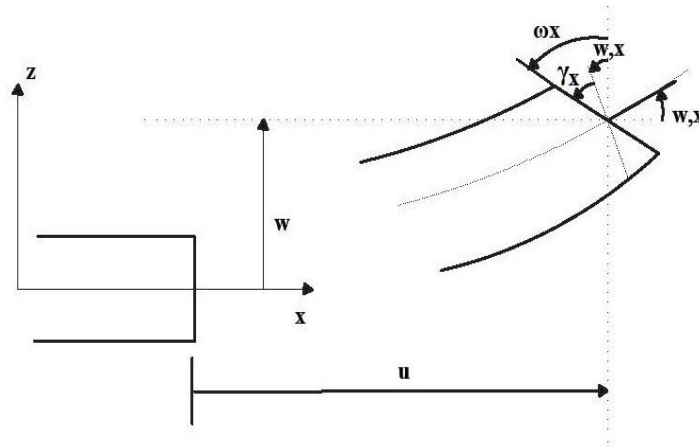


Figure II-2 cinématique de Reissner-Mindlin (Afaq 2003)

Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes de facteur de correction qui dépend de l'énergie de déformation du stratifié et donc à la fois du type de stratification et des matériaux.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner , 1945et Mindlin , 1951) qui a mené au modèle de plaque de (Reissner-Mindlin, ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger ,1959 ; Reddy ,1997et 1999).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II-2}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x, y et z, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ et } \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} .$$

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 Théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT)

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont vu le jour.

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement a travers l'épaisseur, la théorie à ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur (figure II-3). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al 1949 ; Naghdi ,1957 ;Reissner ,1951 ; Reddy, 1987 ;Kant et Swaminathan ,2002). Nous avons introduit ici un modèle de plaque pour analyser le comportement.

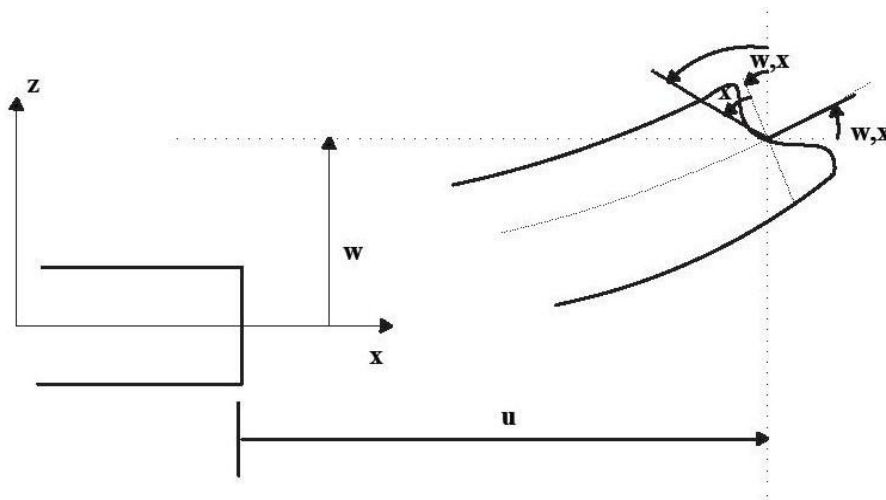


Figure II-3 cinématique de la théorie d'ordre élevé (Afaq 2003)

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{II-3)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x, y et z , respectivement, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

(Touratier, 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{I.10}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par (Karama et al., 2003) est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al. ,2003) est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]}z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0$$

Cette classe de théories plus raffinés a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre élevé. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor (Nguyen ,2004).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires ce qui alourdit le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque ou de la poutre dans la direction transverse (Cugnoni, 2004).

Les hypothèses sur lesquelles est basée la présente théorie sont les mêmes que celles de la formulation de Reddy [25]. De plus, la fonction de forme est telle que les conditions suivantes sont rigoureusement satisfaites :

- Les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} sont nulles au niveau des surfaces supérieure et inférieure, ce qui est vérifié par: $\frac{d\Psi(z)}{z}\Big|_{z=\pm h/2} = 0$.
- Le diagramme des contraintes du cisaillement transverse à travers l'épaisseur est parabolique (figure II.4),
- La déformation en cisaillement est maximale au niveau du plan moyen ($z = 0$), ce qui est vérifié par: $\frac{d\Psi(z)}{z}\Big|_{z=\pm h/2} = 1$.
- La fonction de forme $\varphi(z)$ et sa dérivée première sont continues à travers l'épaisseur (figures II.4 et II.5). Ceci permet d'avoir une continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement le long de l'axe z .

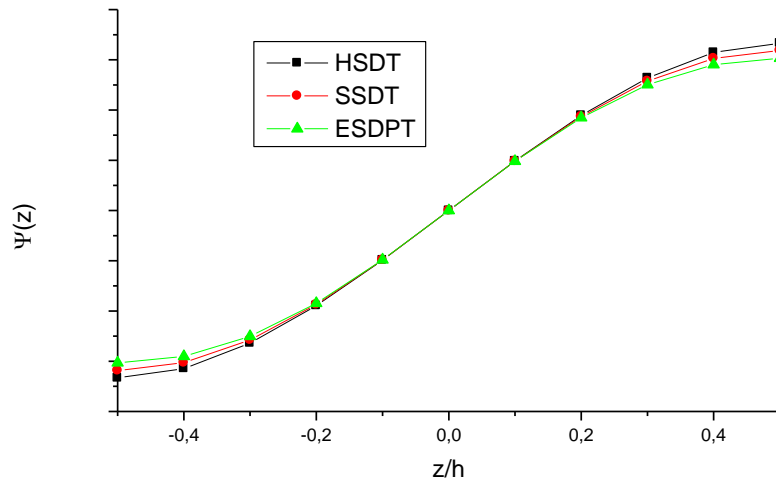


Figure II.4: Diagramme de variation de $\psi(z)$ à travers l'épaisseur.

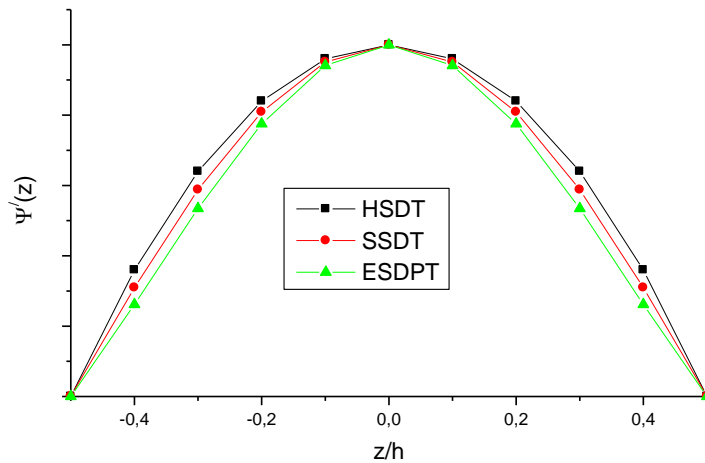


Figure II.5: Diagramme de variation de $\psi'(z)$ à travers l'épaisseur.

II-3 Théories du comportement élastique des matériaux :

L'étude du comportement élastique d'une structure constituée de matériaux (FGM) est généralement analysée par la théorie des plaques basées sur une évaluation du champ des contraintes et du champ des déplacements. Cette étude comportera deux phases :

- *L'étude du comportement mécanique de champ, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau (FGM). Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau (FGM).*

- *L'étude du comportement global des plaques (FGM), et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau (FGM) ou comportement du stratifié.*

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en (FGM) sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

II-3-1 Comportement élastique d'une plaque (FGM)

Le comportement élastique d'un matériau (FGM), rapporté à ses axes principaux (Fig. I.4), peut être décrit soit par sa matrice de rigidité C ,

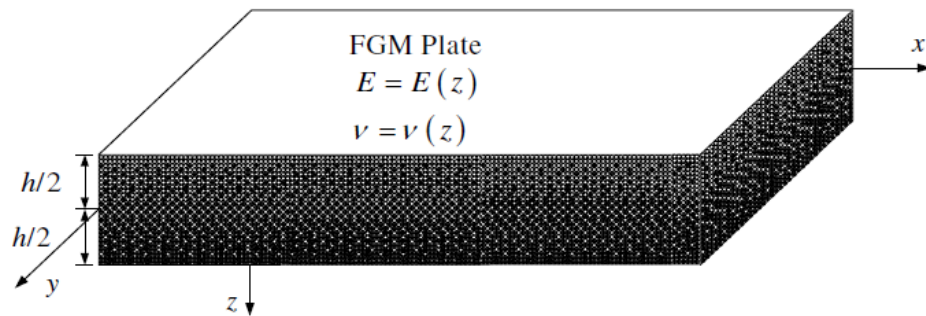


Figure II.6 : système d'axe d'une plaque en FGM

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

(II.4)

Soit par la matrice de souplesse en définie par S :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

II-3-2 Etat de contraintes planes

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(II.6)

La déformation normale « ε_z » peut être exprimée en fonction des composantes des contraintes planes en utilisant le fait que $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{36}\tau_{xy}$$

(II.7)

Dans le plan matériau principal, les termes des coefficients de rigidité C_{16} ($i \neq 6$) sont nuls, par conséquent $Q_{16} = Q_{26} = 0$. Ainsi, dans le plan principal d'un matériau (FGM), les équations constitutives en contraintes planes auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

En inversant cette dernière équation, nous aurons :

Les éléments de cette matrice en contrainte plane sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Où : $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{12} &= \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned}$$

Les constantes qui peuvent être mesurées dans le laboratoire d'une façon exacte sont $E_1, E_2, \nu_{21}, G_{21}$. Une mesure exacte du coefficient de poisson ν_{21} est souvent très difficile car, il est très petit pour plusieurs matériaux (FGM).

Les expressions explicites des termes Q_{ij} en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ Q_{12} &= Q_{13} = \nu Q_{11} \\ Q_{66} &= \frac{E}{2(1 - \nu)} \end{aligned}$$

II-3-2 Champ des déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements soit

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \right.$$

(II.10)

Pour un schéma où les déformations en cisaillement transverse sont nulles :

$$\gamma_{xz} = 0 \text{ et } \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.11})$$

Cette hypothèse implique :

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

La matrice de la déformation se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

(II.14)

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(II.15)

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

(II.16)

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

En posant :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

(II.17)

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion :

$$\text{Ou plus simplement : } \{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + z\{k\}_x$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

II-3-3 Expression des résultantes et moments

II-3-3-1 Résultantes en membrane

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (voir Figure ci-dessous) sont définies

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz$$

(II.18)

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz$$

(II.19)

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz$$

(II.20)

Comme suit :

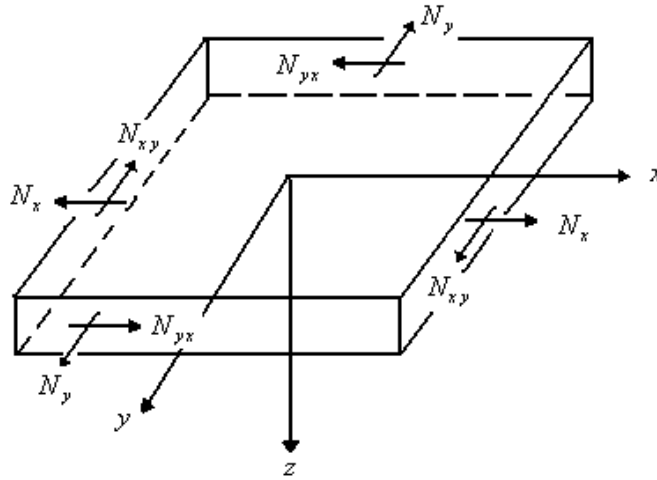


Figure. II-7: Forces par unités de longueur

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad (II.21)$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad (II.22)$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]^k z dz \right) \{k\} \quad (II.23)$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\}$$

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1})$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

Où :

La matrice $[\bar{Q}]^k$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (I-27) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{k\}$ par les matrices $[A]$ et $[B]$. La matrice $[A]$ représente « la membrane » et la matrice $[B]$ représente « la matrice de couplage membrane – flexion ».

II-3-3-2 Moments par unité de longueur

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi :

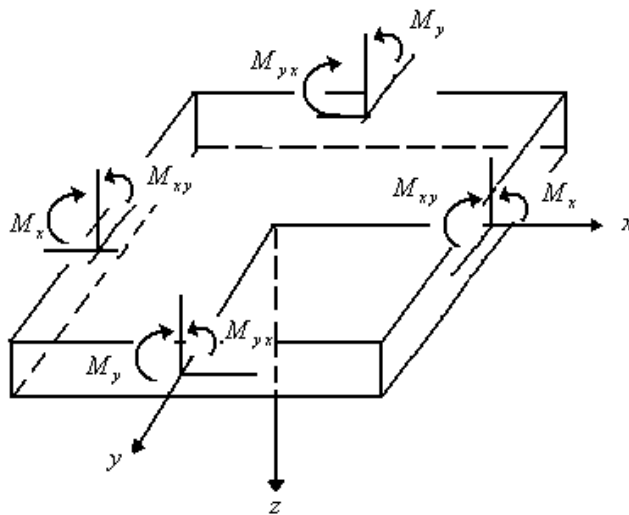


Figure. II-8: Moments par unités de longueur

M_x : Moment fléchissant d'axe y , dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y .

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x\} z dz$$

(II.24)

M_y : *Moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x.*

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_y\} z dz$$

(II.25)

M_{xy} : *Moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy}*

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \quad (\text{II.26})$$

Ou bien sous une forme condensée : $\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz$

Substituant l'équation (I-20) dans les équations (I-28), (I-29) et (I-30), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.27})$$

Ou la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (\text{II.28})$$

II-3-4 Equation constitutive d'une plaque (FGM)

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les forces et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, Elle s'obtient en regroupant les expressions des résultantes et moments suivant une seule écriture matricielle sous la forme.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

(II.29)

Les termes de la matrice introduite sont donnés par les expressions suivantes :

$$[\mathbf{A}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{\mathbf{Q}} dz$$

(II.30)

$$[\mathbf{B}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{\mathbf{Q}} z dz$$

(II.31)

$$[\mathbf{D}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{\mathbf{Q}} z^2 dz$$

(II.32)

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et la matrice de couplage membrane- flexion- torsion. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristique mécanique différente. Le couplage est nul ($\mathbf{B}=0$), seulement dans le cas où la plaque est symétrique.

II-3-4-1 Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des plaques (FGM) :

Les facteurs liés à l'environnement qui engendrent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans les plaques (FGM) ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz, etc. Ces phénomènes mécaniques ; rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

II-3-4-2 Relation d'élasticité :

Le premier effet de variation de la température est de modifier la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température

(extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatations thermiques peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y, z) et à l'instant t sous la forme : $\varepsilon_{i(\text{thermique})}^T = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t)$ $i=1,2,\dots,6$

(I-37),

Où α_i sont les coefficients des dilatations thermiques et ΔT est la variation des températures à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques comme étant nulles.

La loi d'élasticité, écrite dans un état de référence où les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^T \quad (\text{II-33})$$

Où S_{ij} sont les constantes de souplesse et ε_i^T les déformations dues aux effets thermiques.

La forme inverse s'écrit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j + \varepsilon_j^T) \quad (\text{II-34})$$

Où C_{ij} sont les constantes de rigidité.

Dans la pratique, les phénomènes thermiques ne produisent que des extensions ou contractions (appelées sous le terme général de dilatation) n'affectant pas les déformations en cisaillement. Dans ce cas, les relations d'élasticité peuvent être réécrites comme suit :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^T \quad i=1, 2,3 \quad (\text{II-35})$$

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j \quad i=4, 5,6 \quad (\text{II-36})$$

Et

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j + \varepsilon_j^T) \quad i=1, 2,3 \quad (\text{II-37})$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j \quad i=4, 5, 6 \quad (II-$$

38)

II-4-Conclusion:

Dans ce chapitre on a utilisé le modèle de Kirchhoff- Love pour déterminer le champ de déplacement, et on a appliqué l'approche variationnelle afin de trouver les équations d'équilibre pour la plaque FGM. La détermination de ces dernières va nous mené à une équation différentielle qui exprime l'équilibre des plaques soumises à une charge axiale de compression, dans le prochain chapitre .cette équation est ainsi applicable dans tous les cas d'appui : appui simple, appui double et encastrement.

Chapitre III

Flambement des plaques minces et épaisses

III-1-Introduction :

Ces dernières années, des études récentes sur des matériaux nouveaux performants connus par matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Ce sont des matériaux de haute performance, les matériaux résistants à la chaleur capables de résister à ultra-haute température et très importants gradients thermiques utilisés dans les industries de l'aérospatiale. Les FGM sont microscopiquement non homogène dans lequel les propriétés mécaniques varient d'une façon continue d'une surface à l'autre (S. Suresh et A. Mortensen, 1998 ; M. Yamanouchi et M. Koizumi, 1991). Avec l'utilisation accrue de ces matériaux pour les composants structuraux dans de nombreux applications d'ingénierie, l'étude du comportement thermo-élastique de la stabilité a conduit à de grande travaux ; parmi ces dernier (R. Javaheri, MR. Eslami, 2002; Wu. Lanhe, 2004). Javaheri et Eslami (R. Javaheri et MR. Eslami,2002) ont étudié le flambement thermique des plaques minces rectangulaires alors Lanhe (Wu. Lanhe, 2004) a étudié le cas des plaques épaisses. Najafizadeh et Eslami (MM. Najafizadeh et MR. Eslami, 2002) ont analysé le flambement thermique de plaques circulaires en FGM. Les travaux disponible sur le flambement de plaques FGM sont limités à des plaques où les propriétés des matériaux varient comme une forme de puissance dans l'épaisseur. Il peut être conclu que le travail disponible sur le flambement de plaques FGM sont limités à des plaques où les propriétés des matériaux varient sous une forme de puissance suivant l'épaisseur. Deux techniques d'homogénéisation peuvent être utilisées pour trouver les propriétés dans un point. La règle des mélanges est la technique classique et simple, qui est largement utilisé dans les matériaux composites. Dans cette technique, les modules élastiques efficaces d'une plaque FGM sont déterminés à partir des fractions volumiques et les formes des constituants. La méthode de Mori-Tanaka (T. Mori et K. Tanaka, 1973) et la méthode auto-cohérente (R. Hill, 1965) sont deux techniques de la micromécanique les plus utilisé. Récemment, Chehel Amirani et al. (M. Chehel Amirani et al, 2009) utilisé à la fois la loi de mélange et les techniques micromécaniques pour étudier la vibration libre des poutres sandwichs avec du matériel graduée fonctionnellement en tant que matériau de base. Les résultats obtenus à partir de la technique micromécanique et la technique des mélanges (M. Chehel Amirani et al, 2009) , montrent qu'il ya une différence insignifiante entre les résultats obtenus par ces deux dernier techniques. Par

conséquent, l'utilisation de la loi de mélanges est recommandée pour les propriétés thermo mécanique des FGM, car sa mise en œuvre est plus simple que la technique de la micromécanique.

La loi de puissance (Z.H. Jin et G.H. Paulino,2001; S. Joshi et al,2003) et la fonction exponentielle (Z.H. Jin et R.C. Batra, 1996;F. Erdogan et Y.F. Chen,1998) sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés des matériaux de FGM suivant l'épaisseur. Toutefois, dans les deux fonctions en loi de puissance et exponentielles, les concentrations de contraintes apparaissent dans l'un des bords dans lequel la matière est continue, mais qui évolue rapidement. Par conséquent, Chung et Chi (Y.L. Chung, S.H. Chi, 2001) et Sallai et al. (B.O. Sallai et al, 2009) a proposé une fonction sigmoïde de SFGM, qui est composée de deux fonctions de puissance pour définir une nouvelle fraction de volume. Chi et Chung (S.H. Chi et Y.L. Chung, 2002) a indiqué que l'utilisation d'une fonction sigmoïde peut réduire de manière significative les facteurs d'intensité de contrainte d'un corps fissuré. Dans ce chapitre, l'équilibre et la stabilité d'une plaque rectangulaire construite de matériaux

S-FGM sous charges thermiques sont étudiés à partir de la théorie de la déformation de premier. Les plaques S-FGM sont en céramique (Al_2O_3) et métal (Al) distribués à travers l'épaisseur de la plaque, selon la fraction volumique des matériaux constitutifs sur la base des fonctions sigmoïdes. Les charges thermiques sont supposées être uniformes, la température augmente de façon linéaire et sinusoïdale à travers la direction d'épaisseur.

III-2-Détermination des propriétés des plaques S-FGM :

On va examiner une plaque rectangulaire faite d'un mélange de métal et de céramique comme le montre la Figure III.1. Dans le cas de l'ajout d'une plaque d'une seule loi de puissance pour la composition de multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des bords où le matériau est continu, mais change rapidement à l'intérieur (Y.D. Lee, 1995; G. Bao et L. Wang, 1995) . Par conséquent, Chung Chi et (Y.L. Chung et S.H. Chi, 2001) et (Sallai et al, 2009) a défini la fraction volumique en utilisant deux fonctions en loi de puissance pour assurer une distribution amortie des contraintes.

Le constituant céramique des matériaux fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique. Le constituant métal ductile, d'autre part, empêche la fracture causée par des contraintes dues au gradient de température élevée dans une période de temps très courte. En outre, un mélange d'une céramique et un métal ayant une fraction volumique variant de façon continue peuvent facilement être fabriqué. Nous supposons que le module d'élasticité ainsi que le coefficient extension thermique change suivant l'épaisseur dans la direction z , tandis que le coefficient de poisson est supposé constant (Sugano ,1990 ; Hsu ,1984). Les propriétés matérielles des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont introduites suivant (Praveen et Reddy, 1998).

La fraction volumique dans les S-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{(III.1a)}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{(III.1b)}$$

Où :

h : L'épaisseur de la plaque

z : La coordonnée suivant l'épaisseur.

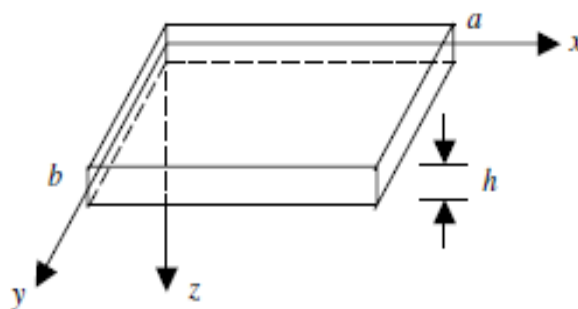


Figure III-1 : Configuration de système de coordonnées d'une plaque rectangulaire en (S-FGM)

En utilisant la loi de mélange, le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la S-FGM peut être calculée par:

$$E(z) = E_m + g_1(z)E_{cm} \quad 0 \leq z \leq h/2$$

(III.2a)

$$E(z) = E_m + g_2(z)E_{cm} \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

(III.2b)

$$\alpha(z) = \alpha_m + g_1(z)\alpha_{cm} \quad 0 \leq z \leq h/2$$

(III.2c)

$$\alpha(z) = \alpha_m + g_2(z)\alpha_{cm} \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

(III.2d)

k : est l'indice de puissance qui prene des valeurs supérieures ou égales à zéro. La variation de la composition du métal et céramique est linéaire pour $k=1$. La valeur de k égal à zéro représente complètement la plaque en céramique.

Où E_m et α_m représentent le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de métal, respectivement, E_c et α_c désigne le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la céramique, respectivement.

Nous notons que:

$$E_{cm} = E_c - E_m$$

et

$$\alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m$$

La figure I.10 montre la distribution de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance. La variation de la composition du céramique et le métal est linéaire pour $k=1$. La valeur de k égal à zéro représente complètement la plaque en céramique. La fraction de volume change rapidement à proximité des surfaces supérieure et inférieure.

III-3-Analyse d'une plaque S-FGM :

La plaque S-FGM est supposé simplement appuyée sur les quatre bords. Le changement de la température est varie uniquement dans le sens de l'épaisseur.

Supposer que u, v, w désignent les déplacements du plan moyeu de la plaque dans les directions x, y, z respectivement; ϕ_x, ϕ_y désignent les rotations des normales de la plaque au tour de l'axe moyeu. Selon la théorie de déformation de cisaillement de

premier ordre, les champs de déplacement de la plaque peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + z\phi_{x,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + z\phi_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + w_{,x} \\ \gamma_{zy} &= \phi_y + w_{,y}\end{aligned}$$

(III.3)

Loi de Hooke pour une plaque est définie :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha T) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha T) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zy}\end{aligned}$$

(III.4)

Les forces et les moments par unité de longueur de la plaque exprimée en termes des composantes de contrainte à travers l'épaisseur sont montrés dans les relations (II.21) et (II.26) :

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \quad Q_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} dz$$

(III.5)

En substituant les équations. (III.2), (III.3), et (III.4) dans les équations. (III.5), donne les relations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) - \frac{\Phi}{1-\nu} \\
N_y &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{\Phi}{1-\nu} \\
N_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (u_{,y} + \nu v_{,x}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\
M_x &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) - \frac{\Theta}{1-\nu} \\
M_y &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{\Theta}{1-\nu} \\
M_{xy} &= \frac{E_2}{2(1+\nu)} (u_{,y} + \nu v_{,x}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \nu \phi_{y,x}) \\
Q_x &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_x + w_{,x}) \quad Q_y = \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_y + w_{,y})
\end{aligned}$$

(III.6)

Aves :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz, \\
E_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz, \\
E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E(z) dz, \\
\Phi &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) T(x, y, z) dz \\
\Theta &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) T(x, y, z) z dz
\end{aligned}$$

(III.7)

III.4. Détermination des équations d'équilibre:

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

(III.8)

Qui s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz = 0$$

(III.9)

Où A est la surface supérieure de la plaque.

En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions, ensuite, en introduisant les efforts globaux et en faisant l'intégration par partie, on obtient :

L'équation III.9 devant être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels δu , δv , δw , $\delta \varphi_x$ et $\delta \varphi_y$ cinématiquement admissible, on en déduit les équations d'équilibre :

Les équations non linéaires d'équilibre selon la théorie de Von Karman sont donnés par :

$$\delta u : N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$\delta v : N_{y,y} + N_{xy,x} = 0$$

$$\delta \varphi_x : M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0$$

$$\delta \varphi_y : M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0$$

$$\delta w : Q_{x,x} + Q_{y,y} + q + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} = 0$$

(III.10)

En utilisant les équations. (III.3) et (III.10) et en éliminant les variables, les équations d'équilibre peut être aboutir à une seule équation différentielle qui exprime l'équilibre des plaques soumises à une charge axiale de compression, cette équation est ainsi applicable dans tous les cas d'appui : appui simple, appui double et encastrement).

$$\nabla^4 w + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \nabla^2 (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} + q) - \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} + q) = 0$$

(III.11)

Pour établir les équations de stabilité, de la méthode d'équilibre critique est utilisé. En supposant que l'état d'équilibre stable d'une plaque générale en sous une charge thermique peut être désigné par w_0 . Le déplacement de l'état voisin est $w_0 + w_1$. En substituant dans l'équation (III.11), on obtient l'équation suivante de la stabilité :

$$\nabla^4 w_1 + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \nabla^2 (N_x^0 w_{1,xx} + N_y^0 w_{1,yy} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy}) - \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} (N_x^0 w_{1,xx} + N_y^0 w_{1,yy} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy}) = 0$$

(III.12)

Avec N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 représente les résultantes des forces du pré-flambage.

III.4.1. Flambage des plaques S-FGM sous effet de température uniforme :

Pour déterminer la température critique du flambement, les forces pré-flambage thermique devrait être trouvée d'abord. Résoudre la forme membranaire d'équations d'équilibre donne les résultantes des forces pré-flambage. Pour déterminé la température critique du flambement, les forces pré-flambage thermique devraient être trouvées. Résoudre la forme membranaire d'équations d'équilibre, donne les résultantes des forces pré-flambage :

$$N_x^0 = -\frac{\Phi}{1-\nu}, N_y^0 = -\frac{\Phi}{1-\nu}, N_{xy}^0 = 0$$

(III.13)

En substituant l'équation (III.13) dans l'équation (III.12), on obtient :

$$\nabla^4 w_1 - \frac{2(1+\nu)}{E_1} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^2 w_1 = 0$$

(III.14)

Si la déformation de cisaillement transversal est négliges, l'équation (III.14) peut être réduite :

$$\nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1E_3 - E_2^2} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^2 w_1 = 0$$

(III.15)

Navier a occupé en 1820 de déterminer le déplacement vertical d'un point (x, y) du plan moyen (z=0), d'une plaque rectangulaire horizontale simplement appuyée sur les quatre bords, en utilisant le développement en série de Fourier et afin de satisfaire les conditions aux limites, qui peuvent être formulées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} w_1 = 0, M_{x1} = 0, \phi_{y1} = 0 \text{ on } x = 0, a \\ w_1 = 0, M_{y1} = 0, \phi_{x1} = 0 \text{ on } y = 0, b \end{aligned}$$

(III.16)

Pour que ces conditions aux limites soient satisfaites on va adopter la solution du déplacement w_1 :

$$w_1 = c \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b)$$

(III.17)

où, n et m sont nombre de demi-ondes dans les directions x et y, respectivement, c est un coefficient constant.

En substituant l'équation. (III.17) dans l'équation. (III.14), et son remplacement pour la température exprime dans les relations(III.7), on obtient :

$$\Delta T = \frac{(E_1E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(m^2 + n^2B_a^2)}{2(1+\nu)(E_1E_3 - E_2^2)\pi^2(m^2 + n^2B_a^2) + E_1^2a^2(1-\nu^2)} \frac{E_1}{P}$$

(III.18)

Avec

$$P = E_m \alpha_m h + \frac{(E_{cm} \alpha_m + E_m \alpha_{cm})h}{k+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm} h}{2k+1} \quad \text{et} \quad B_a = a/b$$

La température critique de flambement est obtenue pour les valeurs de m, n qui font le minimum de l'expression(III.18). Apparemment, lorsque les méthodes de minimisation sont utilisés, la différence de température critique est obtenue pour :

$$\Delta T_{cr} = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2)\pi^2(1+B_a^2) + E_1^2 a^2(1-\nu^2)} \frac{E_1}{P}$$

(III.19)

Pour illustrer la méthode proposée, une plaque fonctionnelle graduelle sigmoïde céramique-métal est envisagée. La combinaison de matériaux est constituée d'aluminium et d'alumine. Les coefficients de module de Young, et de dilatation thermique de l'alumine sont $E_c=380\text{ GPa}$, $\alpha_c=7,4\times 10^{-6}(1/^\circ\text{C})$, et de l'aluminium sont $E_m=70\text{ GPa}$, $\alpha_m=23\times 10^{-6}(1/^\circ\text{C})$, respectivement. Le coefficient de Poisson est choisi comme $\nu=0,3$.

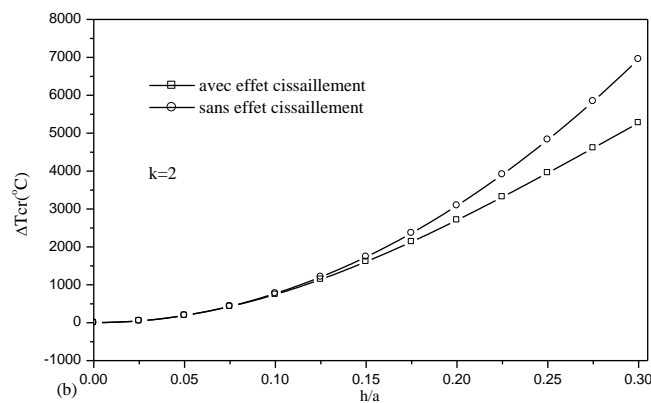
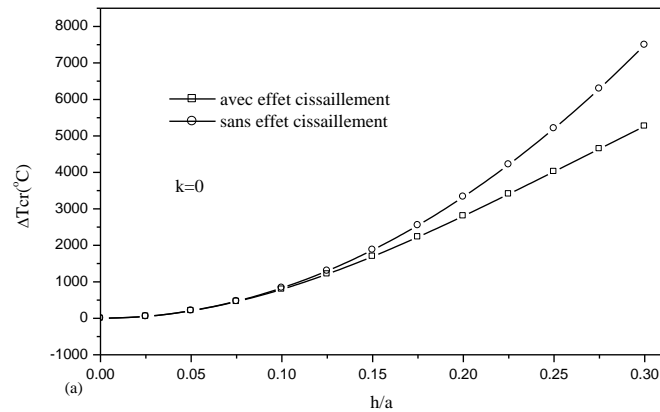


Figure III-2 : Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation uniforme de la température.

III.4.2. Flambement des plaques S-FGM avec le changement de température linéaire :

D'une façon semblable à la charge linéaire .la plaque S-FGM est soumise à une température qui varie suivant l'épaisseur (lanhe , 2004):

$$T(z) = \frac{\Delta T}{h} (z + h/2) + T_m$$

(III.20)

Avec :

$$\Delta T = T_c - T_m$$

T_c : La température de céramique.

T_m : La température de métal.

En reportant l'expression (III.20) dans l'équation (III.7), nous obtenons l'équation :

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\alpha(z) \left[\frac{\Delta T}{h} (z + h/2) + T_m \right] dz$$

Si on développe cette équation on trouve :

$$\Phi = P T_m + X \Delta T$$

(III.21)

Avec :

$$X = \frac{E_m \alpha_m h}{2} + \frac{(E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) h}{k+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm} h}{2k+2}$$

L'équation (IV.21) donne la température critique de flambement :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Phi - P T_m}{X}$$

(III.22)

La valeur Φ peut prendre plusieurs valeurs suivant la considération faite dans le cas de la prise en compte de contrainte de cisaillement :

$$\Phi = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu) \pi^2 (1+B_a^2) E_1}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2) \pi^2 (1+B_a^2) + E_1^2 a^2 (1-\nu^2)}$$

(III.23)

Et dans le cas où néglige la contrainte de cisaillement :

$$\Phi = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1 - \nu) \pi^2 (1 + B_a^2) E_1}{E_1^2 a^2 (1 - \nu^2)}$$

(III.24)

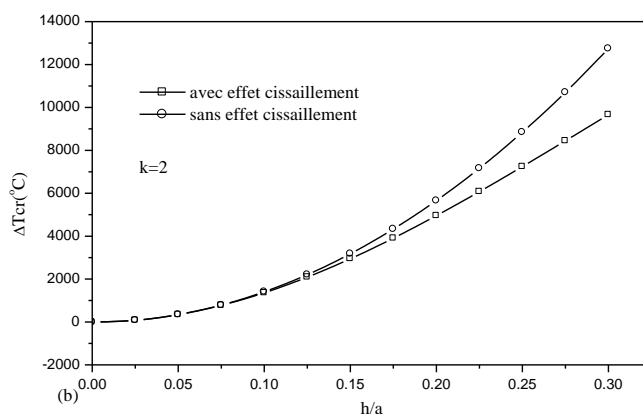
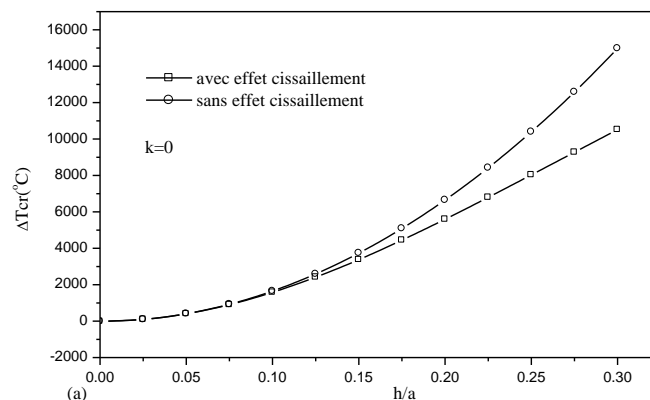


Figure III.3: Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation linéaire de la température.

III.4.3. Flambement des plaques S-FGM sous le changement de température sinusoïdale :

Considérant qu'une plaque P-FGM est soumise à une variation de température Sinusoïdale (lanhe , 2004):

$$T(z) = \Delta T \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + T_m$$

(III.25)

Pour ce cas de chargement, le paramètre Φ thermique peut être exprimé comme suit :

$$\Phi = P (T_m + \Delta T) - Y \Delta T$$

(III.26)

Avec

$$Y = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) dz$$

(III.27)

De l'équation (III.26). On a :

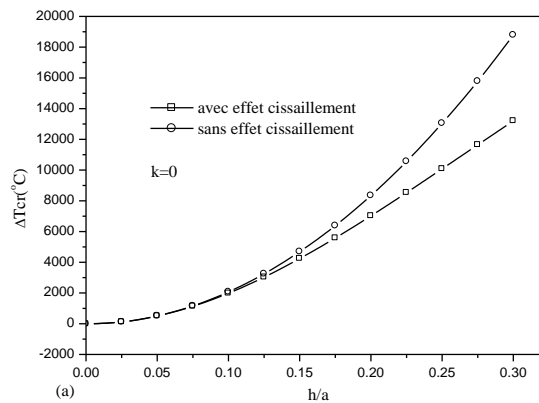
$$\Delta T = \frac{\Phi - P T_m}{P - Y}$$

(III.28)

Lorsque la solution approximative (III.17) est substituée dans l'équation. (III.14), et en tenant compte de relation (III.7), l'expression de flambement thermique de la plaque est obtenue. La température critique de flambement est exprimée comme suit :

$$\Delta T_{cr} = \left(\frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)E_1}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2)\pi^2(1+B_a^2) + E_1^2 a^2(1-\nu^2)} - P T_m \right) \frac{1}{P - Y}$$

(III.29)



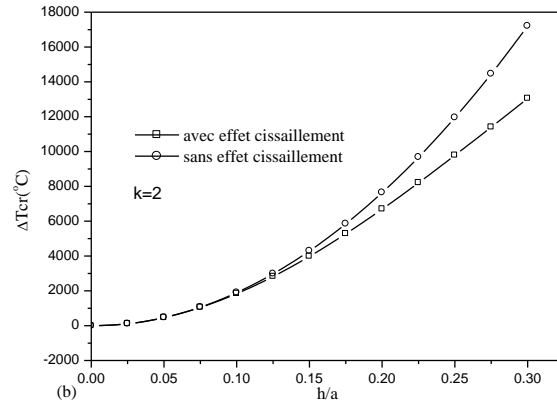


Figure III.4: Température Critique de flambement d'une plaque S-FGM sous une variation sinusoïdal de la température.

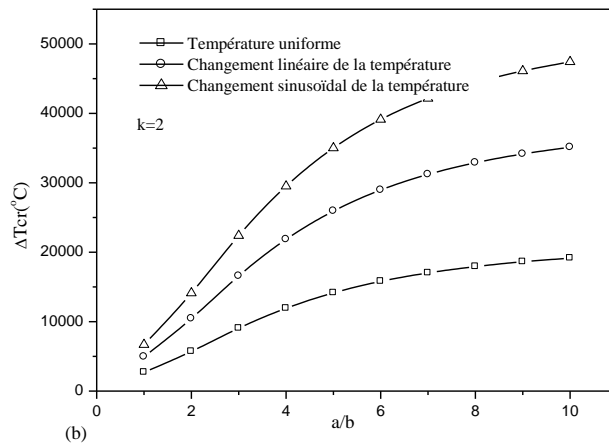
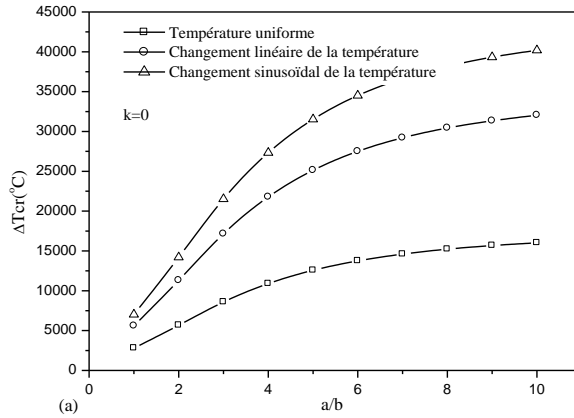


Figure III.5: Effet de la variation de la température sur la température critique de flambement pour une plaque en S-FGM ($h/a = 0.2$).

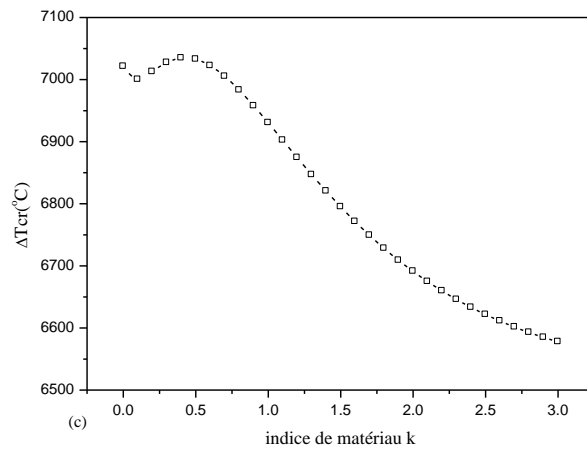
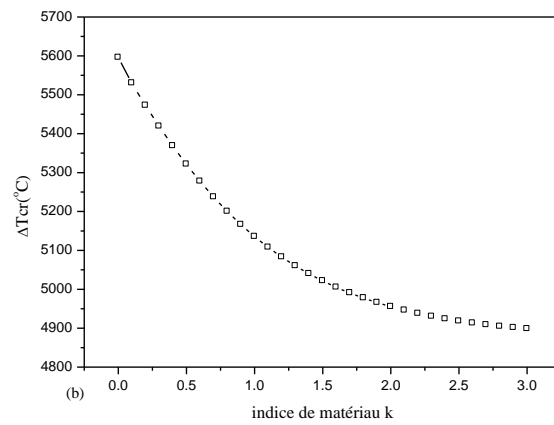
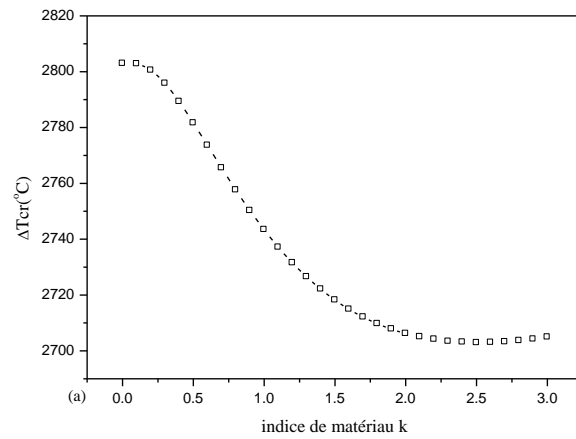


Figure III 6: Elévation de la température critique de flambement d'une plaque S-FGM en fonction d'indice matériau k:

- (a) température uniforme;
- (b) le changement de température linéaire;
- (c) le changement de température sinusoïdale;

Tout d'abord, les différences cas de température critique de flambement sont calculées pour une plaque carre en S-FGM sous de différent cas de distribution de température suivant l'épaisseur uniforme, linéaire et sinusoïdale, respectivement. Les résultats obtenus sont représenté dans les figures. III.2, III.3 et III.4 et qu'ils indiquent la différence de température critique de flambement ΔT_{cr} en fonction du rapport géométrique h/a pour deux valeurs de l'indice de matérielle (k). On voit que la température critique augmente de façon monotone avec l'augmentation du rapport géométrique. Les valeurs de la température critiques de flambement calculées en utilisant la théorie du premier ordre sont inférieures à ceux calculés en utilisant la théorie classique des plaques. Cela signifie que l'inclusion de l'effet de la déformation de cisaillement transversal conduit à une réduction de la température critique de flambement, en particulier pour plaques épaisses.

Figure III.5 représente le changement de température critique de flambement en fonction du rapport géométrique a/b , cela pour deux valeurs d'index matériel k et un rapport géométrique $h/a = 0.2$. On observe que l'augmentation de rapport géométrique a/b de la plaque de 1 à 10, la température critique de flambement augmente également, quelle que soit le gradient d'indice matériel k . D'après la figure III.5 on trouve que pour une plaque en S-FGM, les valeurs de la température de flambement calculé avec une distribution de la température sinusoïdale à travers l'épaisseur sont plus élevées que celle calculés avec une distribution linéaire de la température.

Il est également constaté que, pour des valeurs plus élevées du rapport géométrique a/b de la plaque la différence entre la température critique de flambement avec des distributions de température sinusoïdales et linéaire seront importante.

Fig. 7 représente la température critique de flambage par rapport au l'indice matériel k pour une plaque carre avec $h/a = 0.2$. Nous pouvons voir que la température critique de flambement d'une plaque homogène avec $k = 0$ est considérablement plus élevés que ceux de la plaque S-FGM avec $k > 0$. Il est évident que la différence de température critique de flambement diminue on augmentation l'indice matériel de façon monotone. Cependant, il peut être constaté que pour une distribution sinusoïdale de la température à travers l'épaisseur, la différence de température

critique de flambement augmente pour des petites valeurs de l'indice matériel $0 < k < 0.5$.

III.5. Conclusion

Dans le présent chapitre, l'équilibre, la stabilité, et les équations de compatibilité pour une plaque en S-FGM Al/Al₂O₃ sont développés. Les équations sont basées sur la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre afin d'abord, et cette hypothèse de deux lois de distribution de la matière suivant l'épaisseur de composition pour les matériaux constitutifs. L'analyse de flambement d'une telle plaque sous trois types de chargements thermiques est étudiée. Il est montré que la déformation transversale de cisaillement et l'indice matériel ont un effet considérable sur la différence de température critique de flambement de la plaque S-FGM, en particulier pour une plaque épaisse ou une plaque avec un rapport géométrique (a/h) grande. Les solutions peuvent être utilisées comme référence pour d'autres méthodes numériques et aussi les théories raffinées des plaques.

Chapitre IV

Analyse du flambement des plaques

FGM par la théorie d'ordre élevé

IV.1 INTRODUCTION :

Le FGM est un matériau composite dont la composition varie selon les performances requises. Typiquement, elle est faite d'un mélange de céramique et métal. Les FGM sont largement utilisés dans de nombreuses applications structurelles telles que l'aérospatiale, le nucléaire, civil et automobile en raison de leur haute performance de résistant à la chaleur. Ces matériaux ont d'abord été introduits en 1984 par des scientifiques spécialisés en matériaux dans la région de Sendai au Japon [1]. En variant graduellement les fractions de volume des constituants.

Dans les trois dernières décennies, des recherches sur des plaques FGM ont fait beaucoup d'attention, et une variété de théories de plaque a été introduite, basé sur la considération de l'effet de déformation de cisaillement transversale. La théorie classique des plaques (CPT), qui néglige l'effet de déformation de cisaillement transversale, fournit des résultats raisonnables pour des plaques minces. Cette théorie a été employée pour l'analyse du flambement des plaques FGM par Feldman et Aboudi [3], et Javaheri Eslami [4], Abrate [5], Mahdavian [6], et Mohammadi et al. [7]. de nombreuses théories de déformations de cisaillement des plaques qui tient en compte l'effet de déformation de cisaillement transversal ont été développés. Les théories de Reissner [9] et Mindlin [10] sont connus comme la première théorie de déformation de cisaillement des plaques (FSDT). Beaucoup d'études de l'analyse de flambement de la plaque de (FGM) ont été réalisées en utilisant FSDT [11-16].

La (FSDT) ne respecte pas les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, les facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires pour corriger la variation la contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. Ces facteurs de correction sont sensibles non seulement au paramètres géométriques de la plaque, mais aussi aux conditions de frontière et des conditions de chargement. Afin d'éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement, un certain nombre de théories d'ordre élevés des plaques (HSDT), qui impliquent les termes d'ordre supérieur dans développement de Taylor des coordonnées des déplacements suivant l'épaisseur, ont été proposées.

La théorie raffinée proposée par Shimpi est basé sur l'hypothèse que dans le plan et les déplacements transversaux constitués de composants de flexion et de cisaillement dans lesquels les composantes de flexion ne contribuent pas vers les forces de cisaillement et également, les composants de cisaillement ne contribuent pas vers des

moments de flexion. Cette théorie a été étendue avec succès aux plaques orthotropes [22-23], plaques composites laminées [24-25], et la plaque (FGM) [26]. Par conséquent, l'objectif de ce chapitre est d'étendre la théorie raffinée de Shimpi au flambement des plaques (FGM) soumises à des chargements dans le plan. Les propriétés des matériaux des plaques (FGM), tels que le module de Young, suit une distribution selon une loi de puissance à travers l'épaisseur alors que le coefficient de Poisson est supposés constant.

IV.2 La théorie des plaques raffinées pour les plaques FGM :

IV.2.1 Cinématique :

La théorie des plaques raffinées a deux variables de Shimpi et Patel [22] qui prend une variation quadratiques de cisaillement transversale des couches à travers l'épaisseur de la plaque, et satisfait les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Le champ de déplacement de cette théorie est le suivant :

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

(IV.1a)

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

(IV.1b)

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

(IV.1c)

Où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont les déplacements du mi-plan de la plaque dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} , respectivement ; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, et h est l'épaisseur de la plaque.

Il est à noter que contrairement à la théorie de cisaillement déformation du premier ordre, cette théorie n'a pas besoin de facteur de correction de cisaillement.

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\mathbf{k}_x^b + f\mathbf{k}_x^b \quad (\text{IV.2a})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\mathbf{k}_y^b + f\mathbf{k}_y^b \quad (\text{IV.2b})$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\mathbf{k}_{xy}^b + f\mathbf{k}_{xy}^b \quad (\text{VI.2c})$$

$$\gamma_{yz} = g\gamma_{yz}^s \quad (\text{VI.2d})$$

$$\gamma_{xz} = g\gamma_{xz}^s \quad (\text{VI.2e})$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{VI.2f})$$

Avec

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\mathbf{k}_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}$$

$$\mathbf{k}_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}$$

$$\mathbf{k}_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\mathbf{k}_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$\mathbf{k}_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}$$

$$\mathbf{k}_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

$$f(z) = -\frac{1}{4}z + z\frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2$$

$$g(z) = \frac{5}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2$$

IV.2.2 Relations constitutives :

Considérons une plaque (P-FGM) constitué en céramique et en métal, les propriétés matérielles de ces FGM comme le module de Young \mathbf{E} peut être exprimé comme :

$$E(z) = E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p$$

(VI.3)

Avec

$$E_{cm} = E_c - E_m$$

Où E_m et E_c sont les modules de Young du métal et de céramique, respectivement, et p est l'exposant de fraction volumique. La valeur de p égale à zéro représente une plaque en céramique, tandis que p égales à l'infini indiquent une plaque entièrement métallique. La variation de la combinaison de céramique et de métal est linéaire pour $p=1$. La variation du coefficient de Poisson ν est généralement faible et il est supposé être une constante pour plus de commodité.

Les relations linéaires constitutives d'une plaque de (P-FGM) peuvent être écrites comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

(VI.4)

Avec

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{12} = \nu Q_{11}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

IV.2.3 Équations régissant l'équilibre la plaque P-FGM :

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme suite :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \quad (VI.5)$$

En remplaçant les équations (VI.2) et (VI.4) dans l'équation (VI.5) et par intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{ N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + Q_{yz} \gamma_{yz}^s + Q_{xz} \gamma_{xz}^s \} dx dy$$

Où N_i , M_i , Q_j ($i=x,y$, xy , $j = xz, yz$) sont respectivement les forces résultantes, moments et les forces de cisaillement, qui sont tous définis par les expressions suivantes:

$$N_i = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_i dz$$

(VI.6a)

$$M_i^b = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_i z dz$$

(VI.6b)

$$M_i^s = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_i f(z) dz$$

(VI.6c)

$$Q_i = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_i g(z) dz$$

(VI.6d)

En remplaçant l'équation (VI.4) dans les équations (VI.6) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, la résultante de l'effort sont donnés comme suite :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.7a})$$

Et

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{VI.7b})$$

Où

$$A_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} Q_{ij} dz$$

$$B_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z Q_{ij} dz$$

$$D_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z^2 Q_{ij} dz$$

$$B_{ij}^s = -\frac{1}{4} B_{ij} + \frac{5}{3h^2} E_{ij}$$

$$D_{ij}^s = -\frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}$$

$$H_{ij}^s = \frac{1}{16} D_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^2} H_{ij}$$

$$E_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z^3 Q_{ij} dz$$

$$F_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z^4 Q_{ij} dz$$

$$H_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z^6 Q_{ij} dz$$

$$A_{ij}^s = \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{2h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}$$

$$B_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z Q_{ij} dz$$

$$D_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} z^2 Q_{ij} dz$$

Le travail effectué par les forces appliquées peut être écrit comme :

$$V = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (VI.8)$$

Où N_x^0, N_y^0 et N_{xy}^0 sont les forces de pré-flambement dans le plan.

Le principe de l'énergie potentielle totale minimum est utilisé ici pour dériver les équations régissantes.

Le principe peut être déclaré sous forme analytique en tant que [27] :

$$\int_{t_2}^{t_1} \delta(U + V) = 0 \quad (VI.9)$$

Où δ désigne une variation par rapport à x et y . En remplaçant les équations(VI.5) et(VI.8) dans l'équation (VI.9) et par intégration de l'équation par parties, la collecte des coefficients de $\delta u, \delta v, \delta w_b$ et δw_s , les équations d'équilibres peuvent être obtenues comme suit:

$$\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (VI.10a)$$

$$\delta v : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (VI.10b)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} p(w) = 0 \quad (VI.10c)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + p(w) = 0 \quad (VI.10d)$$

Avec

$$p(w) = N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \quad (\text{VI.11})$$

VI.3 Analyse de flambement des plaques soumis a une chargement dans le plan:

Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une longueur a et de largeur b et qui est soumis à des chargements en plan dans les deux directions comme indiqué dans la Figure (VI.1) .

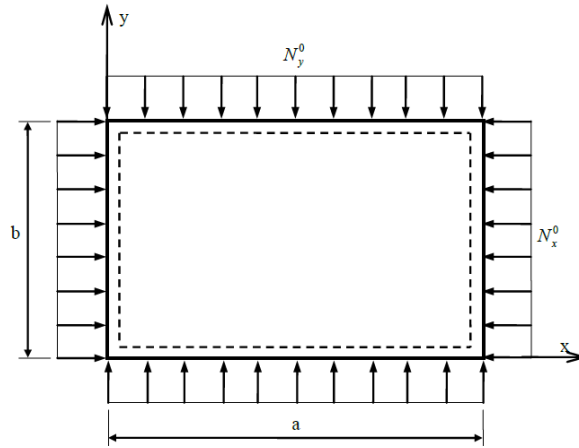


Figure VI.1 : plaque rectangulaire soumise à un chargement dans plan

Les conditions aux limites simplement appuyée sont données comme suite :

$$v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{sur les bords } x=0, a \quad (\text{VI.12a})$$

$$u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{sur les bords } x=0, b \quad (\text{VI.12b})$$

La solution de Navier est employée pour obtenir les solutions analytiques des équations d'équilibre.

Les solutions suivantes pour les déplacements u, v, w_b et w_s sont choisis pour satisfaire les conditions aux limites dans l'équation (VI.12).

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{VI.13a})$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{VI.13b})$$

$$w_b = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{VI.13c})$$

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{VI.13d})$$

Avec $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ et $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$ sont les amplitudes de déplacements adapter a la solution de NAVIER. En remplaçant les équations (VI.13) dans les équations d'équilibre (VI.11), la charge critique de flambement N_{cr} peut être déterminée à partir de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} + k & S_{34} + k \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} + k & S_{44} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

Avec

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$$

$$S_{12} = A_{12}\beta + A_{66}\alpha$$

$$S_{66} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$$

$$S_{13} = -(B_{11}\alpha^2 + B_{12} + 2B_{66}\beta^2)$$

$$S_{14} = -(B_{11}^s\alpha^2 + B_{12}^s + 2B_{66}^s\beta^2)$$

$$S_{23} = -\beta(B_{12} + 2B_{12}\alpha^2 + B_{22}\beta^2)$$

$$S_{24} = -\beta(B_{12}^s + 2B_{66}^s\alpha^2 + B_{22}^s\beta^2)$$

$$S_{33} = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}\alpha^2\beta^2) + D_{22}\beta^4$$

$$S_{34} = D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s\alpha^2\beta^2) + D_{22}^s\beta^4$$

$$S_{44} = H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s\alpha^2\beta^2) + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2$$

$$k = N_{cr}(\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2)$$

En appliquant l'approche statique de condensation afin d'éliminer les coefficients associés aux déplacements en plan, Equation (VI.14) peut être réécrite comme ceci :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} \\ \mathbf{K}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

Avec

$$[\mathbf{K}^{11}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}^{12}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}^{22}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} \\ \mathbf{S}_{34} & \mathbf{S}_{44} \end{bmatrix}$$

$$\Delta^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{mn} \\ \mathbf{V}_{mn} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{bmn} \\ \mathbf{W}_{smn} \end{Bmatrix}$$

Equation (VI.14) représente deux équations matricielles :

$$[\mathbf{K}^{11}] \Delta^1 + [\mathbf{K}^{12}] \Delta^2 = 0 \quad (\text{VI.15a})$$

$$[\mathbf{K}^{12}] \Delta^1 + [\mathbf{K}^{22}] \Delta^2 = 0 \quad (\text{VI.15b})$$

La relation (VI.15a) pour trouver Δ^1 , puis substituant les résultats dans la relation (VI.15b), l'équation suivante est obtenue :

$$[\bar{\mathbf{K}}^{22}] \Delta^2 = 0 \quad (\text{VI.16})$$

Avec

$$[\bar{\mathbf{K}}^{22}] = [\mathbf{K}^{22}] - [\mathbf{K}^{12}]^T [\mathbf{K}^{11}]^{-1} [\mathbf{K}^{12}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{33} + \mathbf{k} & \bar{\mathbf{S}}_{34} + \mathbf{k} \\ \bar{\mathbf{S}}_{43} + \mathbf{k} & \bar{\mathbf{S}}_{44} + \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{33} = \mathbf{S}_{33} - \mathbf{S}_{13} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_0} - \mathbf{S}_{23} \frac{\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_0}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{34} = \mathbf{S}_{34} - \mathbf{S}_{14} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_0} - \mathbf{S}_{24} \frac{\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_0}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{43} = \mathbf{S}_{43} - \mathbf{S}_{13} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_0} - \mathbf{S}_{23} \frac{\mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_0}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{44} = \mathbf{S}_{44} - \mathbf{S}_{14} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_0} - \mathbf{S}_{24} \frac{\mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_0}$$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{12}^2$$

$$b_1 = S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}$$

$$b_2 = S_{11}S_{23} - S_{12}S_{13}$$

$$b_3 = S_{14}S_{22} - S_{12}S_{24}$$

$$b_4 = S_{11}S_{24} - S_{12}S_{14}$$

Pour la solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients la matrice de la relation (VI.16) doit être égal à zéro. Cela donne l'expression suivante pour la charge critique de flambement :

$$N_{cr}(m, n) = \frac{-1}{\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2} \frac{\bar{S}_{33}\bar{S}_{44} - \bar{S}_{34}\bar{S}_{43}}{\bar{S}_{33} + \bar{S}_{44} - \bar{S}_{34} - \bar{S}_{43}} \quad (\text{VI.17})$$

Pour le cas de la CPT, l'expression de la charge de flambement N_{cr} peut être simplifiée en définissant la composante de cisaillement de déplacement transversal à zéro ($w_s=0$) en tant que :

$$N_{cr}(m, n) = \frac{\bar{S}_{33}}{\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2} \quad (\text{VI.18})$$

Pour chaque choix de \mathbf{m} et \mathbf{n} , il Ya une valeur correspondante unique de N_{cr} . La charge critique de flambement.

VI.3.1 Etude de flambement d'une plaque rectangulaire :

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour la vérification de l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle pour trouver la charge critique de flambement des plaques de (FGM) simplement appuyée soumise à différents types de chargement en plan . Les résultats obtenus par la théorie actuelle sont comparées avec ceux prédits par la (CPT), et (FSDT, HSDT). Les propriétés des matériaux suivants utilisés :

Matériel I (Javaheri et Eslami[4]) :

$$E_c=380 \text{ GPa (Alumina)} \quad (\text{VI.19.a})$$

$$E_m=70 \text{ GPa (Aluminun)} \quad (\text{VI.20.b})$$

Matériel II (Bodaghi et Saidi [20])

$$E_c=420 \text{ GPa (Silicon Carbide)} \quad (\text{VI.19.a})$$

(-1,0)	CPT [4]	267,4800	33,4350	4,1794	1,2383	0,5224	0,2675
	FSDT [11]	243,4100	32,6280	4,1537	1,2349	0,5216	0,2672
	HSDT[20]	239,1500	32,4720	4,1486	1,2343	0,5215	0,2672
	Present	239,1450	32,4721	4,1486	1,2343	0,5215	0,2672
(-1,-1)	CPT [4]	213,9900	26,7480	3,4353	0,9907	0,4179	0,2140
	FSDT [11]	194,7300	26,1030	3,3230	0,9880	0,4173	0,2137
	HSDT[20]	191,3200	25,9780	3,3189	0,9879	0,4172	0,2137
	Present	191,3160	25,9777	3,3189	0,9874	0,4172	0,2137
(-1,1)	CPT [4]	356,6400	44,5800	5,5725	1,6511	0,6966	0,3566
	FSDT [11]	324,5400	43,5050	5,5383	1,6466	0,6955	0,3563
	HSDT[20]	318,8600	43,2960	5,5315	1,6457	0,6953	0,3562
	Present	318,8600	43,2961	5,5315	1,6457	0,6953	0,3562

La comparaison suivante est effectuée pour des plaques épaisses (FGM) soumis à des différentes conditions de chargement en utilisant le matériaux II .Les charges critiques de flambement de la plaque (FGM) épaisse pour la variation de la côte à l'épaisseur, coefficient d'aspect, et la puissance de la (FGM) sont présentées dans tableau VI.2 en utilisant la théorie actuelle et (HSDT). On peut voir que les résultats de la théorie actuelle sont presque identiques à ceux données par Bodaghi et Saidi[20] fondée sur (HSDT). La différence maximale n'est que de 0,07% pour le cas de la plaque carrée ($a=b=10h$) soumis à une compression uni-axiale le long de l'axe x avec $p=2$.

Tableau VI.2 : Comparaison de la charge critique de flambement N_{cr} MN/m d'une plaque rectangulaire épaisse

(Y_1 ,	a/b	b/h	Méthode	P
-----------	-----	-----	---------	---

Y ₂)						
				0	1	2
(-1,0)	0,5	10	HSDT [20]	2079,721	1028,412	780,097
			Present	2079,758	1028,449	780,023
		5	HSDT [20]	12162,119	6270,298	4692,542
			Present	12164,987	6272,425	4695,029
	1	10	HSDT [20]	1437,361	702,304	534,441
			Present	1437,389	702,251	534,835
		5	HSDT [20]	9915,620	4955,431	3746,054
			Present	9916,193	4955,484	3746,732
	1,5	10	HSDT [20]	1527.903 ^a	748.920 ^a	569.751 ^a
			Present	1527.994 ^a	748.988 ^a	569.825 ^a
		5	HSDT [20]	10044.721 ^a	5067.219 ^a	3819.109 ^a
			Present	10044.962 ^a	5068.084 ^a	3820.079 ^a
(-1,-1)	0,5	10	HSDT [20]	1663,777	822,738	624,158
			Present	1663,807	822,759	624,182
		5	HSDT [20]	9729,999	5016,384	3754,274
			Present	9731,99	5017,941	3756,023
	1	10	HSDT [20]	718,692	351,124	267,416
			Present	718,695	351,125	267,418
		5	HSDT [20]	4957,888	2477,589	1873,19
			Present	4958,097	2477,742	1873,366
	1,5	10	HSDT [20]	526,861	256,776	195,714
			Present	526,862	256,776	195,714
		5	HSDT [20]	3772,877	1871,038	1418,12
			Present	3772,964	1871,101	1418,193
(-1,1)	0,5	10	HSDT [20]	2772,98	1371,653	1040,519
			Present	2773,011	1371,265	1040,304
		5	HSDT [20]	16216,712	8360,541	6257,811
			Present	16219,983	8363,233	6260,038
	1	10	HSDT [20]	2772.980 ^a	1371.653 ^a	1040.519 ^a
			Present	2773.011 ^a	1371.265 ^a	1040.304 ^a

	5	HSDT [20]	16216.712 ^a	8360.541 ^a	6257.811 ^a
		Present	16219.983 ^a	8363.233 ^a	6260.038 ^a
1,5	10	HSDT [20]	2772.980 ^b	1371.653 ^b	1040.519 ^b
		Present	2773.011 ^b	1371.256 ^b	1040.304 ^b
	5	HSDT [20]	16216.712 ^b	8360.541 ^b	6257.811 ^b
		Present	16219.983 ^b	8363.233 ^b	6260.038 ^b

^a Mode pour plaque est (m,n)=(2,1) ; ^b Mode pour plaque est (m,n)=(3,1).

VI.4 Études de paramètres d'une plaque (P-FGM) simplement appuyée :

Des études de paramètres sont menées pour étudier les effets des conditions de chargement et les variations de la puissance de la plaque (P-FGM), le module de Young et les rapports géométriques sur la charge critique non dimensionnel de flambement des plaques (FGM) simplement appuyée.

Matériel I est utilisé.

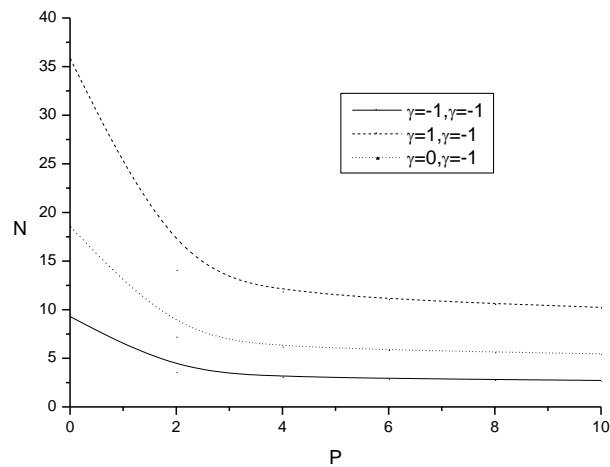


Figure VI.1 : L'effet de la puissance de la FGM sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque carrée (a=10h) sous différentes conditions de chargement

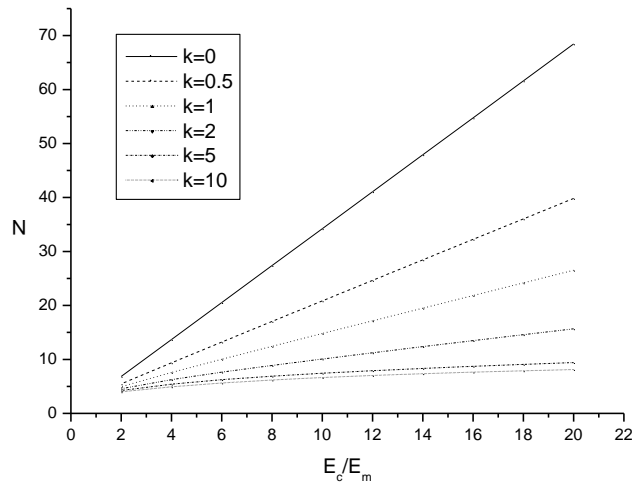


Figure VI.2 : L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque carrée ($a=10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)

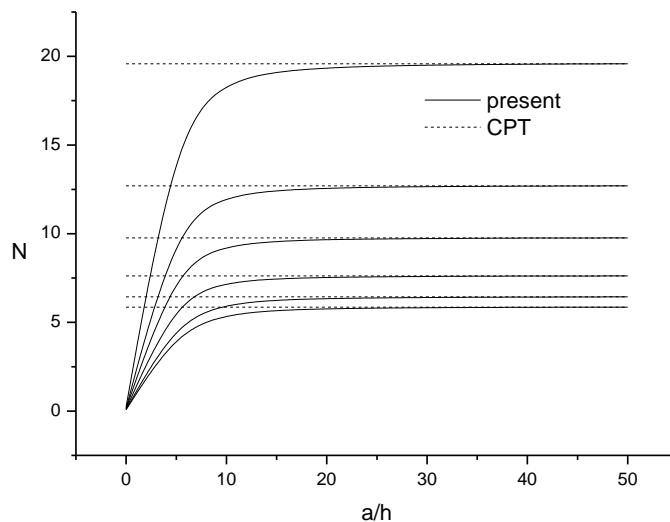


Figure VI.3 : L'effet du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la Plaque carré sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)

La Figure VI.1 illustre la variation de la charge critique non dimensionnelle de flambement de la plaque carrée (FGM) en fonction de la puissance p de la plaque (P-FGM) pour trois différents types de chargement, avec le rapport géométrique ($a/h=10$). Il peut être constaté que la charge critique de flambement diminue en

augmentation de la puissance p de la plaque (P-FGM), et la variation de la charge critique de flambement est considérable lorsque la puissance p de la plaque (P-FGM) est faible. Cela est dû au fait que les valeurs plus élevées de la puissance p de la plaque (P-FGM) correspondent à la partie haute du métal en comparaison avec la partie céramique. Par ailleurs, on peut observer que la charge critique de flambement de la plaque (FGM) sous compression uniaxiale ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$) est supérieure à celle en compression biaxiale ($\gamma_1=\gamma_2=-1$).

La Figure VI.2 montre la variation de la charge critique non dimensionnelle de flambement d'une plaque carrée en (P-FGM) en fonction du rapport E_c/E_m pour différentes puissances p de la plaque (P-FGM). Le rapport géométrique ($a/h=10$). On observe que les charges critiques de flambement augmentent avec l'augmentation de rapport des modules de Young métal-céramique, et diminue en augmentation de l'index matériel p de la plaque (P-FGM).

La variation de la charge critique adimensionnelle de flambement de la plaque carrée (FGM) par rapport au coefficient d'un côté de l'épaisseur a/h est montré dans la Figure VI.3 en utilisant la théorie actuelle et la (CPT).

Il est observé que la charge critique adimensionnelle de flambement augmente avec l'augmentation du rapport d'un côté de l'épaisseur a/h . Les charges critiques adimensionnelles de flambement obtenu à partir de la théorie actuelle sont inférieures à ceux de la (CPT). La différence entre les deux théories est considérable pour des plaques plus épaisses ($a/h < 10$), cependant elle peut être négligée pour des plaques minces, la différence est dû à l'influence de la déformation de cisaillement transversale dans les plaques épaisses.

Les charges critiques adimensionnelles de flambement ont été réunies dans les tableaux VI.3- VI.5 pour les plaques (FGM) sous compression uniaxiale, compression biaxiale, et la compression le long de l'axe x et la traction le long de l'axe des y , respectivement. Dans chaque tableau, quatre rapports géométrique différent ($a/b=0.5,1,1.5,2$) sont pris, et cinq valeurs différentes du rapport du côté de l'épaisseur ($a/h=5,10,20,50,100$) sont examinés. En outre, huit valeurs arbitraires de la puissance p de la plaque (P-FGM) ($p=0,0.5,1,2,5,10,20,100$) sont considérés. Il est observé à partir des tableaux IV.3- IV.5 que la charge critique adimensionnelle de flambement augmente par la diminution de la puissance p de la plaque (P-FGM) et l'augmentation du rapport du côté de l'épaisseur. Par ailleurs, l'augmentation du

rapport du côté de l'épaisseur non seulement augmente les valeurs de la charge critique de flambement, mais provoque également des changements dans le mode de flambement critique. Par exemple, pour la plaque de (FGM) soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe des x avec un $a/b=2$, le mode de flambement critique varie de 3 à 2 de même que la valeur du coefficient du côté de l'épaisseur augmente de 5 à 10. Dans le cas de la plaque (FGM) soumise à une compression biaxiale (voir tableau VI.4), le mode de flambement critique a un seul mode de flambement critique indépendamment du rapport géométrique, le coefficient de l'épaisseur et la puissance de la (FGM).

Tab. IV.3 : charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1=-1, \gamma_2=0$)

a/b	a/h	P							
		0	0,5	1	2	5	10	20	100
0.5	5	6,7203	4,4235	3,4164	2,6451	2,1484	1,9213	1,7115	1,3737
	10	7,4053	4,8206	3,7111	2,8897	2,4165	2,1896	1,9387	1,5251
	20	7,5993	4,9315	3,793	2,9582	2,4944	2,269	2,0054	1,5683
	50	7,6555	4,9634	3,8166	2,9779	2,5172	2,2923	2,025	1,5809
1	100	7,6635	4,968	3,82	2,9808	2,5205	2,2957	2,0278	1,5827
	5	16,021	10,6254	8,2245	6,3432	5,0531	4,4807	4,007	3,2586
	10	18,575	12,1229	9,3391	7,2631	6,0353	5,4528	4,8346	3,8198
	20	19,358	12,5668	9,6675	7,5371	6,3448	5,7668	5,0988	3,9923
1.5	50	19,584	12,697	9,7636	7,6177	6,4373	5,8614	5,1782	4,0434
	100	19,615	12,7158	9,7775	7,6293	6,4507	5,8752	5,1897	4,0508
	5	28.196 ^a	19.2510 ^a	15.034 ^a	11.4234 ^a	8.4727 ^a	7.2952 ^a	6.6106 ^a	5.6325 ^a
	10	40.746 ^a	26.9091 ^a	20.804 ^a	16.0793 ^a	12.951 ^a	11.5379 ^a	10.2958 ^a	8.3112 ^a
2	20	45.890 ^a	29.9050 ^a	23.086 ^a	17.9221 ^a	14.972 ^a	13.5273 ^a	11.9843 ^a	9.4447 ^a
	50	47.576 ^a	30.861 ^a	23.714 ^a	18.517 ^a	15.638 ^a	14.2156 ^a	12.5629 ^a	9.8207 ^a
	100	47.827 ^a	31.0119 ^a	23.869 ^a	18.6061 ^a	15.756 ^a	14.3198 ^a	12.6502 ^a	9.8769 ^a
	5	37.704 ^b	26.365 ^b	20.791 ^b	15.589 ^b	10.954 ^b	9.1505 ^c	8.3988 ^c	7.4403 ^b
2	10	64.042 ^a	42.5015 ^a	32.880 ^a	25.377 ^a	20.223 ^a	17.9227 ^a	16.0280 ^a	13.0345 ^a
	20	74.340 ^a	48.4917 ^a	37.364 ^a	29.0523 ^a	24.113 ^a	21.8114 ^a	19.3385 ^a	15.2794 ^a
	50	77.804 ^a	50.4890 ^a	38.838 ^a	30.2858 ^a	25.563 ^a	23.2278 ^a	20.5301 ^a	16.0561 ^a

	100	78.357 ^a	50.7880 ^a	39.046 ^a	30.4707 ^a	25.791 ^a	23.4456 ^a	20.7126 ^a	16.1737 ^a
--	-----	---------------------	----------------------	---------------------	----------------------	---------------------	----------------------	----------------------	----------------------

^a Mode pour plaque est (m,n)=(2,1). ^b Mode pour plaque est (m,n)=(3,1). ^c Mode pour plaque est (m,n)=(4,1).

Tab. IV.4 : charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression biaxiale ($\gamma_1=-1, \gamma_2=-1$)

a/b	a/h	P							
		0	0,5	1	2	5	10	20	100
0.5	5	5,3762	3,5388	2,7331	2,1161	1,7187	1,537	1,3692	1,099
	10	5,9243	3,8565	2,9689	2,3117	1,9332	1,7517	1,551	1,22
	20	6,0794	3,9452	3,0344	2,3665	1,9955	1,8152	1,6044	1,2547
	50	6,1244	3,9708	3,0533	3,3823	2,0137	1,8338	1,62	1,2647
1	100	6,1308	3,9744	3,056	2,3846	2,0164	1,8365	1,6222	1,2662
	5	8,0105	5,3127	4,1122	3,1716	2,5265	2,2403	2,0035	1,6293
	10	9,2893	6,0615	4,6696	3,6315	3,0177	2,7264	2,4173	1,9099
	20	9,6764	6,2834	4,8337	3,7686	3,1724	2,8834	2,5494	1,9961
1.5	50	9,7907	6,3485	4,8818	3,8088	3,2186	2,9307	2,5891	2,0217
	100	9,8073	6,3579	4,8888	3,8147	3,2254	2,9376	2,5948	2,0254
	5	11,682	7,8299	6,0799	4,6637	3,6176	3,1718	2,851	2,36
	10	14,6084	9,5685	7,3793	5,7279	4,7124	4,2384	3,7657	2,9959
2	20	15,5887	10,1332	7,7977	6,0761	5,1006	4,63	4,0961	3,2135
	50	15,8876	10,3036	7,9236	6,1815	5,2212	4,7531	1,1995	3,2803
	100	15,9312	10,3284	7,9419	6,1969	5,2389	4,7712	4,2147	3,29
	5	15,7235	10,6622	8,3092	6,3353	4,7754	4,1382	3,7392	3,1534
2	10	21,505	14,1552	10,9323	8,4644	6,875	6,1481	5,4769	4,3958
	20	23,697	15,426	11,8755	9,2469	7,7327	7,0067	6,204	4,8802
	50	24,3944	15,8244	12,17	9,4931	8,0132	7,2926	6,444	5,0358
	100	24,4974	15,883	12,2132	9,5294	8,055	7,3353	6,4799	5,0589

Tab. IV.5 : charge critique de flambement Non dimensionnel de la plaque FGM soumise à une compression le long de l'axe x et à la tension le long de l'axe y ($\gamma_1=-1, \gamma_2=1$)

a/b	a/h	P
-----	-----	---

		0	0,5	1	2	5	10	20	100
0,5	5	8,9604	5,898	4,5551	3,568	2,8646	2,5617	2,282	1,8316
	10	9,8738	6,4275	4,9481	3,8529	3,2219	2,9195	2,585	2,0334
	20	10,1324	6,5753	5,0574	3,9442	3,3259	3,0253	2,6739	2,0911
	50	10,2073	6,6179	5,0888	3,9706	3,3562	3,0564	2,7	2,1079
	100	10,2181	6,6241	5,0934	3,9744	3,3606	3,0609	2,7037	2,1103
1	5	26.2058 ^a	17,7704 ^a	13,8486 ^a	10,5589 ^a	7,9590 ^a	6,8970 ^a	6,2320 ^a	5,2556 ^a
	10	35.8416 ^a	23,5920 ^b	18,2206 ^a	14,1073 ^a	11,4583 ^a	10,2468 ^a	9,1281 ^a	7,3263 ^a
	20	39.4951 ^a	25,7100 ^a	19,7925 ^a	15,4115 ^a	12,8878 ^a	11,6779 ^a	10,3400 ^a	8,1336 ^a
	50	40.6574 ^a	26,3740 ^a	20,2833 ^a	15,8219 ^a	13,3554 ^a	12,1543 ^a	10,7401 ^a	8,3931 ^a
	100	40.8291 ^a	26,4717 ^a	20,3554 ^a	15,8823 ^a	13,4250 ^a	12,2256 ^a	10,7998 ^a	8,4315 ^b
1,5	5	29.0249 ^b	20,1105 ^b	15,7823 ^b	11,9009 ^b	8,5250 ^b	7,2422 ^b	6,6008 ^b	5,7477 ^b
	10	37,9819	24,8781	19,1863	14,8925	12,2523	11,0199	9,7909	7,7894
	20	40,5307	26,3463	20,274	15,798	13,2616	12,0379	10,65	8,3551
	50	41,3076	26,7894	20,6013	16,0719	13,5752	12,358	10,9186	8,5287
	100	41,4211	26,8539	20,6489	16,1118	13,6212	12,4052	10,9581	8,5541
2	5	26,2058	17,7704	13,8486	10,5589	7,959	6,897	6,232	5,2556
	10	35,8416	23,592	18,2206	14,1073	11,4583	102468	9,1281	7,3263
	20	39,4951	25,71	19,7925	15,4115	12,8878	11,6779	10,34	8,1336
	50	40,6574	26,374	20,2833	15,8219	13,3554	12,1543	10,7401	8,3931
	100	40,8291	26,4717	20,3554	15,8823	13,425	12,2256	10,7998	8,4315

^a Mode pour plaque est (m,n)=(2,1). ^b Mode pour plaque est (m,n)=(1,2).

IV.5 Conclusions :

Une théorie des plaques raffinées simple et efficace, a été développée avec succès pour l'analyse du flambement des plaques (FGM). Cette théorie, qui a une forte similitude avec la théorie des plaques classique dans de nombreux de variable tenant en comptes pour une variation quadratique des contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions au limite sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement.

La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour l'analyse du flambement des plaques (P-FGM) simplement appuyée. Il peut être conclu que la

théorie actuelle est non seulement précise mais aussi efficace pour prédire les charges critiques de flambement de la plaque (P-FGM) par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement des plaques telles que (FSDT et HSDT). En raison de l'intérêt caractéristique de la théorie actuelle, les présents résultats seront un repère utile pour évaluer la fiabilité des autres théories des plaques à venir.

Chapitre V

Analyse du flambement des plaques « sandwiches » en FGM par la théorie d'ordre élevé à deux variables

V.1. Introduction:

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie des plaques à quatre variables est développée pour étudier le comportement du flambement des plaques FGM hybrides (céramique –FGM-métal) soumises à des charges axiales .En utilisant la solution de Navier ,les solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse du flambement de ces plaques .les effets de plusieurs variables ,tels-que l'épaisseur de la couche FGM, l'indice matériel, le rapport des épaisseurs des couches et le rapport de dimensions de la plaque sur la charge critique de flambement des plaques FGM hybride seront discutés.

Ces dernières années, les recherches ont fait une grande attention sur les plaques FGM, et une variété de théories des plaques a été introduite pour examiner l'effet de cisaillement transversal de déformation. De nombreuses théories sur les plaques ont été développées ainsi la théorie classique des plaques CPT fournit un modèle théorique du comportement de la plaque qui présente certains des avantages considérables et elle peut être utilisée avec une grande fiabilité dans le cas des plaques minces, mais qui a aussi des limites importantes. Le succès de CPT résulte du fait que le comportement en flexion d'une plaque est exprimé en un seul terme, la quantité de référence fondamentale qui est w , le déplacement transversal de la surface moyenne suivant la direction z . L'hypothèse de Kirchhoff est utilisé pour la CPT qui repose sur le fait que la section droite reste droite et perpendiculaire à la surface médiane après déformation. La conséquence de l'utilisation de cette hypothèse est que l'effet de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur est négligé dans la CPT et donc la théorie classique surestime la rigidité de la plaque. Cependant elle peut être d'une importance considérable pour les autres de sollicitation de la plaque, en particulier dans les vibrations et les problèmes de flambement lorsque le rapport de l'épaisseur de la plaque sur sa longueur est petit. Cette théorie a été utilisée pour analyser le flambement des plaques FGM par (Feldman et Aboudi ,1997 ;Javaheri et Eslami ,2002 ; Abrate ,2008 ; Mahdavian ,2009 ; Mohammadi et al ,2010). Neanmoins, il sous-estime les fréquences ainsi que les charges critiques de flambement de la plaque d'épaisseur moyenne (Reddy, 2004).

Un certain nombre de théories des plaques existe dans les quelles l'hypothèse de Kirchhoff est relaxés pour tenir compte de la déformation de cisaillement. Parmi ces théories, ceux de Mindlin (1951) et Reissner (1945) sont les plus utilisés dans le domaine des plaques. Ces théories sont connues sous le nom théories déformables de cisaillement de premier ordre (FSDT), elles prennent en compte les effets de

cisaillement transversal par la voie de la variation linéaire dans le plan de déplacements à travers l'épaisseur. De nombreuses études de l'analyse de flambement des plaques FGM ont été effectuées en utilisant FSDT (Shariat et Eslami, 2005; Yang et al, 2005; Zhao et al, 2009 ; Bouazza et al, 2010). Cependant, ces modèles ne satisfont pas aux conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, et ont besoin d'utiliser un facteur de correction de cisaillement pour satisfaire les relations constitutives des contraintes de cisaillement transversales et de déformations de cisaillement.

Pour ces raisons, de nombreuses théories d'ordre élevé ont été développées pour améliorer la FSDT tels que (Levinson ,1980) et (Reddy ,1984). En effet, (Reddy ,1984) a présenté une théorie de la déformation parabolique de cisaillement (PSDT) qui considère non seulement la contrainte de cisaillement transversale, mais aussi leur variation parabolique à travers l'épaisseur des plaques. Bien que les différentes théories de la plaque aient été adoptées pour l'analyse de flambement des plaques FGM, le flambement des plaques sandwich céramique -MGF -métal n'a pas été examiné.

Dans ce chapitre, on se propose d'impliquer la théorie des plaque raffinée avec seulement quatre variables, contrairement a celle de cinq variables utilisée par Reissner ainsi que la théorie de Mindlin développée pour étudier le comportement non linéaire des plaques sandwich céramique -MGF -métal soumise à la charge dans le plan. En utilisant la solution de Navier, les solutions de forme ont été formulées pour analyser le comportement des plaques simplement appuyées sur les quatre cotés. Les effets de diverse paramètres, tels que le rapport géométrique, l'indice matériel et autres paramètres sur la charge critique de flambement de plaques F G M hybrides sont étudiés et discutés.

V.2. Modélisation des matériaux FGM :

Considérons une plaque en FGM hybride d'épaisseur h , constituée de céramique et de métal. la plaque est composée de trois couches : la couche supérieure est entièrement en céramique ($h/2 \sim z_c$), une couche l'âme est entièrement en FGM de cordonnée ($z_c \sim -z_m$) et la couche inférieure est entièrement en métal ($-z_m \sim -h/2$).

La couche FGM est aussi composée composé de céramique et métal, dans la quelle la fraction de volume de céramique varie 0% à l'interface entre la couche métallique pure

et FGM à 100% à l'interface entre FGM et la couche céramique pure. Quelques modèles micromécanique ont été proposés pour la détermination des propriétés effectives des FGM tel que la loi de mélange ou appelée : modèle Voigt (Gibson et al, 1995), Mori-Tanaka régime (Mori et Tanaka, 1973) et l'auto consistante (Hill, 1965). Le modèle de Mori-Tanaka est applicable au phase discontinue de particule, tandis que le modèle de Voigt est simple et efficace à appliquer pour prédire les propriétés des matériaux et des réponses des structures FGM. Cependant, (Chehel Amirani et al, 2009) ont montré qu'il ya une différence insignifiante entre les résultats obtenus par ces deux techniques (le modèle Mori-Tanaka et la loi de mélange). Par conséquent, le modèle de Voigt est raisonnable pour la prédiction de la réponse des structures FGM. En utilisant le modèle de Voigt (Gibson et al. ,1995), le module d'Young $E(z)$ de la couche FGM, est supposé comme suit :

$$E(z) = E_C V_C + E_M V_M = E_C V_C + E_M (1 - V_C) \quad (V.1)$$

E_C et E_M sont respectivement le module de Young de céramique et le métal. V_C est la fraction volumique de la céramique et est exprimée par une loi simple de puissance comme suit:

$$V_C = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (V.2)$$

Où l'exposant positif p est appelé indice de la fraction volumique ; z est la coordonnée suivant l'épaisseur ($-z_M \leq z \leq z_C$).

En substituant l'équation (V.2) dans (V.1), les propriétés matérielles de la couche FGM peuvent être exprimés par :

$$E(z) = (E_C - E_M) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p + E_M \quad (V.3)$$

La relation (V.3) peut être utilisée pour déterminer le module de Young $E(z)$ de la plaque

(céramique-FGM –métal) à n'importe quelle position. Cependant, le coefficient de Poisson

(ν) est supposé être constant, car sa variation est petite.

En effet, (Delale et Erdogan, 1983) ont montré que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est très inférieur par rapport à celui du module de Young. Ainsi, le coefficient de poisson des plaques est supposé être constant. L'étude de son effet sur la réponse statique de la plaque peut être trouvée dans les travaux de (Chi et Chung ,2006).

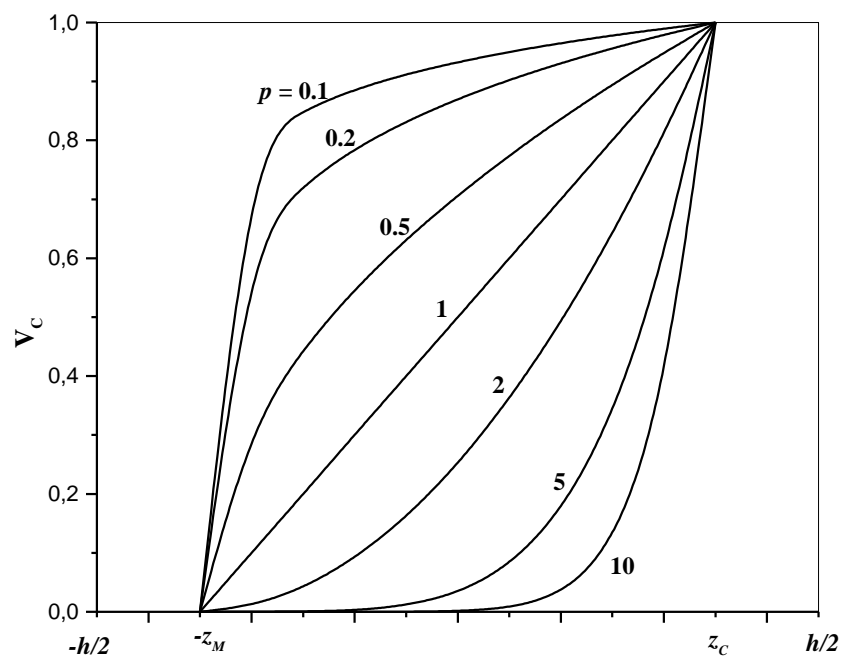


Figure V.1: variation de la fraction volumique en céramique le long de l'épaisseur de la plaque.

La figure V.1 représente la variation de la fraction volumique de la céramique à travers l'épaisseur de la plaque (céramique-FGM-métal).

L'indice p de la fraction volumique est pris égales à : 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5 et 10. L'axe y (des ordonnées) de la figure représente le pourcentage volumique de céramique, tandis l'axe x représentant la position le long de l'épaisseur de la plaque (céramique-FGM-métal). On peut constater à travers la figure (V.1) que la fraction volumique de la céramique est comprise entre 0% et 100% dans la couche de FGM. Des petites

valeurs de l'indice de la fraction volumique p donnent à une augmentation rapide de constituant céramique à l'interface FGM et céramiques.

V.3. Théorie raffinée à quatre variables adaptées pour les plaques

V.3.1. Hypothèses de la présente théorie des plaques

Les hypothèses pris sont les suivantes:

- (i) Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- (ii) Le déplacement transversal comprend deux composants de flexion w_b et w_s de cisaillement. Ces composants sont en fonction de coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

(V.4)

- (iii) (iii) La contrainte normale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .

- (iv) les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont constitués de trois composantes : membrane, de flexion et une composante de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s$$

(V.5a)

$$v = v_0 + v_b + v_s$$

(V.5b)

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires à des déplacements donnés par la théorie classique de plaque. Par conséquent, l'expression u_b et v_b peut être donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}$$

(V.6a)

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}$$

(V.6b)

Les composantes de cisaillement u_s et v_s engendrées, en combinaison avec w_s , aux variations paraboliques de contraintes de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc à des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle façon que des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{V.7a})$$

$$v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{V.7b})$$

V.3.2. Cinématique et équations d'équilibre :

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, les champs des déplacements peuvent être obtenus en utilisant les équations (V.4) et (V.7) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{V.8a})$$

Avec

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{V.8b})$$

Les déformations associées aux déplacements sont :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\
\gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\
\gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
\varepsilon_z &= 0
\end{aligned}
\tag{V.9}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
\gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
\end{aligned}
\tag{V.10}$$

La loi de Hooke généralisée, en tenant compte de l'effet thermique peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(V.11)

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation. (V.3), les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme suit:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

(V.12a)

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}$$

(V.12b)

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

(V.12c)

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe du minimum d'énergie potentielle totale et les quatre équations d'équilibre sont données comme suit:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = 0$$

(V.13a)

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0$$

(V.13b)

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + \bar{N} = 0$$

(V.13c)

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + \bar{N} = 0$$

(V.13d)

où, d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

(V.14a)

$$d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}$$

(V.14b)

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}$$

(V.14c)
(i, j, l, m = 1, 2).

Et

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right]$$

(V.15)

Où, N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 sont des forces dans le plan de pré-flambement.

Les coefficients dans les équations d'équilibre associés à des paramètres du matériau de la plaque FGM hybrides sont définis comme

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz$$

(V.16a)

Avec

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s)$$

(V.16b)

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz$$

(V.16c)

De toute évidence, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transversal est négligé

($w_s = 0$) les équations (V.13) donne l'équation d'équilibres de la plaque FGM hybride basée sur la théorie classique des plaques.

V.4. Analyse du flambement des plaques FGM hybride :

V.4.1. Solution de Navier pour les plaques rectangulaires simplement appuyées :

Considérons une plaque rectangulaire en céramique-FGM -métal simplement appuyée sur les quatre bords avec la longueur **a** et la largeur **b** et soumise à un chargement suivant le plan dans les deux directions ($N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$) comme indiqué dans la figure V.2.

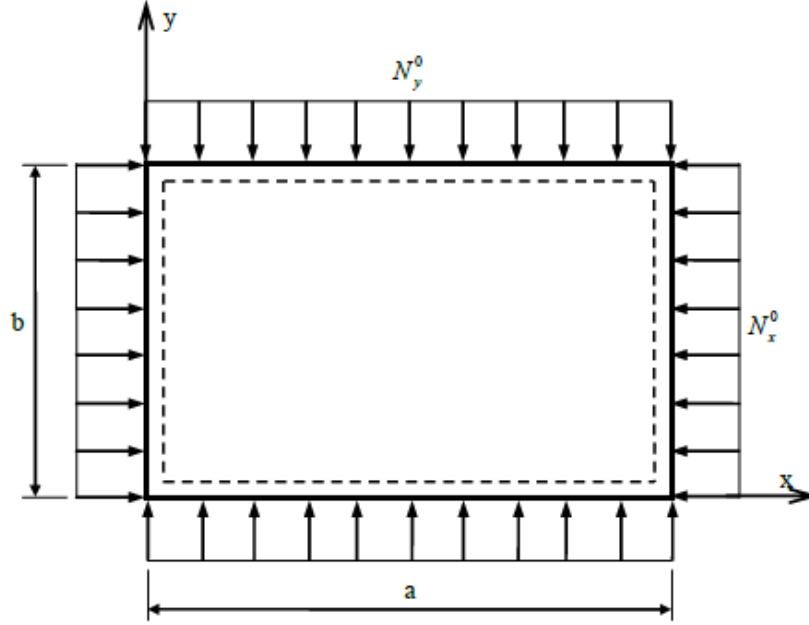


Figure V.2: plaque rectangulaire soumise à un chargement dans le plan.

Les conditions aux limites sont pour une plaque céramique-FGM -métal simplement appuyées donnée comme suit:

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{Sur les bords } x = 0, a$$

(V.17a)

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{Sur les bords } y = 0, b$$

(V.17b)

Les fonctions de déplacement qui satisfont aux conditions limites imposée par les équations de (V.17) sont données comme la série de Fourier suivant:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}$$

(V.18)

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer.

Et

$$\lambda = m\pi/a$$

$$\mu = n\pi/b$$

En substituant l'équation (V.18) dans l'équation(V.13), la charge critique de flambement peut être déterminée à partir des valeurs propres des relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + k & a_{34} + k \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} + k & a_{44} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(V.19)

Avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \end{aligned}$$

(V.20)

$$\begin{aligned} a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\ k &= N_{cr}(\gamma_1\mu^2 + \gamma_2\lambda^2) \end{aligned}$$

De la relation (V.19), nous obtenons l'expression de la charge critique de flambement:

$$N_{cr} = \frac{-1}{\gamma_1\mu^2 + \gamma_2\lambda^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{33} + \bar{a}_{44} - \bar{a}_{34} - \bar{a}_{43}}$$

(V.21)

Avec

$$\bar{a}_{33} = a_{33} - a_{13} \frac{b_1}{b_0} - a_{23} \frac{b_2}{b_0}$$

(V.22a)

$$\bar{a}_{34} = a_{34} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0}$$

(V.22b)

$$\bar{a}_{43} = a_{34} - a_{13} \frac{b_3}{b_0} - a_{23} \frac{b_4}{b_0}$$

(V.22c)

$$\bar{a}_{44} = a_{44} - a_{14} \frac{b_3}{b_0} - a_{24} \frac{b_4}{b_0}$$

(V.22d)

$$b_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

(V.22e)

$$b_1 = a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}$$

(V.22g)

$$b_2 = a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}$$

(V.22h)

$$b_3 = a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}$$

(V.22i)

$$b_4 = a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}$$

(V.22k)

Pour le cas de la théorie classique des plaques CPT, l'expression de la charge critique de flambement peut être simplifiée en traduisant l'hypothèse de la contrainte de cisaillement nulle :

$$N_{cr} = \frac{-\bar{a}_{33}}{\gamma_1 \mu^2 + \gamma_2 \lambda^2}$$

(V.23)

Pour chaque choix de m et n , il y a une valeur unique qui correspond à la charge critique de flambement si la plus petite valeur de $N_{cr}(m, n)$.

V.4.2.Solution de Ritz pour les plaques aux diverses conditions aux

limites :

En appliquant la solution de Ritz, les composantes de déplacement sont supposées être des formes de séries infinies des fonctions inconnues selon les coordonnées latérales de la plaque. En prenant un nombre suffisant de termes dans ces séries, il est possible d'approcher à la solution exacte du problème considéré. Bien que différentes inconnues peut être choisi, dans cette étude, après avoir défini les coordonnées adimensionnelles $\xi = 2x/a$ et $\eta = 2y/b$ ainsi que $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$ et, nous supposons que les composantes du déplacement et une suite des polynômes simples algébriques qui sont les fonctions de paramètres :

$$(u_0, v_0, w_b, w_s) = \sum_{f=0}^{F-1} \sum_{g=0}^{G-1} (U_{ij}, V_{kl}, C_{mn}, E_{pq}) X_f(\xi) Y_g(\eta)$$

(V.24)

Où les polynômes sont définis comme :

$$X_f(\xi) = \xi^f (\xi+1)^{B_1} (\xi-1)^{B_3}, \quad f = i, k, m, p$$

(V.25a)

$$Y_g(\eta) = \eta^g (\eta+1)^{B_2} (\eta-1)^{B_4}, \quad g = j, l, n, q.$$

(V.25b)

U_{ij}, V_{kl}, C_{mn} et E_{pq} sont des coefficients constants inconnus. Ici, B_i peut prendre les valeurs de 0, 1 et 2 correspondant aux bords libres, simplement appuyés et encastré, respectivement (Narita, 2000). L'indices 'i' des B_i représentent le nombre des bords de la plaque dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Il convient de rappeler que la méthode de Ritz satisfait seulement aux conditions aux limites géométriques, il est possible de satisfaire toutes les séries de condition de bord géométrique nécessaire. Les conditions aux limites le long des bords de la plaque présentée dans le tableau V.1 seront prises en compte dans cette étude.

Tableau V.1: Les conditions aux limites cinématiques de bord des plaques considérées

	Type de condition au limits	
	At $\xi = \pm 1$	At $\eta = \pm 1$
Simplement appuis (S)	$v_0 = w_b = w_s = \partial w_s / \partial \eta = 0$	$u_0 = w_b = w_s = \partial w_s / \partial \xi = 0$
Encastrais (C)	$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \partial w_b / \partial \xi = \partial w_s / \partial \xi = \partial w_s / \partial \eta = 0$	$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \partial w_b / \partial \eta = \partial w_s / \partial \xi = \partial w_s / \partial \eta = 0$
Libre (F)	$u_0 \neq 0, v_0 \neq 0, w_b \neq 0, w_s \neq 0, \partial w_s / \partial \xi \neq 0, \partial w_s / \partial \eta \neq 0$	$u_0 \neq 0, v_0 \neq 0, w_b \neq 0, w_s \neq 0, \partial w_s / \partial \xi \neq 0, \partial w_s / \partial \eta \neq 0$

Lors de l'insertion des relations de déplacement équation (V.24) dans l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle et après minimisation de l'énergie potentielle totale de la plaque par rapport aux fonctions de déplacement, un système d'équations algébriques simultanées avec le même nombre de coefficients inconnus de l'équation (V.24) est obtenu. Le nombre de ces équations est le même nombre de termes pris ($F = G = M$). Les équations algébriques sont données comme suit sous la forme du problème aux valeurs propres généralisé:

$$|K - \bar{N}M|X = 0$$

(V.26)

Où \bar{N} la charge critique de flambage.

K et M sont des matrices de rigidité et de la géométrie, respectivement.

X Contient les coefficients inconnus de la série (V.24).

Pour une solution non-triviale, les valeurs propres (\bar{N}) qui rendent le déterminant d'être égal à zéro, correspondent aux charges critiques de flambemen.

V.5.Résultats et discussion :

Dans ce chapitre, l'analyse de flambement d'une plaque hybride céramique-FGM - métal par la formulation présentée ci-dessus est étudiée. Les plaques hybride en céramique-FGM -métal sont soumis à différents types de chargement dans le plan. L'épaisseur totale de la plaque hybride en céramique-FGM -métal est h . Où $h = t_{Ceramic} + t_{FGM} + t_{Metal}$. $t_{Ceramic}$, t_{FGM} et t_{Metal} sont l'épaisseur de la couche de céramique, tout FGM et de métal, respectivement. Dans l'analyse qui suit, les constituaient du FGM sont ; d'aluminium et de carbure de silicium, est étudiée. Le module de Young du carbure de silicium est $E_C = 420$ GPa et pour Aluminium

est $E_M = 70 \text{ GPa}$, respectivement. On notera que, le coefficient de Poisson est choisi constant à la fois pour l'aluminium et le carbure de silicium et le égal à 0,3.

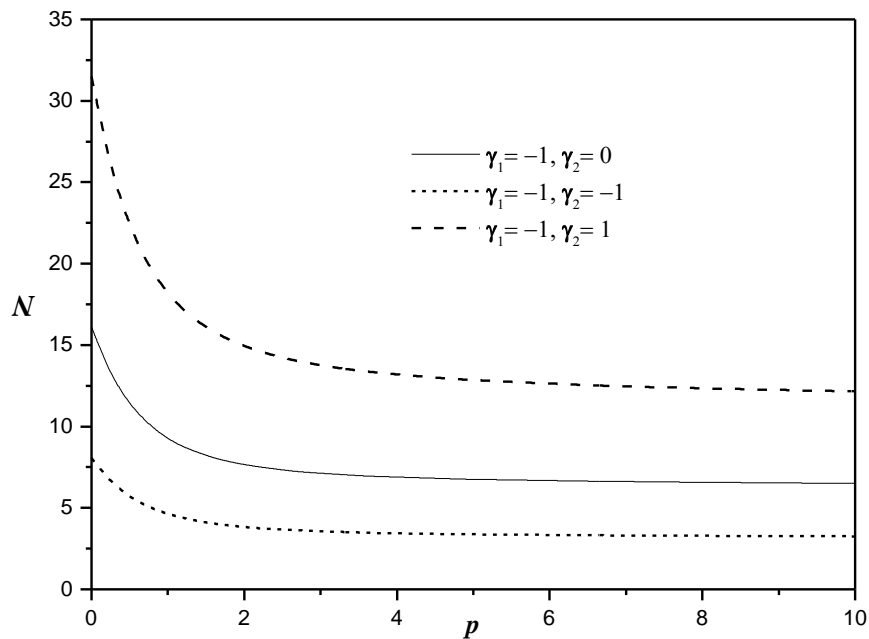


Figure V.3: La charge critique de flambement de la plaque FGM hybride rapport à l'indice matérielle pour trois différents types de chargement avec $a/h = 10$ et $t_{FGM}/h = 0.8$.

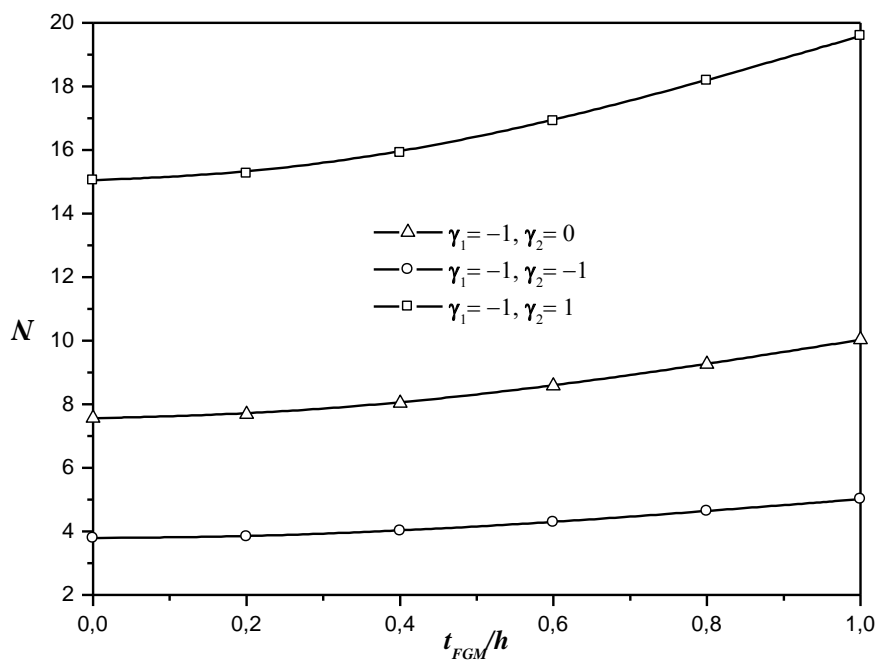


Figure V.4: La charge critique de flambement de la plaque FGM hybride rapport aux rapport mécanique pour trois différents types de chargement avec $a/h = 10$ et $p = 1$.

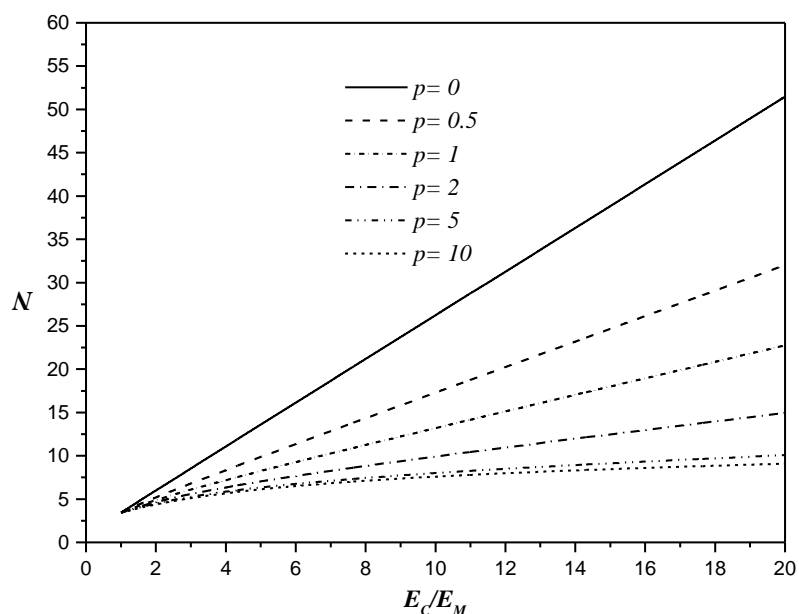


Figure V.5: L'effet du rapport mécanique et la puissance du FGM (t_{FGM}/h) sur la charge critique de flambement de la plaque FGM hybride carré ($a/h = 10$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p = 1$.

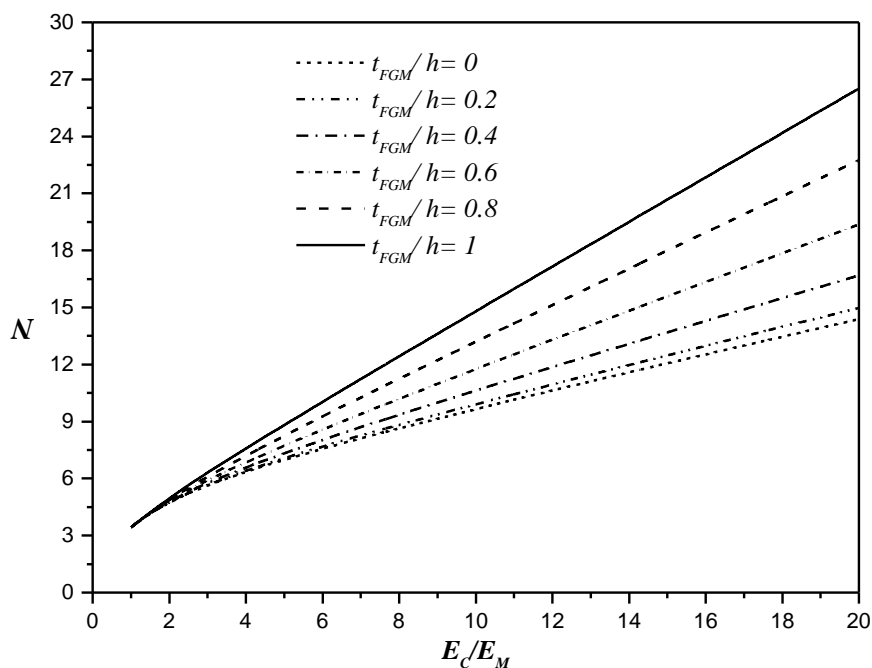


Figure V.6: L'effet du rapport mécanique et l'épaisseur de la plaque FGM carré (t_{FGM} / h) sur la charge critique de flambement avec ($a / h = 10$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p = 1$.

Pour vérifier l'exactitude de la théorie, la comparaison est faite entre les résultats obtenus par le modèle actuel et ceux de (Bodaghi et Saidi, 2010) basée sur la théorie de déformation de cisaillement à ordre élevée (HSDT) comme indiqué dans le tableau V.2. Les charges critiques de flambement d'une plaque totalement en FGM ($t_{FGM} / h = 1$), la variation de l'épaisseur, et la l'index matériel de FGM sont présentés dans le tableau V.2. On peut constater que les résultats obtenus sont en accord avec les résultats publiés. Il est noté que le nombre des inconnues dans la théorie actuelle est de quatre, tandis que celles dans la HSDT est de cinq. On peut conclure que la théorie actuelle n'est pas seulement précise, mais également simple pour prédire la charge critique de flambement des plaques FGM. Dans le tableau V.3, les non-dimensionnelles charges critiques de flambement sont présentées afin de comparer avec celles données par (Mohammadi et al, 2010) basées sur FSDT et (Bodaghi et Saidi, 2010) basées sur HSDT pour les plaques FGM pour toutes les conditions de chargement et des conditions aux limites, une concordance entre les résultats peuvent être observés. Pour plus de commodité, la charge critique de flambement est présentée

sous une forme adimensionnelle: $\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_M h^3}$

Tableau V.2: Comparaison de la charge critique de flambement (MN/m) de la plaque FGM rectangulaire

(γ_1, γ_2)	a / b	a / h	Theory	p		
				0	1	2
(-1,0)	0.5	10	Present	2080.010	1028.554	780.149
			HSDT**	2079,721	1028,412	780,097
		5	Present	12172.770	6275.972	4695.067
			HSDT**	12162,119	6270,298	4692,542
	1	10	Present	1437.452	702.276	534.807
			HSDT**	1437,361	702,304	534,441
		5	Present	9918.275	4956.375	3746.287
			HSDT**	9915,620	4955,431	3746,054
	1.5	10	Present	1528.089 ^a	749.027 ^a	569.786 ^a
			HSDT**	1527,903 ^a	748,92 ^a	569,751 ^a
		5	Present	10048.091 ^a	5069.449 ^a	3819.647 ^a
			HSDT**	10044,721 ^a	5067,219 ^a	3819,109 ^a

(-1,-1)	0.5	10	Present	1664.008	822.843	624.119	
			HSDT**	1663,777	822,738	624,158	
		5	Present	9738.216	5020.777	3756.054	
			HSDT**	9729,999	5016,384	3754,274	
		1	10	Present	718.726	351.138	267.403
				HSDT**	718,692	351,124	267,416
	5		Present	4959.137	2478.187	1873.143	
			HSDT**	4957,888	2477,589	1873,19	
	1.5	10	Present	526.878	256.782	195.706	
			HSDT**	526,861	256,776	195,714	
		5	Present	3773.504	1871.329	1418.040	
			HSDT**	3772,877	1871,038	1418,12	
(-1,1)	0.5	10	Present	2773.347	1371.406	1040.199	
			HSDT**	2772,98	1371,653	1040,519	
		5	Present	16230.36	8367.962	6260.09	
			HSDT**	16216,712	8360,541	6257,811	
		1	10	Present	2773.347 ^a	1371.406 ^a	1040.199 ^a
				HSDT**	2772,98 ^a	1371,653 ^a	1040,519 ^a
	5		Present	16230.360 ^a	8367.962 ^a	6260.090 ^a	
			HSDT**	16216,712 ^a	8360,541 ^a	6257,811 ^a	
	1.5	10	Present	2773.347 ^b	1371.406 ^b	1040.199 ^b	
			HSDT**	2772,98 ^b	1371,653 ^b	1040,519 ^b	
		5	Present	16223.643 ^b	8360.414 ^b	6257.811 ^b	
			HSDT**	16216,712 ^b	8360,541 ^b	6257,811 ^b	

a) Mode (m,n) = (2,1) ; b) Mode (m,n) = (3,1). ** (Bodaghi and Saidi, 2010)

Tableau V.3: Comparaison de la charge critique de flambement (MN/m) de la plaque rectangulaire FGM

(γ_1, γ_2)	P	Theories	conditions aux limites					
			SCSC	SSSC	SSSS	SFSC	SSSF	SFSF
(-1,0)	0	Present	63.7145	51.5323	37.3719	15.5186	13.2820	9.1321
		HSDT*	63.1628	51.5934	37.3714	15.4545	13.2503	9.1224
		FSDT**	63.0039	51.5506	37.3708	15.3653	13.2384	9.1020
	1	Present	65.1987	52.2819	37.7154	15.6892	13.3934	9.1730
		HSDT*	64.9643	52.3717	37.7172	15.5703	13.3634	9.1601
		FSDT**	64.8195	52.3414	37.7132	15.4950	13.3221	9.1469
	2	Present	65.0122	52.4011	37.5915	15.5012	13.2217	9.1521
		HSDT*	64.3779	52.1168	37.5765	15.2934	13.1840	9.1089
		FSDT**	64.7963	52.3314	37.7089	15.4933	12.2483	9.1464
(-1,-1)	0	Present	33.4847	24.2261	18.6862	10.6152	9.9878	8.8851
		HSDT*	33.3392	24.1989	18.6860	10.5061	9.8265	8.8613
		FSDT**	33.3206	24.1927	18.6854	10.5027	9.8243	8.8604
	1	Present	34.2784	24.6215	18.8573	10.7133	10.0238	8.9712
		HSDT*	34.0121	24.5260	18.8571	10.5997	9.9002	8.9092
		FSDT**	33.9966	24.5209	18.8566	10.5963	9.8980	8.9084
		Present	33.9567	24.5613	18.8022	10.6904	9.9371	8.9145
		HSDT*	33.7942	24.4204	18.8020	10.5695	9.8764	8.8938

	2	FSDT**	33.9881	24.5168	18.8545	10.5952	9.8970	8.9078
(-1,1)	0	Present	87.7348	78.9878	72.2869	23.3522	18.4017	9.2308
		HSDT*	86.4537	78.6141	72.2275	23.2027	18.3875	9.2100
		FSDT**	85.9468	78.4033	72.0834	22.9473	18.3902	9.2089
	1	Present	90.0425	80.8736	73.6687	23.4586	18.5717	9.2618
		HSDT*	89.1448	80.6283	73.6645	23.3907	18.5048	9.2534
		FSDT**	88.6686	80.4424	73.6307	23.1814	18.5038	9.2537
	2	Present	89.0374	80.0564	73.1598	23.0716	18.3408	9.2402
		HSDT*	88.2837	79.9839	73.1587	22.9933	18.3005	9.2387
		FSDT**	88.6336	80.4165	73.6112	23.1784	18.5024	9.2531

** (Bodaghi and Saidi, 2010)

* (Mohammadi et al., 2010)

Tableau V.4: L'effet de l'indice matériel p et t_{FGM} / h sur la charge critique de flambement d'une plaque hybride avec ($a / h = 10$) sous différentes conditions de chargement.

t_{FGM} / h	(γ_1, γ_2)	p								
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	∞
0	(-1,0)	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632
	(-1,-1)	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816
	(-1,1)	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a	15.0408 _a
0.2	(-1,0)	8.5641	8.3996	8.2626	7.9655	7.6818	7.42520	7.2150	7.1411	7.0740
	(-1,-1)	4.2820	4.2000	4.1313	3.9828	3.8409	3.7126	3.6075	3.5705	3.5370
	(-1,1)	17.095 _a	16.7562 _a	16.4733 _a	15.8565 _a	15.2614 _a	14.7118 _a	14.2411 _a	14.0641 _a	13.8888 _a
0.4	(-1,0)	10.2454	9.8243	9.4746	8.7225	8.0275	7.4463	7.0493	6.9438	6.8707
	(-1,-1)	5.1227	4.9122	4.7373	4.3613	4.0138	3.7231	3.5247	3.4719	3.4354
	(-1,1)	20.3936 _a	19.5482 _a	18.8448 _a	17.3252 _a	15.903 _a	14.675 _a	13.7512 _a	13.4502 _a	13.1758 _a
0.6	(-1,0)	12.7333	11.9341	11.2709	9.853	8.5702	7.5551	6.946	6.8039	6.6679
	(-1,-1)	6.3667	5.9670	5.6354	4.9265	4.2851	3.7776	3.4730	3.4019	3.3340
	(-1,1)	25.1484 _a	23.5792 _a	22.2746 _a	19.47264 _a	16.906 _a	14.8037 _a	13.363 _a	12.9086 _a	12.4435 _a
0.8	(-1,0)	16.1289	14.8014	13.7007	11.3554	9.2608	7.6603	6.7565	6.5073	6.0209
	(-1,-1)	8.06443	7.4007	6.8503	5.6777	4.6304	3.8302	3.3782	3.2537	3.0105
	(-1,1)	31.4984 _a	28.948 _a	26.8271 _a	22.2839 _a	18.1768 _a	14.939 _a	12.857 _a	12.1622 _a	11.1671 _a
1	(-1,0)	20.535	18.4968	16.8076	13.2165	10.0325	7.6401	6.2476	5.6339	3.4225
	(-1,-1)	10.2675	9.2484	8.4038	6.6082	5.0163	3.8201	3.1238	2.817	1.7112

	(-1,1)	39.6192 ^a	35.7739 ^a	32.5753 ^a	25.7322 ^a	19.5915 ^a	14.86 ^a	11.8583 ^a	10.5663 ^a	6.6032 ^a
--	--------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	--------------------	----------------------	----------------------	---------------------

^a Mode (m,n) = (2,1)

Tableau V .5: L'effet de l'indice matériel p et le rapport géométrique a/h sur la charge critique de flambement d'une plaque hybride avec ($t_{FGM}/h=0.8$) sous différentes conditions de chargement.

a/h	(γ_1, γ_2)	p								
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	∞
10	(-1,0)	16.1289	14.8014	13.7007	11.3554	9.2608	7.6603	6.7565	6.5073	6.0209
	(-1,-1)	8.0644	7.4007	6.8503	5.6777	4.6304	3.8302	3.3782	3.2537	3.0105
	(-1,1)	31.4984 ^a	28.9480 ^a	26.8271 ^a	22.2839 ^a	18.1768 ^a	14.9390 ^a	12.857 ^a	12.1622 ^a	11.1671 ^a
20	(-1,0)	16.6868	15.3012	14.154	11.717	9.5547	7.9316	7.0936	6.9043	6.4175
	(-1,-1)	8.3434	7.6506	7.0770	5.8585	4.7774	3.9658	3.5468	3.4521	3.2087
	(-1,1)	34.1729 ^a	31.3482 ^a	29.0074 ^a	24.0277 ^a	19.5946 ^a	16.2366 ^a	14.4185 ^a	13.958 ^a	12.9833 ^a
30	(-1,0)	16.7944	15.3975	14.2413	11.7865	9.6113	7.984	7.1599	6.9832	6.4968
	(-1,-1)	8.3972	7.6988	7.1206	5.8933	4.8056	3.9920	3.5799	3.4916	3.2484
	(-1,1)	34.7196 ^a	31.8377 ^a	29.4513 ^a	24.3816 ^a	19.8823 ^a	16.5026 ^a	14.7511 ^a	14.3514 ^a	13.3371 ^a
40	(-1,0)	16.8324	15.4315	14.2721	11.8111	9.6312	8.0025	7.1833	7.0113	6.5250
	(-1,-1)	8.4162	7.7158	7.1360	5.9055	4.8156	4.0013	3.5917	3.5057	3.2625
	(-1,1)	34.9151 ^a	32.0127 ^a	29.61 ^a	24.508 ^a	19.985 ^a	16.5978 ^a	14.8713 ^a	14.4945 ^a	13.4808 ^a
50	(-1,0)	16.8501	15.4473	14.2864	11.8225	9.6405	8.0111	7.1943	7.0244	6.5381
	(-1,-1)	8.425	7.7237	7.1432	5.9112	4.8202	4.0056	3.5971	3.5122	3.2691
	(-1,1)	35.0064 ^a	32.0943 ^a	29.684 ^a	24.5669 ^a	20.033 ^a	16.6422 ^a	14.9275 ^a	14.5618 ^a	13.5408 ^a

^a Mode (m,n) = (2,1)

Les charges critiques de flambement non dimensionnelles ont été présentées dans les tableaux V.4 et V.5 pour la plaque hybride céramique-FGM-métal sous trois différents types de chargement (compression uniaxiale, compression biaxiale et compression le long de l'axe des x et la traction le long de l'axe y). Le tableau V.4 montre l'influence de l'épaisseur de la couche FGM sur le comportement mécanique de la plaque hybride dont $t_{Ceramic}$ est l'épaisseur de la couche de céramique est t_{Metal} est l'épaisseur de couche de métal. Comme on peut le constater, la charge critique de flambement adimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice matérielle p , quel que soit le type de chargement. Un indice de matérielle faible fraction indique que la céramique est le constituant dominant dans le FGM.

Les effets de la fraction volumique de céramique et du rapport de l'épaisseur a/h sur la charge critique de flambement des plaques hybrides sont présentés dans le tableau V.5. Il ressort, qu'avec l'augmentation l'indice matériel p et la diminution du

rapport a/h , la charge critique de flambement adimensionnelle de la plaque hybride diminue considérablement.

Dans la Figure V.3, la charge critique de flambement adimensionnelle de la plaque carrée hybride est tracée en fonction de l'indice fraction volumique des trois différents types de chargement. Cette figure montre que la charge critique de flambement adimensionnelle diminue significativement avec l'augmentation de l'épaisseur des FGM. En outre, la variation de la charge sans dimension critique de flambement pour la puissance de la FGM est plus de 2 fois.

L'effet de l'épaisseur de la couche FGM sur la charge critique de flambement adimensionnelle de plaque hybride sous trois différents types de chargement est montré dans la Figure V.4. On peut observer que la charge critique de flambement adimensionnelle augmente avec l'augmentation de l'épaisseur la couche de FGM (t_{FGM}) pour un indice de matérielle $p = 1$. En outre, il peut être observé sur les figures V.3 et V.4 que la charge critique de flambement de plaque hybride sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) est supérieure à celle en compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$) par contre inférieure à celle sous compression le long de l'axe x et de la traction le long de l'axe y ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$).

Les figures V.5 et V.6 montrent la variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle de plaque carrée hybride en fonction du rapport des modules E_C / E_M pour les différentes valeurs de t_{FGM} / h . On constate que les augmentations de la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation de l'indice de matérielle p .

V.6. Conclusion:

Dans ce chapitre, une analyse du flambement d'une plaques hybride (céramique - FGM-métal) a été présentée. Basée sur la nouvelle théorie des plaques à quatre variables raffinés, les équations d'équilibre et de la stabilité ont été obtenues. Le nombre des inconnues impliquées dans la présente théorie est de quatre, Tandis que la théorie déformation en cisaillement d'ordre élève des inconnus est cinq. La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour l'analyse du flambement d'une plaque simplement appuyée hybride (céramique -FGM-métal). On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace pour prédire les charges critiques de flambement de la plaque hybride par rapport à d'autres théories de cisaillement des plaques. Les formulations et les résultats, seront

une référence utile pour les chercheurs afin de vérifier leurs méthodes analytiques et numériques, ainsi que pour les concepteurs de génie civil.

Conclusion générale

Conclusion générale :

Dans cette thèse, l'analyse de flambement des plaques FGM est présentée.

En premier lieu la stabilité thermique des plaques S-FGM AL/AL₂O₃ est étudiée. En se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et en supposant une double loi de puissance de la distribution de la fraction volumique de matériau, les équations d'équilibre et de stabilité des plaques S-FGM soumises à des charges thermiques sont déterminées. Nous avons constaté que la déformation de cisaillement transversale et l'indice matériel ont un effet considérable sur la température critique du flambement de la plaque S-FGM en particulier pour les plaques épaisses ou les plaques ayant un rapport géométrique élevé.

En deuxième lieu, une théorie de plaque simple et efficace à quatre variables est présentée pour l'analyse du flambement des plaques FGM. Cette théorie a de forte similitude avec la théorie classique des plaques dans plusieurs aspects, elle considère une variation quadratique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et satisfait la nullité de cette contrainte dans les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction. La validité et l'efficacité de cette théorie est démontrée pour l'analyse du flambement des plaques FGM simplement appuyées.

En dernier lieu, un nouveau modèle à quatre variables de déformation de cisaillement hyperbolique est développé pour les plaques FGM hybride (céramique-FGM-métal). Le nombre d'inconnues dans cette théorie est seulement quatre contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement qui utilisent cinq inconnues. Ce modèle est comparé avec d'autres théories connus dans la littérature où sa précision est mise en évidence.

Références Bibliographiques

(E. Reissner, 1945) Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 1945; 12(2):69-72.

(F.B. Hildebrand. et E. Reissner., 1949) F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.

(Mindlin, R.D., 1951) Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *ASME J Appl Mech*, (1951), 31-38.

(Narasimhamurthy, P., 1957) Narasimhamurthy, P., "The effect of transverse shear deformation and rotary inertia in wave propagation and vibration of thin elastic plates, In: Proceedings of the 3rd congressional theoretical applied mechanics, Bangalore, India", Indian Society of Theoretical Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Kharagpur, (1957), 351–360.

(S.P. Timoshenko et S.Woinowsky-Krieger, 1959) S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.

(R. Hill, 1965) Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids* 1965; 13(2):213–22.

(Whitney, J.M., 1969) Whitney, J.M., "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", *Journal of Composite Materials*, (1969), 3, 534–547.

(Ambartsumyan, S.A., 1970) Ambartsumyan, S.A., "Theory of anisotropic plates", Stanford: Technomic Publishing Company, (1970).

(Pagano, J.N., 1970) Pagano, J.N., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", (1970), 4, 20-35.

(Srinivas, S. et Rao, A.K., 1970) Srinivas, S. et Rao, A.K., "Vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", (1970), 1463–1481.

(S.P. Timoshenko et J.M.Gere, 1972) S.P. Timoshenko., J.M.Gere, *Mechanics of Materials*. D. Van Nostrand Company, 1972.

(T. Mori et K.Tanaka, 1973) Mori, T. et Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions", *Acta Metall*, (1973), 571–574.

(R. E. Mistler, 1973) R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.

(Whitney et CT. Sum, 1973) Whitney, J.M. et Sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", *Journal of Sound and Vibration*, (1973), 85–97.

(E. Reissner, 1975) E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502, 1975.

(Schmidt, R., 1977) Schmidt, R., "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *Indust Math*, (1977), 23–38.

(Levinson, M., 1980) Levinson, M., "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, (1980), 343–350.

(Reissner, E., 1980) Reissner, E., "On the analysis of first and second order shear deformation effects for isotropic elastic plates", *ASME J Appl Mech*, (1980), 959-961..

(Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G.,1981) Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., "Natural vibrational modes of laminated anisotropic plates and flat shells", *Soviet Appl Mech*, (1981), 334–339.

(Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., 1982) Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, (1982), 149–156.

(F. Delale et F. Erdogan, 1983) F. Delale, F. Erdogan, *ASME Journal of Applied Mechanics* 50 (1983) 609–614.

(J.N. Reddy, 1984) J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.

(P. M. Naghdi, 1984) P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.

(P. Boch et al, 1986) P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.

(M. Takahashi et al, 1990) M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.

(H.D. Steffens et al, 1990) H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.

- (M. D.Pandey et A. N.Sherbourne, 1991)** Pandey, M. D.; Sherbourne, A. N.: Buckling of anisotropic composite plates under stress gradient. *J. Eng. Mech.* 117 (1991) 2, 260—275.
- (M. Touratier, 1991)** M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc;* 29 (8): 901-916, 1991.
- (M. Yamanouchi, M. Koizumi , 1991)** Yamanouchi M, Koizumi M. Functionally gradient materials. Proceeding of the first international symposium on functionally graded materials, Sendai, Japan; 1991.
- (H. Okamura, 1991)** H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A;* 143 (1-2): 3-9,1991.
- (A. W.Leissa, 1992)** Leissa, A. W.: Review of recent developments in laminated composite plate buckling analysis. *Comp. Material Technol.* 45 (1992), 1–7.
- (J.S. Moya et al, 1992)** J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters;* 14 (5-6): 333-35, 1992.
- (M. Koizumi, 1992)** M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc;* 13 (7-8): 333-347, 1992.
- (G. B.Chai et K. H.Hoon, 1992)** Chai, G. B.; Hoon, K. H.: Buckling of generally laminated composite plates. *Comp. Sci. Technol.* 45 (1992), 125–133.
- (A. Bishop et al, 1993)** A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters;* 12 (19) :1516-18, 1993.
- (R. R.Chang et al, 1993)** Chang, R. R.; Chu, K. H.; Kam, T. Y.: Design of laminated composite plates for maximum shear buckling loads . *J. Energy Resources Technol., Trans. ASME* 115 (1993), 314–322.
- (Z.H. Jin et N. Noda, 1994)** Z.H. Jin, N. Noda, *ASME Journal of Applied Mechanics* 61 (1994) 738–740.
- (M. Savoia., J.N. Reddy, 1995)** M. Savoia., J.N. Reddy, Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures;* 32 (5): 593-608, 1995.
- (G. Bao et L. Wang, 1995)** G. Bao, L. Wang, *International Journal of Solids and Structure* 32 (1995), 2853 –2871.
- (Y.D. Lee et F. Erdogan, 1995)** Y.D. Lee, F. Erdogan, *International Journal of Fracture* 69 (1995), 145 –165.

(Y. S.kim et S. V. Hoa, 1995) kim, Y. S.; Hoa, S. V.: Bi-axial buckling behavior of composite rectangular plates. *Comp. Struc.* 31 (1995), 247–252.

(F. Erdogan et B.H. Wu, 1996) F. Erdogan, B.H. Wu, *Journal of Thermal Stresses* 19 (1996) 237–265.

(Hirai T, 1996) Hirai, T., "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341. Hirai, T., "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341.

(Y.Y. Yung et al, 1996) Y.Y. Yung, D. Munz, in: T. Shiota, M.Y. Miyamoto (Eds.), *Functionally Graded Material*, 1996, pp. 41–46.

(Z.H. Jin et R.C. Batra, 1996) Z.H. Jin, R.C. Batra, *Journal of Thermal Stresses* 19 (1996) 317–339.

(E. Feldman et J.Aboudi , 1997) Feldman E, Aboudi J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Composite Structures* 1997; 38(1-4):29-36.

(J.N. Reddy, 1997) J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

(L. Lostec, 1997) L. Lostec, *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L*, Thèse de l'université de Limoges, 1997.

(P. Gu et R.J. Asaro, 1997) P. Gu, R.J. Asaro, *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997) 3085–3098.

(F. Erdogan et Y.F. Chen,1998) F. Erdogan, Y.F. Chen, in: K. Kokini (Ed.), *Ceramic Coating*, 1998, pp. 29–37.

(S.Suresh, 1998) Suresh, S.; Mortensen, A.: *Fundamentals of functionally graded materials*. Barnes and Noble Pub, 1998.

(S. Suresh, A. Mortensen, 1998) Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of functionally graded materials*, Barnes and Noble Publications; 1998.

(M. R Eslami et R. Javaheri, 1999) Eslami, M. R.; Javaheri, R.: Buckling of composite cylindrical shells under mechanical and thermal loads *J. Thermal Stresses* 22 (1999), 527-545.

(J. Reddy, 2000) Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng.* (2000), 47(41–43):663–684.

(Z.H. Jin et G.H. Paulino, 2001) Z.H. Jin, G.H. Paulino, *International Journal of Fracture* 107 (2001) 73–98.

- (Y.L. Chung et S.H. Chi, 2001)** Y.L. Chung, S.H. Chi, Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering 13 (2001) 1–9.
- (R. Javaheri et M. R Eslami, 2002)**Javaheri R, Eslami M. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 2002; 82(4):277-283.
- (RP. Shimpi, 2002)** Shimpi R. Refined plate theory and its variants. AIAA Journal 2002; 40(1):137-146.
- (J.Reddy, 2002)** Reddy J. Energy principles and variational methods in applied mechanics: John Wiley & Sons Inc; 2002.
- (M.M. Najafizadeh, MR.Eslami ,2002)** Najafizadeh MM, Eslami MR. First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded circular plates. AIAA J 2002; 40:1444–50.
- (Chi . Shyang-ho et Chung Yen-Ling, 2003)** Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- (M. Karama et al, 2003)** M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- (S. Joshi et al, 2003)** S. Joshi, A. Mukherjee, S. Schmauder,Computational Materials Science 28 (2003) 548–555.
- (J. Reddy, 2004)** Reddy J. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis: CRC; 2004.
- (S.S.Vel et R.C.Batra, 2004)** Vel, S.S. et Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", Journal of Sound and Vibration, (2004), 703-730.
- (Wu.Lanhe , 2004)** Lanhe Wu. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. Compos Struct 2004; 64:211–8.
- (B. Shariat et M.Eslami, 2005)** Shariat B, Eslami M. Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading based on the first order plate theory. Proceeding of the Fifth International Conference on Composite Science and Technology 2005; American University of Sharjah, United Arab Emirates.
- (J. Yang et al, 2005)** Yang J, Liew K, Kitipornchai S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. Composites Science and Technology 2005; 65(7-8):1165-1175.
- (RP. Shimpi et GH. Patel, 2006)** Shimpi RP, Patel HG. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. International Journal of Solids and Structures 2006; 43(22-23):6783-6799.

- (Birman, V. et Byrd, L.W., 2007)** Birman, V. et Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", *Applied Mechanics Reviews*, (2007), 60, 195-216.
- (B. Shariat et M. Eslami, 2007)** Shariat B, Eslami M. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures* 2007; 78(3):433-439.
- (M. Najafizadeh et H. Heydari, 2007)** Najafizadeh M, Heydari H. Higher-order theory for buckling of functionally graded circular plates. *AIAA Journal* 2007; 45(6):1153.
- (Z. Zhong et T. Yu, 2007)** Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- (C. Baron et S. Naili, 2008)** C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- (M. Najafizadeh et H. Heydari, 2008)** Najafizadeh M, Heydari H. An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression. *International Journal of Mechanical Sciences* 2008; 50(3):603- 612.
- (S. Abrate ,2008)** Abrate S. Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Composites Part B: Engineering* 2008; 39(1):151-158.
- (TK. Nguyen et al, 2008)** Nguyen TK, Sab K, Bonnet G. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures* 2008; 83(1):25-36.
- (Zhang Da-Guang et Zhou You-He, 2008)** Zhang Da-Guang, Zhou You-He, *Computational Materials Science*, in press, doi:10.1016/j.commat.2008.05.016.
- (B. Mokhtar et al, 2009)** Mokhtar B, Abedlouahed T, El Abbas A, Abdelkader M. Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges. *Leonardo Journal of Sciences* 2009; 8(15):21-32.
- (B.O. Sallai et al, 2009)** B.O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, M. Bachir Bouiadjra, M. Meradjah, E.A. Adda Bedia, *Computational Materials Science* 44 (2009) 1344–1350.
- (M. Chehel Amirani et al, 2009)** M. Chehel Amirani, S.M.R. Khalili, N. Nematì. Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method. *Composite Structures* 90 (2009) 373–379.

(M.Mahdavian, 2009) Mahdavian M. Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform In-plane compressive loading. Journal of Solid Mechanics 2009; 1(3):213-225.

(SE. Kim et al, 2009) Kim SE, Thai HT, Lee J. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. Thin-Walled Structures 2009; 47(4):455-462.

(X. Zhao et al, 2009) Zhao X, Lee YY, Liew KM. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. Composite Structures 2009; 90(2):161-171.

(M. Bodaghi et A.Saidi Bodaghi,2010) M, Saidi A. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling 2010; 34(11):3659-3673.

(M. Mohammadi et Saidi A,2010) Mohammadi M, Saidi A, Jomehzadeh E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. Applied Composite Materials 2010; 17(2):81-93.

(H. Ait Atmane et al, 2010) H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121, 2010.

(HA. Sepiani et al, 2010) Sepiani HA, Rastgoo A, Ebrahimi F, Ghorbanpour Arani A. Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia. Materials & Design 2010; 31(3):1063-1069.

(HT. Thai et SE. Kim, 2010) Thai HT, Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. International Journal of Mechanical Sciences 2010; 52(4):626- 633.

(I .Mechab et al, 2010) Mechab I, Atmane H, Tounsi A, Belhadj H, Bedia E. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. Acta Mechanica Sinica 2010:1-9.