

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures et matériaux**

Présentée par

BESSAIM Aicha

Sujet de thèse

Etude de l'influence de cisaillement transverse et de la déformation normale sur le comportement statique et dynamique des structures FGM

Soutenu le devant le Jury composé de :

M ^r . A. TOUNSI	Pr	UDL-SBA	Président
M ^r . E.A. ADDA BEDIA	Pr	UDL-SBA	Directeur de Thèse
M ^r . S. BENYOUCEF	MCA	UDL-SBA	Examineur
M ^r . H. BERRABAH	MC A	CU RELIZANE	Examineur
M ^r . R. YEGHNEM	MCA	U. SAIDA	Examineur
M ^r . T. HASSAINE DAOUADJI	MCA	U.TIARET	Examineur
M ^r . S.R. MAHMOUD	Pr	U. LE ROI ABDULAZIZ. ARABIE SAOUDITE.	Invité

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je suis très heureuse de témoigner ma profonde estime à mon encadreur Monsieur le professeur **ADDA BEDIA EL ABASS** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme de ce travail.

Et par la même occasion, je vous souhaite cher Professeur un prompt rétablissement et une longue vie pleine de bonheur et de prospérité.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur **Abdelouahed TOUNSI** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés. Je tien à exprimer avec fierté ma gratitude d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **S. BENYOUCEF, H. BERRABAH, R. YEGHNEM et T. HASSAINE DAOUADJI** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur **S.R. MAHMOUD** d'avoir accepté mon invitation à ma soutenance de thèse, malgré tout le trajet qu'il a effectué pour être présent.

Je remercie vivement mon mari Monsieur **M.S.A HOUARI** pour les aides dans le déroulement de ce travail.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès et tous les enseignants de la faculté des Sciences et technologie de l'Université de Mascara.

TABLE DES MATIERES

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale	1
 Chapitre I : généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	
I.1. Introduction.....	5
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés	5
I.3. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels.....	8
I.4. Historique du développement des matériaux à gradient de propriétés.....	9
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	12
I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting).....	12
I.5.2. Compaction sèche des Poudres.....	12
I.5.3. Projection plasma.....	12
I.5.4. Frittage et Infiltration.....	13
I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	13
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	14
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	15
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	16
I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	17
I.8. Les modèles analytiques des plaques multicouches FGM.....	17
I.8.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	17
I.8.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	18
I.8.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	20
I.9. Solution exactes des plaques	22
I.10. Conclusion.....	23

Chapitre II : Revue des recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés

II.1.	Introduction.....	24
II.2.	Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés	26
II.2.1.	Estimation auto-cohérente « self consistent estimates ».....	26
II.2.2.	Modèle de Mori-Tanaka.....	27
II.2.3.	Modèle sphères composites.....	27
II.2.4.	Modèle d'assemblage de cylindres.....	28
II.2.5.	Modèle micromécanique.....	28
II.3.	Des études ont rapporté sur des plaques en matériaux à gradient de propriétés.....	29
II.3.1.	Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés.....	29
II.3.2.	Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement.....	30
II.4.	Conclusion.....	36

CHAPITRE III: Étude analytique de la flexion & de la vibration libres des plaques « sandwich » en FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé à cinq variables avec la prise en compte de la déformation normale

III.1.	Introduction.....	38
III.2.	Formulation théorique	39
III.2.1.	Configuration géométrique.....	39
III.2.2.	Propriétés des matériaux.....	40
III.3.	Modèle proposé « Théorie d'ordre élevé hyperbolique à cinq variables avec la prise en compte de l'effet Stretching ».....	44
III.3.1.	Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à cinq variables.....	44
III.3.2.	Cinématique et équations constitutives.....	45
III.3.3.	Équations gouvernantes.....	47
III.4.	Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée.....	51
III.5.	Conclusion	54

Chapitre IV: Résultats et discussions de l'Analyse du comportement statique et dynamique des plaques « sandwichs » en FGM

IV.1.	Introduction.....	55
IV.2.	Résultats de l'analyse statique : plaque sandwich avec cœur rigide (Hard Corps)..	56
IV.3.	Résultats du comportement en vibration des plaques sandwich (Hard Corps & Soft corps).....	67
IV.4.	Conclusion	77
	CONCLUSION GENERALE.....	78
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	80

ملخص

تكمن أهمية هذه الدراسة إلى اقتراح نظرية جديدة لحساب توزيعات ثلاثية الأبعاد للإزاحات والإجهادات وكذلك تحديد قيم الترددات الطبيعية للاهتزازات الحرة للصفائح السمكية المركبة من المواد المتدرجة الخاصة "ساندويتش". الهدف الأساسي هو تطوير نظرية جديدة ذو الترتيب العالي "شبه D3" للتشوه القصي مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير التمدد باتجاه سمك الصفيحة وإختبار دقتها مقارنة مع الحلول الدقيقة. على عكس النظريات الأخرى، فعدد مجاهيل النظرية المقترحة هو فقط 05 مجاهيل بينما يساوي 06 أو أكثر بالنسبة للنظريات الأخرى للتشوه القصي الأخذ بعين الإعتبار تأثير التمدد باتجاه سمك الصفيحة. الصيغة المقترحة هي التغييرية وتستند على مبدأ هاميلتون، النظرية المقترحة متناسقة المتغيرات تشبه النظرية الكلاسيكية للصفائح في جوانب عديدة لا تتطلب معامل تصحيح القص وتعطي وصفا مكافئا للإجهادات القص العرضي من خلال السمك بينما تحقق الشروط على الإجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف العلوية و السفلية للصفحة. النتائج المتحصل عليها بالنظرية المقترحة (مجاهيل مع 05) و النظريات الأخرى ذو الترتيب العالي للتشوه في القص العرضي (06 مجاهيل أو أكثر والحلول الدقيقة D3) تكاد تكون متطابقة. نستخلص أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة لحساب توزيعات ثلاثية الأبعاد للإزاحات والإجهادات وكذلك تحديد قيم الترددات الطبيعية للاهتزازات صفائح المواد المتدرجة الخاصة الحرة. هذا يدل على أن افتراضات نظرية المقترحة يمكن أن يؤدي إلى نتائج دقيقة، وبالتالي تحسين تكلفة الحساب في المشكلات المعقدة البنى الهندسية متدرجة خصائص المواد، ونتيجة لهذا خفض من عدد المجاهيل هذه النظرية المقترحة.

كلمات مفتاحية:

المواد المتدرجة الخاصة، نظرية الترتيب العالي لخمس متغيرات ، نظرية تشوه القص العرضي "شبه 3D"، الصفائح المركبة، إزاحات والإجهادات، الترددات الطبيعية للاهتزازات، الحلول التحليلية الدقيقة.

RÉSUMÉ

L'intérêt de cette étude est de proposer une méthode, permettant de calculer des distributions tridimensionnelles des déplacements et des contraintes ainsi que la détermination des fréquences naturelles en vibration libre des plaques épaisses sandwich en matériaux à gradient de propriétés «FGM». Le but est de développer une nouvelle théorie hyperbolique «quasi-3D» de déformation de cisaillement avec prise en compte de la déformation normale «**effect of thickness stretching**» et de tester leurs performances par rapport à la solution exacte. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, tandis que dans d'autres théories de déformation de cisaillement avec la prise en compte de «l'effet stretching», le nombre est de six et plus. La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature. Toutes les études comparatives ont montré que la fréquence naturelle, la flèche, les contraintes obtenues par la présente théorie (cinq inconnues) et la théorie exacte d'élasticité (3D) et les solutions «Quasi 3D» de la littérature sont presque identiques. Cela nous indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et ainsi améliorer le coût du calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, et ceci en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie proposée.

Mots clé : Matériaux à gradient de propriétés, théorie d'ordre élevé à cinq variables, théorie de déformation de cisaillement, plaques sandwich, comportement mécanique de la flexion, vibration, étirement suivant l'épaisseur, solutions analytiques exactes.

ABSTRACT

The interest of this study is to propose a method to calculate three-dimensional distributions of displacements and stresses as well as the determination of natural frequencies for free vibration of thick plates sandwiches functionally graded materials "FGM". The goal is to develop a new hyperbolic theory "quasi-3D" shear deformation taking into account the normal deformation "**effect of thickness stretching**" and test their performance compared to the exact solution. Contrary to the other theories, the number of unknown functions in the theory suggested is only five, while in other theories of shearing strain with the taking into account of " the stretching effect ", the number is six and more, while in the case of other shear deformation theories with the inclusion of "**stretching effect.**" The proposed formulation is variational and is based on the Hamilton principle. She has a strong similarity with classical plate theory in many aspects, does not require shear correction factor, and gives a description of the parabolic transverse shear stress in the thickness which is much closer to reality in plates while satisfying the condition of zero shear stress at the free edges. Analytical solutions using algebra are proposed and compared with exact solutions of the literature. All comparative studies have shown that the natural frequency of the boom, the stresses obtained by this theory (five unknowns) and the exact theory of elasticity (3d) and are nearly identical "Quasi 3D" literature solutions. This indicates that the assumptions of the proposed theory can lead to accurate results and can thus improve the computational cost in the problems of complex geometrical structures FGM, due to the reduction in the number of unknowns of the proposed theory.

Keywords:Functionally graded materials, theory amounted to five variable order shear deformation theory, sandwich plates, mechanical behavior of bending, vibration, stretching along the thickness, exact analytical solutions.

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	6
Tableau I.2	Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.....	11

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	Les propriétés matérielles des matériaux utilisées.....	56
Tableau IV.2	La flèche \bar{w} de la plaque sandwich en FGM ($a/h = 10, a = b$).....	59
Tableau IV.3	Les contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich en FGM ($a/h = 10, a = b$).....	60
Tableau IV.4	Les contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich en FGM($a/h = 10, a = b$).....	61
Tableau IV.5	Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich en FGM.....	67
Tableau IV.6	Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich simplement appuyée avec un cœur homogène rigide ($a = b$).....	72
Tableau IV.7	Comparaison des fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich en FGM simplement appuyée avec un cœur homogène souple ($a = b$).....	73

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	7
Figure I.2	Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM.....	8
Figure I.3	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	9
Figure I.4	Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM.....	10
Figure I.5	Les principaux domaines d'application des FGM.....	13
Figure I.6	Géométrie d'une plaque en FGM.....	14
Figure I.7	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	15
Figure I.8	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	16
Figure I.9	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	17
Figure I.10	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	18
Figure I.11	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	19
Figure I.12	Illustration de la plaque d'ordre élevé.....	20

CHAPITRE II

Figure II.1	Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.....	24
Figure II.2	Matériau à deux phases avec microstructure du squelette	27
Figure II.3	Modèle sphères composite.....	28
Figure II.4	Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumises à un chargement transverse.....	32
Figure II.5	Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-Mécanique.....	33
Figure II.6	Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$).....	34

CHAPITRE III

Figure III.1	Géométrie d'une plaque « sandwich » en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires	39
Figure III.2	Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM : (a) Cœur rigide « Hard Corps » ; (b) Cœur souple « Soft Corps ».....	40
Figure III.3	Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwich: (a) Plaque (1-0-1), (b) Plaque (1-1-1), (c) Plaque (1-2-1), (d) Plaque (2-1-2) et (e) Plaque (2-2-1).....	43

CHAPITRE IV

Figure IV.1	Variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et non symétrique pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).....	57
Figure IV.2	La variation de la flèche \bar{w} à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).	62
Figure IV.3	La variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).....	63
Figure IV.4	La variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).....	64
Figure IV.5	La variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).....	65
Figure IV.6	La variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).....	66
Figure IV.7	Variation du module de Young suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et non symétrique avec un cœur rigide homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).....	68

Figure IV.8	Variation du module de Young suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur souple homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).....	69
Figure IV.9	Variation de la masse volumique suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur rigide homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).....	70
Figure IV.10	Variation de la masse volumique suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur souple homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).....	71
Figure IV.11	Fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque sandwich en FGM avec un cœur homogène rigide: (a) Plaque (1-2-1). (a) Plaque (2-2-1).....	75
Figure IV.12	Fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque sandwich en FGM avec un cœur homogène souple: (a) Plaque (1-2-1). (a) Plaque (2-2-1).....	76

LISTE DES NOTATIONS

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$\lambda(z), \mu(z)$	Coefficients de Lamé
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie potentielle
δT	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
(m, n)	ième mode propre
$q(x, y)$	Charge transversale
(I_i, J_i, K_i, J_i^s)	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'utilisation des structures sandwich dans les applications industrielles n'a cessé d'augmenter depuis plusieurs années, et cela dans toutes les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, génie civil, ferroviaire ou encore sportive, médicale et nucléaire. Les performances en termes de gain massique, de propriétés mécaniques et de fabrication offrent de nombreuses possibilités d'applications, parfois très complexes.

Dans les structures multicouches classiques, des couches homogènes ou en composites sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustique,...etc) de la structure. Toutefois, les propriétés des structures en matériaux composites sandwich en statique, en fatigue et en vibration peuvent se dégrader sévèrement par la présence des dommages dus à la discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants du matériau composite sandwich, provoquant des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques et thermiques, spécialement dans un environnement thermique sévère, la différence relative du coefficient de dilatation thermique provoque ainsi des contraintes résiduelles importantes qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. A cet effet, le concept des matériaux à gradient des propriétés (Functionally Graded Materials « FGM ») est introduit vers la fin des années 80 par une équipe de chercheurs japonais afin de surmonter ces difficultés, en concevant un matériau dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [1].

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [2].

Il est ainsi indispensable d'accommoder les procédés de calcul, les plus efficaces et précis possibles, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement mécanique sur le comportement entier des structures épaisses sandwich en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles en chaque point de la structure, voire même la détermination des fréquences naturelles en vibration libre des structures épaisses en matériau FGM.

La détermination des contraintes mécaniques (normales et de cisaillement transverse) ainsi que les fréquences naturelles en vibration libre dans les structures (plaques et coques) en matériau à gradient de propriétés est couramment réalisée à partir d'hypothèses sur la configuration du champ de déplacement dans l'épaisseur de la théorie choisie. Ces théories étant conçues comme une estimation d'une réalité tridimensionnelle, il en existe plusieurs, la différence entre-elles réside dans la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

Les modèles de plaques ont été considérablement analysés depuis plusieurs années jusqu'à nos jours (Reissner [3], 1945 ; Mindlin [4], 1951 ; Timoshenko et Woinowsky-Krieger [5], 1959 ; Reddy [6], 1999). Au sujet des structures sandwich, l'approche la plus simple est de considérer qu'une section droite avant déformation reste droite par couche après déformation, ce qui donne naissance aux théories dites du premier ordre. Ces théories peuvent prendre en compte le cisaillement transverse tout en conservant un déplacement linéaire ou linéaire par morceaux dans l'épaisseur. On trouve dans cette catégorie la théorie des plaques élastiques, celles développées par Reissner [3] et Mindlin [4]. Les théories d'ordre élevé proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique, sinusoïdale, exponentielle ou hyperbolique du déplacement. Elles sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les bords supérieur et inférieur de la structure, contrairement à celles du premier ordre.

L'intérêt de la considération d'une approche tridimensionnelle pour le calcul en statique et en vibration libre des structures sandwich réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne soit d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles établies peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée dans certains cas de géométrie, empilement et chargement simple, [7,8].

L'objectif principal de ce travail, est de proposer une méthode facile à mettre en œuvre, permettant de calculer des distributions tridimensionnelles des déplacements et des contraintes ainsi que les fréquences naturelles en vibration libre des plaques épaisses sandwich en matériaux à gradient de propriétés, qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans le cas de plaques épaisses en FGM.

Le but est de développer une nouvelle théorie hyperbolique « quasi-3D » de déformation de cisaillement avec prise en compte de la déformation normale « **Effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur, "effect of thickness stretching"** » et de tester les performances par rapport à la solution exacte, par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, par contre il est de six ou plus dans les autres théories de déformation de cisaillement avec la prise en compte de « l'effet stretching » [9-13]. La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre, présente les propriétés, l'histoire et le développement, ainsi que les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement mécanique et vibratoire des structures sandwichs en « FGM ».

Le deuxième chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les structures en matériaux à gradient de propriétés en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre du modèle « quasi-3D » proposé de déformation de cisaillement avec prise en compte de la déformation normale « effect of

thickness stretching» avec seulement cinq variables pour l'analyse du comportement mécanique et en vibration libre des plaques sandwich épaisses en FGM.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement mécanique de la flexion et le comportement en vibration libre des plaques sandwich en matériau FGM. Deux types de plaques sandwich en FGM («Plaque type A : FGM / Céramique / FGM »; « Plaque de type B : Métal/ FGM / Céramique») seront étudiées. Afin d'étudier l'influence du chargement mécanique sur le comportement mécanique de la flexion des plaques tout en étudiant l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles en utilisant les divers modèles des plaques épaisses qui incluent ou non la déformation normale, ensuite, la détermination des fréquences naturelles en vibration libre pour les deux types de plaques sandwich en FGM.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude de l'effet de la prise en compte de la déformation normale sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés sous différents types de chargement.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

I.1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interfaciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [14].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : **Functionally Graded Materials** "FGM") dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [1].

I.2. Concept des matériaux FGM

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials :FGM) fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [15]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou discontinuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [16]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la

pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [17]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [18].

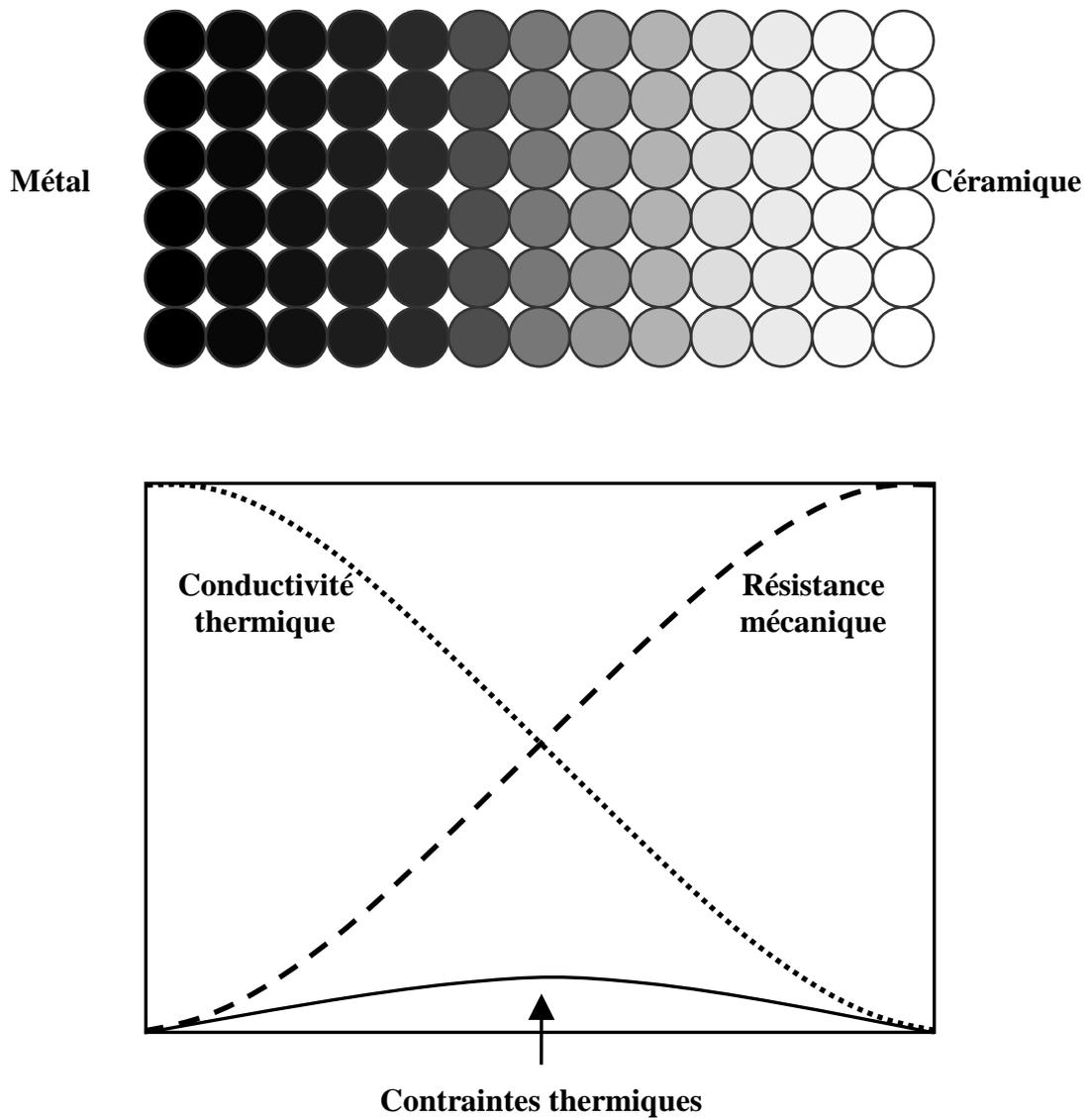


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [19].

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

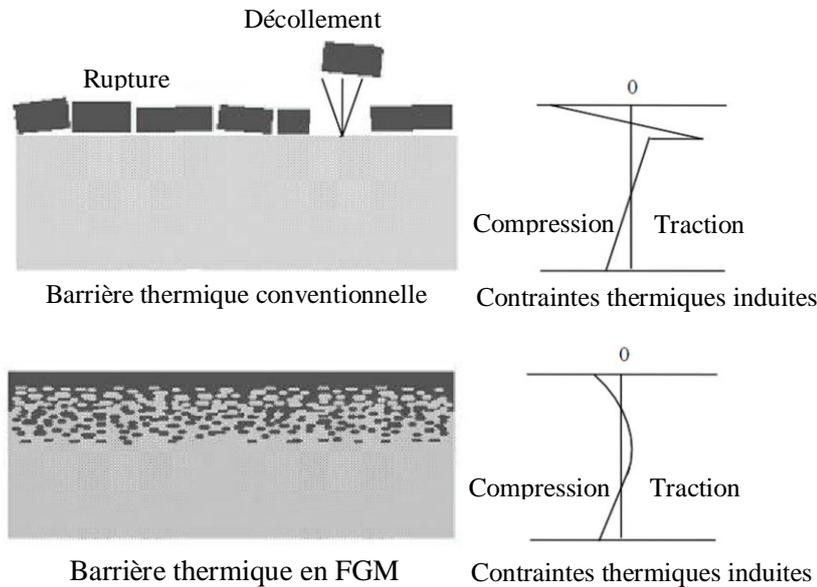


Figure I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [19].

I.3. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels :

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constitutifs: <ul style="list-style-type: none"> Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre * 		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [20].

I.4. Historique du développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivit par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [21]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [22]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [23].

En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [22].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [24].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. [24].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [25].

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

La figure I.4 [20] montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

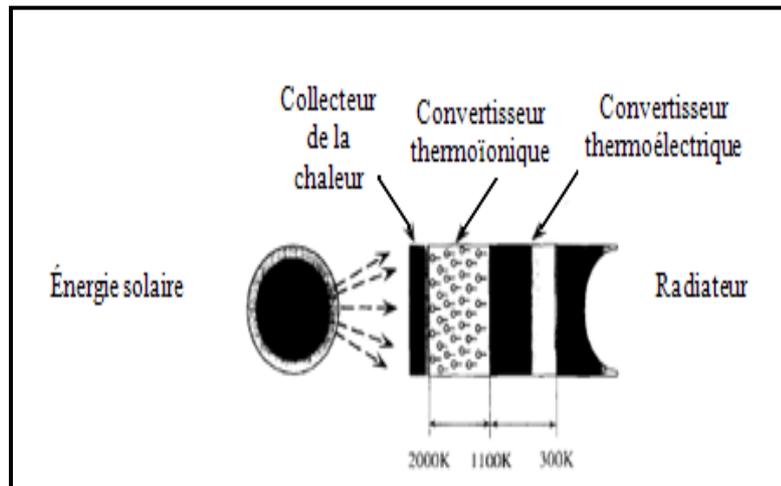


Figure I.4 : Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM [20].

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2 :

Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) à Kôln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3ème colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4ème colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Depuis plus de vingt ans, une partie importante de la recherche concernant les structures en gradient de propriétés a été consacrée à leur fabrication. Une grande variété de méthodes de production a été mise au point ou adaptée en vue de produire ce type de pièces [25].

Les principaux procédés disponibles pour la production des matériaux FGM sont expliqués ci-après :

I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) à été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en enlevant la reliure, et en pressant les produits obtenus à chaud. Le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [26].

I.5.2 Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [27].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.

I.5.3 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [28].

I.5.4 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [29].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

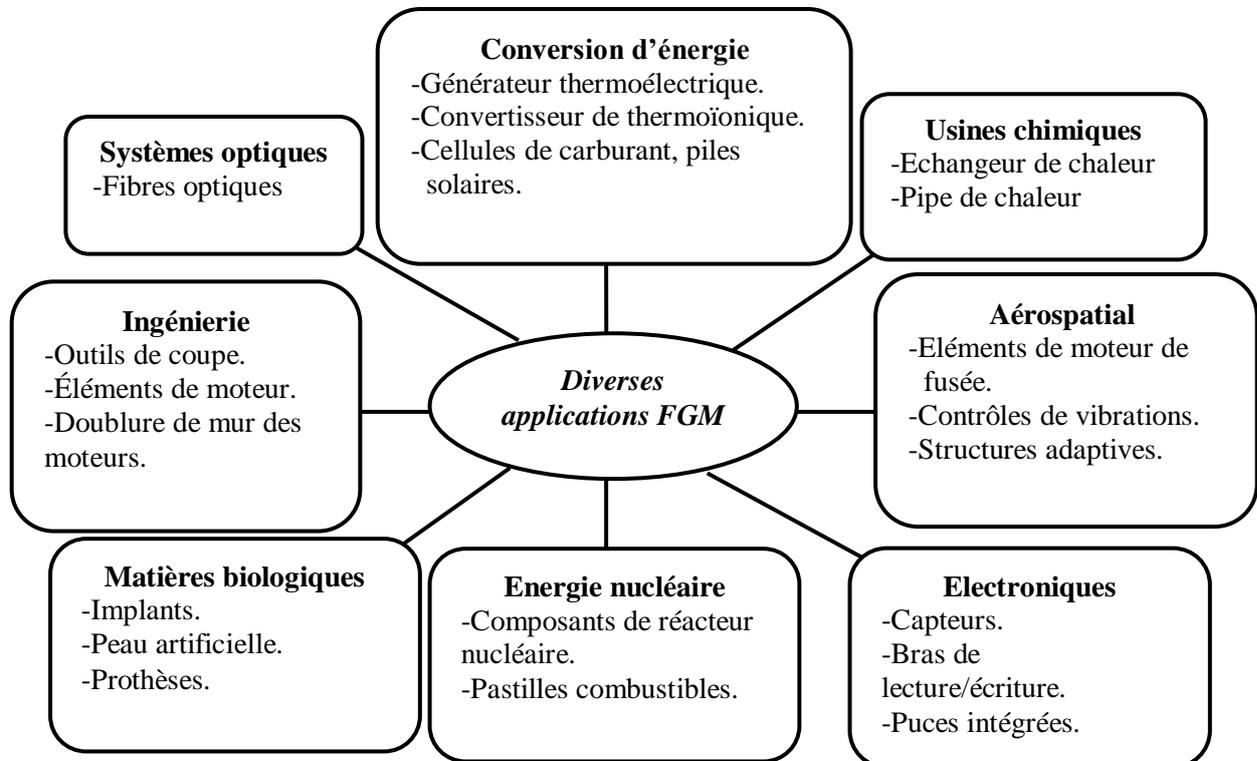


Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

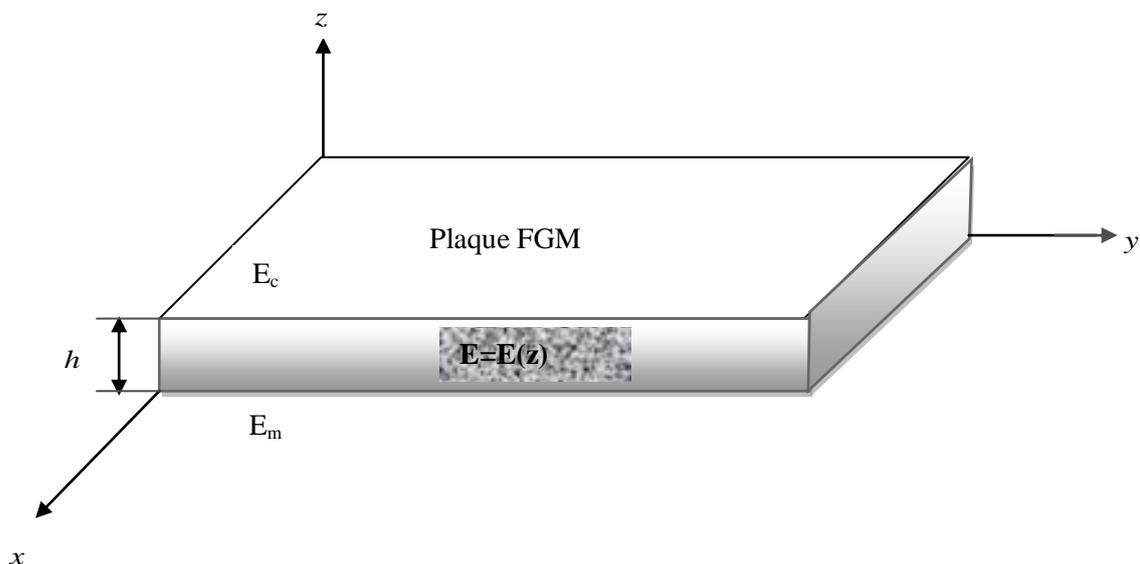


Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau : dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de

l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [30] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

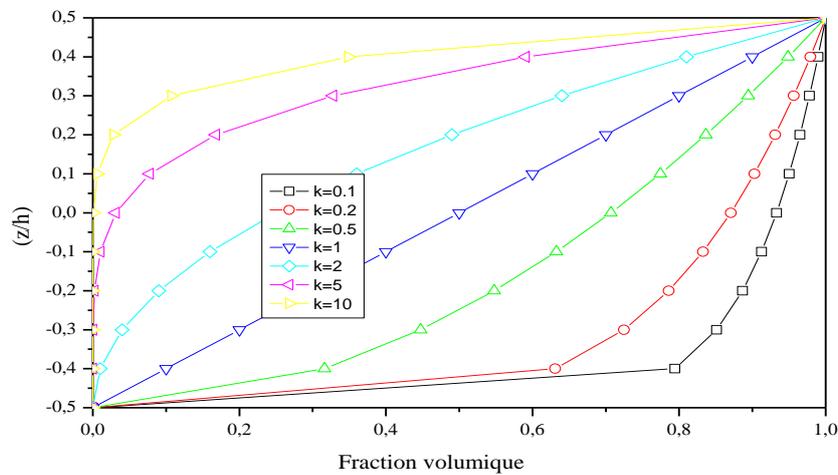


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [30]. Par conséquent, Chung et chi [31]

ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

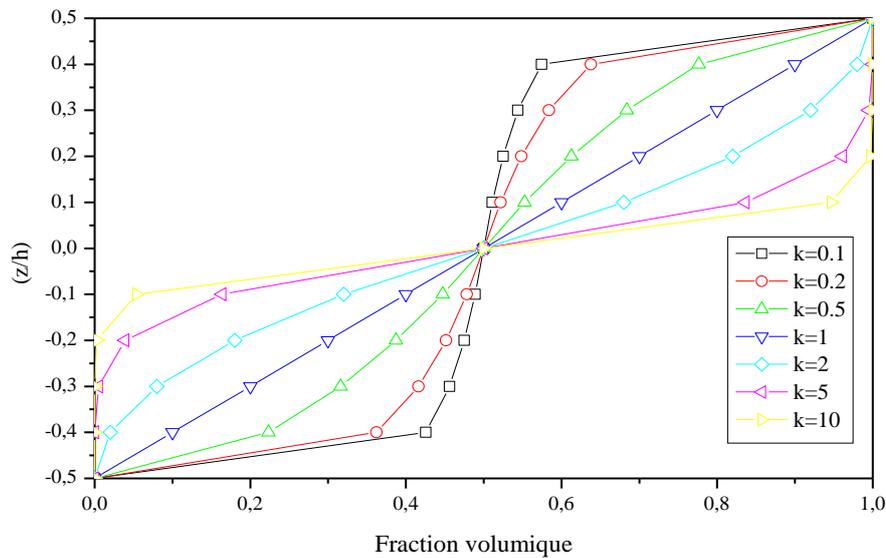


Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [32] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (I.5.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

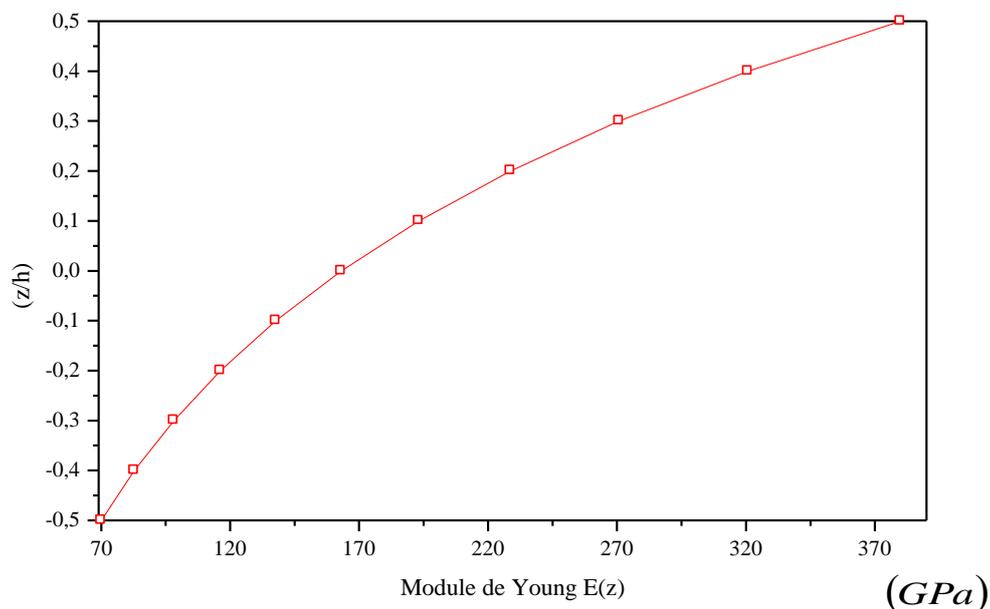


Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.8. Les modèles analytiques des plaques multicouches en FGM

I.8.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Le modèle classique de Kirchhoff-Love se base sur l'hypothèse que la section transverse de la plaque reste plane et perpendiculaire au plan moyen après déformation [33, 34] (figure I.10). Cela revient à dire que le cisaillement hors plan est supposé négligeable dans ce cas. De plus, il est supposé que la variation de l'épaisseur de la plaque est négligeable. Ces hypothèses imposent la cinématique suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{I.6.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{I.6.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.6.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

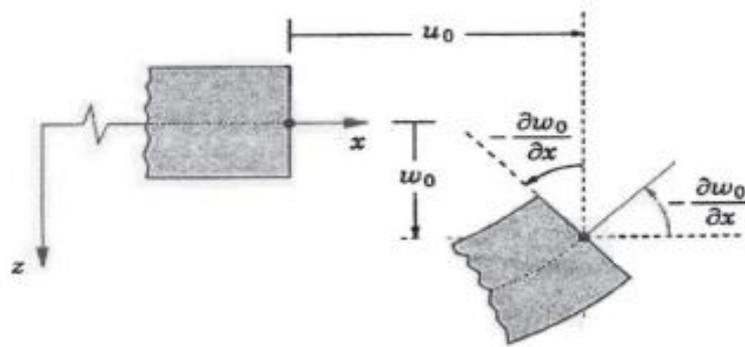


Figure I.10 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, [6]).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses. L'application du modèle de Kirchhoff-Love aux structures multicouches est souvent désigné comme « Classical Lamination Theory (CLT) ».

I.8.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans (Reissner [3], 1945, Mindlin [4], 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin.

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{I.7.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{I.7.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.7.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$,

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

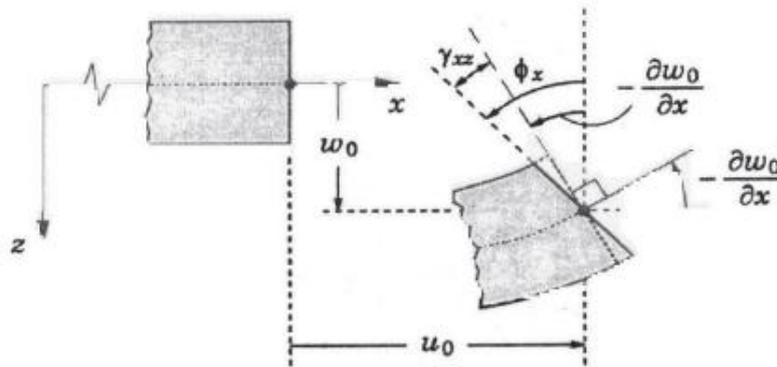


Figure I.11 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, [6]).

Tout ceci fait que le modèle prédit très mal le comportement en cisaillement transverse et qu'il faut introduire la notion de coefficient correcteur pour améliorer la prise en compte des effets de cisaillement hors plan (Whitney [35], Levinson [36]). Dans le cas des plaques multicouches, le fait que les contraintes de cisaillement transverse sont constantes par couche entraîne des discontinuités de contrainte aux interfaces.

L'application du modèle de Reissner-Mindlin aux structures multicouches est souvent désigné comme « First-order Shear Déformation Theory (FSDT) » car les déformations de cisaillement transverse sont considérées uniformes dans l'épaisseur.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

I.8.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour améliorer la mauvaise approximation du cisaillement transverse dans des modèles classiques du premier ordre, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées dans la littérature. La plupart de ces théories sont des approches en déplacement et utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement sous la forme suivante:

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{u}_0(x, y) + z\underline{\phi}_\alpha(x, y) + z^2\underline{\phi}_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\underline{\phi}_\alpha^n(x, y)$$

Où n détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love $n = 0$. La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec $n = 1$ pour les déplacements dans le plan et $n = 0$ pour le déplacement normal. La figure I.12 montre une cinématique schématisée d'un modèle d'ordre supérieur.

Modèle proposé par Hildebrand et al. [37] peut être considéré comme la première tentative d'amélioration de la théorie classique des plaques par une théorie d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale. Ce modèle considère la forme suivante pour les déplacements:

$$u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha(x, y) + z\phi_\alpha(x, y),$$

$$u_z(x, y, z) = u_z(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y),$$

Nelson and Lorch [38] ont proposé un modèle avec neuf champs inconnus pour l'analyse des plaques multicouches. Lo et al. [39, 40] ont étudié l'effet de la déformation normale transverse en utilisant une théorie à onze champs inconnus.

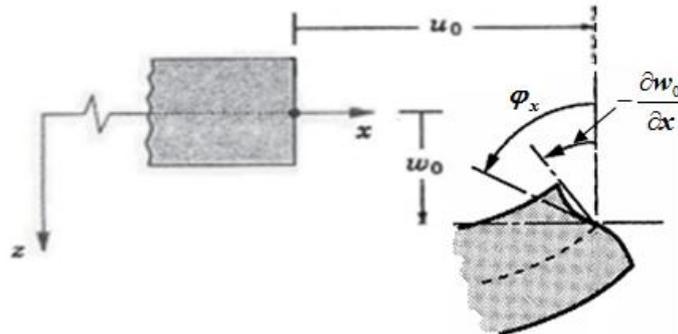


Figure I.12 : Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, [6]).

Il y a d'autres travaux dans la littérature dans lesquels le champ de déplacement est approché de la même manière dans l'épaisseur. Ce type de théories est connu sous le nom de High-order Shear Deformation Theory (HSDT) dans la littérature. Nous avons introduit ici quelques modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{I.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{I.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.8.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de

cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, [6]) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{I.9})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur.

Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [41] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{I.10})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [42] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Soldatos et al.[43] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{I.12})$$

Mantari et al [44] propose un nouveau modèle sinusoidale (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{I.10})$$

I.9. Solutions exactes des plaques

Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisque'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". La plupart d'entre elles impliquent des conditions aux limites simplement appuyées et nécessitent un champ cinématique imposé à la plaque ce qui est difficile à reproduire expérimentalement. Leur importance est cependant cruciale puisque ce sont des méthodes exactes qui permettent le plus souvent d'évaluer la qualité des modèles de plaques, qui eux sont basés sur des hypothèses simplificatrices [45]. Les premières solutions exactes furent données pour des plaques en flexion cylindrique composées de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 Lévy [46] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique. Pour les cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, Pagano [47,48] présente une solution pour le cas statique et Srinivas [49]. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour dans la littérature. Par la suite une autre méthode permettant de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de

couches symétriques a été présentée par Reddy [50] pour le cas statique et Noor [51] pour le cas dynamique. Pour ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles classiques et d'ordre supérieur pour le calcul des plaques minces et épaisses en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

II.1. Introduction

Ce chapitre a pour vocation de présenter une revue de quelques travaux de recherche scientifiques portant sur la modélisation des structures multicouches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Dans le développement de notre société et notre culture, les matériaux ont joué un rôle essentiel. Le scientifique utilise des matériaux de base disponibles en divers composants organiques et inorganiques, et il a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, des alliages, des structures en céramique, etc. La structure de développement des matériaux modernes est illustrée sur la Figure II.1.

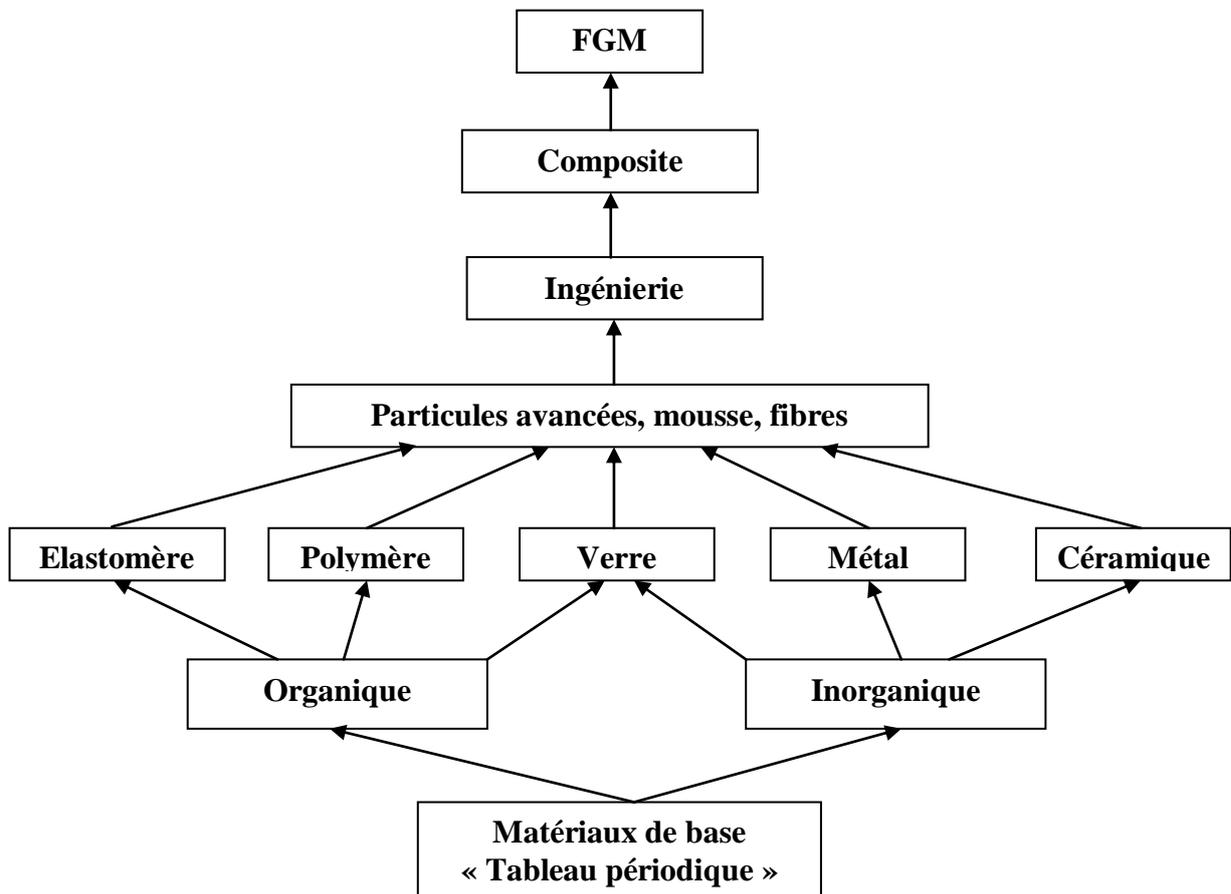


Figure II.1 : Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.

Les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials FGM) sont des matériaux composites avancés composés d'au moins deux matériaux primaires dont la composition et la microstructure du matériau changent graduellement continuellement à l'intérieur de la pièce de la structure [52].

Cette distribution des matériaux permet de réaliser des gradients de propriétés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Les domaines d'application sont nombreux pour ces pièces, en particulier l'aérospatial et le biomédical mais également l'électronique, l'énergie nucléaire, la production d'outillage, le design, etc. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement, et la densité de matériau, varie sans interruption et de façon continue dans des directions préférées de la structure en FGM. Les matériaux FGM ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale [53].

Le présent chapitre se concentre sur plusieurs aspects qui sont importants pour le développement et la conception des structures en matériaux à gradient de propriétés. Il comprend les approches d'homogénéisation des matériaux FGM, les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements, statiques, dynamiques, y compris les chargements thermiques.

II.2. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés

La fabrication des matériaux FGM est obtenue par le mélange de deux phases de matériaux distincts, par exemple, un mélange du métal et de céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules constituants des FGM ne peut pas être disponible. Ainsi, les propriétés effectives du matériau FGM, à savoir : (module d'élasticité, module de cisaillement, densité, etc...) sont évaluées seulement sur la base de la distribution de la fraction volumique des constituants et leur forme approximative. Plusieurs modèles de micromécanique ont été développés au cours des années pour déduire les propriétés effectives

des matériaux composites macroscopiquement homogènes. Les approches analytiques, la méthode des éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des matériaux FGM.

Les sujets les plus importants qui traitent la modélisation des structures en FGM sont: la déformation élastique, les contraintes élastiques, les déformations plastiques, le fluage dû à des températures élevées, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques de modélisation des FGM disponibles dans la littérature sont présentées comme suit :

II.2.1. Estimation auto-cohérente « Self consistent estimates »

Cette méthode décrit ses estimations par la solution d'un problème élastique dans laquelle une inclusion ellipsoïdale est noyée dans une matrice possédant les propriétés effectives de matériau composite. Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau dont les propriétés effectives sont ceux du matériau composite homogénéisé recherché [54–56].

Cette méthode ne fait pas de distinction entre la matrice et les phases de renforcement et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans laquelle les rôles des phases sont échangés. Ceci le rend particulièrement adapté pour la détermination des modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure du squelette interconnecté comme le montre la Figure II.2. Il s'agit d'une méthode d'analyse rigoureuse applicable à des matériaux composites à deux phases isotrope.



Figure II.2 : Matériau à deux phases avec microstructure du squelette

II.2.2. Modèle de Mori-Tanaka

Cette méthode fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée avec une matrice continue clairement défini et une phase particulaire discontinue. Cette méthode suppose une petite particule sphérique noyée dans une matrice.

La phase de matrice, est supposé être renforcée par des particules sphériques d'une phase particulaire.

K_1 , G_1 et V_1 représente le module de compressibilité, le module de cisaillement et de la fraction volumique de la phase de matrice, respectivement, tandis que K_2 , G_2 et V_2 désignent le correspondant des propriétés du matériau et de la fraction volumique de la phase du renfort. On remarque que $V_1 + V_2 = 1$. La masse volumique effective peut être donnée par la loi des mélanges ($\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$) [57, 58].

II.2.3. Modèles sphères composites

Le modèle sphères composites a été introduite par Hashin [59]. Dans ce modèle, les propriétés effectives des matériaux composites isotropes ont été déterminées de façon analytique. Ce modèle est constitué par une gradation de taille de particules sphériques noyées dans une matrice continuée (figure II. 3) tels que les sphères remplissent complètement le volume du composite.

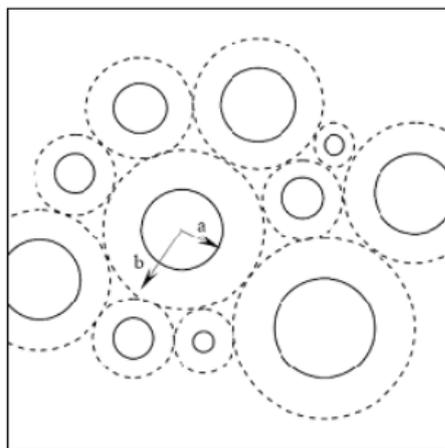


Figure II.3 : Modèle sphères composite

II.2.4. Modèle d'assemblage de cylindres

Le modèle d'assemblage de cylindres est un modèle qui permet une détermination analytique des modules élastiques des composites, raisonnablement précise et exacte. Ce modèle est utilisé pour les composites orthotropes et nécessite à la fois que la fibre de renfort et la

matrice soient isotropes, tandis que les éléments de volume représentatifs « VER » (élément qui représente le volume) est transversalement isotrope dans des plans matériels qui sont perpendiculaires à la direction des fibres [60].

II.2.5. Modèle micromécanique

Ces modèles pour les éléments de volume représentatifs « VER » peuvent être construits par des simulations en MEF pour les matériaux composites isotropes ou orthotropes. Les méthodes qui utilisent la méthode des éléments finis tentent de simuler avec précision la microstructure réaliste du « VER », et déterminer la réponse thermomécanique due aux charges appliquées de telle sorte que les propriétés des matériaux effectives peuvent être calculées pour différentes fractions de volume de renfort. De cette manière, les différents ensembles de données peuvent être collectées pour différentes combinaisons de matériaux. C'est peut être la méthode la plus précise, puisque la microstructure à l'examen est directement modélisé par des éléments finis en trois dimensions. Malheureusement, un inconvénient de cette méthode est que plusieurs modèles doivent être construits afin de déterminer les propriétés des matériaux pour différentes fractions de volume de la matière constitutive; même si cela peut être atténué avec un logiciel approprié qui permet d'automatiser le processus [57].

II.3. Des études ont rapporté sur des plaques en matériaux à gradient de propriétés

II.3.1. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin [58] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidis à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa [61] où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al [62]

en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrit et un cylindre avec une température constante appliquée sur sa surface.

Vel et Batra [63] ont également présenté les solutions analytiques du problème de conduction thermique transitoire en 3D pour une plaque en FGM simplement appuyée, basé sur la théorie linéaire découplée, quasi-statique thermo-élasticité. Les températures uniformes sont prescrites sur les bords et soit la température en fonction du temps ou de flux de chaleur est considéré sur le dessus et les surfaces inférieures de la plaque en FGM. Les contraintes transitoires induites par la chaleur dans des plaques en FGM ont été liés au mode d'application de la charge thermique dans cette étude.

Qian et al. [64] ont étudié les déformations thermo-élastiques transitoires d'une plaque en FGM épaisse. Les contraintes et les déformations dues à l'application simultanée des contraintes thermiques et mécaniques transitoires ont été calculées en maintenant les bords de la plaque à température uniforme. Les solutions sont obtenues par la méthode locale maillage de Petrov-Galerkin (MLPG). Ils ont constaté que les centres de gravité de la flèche et de la contrainte axiale induite au centre de gravité de la surface supérieure de la plaque sont nettement influencés par les conditions aux limites appliquées au niveau des bords de la plaque.

II.3.2. Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement

Sankar et Tzeng [65] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar [66] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la est poutre élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produisent sur la surface de chargement sont plus élevées dans une poutre en FGM par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait

que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée par la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [67]. Le problème thermo-élastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen [68] en utilisant un maillage locale par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [69] en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. Reddy et Cheng [70] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [71] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement. La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan [72] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang [73,74] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Zenkour [75,76] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwich en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version

« sinusoïdale » de la théorie de déformation de cisaillement. Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid [77].

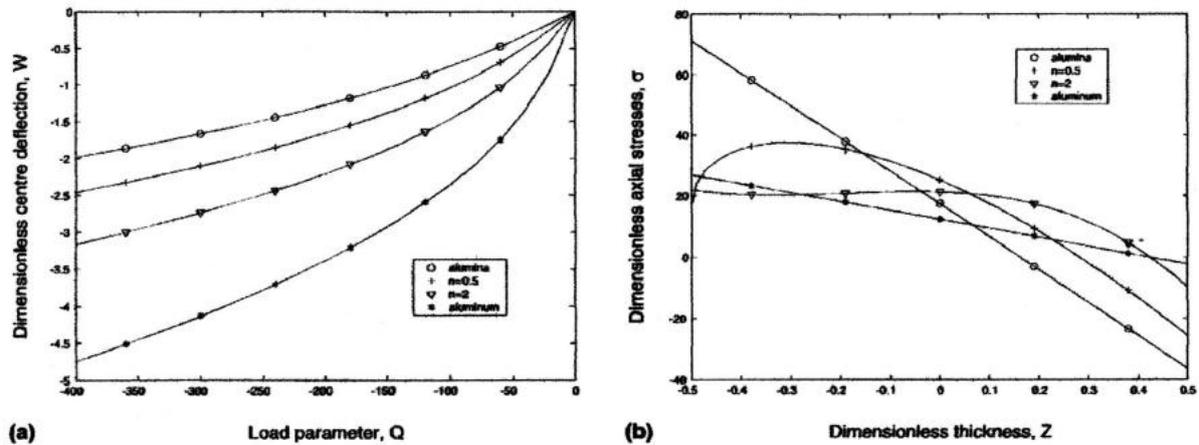


Figure II.4 : Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse [77].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la Figure II.4. On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ($n = 2$) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes.

Tarn [78] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant le cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami [79-81]. Na et Kim [82] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. [83] qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al [84]. Un exemple de cette analyse est illustré sur la Figure II.5, où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga [85] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. [86] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda [86] ont étudié le flambement d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) sous un chargement thermique.

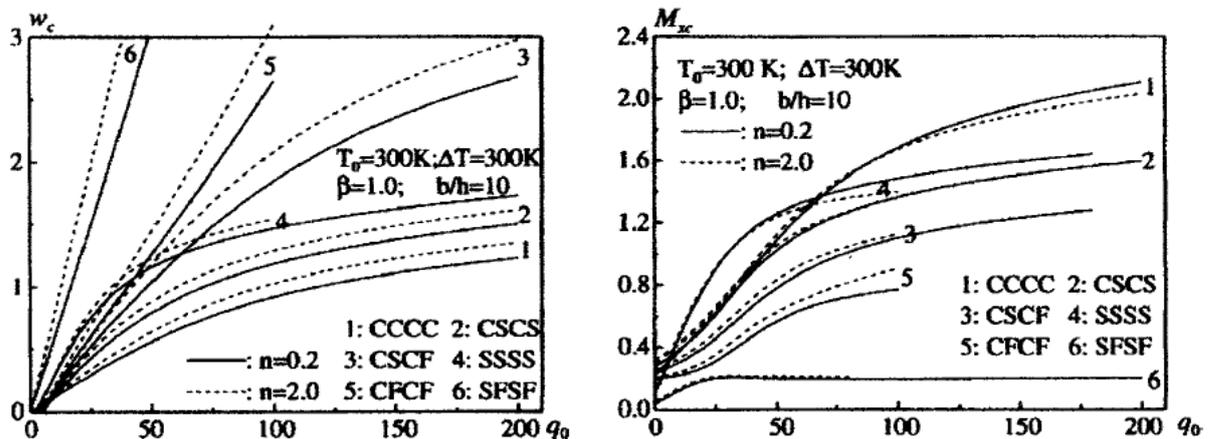


Figure II. 5: Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [84].

Zenkour et Sobhy [87] ont utilisée la version sinusoidale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude récente publiée par Park et Kim [88] contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la figure II.6.

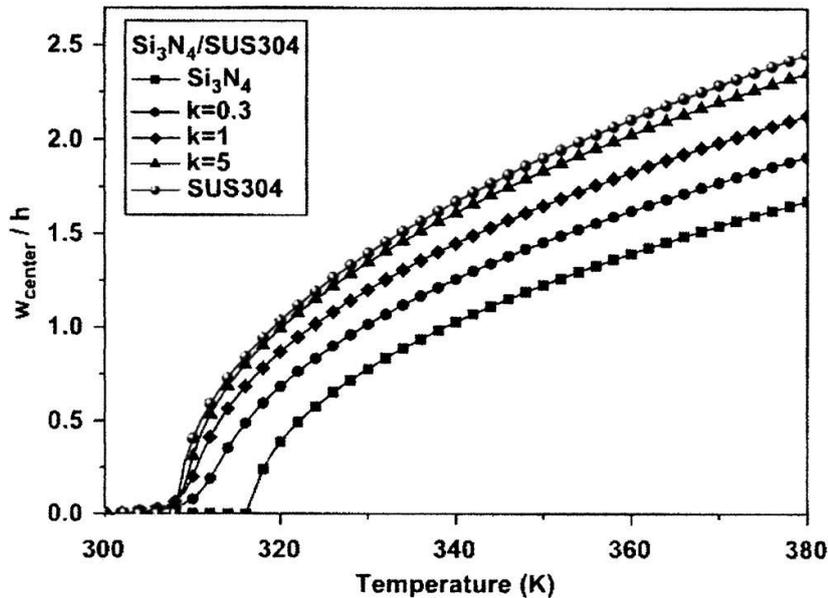


Figure II.6 : Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_{304}$) [88].

Hashemi et al. [89] ont employé une méthode analytique pour analyser les problèmes de vibration des plaques annulaire épaisses en FGM avec des couches piézoélectriques intégrés. La plaque avec différentes conditions aux limites sur les bords est modélisée sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy « TSDT ». La variation des propriétés des matériaux de la plaque suit une distribution de loi de puissance. La distribution de potentiel électrique le long de la direction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique est supposée être une fonction sinusoïdale.

Récemment, les mêmes auteurs [90] ont développé une solution exacte de la vibration libre des plaques épaisses piézoélectriques couplés circulaires / annulaires pour les différentes conditions aux limites en utilisant la théorie de premier ordre de « FSDT » de Mindlin. Les effets de couplage entre les déplacements dans le plan transversal et sur les paramètres de fréquence sont avérés être significatifs dans cette étude. Il est conclu dans ce travail, que le modèle développé peut décrire le comportement vibratoire de plaques FGM avec couche piézoélectrique de manière plus réaliste.

Shahrjerdi et al. [91] ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées à l'aide de la théorie de la déformation de cisaillement du second ordre (SSDT). L'analyse de vibrations libres des plaques FGM et composites est réalisée par Xiang et al. [92] à l'aide d'un modèle de déplacement constitué par le n-polynôme d'ordre zéro satisfaisant des conditions aux limites de contrainte de cisaillement transversal nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque en FGM.

Jha et al. [93] ont récemment publié une étude sur l'évaluation des fréquences naturelles des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées sur la base d'un cisaillement d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale (HOSNT). Les propriétés du matériau telles que la densité de la matière, et le module de Young d'élasticité de la plaque FGM sont supposés suivre le modèle de loi de puissance à travers l'épaisseur. Les solutions sont obtenues en utilisant la technique de la solution de Navier avec un excellent accord des solutions d'élasticité 3D disponibles dans la littérature. Shen et Wang [94] ont présenté les petites et grandes vibrations d'amplitude d'une plaque rectangulaire en FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans des environnements thermiques envisagent deux types de modèles micromécaniques des FGM.

Khorramabadi et al. [95] ont étudié la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FOST et de troisième ordre TSDT pour comprendre l'effet de l'application de ces deux théories de déformation de cisaillement sur la vibration des plaques non homogènes.

Récemment, de nouvelles théories des plaques prend en compte seulement quatre fonctions inconnues et peut tenir compte des déformations de cisaillement, sont développés par Tounsi et ses collègues (Mechab et al, 2010 [96]; Houari et al, 2011 [97]; Ameer et al, 2011 [98]; El Meiche et al, 2011 [99]; Benachour et al, 2011 [100]; Hadji et al, 2011 [101]; Tounsi et al, 2013 [102]). Ces théories qui ressemblent à la théorie d'ordre élevé utilisent seulement quatre fonctions inconnues afin de réduire les équations d'équilibres pour les plaques à gradient de propriétés à quatre équations.

La caractéristique la plus intéressante de ces théories c'est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et en satisfaisant une distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales, et satisfait les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Cependant, dans ces théories des plaques de quatre variables et d'autres théories de déformation de cisaillement, généralement les plaques FGM ont été analysées en négligeant l'étirement d'épaisseur ε_z , le déplacement transversal considéré comme indépendant de coordonnées de l'épaisseur. L'effet de la déformation normale dans les plaques FGM a été récemment étudié par Carrera et al. (2011) [103], en utilisant une approximation par éléments finis.

II.4. Conclusion

Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM ont été présentés dans ce chapitre. En raison du vaste champ qui se développe rapidement sur les FGM, ces conclusions ne peuvent pas englober toutes les directions et les tendances importantes. Néanmoins, ils reflètent certaines des observations des auteurs sur la base des recherches publiées et leur propre analyse.

1. Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

2. L'approche du problème de transfert de chaleur dans les FGM devrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés du matériau qui à son tour affectera la solution du problème de conduction de la chaleur.

3. L'effet de chargement thermique important sur les contraintes, la stabilité au flambement et la vibration des structures en FGM devrait être étudiées en tenant compte les changements dans les propriétés du matériau dû à la température. Ces derniers changements sont particulièrement importants car les FGM sont des matériaux hétérogènes. Par conséquent, si l'une des phases de la matière constitutive est plus affectée par la température que l'autre phase, un certain degré de changement de propriété sera non uniforme dans tout le matériau, même si elle est soumise à une température uniforme.

4. Les solutions analytiques 3D pour les plaques en FGM sont très utiles car ils fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision des divers théories de la plaque 2D et formulations éléments finis, mais leur méthodes de résolution impliquent des complexités mathématiques et sont très difficile et fastidieux à résoudre.

5. Dans la plupart des théories 2D développées pour prédire la réponses des plaques FGM, seule la déformation de cisaillement transversal effet a été pris en compte, et très peu de théories envisagent de prendre en compte l'effet à la fois de cisaillement transversal et la déformation normale (Thickness Stretching Effect).

6. Après avoir examiné une grande partie de la recherche sur les FGM disponible il est évident que la quasi-totalité de la recherche a été menée purement analytique ou de la simulation numérique.

7. Utilisation de l'amélioration des modèles théoriques 2D qui semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D devraient être poursuivis dans l'intérêt du coût de calcul et des analyses efficaces.

En conclusion, les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

CHAPITRE III : ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION & DE LA VIBRATION LIBRES DES PLAQUES « SANDWICH » EN FGM EN UTILISANT LA THÉORIE D'ORDRE ÉLEVÉ À CINQ VARIABLES AVEC LA PRISE EN COMPTE DE LA DÉFORMATION NORMALE

III.1. Introduction

Toute théorie d'un problème de la mécanique des milieux continus, présente comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode, facile à mettre en œuvre, permettant de calculer les distributions tridimensionnelles des déplacements et des contraintes, ainsi que les fréquences naturelles de la vibration libre des plaques épaisses « sandwich » en matériaux à gradient de propriétés qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans ce cas.

Nous avons développé une nouvelle théorie d'ordre élevé avec prise en compte de la déformation normale « **effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur, effect of thickness stretching** » par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements [9-13]. La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulle sur les bords libres.

Deux types de plaques « sandwich » sont considérées dans notre étude nommée (Type A) et (Type B); pour la plaque « sandwich » (Type A): les couches (supérieure et inférieure) sont en FGM et la couche centrale en matériau homogène dur en céramique (Hard Corps); pour la plaque sandwich (Type B): les couches (supérieure et inférieure) sont en FGM et la couche centrale en matériau homogène souple en métal (Soft Corps). On suppose que les propriétés matérielles (Module de Young et la masse volumique) de la plaque « sandwich » varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants. Plusieurs configurations des

plaques « sandwich » sont utilisées en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche.

III.2. Formulation théorique

III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque « sandwich » en matériau à gradient de propriétés composées de trois couches microscopiquement hétérogènes ayant les dimensions représentées dans la figure III.1. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisés pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque « sandwich » à trois couches élastiques occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ dans la configuration de référence. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$, le plan médian est défini par $z = 0$, les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y .

La plaque est composée de trois couches, à savoir, « **couche 1** », « **couche 2** » et « **couche 3** » de la partie basse à la partie haute. Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement, $h_0 = -h/2, h_1, h_2, h_3 = h/2$.

Le rapport d'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois chiffres, à savoir : (1-0-1), (2-1-2), (2-2-1)... et ainsi de suite.

Comme il est illustré dans la figure III.2, deux types de plaques sandwiches nommées **A** et **B** sont utilisées dans notre étude.

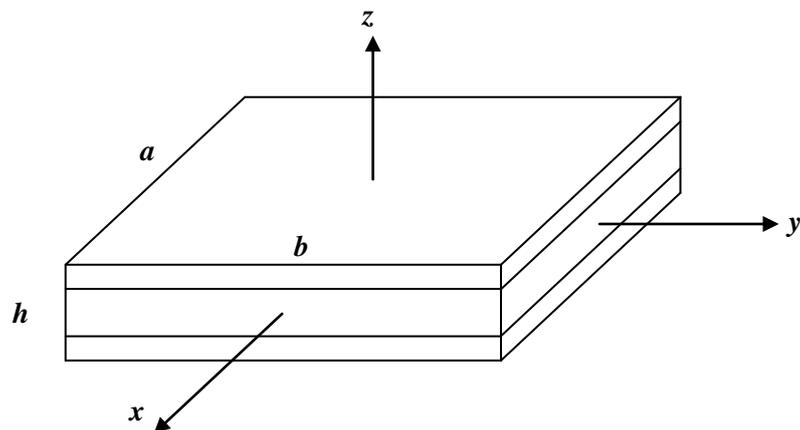


Figure III.1: Géométrie d'une plaque « sandwich » en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

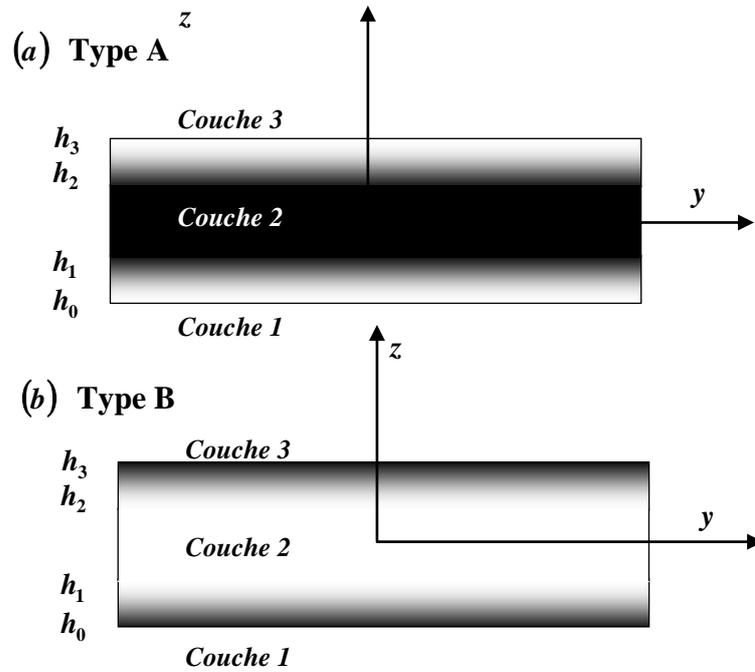


Figure III.2 : Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM : (a) Cœur rigide « Hard Corps » ; (b) Cœur souple « Soft Corps ».

III.2.2. Propriétés des matériaux

Les propriétés matérielles de la plaque « sandwich » varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur (z) seulement, selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ des matériaux constituants.

La fraction volumique $V^{(n)}$ à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque « sandwich » suit une simple fonction de loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque. Elle est définie par :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (\text{III. 1a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{III. 1b})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{III. 1c})$$

Où k est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La

couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur k puisque cette couche est entièrement en céramique pour la plaque de « type A » ou entièrement en métal pour la plaque de type « B ». Cependant, lorsque la valeur k prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique ou une plaque entièrement en métal selon le type de la plaque « A » ou « B ».

Delale et Erdogan [104] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque « sandwich » est constant dans tous points de la plaque.

Les propriétés mécaniques et la masse volumique de la plaque « sandwich » en FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique des matériaux constituants $V^{(n)}$.

Cependant, le module d'élasticité $E(z)$ et la densité $\rho(z)$ à tout point de la plaque sont donnés par la loi de mélange [97,105] :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{III. 2})$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM. Pour la plaque de type **A** : P_c et P_m sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche n° : 1, et vice versa pour la couche n° :3 selon la fraction volumique $V^{(n)}$ ($n = 1,2,3$). Notant que P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich. Pour la plaque de type **B** : P_m et P_c sont les propriétés de la couche n° :1 et vice versa pour la couche n° :3.

Plaque sandwich en FGM (1-0-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et est constituée seulement de deux couches en FGM d'épaisseur égale (figure III.3.a). C.-à-d, la couche isotrope centrale en (céramique ou en métal) est absente. Ainsi, $h_1 = h_2 = 0$.

Plaque sandwich en FGM (1-1-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et est composée de trois couches d'épaisseur égale (figure III.3.b). Dans ce cas, nous avons: $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$.

Plaque sandwich en FGM (1-2-1)

Comme il est montré dans la figure III.3.c, la plaque est symétrique, dans laquelle l'épaisseur de la couche centrale est égale à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$.

Plaque sandwich en FGM (2-1-2)

Dans ce type de sandwich (figure III.3.d), la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à la moitié de l'épaisseur des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$.

Plaque sandwich en FGM (2-2-1)

Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est le même que celle de la couche inférieure, alors qu'elle est le double de la couche supérieure (figure III.3.e). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$.

Plaque sandwich en FGM (1-8-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est ainsi symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à huit fois l'épaisseur des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $h_1 = -2h/5$, $h_2 = 2h/5$.

La figure III.3 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour les différentes configurations des plaques sandwich avec $k = 0.01, 0.2, 0.5, 2, 5, 10$.

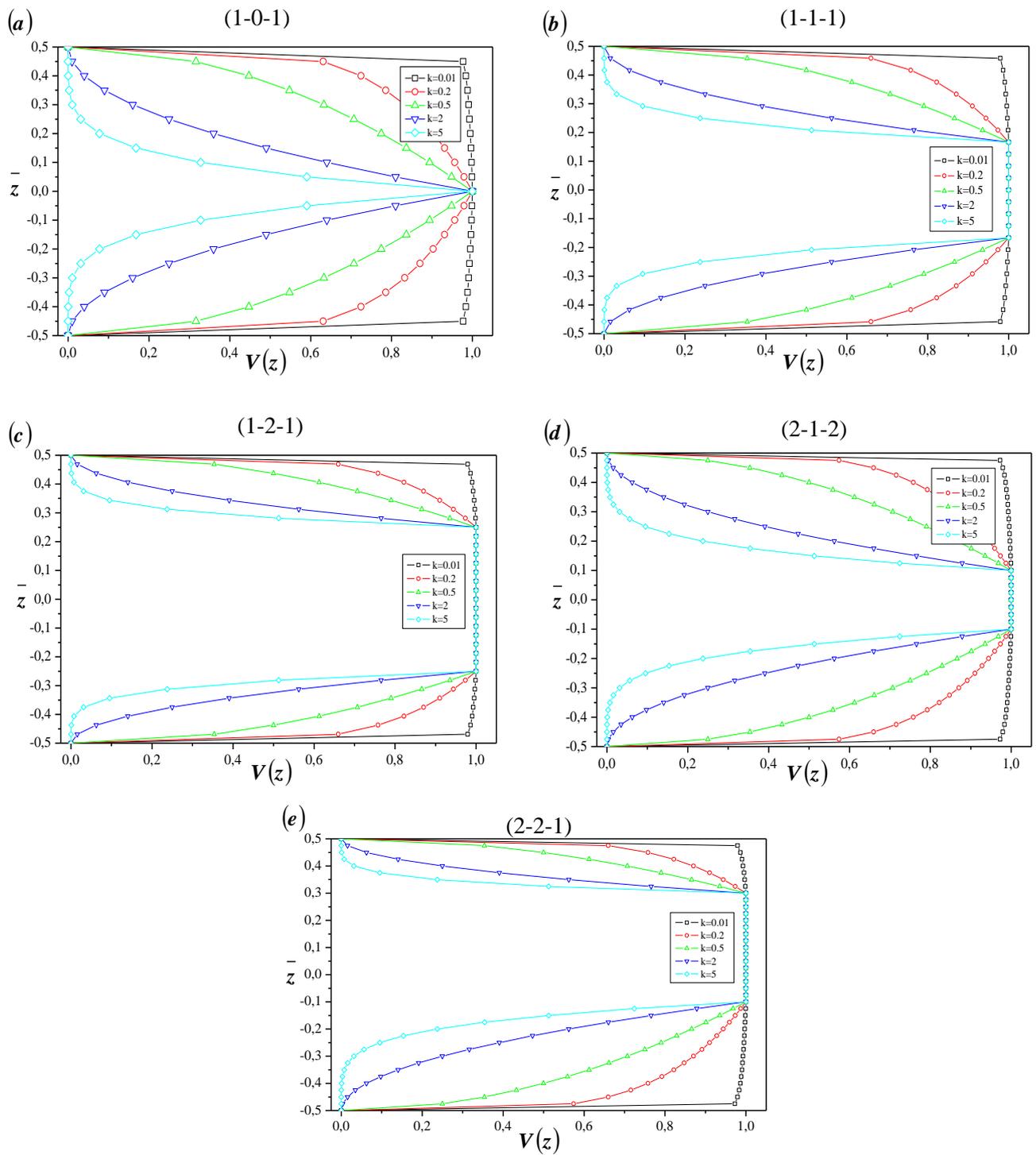


Figure III.3 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwich:

(a) Plaque (1-0-1), (b) Plaque (1-1-1), (c) Plaque (1-2-1), (d) Plaque (2-1-2) et (e) Plaque (2-2-1).

III.3. Modèle proposé « Théorie d'ordre élevé hyperbolique à cinq variables avec la prise en compte de l'effet Stretching »

Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur avec la prise en compte de l'effet « *Stretching* », le nombre des inconnues dans la présente *théorie d'ordre élevé* est seulement

cinq. La présente théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

III.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à cinq variables

- (i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- (ii) La composante du déplacement transversale $w(x, y, z)$ peut être dissociée en trois termes (équation III.3) : le premier $w_b(x, y)$ représente la partie de la flèche pure de la plaque, tel que la dérivée de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le second terme $w_s(x, y)$, représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale. Le troisième terme $w_{st}(x, y, z)$ représente la partie de la flèche due à l'effet **Stretching**. Les deux composantes sont en fonction des coordonnées x, y seulement, le troisième terme est en fonction de x, y et z , la flèche totale de la plaque s'écrit comme suit :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + w_{st}(x, y, z) \quad (\text{III. 3})$$

- (iii) Les déplacements u dans la direction (x) et v dans la direction (y) se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements u et v dans les directions (x) et (y) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III. 4})$$

Les premières composantes u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane. Les deuxièmes composante u_b et v_b , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques.

Les expressions des composantes u_b et v_b sont données par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III. 5})$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement u_s et v_s , elles donnent lieu, en collaboration avec w_s , une variation parabolique de déformations de cisaillement γ_{xz} et

γ_{yz} , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} , sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque. Les expressions des composantes u_s et v_s sont données comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III. 6})$$

Avec

$$f(z) = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

La composante due à l'effet stretching w_{st} est donnée par:

$$w_{st}(x, y, z, t) = g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III. 7})$$

Avec

$$g(z) = \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

φ_z représente la deformation normale (la rotation due à la flexion par rapport au plan xy).

III.3.2. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement de la présente théorie hyperbolique d'ordre supérieur avec la prise en compte de « l'effet

Stretching » peut être obtenu en utilisant les équations (III.3) - (III.7) comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (III.9), soit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\
\gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\
\gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
\varepsilon_z &= g'(z) \varepsilon_z^0
\end{aligned} \tag{III. 9}$$

Où

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{III. 10}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
\gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \\
g(z) &= 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}, \quad g'(z) = \frac{dg(z)}{dz}
\end{aligned}$$

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III. 11}$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques C_{ij} dépend des hypothèses dont lesquelles on prend en compte ou non la déformation normale ε_z . Si $\varepsilon_z = 0$, alors C_{ij} sont calculées en contraintes planes, elles s'écrivent:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \tag{III. 12a}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III. 12b})$$

Si on prend en compte « l'effet Stretching » $\varepsilon_z \neq 0$, les constantes C_{ij} sont des constantes tridimensionnelles, elles sont exprimées comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad (\text{III. 13a})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III. 13b})$$

Où $\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ et $\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ sont les coefficients de Lamé.

Les modules E , G et les coefficients élastiques C_{ij} varient à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi des mélanges définis dans l'équation (III.2).

III.3.3. Équations gouvernantes

En vue d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre et de mouvement, ainsi que les conditions aux limites de la plaque sandwich en FGM, le principe d'énergie d'Hamilton est utilisé. Le principe d'Hamilton est donné par sa forme analytique comme suit [107]:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta K - \delta T) dt \quad (\text{III. 14})$$

Où: δU est la variation de l'énergie de déformation; δK représente la variation de l'énergie potentielle; et δT est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque FGM est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ = & \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ & + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz} + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 15})$$

Où A est la surface en plan (x,y) de la plaque et les résultantes des contraintes N , M , et S sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III .16a})$$

$$N_z = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_z)^{(n)} g'(z) dz, \quad (\text{III .16b})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (\text{III .16c})$$

Où h_{n+1} et h_n sont les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sandwich en FGM.

La variation de l'énergie potentielle du chargement appliqué q est donnée par :

$$\delta K = - \int_A q \delta (w_b + w_s + w_{st}) dA \quad (\text{III .17})$$

Avec q est la charge transversale appliqué sur la plaque.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_1^s ((\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)) + K_2^s \dot{\phi} \delta \dot{\phi} \} dA \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation III.2; et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont les moments d'inertie suivant l'épaisseur de différent ordre définis par :

$$(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.19})$$

En introduisant les expressions de δU , δK , et δT à partir des équations. (III. 15), (III. 17) et (III. 18) dans l'équation (III. 14), puis en intégrant par parties, et collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b , δw_s et $\delta \varphi$, on peut alors formuler les équations d'équilibre et du mouvement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\varphi} \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\varphi} \\ \delta \varphi : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

En reportant les équations (III. 9) et (III.11) dans l'équation (III.16), on obtient les expressions des résultantes des contraintes sous forme contractée suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^s \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^0, \quad S = A^s \gamma, \quad (\text{III. 21a})$$

$$N_z = R^s \varphi + L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^s(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s), \quad (\text{III. 21b})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}, \quad (\text{III. 22a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}, \quad (\text{III. 22b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III. 22c})$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{B}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{B}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{D}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{D}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^s & \mathbf{H}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III. 22d})$$

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_{xz}^s, \mathbf{S}_{yz}^s\}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\boldsymbol{\gamma}_{xz}, \boldsymbol{\gamma}_{yz}\}, \quad \mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{44}^a & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{55}^a \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^s \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \boldsymbol{\lambda}(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} \mathbf{g}'(z) dz \quad (\text{III. 22e})$$

Où:

\mathbf{A}_{ij} , \mathbf{B}_{ij} , etc., représentent les coefficients de rigidité de la plaque sandwich en FGM et sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{H}_{11}^s \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{H}_{12}^s \\ \mathbf{A}_{66} & \mathbf{B}_{66} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{B}_{66}^s & \mathbf{D}_{66}^s & \mathbf{H}_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \boldsymbol{\lambda}(z) \begin{Bmatrix} 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ \nu \\ 1 \\ 1-2\nu \\ 2\nu \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III. 23a})$$

et

$$(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{B}_{22}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{B}_{22}^s, \mathbf{D}_{22}^s, \mathbf{H}_{22}^s) = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{B}_{11}^s, \mathbf{D}_{11}^s, \mathbf{H}_{11}^s), \quad (\text{III. 23b})$$

$$\mathbf{A}_{44}^s = \mathbf{A}_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \boldsymbol{\mu}(z) [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III. 23c})$$

Substituant l'équation (III. 21) dans l'équation (III. 20), nous obtenons le système d'équation d'équilibre et du mouvement en terme des déplacements ($\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\delta} \mathbf{w}_b$, $\boldsymbol{\delta} \mathbf{w}_s$, $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varphi}$) comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{11} \mathbf{d}_{11} \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_{66} \mathbf{d}_{22} \mathbf{u}_0 + (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{66}) \mathbf{d}_{12} \mathbf{v}_0 - \mathbf{B}_{11} \mathbf{d}_{111} \mathbf{w}_b - (\mathbf{B}_{12} + 2\mathbf{B}_{66}) \mathbf{d}_{122} \mathbf{w}_b \\ & - (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \mathbf{d}_{122} \mathbf{w}_s - \mathbf{B}_{11}^s \mathbf{d}_{111} \mathbf{w}_s + \mathbf{L} \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I}_0 \ddot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{I}_1 \mathbf{d}_1 \ddot{\mathbf{w}}_b - \mathbf{J}_1 \mathbf{d}_1 \ddot{\mathbf{w}}_s, \end{aligned} \quad (\text{III. 24a})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{22} \mathbf{d}_{22} \mathbf{v}_0 + \mathbf{A}_{66} \mathbf{d}_{11} \mathbf{v}_0 + (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{66}) \mathbf{d}_{12} \mathbf{u}_0 - \mathbf{B}_{22} \mathbf{d}_{222} \mathbf{w}_b - (\mathbf{B}_{12} + 2\mathbf{B}_{66}) \mathbf{d}_{112} \mathbf{w}_b \\ & - (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \mathbf{d}_{112} \mathbf{w}_s - \mathbf{B}_{22}^s \mathbf{d}_{222} \mathbf{w}_s + \mathbf{L} \mathbf{d}_2 \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I}_0 \ddot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{I}_1 \mathbf{d}_2 \ddot{\mathbf{w}}_b - \mathbf{J}_1 \mathbf{d}_2 \ddot{\mathbf{w}}_s, \end{aligned} \quad (\text{III. 24b})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{11} \mathbf{d}_{111} \mathbf{u}_0 + (\mathbf{B}_{12} + 2\mathbf{B}_{66}) \mathbf{d}_{122} \mathbf{u}_0 + (\mathbf{B}_{12} + 2\mathbf{B}_{66}) \mathbf{d}_{112} \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}_{22} \mathbf{d}_{222} \mathbf{v}_0 - \mathbf{D}_{11} \mathbf{d}_{1111} \mathbf{w}_b - 2(\mathbf{D}_{12} + 2\mathbf{D}_{66}) \mathbf{d}_{1122} \mathbf{w}_b \\ & - \mathbf{D}_{22} \mathbf{d}_{2222} \mathbf{w}_b - \mathbf{D}_{11}^s \mathbf{d}_{1111} \mathbf{w}_s - 2(\mathbf{D}_{12}^s + 2\mathbf{D}_{66}^s) \mathbf{d}_{1122} \mathbf{w}_s - \mathbf{D}_{22}^s \mathbf{d}_{2222} \mathbf{w}_s + \mathbf{L}^s (\mathbf{d}_{11} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{d}_{22} \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{q} = \mathbf{I}_0 (\ddot{\mathbf{w}}_b + \ddot{\mathbf{w}}_s) \\ & + \mathbf{I}_1 (\mathbf{d}_1 \ddot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{d}_2 \ddot{\mathbf{v}}_0) - \mathbf{I}_2 (\mathbf{d}_{11} \ddot{\mathbf{w}}_b + \mathbf{d}_{22} \ddot{\mathbf{w}}_b) - \mathbf{J}_2 (\mathbf{d}_{11} \ddot{\mathbf{w}}_s + \mathbf{d}_{22} \ddot{\mathbf{w}}_s) + \mathbf{J}_1^s \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (\text{III. 24c})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{11}^s \mathbf{d}_{111} \mathbf{u}_0 + (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \mathbf{d}_{122} \mathbf{u}_0 + (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \mathbf{d}_{112} \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}_{22}^s \mathbf{d}_{222} \mathbf{v}_0 - \mathbf{D}_{11}^s \mathbf{d}_{1111} \mathbf{w}_b - 2(\mathbf{D}_{12}^s + 2\mathbf{D}_{66}^s) \mathbf{d}_{1122} \mathbf{w}_b \\ & - \mathbf{D}_{22}^s \mathbf{d}_{2222} \mathbf{w}_b - \mathbf{H}_{11}^s \mathbf{d}_{1111} \mathbf{w}_s - 2(\mathbf{H}_{12}^s + 2\mathbf{H}_{66}^s) \mathbf{d}_{1122} \mathbf{w}_s - \mathbf{H}_{22}^s \mathbf{d}_{2222} \mathbf{w}_s + \mathbf{A}_{44}^s \mathbf{d}_{11} \mathbf{w}_s + \mathbf{A}_{55}^s \mathbf{d}_{22} \mathbf{w}_s \\ & + \mathbf{R} (\mathbf{d}_{11} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{d}_{22} \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{A}_{44}^s \mathbf{d}_{11} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{A}_{55}^s \mathbf{d}_{22} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{q} = \mathbf{I}_0 (\ddot{\mathbf{w}}_b + \ddot{\mathbf{w}}_s) + \mathbf{J}_1 (\mathbf{d}_1 \ddot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{d}_2 \ddot{\mathbf{v}}_0) - \mathbf{J}_2 (\mathbf{d}_{11} \ddot{\mathbf{w}}_b + \mathbf{d}_{22} \ddot{\mathbf{w}}_b) \\ & - \mathbf{K}_2 (\mathbf{d}_{11} \ddot{\mathbf{w}}_s + \mathbf{d}_{22} \ddot{\mathbf{w}}_s) + \mathbf{J}_1^s \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (\text{III. 24d})$$

$$L(d_1 u_0 + d_2 v_0) - L(d_{11} w_b + d_{22} w_s) + (R - A_{44}^s) d_{11} w_s + (R - A_{55}^s) d_{22} w_s + R^s \varphi - A_{44}^s d_{11} \varphi - A_{55}^s d_{22} \varphi = J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi} \quad (\text{III. 24e})$$

Où : d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III. 25})$$

III.4. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations (III. 24) pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée.

Pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent:

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \varphi = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{III. 26a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \varphi = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (\text{III. 26b})$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement statique et en vibration libre des plaques sandwichs en FGM. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements u, v, w_b, w_s et φ sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement mécanique et les conditions aux limites (équation (III. 26)).

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\alpha x} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\alpha x} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\alpha x} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\alpha x} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\alpha x} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Où

$\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ sont des constantes.

U, V, W_b, W_s et Φ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer. ω est la fréquence propre associée au (m, n) nième mode propre.

Le chargement transversal q s'écrit sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement mécanique et les conditions aux limites comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.28})$$

Pour le cas d'un chargement sinusoïdal, on a :

$$m = n = 1 \text{ et } q_{11} = q_0$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge appliquée dans le centre de la plaque.

En remplaçant les équations (III. 27) et (III. 28) dans l'équation (III.24), on obtient la solution analytique du problème à partir l'opérateur suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III. 29})$$

Avec:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{15} &= L\lambda \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{25} &= L\mu \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\ a_{35} &= -L^s(\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III. 30})$$

$$\begin{aligned}
a_{44} &= -\left(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2\right) \\
a_{45} &= -\left[A_{44}^s \lambda^2 + A_{55}^s \mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2)\right] \\
a_{55} &= -\left(A_{44}^s \lambda^2 + A_{55}^s \mu^2 + R^s\right) \\
m_{11} = m_{22} &= -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1, m_{24} = \mu J_1, \\
m_{33} &= -\left[I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2)\right], \\
m_{34} &= -\left[I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2)\right], m_{44} = -\left[I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2)\right], \\
m_{35} = m_{45} &= -J_1^s, m_{55} = -K_2^s
\end{aligned}$$

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en flexion et en vibration libre des plaques sandwich en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant une nouvelle théorie hyperbolique d'ordre élevé avec prise en compte de la déformation normale « **effect of thickness stretching** » par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements.

La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques homogènes tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

En dissociant le déplacement transversal $w(x, y, z)$ en trois composants à savoir : la flèche pure de la plaque $w_b(x, y)$, la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement $w_s(x, y)$ et de la flèche due à « l'effet Stretching » $w_{st}(x, y, z)$, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est réduit à seulement cinq inconnus, contrairement au autres théories.

Les études paramétriques présentées dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants aux résultats obtenus par la présente théorie avec les résultats de la littérature à savoir : les autres théories d'ordre élevé avec la prise en compte de la déformation normale ε_z et celles obtenues par la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

IV.1. Introduction

Afin de préserver les structures en matériaux composites à gradient de propriétés contre la fatigue et la rupture, il est indispensable de caractériser et ensuite de contrôler leur comportement statique et vibratoire. Les causes de rupture sont la fatigue structurale due à l'ampleur des amplitudes de vibration et les charges mécaniques importantes appliquées.

Les matériaux à gradient de propriétés sont considérés comme un type spécial des matériaux composites, produit en changeant sans interruption les fractions de volume des matériaux constitutifs dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. En raison de son comportement meilleur dans l'environnement à hautes températures, les FGM ont trouvés beaucoup d'applications dans les domaines de hautes technologies : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, d'automobile, etc. Le concept des Matériaux à gradient de propriétés a été proposé vers la fin des années 80 par un groupe de scientifiques au Japon [1].

Dans le présent chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement statique de la flexion et du comportement en vibration libres des plaques sandwich en matériaux à gradient de propriétés FGM. Le modèle choisit dans ce chapitre est basé sur le modèle hyperbolique de déformation de cisaillement à cinq variables avec la prise en compte de la déformation normale ε_z « Thickness Stretching Effect ».

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, tandis que six ou plus pour le cas des autres théories déformation de cisaillement qui prennent en compte la déformation normale ε_z . La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young, masse volumique) de la plaque sandwich en FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs configurations de plaques sandwich sont utilisés en tenant compte ou non de la

symétrie de la plaque, la nature de la couche centrale (Cœur rigide ou souple) et l'épaisseur de chaque couche.

IV.2. Résultats de l'analyse statique : plaque sandwich avec cœur rigide (Hard Corps)

L'analyse du comportement statique de la flexion de la plaque sandwich en FGM est conduite pour des combinaisons du Métal et de la Céramique. Les matériaux choisis sont : pour le Métal, l'Aluminium (*Al*) et pour la Céramique : un Oxyde Zirconium (**ZrO₂**). Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque.

Les propriétés matérielles des matériaux utilisés sont données dans le tableau IV.1:

Tableau IV. 1 : Les propriétés matérielles des matériaux utilisées

Propriétés	Métal : Al	Céramique : ZrO ₂
<i>E (GPa)</i>	70	151
<i>ν</i>	0.3	0.3

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales et tangentielles :

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\sigma}_z = \sigma_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, \bar{z}\right),$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}.$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur pour les deux configurations symétrique (1-2-1) et non symétrique (2-2-1) de la plaque sandwich en FGM (**Al/ ZrO₂**) avec cœur rigide pour les différentes valeurs de paramètre du matériau *k* est représentée dans la figure IV.1. Pour *k* = 0, on obtient une plaque entièrement en céramique.

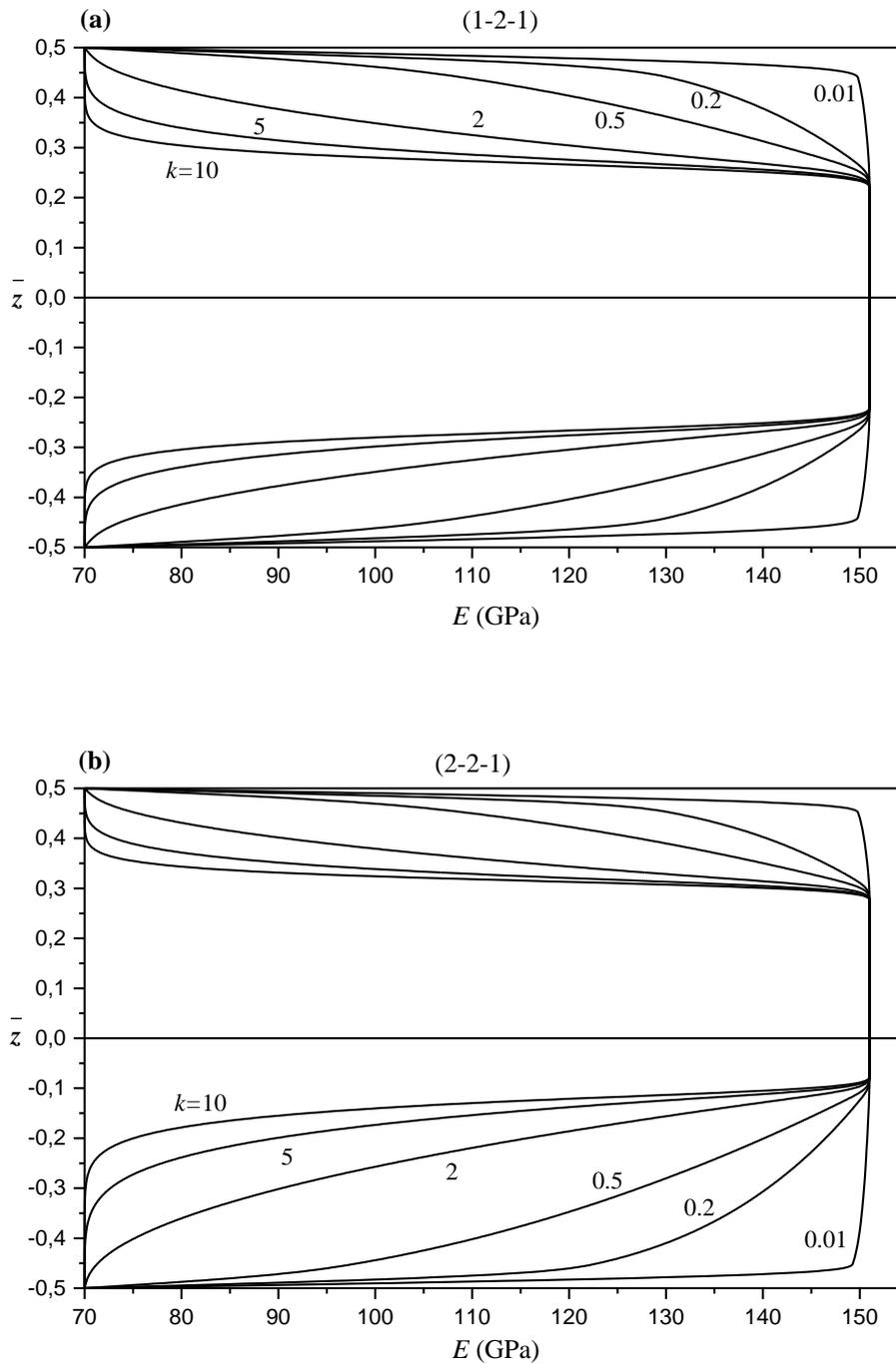


Figure IV.1: Variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et non symétrique pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).

Nous comparons ici les résultats de la flèche et les contraintes, obtenus avec notre modèle, avec les résultats (Quasi-3D) obtenus par Neves et al. [108] pour plaque sandwich en FGM soumise à une charge sinusoïdale q .

Dans les tableaux IV.2–IV.4 sont présentées, les valeurs de la flèche maximale adimensionnelle \bar{w} au centre de la plaque, les valeurs des contraintes adimensionnelles

axiales $\bar{\sigma}_x$ et tangentielles $\bar{\tau}_{xz}$ pour les différentes valeurs des paramètres de matériaux k et les différentes configurations de plaques sandwich respectivement.

On remarque que la présente théorie d'ordre élevé avec la prise en compte de la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$) avec seulement cinq inconnus donne des résultats encourageants et pratiquement identiques à ceux obtenus par la théorie (Quasi-3D) développée par Neves et al. [108] (avec 09 inconnus) qui prend en compte ainsi l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur ($\varepsilon_z \neq 0$).

Le tableau IV.2 montre clairement que la flèche maximale \bar{w} au centre de la plaque augmente par l'augmentation de la valeur du paramètre de matériau k , et plus l'épaisseur de la couche centrale en céramique augmente, la flèche maximale \bar{w} diminue. On constate ainsi que la prise en compte de la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$) diminue la flèche maximale \bar{w} de la plaque. On peut conclure que la prise en compte de la déformation normale (l'étirement de la plaque suivant l'épaisseur) rend la plaque FGM plus rigide et conduit à une réduction de la flèche totale maximale \bar{w} .

Le tableau IV.3 présente les valeurs des contraintes axiales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ pour $k = 0, 0.5, 1, 2, 5$, et 10 , et pour les différentes configurations des plaques sandwich en FGM. Une fois encore, la plaque est soumise à une charge sinusoïdale q .

Il apparaît clairement que la contrainte axiale augmente avec l'augmentation de la valeur du paramètre de matériau k . Les valeurs les plus petites des contraintes $\bar{\sigma}_x$ sont celles de la plaque (2-2-1) et les plus grandes sont celles de la plaque (2-1-2).

Le tableau IV.4 contient les résultats des contraintes de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich en FGM soumise à un chargement sinusoïdal q .

La différence relative entre la présente théorie hyperbolique de déformation de cisaillement à cinq variables avec la prise en compte de l'effet d'étirement de la plaque suivant l'épaisseur et les autres théories de déformation de cisaillement peut être stable pour les différentes valeurs de k et ceci indépendamment du type de la plaque. En général, les plaques entièrement en céramique donnent les plus petites valeurs de contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$. La plaque sandwich en FGM (2-1-1) donne les plus grandes valeurs des contraintes de cisaillement transversal.

Tableau IV.2: La flèche \bar{w} de la plaque sandwich en FGM ($a/h=10, a=b$).

k	Théories	\bar{w}				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486
0.5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2667	0.2614	0.2583	0.2519	0.2460
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2650	0.2597	0.2566	0.2503	0.2444
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.26144	0.25599	0.25296	0.24655	0.24072
1	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.3090	0.2995	0.2949	0.2838	0.2740
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.3070	0.2975	0.2929	0.2820	0.2722
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.30430	0.29448	0.29007	0.27874	0.26915
2	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.3542	0.3399	0.3351	0.3186	0.3053
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.3519	0.3376	0.3329	0.3164	0.3032
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.35001	0.33495	0.33068	0.31356	0.30060
5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.3930	0.3746	0.3729	0.3514	0.3370
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.3905	0.3722	0.3705	0.3490	0.3347
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.38934	0.36981	0.36902	0.34649	0.33255
10	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.4051	0.3861	0.3868	0.3637	0.3503
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.4026	0.3835	0.3843	0.3612	0.3480
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.40153	0.38111	0.38303	0.35885	0.34591

Tableau IV.3: Les contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich en FGM ($a/h = 10, a = b$).

k	Théories	$\bar{\sigma}_x$				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.9947	1.9945	1.9947	1.9946	1.9946
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	2.0066	2.0064	2.0066	2.0065	2.0064
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524
0.5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.2690	1.2088	1.2285	1.1679	1.1694
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.2757	1.2153	1.2351	1.1743	1.1759
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.25129	1.18741	1.21028	1.14646	1.15045
1	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.4742	1.3700	1.4067	1.3026	1.3064
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.4813	1.3768	1.4137	1.3092	1.3133
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.46131	1.35053	1.39243	1.28274	1.29030
2	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.6920	1.5386	1.6017	1.4476	1.4588
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.6994	1.5456	1.6088	1.4543	1.4659
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.68472	1.52101	1.59170	1.42887	1.44497
5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.8761	1.6836	1.7833	1.5826	1.6123
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.8838	1.6909	1.7906	1.5893	1.6195
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.87516	1.66856	1.77919	1.56627	1.60203
10	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	1.9316	1.7328	1.8485	1.6327	1.6761
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.9397	1.7405	1.8559	1.6395	1.6832
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	1.93266	1.71835	1.84705	1.61792	1.66754

Tableau IV.4: Les contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich en FGM

$$(a/h=10, a=b).$$

k	Théories	$\bar{\tau}_{xz}$				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2538	0.2284	0.2459	0.2407	0.2358
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2538	0.2291	0.2461	0.2411	0.2363
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
0.5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2693	0.2489	0.2593	0.2537	0.2455
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2694	0.2498	0.2595	0.2542	0.2461
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.25729	0.25709	0.25178	0.25078	0.24679
1	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2744	0.2630	0.2640	0.2590	0.2489
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2745	0.2640	0.2643	0.2594	0.2496
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.27050	0.27017	0.26060	0.25890	0.25196
2	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2758	0.2866	0.2664	0.2632	0.2515
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2760	0.2877	0.2668	0.2636	0.2523
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.28792	0.28742	0.27138	0.26885	0.25776
5	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2710	0.3367	0.2651	0.2666	0.2538
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2712	0.3377	0.2655	0.2669	0.2546
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.31419	0.31293	0.28606	0.28217	0.26463
10	Ref [108] ($\epsilon_{zz} = 0$)	0.2669	0.3795	0.2635	0.2690	0.2559
	Ref [108] ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.2671	0.3806	0.2639	0.2692	0.2568
	Présente ($\epsilon_{zz} \neq 0$)	0.33210	0.32959	0.29534	0.29036	0.26850

La variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} à travers l'épaisseur des deux plaques sandwich en FGM symétrique (1-2-1) et non symétrique (2-2-1) et pour les différentes valeurs du paramètre du matériau k est illustrée sur la figure IV.2.

On remarque que la variation de la flèche \bar{w} à travers l'épaisseur n'est pas linéaire, ceci est dû à la prise en compte de l'effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur.

On constate aussi que la flèche \bar{w} de la plaque entièrement en Métal est plus importante par rapport à celle entièrement en Céramique. Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique ($E_c = 151GPa$) par rapport à celui du métal ($E_m = 70GPa$).

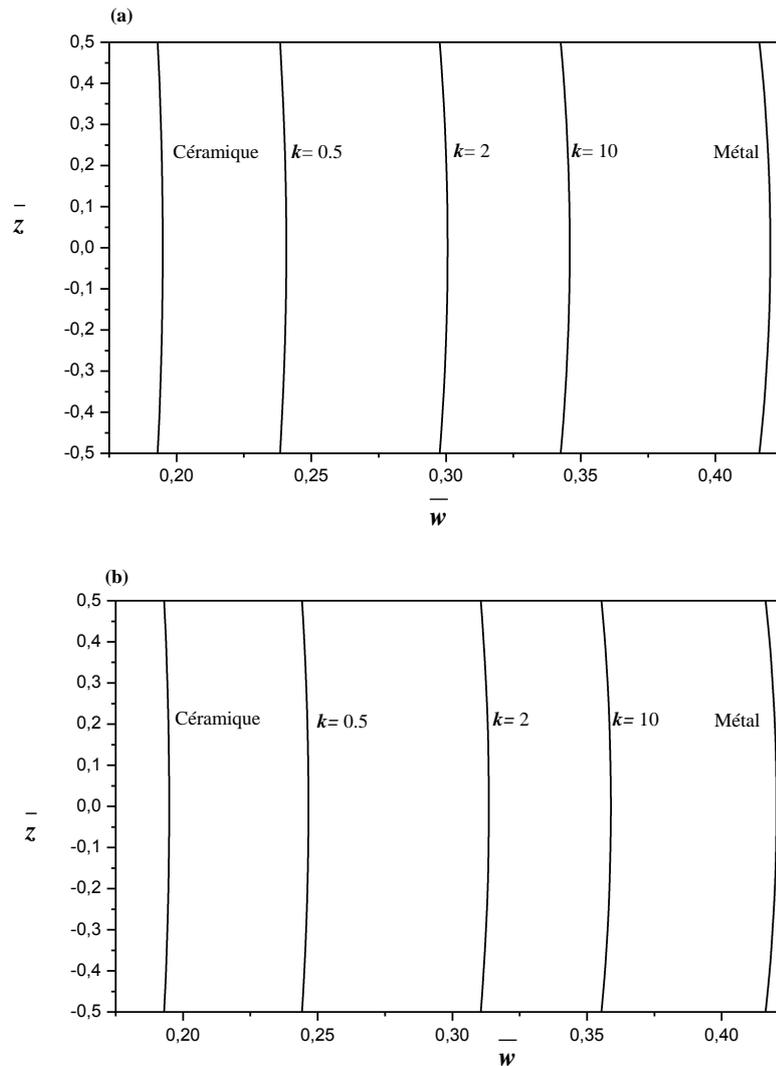


Figure IV. 2: La variation de la flèche \bar{w} à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique ($a/h = 10, a = b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).

La figure IV.3 montre la variation des contraintes axiales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich en fonction des différents paramètres de matériau k .

Ces variations sont linéaires pour les plaques homogènes (plaque entièrement en céramique ou entièrement en métal), et non linéaire pour des valeurs de $k \neq 0$ et ceci pour les deux configurations de plaques sandwich (1-2-1) et (2-2-1). On constate ainsi, que les contraintes de compression se produisent sur les surfaces inférieures et les contraintes de traction se produisent sur les surfaces supérieures et que l'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour les plaques sandwich non symétrique (2-2-1) pour $k \neq 0$.

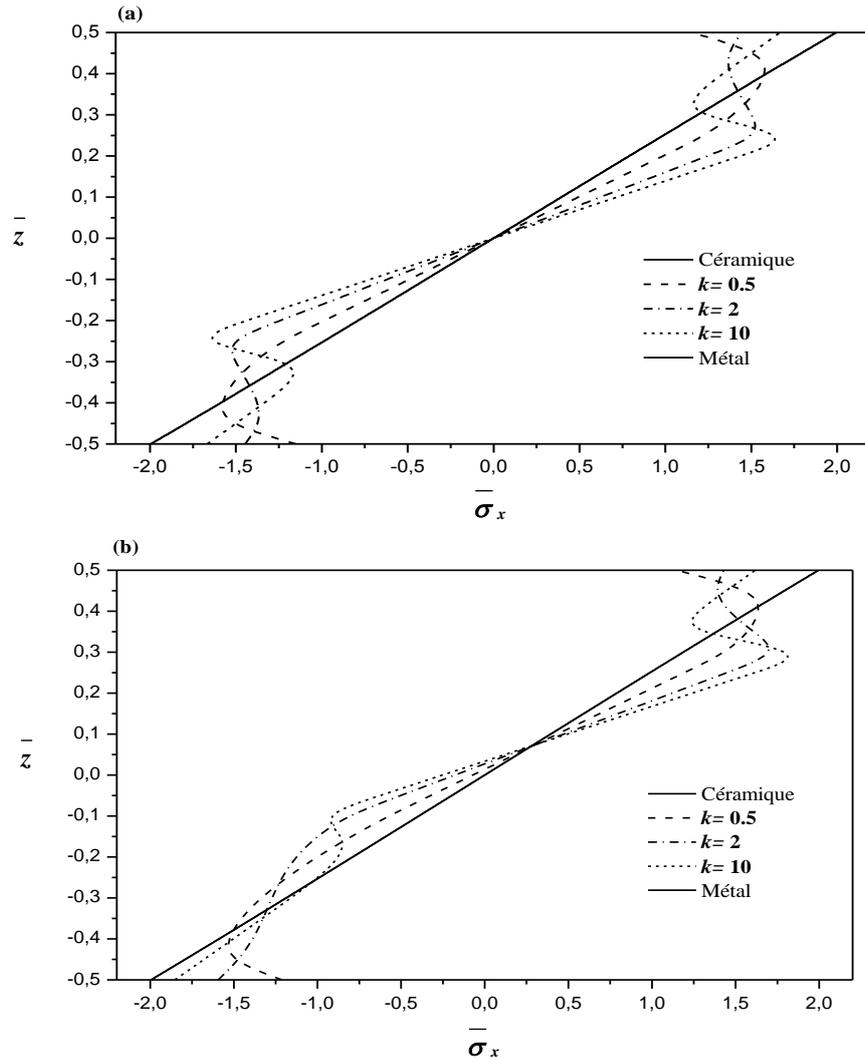


Figure IV. 3: La variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h=10, a=b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).

La figure IV.4 représente la distribution des contraintes de cisaillement dans le plan adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ suivant l'épaisseur pour les deux configurations de plaques sandwich symétrique et non symétrique (1-2-1) et (2-2-1).

On constate que la contrainte tangentielle dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ est une contrainte de traction au niveau de la surface inférieure et une contrainte de compression sur la surface supérieure des plaques sandwich en FGM (Symétrique et non symétrique). Les plaques homogènes en céramique et en métal donnent des contraintes tangentielles de compression et de traction maximale sur la surface supérieure et inférieure de la plaque.

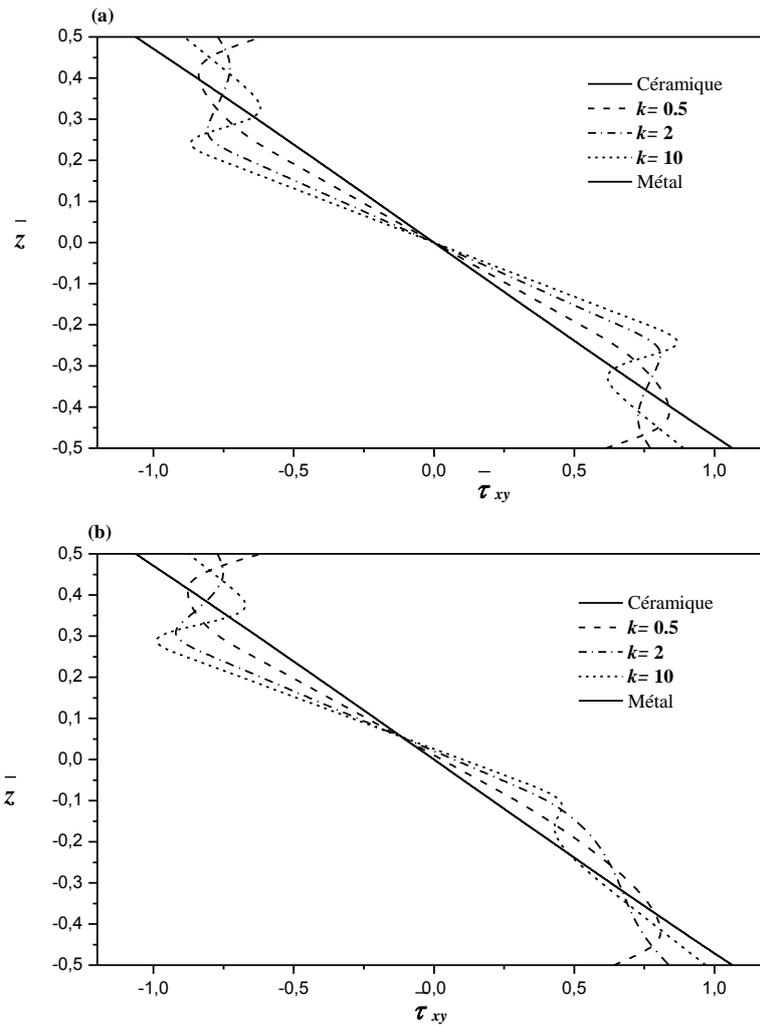


Figure IV. 4: La variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h=10, a=b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).

La figure IV.5 représente la distribution des contraintes de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ suivant l'épaisseur pour les deux configurations de plaques sandwich symétrique et non symétrique (1-1-2) et (2-2-1).

On remarque que la distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque non symétrique (2-2-1) n'est pas parfaitement parabolique, cette distribution est parabolique et symétrique pour le cas d'une plaque symétrique (1-2-1) ou homogène.

On constate ainsi que les contraintes tangentielles de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ augmentent par l'augmentation de paramètre du matériau k .

La variation de paramètre du matériau k mène à une variation importante des $\bar{\tau}_{xz}$ et particulièrement sur la zone centrale (figure IV.5.b).

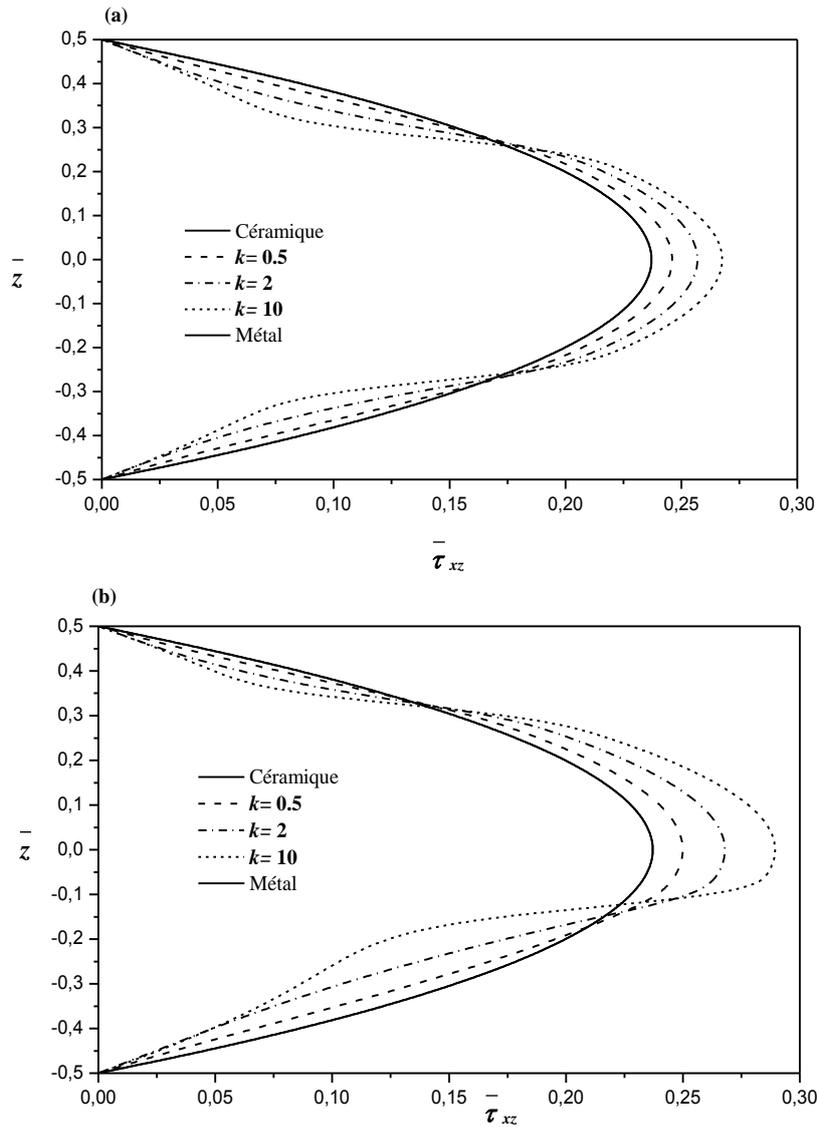


Figure IV. 5: La variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h=10, a=b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).

La figure IV.6 représente la distribution de la contrainte normale transversale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich en FGM (1-2-1) et (2-2-1), nous constatons que les contraintes $\bar{\sigma}_z$ varient d'une façon non-linéaire et continue au niveau des interfaces de la plaque. Les contraintes $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur de la plaque sont des contraintes de traction au dessus du plan médium et des contraintes de compression au dessous du plan médium.

On remarque ainsi que les contraintes $\bar{\sigma}_z$ sont faiblement influencées par la variation de paramètre du matériau k , sauf pour le cas de la plaque non symétrique (2-2-1).

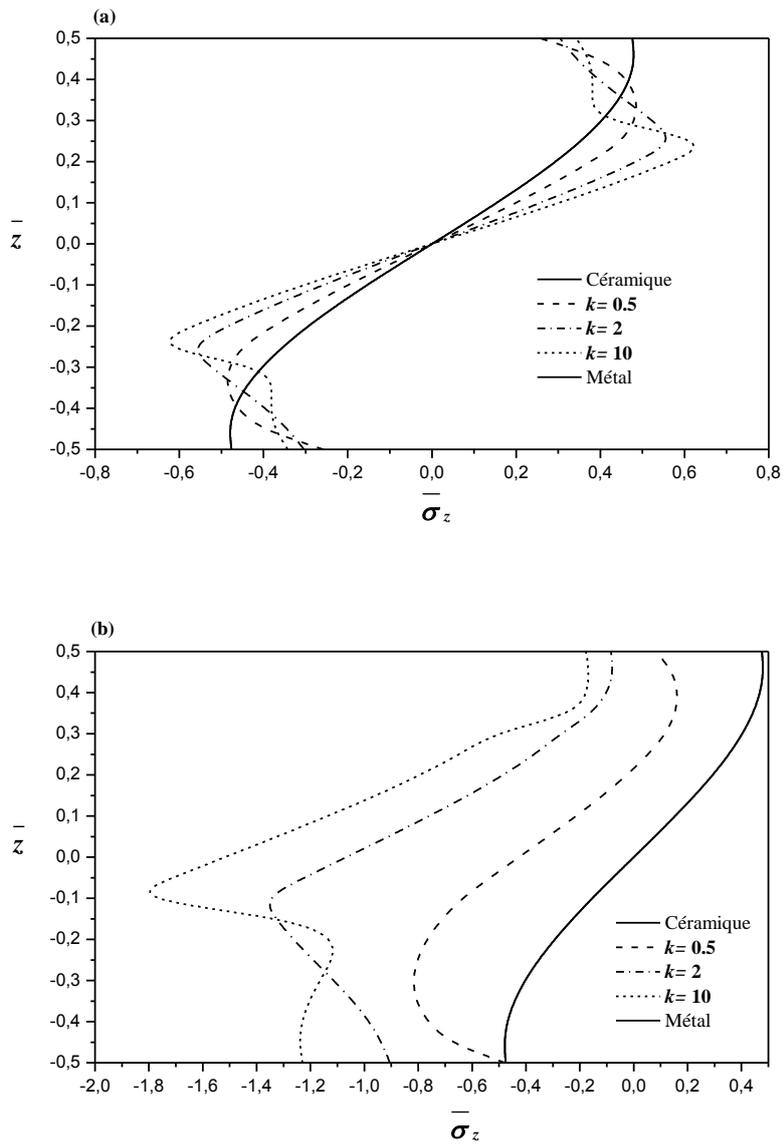


Figure IV. 6: La variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur pour la plaque symétrique et non symétrique sandwich ($a/h=10, a=b$). (a) plaque (1-2-1). (b) plaque (2-2-1).

IV.3. Résultats du comportement en vibration des plaques sandwich (Hard Corps & Soft corps)

Dans cette partie, nous proposons de valider le présent modèle et d'évaluer ses performances par le calcul des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour les deux types de plaque sandwichs (Hard Corps et Soft corps), leurs différentes configurations et rapports d'élançement. L'exemple traite de la vibration libre des plaques sandwich en FGM simplement appuyées. C'est un exemple qui met en œuvre les fréquences naturelles $\bar{\omega}$. Une comparaison a été faite avec les solutions exactes de l'élasticité linéaire tridimensionnelle « 3D » proposée par Li et al. [109].

La plaque sandwich en FGM étudiée est composée d'aluminium et de l'alumine. Les données matérielles des matériaux utilisés sont définies dans le tableau IV.5:

Tableau IV. 5 : Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich en FGM

Propriétés	Métal : Al	Céramique : Al ₂ O ₃
<i>E (GPa)</i>	70	380
ρ (kg/m ³)	2702	3800
ν	0.3	0.3

La variation du module de Young et la masse volumique suivant l'épaisseur pour les quatre configurations des plaques sandwich en FGM (Al/ Al₂O₃) avec un cœur rigide et un cœur souple, pour le cas des plaques symétrique (1-2-1) et non symétrique (2-2-1), et pour les différentes valeurs de paramètre du matériau k est représentée dans les figures suivantes IV.7-IV.10.

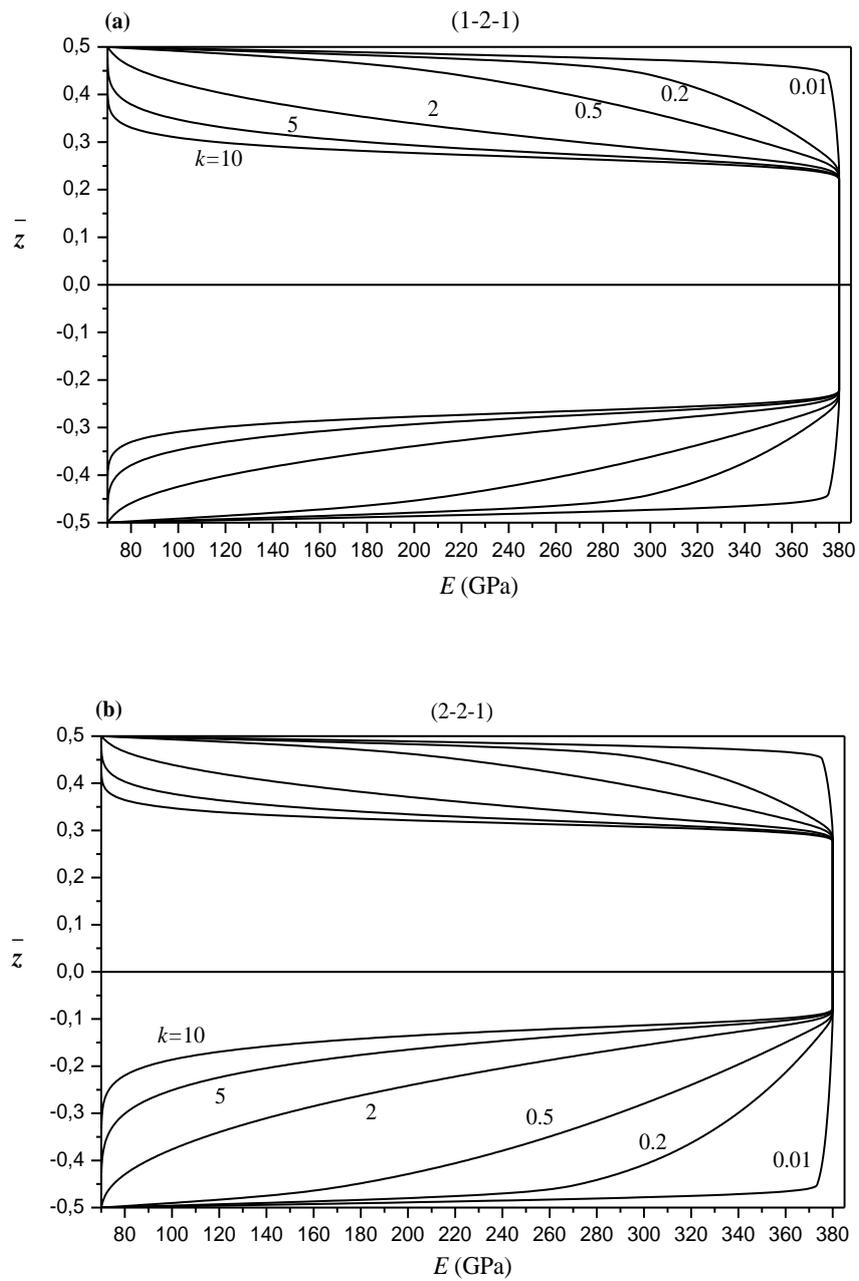


Figure IV.7: Variation du module de Young suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et non symétrique avec un cœur rigide homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).

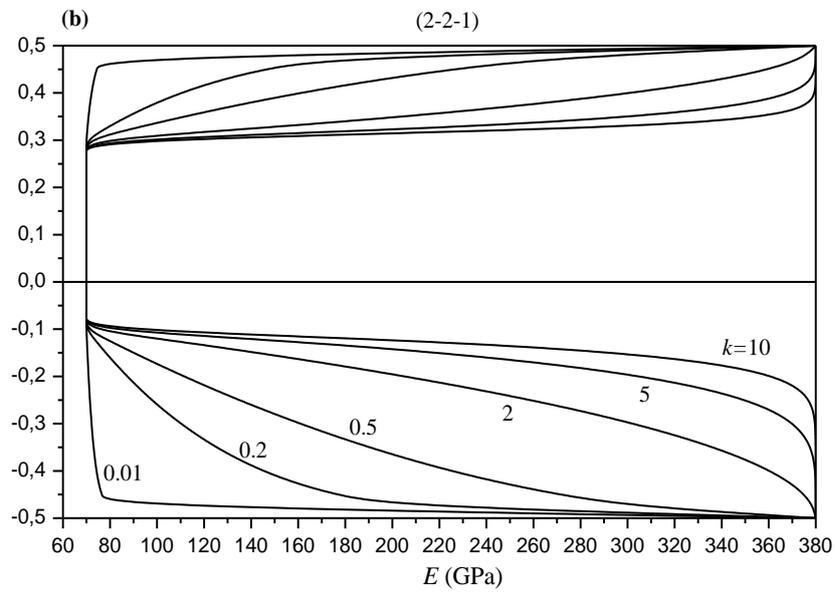
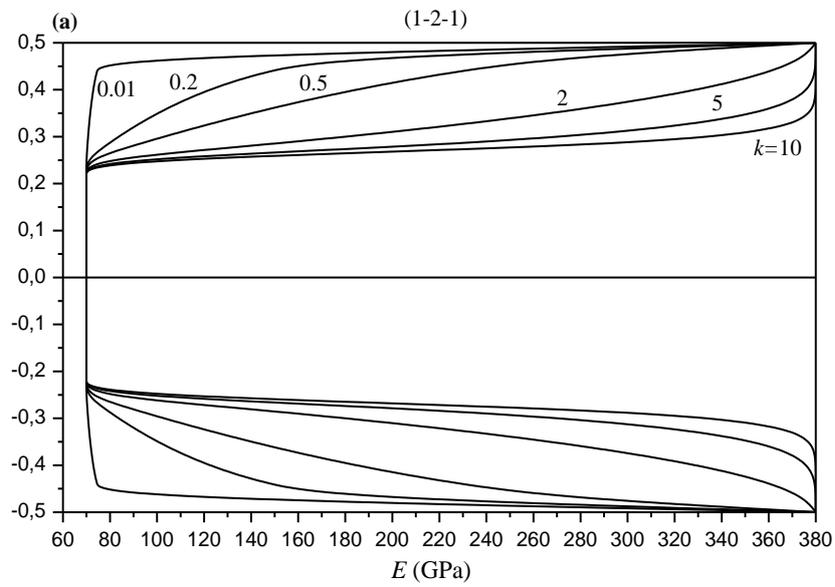


Figure IV.8: Variation du module de Young suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur souple homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).

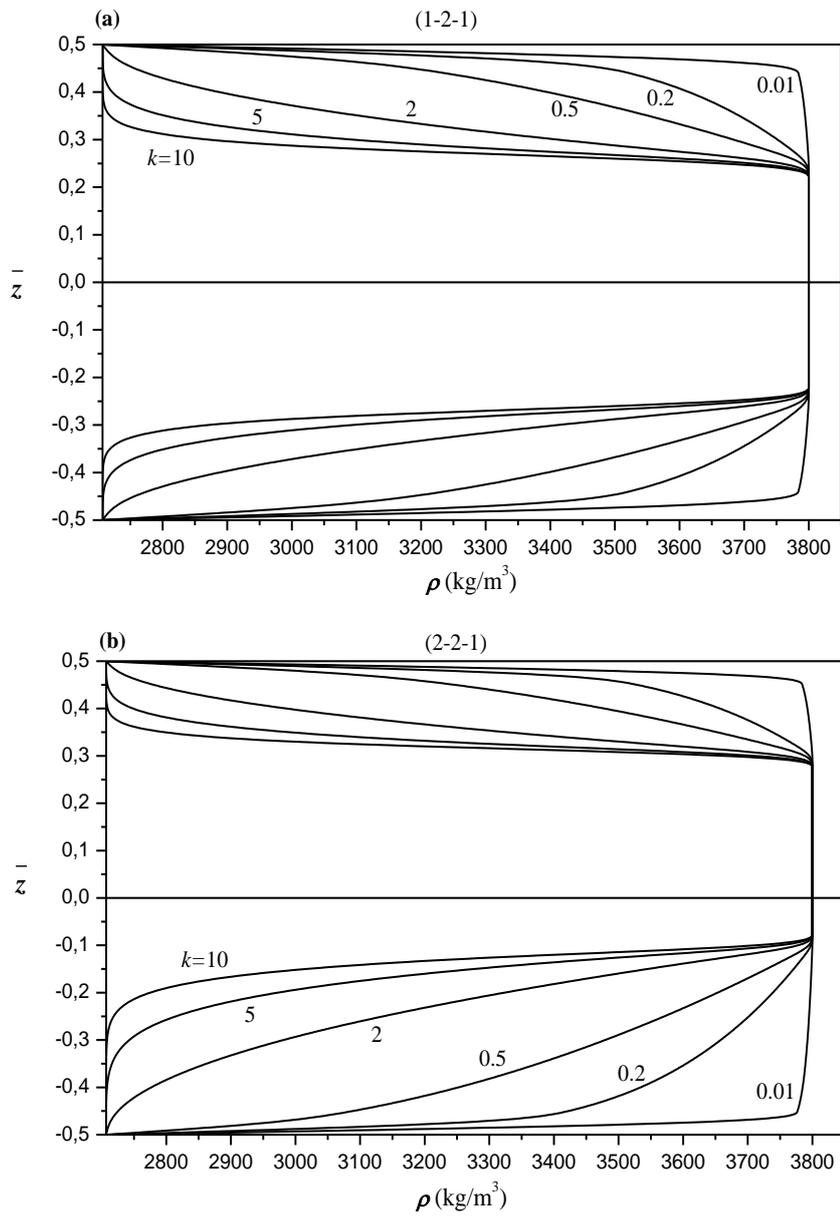


Figure IV.9: Variation de la masse volumique suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur rigide homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).

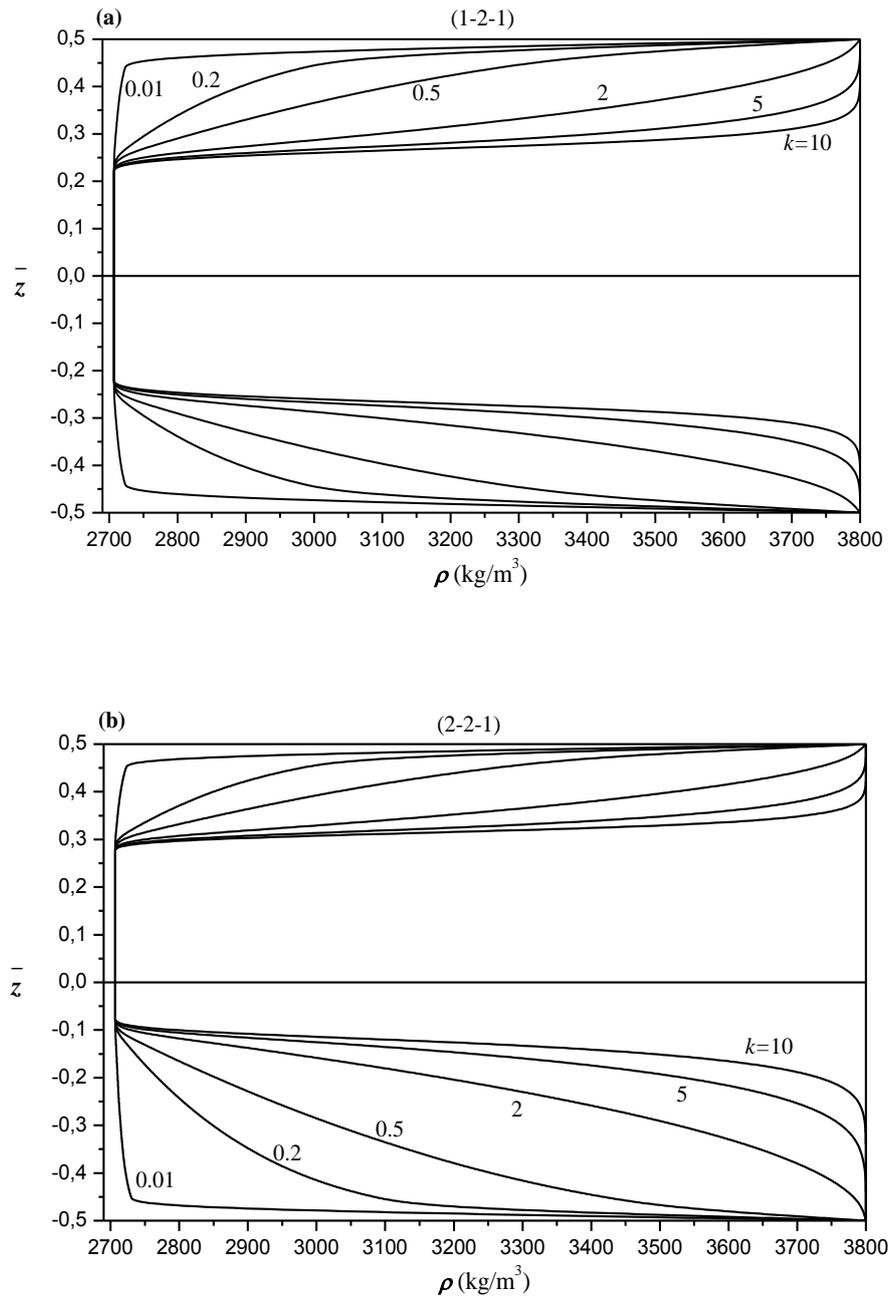


Figure IV.10: Variation de la masse volumique suivant l'épaisseur des plaques sandwich symétrique et asymétrique avec un cœur souple homogène pour différentes valeurs de k : (a) Plaque (1-2-1). (b) Plaque (2-2-1).

Les résultats des tests de validation sont présentés dans les tableaux IV.6 et IV.7 pour les deux types de plaques sandwich carrées en FGM (plaque avec Hard corps, plaque avec Soft Corps).

Les résultats obtenus par le présent modèle hyperbolique de déformation de cisaillement avec la prise en compte de l'effet «Thickness Stretching » avec seulement cinq variables sont conformes aux résultats obtenus par la solution exacte de l'élasticité linéaire tridimensionnelle proposé par Li et al. [110] pour les différents cas d'étude, et permettent de valider le modèle proposé. Nous observons une bonne corrélation entre les résultats obtenus avec les deux méthodes.

Tableau IV. 6: Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich simplement appuyée avec un cœur homogène rigide ($a = b$).

a/h	k	Théories	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1	
5	0	Elasticité 3D [109]	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	
		Présente théorie	1.67724	1.67724	1.67724	1.67724	1.67724	1.67724	
	0.5	Elasticité 3D [109]	1.35358	1.39053	1.42178	1.44535	1.46940	1.58186	
		Présente théorie	1.35379	1.39065	1.42181	1.44614	1.46952	1.58210	
	1	Elasticité 3D [109]	1.17485	1.22915	1.27770	1.31434	1.35341	1.53142	
		Présente théorie	1.17558	1.22953	1.27778	1.31628	1.35361	1.53189	
	5	Elasticité 3D [109]	0.89086	0.93362	0.99798	1.05607	1.11900	1.42845	
		Présente théorie	0.89853	0.94028	1.00051	1.06419	1.11939	1.42955	
	10	Elasticité 3D [109]	0.86833	0.89228	0.94984	1.00949	1.07290	1.40568	
		Présente théorie	0.87544	0.90305	0.95490	1.02092	1.07343	1.40690	
	10	0	Elasticité 3D [109]	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
			Présente théorie	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
0.5		Elasticité 3D [109]	1.44614	1.48608	1.52131	1.54926	1.57668	1.71130	
		Présente théorie	1.44621	1.48611	1.52130	1.55016	1.57670	1.71137	
1		Elasticité 3D [109]	1.24470	1.30181	1.35523	1.39763	1.44137	1.65113	
		Présente théorie	1.24495	1.30195	1.35527	1.39987	1.44143	1.65128	
5		Elasticité 3D [109]	0.94476	0.98103	1.04532	1.10983	1.17567	1.52993	
		Présente théorie	0.94716	0.98311	1.04613	1.11723	1.17579	1.53026	
10		Elasticité 3D [109]	0.92727	0.94078	0.99523	1.06104	1.12466	1.50333	
		Présente théorie	0.92952	0.94410	0.99684	1.07015	1.12486	1.50371	
100		0	Elasticité 3D [109]	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829
			Présente théorie	1.88830	1.88830	1.88830	1.88830	1.88830	1.88830
	0.5	Elasticité 3D [109]	1.48244	1.52355	1.56046	1.59031	1.61915	1.76357	
		Présente théorie	1.48245	1.52357	1.56046	1.59129	1.61916	1.76359	
	1	Elasticité 3D [109]	1.27158	1.32974	1.38511	1.42992	1.47558	1.69906	
		Présente théorie	1.27160	1.32976	1.38512	1.43229	1.47559	1.69908	
	5	Elasticité 3D [109]	0.96563	0.99903	1.06309	1.13020	1.19699	1.56988	
		Présente théorie	0.96567	0.99907	1.06312	1.13717	1.19701	1.56990	
	10	Elasticité 3D [109]	0.95042	0.95934	1.01237	1.08065	1.14408	1.54164	
		Présente théorie	0.95047	0.95940	1.01239	1.08860	1.14409	1.54166	

Le tableau IV.6 présente les valeurs des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour les différentes configurations plaques sandwich en FGM (Type : cœurs rigide) pour les différentes valeurs du paramètre du matériau k et pour les différents rapports d'épaisseur ($b/h=5, 10$ et 100).

On remarque que plus le rapport (b/h) augmente, les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ augmentent et ceci pour les différentes valeurs de paramètre du matériau k et les différentes configurations des plaques sandwichs en FGM. On constate ainsi que plus la valeur de paramètre du matériau k augmente et plus les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ diminuent et plus l'épaisseur de la couche centrale en céramique augmente et plus les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ augmentent.

Tableau IV. 7: Comparaison des fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich en FGM simplement appuyée avec un cœur homogène souple ($a = b$).

b/h	k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1	
5	0	Elasticité 3D [109]	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286	
		Présente théorie	0.85290	0.85290	0.85290	0.85290	0.85290	0.85290	
	0.5	Elasticité 3D [109]	1.37894	1.32061	1.28053	1.24533	1.22580	1.07016	
		Présente théorie	1.38773	1.33281	1.28989	1.25626	1.22883	1.07153	
	1	Elasticité 3D [109]	1.50896	1.43325	1.38242	1.34203	1.32129	1.14451	
		Présente théorie	1.52368	1.46132	1.40877	1.36935	1.33301	1.14652	
	5	Elasticité 3D [109]	1.65868	1.58011	1.50284	1.46009	1.42665	1.25210	
		Présente théorie	1.52368	1.62565	1.57369	1.53006	1.48096	1.25485	
	10	Elasticité 3D [109]	1.67278	1.60909	1.52671	1.48306	1.44101	1.27065	
		Présente théorie	1.67540	1.64714	1.60063	1.55740	1.50841	1.27360	
	10	0	Elasticité 3D [109]	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
			Présente théorie	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
0.5		Elasticité 3D [109]	1.57352	1.52588	1.48459	1.43419	1.41662	1.20553	
		Présente théorie	1.57705	1.53096	1.48853	1.44040	1.41788	1.20590	
1		Elasticité 3D [109]	1.72227	1.67437	1.63053	1.57037	1.55788	1.30825	
		Présente théorie	1.72814	1.68625	1.64199	1.58430	1.56301	1.30885	
5		Elasticité 3D [109]	1.84198	1.82611	1.78956	1.72726	1.72670	1.46647	
		Présente théorie	1.84465	1.84456	1.82032	1.75972	1.75143	1.46742	
10		Elasticité 3D [109]	1.84020	1.83987	1.80813	1.74779	1.74811	1.49481	
		Présente théorie	1.84113	1.85489	1.83973	1.78163	1.77878	1.49588	
100		0	Elasticité 3D [109]	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022
			Présente théorie	0.96023	0.96023	0.96023	0.96023	0.96023	0.96023
	0.5	Elasticité 3D [109]	1.66281	1.62291	1.58171	1.52277	1.50658	1.26557	
		Présente théorie	1.66288	1.62299	1.58178	1.52565	1.50661	1.26559	
	1	Elasticité 3D [109]	1.82031	1.79163	1.75379	1.68184	1.67490	1.38331	
		Présente théorie	1.82040	1.79179	1.75396	1.68589	1.67498	1.38333	
	5	Elasticité 3D [109]	1.92090	1.94313	1.93623	1.86207	1.88530	1.57035	
		Présente théorie	1.92095	1.94338	1.93664	1.86674	1.88564	1.57037	
	10	Elasticité 3D [109]	1.91064	1.94687	1.95044	1.88042	1.91162	1.60457	
		Présente théorie	1.91067	1.94707	1.95086	1.88484	1.91204	1.60460	

Le tableau IV.7 présente les valeurs des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour les différentes configurations plaques carrées sandwich en FGM (Type : cœur souple) pour les différentes valeurs du paramètre du matériau k et pour les différents rapports d'épaisseur ($b/h=5, 10$ et 100).

Encore une fois, les résultats obtenus par le présent modèle sont en bon accord avec les résultats obtenus par la solution exacte de l'élasticité linéaire tridimensionnelle [109].

On remarque que plus le rapport (b/h) augmente, les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ augmentent. On constate ainsi que plus la valeur de paramètre du matériau k augmente plus les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ augmentent et enfin plus l'épaisseur de la couche centrale en métal augmente et plus les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ diminuent.

Les figures IV.11 et IV.12 présentent la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ en fonction du rapport d'épaisseur (b/h) pour les deux types de plaques sandwichs en FGM « Soft corps et hard corps » et pour les deux configurations de plaques sandwich (1-2-1) et (2-2-1) respectivement.

Les résultats des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ sont maximales pour les plaques entièrement en céramique et le minimum pour les plaques en métal.

On remarque que plus la valeur de k augmente et plus les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ diminuent pour le cas de la plaque sandwich avec un cœur rigide et augmentent pour la plaque avec un cœur souple et ceci pour les deux configurations de plaque sandwich en FGM (1-2-1) et (2-2-1).

On constate ainsi que l'effet de la variation du paramètre du matériau k sur les fréquences naturelles $\bar{\omega}$ est très important pour la plaque sandwich (hard corps) que la plaque sandwich avec (Soft corps).

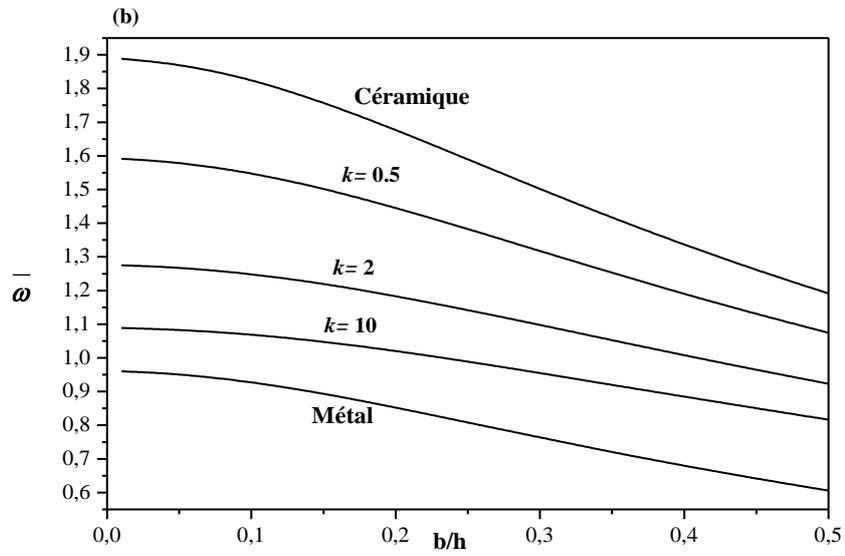
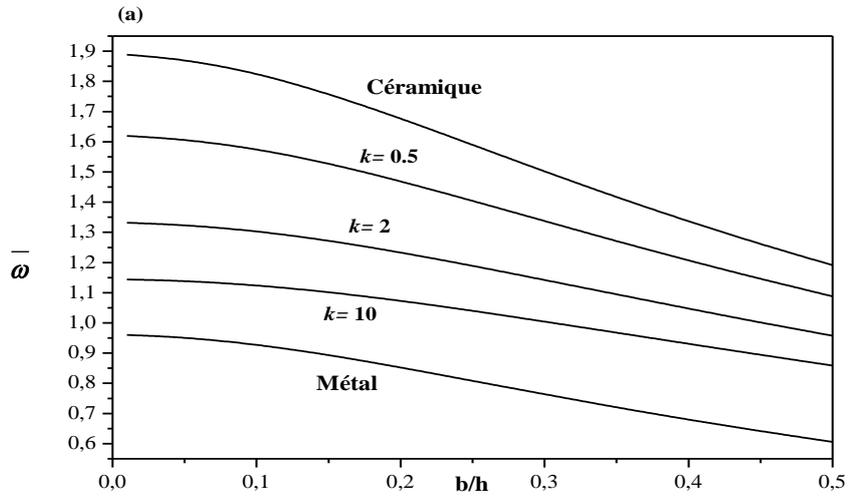


Figure IV.11 : Fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque sandwich en FGM avec un cœur homogène rigide: (a) Plaque (1-2-1). (a) Plaque (2-2-1).

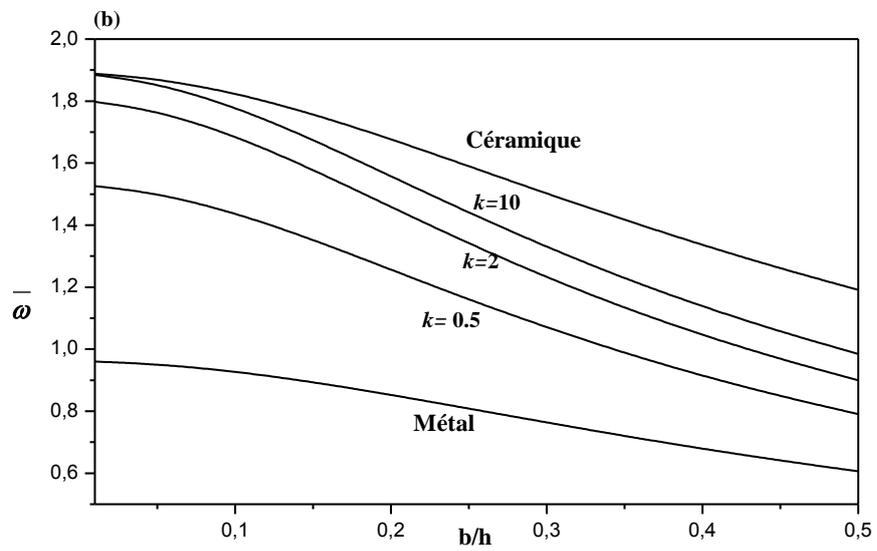
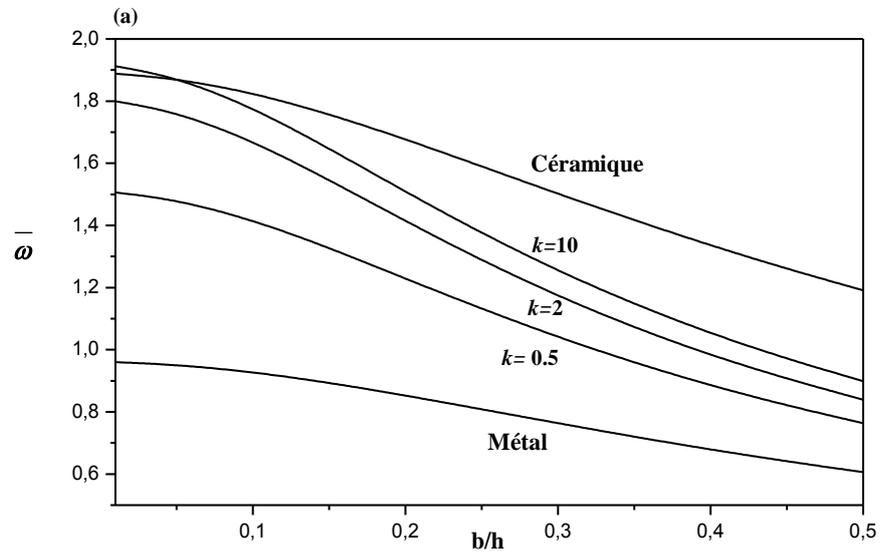


Figure IV.12: Fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque sandwich en FGM avec un cœur homogène souple: (a) Plaque (1-2-1). (a) Plaque (2-2-1).

IV.4. Conclusion

Une nouvelle théorie d'ordre élevé avec prise en compte de « **Thickness Stretching Effect** » par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements a été développée pour le calcul du comportement statique et en vibration libre des plaques sandwich en FGM. La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe des puissances virtuelles. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

En dissociant le déplacement transversal $w(x, y, z)$ en trois composants à savoir : la flèche pure de la plaque $w_b(x, y)$, la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement $w_s(x, y)$ et de la flèche due à l'effet Stretching $w_{st}(x, y, z)$, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est réduit à seulement cinq inconnus, contrairement au autres théories où le nombre de inconnus est six ou plus dans le cas ou on prend en compte de « **l'effet stretching** ».

Toutes les études comparatives ont montré que la fréquence naturelle, la flèche, les contraintes obtenues par la présente théorie ($\varepsilon_z \neq 0$) (cinq inconnues) et la théorie exacte d'élasticité [109] et la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement avec ($\varepsilon_z \neq 0$) développée NEVES [108] (neuf inconnus) sont presque identiques. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et elles peuvent ainsi améliorer le coût de calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

On peut conclure que l'inclusion « **l'effet stretching** » augmente la rigidité de la plaque FGM, et, par conséquent, conduit à une réduction des déplacements dans la plaque, une caractéristique importante et souhaitable dans la conception structurelle.

Enfin, on peut dire que la présente théorie hyperbolique de déformation de cisaillement avec la prise en compte de l'effet « **l'effet stretching** » est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour la simulation du comportement statique et vibratoire des structures sandwich en matériaux à gradient de propriétés.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les structures sandwich en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Cette thèse présente les activités de recherche liées à l'analyse du comportement statique de la flexion et de la vibration libre des plaques épaisses « sandwich » en matériau à gradient de propriétés « FGM ». La principale problématique qui est traitée correspond à l'étude de l'influence de la prise en compte de la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$) sur la réponse de la plaque sandwich en flexion et en vibration libre. Une nouvelle théorie d'ordre élevé avec prise en compte de « **Thickness Stretching Effect** » par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements a été développée pour le calcul du comportement mécanique et vibratoire des plaques « sandwich » en FGM.

La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature qui prennent en compte la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$).

En dissociant le déplacement transversal $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$ en trois composants à savoir : la flèche pure de la plaque $w_b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la flèche induite par l'effet de la déformation de cisaillement $w_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et de la flèche due à l'effet Stretching $w_{st}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est réduit à seulement cinq inconnues, contrairement aux autres théories dont le nombre d'inconnues est six ou plus dans le cas où on prend en compte « l'effet stretching ».

Toutes les études comparatives ont montré que la fréquence naturelle, la flèche, les contraintes obtenues par la présente théorie ($\varepsilon_z \neq 0$) (cinq inconnues) et la théorie exacte d'élasticité (3D) et les théories l'ordre élevé de déformation de cisaillement avec ($\varepsilon_z \neq 0$) sont presque identiques. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le coût du calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

On peut conclure que l'inclusion de « **l'effet stretching** » augmente la rigidité de la plaque FGM, et, par conséquent, conduit à une réduction des déplacements dans la plaque, donc une caractéristique importante et souhaitable dans la conception structurelle.

Enfin, on peut dire que la présente théorie hyperbolique de déformation de cisaillement avec la prise en compte de « **l'effet stretching** » est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour la simulation du comportement statique en vibratoire des structures sandwich en matériaux à gradient de propriétés. Cette théorie est particulièrement bien prête à la simulation pour les éléments finis, mais aussi pour d'autres méthodes numériques utilisant le calcul symbolique pour les problèmes de flexion des plaques, et ainsi l'utilisation de la présente théorie des plaques avec la prise en compte de la déformation normale.

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à cinq variables avec la prise en compte de « **l'effet stretching** » pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dû à la température.

Finalement, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans la thématique du développement de nouvelles théories de plaques et poutres pour le calcul des structures en matériau FGM soumises à des différents types de sollicitations.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [2] M. Savoia., J.N. Reddy, Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608, 1995.
- [3] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77, 1945.
- [4] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [5] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [6] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [7] Srinivas, S., Joga, C. V., and Rao, A. K. (1970a). “Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates.” *Int. J. Solids Struct.*, 6, 1463–1481.
- [8] Srinivas, S., Joga, C. V., and Rao, A. K. (1970b). “Exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates.” *J. Sound Vibrat.*, 12, 187–199.
- [9] Zenkour A. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch. Appl. Mech.* 77(4), 197–214 (2007).

- [10] Zenkour A.M, Alghamdi N.A. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, *J. Materials Science* 43 (2008) 2574-2589.
- [11] E. Carrera, S. Brischetto, Cinefra, M., Soave, M., Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells, *Composites: Part B.*, 42 (2011) 123–133.
- [12] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares, A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Composites: Part B.* 43 (2012) 711 – 725.
- [13] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [14] Navid Saeedi. Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues, PhD thesis, Université de Paris Est, France, 2012.
- [15] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. Method of producing a functionally gradient material. U.S. Patent 4571099, 1988.
- [16] Kawasaki A., Watanabe R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, 8842(95):73–83, 1997.
- [17] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [18] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.
- [19] Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [20] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan

- [21] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [22] M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997.
- [23] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [24] H. Okamura, State of the art of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [25] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [26] Zeng Y., Jiang D., Watanabe T., Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 83 (12): 2999–3003, 2000.
- [27] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [28] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [29] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [30] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [31] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.

- [32] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, 1983.
- [33] G. Kirchhoff. Uber das gleichwicht und die bewegung eine elastischen schiebe. Z Angew Math, 40:51–88, 1850.
- [34] A. E. H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition edition, 1927.
- [35] J. M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. Journal of Applied Mechanics, 40:302–304, 1973.
- [36] M. Levinson. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. Mechanics Research Communications, 7:343–350, 1980.
- [37] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [38] R. B. Nelson and D. R. Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates. Journal of Applied Mechanics, 41:177–183, 1974.
- [39] K. H. Lo, R. M. Christensen, and E. M.Wu. A higher-order theory of plate deformation. part I: Homogeneous plates. Journal of Applied Mechanics, 44:663–668, 1977a.
- [40] K. H. Lo, R. M. Christensen, and E. M.Wu. A higher-order theory of plate deformation. part II: Laminated plates. Journal of Applied Mechanics, 44:669–676, 1977b.
- [41] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.
- [42] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [43] K. P. Soldatos and T. Timarci. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. Composite Structures, 25:165–171, 1993.
- [44] J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares. A new higher order shear deformation

theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43:1489–1499, 2012.

[45] CASTEL A, Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants. Thèse de Doctorat, l'Université de Bourgogne, France, 2013.

[46] Maurice LÉVY. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3.3 (1877), p. 219–306.

[47] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». en. In : *Journal of Composite Materials* 3.3 (juil. 1969), p. 398–411. ISSN : 0021- 9983, 1530-793X.

[48] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.1 (jan. 1970), p. 20–34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.

[49] S. SRINIVAS et A.K. RAO. « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.11 (nov. 1970), p. 1463–1481. ISSN : 0020-7683.

[50] K. J. REDDY, K. VIJAYAKUMAR et K. S. NAGARAJA. « New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates ». In : *AIAA Journal* 29.11 (nov. 1991), p. 1960–1966. ISSN : 0001-1452, 1533-385X.

[51] Ahmed K. NOOR et W. Scott BURTON. « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 59.4 (1992), p. 868. ISSN : 00218936.

[52] Koizumi M. The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater* 1993;34:3–10.

[53] 135. Jha, D.K., Kant, T. and Singh, R.K. (2013), A critical review of recent research on functionally graded plates, *Composite Structures* 96, 833-849.

[54] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids* 1965;13:213–22.

- [55] Hashin Z. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. *J Compos Mater* 1968;4:284–300.
- [56] Bhaskar K, Varadan TK. Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. *ASME J Appl Mec* 2001;68(4):660–2.
- [57] Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V. Micromechanical models for graded composite materials. *J Mech Phys Solids* 1997;45:1281–302.
- [58] Z.-H. Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895. 2002.
- [59] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29(143), 1962.
- [60] Hashin Z, Rosen BW. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *ASME J Appl Mech* 1964;4:223–32.
- [61] Y. Ootao.,Y. Tanigawa, Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146, 2004.
- [62] J. Sladek., V. Sladek., Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504, 2003.
- [63] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct* 2003;40:7181–96.
- [64] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plate by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites Part B* 2004;35:685–97.
- [65] B. V. Sankar., J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232, 2002.
- [66] B. V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696, 2001.

- [67] A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539,2003.
- [68] H.K. Ching., S.C. Yen, Transient thermoelastic deformation of 2-d functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply, *Compos. Struct*; 73 (4): 381–393, 2006.
- [69] J. N. Reddy, Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Methods Eng*; 47: 663-684, 2000.
- [70] J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.
- [71] S. S.Vel., R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433, 2002.
- [72] M. Kashtalyan, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.
- [73] Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part I: Analysis, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3657-3674, 2006.
- [74] Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3675-3691, 2006.
- [75] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflections and stresses, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5224–5242, 2005.
- [76] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5243–5258, 2005.
- [77] J. Woo., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.

- [78] J.-Q. Tarn, Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206, 2001.
- [79] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermoelastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials, *AIAA J*; 40 :162–169,2002.
- [80] R. Javaheri., M.R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading, *ZAMM*, 82 (4): 277–283, 2002.
- [81] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher-order theory, *J. Therm. Stresses*; 25 (7): 603–625, 2002.
- [82] K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.
- [83] J. Yang, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175, 2005.
- [84] J. Yang, J., H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.
- [85] H. Matsunaga, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86, 2009.
- [86] X. Zhao., YY. Lee., K.M. Liew, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*; 90 (2): 161–71, 2009.
- [87] A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.
- [88] J.-S. Park., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.
- [89] Hashemi Sh-H, Es'haghi M, Karimi M. Closed-form vibration analysis of thick

annular functionally graded plates with integrated piezoelectric layers. *Int J Mech Sci* 2010;52:410–28.

[90] Hashemi Sh-H, Khorshidi K, Es'haghi M, Fadaee M, Karimi M. On the effects of coupling between in-plane and out-of-plane vibrating modes of smart functionally graded circular/annular plates. *Appl Math Model* 2012;36:1132–47.

[91] Shahrjerdi A, Mustapha F, Bayat M, Sapuan SM, Zahari R, Shahzamanian MM. Natural frequency of F.G. rectangular plate by shear deformation theory. *IOP Conf Ser Mater Sci Eng* 2011;17(1):1–6.

[92] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct* 2011;93:2826–32.

[93] Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nucl Eng Des* 2012;250:8–13.

[94] Shen H-S, Wang Z-X. Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012;94 (7):2197–208.

[95] Khorramabadi MK, Najafizadeh MM, Shahraki AJ, Khazaeinejad P. Effect of shear theories on free vibration of functionally graded plates. *World Acad Sci Eng Technol* 2008;48:216–21.

[96] Mechab, I., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Belhadj, H.A., Adda Bedia, E.A. (2010). “A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates.” *Acta Mech Sin.*, 26, 941–949.

[97] Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda bedia, E.A (2011). “Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates.” *J. Thermal Stresses*, 34, 315–334.

- [98] Ameer, M., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011). "A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations." *KSCE Journal of Civil Engineering.*, 15(8), 1405-1414.
- [99] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda.Bedia, E.A. (2011). "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate." *International Journal of Mechanical Sciences.*, 53, 237–247.
- [100] Benachour, A., Tahar, H.D., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A (2011). "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient." *Composites: Part B.*, 42, 1386–1394.
- [101] Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011). "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory." *Applied Mathematics and Mechanics.*, 32(7), 925–942.
- [102] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia. E.A. (2013). "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates." *Aerospace Science & Technology.*, 24, 209 – 220.
- [103] Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M. (2011). "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells." *Composites: Part B.*, 42, 123–133.
- [104] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [105] A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.
- [106] J.-S. Park., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.
- [107] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992
- [108] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, et al. Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering Zig-Zag and warping

effects. *Adv Eng Software* 2012; 52: 30–43.

[109] Li Q, Iu VP and Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008; 311: 498–515.