

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil
Laboratoire des Matériaux et Hydrologie**



THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Par :

MERDACI SLIMANE

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & matériaux**

Intitulé de la thèse

**Solution Améliorée pour L'analyse de la Flexion Statique des Plaques
Rectangulaires Épaisses en FGM**

Soutenue le

Composition de jury :

Mr E.A. ADDA BEDIA	Président	Professeur	UDL-Sidi Bel Abbès
Mr S.BENYOUCEF	Directeur de thèse	MCA	UDL- Sidi Bel Abbès
Mr A. TOUNSI	Examineur	Professeur	UDL- Sidi Bel Abbès
Mr M. AMEUR	Examineur	MCA	ENSET-Oran
Mr K.AMARA	Examineur	MCA	CU Ain Temouchent
Mr H.T.DAOUJJI	Examineur	MCA	Université de Tiaret

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de matériaux et hydrologie (LM&H) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbas.

Je remercie chaleureusement le maître de conférence Monsieur **S.BENYOUCEF**, directeur de la thèse qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

Je tiens aussi à rendre hommage au Professeur **A.ADDA BEDIA**, enseignant à l'université Djilali Liabes de Sidi bel Abbas et directeur du laboratoire, pour ces conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés et d'exprime également toute ma reconnaissance au soutien scientifique important qui m'a apporté à mon travail de recherche. Par conséquent, Je lui exprime mon honneur ainsi que ma gratitude d'être président de jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également au Monsieur le Professeur **A.TOUNSI** de l'université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès pour ses conseils scientifiques précieux, son suivi et ses conseils avisés qui ont facilité l'aboutissement de ce travail. et d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens également à remercier les maîtres de conférences Messieurs **M.AMEUR**, **K.AMARA** et **H.T.DAOUDJI** qui ont accepté d'examiner mon travail.

Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LM&H) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel abbés avec qui j'ai passé d'agréables moments. A toute ma famille et à tous mes collègues du département de Génie Civil, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

الخلاصة

الخلاصة

الخلاصة

الغاية من هذا العمل هو القيام بدراسة حديثة و مبسطة لسلوك ثابت في انحناء الصفائح السمكية المركبة من المواد المتدرجة الخاصة. كما أن هذه الصفائح المراد دراستها متكونة من مادتين، السيراميك و المعادن و هذه الصفائح المتكونة من المادتين السالف ذكرهما طبقتها تختلف من خلال سمك الصفائح.

المواد المكونة للصفائح يفترض أن تكون موحدة الخواص. إن توزيع المواد، و معامل المرونة، و معامل التمدد الحراري يختلف باختلاف قانون أس (أس- المواد المتدرجة الخاصة) اعتمادا على جزء متعلق بوحدة الحجم المركبة. والطبقة الأساسية هي دائما متجانسة ومكونة من المادة المتساوية الخصائص في جميع الجهات من السيراميك.

من خلال هذه الدراسة تم اقتراح نموذجين جديدين RSDT1 و RSDT2 (نظرية الصفائح) في مجال الصفائح وذلك لتحديد مجال انتقال هذه الأخيرة وكذا مدى تحملها للضغط لدراسة الانحناء الثابت للوحات المستطيلة للمواد المتدرجة الخاصة.

خلافًا لغيرها من الأعمال، يستند هذا النموذج على وضع نظرية جديدة ذات ترتيب عالي لمتغيرين تتطلب أربعة مجاهل بدلا من خمسة مجاهل في الحالة الكلاسيكية.

كما انه أجريت إعدادات لتحديد مختلف العوامل التي تحكم الانحناء الثابت للوحات المستطيلة للمواد المتدرجة الخاصة.

كلمات مفتاحية : الصفائح السمكية ; المواد المتدرجة الخاصة ; الانحناء الثابت ; نظرية ذات ترتيب عالي.

RESUME

RESUME

Résumé

Le but de ce travail, consiste à proposer un nouveau modèle simplifié afin d'étudier le comportement en flexion statique des plaques en **FGM** (Matériaux à gradués évalués). La plaque étudiée est constituée de deux matériaux ; la céramique (Al_2O_3) et le métal (Al). Ces deux matériaux constituent différents types de plaque en fonction de leurs épaisseurs.

Les matériaux constituant la plaque sont supposés dans un état isotrope. La distribution du matériel, le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et les coefficients de dilatation thermique sont supposés varier selon une distribution en loi de puissance (**P-FGM**) en fonction de la fraction volumique des constituants. L'âme de la plaque est constituée d'un matériau isotrope en céramique.

Deux modèles de déplacement (**RSDT1** et **RSDT2**) sont proposés pour étudier la flèche et les contraintes des plaques sandwiches en **FGM** sous sollicitation de flexion.

Contrairement aux autres travaux de littérature, les modèles développés sont basés sur une nouvelle théorie d'ordre élevée à deux variables qui nécessite quatre inconnus au lieu de cinq dans le cas classique.

Une étude paramétrique sera menée afin de déterminer les différents facteurs régissant la flexion statique des plaques en **FGM**.

Mots clés : Plaques épaisses, FGM, Flexion statique, Théorie à ordre élevé.

ABSTRACT

ABSTRACT

Abstract

Two refined displacement models, **RSDT1** and **RSDT2**, are developed for a bending analysis of functionally graded sandwich plates. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The developed models are variationally consistent, have strong similarity with classical plate theory in many aspects, do not require shear correction factor, and give rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress-free surface conditions. The accuracy of the analysis presented is demonstrated by comparing the results with solutions derived from other higher-order models. The functionally graded layers are assumed to have isotropic, two-constituent material distribution through the thickness, and the modulus of elasticity, Poisson's ratio of the faces, and thermal expansion coefficients are assumed to vary according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic ceramic material. Numerical results for deflections and stresses of functionally graded metal-ceramic plates are investigated.

Keywords: thick plate, FGM, static bending, theory to high order.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

Table des matières

الخلاصة

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale.....01

CHAPITRE I : Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés FGM

I-1 Introduction.....04

I-2 Concept des matériaux à gradients évalués FGM.....05

I-3 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....07

I-4 Revue des méthodes d'élaboration des FGM.....08

I-4-1 Coulage En Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade).....09

I-4-2 Coulage Séquentiel En Barbotine (Slip Casting).....10

I-4-3 Dépôt Par Electrophorèse.....11

I-4-4 Compaction Sèche Des Poudres.....12

I-4-5 Projection Plasma.....12

I-4-6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....13

I-4-7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....13

I-4-8 Frittage En Infiltration.....14

I-4-9 Frittage Laser Différentiel.....15

I-4-10 Implantation Ionique (Sputtering).....15

Solution Améliorée pour L'analyse de la Flexion Statique
des Plaques Rectangulaires épaisses en FGM

TABLE DES MATIERES

I-5 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM.....	16
I-6 Simulation analytique et numérique d'un matériau à gradient évalué.....	16
I-7 Gradient matériel des plaques FGM.....	17
I-7-1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	18
I-7-2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	19
I-7-3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	20
I-8 Conclusion.....	21

CHAPITRE II : Investigation sur les Différentes Théories des Plaques

II-1 Introduction.....	22
II-2 Description des plaques.....	22
II-3 Modèles classiques	23
II-3-1 Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques.....	23
II-3-1-1 Principe de Saint venant.....	23
II-3-1-2 Principe de Navier Bernoulli généralisé.....	23
II-3-2 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT).....	25
II-3-3 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT).....	26
II-3-4 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Theory HSDT).....	27
II-4 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	28
II-5 Théorie de zig-zag.....	29

Solution Améliorée pour L'analyse de la Flexion Statique
des Plaques Rectangulaires épaisses en FGM

TABLE DES MATIERES

II-6 Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites et FGM.....	30
II-6-1 Les structures composites stratifiées.....	30
II-6-2 Les structures type FGM et FGM sandwich.....	31
II-7 Conclusion.....	36

CHAPITRE III : Analyse des Plaques Sandwiches Rectangulaires Epaissses de Type FGM Soumises à la Flexion Statique

III-1 Introduction.....	37
III-2 Hypothèses de la théorie des plaques FGM.....	37
III-3 Formulation théorique.....	38
III-3-1 Configuration géométrique.....	38
III-3-2 Propriétés des matériaux.....	39
III-3-2-1 Plaque sandwich en FGM : « Métal/Céramique/Métal ».....	40
III-4 Champ du déplacement équations constitutives.....	43
III-4-1 Tenseur des déformations.....	43
III-4-2 Tenseur des contraintes.....	44
III-5 Équations d'équilibres.....	44
III-6 Détermination des coefficients de rigidité.....	46
III-7 Formulation des équations différentielles.....	47
III-8 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée.....	48
III-9 Conclusion.....	50

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE IV : Résultats et Discussions

IV-1 Introduction.....	51
IV-2 Validation analytique du modèle proposé.....	53
IV-3 Résultats numériques et discussions.....	55
IV-4 Conclusion.....	70
Conclusion générale.....	71
Références Bibliographiques.....	73

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I-1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	06
--------------------	---	----

Chapitre IV

Tableau IV-1	Modèles de déplacement.....	52
Tableau IV-2	Effet du rapport (a / b) de l'allongement sur la flèche (\bar{w}) pour une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire et ($k= 2$) pour les différentes méthodes.....	53
Tableau IV-3	Comparaison entre les différents modèles de calcul des contraintes normale \bar{s}_x d'une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire.....	54
Tableau IV-4	Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich en FGM	55
Tableau IV-5	valeur des déplacements (\bar{w}), et l'effet de la fraction volumique « k » par rapport aux différentes dimensions des plaques sandwich en FGM	57
Tableau IV-6	Effet du rapport (a / b) sur la dimension des plaques sandwiches FGM et ($k = 2$).....	59
Tableau IV-7	Effets de fraction volumique sur la contrainte axiale \bar{s}_x de la plaque sandwich FGM	60
Tableau IV-8	Effets de la fraction volumique sur les contraintes transversales de cisaillement \bar{t}_{xz} de la plaque sandwich FGM	61

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

Liste des figures

Chapitre I

Figure I-1	Modèle d'un FGM.....	04
Figure I-2	La variation de la composition d'un FGM.....	06
Figure I-3	Protection thermique.....	07
Figure I-4	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996].....	07
Figure I-5	La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].....	08
Figure I-6	Principe de la Méthode de Coulage en Bande [Will, 1976].....	09
Figure I-7	Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux [Aldo 2002].....	11
Figure I-8	Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [Ichikawa 2000].....	12
Figure I-9	Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto 1999].....	14
Figure I-10	Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel [Yuki et al, 1990].....	15
Figure I-11	Propriétés de la plaque FGM.....	18
Figure I-12	la variation du module de Young de la plaque P-FGM.....	19
Figure I-13	la variation du module de Young de la plaque S-FGM.....	20
Figure I-14	Cas de la variation du module de Young d'une plaque céramique-métal de type E-FGM.....	20

LISTE DES FIGURES

Chapitre II

Figure II-1	Coque ou coupole.....	22
Figure II-2	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff ([Reddy 1997]).....	25
Figure II-3	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin ([Reddy 1997]).....	26
Figure II-4	Illustration de la plaque d'ordre élevé ([Reddy 1997]).....	27
Figure II-5	Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé [Carrera 2004].....	30
Figure II-6	Géométrie de la poutre FGM avec les possibilités de la variation de céramique et du métal à travers l'épaisseur [Kadoli 2008].....	33
Figure II-7	Description géométrique de la déformation de la poutre FGM à travers de l'épaisseur [Kadoli 2008].....	34
Figure II-8	Géométrie d'une plaque typique de FGM [Sarfaraz 2009].....	34
Figure II-9	Géométrie de la plaque FGM sandwich [Zenkour 2010].....	35

Chapitre III

Figure III-1	La géométrie de la plaque sandwich rectangulaire FGM avec une épaisseur uniforme de coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	38
Figure III-2	Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM. (Les couches supérieure et inférieure en Métal et la couche centrale en céramique).....	39
Figure III-3	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations des plaques sandwiches en FGM.....	42

LISTE DES FIGURES

Chapitre IV

- Figure IV-1** Comparaison entre les différentes méthodes pour déterminer les déplacements (\bar{w}) d'une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire.....53
- Figure IV-2** Variation des valeurs de l'épaisseur (z/h) à travers les contraintes normales (\bar{S}_x) pour les différents modèles d'une plaque isotrope.....54
- Figure IV-3** Variation des valeurs de « k » à travers le déplacement (\bar{w}) pour les différents types de plaque de sandwich en **FGM**.....56
- Figure IV-4** Influence de l'épaisseur (a/h) pour diverses valeurs de « k » et différents types des plaques sandwiches **FGM**.....64
- Figure IV-5** Variation de la contrainte axiale \bar{S}_x , à travers l'épaisseur des tôles pour différentes valeurs de k et différents types des plaques sandwich **FGM**.....67
- Figure IV-6** Variation de la contrainte de cisaillement transversale \bar{t}_{xz} par l'épaisseur de la plaque pour différentes valeurs de k et différents types des plaques sandwich **FGM**.....69

LISTE DES NOTATIONS

LISTE DES NOTATIONS

Liste des notations

E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du méta
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
f_x, f_y, f_z	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\gamma(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
s_x, s_y, s_z	Contraintes normales
t_{xy}, t_{yz}, t_{yx}	Contraintes de cisaillement
e_x, e_y	Déformation dans la direction x, y et z
g_{xy}, g_{yz}, g_{yx}	Déformations de distorsion
du, dv	Champ virtuel de déplacement
dw_b, dw_s	Champ virtuel de déplacement
dW_{int}	Travail virtuel intérieur

LISTE DES NOTATIONS

γ_x	Rotation due à la déformation transversale ?
w_b	Composantes de flexion
w_s	Composantes cisaillement
u_b, v_b	Les composantes de flexions
u_s, v_s	Les composantes de cisaillement
n	Nombre des couches
k	Indice de fraction volumique
$P^{(n)}$	La propriété matérielle effective de la couche
P_m	Propriétés des faces supérieures et inférieure correspondant métal
P_c	Propriétés de céramique
N	Efforts normaux de membrane
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moment de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur.
m, n	Nombres de mode.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
W	La surface supérieure.
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels
∂	Dérivée partielle

LISTE DES NOTATIONS

i, j	Nombres naturels.
$q(x, y)$	La force extérieure
q_0	L'intensité de la charge
$[K]$	Matrice symétrique
$\{D\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{F\}$	Le vecteur des efforts généralisés
\bar{w}	Le déplacement transversal adimensionnel
\bar{s}_x	Contrainte axiale adimensionnel
\bar{t}_{xz}	Contrainte de cisaillement adimensionnel
\bar{z}	Épaisseur de coordonnée

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Ces dernières années, les structures sandwiches en matériaux à gradients évalués (Functionally Graded Materials, **FGM**) ont attirés l'attention considérable dans des nombreuses applications dans l'ingénierie. Les matériaux à gradients évalués (**FGM**), un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ont suscités beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée.

Ces structures présentent des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et à la corrosion et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée.

Le but de ce travail l'analyse d'une plaque constituée de **FGM**, matériaux à gradients évalués, dans lequel les propriétés du matériau varient en continu à travers l'épaisseur, est devenue populaire en diverses applications. Certains inconvénients des plaques composites multicouches, résultant du brusque changement de propriétés matériel aux interfaces entre les couches adjacentes ont été surmontés, tels que la concentration des contraintes résiduelles, délaminage, fissuration de la matrice. Par conséquent, cette catégorie des plaques rectangulaires épaisses en **FGM** peuvent être plus stable que les plaques composites multicouches généralement appliquée avec succès dans diverses industries. Ainsi le développement de méthodologies théoriques et la modélisation numérique pour l'analyse de cette classe des plaques **FGM** a attiré une attention considérable des chercheurs.

INTRODUCTION GENERALE

La détermination des contraintes (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différentes entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

L'objectif de ce travail est de proposer deux nouveaux modèles basés sur une approche analytique simple et efficace pour l'étude et l'analyse statique des plaques rectangulaires épaisses en **FGM**. La première partie du travail consiste à rassembler de manière systématique le maximum des données bibliographiques disponibles dans la littérature. Puis en s'appuyant sur cette base de données, on étudiera le comportement des plaques **FGM**. Pour cela, le manuscrit s'articule sur quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on définit d'une manière générale sur la nouvelle classe de composites désignés par les matériaux à gradients évalués **FGM**. Aussi, nous présenterons les progrès réalisés en matière de recherche scientifique ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne.

Dans le deuxième chapitre une étude bibliographique concernant les différentes théories des plaques est présentée. Une synthèse bibliographique sur les différents modèles de théories des plaques qui inclut ou non le cisaillement transversale, en plus une comparaison entre les théories classiques et les théories d'ordre élevé est présentée.

Quant en troisième chapitre, il est consacré à l'étude de la flexion statique des plaques épaisses sandwiches en **FGM**. Pour cela, deux nouveaux modèles d'ordre élevé à deux variables seront utilisés pour décrire le champ de déplacement.

INTRODUCTION GENERALE

Au quatrième chapitre, une validation des modèles proposés est exposée en premier lieu et ce en comparant les résultats avec ceux des travaux issus de la littérature. par la suite une étude paramétrique est réalisée afin de déterminer les différents facteurs régissant la flexion statique des plaques en **FGM**.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A

GRADIENTS ÉVALUES FGM

I-1 Introduction

Les matériaux à gradients évalués **FGM** représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux ont été définies au 21^{ème} siècle. Ils sont développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux ultras hautes températures.

Les matériaux à gradients évalués **FGM**, sont des matériaux composites produits en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé **Figure I-1**. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs capacités à diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [Zhong et al.2007]. La variation continue des propriétés mécaniques donne au matériau un comportement optimisé. Les **FGM** sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [Baron et al. 2008].

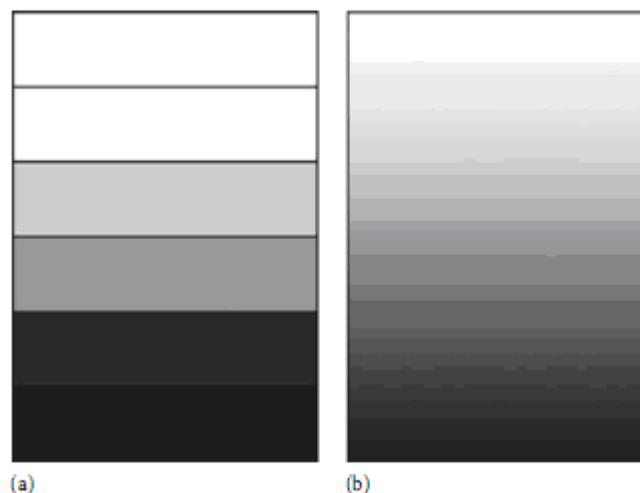


Figure I-1 : Modèle d'un FGM

I-2 Concept des matériaux à gradients évalués FGM

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient évalué. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient évalué dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le **FGM** consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les **FGM** sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux à des caractéristiques mécaniques contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux **FGM** [Kokini 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des « **FGM** » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le **tableau I-1**.

Tableau I-1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée; - Très bonne ténacité.

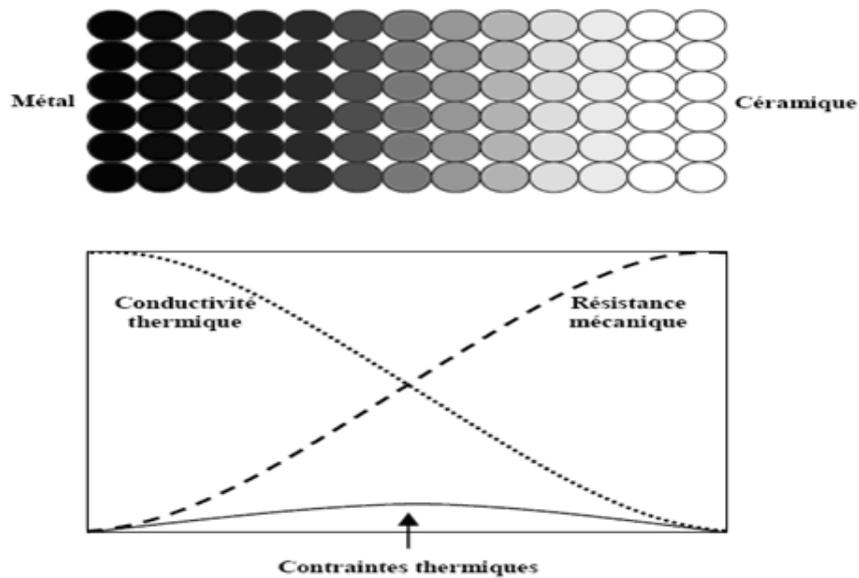


Figure I-2 : La variation de la composition d'un FGM

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau **FGM** est illustré dans la **figure I-2**, il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des **FGM**. Dans certains cas, on peut avoir un **FGM** constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

La **figure I-3** montre les concentrations de contraintes dans les barrières thermiques au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Qui indique aussi comment un **FGM** peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique.

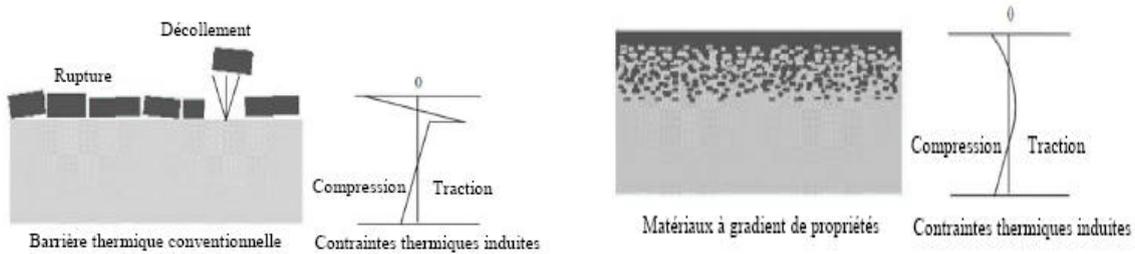


Figure I-3 : Protection thermique.

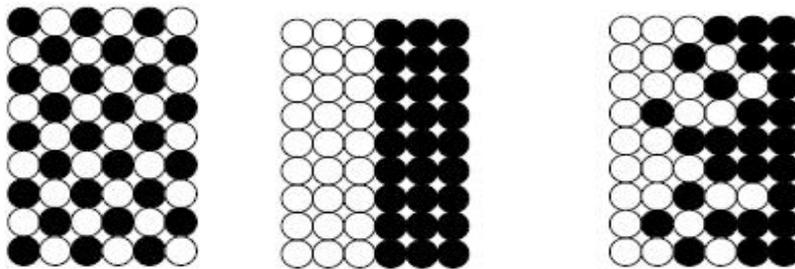
I-3 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les **FGM** sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les **FGM** des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la **figure I4** [Koizumi 1992]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des **FGM**. Dans certains cas, on peut avoir un **FGM** constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constitutifs: céramique ○ métal ● microporosité ◊ fibre *		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I-4 : Caractéristiques des matériaux composites **FGM** en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996].

yoshihisa, [Yoshihisa 2004] à établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient évalué (FGM) et les matériaux conventionnels (figure I-5). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent les matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui est composé du métal et de la céramique réuni les caractéristiques de la bonne conductivité thermique et mécanique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

Figure I-5 : La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].

I-4 Revue des méthodes d'élaboration des FGM

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux **FGM**. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de **FGM** pendant la consolidation [Kieback2003].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous,

I-4-1 Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières **figure I-6**. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25–1000mm).Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

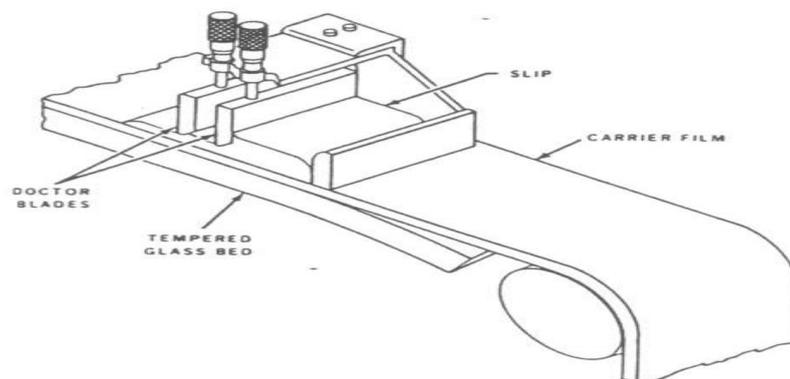


Figure I-6 : Principe de la Méthode de Coulage en Bande [Will, 1976].

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch 1986], [Boch 1987].

I-4-2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion de la plate (coulage classique [Moya1992]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I-4-3 Dépôt par Electrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des **FGM**, ce que on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dés lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique métal, WC/Co. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la **figure I-7**.

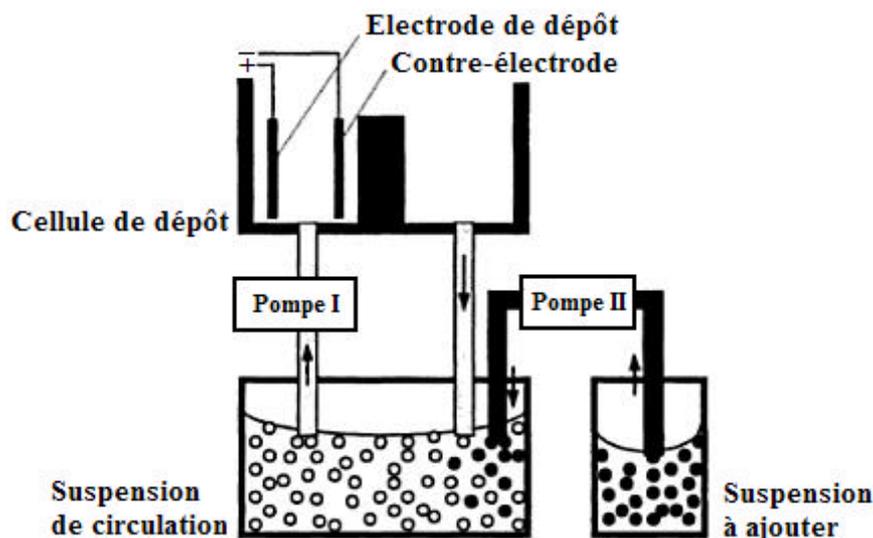


Figure I-7 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

[Aldo 2002].

I-4-4 Compaction Sèche Des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993].

I-4-5 Projection Plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 $^{\circ}\text{C}$ et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watremetz 2006]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [Omori et al 1998]. Ichikawa [Ichikawa 2000] a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le silicium (SiC) pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I-8.

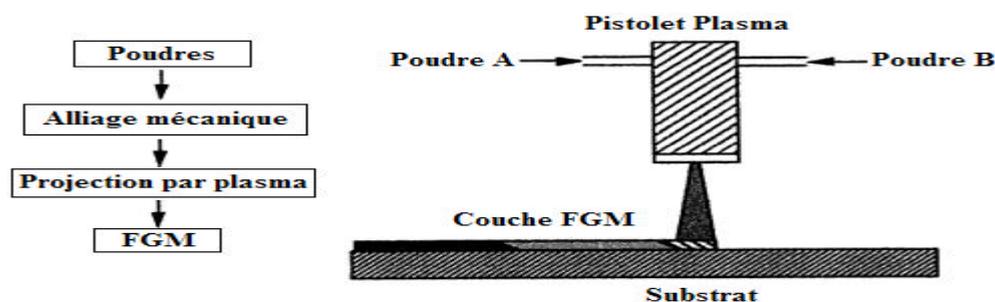


Figure I-8 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [Ichikawa 2000].

I-4-6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [Miyamoto 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto 1999]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le **FGM**. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

I-4-7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la **figure I-9**, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto 1999].

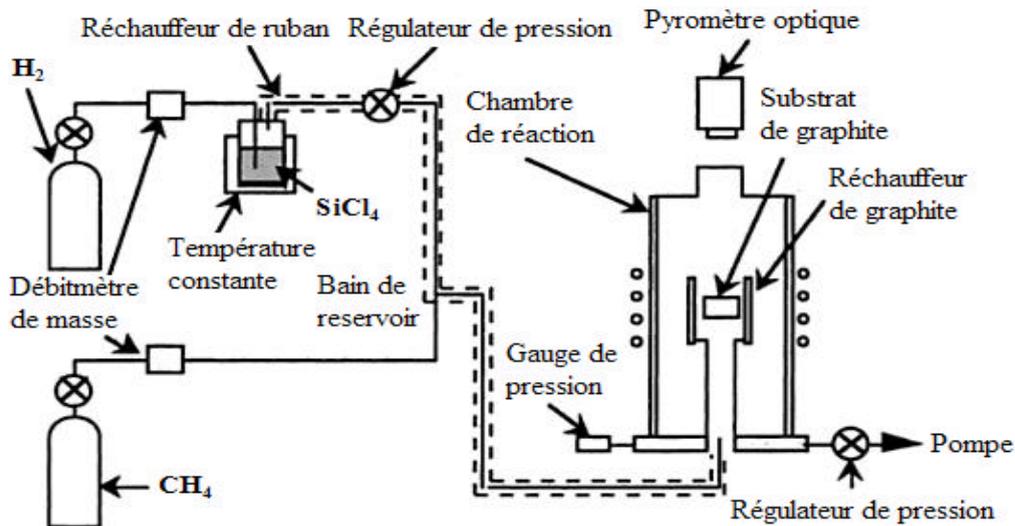


Figure I-9 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto 1999].

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - $SiCl_4$ - H_2) sont employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

I-4-8 Frittage En Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi 1990]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

I-4-9 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un **FGM** de PSZ/Mo. La **figure I-10**, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé. [Yuki et al, 1990].

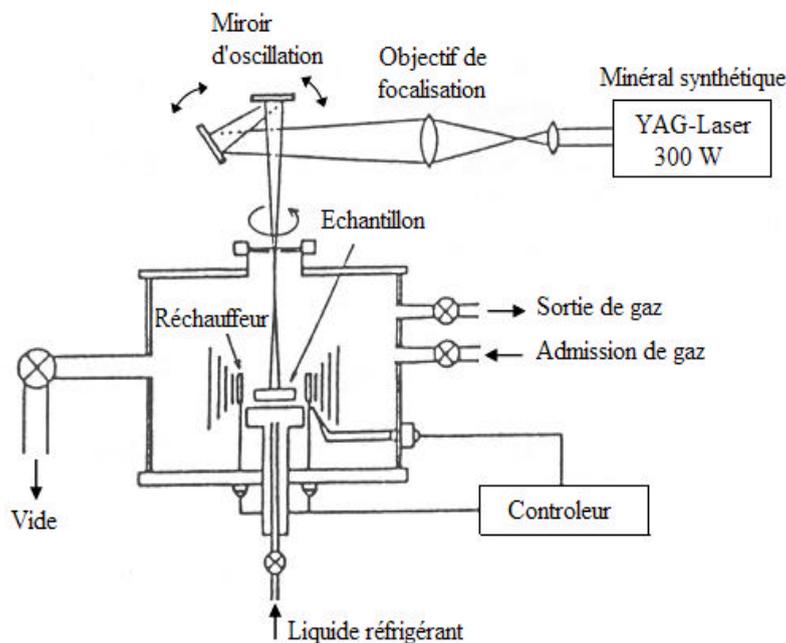


Figure I-10 : Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel [Yuki et al, 1990].

I-4-10 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des **FGM** permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\text{mm}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdi 1997].

I-5 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués **FGM** est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des **FGM** sont :

Génie civil : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

Aéronautique : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.

Chimique : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

Ingénierie : outils de coupe, éléments de moteur.

L'énergie nucléaire : composants des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

Électronique : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

Optiques : fibres optiques, lentilles.

Conversion d'énergie : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.

Matières biologiques : implants, peau artificielle,

Produits en générale : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

I-6 Simulation analytique et numérique d'un matériau à gradient évalué

Des méthodes analytiques ont été employées pour étudier les déformations, le comportement thermo-élastique et la réponse dynamique des matériaux à gradients évalués. [\[Rogers 1992\]](#) ont utilisé la méthode d'expansion asymptotique pour analyser les déformations tridimensionnelles des poutres non homogènes. Bien que les travaux d'analyse aient fourni beaucoup de l'idée des mécanismes de **FGM**, souvent l'application se fait uniquement aux géométries très spécifiques, conditions aux limites, les conditions de chargement et profils d'évaluation de fraction de volume.

En général, il est difficile d'obtenir une solution analytique pour les équations partiellement différentielle cela régissent la conduction bidimensionnelle de la chaleur, déformation thermomécanique et vibration à l'état d'équilibre des corps non homogènes avec l'évaluation bidirectionnelle.

Par conséquent, Nous devons recourir à des techniques numériques, telles que la méthode des différences finies est la méthode des éléments finis [Melenk 1996].

I-7 Gradient matériel des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués **FGM** peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multi phases dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un **FGM** sont les microstructures avec des macro-propriétés graduées sans interruption. Un **FGM** peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Considérant une plaque rectangulaire **figure I-11**. Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est dans la direction d'épaisseur. Les propriétés matérielles, module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure, sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z), \nu = \nu(z)$.

[Delale et Erdogan 1983] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque est constant. Cependant, le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la plaque **FGM** suivant une fonction de loi de puissance (**P-FGM**), une fonction exponentielle (**E-FGM**), ou avec une fonction sigmoïde (**S - FGM**).

I-7-1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

On assume que la fraction de volume du **P-FGM** suit une fonction de loi de puissance:

$$V^{(n)} = \frac{z + h/2}{h} \frac{0}{0}^k \quad (\text{I-1})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V^{(n)}$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque **P-FGM** peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang, 1995].

$$E(z) = V^{(n)} E_1 + E_2 [1 - V^{(n)}] \quad (\text{I-2})$$

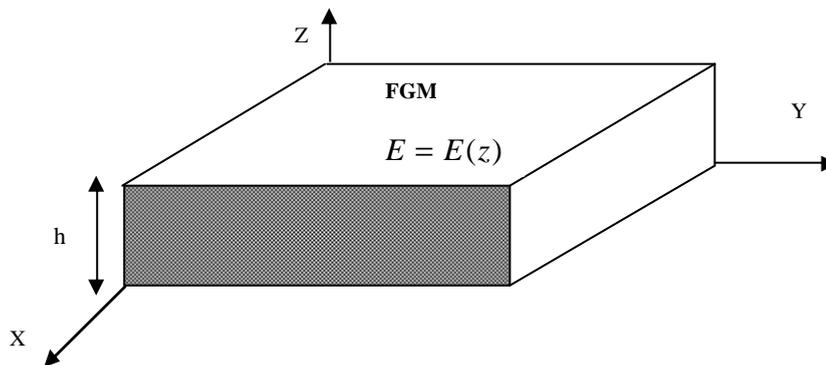


Figure I-11 : Propriétés de la plaque **FGM**.

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque **FGM**. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque **P-FGM** est représentée sur la **figure I-12**, il apparaît clairement que le module de Young change rapidement près de la plus basse surface pour $k > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieur pour $k < 1$.

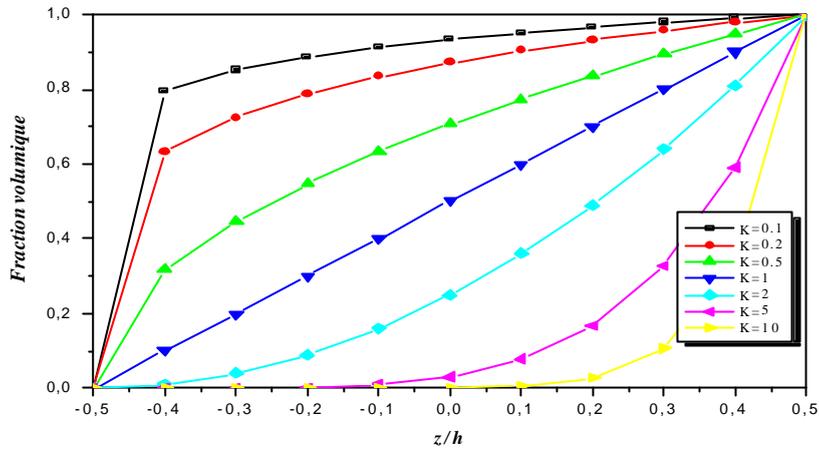


Figure I-12 : la variation du la fraction volumique de la plaque P-FGM.

I-7-2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas où on ajoute à la plaque P-FGM, une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l’interfaces où le matériau est continu mais changent rapidement [Lee et Erdogan, 1995; Bao et Wang, 1995]. Par conséquent, [Chung et chi 2001] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{zh/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I-3a}$$

$$V_2^{(n)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{zh/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I-3b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module du Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1^{(n)} E_1 + E_2 [1 - V_1^{(n)}] \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I-4a}$$

$$E(z) = V_2^{(n)} E_1 + E_2 [1 - V_2^{(n)}] \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I-4b}$$

La figure I-13 montre que la variation du module de Young des équations (a) et (b) représente des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

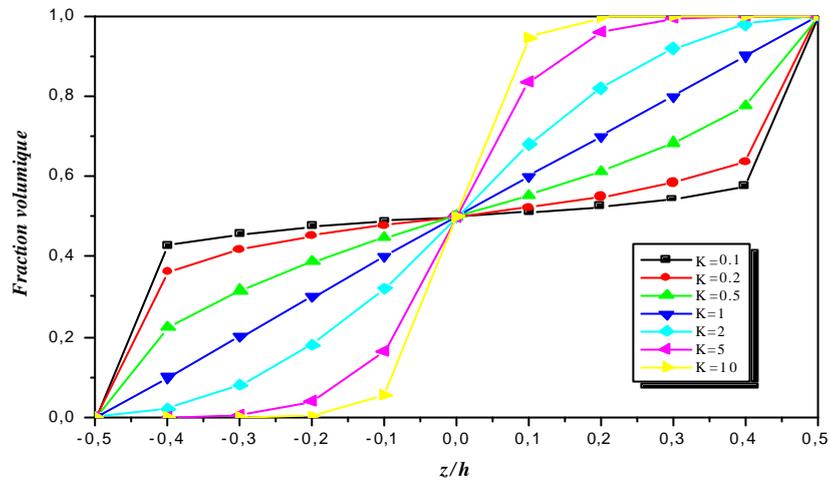


Figure I-13: la variation de la fraction volumique de la plaque S-FGM.

I-7-3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM comme suit [Delale et Erdogan, 1983].

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \tag{I-5}$$

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} . \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I-6}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I-14.

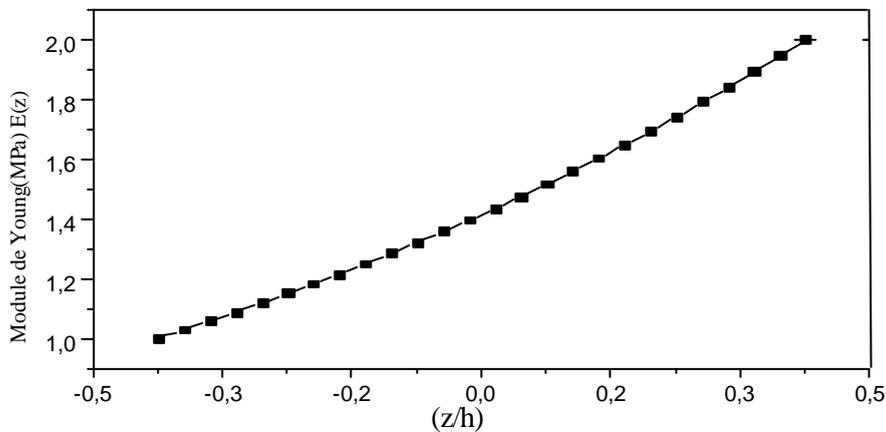


Figure I-14 : Cas de la variation du module de Young d'une plaque céramique-métal de type E-FGM.

I-8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synoptique sur les matériaux à gradients évalués «FGM». Un aperçu a été exposé sur le développement des FGM, leurs concepts, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication.

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire FGM utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microscopie et la composition matérielle.

Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrication avec une technique qui nécessitent l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beaucoup de recherches se sont intéressées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception avec les FGM.

L'objectif des recherches est de développer une méthodologie solide pour l'adaptation de la composition spatiale d'un matériau à gradient évalué lors de l'application d'une haute température ou haut flux de chaleur.

Le chapitre suivant présente une investigation concernant les différentes méthodes théoriques du calcul des plaques rectangulaires et aborde les théories à ordre élevée.

CHAPITRE II

INVESTIGATION SUR LES DIFFERENTES THEORIES DES PLAQUES

II-1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons quelques modèles sur les théories qui ont été développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements dans l'épaisseur des matériaux. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module de cisaillement d'élasticité longitudinale des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses [Nguyen 2004]. On trouve dans la littérature des revues complètes [Noor 1989] ; [Kapania 1989] ; [Kant 2000] ; [Carrera 2000], sur les différents modèles existants de type plaques.

II-2 Description des plaques

A côté des structures linéaires (poutres et cadres) où une dimension domine les deux autres, on rencontre fréquemment, dans la construction, des structures qui s'étendent sur une surface plane ou courbe (structures bidimensionnelles). Dans ce cas, deux dimensions dominent la troisième (l'épaisseur). Si la surface est courbe, on parle de coque ou de coupole **Figure II-1**.

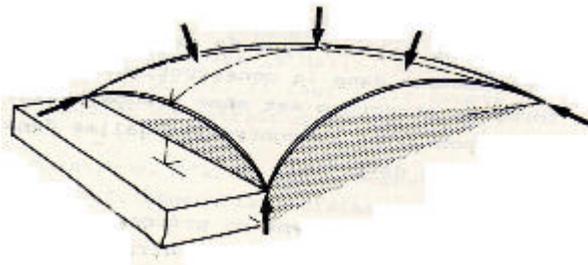


Figure II-1 : Coque ou coupole.

Si la surface est plane, on doit distinguer entre :

- Les voiles plans ou les charges agissant essentiellement dans le plan du voile,
- Les dalles, où les charges agissent essentiellement perpendiculairement à la surface. Ce type de structure est rencontré très fréquemment dans la construction. Dans le bâtiment, cette forme de structure est même prédominante. Tandis que dans les ponts, on rencontre les dalles dans la superstructure.

II-3 Modèles classiques

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [Reissner 1961], [Yang 1966], les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées, la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation.

II-3-1 Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques

II-3-1-1 Principe de Saint venant

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place les charges suffisamment loin du point d'application.

II-3-1-2 Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre au des plaques. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul .Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre **S** très comprimées. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, tient sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial. Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes:

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.
- Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre au de plaque.

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff [Dhatt 1969] qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à [Mindlin1951 et Reissner1945], qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transverse constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transverse y sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes. Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre [Topdar 2003], auquel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transverse, une fois introduits dans les modèles du 1^{er} ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluations dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre élevé à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres [Whitney 1969]. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

II-3-2 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h). La théorie **CLPT** (Classical laminated plate theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff [Kirchhoff 1950], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation **Figure II.2**, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [Cugnoni 2004].

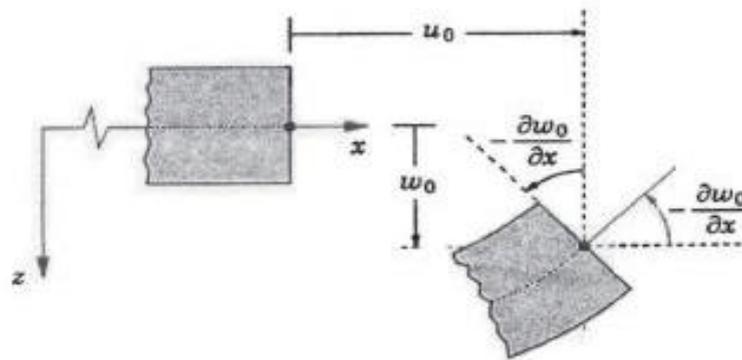


Figure II-2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff ([Reddy 1997]).

Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II-1})$$

Avec : u_0, v_0, w_0 : Le déplacement de membrane dans les directions x, y et z sur le plan moyen de la plaque ($z=0$),

w_0 : La flèche de la plaque, $\frac{\partial w_0}{\partial x}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan x, y , et l'épaisseur h est orienté selon l'axe $z \in [-h/2, h/2]$. Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II-3-3 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans ([Reissner 1945], [Mindlin 1951]) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et Woinowsky-Krieger 1959], [Reddy 1997] et [Reddy 1999].

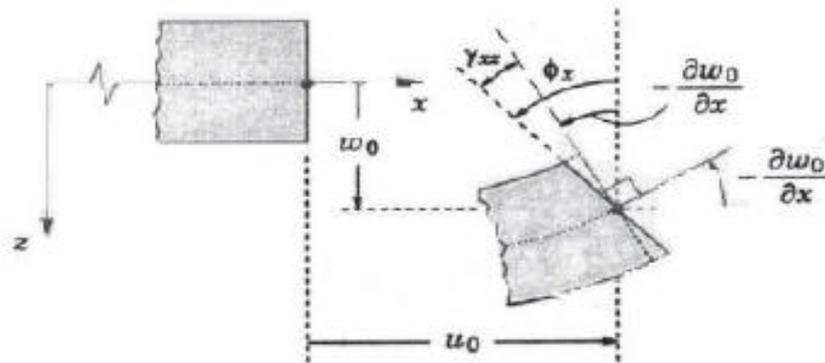


Figure II-3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin ([Reddy 1997]).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0 + z\mathbf{f}_x(x, y), \quad (\text{II-2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0 + z\mathbf{f}_y(x, y), \quad (\text{II-2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-2c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en membrane et $(\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y)$ les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement, $\mathbf{f}_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\mathbf{f}_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II-3-4 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Theory HSDT)

Cette classe de théories plus fines à pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen 2004], la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans ([Hildebrand 1949]; [Naghdi 1975] ; [Reissner 1975] ; [Reddy 1984] ; [Kant et Swaminathan 2002]).

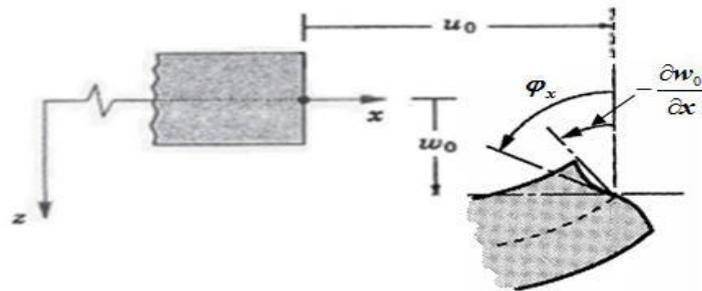


Figure II-4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé ([Reddy 1997]).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \mathbf{y}(z) \mathbf{j}_x(x, y), \tag{II-3a}$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \mathbf{y}(z) \mathbf{j}_y(x, y), \tag{II-3b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \tag{II-3c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et $(\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y)$ sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x

et y , respectivement $(\mathbf{j}_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \mathbf{f}_x, \mathbf{j}_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \mathbf{f}_y)$, $\mathbf{y}(z)$ est une fonction de cisaillement

transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CLPT) est obtenue par en prenant $\mathbf{y}(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\mathbf{y}(z)=z$.

II-4 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée **Figure II-4** [Whitney 1973], [Nelson 1974], [Lo 1977] et [Touratier 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II-4})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski, avec ;

$$f(z) = \frac{5}{2} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-5})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy 1981] et ([Reddy 1997], [Reddy 1999]) Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-6})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal z , est constant [Reddy 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [Duong 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. [Touratier 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{p} \sin\left(\frac{p}{h} z\right) \quad (\text{II-7})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [Reddy 1984].

Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel (ESDPT) avec une cinématique plus riche [Afaq 2003]. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = z \cdot e^{-2(z/h)^2} \text{ et } j_z = 0 \quad (\text{II-8})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) [Touratier 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(p/2)}{[\cosh(p/2) - 1]} z - \frac{(h/p) \sinh\left(\frac{p}{h} z\right)}{[\cosh(p/2) - 1]} \text{ et } j_z = 0 \quad (\text{II-9})$$

II-5 Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag [Cho 1996] et [Choa 2000], Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations

fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva [Di Sciuva 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag ([Murakami 1986], [Averill 1994], [He 1994], [Icardi 2001], [Carrera 2004]). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) **figure II.5**. Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [Tafla 2007].

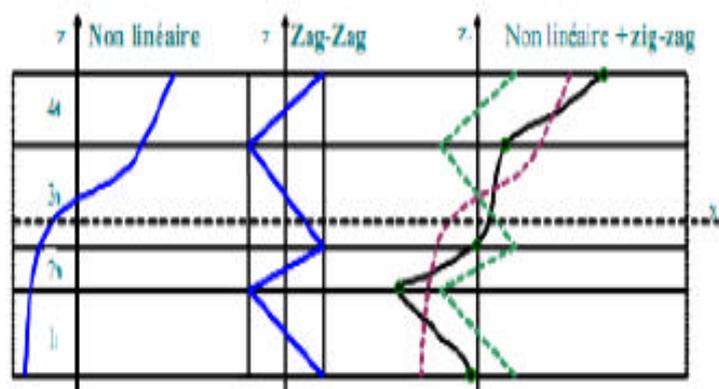


Figure II-5 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé [Carrera 2004].

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

II-6 Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites et FGM

II-6-1 Les structures composites stratifiées

Les théories d'ordre élevé envisagées par certains auteurs sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambage,...). La performance d'un élément fini est liée à la théorie utilisée. La théorie d'ordre élevé se distingue par son ordre polynomial, son nombre de coefficients ou de paramètres qu'elle engendre et le type d'élément qu'elle utilise. Kapania et Raciti [Kapania 1989] ont fourni une synthèse détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisées dans la

statique, vibration et l'analyse de flambement des poutres et des plaques composites. [Moita 1996] a proposé un élément quadrilatère à 9 nœuds et 10 degrés de liberté par nœuds. Les champs déplacements « u » et « v » sont cubiques par rapport à l'épaisseur et « w » est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rend le calcul assez lourd. Kant et al [Kant 2001], ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre élevé raffinée (surtout sur les plaques sandwich). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que « u, v, w » soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de deux couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contrainte de cisaillement et avoir une continuité aux interfaces. Patel et al [Patel 2004] ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3^{ème} ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches). Zen Wu et al [Wu 2006], ont proposé une théorie intéressante du point de vue résultats sur les contraintes. Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par nœud. Elle est communément appelée « high order shear refined theory ». Mechab et Tounsi [Mechab 2008] ont utilisé des théories d'ordre élevés pour étudier le comportement en flexion des poutres courtes en composites stratifiés.

Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul [Tafla 2007].

II-6-2 Les structures type FGM et FGM sandwich

Avec le développement des divers secteurs de technologie tels que l'aéronautique, l'astronautique, les industries des défenses nationales, l'énergie nucléaire, les constructions civiles et les secteurs biomédicaux, les matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles **FGM** sont considérés comme des matériaux composites les plus prometteurs [Ichikawa 2000].

Wetherhold [Wetherhold 1996] a présenté une étude basée sur la théorie des poutres pour éliminer ou contrôler les déformations d'origine thermiques en utilisant des matériaux **FGM** ou Hybrides **FGM**. Sankar et Tzeng [Sankar 2001], ont obtenu une solution analytique basée sur les lois d'élasticité pour des poutres **FGM** soumises à des charges transversales avec une variation exponentielle des propriétés matérielles des constituants. Par la suite, Sankar [Sankar 2002] a développé une théorie similaire à la théorie des poutres d'Euler Bernoulli pour les poutres à gradient de propriété fonctionnel tout en variant exponentiellement les propriétés élastiques afin d'évaluer les contraintes et les déformations thermiques. Chakraborty et al [Chakraborty 2003], ont développé un modèle élément fini de type poutre tenant compte du cisaillement afin d'étudier les problèmes de statique, vibration libre et propagation des ondes pour les poutres en bi-matériaux fusionnées avec des **FGM**. Dans l'étude de Zenkour [Zenkour 2006], la réponse statique est présentée pour une plaque rectangulaire de type **FGM** simplement appuyée soumise à une charge uniforme transversale. Une théorie généralisée d'ordre élevé de déformation de cisaillement à été employée, et qui permet de donner une représentation correcte de la contrainte de cisaillement transversale où aucun facteur de correction n'est nécessaire. Cette théorie est simplifiée en imposant des conditions aux limites aux faces supérieures et inférieures de la plaque. Les propriétés matérielles de la plaque sont variées graduellement dans la direction de l'épaisseur selon une distribution simple basée sur une loi de puissance en termes de fractions de volume des constituants. Chinosi et Croce [Chinosi 2007], ont présenté un modèle élément fini non conforme pour l'analyse de flexion des plaques rectangulaire en **FGM** par la théorie de Reissner-Mindlin. Le premier objectif de cette recherche était de présenter une formulation générale pour les poutres hybrides de types **FGM** en utilisant la théorie généralisée de déformation de cisaillement.

Dans le modèle de Kadoli, Le champ de déplacement basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé est mis en application pour étudier le comportement statique des poutres en **FGM** de type (métal-céramique) sous l'effet de la température ambiante [Kadoli 2008]. Des poutres en **FGM** avec une variation type puissance de la fraction volumique du métal ou de la céramique sont considérées.

Un modèle élément finie d'une poutre **FGM** a été présenté pour établir les équations d'équilibre statique en utilisant le principe de l'énergie potentielle stationnaire [Kadoli 2008]. Les résultats numériques pour la flexion transversale et les contraintes de cisaillement dans une poutre modérément épaisse de type **FGM** soumise à une charge uniformément répartie pour des conditions aux limites respectivement, (encastree-encastree) et (simplement appuyee) sont discutés. Les effets de la variation des fractions volumiques des propriétés matérielles de la poutre type **FGM** (céramique-métal) en fonction de l'exposant de la loi de puissance sur le comportement en flexion et en cisaillement de la poutre ont été également commentés.

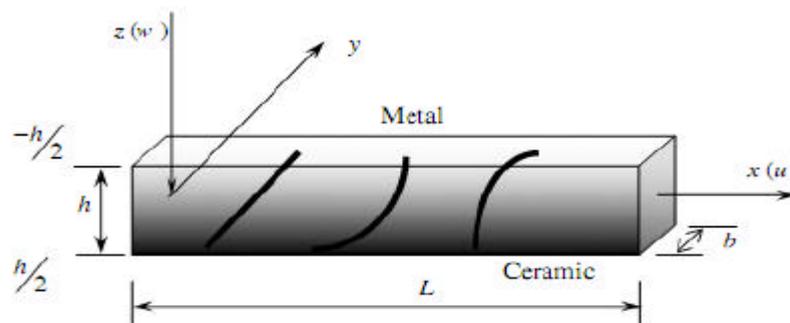


Figure II-6 : Géométrie de la poutre **FGM** avec les possibilités de la variation de céramique et du métal à travers l'épaisseur [Kadoli 2008].

Le champ de déplacement basé sur la théorie d'ordre élevé s'écrit comme suivant :

$$u(x, z) = u_0(x) + z\mathbf{y}_x - \frac{4}{3h^2}z^3[\mathbf{y}_x + w_{0,x}], \quad w(x, y, z) = w_0(x) \quad (\text{II-10})$$

Tel que : u_0 : Déplacement longitudinal de la poutre;

w_0 : Déplacement vertical au transversal;

$\frac{dw}{dx}$: Rotation total de la section

\mathbf{y}_x : Rotation due à la déformation transversale ?

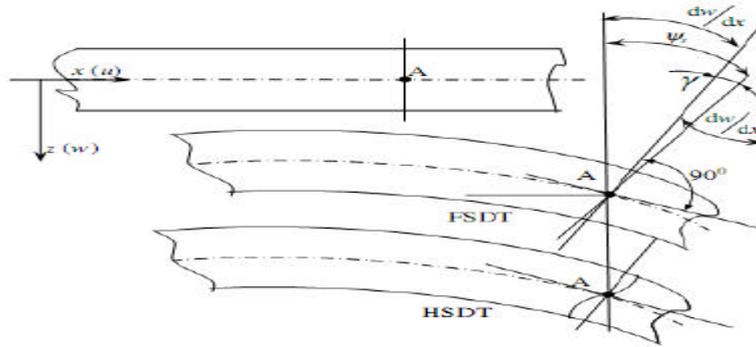


Figure II-7 : Description géométrique de la déformation de la poutre FGM à travers de l'épaisseur [Kadoli 2008].

Récemment, Sarfaraz et al [Sarfaraz 2009] ont présenté le concept de l'énergie variationnelle en faisant la comparaison entre les théories du premier ordre et la théorie du troisième ordre qui ont été employées pour prévoir la déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque FGM **Figure II-8**. Les résultats sont discutés en fonction de l'épaisseur et de l'ordre «k» qui définit une loi de puissance considérée pour décrire la variation des propriétés matérielles de la plaque type FGM à travers l'épaisseur.

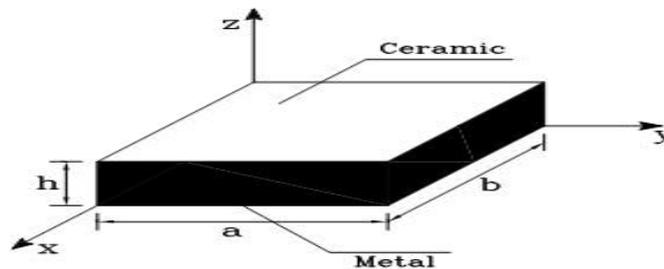


Figure II-8 : Géométrie d'une plaque typique de FGM [Sarfaraz 2009].

Le champ de déplacement généralisé s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u(x, y) + f(z) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \gamma(z) f_x(x, y), \tag{II-11a}$$

$$v(x, y, z) = v(x, y) + f(z) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \gamma(z) f_y(x, y), \tag{II-11b}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \tag{II-11c}$$

Tel que : $\mathbf{f}(z)$: est une fonction de cisaillement transversal qui peut prendre plusieurs formes selon la théorie utilisée. Et $\gamma(z)$ est une fonction de cisaillement transversal caractérisant les théories correspondantes.

$$(1) \text{ théorie classique (CLPT)} : \begin{cases} f(z) = z; \\ \mathbf{y}(z) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

$$(2) \text{ théorie du premier ordre} : \begin{cases} f(z) = 0; \\ \mathbf{y}(z) = z \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

$$(3) \text{ théorie du troisième ordre (TSDT)} : \begin{cases} f(z) = z^3 \left(\frac{4}{3h^2} \right); \\ \mathbf{y}(z) = z - z^3 \left(\frac{4}{3h^2} \right). \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

D'après Sarfaraz, les résultats trouvés ont prouvés que la méthode énergétique est capable de montrer que le changement d'épaisseur ainsi de la puissance « k » qui décrit la fraction volumique des propriétés matérielles ont pour effet de modifier le comportement en cisaillement transverse de la plaque type FGM [Sarfaraz 2009].

En 2010, Zenkour a présenté une théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le comportement et la résistance thermique des plaques de type FGM sandwich [Zenkour 2010].

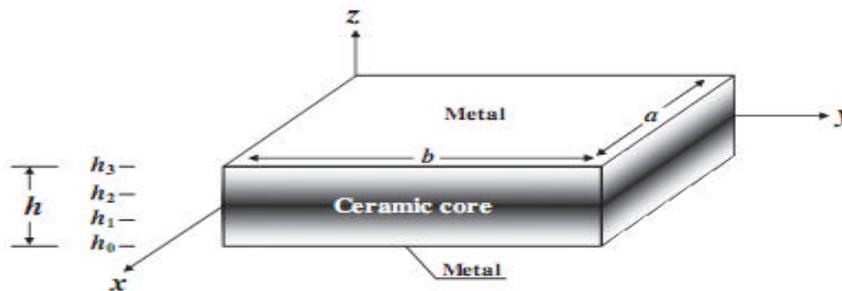


Figure II-9 : Géométrie de la plaque FGM sandwich [Zenkour 2010].

Une comparaison des théories classiques, du premier ordre et d'ordre élevé a été faite pour décrire la déformation de cisaillement des plaques [Zenkour 2010]. L'étude a montré que les propriétés matérielles et les dilatations thermique des plaques symétriques de type FGM sandwich varient graduellement selon l'épaisseur en terme des fractions des volumes des constituants.

II-7 Conclusion

La théorie classique des plaques, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les plaques peu épaisses. La validité de la théorie des plaques peut être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations de l'élasticité. Par contre, dans le cas des plaques épaisses ($a/h > 10$), la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique.

Une comparaison des théories classiques, du premier ordre et d'ordre élevé a été faite pour décrire la déformation de cisaillement des plaques. L'étude a montré que les propriétés matérielles des plaques symétriques de type **FGM** sandwich varient graduellement selon l'épaisseur en terme des fractions des volumes des constituants. En utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec une modification dans la formulation de déplacement transversal, les équations d'équilibre sont dérivées en utilisant l'approche variationnelle en considérant la traction de faces supérieures et inférieures des plaques. Les propriétés mécaniques de la plaque sont assumées avec variation sans interruption dans la direction de l'épaisseur par une distribution simple de loi de puissance en termes de fractions de volume des constituants. Le chapitre suivant fera l'objet d'une analyse à la flexion statique des plaques sandwich rectangulaires épaisses de type **FGM**.

CHAPITRE III

ANALYSE DES PLAQUES SANDWICHE

RECTANGULAIRES EPAISSES DE TYPE

FGM SOUMISES A LA FLEXION

STATIQUE

III-1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation du comportement mécanique à la flexion statique des plaques sandwiches en matériaux à gradient évalué « **FGM** » en utilisant la théorie d'ordre élevé à deux variables. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie présentée est variationnellement cohérente (La formulation repose sur le principe des travaux virtuelles), elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

La plaque sandwich considérée dans cette étude est de type :(métal (**Al**) / céramique (**Al₂O₃**) / métal (**Al**)). On suppose que la propriété matérielle (module de Young **E**) de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants. Plusieurs configurations des plaques sandwiches sont utilisées en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche (**figure III-3**).

III-2 Hypothèses de la théorie des plaques FGM

Les hypothèses de la théorie des plaques se présentent comme suit:

- (i) Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les couches concerné sont infinitésimale.
- (ii) Le déplacement transversal « w » inclue les deux composantes de flexion « w_b », et cisaillement « w_s ». Ces composants sont des fonctions de coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad \text{(III-1)}$$

- (iii) La contrainte normale transversale « s_z » est négligeable en comparaison devant les contraintes normales plans « s_x » et « s_y ».

- (iv) Les déplacements « u », « v » dans la direction x et y respectivement, sont formulés en terme de trois composants qui sont membrane, flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad \text{(III-2)}$$

Les composantes de flexions « u_b » et « v_b » sont supposés être similaires aux déplacements proposés par la théorie des classiques plaques. Par conséquent, les expressions de « u_b » et « v_b » ne peuvent être données comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \tag{III-3}$$

Les composantes de cisaillement « u_s » et « v_s » donner lieu, en liaison avec « w_s », aux variations parabolique de déformation de cisaillement « g_{xz} », « g_{yz} » et aux contraintes de cisaillement « t_{xz} », « t_{yz} » à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement « t_{xz} », « t_{yz} » soient nulles aux faces supérieure et inférieure de la plaque. Ainsi, les expressions « u_s » et « v_s » sont formulés comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{III-4}$$

III-3 Formulation théorique

III-3-1 Configuration géométrique

Prenons le cas d'une plaque sandwich **FGM** rectangulaire épaisse, composée de trois couches hétérogènes (voir la figure **III-1**). Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes **x** et **y**.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, (voir la figure **III-2**). Dénommées couches 1, 2 et 3 empilées successivement de bas vers le haut : $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 , $h_3 = h/2$ de la plaque sandwich **FGM**.

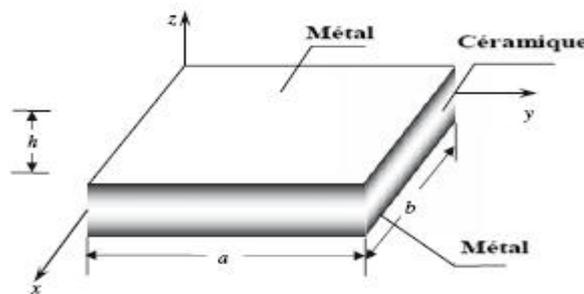


Figure III-1 : La géométrie de la plaque sandwich rectangulaire **FGM** avec une épaisseur uniforme de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

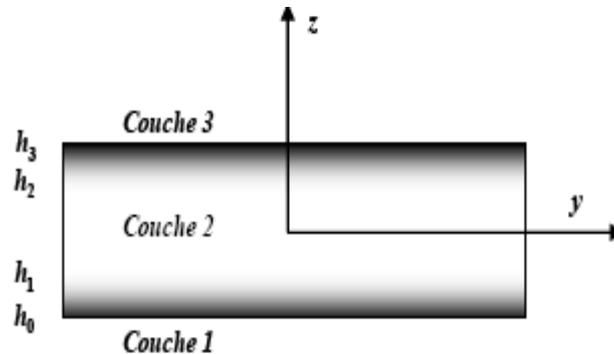


Figure III-2 : Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM. (Les couches supérieure et inférieure en Métal et la couche centrale en céramique).

III-3-2 Propriétés des matériaux

Les propriétés matérielles de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur z seulement, selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ des matériaux constituants.

Delale et Erdogan ; [Delale , Erdogan 1983] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous points de la plaque.

Les propriétés mécaniques de la plaque sandwich en FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique des matériaux constituants « $V^{(n)}$ ». Cependant, le module d'élasticité « $P(z)$ » à tout point de la plaque est donné par la loi de mélange [Zenkour2010]:

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad \text{(III-5)}$$

Où « $P^{(n)}$ » est la propriété matérielle effective de la couche de la plaque sandwich en FGM. « P_m » et « P_c » sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la plaque sandwich et correspondant respectivement au métal et au céramique.

III-3-2-1 Plaque sandwich en FGM : « Métal/Céramique/Métal »

La fraction volumique $V^{(n)}$ à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich (**Métal/Céramique/Métal**) suit une simple loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque. Elle est définie par :

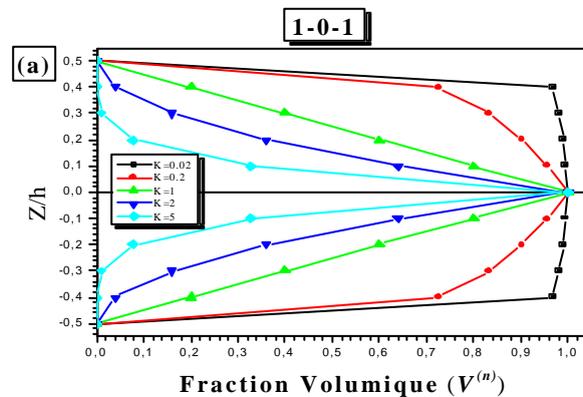
$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2], \\
 V^{(2)} &= 1, \quad z \in [h_2, h_3], \\
 V^{(3)} &= \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4]
 \end{aligned}
 \tag{III-6}$$

Où « $V^{(n)}$ », ($n=1,2,3$) représente la fonction de la fraction volumique de la couche « n »; « k » est l'indice de fraction volumique de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

La couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur « k » puisque cette couche est entièrement en céramique. La plaque sandwich de type « Métal/Céramique/Métal » est symétrique par rapport au plan moyen ($z=0$).

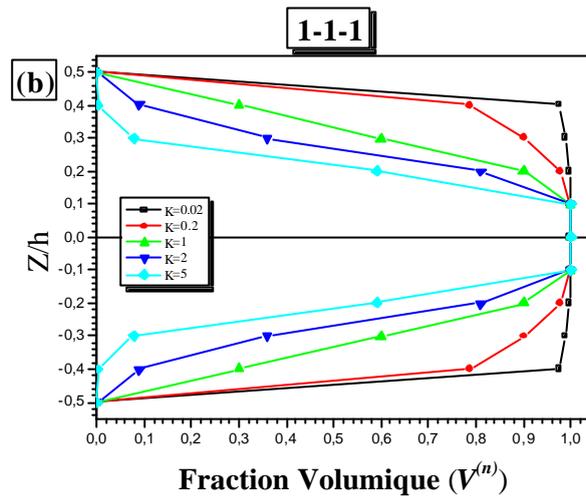
La figure III-3 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour les différentes configurations des plaques sandwiches avec $k = 0.02 ; 0.2 ; 1 ; 2 ; 5$.

- La plaque sandwich **FGM** type (1-0-1): La plaque est symétrique et en a seulement deux couches d'épaisseur égale, il n'y a pas de couche de base. Ainsi, $h_1 = h_2 = 0$.



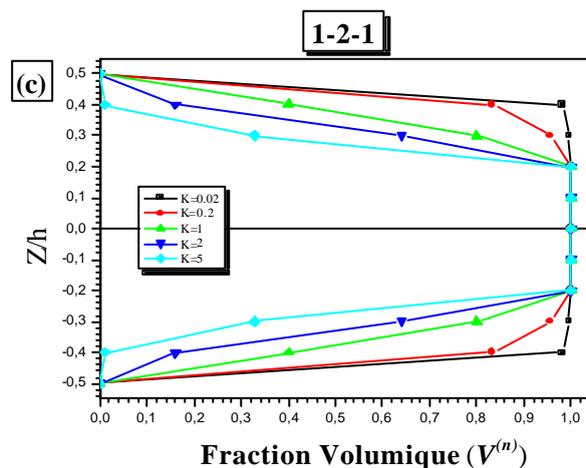
(a) la plaque sandwich en FGM type (1-0-1).

- La plaque sandwich **FGM** type (1-1-1): ici, la plaque est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons, $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$.



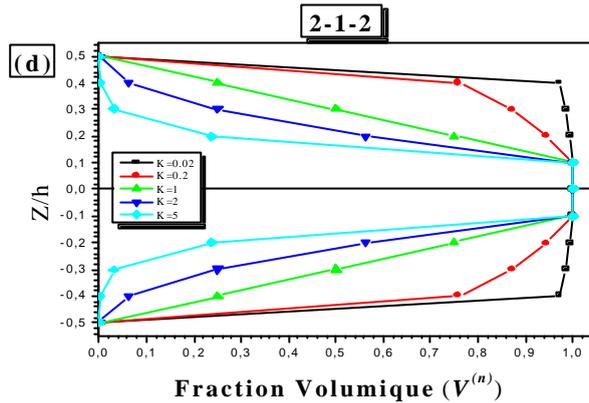
(b) la plaque sandwich en **FGM** type (1-1-1)

- La plaque sandwich **FGM** type (1-2-1): La plaque est symétrique, dans laquelle l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure, nous avons: $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$.



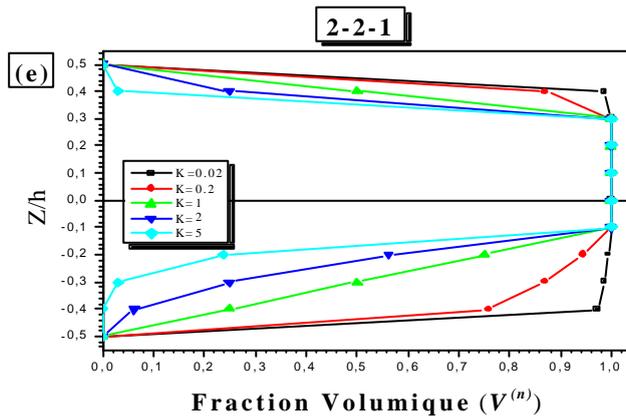
(c) la plaque sandwich en **FGM** type (1-2-1)

- La plaque sandwich **FGM** type (2-1-2): Ici, la plaque est aussi symétrique, et l'épaisseur de l'âme égale la moitié des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Dans ce cas, nous avons $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$.



(d) la plaque sandwich en **FGM** type (2-1-2).

- La plaque sandwich en **FGM** type (2-2-1): Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est la même que celle inférieure, alors qu'il est égale au double de la couche supérieure. Ainsi, $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$.



(e) la plaque sandwich en **FGM** type (2-2-1).

Figure III-3 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations des plaques sandwiches en **FGM**.

III-4 Champ du déplacement et équations constitutives

Dans la présente analyse, les modèles de champ de déplacement satisfaisants la condition de contrainte nulle pour les contraintes transversales sur la surface supérieure et inférieure de la plaque sont considérés. A la base des hypothèses formulées, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III-1) et (III-4),

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad \text{(III-7a)}$$

où la fonction $f(z)$ est choisi dans la forme **RSdT1** et **RSdT2**

$$f(z) = z - \frac{h}{p} \sin\left(\frac{p z}{h}\right) \text{ Pour le modèle RSdT1} \quad \text{(III-7b)}$$

$$f(z) = z \left[\frac{-1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \text{ Pour le modèle RSdT2} \quad \text{(III-7c)}$$

III-4-1 Tenseur des déformations

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (III-7a) sont :

$$\begin{aligned} e_x &= e_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ e_y &= e_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ g_{xy} &= g_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ g_{yz} &= g(z) g_{yz}^s \\ g_{xz} &= g(z) g_{xz}^s \\ e_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{(III-8)}$$

$$e_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, e_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$g_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad \text{(III-9)}$$

$$g_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, g_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

III-4-2 Tenseur des contraintes

Pour une plaque **FGM** élastique et isotrope, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)}, \quad \begin{Bmatrix} t_{yz} \\ t_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{III-10})$$

où $(s_x, s_y, t_{xy}, t_{yz}, t_{yx})$ et $(e_x, e_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{yx})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés des matériaux définis dans l'équation

(III-5), les coefficients de rigidité, « Q_{ij} », peuvent être exprimé par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-n^2}, \quad (\text{III-11a})$$

$$Q_{12} = \frac{n E(z)}{1-n^2}, \quad (\text{III-11b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+n)}, \quad (\text{III-11c})$$

III-5 Équations d'équilibres

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent s'énonce comme suit :

$$dW_{int} = \dot{q}_i s_{ij} d e_{ij} q dv \quad (\text{III-12})$$

Les équations d'équilibres sont obtenues en utilisant le principe de travail virtuel, qui peut être écrit comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \dot{\partial} \partial_W [s_x d e_x + s_y d e_y + t_{xy} d g_{xy} + t_{yz} d g_{yz} + t_{xz} d g_{xz}] dW dz - \partial_W q d W dW = 0 \quad (\text{III-13})$$

où W est la surface supérieure.

En substituant les équations. (III-9) et (III-10) dans l'équation (III-13) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque. L'équation (III-13) peut être réécrite comme suit :

$$\delta W_{\text{ext}} = N_x d e_x^0 + N_y d e_y^0 + N_{xy} d e_{xy}^0 + M_x^b d k_x^b + M_y^b d k_y^b + M_{xy}^b d k_{xy}^b + M_x^s d k_x^s + M_y^s d k_y^s + M_{xy}^s d k_{xy}^s + S_{yz}^s d g_{yz}^s + S_{xz}^s d g_{xz}^s \quad \text{(III-14)}$$

$$dW - \delta W q (d w_b + d w_s) dW = 0$$

$$\begin{aligned} dW_{\text{int}} = & \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{x} (N_x du) - \frac{1}{x} N_x du - \frac{1}{x} (M_x^b \frac{dw_b}{dx}) + \frac{1}{x} (M_x^s \frac{dw_s}{dx}) - \frac{1}{x^2} M_x^b dw_b \right. \\ & - \frac{1}{x} (M_x^s \frac{dw_s}{dx}) + \frac{1}{x} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dy}) - \frac{1}{x^2} M_{xy}^s dw_s \Big] dx dy + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{y} (N_y du) - \frac{1}{y} N_y du - \frac{1}{y} (M_y^b \frac{dw_b}{dy}) \right. \\ & + \frac{1}{y} (M_y^s \frac{dw_s}{dy}) - \frac{1}{y^2} M_y^b dw_b - \frac{1}{y} (M_y^s \frac{dw_s}{dy}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) - \frac{1}{y^2} M_{xy}^s dw_s \Big] dx dy \\ & + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{x} (N_{xy} dv) - \frac{1}{x} N_{xy} dv + \frac{1}{y} (N_{xy} du) - \frac{1}{y} N_{xy} du \right. \\ & - \frac{1}{xy} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) - 2 \frac{1}{xy} M_{xy}^b dw_b - \frac{1}{xy} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dy}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dy}) \\ & - \frac{1}{xy} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dy}) - 2 \frac{1}{xy} M_{xy}^s dw_s - \frac{1}{xy} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dy}) \Big] dx dy \\ & + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b \left[(S_{yz}^s \frac{dw_s}{dy}) dx dy + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b (S_{xz}^s \frac{dw_s}{dx}) dx dy \right] dx dy \end{aligned} \quad \text{(III-15)}$$

$$\text{Où : } \begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (s_x, s_y, t_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (t_{xz}, t_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad \text{(III-16)}$$

Où h_{n+1} et h_n sont les coordonnées en fonction de «z» des couches supérieur et inférieur respectivement.

Le travail virtuel s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \delta W [s_x d e_x + s_y d e_y + t_{xy} d g_{xy} + t_{yz} d g_{yz} + t_{xz} d g_{xz}] dW dz - \delta W q dW = \\ & \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{x} (N_x du) + \frac{1}{y} (N_y dv) + \frac{1}{xy} (N_{xy} du) + \frac{1}{x} (M_x^b \frac{dw_b}{dx}) + \frac{1}{y} (M_y^b \frac{dw_b}{dy}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) \right. \\ & + \frac{1}{x} (M_x^s \frac{dw_s}{dx}) + \frac{1}{y} (M_y^s \frac{dw_s}{dy}) + \frac{1}{xy} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) - \frac{1}{x^2} M_x^b dw_b - \frac{1}{y^2} M_y^b dw_b - \frac{1}{xy} M_{xy}^b dw_b \\ & + \frac{1}{x^2} M_x^s dw_s + \frac{1}{y^2} M_y^s dw_s + \frac{1}{xy} M_{xy}^s dw_s - \frac{1}{x} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dy}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) - \frac{1}{x} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dy}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) \Big] dx dy \\ & + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{y} (N_y du) - \frac{1}{y} N_y du - \frac{1}{y} (M_y^b \frac{dw_b}{dy}) + \frac{1}{y} (M_y^s \frac{dw_s}{dy}) - \frac{1}{y^2} M_y^b dw_b - \frac{1}{y} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) \right. \\ & - \frac{1}{y} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dy}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dy}) - 2 \frac{1}{y} M_{xy}^b dw_b - \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dx}) - \frac{1}{y} (M_{xy}^s \frac{dw_s}{dx}) + \frac{1}{y} (M_{xy}^b \frac{dw_b}{dy}) \Big] dx dy \\ & + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b \left[(S_{yz}^s \frac{dw_s}{dy}) dx dy + \frac{ba}{00} \int_0^a \int_0^b (S_{xz}^s \frac{dw_s}{dx}) dx dy \right] dx dy \end{aligned} \quad \text{(III-17)}$$

Les équations qui régissent l'équilibre peuvent être déterminé à partir de l'équation (III-14) en intégrant par les gradients de déplacement par parties et en regroupant les termes en fonction des coefficients « du », « dv », « dw_b » et « dw_s » par la suite, les termes ainsi regroupés seront pris égales à zéro, d'on l'obtention des équations d'équilibres associés à la présente théorie de déformations et de cisaillement.

$$\begin{aligned}
 du : \quad \frac{\mathbb{N}_x}{\mathbb{I}_x} + \frac{\mathbb{N}_{xy}}{\mathbb{I}_y} &= 0 \\
 dv : \quad \frac{\mathbb{N}_{xy}}{\mathbb{I}_x} + \frac{\mathbb{N}_y}{\mathbb{I}_y} &= 0 \\
 dw_b : \quad \frac{\mathbb{I}^2 M_x^b}{\mathbb{I}_x^2} + 2 \frac{\mathbb{I}^2 M_{xy}^b}{\mathbb{I}_x \mathbb{I}_y} + \frac{\mathbb{I}^2 M_y^b}{\mathbb{I}_y^2} + q &= 0 \\
 dw_s : \quad \frac{\mathbb{I}^2 M_x^s}{\mathbb{I}_x^2} + 2 \frac{\mathbb{I}^2 M_{xy}^s}{\mathbb{I}_x \mathbb{I}_y} + \frac{\mathbb{I}^2 M_y^s}{\mathbb{I}_y^2} + \frac{\mathbb{I} S_{xz}^s}{\mathbb{I}_x} + \frac{\mathbb{I} S_{yz}^s}{\mathbb{I}_y} + q &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III-18}$$

III-6 Détermination des coefficients de rigidité

En reportant l'équation (III-10) dans l'équation (III-16), on obtient les expressions suivantes des résultantes en membrane N , en flexion pure M^b , en flexion supplémentaire dû au cisaillement M^s , et en cisaillement pur S .

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s g,
 \tag{III-19}$$

Ou
$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t,
 \tag{III-20a}$$

$$e = \{e_x^0, e_y^0, g_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t,
 \tag{III-20b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},
 \tag{III-20c}$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III-20d})$$

$$\mathbf{S} = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \mathbf{g} = \{g_{xz}, g_{yz}\}^t, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III-20e})$$

Les coefficients de rigidité « A_{ij} » et « B_{ij} », sont définis comme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \mathbf{Q}_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{bmatrix} 1 \\ n^{(n)} \\ \frac{1-n^{(n)}}{2} \end{bmatrix} dz, \quad (\text{III-21a})$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right), \quad \mathbf{Q}_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-n^2} \quad (\text{III-21b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+n)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III-21c})$$

III-7 Formulation des équations différentielles

La substitution de l'équation (III-19) dans l'équation (III-18), donne l'équation suivante :

$$A_{11} d_1 \mu_0 + A_{66} d_2 \mu_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} \nu_0 - B_{11} d_{11} \nu_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{12} \nu_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{12} \nu_s - B_{11}^s d_{11} \nu_s = 0, \quad (\text{III-22a})$$

$$A_{22} d_2 \nu_0 + A_{66} d_1 \nu_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} \mu_0 - B_{22} d_{22} \nu_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{11} \nu_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{11} \nu_s - B_{22}^s d_{22} \nu_s = 0, \quad (\text{III-22b})$$

$$B_{11} d_{11} \mu_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{12} \mu_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{11} \nu_0 + B_{22} d_{22} \nu_0 - D_{11} d_{11} \nu_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{11} \nu_b - D_{22} d_{22} \nu_b - D_{11}^s d_{11} \nu_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{11} \nu_s - D_{22}^s d_{22} \nu_s + q = 0, \quad (\text{III-22c})$$

$$B_{11}^s d_{11} \mu_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{12} \mu_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{11} \nu_0 + B_{22}^s d_{22} \nu_0 - D_{11}^s d_{11} \nu_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{11} \nu_b - D_{22}^s d_{22} \nu_b - H_{11}^s d_{11} \nu_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{11} \nu_s - H_{22}^s d_{22} \nu_s + A_{55}^s d_{11} \nu_s + A_{44}^s d_{22} \nu_s + q = 0 \quad (\text{III-22d})$$

Où « d_{ij} », « d_{ijl} » et « d_{ijlm} » sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\mathfrak{I}^2}{\mathfrak{I}x_i \mathfrak{I}x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\mathfrak{I}^3}{\mathfrak{I}x_i \mathfrak{I}x_j \mathfrak{I}x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\mathfrak{I}^4}{\mathfrak{I}x_i \mathfrak{I}x_j \mathfrak{I}x_l \mathfrak{I}x_m}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III-23})$$

Les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (III-2) et (III-3) dans l'expression (III-4):

$$s_x = \frac{E(z)}{1-n^2} \frac{\hat{e}}{\hat{e}} \frac{\mathbb{1}u_0}{\mathbb{1}x} + n \frac{\mathbb{1}n_0}{\mathbb{1}y} - z \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_b}{\mathbb{c}\mathbb{1}x^2} + n \frac{\mathbb{1}^2 w_b}{\mathbb{1}y^2} \frac{\ddot{0}}{\ddot{0}} - f(z) \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_s}{\mathbb{c}\mathbb{1}x^2} + n \frac{\mathbb{1}^2 w_s}{\mathbb{1}y^2} \frac{\ddot{0}\ddot{u}}{\ddot{0}\ddot{u}}, \quad \text{(III-24a)}$$

$$s_y = \frac{E(z)}{1-n^2} \frac{\hat{e}}{\hat{e}} \frac{\mathbb{1}u_0}{\mathbb{1}x} + \frac{\mathbb{1}n_0}{\mathbb{1}y} - z \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_b}{\mathbb{c}\mathbb{1}x^2} + n \frac{\mathbb{1}^2 w_b}{\mathbb{1}y^2} \frac{\ddot{0}}{\ddot{0}} - f(z) \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_s}{\mathbb{c}\mathbb{1}x^2} + n \frac{\mathbb{1}^2 w_s}{\mathbb{1}y^2} \frac{\ddot{0}\ddot{u}}{\ddot{0}\ddot{u}}, \quad \text{(III-24b)}$$

$$t_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+n)} \frac{\hat{e}}{\hat{e}} \frac{\mathbb{1}u_0}{\mathbb{1}y} + \frac{\mathbb{1}n_0}{\mathbb{1}x} - 2z \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_b}{\mathbb{c}\mathbb{1}x\mathbb{1}y} \frac{\ddot{0}}{\ddot{0}} - 2f(z) \frac{\mathbb{a}\mathbb{1}^2 w_s}{\mathbb{c}\mathbb{1}xy} \frac{\ddot{0}\ddot{u}}{\ddot{0}\ddot{u}}, \quad \text{(III-24c)}$$

$$t_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+n)} g(z) \frac{\mathbb{1}w_s}{\mathbb{1}x}, \quad \text{(III-24d)}$$

$$t_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+n)} g(z) \frac{\mathbb{1}w_s}{\mathbb{1}y}. \quad \text{(III-24e)}$$

III-8 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes ici concernés avec la solution exacte des équations. (III-22) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les bords latéraux:

$$v_0 = w_b = w_s = 0, \quad \frac{\mathbb{1}w_b}{\mathbb{1}y} = \frac{\mathbb{1}w_s}{\mathbb{1}y} = 0, \quad N_x = 0, \quad \text{et} \quad M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{Avec} \quad x = -a/2, a/2 \quad \text{(III-25a)}$$

$$u_0 = w_b = w_s = 0, \quad \frac{\mathbb{1}w_b}{\mathbb{1}x} = \frac{\mathbb{1}w_s}{\mathbb{1}x} = 0, \quad N_y = 0, \quad \text{et} \quad M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{Avec} \quad y = -b/2, b/2 \quad \text{(III-25b)}$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la force extérieure sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(l x) \sin(m y) \quad \text{(III-26)}$$

Où $l = mp/a$ et $m = np/b$, et « m » et « n » sont des nombres de mode. Pour le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, nous avons $m = n = 1$, et $q_{11} = q_0$

Où « q_0 » représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. À la suite de la procédure de solution Navier, nous supposons que la forme de solution pour la suite (u_0, v_0, w_b, w_s) satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \cos(l x) \sin(m y) \\ V_{mn} \sin(l x) \cos(m y) \\ W_{bmn} \sin(l x) \sin(m y) \\ W_{smn} \sin(l x) \sin(m y) \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

Où « U_{mn} », « V_{mn} », « W_{bmn} », et « W_{smn} » sont des paramètres à être déterminés. En utilisant les équations. (III-22). On obtient l'équation suivante:

$$[K]\{D\} = \{P\}, \quad (\text{III-28})$$

Où $\{D\}$ et $\{F\}$ désignent les vecteurs de déplacement et force respectivement.

$\{D\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}$, et $[K]$ c'est une matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{III-29})$$

Dans la quelle:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}l^2 + A_{66}m^2) \\ a_{12} &= -l m (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= l [B_{11}l^2 + (B_{12} + 2B_{66})m^2] \\ a_{14} &= l [B_{11}^s l^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)m^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}l^2 + A_{22}m^2) \\ a_{23} &= m [(B_{12} + 2B_{66})l^2 + B_{22}m^2] \\ a_{24} &= m [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)l^2 + B_{22}^s m^2] \\ a_{33} &= -(D_{11}l^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})l^2 m^2 + D_{22}m^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s l^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)l^2 m^2 + D_{22}^s m^4) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s l^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)l^2 m^2 + H_{22}^s m^4 + A_{55}^s l^2 + A_{44}^s m^2) \end{aligned} \quad (\text{III-30})$$

Les composantes du vecteur force généralisées $\{F\}^T = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ sont donnés par :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (III-31)$$

$$F_3 = -q_{mn},$$

$$F_4 = -q_{mn}.$$

En substituant l'équation III-29 dans l'équation III-24, on peut obtenir les expressions des contraintes en termes de module de Young et les paramètres arbitraires U, V, W_b et W_s comme suit :

$$s_x = \frac{E(z)}{1-n^2} \left[(lU + nmV) + z(l^2 + nm^2)W_b + f(z)(l^2 + nm^2)W_s \right] \sin(lx) \sin(my), \quad (III-32a)$$

$$s_y = \frac{E(z)}{1-n^2} \left[(nlU + mV) + z(nl^2 + m^2)W_b + f(z)(nl^2 + m^2)W_s \right] \sin(lx) \sin(my), \quad (III-32b)$$

$$t_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+n)} \left[mU + lV - 2z(lm)W_b - 2f(z)(lm)W_s \right] \cos(lx) \cos(my), \quad (III-32c)$$

$$t_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+n)} g(z)W_s m \sin(lx) \cos(my), \quad (III-32d)$$

$$t_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+n)} g(z)W_s l \cos(lx) \sin(my). \quad (III-32e)$$

III-9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse du comportement mécanique à la flexion statique d'une plaque épaisse rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotés en matériaux à gradient évalué **FGM**, sous un chargement transversal développé en utilisant la théorie d'ordre élevé. Cette théorie est plus réaliste puisqu'elle vérifie la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux bords de la plaque, contrairement à celle de premier ordre.

La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur.

La théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement mécanique de la flexion statique des plaques **FGM**. Les résultats présentés au chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de ces développements théoriques en introduisant diverses formes pour la fonction $f(z)$ et sans la prise en compte de la déformation normale « j_z ».

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV-1 Introduction

Dans ce chapitre, deux nouvelles théories (**RSDT1**, **RSDT2**) de déformation de cisaillement pour les plaques sandwiches en **FGM** sont considérées. Une comparaison des résultats de ces théories avec des solutions obtenues à l'aide d'autres théories de déformation de cisaillement issues la littérature. Les plaques sandwiches symétrique et non symétrique seront examinées. Notons toute fois que le noyau (âme) de la plaque est entièrement en céramique, tandis que les surfaces inférieures et supérieures de la plaque sont riches en métaux.

Le choix de ces fonctions et de leurs différentes formes dépend essentiellement des théories de déformation qui permettent d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse à l'exception de la théorie d'Euler Bernoulli, et d'autre part d'en approcher la forme de la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Pour les fonctions de premier ordre, on utilisera celle de [Timoshenko 1972], et pour les fonctions d'ordre élevé on utilisera différents modèles qui sont présentés par :

Euler-Bernoulli: $f(z) = 0$, **CLPT**

Timoshenko: $f(z) = z$, **FSDPT**

Model-1: $f(z) = z \frac{p}{3h^2} - \frac{4z^2}{3h^2} \frac{p}{p}$, **PSDPT**

Model-2: $f(z) = \frac{h}{p} \sin \left(\frac{p z}{h} \right) \frac{p}{p}$, **SSDPT**

Model-3: $f(z) = z \cdot e^{-2(z/h)^2}$, **ESDPT**

Model-4: $f(z) = z - \frac{h}{p} \sin \left(\frac{p z}{h} \right)$ Pour le modale **RSDT1**

Model-5: $f(z) = z \left[\frac{-1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$ Pour le modale **RSDT2**

Le **Model-1** est une théorie parabolique de déformation de cisaillement des poutres (**PSDPT**) de [Reddy 1984], le **Model-2** est une théorie sinusoïdale (**SSDPT**) développée par [Touratier1991] et donnée par [Zenkour 2004], le **Model-3** est la théorie exponentielle (**ESDPT**) de Karama et al [Karama 2003] qui permet un développement en puissance paire et impaire de la variable « z ». Dans le cadre de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables on utilise le **Model-4** et le **Model-5** qui sont des nouvelles théories de déformation-cisaillement d'ordre plus élevé développées récemment.

Modèle	Théorie
CLPT	La théorie des plaques Classique (Euler-Bernoulli)
FSDPT	Première théorie des plaques ([Timosheno 1972])
PSDPT	Théorie des plaques Paraboliques ([Reddy 1984])
SSDPT	Théorie des plaques Sinusoïdales ([Touratier1991])
HSDPT	Théorie des plaques Hyperboliques ([Reddy 1997]).
ESDPT	Théorie des plaques Exponentielles ([Karama 2003])
RSdT1	Théorie des plaques raffinées 1 du déformation-cisaillement (Présente Etude)
RSdT2	Théorie des plaques raffinées 2 du déformation-cisaillement (Présente Etude)

Tableau IV-1 : Modèles de déplacement.

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales (axiales) et tangentielles (cisaillement) :

- Déplacement $\bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$,
- Contrainte axiale $\bar{s}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} s_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$,
- contrainte de cisaillement $\bar{t}_{xz} = \frac{h}{aq_0} t_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$,
- épaisseur de coordonnée $\bar{z} = z/h$.

IV-2 Validation analytique du modèle proposé

Dans cette partie, nous proposons de valider le modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature. Il s’agit essentiellement d’évaluer ses performances en précision sur les déplacements transversales « \bar{w} » pour différents rapport d’allongement. Afin de valider notre modèle, un exemple de la flexion statique sera étudié. L’exemple traite la flexion d’une plaque isotrope simplement appuyé soumise à un chargement statique variant linéairement à travers l’épaisseur. Une comparaison a été faite avec les résultats de la méthode des éléments finis (Reddy et Hsu [Reddy 1984]). Les solutions exactes de Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko 1972], les résultats de Euler-Bernoulli , Zenkour [Zenkour 2004]et Karama et al [Karama 2003] seront également introduits dans la comparaison.

	Euler-Bernoulli	[Timosheno 1972]	[Reddy 1984]	[Zenkour 2004]	[Karama 2003]	Présente étude	
a/b	CLPT	FSDPT	PSDPT	SSDPT	ESDPT	RSDT1	RSDT2
1/4	0.98320	1.00036	0.99716	0.99694	0.99670	0.99694	0.99716
1/2	0.71036	0.72495	0.72223	0.72204	0.72183	0.72204	0.72223
1	0.27748	0.28660	0.28490	0.28478	0.28465	0.28478	0.28490
2	0.04439	0.04804	0.04736	0.04731	0.04726	0.04731	0.04736
4	0.00384	0.00491	0.00471	0.00469	0.00468	0.00469	0.00471

Tableau IV-2 : Effet du rapport (a / b) de l’allongement sur la flèche (\bar{w}) pour une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire et (k= 2) pour les différentes méthodes.

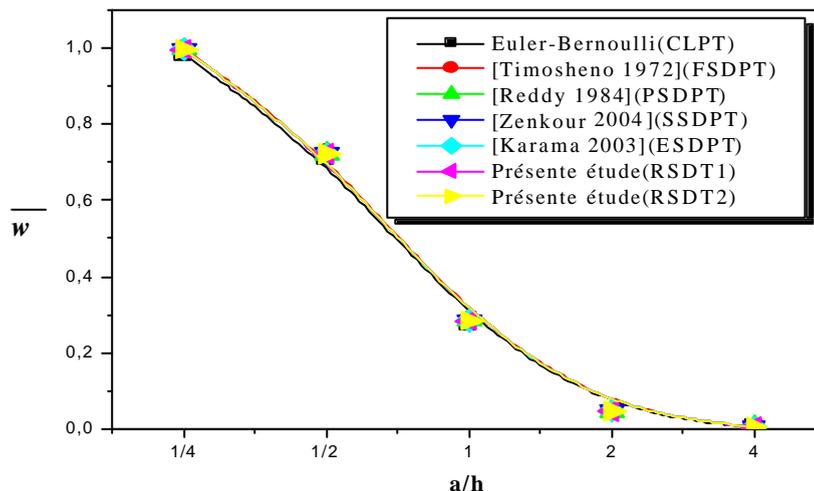


Figure IV-1 : Comparaison entre les différentes méthodes pour déterminer les déplacements (\bar{w}) d’une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire.

z/h	Euler-Bernoulli	[Timosheno 1972]	[Reddy 1984]	[Zenkour 2004]	[Karama 2003]	Présente étude	
	CLPT	FSDPT	PSDPT	SSDPT	ESDPT	RSDT1	RSDT2
0.5	1.975764	1.975764	1.983536	1.983924	1.984280	1.995501	1.965450
0.4	1.580611	1.580611	1.581233	1.581429	1.581634	1.582588	1.579786
0.3	1.185458	1.185458	1.182660	1.182452	1.182265	1.178187	1.189171
0.2	0.7903054	0.7903054	0.7868853	0.7864697	0.786050	0.781029	0.794834
0.1	0.3951527	0.3951527	0.3929763	0.3926630	0.392334	0.389131	0.398040
0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1	0.3951527	0.3951527	0.3929763	0.3926630	0.392334	0.389131	0.398040
-0.2	0.7903054	0.7903054	0.7868853	0.7864697	0.786050	0.781029	0.794834
-0.3	1.185458	1.185458	1.182660	1.182452	1.182265	1.178187	1.189171
-0.4	1.580611	1.580611	1.581233	1.581429	1.581634	1.582588	1.579786
-0.5	1.975764	1.975764	1.983536	1.983924	1.984280	1.995501	1.965450

Tableau IV-3: Comparaison entre les différents modèles de calcul des contraintes normale \bar{S}_x d'une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire.

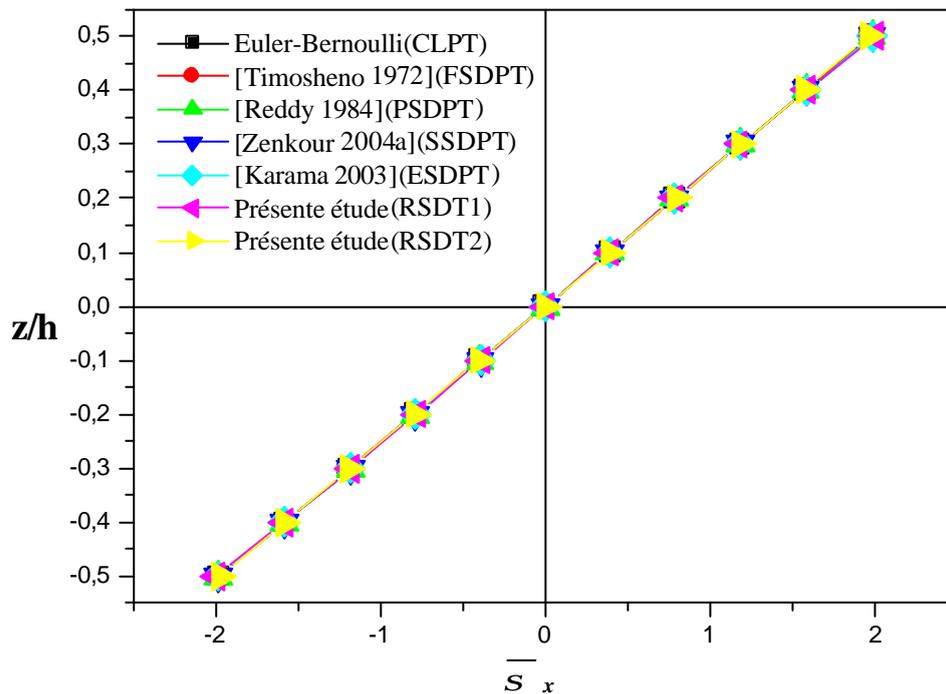


Figure IV-2 : Variation des valeurs de l'épaisseur (z/h) à travers les contraintes normales (\bar{S}_x) pour les différents modèles d'une plaque isotrope.

Les résultats obtenus à partir des différentes modèles ((Reddy et Hsu [Reddy 1984]), Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timosheno 1972], Euler-Bernoulli , Zenkour [Zenkour 2004]et Karama et al [Karama 2003]),coïncident avec ceux issus de la présente méthode comme il illustré dans les figures IV-1 et IV-2.Sur les tableaux IV-2 et IV-3 , on reporte respectivement les déplacements (\bar{w}) et les contraintes normales (\bar{s}_x) d'une plaque isotrope soumise à un chargement linéaire.

IV-3 Résultats numériques et discussions

L'analyse de la flexion statique est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Les matériaux choisis sont : pour le métal, l'aluminium (AL) et un oxyde zirconia (ZrO2), et pour la céramique : l'alumine (Al₂O₃). Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque. Les modules de Young de la céramique et du métal sont donnés par le tableau IV-4 :

Propriétés	Céramique : Alumine (Al ₂ O ₃)	Métal : Aluminium (Al)	Métal :Zirconia (ZrO2)
E (GPa)	380	70	151
<i>n</i>	0.3	0.3	0.3

Tableau IV-4 : Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich en FGM.

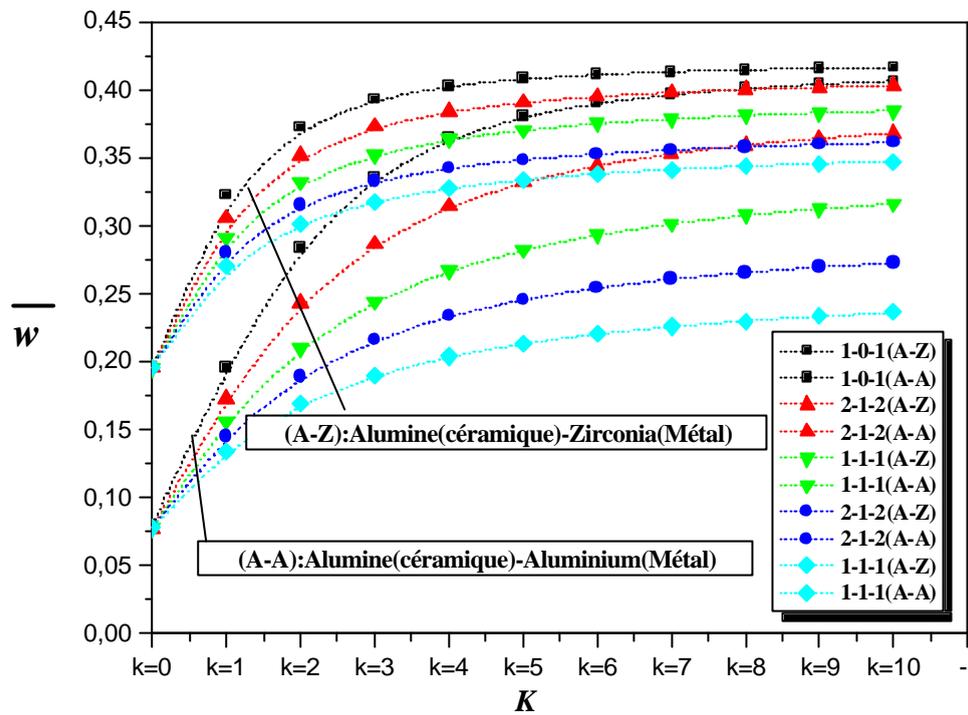


Figure IV-3 : Variation des valeurs de « k » à travers le déplacement (\bar{w}) pour les différents types de plaque de sandwich en FGM.

La figure IV-3, représente la variation de la flèche centrale non-dimensionnelle (\bar{w}) avec la fraction volumique représenté par « k » pour les plaques d'alumine (céramique)-aluminium (métal) et d'alumine (céramique)-zirconia (métal). Le déplacement des plaques de zirconia est supérieur à celui correspondant des plaques d'aluminium. En général, le déplacement augmente en fonction de l'augmentation de l'indice « k » d'une part et de l'épaisseur de l'âme par rapport à l'épaisseur totale de la plaque d'autre par « z ».

Où la valeur de référence est considéré comme $E_0 = 1\text{GPa}$. Et également le facteur de correction de cisaillement ($f = 5 / 6$) dans FSDPT. Des résultats numériques en terme de flèche adimensionnelles (\bar{w}), de contrainte normale (\bar{S}_x) et de cisaillement (\bar{t}_{xz}) sont reportés sur les tableaux (IV-5, IV-6, IV-7, IV-8) et ce pour les différentes théories. Quant aux figures IV-4, IV-5, IV-6, elles représentant les résultats de la présente méthode et ce pour les différentes variantes de plaques sandwiches. Il faut noter que : $a / h = 10$ et $a / b = 1$ et $q_0=100$.

Théorie	K	\bar{w}				
		La plaque (a)	La plaque (b)	La plaque (c)	La plaque (d)	La plaque (e)
RSDT1	0	0.07790303811	0.07790303811	0.07790303811	0.07790303811	0.07790303811
RSDT2		0.07790968813	0.07790968813	0.07790968813	0.07790968813	0.07790968813
SSDPT		0.07790303807	0.07790303807	0.07790303807	0.07790303807	0.07790303807
PSDPT		0.07790968816	0.07790968816	0.07790968816	0.07790968816	0.07790968816
ESDPT		0.07788354292	0.07788354292	0.07788354292	0.07788354292	0.07788354292
FSDPT		0.07791247898	0.07791247898	0.07791247898	0.07791247898	0.07791247898
CLPT		0.07375297775	0.07375297775	0.07375297775	0.07375297775	0.07375297775
RSDT1	1	0.1960374616	0.1567130768	0.1349817311	0.1734597228	0.1457900983
RSDT2		0.1960877843	0.1567290438	0.1349767793	0.1734932520	0.1457976301
SSDPT		0.1960374616	0.1567130769	0.1349817309	0.1734597228	0.1457900984
PSDPT		0.1960877844	0.1567290438	0.1349767793	0.1734932520	0.1457976300
ESDPT		0.1959726863	0.1566865529	0.1349765996	0.1734142440	0.1457710326
FSDPT		0.1970326068	0.1573574490	0.1353900656	0.1742772559	0.1462971232
CLPT		0.1900076715	0.1516443991	0.1301649070	0.1681029962	0.1407897697
RSDT1	2	0.2847866148	0.2106743313	0.1692408728	0.2432596500	0.1894930926
RSDT2		0.2849023821	0.2107090884	0.1692362771	0.2433313416	0.1895109912
SSDPT		0.2847866147	0.2106743312	0.1692408729	0.2432596502	0.1894930926
PSDPT		0.2849023822	0.2107090885	0.1692362770	0.2433313416	0.1895109914
ESDPT		0.2846544269	0.2106306182	0.1692373618	0.2431765984	0.1894644155
FSDPT		0.2866053575	0.2117059201	0.1698485201	0.2446474625	0.1902760723
CLPT		0.2774864509	0.2051804639	0.1641354702	0.2372843702	0.1841018127
RSDT1	3	0.33606390476	0.2451013158	0.1903941485	0.2872645148	0.2166927584
RSDT2		0.3362423053	0.2451555605	0.1903936675	0.2873727377	0.2167221065
SSDPT		0.3360639047	0.2451013157	0.1903941486	0.2872645149	0.2166927582
PSDPT		0.3362423057	0.2451555604	0.1903936678	0.2873727377	0.2167221065
ESDPT		0.3358662857	0.2450389560	0.1903877377	0.2871449685	0.2166528932
FSDPT		0.3385070153	0.2464129618	0.1911365619	0.2890830374	0.2176651224
CPT		0.3277910123	0.2393880264	0.1851437261	0.2809355606	0.2110929376
RSDT1	4	0.3645156376	0.2676028572	0.2043026094	0.3148758215	0.2343233353
RSDT2		0.3647438193	0.2676739215	0.2043068289	0.3150142476	0.2343624668
SSDPT		0.3645156376	0.2676028570	0.2043026094	0.3148758214	0.2343233354
PSDPT		0.3647438192	0.2676739214	0.2043068289	0.3150142475	0.2343624667
ESDPT		0.3642648216	0.2675240666	0.2042922485	0.3147257766	0.2342737088
FSDPT		0.3673781636	0.2691212885	0.2051427391	0.3170123902	0.2354305210
CLPT		0.3554038421	0.2617581963	0.1989684794	0.3083085881	0.2285939705
RSDT1	5	0.3808987521	0.2829700265	0.2139890657	0.3328492117	0.2463510788
RSDT2		0.3811637994	0.2830548580	0.2139976337	0.3330115755	0.2463980407
SSDPT		0.3808987518	0.2829700267	0.2139890657	0.3328492118	0.2463510789
PSDPT		0.3811637995	0.2830548581	0.2139976336	0.3330115758	0.2463980407
ESDPT		0.3806073603	0.2828776167	0.2139748350	0.3326747772	0.2462935437
FSDPT		0.3840228475	0.2846437675	0.2149026487	0.3352208361	0.2475567882
CLPT		0.3710315287	0.2770365513	0.2086012118	0.3261019295	0.2405318530

Tableau IV-5 : valeur des déplacements (\bar{w}), et l'effet de la fraction volumique « k » par rapport aux différentes dimensions des plaques sandwich en FGM.

Le tableau **IV-5** présente les valeurs maximale de déplacement adimensionnelle (\bar{w}), au centre de la plaque pour les différentes formes des plaques sandwiches en **FGM** soumises à une charge répartie variant linéairement à travers l'épaisseur ($q_0=100$).

Les résultats sont présents pour les différentes valeurs de « k » (0, 1, 2, 3, 4 et 5) et les différents types des plaques. Il est claire que l'inclusion de l'effet de déformation de cisaillement fait augmente la valeur de la flèche (\bar{w}). Aussi, la différence entre les résultats des théories de déformation-cisaillement est négligeable pour le cas des plaques entièrement en céramique ($k = 0$). Il est à noter que, les résultats de la présente méthode représenté par les deux modèles **RSDT1** et **RSDT2** sont identiques à ceux des deux théories **SSDPT** (théorie sinusoidal de cisaillement) et **PSDPT** (théorie paraboliques de cisaillement).

Les flèches les plus grandes sont celles de la plaque(a) sandwich (1-0-1), les flèches les plus petites sont celles de la plaque(c) sandwich (1-2-1). La flèche maximale \bar{w} diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche centrale (couche entièrement en céramique).

Le tableau IV-6, présente l'effet du rapport (a / b) sur le déplacement maximale au centre de la plaque (flèche) pour les différentes formes des plaques sandwiches en FGM, avec une fraction volumique $k = 2$.

Les différents Types de plaque	Théorie	\bar{w}				
		$a/b=1/4$	$a/b=1/2$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=4$
La plaque (a)	RSDT1	0.9969487918	0.7220474258	0.2847866148	0.04731604979	0.004696775151
	RSDT2	0.9971662339	0.7222323307	0.2849023821	0.04736267860	0.004710865830
	SSDPT	0.9969487920	0.7220474250	0.2847866147	0.04731604981	0.004696775152
	PSDPT	0.9971662333	0.7222323307	0.2849023822	0.04736267860	0.004710865836
	ESDPT	0.9967004829	0.7218362747	0.2846544269	0.04726282514	0.004680712612
	FSDPT	1.000369588	0.7249555641	0.2866053575	0.04804539476	0.004913455447
	CLPT	0.9832045874	0.7103653138	0.2774864509	0.04439783213	0.003840642913
La plaque (b)	RSDT1	0.7373495071	0.5340534666	0.2106743313	0.03502513094	0.003484312462
	RSDT2	0.7374145671	0.5341088300	0.2107090884	0.03503928186	0.003488764638
	SSDPT	0.7373495069	0.5340534665	0.2106743312	0.03502513095	0.003484312464
	PSDPT	0.7374145672	0.5341088299	0.2107090885	0.03503928183	0.003488764639
	ESDPT	0.7372676359	0.5339838061	0.2106306182	0.03500736583	0.003478760284
	FSDPT	0.7392894224	0.5357027175	0.2117059201	0.03543905667	0.003607568722
	CLPT	0.7270062108	0.5252619877	0.2051804639	0.03282887426	0.002839868011
La plaque (c)	RSDT1	0.5911853821	0.4283566592	0.1692408728	0.02830262572	0.002870630758
	RSDT2	0.5911763680	0.4283490588	0.1692362771	0.02830103401	0.002870451258
	SSDPT	0.5911853821	0.4283566594	0.1692408729	0.02830262573	0.002870630758
	PSDPT	0.5911763677	0.4283490590	0.1692362770	0.02830103402	0.002870451258
	ESDPT	0.5911791916	0.4283513263	0.1692373618	0.02830093719	0.002869802080
	FSDPT	0.5923274069	0.4293276835	0.1698485201	0.02854689519	0.002943894726
	CLPT	0.5815734307	0.4201868035	0.1641354702	0.2626167525	0.002271771210
La plaque (d)	RSDT1	0.8520081128	0.6170098414	0.2432596500	0.04035420666	0.003985126198
	RSDT2	0.8521426842	0.6171242912	0.2433313416	0.04038313961	0.003993935885
	SSDPT	0.8520081129	0.6170098416	0.2432596502	0.04035420667	0.003985126198
	PSDPT	0.8521426839	0.6171242911	0.2433313416	0.04038313963	0.003993935884
	ESDPT	0.8518521982	0.6168772430	0.2431765984	0.04032070217	0.003974940331
	FSDPT	0.8546183984	0.6192289358	0.2446474625	0.04091073613	0.004150458876
	CLPT	0.8407584601	0.6074479882	0.2372843702	0.03796549925	0.003284212734
La plaque (e)	RSDT1	0.6624694062	0.4799279728	0.1894930926	0.03161151851	0.003180507179
	RSDT2	0.6625027250	0.4799563575	0.1895109912	0.03161893158	0.003182984212
	SSDPT	0.6624694062	0.4799279729	0.1894930926	0.03161151850	0.003180507181
	PSDPT	0.6625027246	0.4799563571	0.1895109914	0.03161893159	0.003182984211
	ESDPT	0.6624158502	0.4798823781	0.1894644155	0.03159975960	0.003176712041
	FSDPT	0.6639413614	0.4811794560	0.1902760723	0.03192599388	0.003274505457
	CLPT	0.6523192260	0.4713006404	0.1841018127	0.02945629002	0.002548121971

Tableau IV-6: Effet du rapport (a / b) sur la dimension des plaques sandwiches FGM et ($k = 2$).

Il est constaté que les flèches maximales adimensionnelles \bar{w} diminuent avec l'augmentation du rapport (a/b) et ceci indépendamment du type de la plaque sandwich.

Tableau IV-7 présente les valeurs des contraintes axiales adimensionnelles \bar{s}_x , pour différentes valeurs de k et les différents types de plaques sandwiches FGM.

Théorie	K	\bar{s}_x				
		La plaque (a)	La plaque (b)	La plaque (c)	La plaque (d)	La plaque (e)
RSDT1	0	1.995500426	1.995500426	1.995500426	1.995500426	1.995500426
RSDT2		1.995500426	1.994322048	1.994322048	1.994322048	1.994322048
SSDPT		1.995500425	1.995500425	1.995500425	1.995500425	1.995500425
PSDPT		1.994322050	1.994322050	1.994322050	1.994322050	1.994322050
ESDPT		1.996604668	1.996604668	1.996604668	1.996604668	1.996604668
FSDPT		1.975763081	1.975763081	1.975763081	1.975763081	1.975763081
RSDT1	1	0.9440725801	0.7538738155	0.6475971685	0.8353570262	0.6551706776
RSDT2		0.9436998270	0.7535245180	0.6472490279	0.8350075555	0.6548254747
SSDPT		0.9440725801	0.7538738160	0.6475971682	0.8353570255	0.6551706779
PSDPT		0.9436998278	0.7535245180	0.6472490281	0.8350075555	0.6548254739
ESDPT		0.9444208532	0.7542072962	0.6479324979	0.8356868855	0.6554995708
FSDPT		0.9376502754	0.7483351152	0.6423380702	0.8295550361	0.6497427808
RSDT1	2	1.377021358	1.018781385	0.8158819124	1.177554594	0.8339863401
RSDT2		1.376618511	1.018389504	0.8154785470	1.177177220	0.8335924793
SSDPT		1.377021358	1.018781385	0.8158819132	1.177554596	0.8339863401
PSDPT		1.376618512	1.018389505	0.8154785470	1.177177220	0.8335924801
ESDPT		1.377389894	1.019156727	0.8162743708	1.177908115	0.8343626608
FSDPT		1.369340749	1.012525005	0.8099760802	1.170951433	0.8278288024
RSDT1	3	1.625907776	1.187845692	0.9198385532	1.393221446	0.9434577978
RSDT2		1.625518635	1.187448435	0.9194123216	1.392856605	0.9430467085
SSDPT		1.625907776	1.187845692	0.9198385524	1.393221447	0.9434577978
PSDPT		1.625518639	1.187448433	0.9194123224	1.392856605	0.9430467093
ESDPT		1.626253731	1.188225350	0.9202550185	1.393558668	0.9438501347
FSDPT		1.617583809	1.181332560	0.9136476671	1.386361424	0.9369686216
RSDT1	4	1.762667930	1.298330162	0.9882021870	1.528387607	1.013728625
RSDT2		1.762292931	1.297939361	0.9877663216	1.528043627	1.013311427
SSDPT		1.762667929	1.298330161	0.9882021862	1.528387607	1.013728625
PSDPT		1.762292931	1.297939361	0.9877663216	1.528043625	1.013311426
ESDPT		1.762991992	1.298702144	0.9886288593	1.528700743	1.014125945
FSDPT		1.753847661	1.291724923	0.9818700906	1.521441899	1.007062407
RSDT1	5	1.840255874	1.373757679	1.035815027	1.616230779	1.061363472
RSDT2		1.839886083	1.373376155	1.035375225	1.615906291	1.060944155
SSDPT		1.840255874	1.373757679	1.035815026	1.616230780	1.061363472
PSDPT		1.839886083	1.373376155	1.035375225	1.615906292	1.060944155
ESDPT		1.840568006	1.374119203	1.036245885	1.616521740	1.061761942
FSDPT		1.830967205	1.367120584	1.029405719	1.609248520	1.054588346

Tableau IV-7 : Effets de fraction volumique sur la contrainte axiale \bar{s}_x de la plaque sandwich FGM.

Toutes les théories (RSDT1, RSDT2, PSDPT, SSDPT, ESDPT, et FSDPT) donnent les mêmes résultats de contrainte axiale \bar{s}_x pour une plaque entièrement en céramique ($k = 0$).

On remarque que les contraintes normales \bar{s}_x augmentent proportionnellement avec pour l'exposant de la fraction volumique « k ». Elles donnent de fortes valeurs de cette dernière contrainte.

Cependant, dans le cas $k = 0$ (céramique), aussi les plus grandes valeurs des contraintes \bar{s}_x sont celles de la plaque (a) type (1-0-1) et les plus petites sont celles de la plaque(c) type (1-2-1).

Le tableau IV-8 contient les résultats de contraintes de cisaillement transversal adimensionnel \bar{t}_{xz} pour une plaque rectangulaire épaisse FGM soumise à une charge répartie ($q_0=100$).

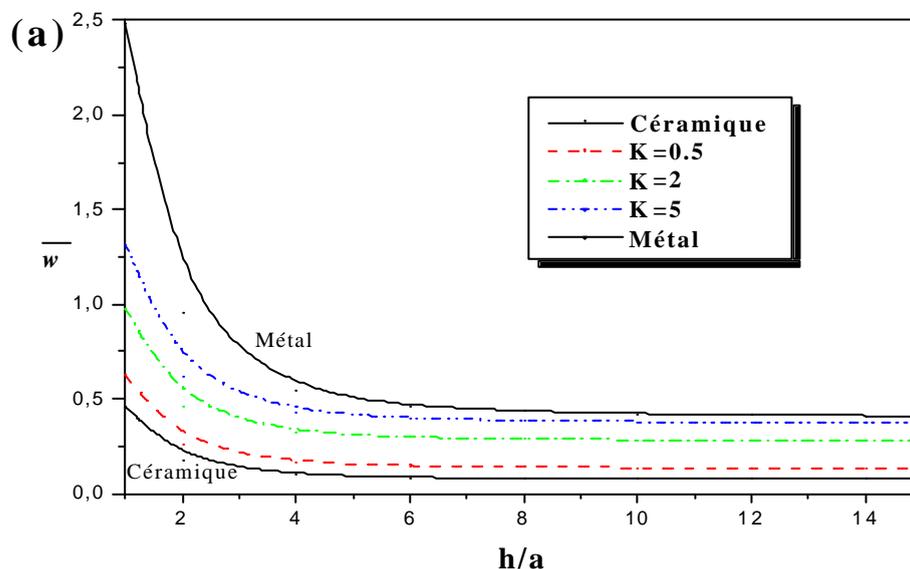
Théorie	K	\bar{t}_{xz}				
		La plaque (a)	La plaque (b)	La plaque (c)	La plaque (d)	La plaque (e)
RSDT1	0	0.2461800786	0.2461800786	0.2461800786	0.2461800786	0.2461800786
RSDT2		0.2385722368	0.2385722368	0.2385722368	0.2385722368	0.2385722368
SSDPT		0.2461800789	0.2461800789	0.2461800789	0.2461800789	0.2461800789
PSDPT		0.2385722369	0.2385722369	0.2385722369	0.2385722369	0.2385722369
ESDPT		0.2537964511	0.2537964511	0.2537964511	0.2537964511	0.2537964511
FSDPT		0.1591549430	0.1591549430	0.1591549430	0.1591549430	0.1591549430
RSDT1	1	0.3410283239	0.2846232298	0.2705450198	0.3015504090	0.2817627605
RSDT2		0.3343263458	0.2777698981	0.2628693010	0.2951461351	0.2743788976
SSDPT		0.3410283240	0.2846232299	0.2705450198	0.3015504093	0.2817627607
PSDPT		0.3343263457	0.2777698979	0.2628693008	0.2951461353	0.2743788976
ESDPT		0.3476999716	0.2916193263	0.2784338151	0.3080068645	0.2892704933
FSDPT		0.2687950153	0.2185983558	0.1999301764	0.2362456185	0.2107277991
RSDT1	2	0.4142621883	0.3048004591	0.2819062066	0.3344535292	0.3002035928
RSDT2		0.4091869511	0.2989262010	0.2745137059	0.3295841212	0.2933103754
SSDPT		0.4142621886	0.3048004593	0.2819062070	0.3344535294	0.3002035934
PSDPT		0.4091869513	0.2989262011	0.2745137056	0.3295841214	0.2933103755
ESDPT		0.4191527749	0.3108541107	0.2896048956	0.3393349480	0.3072458023
FSDPT		0.3489166061	0.2496834427	0.2185983556	0.2817339056	0.2362456186
RSDT1	3	0.4750163773	0.3168735258	0.2881994693	0.3562078083	0.3113186472
RSDT2		0.4713253791	0.3118723402	0.2811258564	0.3526990656	0.3048721239
SSDPT		0.4750163779	0.3168735260	0.2881994691	0.3562078077	0.3113186471
PSDPT		0.4713253798	0.3118723400	0.2811258568	0.3526990654	0.3048721236
ESDPT		0.4783140082	0.3220483081	0.2956225587	0.3596557495	0.3179071857
FSDPT		0.4100262941	0.2687950151	0.2293038042	0.3117467960	0.2514714278
RSDT1	4	0.5282678443	0.3250024098	0.2921729400	0.3721411748	0.3188535037
RSDT2		0.5254079891	0.3207031564	0.2853784402	0.3697033242	0.3127535851
SSDPT		0.5282678446	0.3250024101	0.2921729400	0.3721411748	0.3188535041
PSDPT		0.5254079892	0.3207031562	0.2853784403	0.3697033241	0.3127535852
ESDPT		0.5305159115	0.3294543459	0.2993375496	0.3744402084	0.3250796249
FSDPT		0.4581733210	0.2817339055	0.2362456189	0.3330334714	0.2615868441
RSDT1	5	0.5759064640	0.3309424574	0.2949192557	0.3845927855	0.3243713954
RSDT2		0.5733659296	0.3271941912	0.2883554168	0.3829703775	0.3185308111
SSDPT		0.5759064646	0.3309424577	0.2949192561	0.3845927854	0.3243713955
PSDPT		0.5733659295	0.3271941916	0.2883554169	0.3829703777	0.3185308112
ESDPT		0.5776291873	0.3348184848	0.3018629250	0.3860033781	0.3303214867
FSDPT		0.4970866716	0.2910748156	0.2411118073	0.3489166061	0.2687950150

Tableau IV-8 : Effets de la fraction volumique sur les contraintes transversales de cisaillement \bar{t}_{xz} de la plaque sandwich FGM

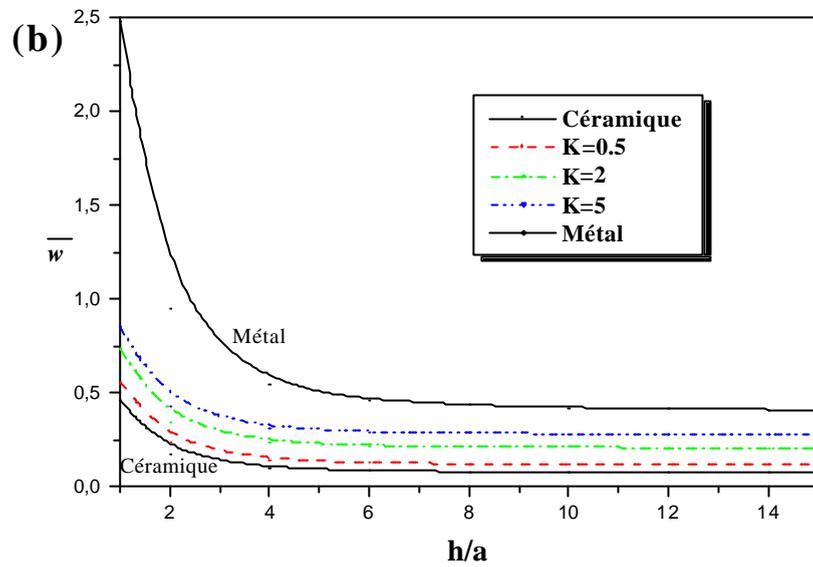
La différence relative entre (la présente théorie de plaque d'ordre élevé à deux variables) et les autres théories de déformation de cisaillement peuvent être stables pour les différentes valeurs de « k » et de ceci indépendamment du type de la plaque. En général, les plaques entièrement en céramique (plaque(a) type **1-0-1**) donnent les plus grandes valeurs de contraintes de cisaillement. La plaque (c) sandwich en **FGM** type (**1-2-1**) donne les plus petites valeurs des contraintes de cisaillement transversal.

Il faut noter que la théorie classique des plaques (**CLPT**) présente des valeurs des flèches et des contraintes axiales identiques à celle de la théorie des plaques de premier ordre (**FSDPT**). En outre, les contraintes de cisaillement transverse selon la théorie **FSDPT** sont indiscutables. On remarque que les résultats obtenus par la présente théorie d'ordre élevé à deux variables sont identiques à ceux des théories de déformation de cisaillement (**SSDPT**, **PSDPT**, **ESDPT**, **FSDPT**).

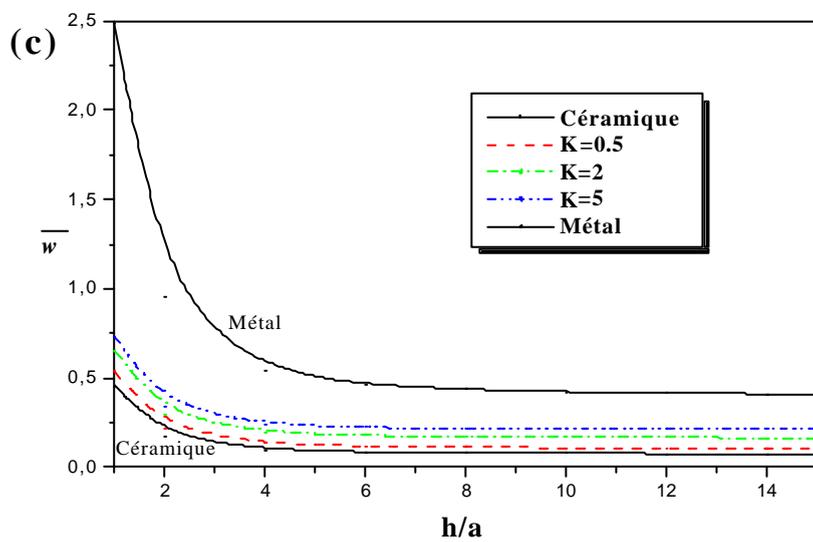
La variation de déplacement par rapport à l'épaisseur pour différents types des plaques sandwiches **FGM**, est illustrée sur les figures **IV-4**.



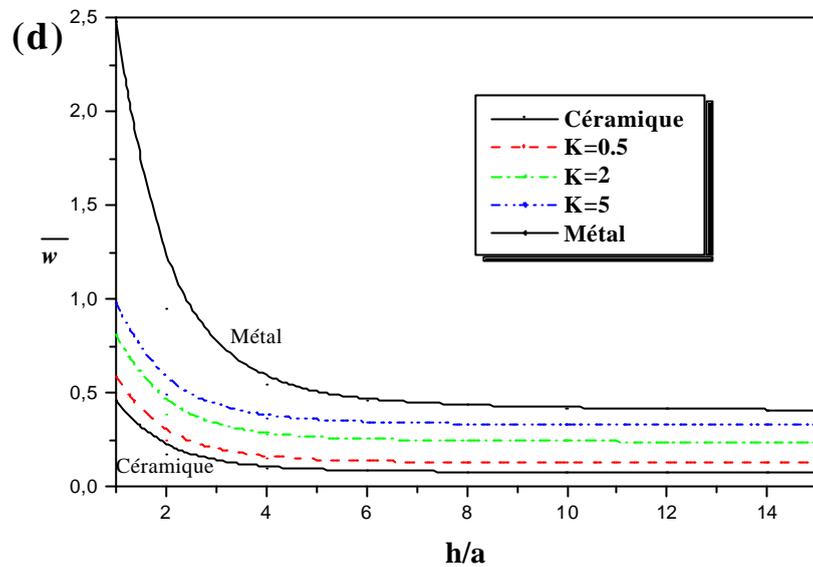
(a) Plaque sandwich **FGM** type (1-0-1)



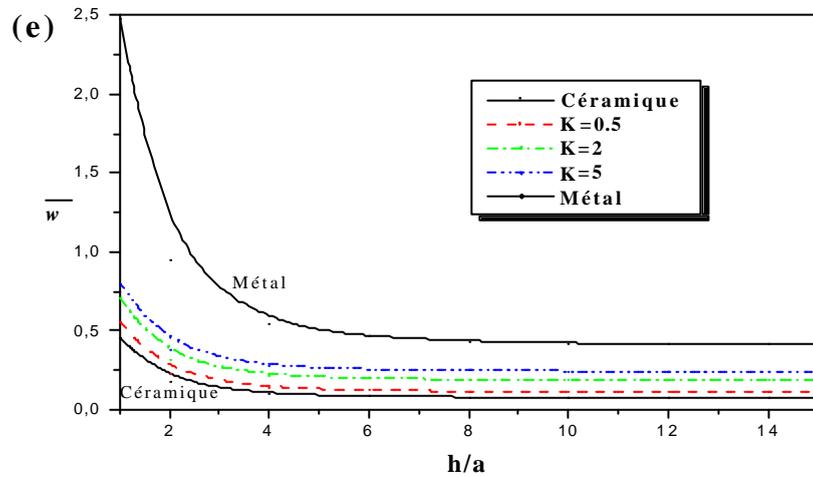
(b) plaque sandwich FGM type (1-1-1)



(c) La plaque sandwich FGM type (1-2-1)



(d) plaque sandwich FGM type (2-1-2)

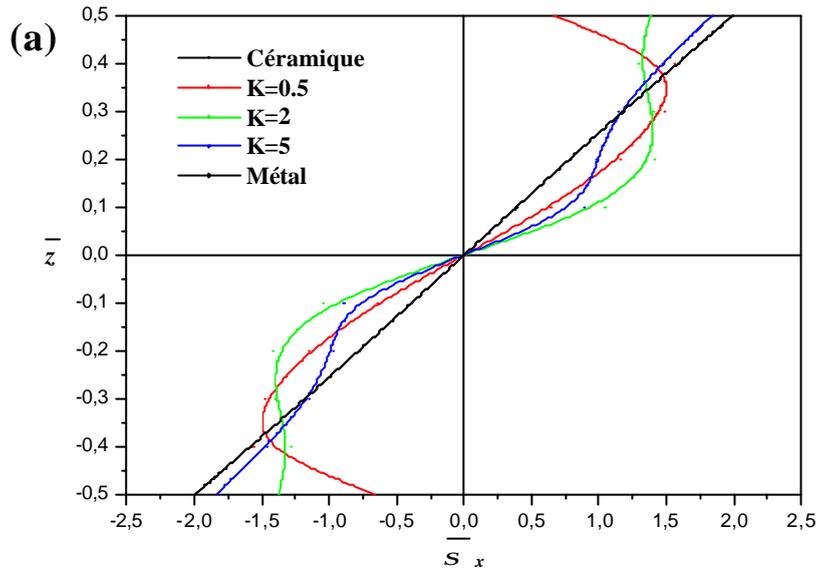


(e) La plaque sandwich FGM type (2-2-1)

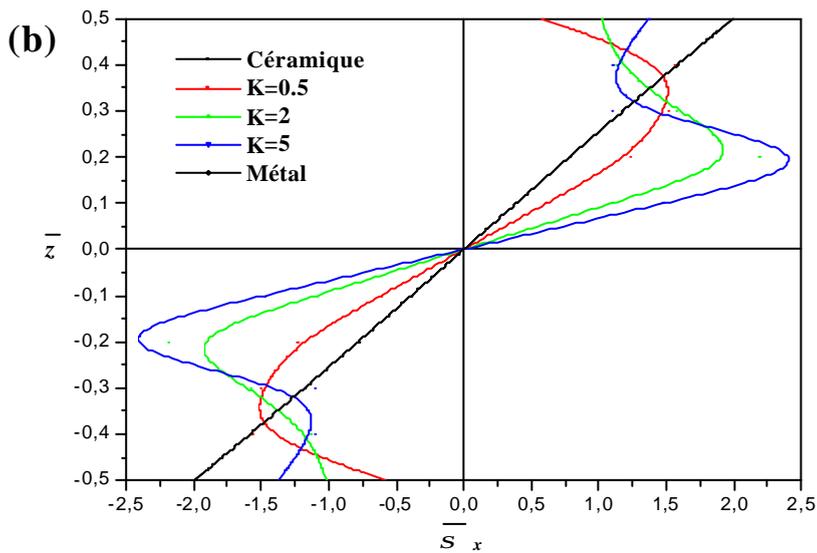
Figure IV-4 : Influence de l'épaisseur (a / h) pour diverses valeurs de « k » et différents types des plaques sandwiches FGM.

On peut observer que la déflexion de la plaque FGM riches en métaux est plus grande par rapport à la plaque en céramique. Ce ci peut être expliqué par le fait que le module de Young de la céramique (380GPa) étant élevé par rapport à celui du métal (70GPa).

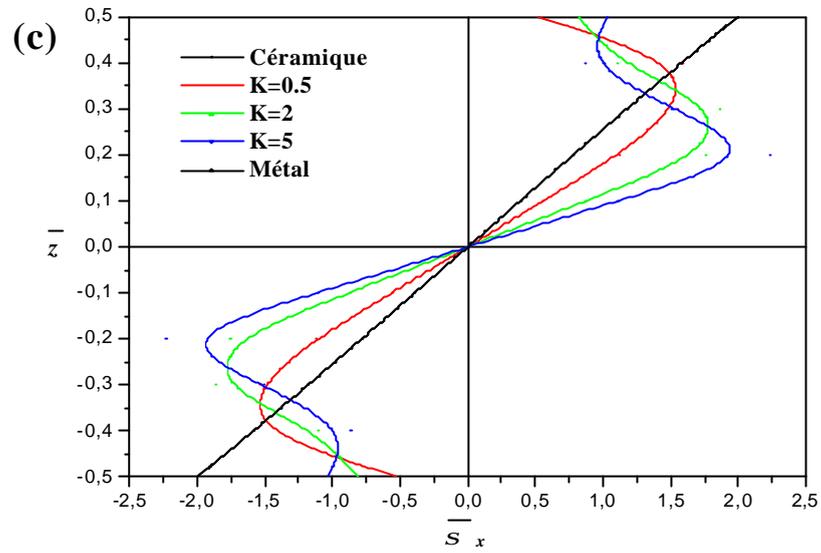
Sur la **figure IV-5**, on trace la variation de la contrainte axiale \bar{s}_x à travers l'épaisseur des différents types des plaques sandwiches en **FGM**. Les contraintes sont des contraintes de traction au dessous du plan médium et des contraintes de compression au dessus du plan médium sauf pour la plaque(e) **FGM** non-symétrique type(2-2-1).



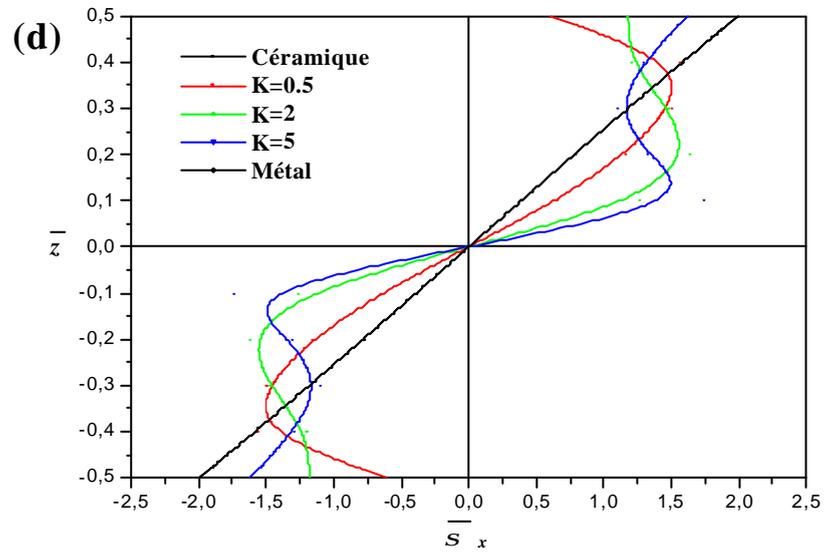
(a) Plaque sandwich **FGM** type (1-0-1)



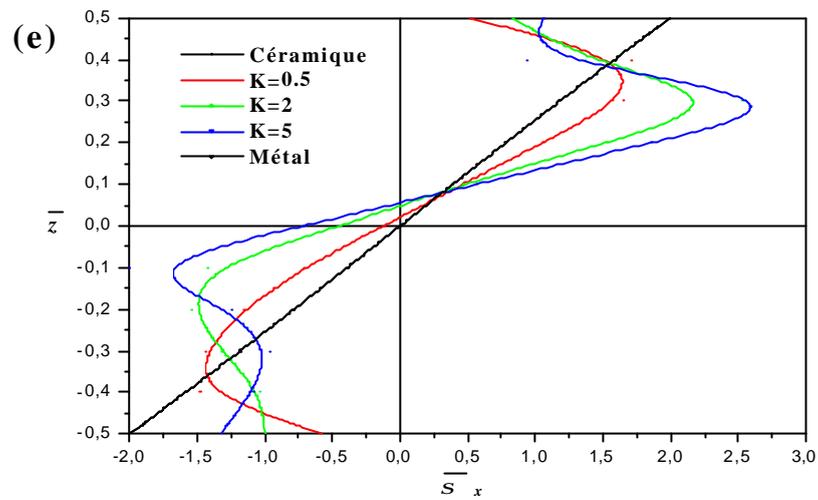
(b) plaque sandwich **FGM** type (1-1-1)



(c) La plaque sandwich FGM type (1-2-1)



(d) plaque sandwich FGM type (2-1-2)

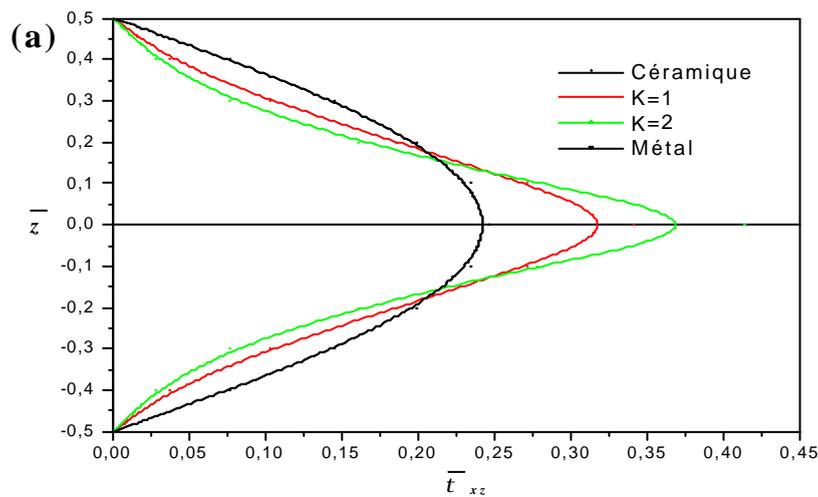


(e) La plaque sandwich FGM type (2-2-1)

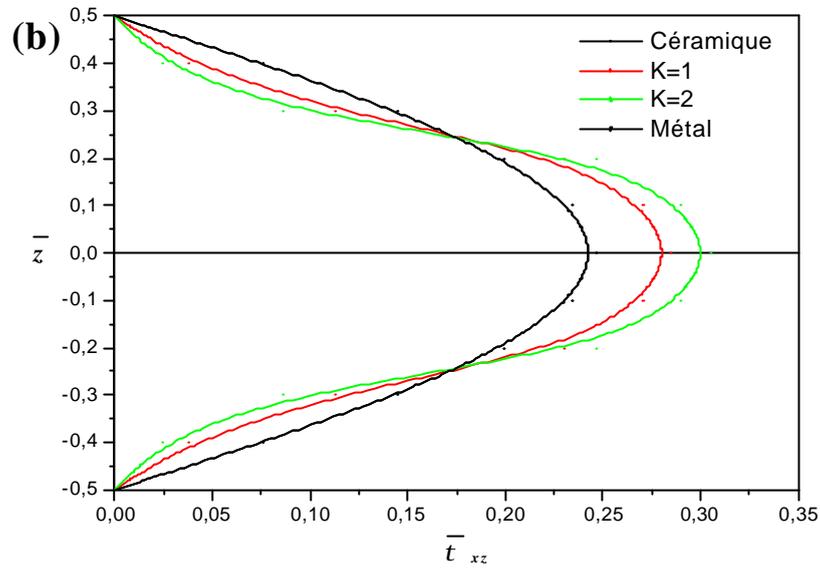
Figure IV-5 : Variation de la contrainte axiale \bar{s}_x , à travers l'épaisseur des tôles pour différentes valeurs de k et différents types des plaques sandwiches FGM.

Les résultats démontrent une variation non- linéarité de la de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de plaques en FGM. Il est important d'observer que la contrainte maximale dépend de la valeur de l'exposant de la fraction volumique k .

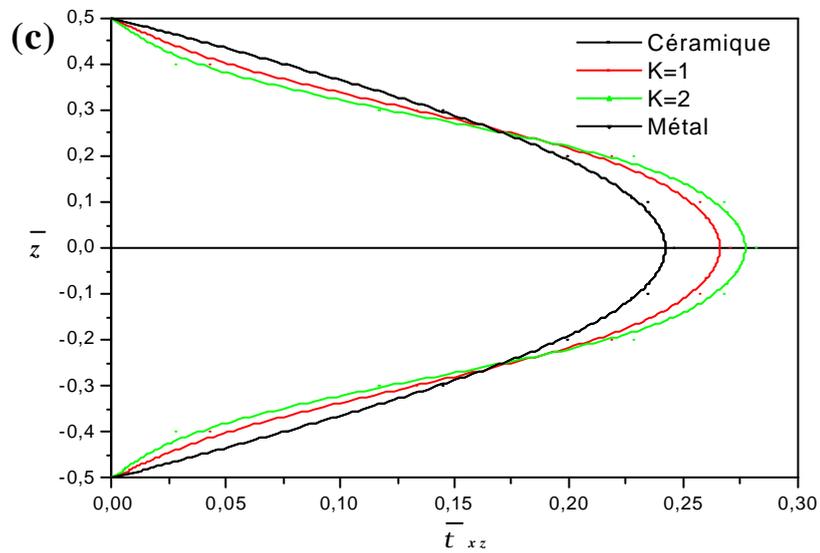
Sur la **figure IV-6**, on représente la variation de la contraintes de cisaillement \bar{t}_{xz} à travers l'épaisseur des différents types de plaques sandwiches.



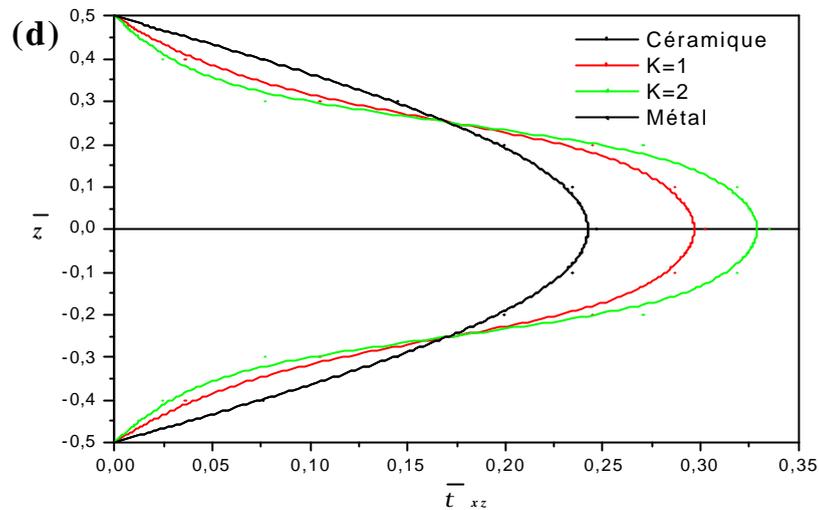
(a) Plaque sandwich FGM type (1-0-1)



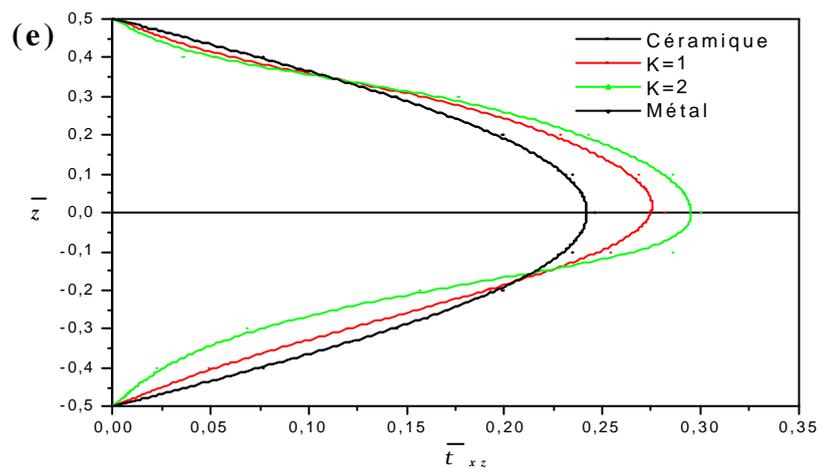
(b) plaque sandwich FGM type (1-1-1)



(c) La plaque sandwich FGM type (1-2-1)



(d) plaque sandwich **FGM** type (2-1-2)



(e) La plaque sandwich **FGM** type (2-2-1)

Figure IV-6 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale \bar{t}_{xz} par l'épaisseur de la plaque pour différentes valeurs de k et différents types des plaques sandwiches **FGM**.

Les valeurs maximales des contraintes de cisaillement se produisent au milieu de la plaque et son intensité est plus grande pour les plaques **FGM** comparativement à celle des plaques homogènes (céramique et métal). En raison de la non-symétrie de la plaque **FGM** type (2-2-1), la valeur maximale de la contrainte de cisaillement transversale \bar{t}_{xz} , (Figure IV-6e), se produit comme décrit auparavant, à un point situé sur le plan médian de la plaque.

IV-4 Conclusion

Dans cette étude, deux nouvelles théories de déformation et de cisaillement ont été proposées pour analyser le comportement statique des plaques rectangulaires épaisses sandwich en **FGM**.

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats numériques des plaques épaisses en **FGM** en flexion statique soumises à une charge transversale, et les résultats ont été comparés avec d'autres théories précédentes de déformation-cisaillement. Les théories développées donnent une distribution parabolique de la déformation de cisaillement transversal et satisfait les conditions aux limites et qui n'exige pas de facteur de correction de cisaillement. La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour le comportement statique des plaques sandwiches symétriques et non symétrique à gradient variable (évalué). Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes obtenues en utilisant les présentes nouvelles théories de déformation de cisaillement à quatre inconnues sont presque identiques à ceux des autres théories à cinq inconnues (**SSDPT** et **PSDPT**). L'extension de la théorie actuelle est également prévue pour des conditions aux limites générales et des plaques de forme plus générale. En conclusion, on peut dire que les théories proposées **RSDT1** et **RSDT2** sont précises et simples à résoudre pour l'étude du comportement statique des plaques rectangulaires épaisses sandwiches en **FGM** quelque soit leurs formes de symétries et non-symétrique.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était de développer une méthode analytique directe qui détermine les valeurs des contraintes et les déplacements des plaques rectangulaires épaisses sandwiches en **FGM** sous chargement de flexion statique.

Dans cette étude, nous avons proposé deux nouveaux modèles analytiques performants basés sur la théorie d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse de comportement mécanique de la flexion des plaques rectangulaires épaisses sandwiches en matériaux à gradients évalués **FGM** soumises à un chargement transversal. Pour valider ces modèles, nous avons comparé ces résultats à des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature.

Les résultats numériques obtenus montrent que la variation du module d'élasticité joue un rôle important sur les distributions de contraintes normales et tangentielles ainsi que le déplacement transversal de la plaque **FGM**.

La théorie proposée (**RSDT1** et **RSDT2**) à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches et les contraintes dues au chargement mécanique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé avec quatre inconnus sont identique comparativement avec ceux à cinq inconnus au plus sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement mécanique à la flexion statique des plaques épaisses en **FGM**.

CONCLUSION GENERALE

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique).

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux FGM et précisément leurs comportements vis à vis des chargements statiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

- [Ambartsumyan 1969] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic PublishingCo, 1969.
- [Averill 1994] Averill R.C. Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage. Composite Eng., vol. 4, pages 381/395, 1994.
- [Abdi 1997] ABDIZADEH, H, Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex:«Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'Alumine», Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon RFrance, 212p.
- [Aldo 2002] Aldo R. Boccaccini, O. Van der Biest, Jan B. Talbot, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications: Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- [Afaq 2003] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Ait Atmane 2010] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121, 2010.
- [Boch 1986] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986.
- [Boch 1987] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192,1987.
- [Bishop 1993] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters; 12 (19) :1516-18, 1993.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [**Bao 1995**] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [**Baron 2008**] C. Baron., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [**Benatta 2008**] M.A. Benatta., I. Mechab I., A. Tounsi., E.A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*; 44 (2): 765–773. 2008.
- [**Cho 1996**] Cho,K.Kim & M.Kim . Efficient high order shell theory for laminated composites. *Composite structure* (1996) 197-212.
- [**Choa 2000**] Choa, Kimb. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-nodded finite element ". *Composites: Part B* 31 (2000) 65–74.
- [**Carrera 2000**] E. Carrera .An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198, 2000.
- [**Chung 2001**] Chung Y.L., Chi S.H. The residual stress of functionally graded materials. *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering* 13, 2001, 1-9.
- [**Chakraborty 2003**] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, JN. Reddy. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *Int. J. of Mechanical Sciences*. 45(2003) 519 – 539.
- [**Carrera 2004**] Carrera E. On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, vol. 82, pages 541/554, 2004.
- [**Cugnoni 2004**] J.cugnoni. Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat de l’école polytechnique fédérale de Lausanne ,2004.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Chinosi 2007] C. Chinosi, LD. Croce. Approximation of functionally graded plates with non-conforming finite elements. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 210 (2007) 106 –115.
- [Dhatt 1969] Dhatt G. Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis. *Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering*, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., P. 255-278 (1969).
- [Delale 1983] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [Di Sciuva 1984] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279/295, 1984.
- [Duong 2008] Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école national des ponts et chaussées, 2008.
- [Hildebrand 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*, 1949.
- [He 1994] L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. *Int J Solids Structures*, vol. 31, no. 5, pages 613-627, 1994.
- [Ichikawa 2000] Ichikawa K. (Ed), *Functionally graded materials in the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts*, 2000, 264 p., Hardcover.
- [Icardi 2001] Icardi U. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composite Structures: Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Kirchhoff 1950] G.Kirchhoff .uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheid. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, Vol .40, pages 51-88 ,1950.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Kapania 1989] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I: Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol.27, no.7, pages 923,934, 1989.
- [Kokini 1990] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990,
- [Koizumi 1992] Koizumi M., The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Graded Materials, (1993)*, 34, 3-10.
- [Kant 2000] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65, 75, 2000.
- [Kant 2001] Kant T., Swaminathan K. Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. *Composite Structures* 53(2001) 73-85.
- [Kant 2002] T. Kant and K.Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*, 56(4):329-344, 2002.
- [Karama 2003] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Kieback2003] Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering*, A362 (2003) 81-105.
- [Kadoli 2008] Ravikiran Kadoli, Kashif Akhtar, N. Ganesan Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory *Applied Mathematical Modelling* 32 (2008) 2509-2525.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Lo 1977] K.H.Lo & R.M.Christensen. A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's .journal of applied mechanics, Vol.44, N 4, pages 663-668, 1977.
- [Lee 1995] Lee Y.D., Erdogan F., Residual/thermal stress in FGM and laminated thermal barrier coatings. International Journal of Fracture 69, 1995, 145–165.
- [Mindlin1951] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mistler 1973] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull; 52 (11): 850-854, 1973.
- [Murthy 1981] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA, 1981.
- [Murakami 1986] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. Journal of Applied Mechanics. vol.53, pages 661-666, 1986.
- [Moya1992] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, Materials Letters; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [Melenk 1996] J.M.Melenk, I.Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. Computer Meth Appl Mech Engng1996; 139:289-314.
- [Moita 1996] José Sunôes Moita M. Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model. Composite Structures 35 (1996) 15-92.
- [Miyamoto 1999] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., Functionally graded materials: design, processing and applications, Materials Technology Series , Vol. 5 – 1999.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Mechab 2008] Mecheb Ismail. Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique. Thèse de doctorat de l'université de sidi bel abbes (UDL .2008).
- [Mévrel 2009] Mévrel R., Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine, Département Matériaux Métalliques et Procédés, PlastOx 2007 (2009), 255–264.
- [Merdaci 2011] Merdaci Slimane ,Tounsi Abdelouahed ,Houari Mohammed Sid Ahmed , Mechab Ismail , Hebali Habib ,Benyoucef Samir, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates ,Archive of applied mechanics,inpress,2011,ISSN 0939-1533.
- [Nelson 1974] R.B.Nelson & D.R.Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183,1974.
- [Naghdi 1975] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502, 1975.
- [Noor 1989] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for Multilayered composite plates. Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1, 12, 1989.
- [Nguyen 2004] Viet.Tung. Nguyen. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Omori 1998] Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T., J. Jpn. Inst. Met, 62 (1998) 986-991.
- [Patel 2004] Patel B.P, Munot C.S, Gupta S.S, Sanbanson G.T., Ganapatthi M.Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminate cross-ply oval cylindrical shells. Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004) 1083–1104.
- [Reissner1945] Reissner.E .The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates.J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Reissner 1961] E.Reissner & Y.Stavesky. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate .Journal of Applied Mechanics. Vol.28, pages 402-408, 1961.
- [Reissner 1975] E.Reissner & Y.Stavesky. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate .Journal of Applied Mechanics. Vol.28, pages 402-408, 1975.
- [Reddy 1984] J.N.Reddy. A simple higher order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics .Vol.51, pages 745-752, 1984.
- [Rogers 1992] T.M.Rogers, P.Watson, A.J.M.Spencer. An exact three-dimensional solution for normal loading of inhomogeneous and laminated anisotropic elastic plates of moderate thickness. Proc R Soc London Ser A1992; 437:199-213.
- [Reddy 1997] Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. International Journal of Solids and Structures 34 (26), 3373–338, 1997.
- [Reddy 1999] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Sankar 2001] Reynaud C., Thévenot F., Chartier T., Processing and microstructure of SiC laminar composites, International Journal of Refractory Metals and Hard Materials, Vol 19, 2001, p. 425-435.
- [Sankar 2002] BV. Sankar, JT. Tzeng. Thermal stresses in functionally graded beams. AIAA J. 40(2002) 1228 – 1232.
- [Sarfaraz 2009] R. Sarfaraz Khabbaz, B. Dehghan Manshadi, A. Abedian .Nonlinear analysis of FGM plates under pressure loads using the higher-order shear deformation theories. Composite Structures 89 (2009) 333–344.
- [Timoshenko1959] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [Timoshenko1972] S.P.Timoshenko et J.M.Gere. Mechanics of Materials. New York: D.Van Nostrand Company, 1972.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Takahashi 1990] Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1990, 129-34.
- [Touratier 1991] M. Touratier. An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Topdar 2003] P.TOPDAR, A .H. SHEIKH AND N.DHANG .Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model. J. Sandwich Structures and Materials, Vol. 5_July 2003.
- [Tafla 2007] Achraf TAFLA .Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches. Thèse de doctorat de l'Université de Reims Champagne- Ardenne, 2007.
- [Whitney 1969] Whitney J.M. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. J.Compos Mater. Vol.3, p.534-547, 1969.
- [Whitney 1973] J.M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads . J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Will, 1976] Williams, J.C., «Doctor-Blade Process, in Treatise on Materials Science and Technology», New York: Academic Press, pages: 173-198, 1976.
- [Wetherhold 1996] RC. Wetherhold, S. Seelman, J. Wang. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation. Composite Science and Technology 1996; 56: 1099 – 1104.
- [Watremetz 2006] Watremetz B., Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- [Wu 2006] Wu Z, Chen W .An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading. Composite Structures 73, (2006) 99–109.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Yang 1966] P.C.Yang, C.H.Norris & Y.Starsky. Elastic wave propagation in heterogeneous plate. J.Solide Structures .Vol.2, pages 665-684, 1966.
- [Yuki 1990] Yuki M., Murayama T., Irisawa T., Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1991, 203-208.
- [Yoshihisa 2004] Yoshihisa Uchida, Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39- 51-B, Vol. 39-B, Mar., 2004.
- [Zenkour 2004] A. M. Zenkour., Kafr El-Sheikh, Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory, Acta Mechanica; 171 (3-4):171–187 (2004).
- [Zenkour 2006] Ashraf M. Zenkour .Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Applied Mathematical Modelling 30 (2006) 67–84.
- [Zhong 2007] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. Composites Science and Technology; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [Zenkour 2010] A.M. Zenkour, M. Sobhy .Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates .Composite Structures 93 (2010) 93–102.