

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : **BAKORA Ahmed**

Intitulé de la thèse

Contribution à l'analyse du post-flambement des plaques FGM épaisses soumises à un chargement thermo-mécanique

Soutenu le : ... /... / 2015

Composition du jury :

ADDA BEDIA El Abbas	Pr	Président	UDL SBA
TOUNSI Abdelouahed	Pr	Directeur de thèse	UDL SBA
BENATTA Atif Mohamed	MCA	Examineur	UDL SBA
KACI Abdelhakim	MCA	Examineur	U DE SAIDA
YEGHNEM Redha	MCA	Examineur	U DE SAIDA
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	Examineur	U DE MASCARA

Année universitaire 2015-2016

Remerciements

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr le professeur **Abdelouahed TOUNSI** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et son rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr **HOUARI Mohammed Sid Ahmed** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Je tiens aussi à rendre hommage au Pr **El Abess Adda Bedia**, Professeur à L'UDL de Sidi Bel Abbès et directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour son intérêt à mon travail ; je lui exprime mon honneur ainsi que ma gratitude d'être président de jury de ma soutenance.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **BENATTA Atif Mohamed**, **KACI Abdelhakim**, **YEGHNEM Redha** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Dédicaces

Dédicaces

Je dédie cette thèse
À mes parents,
À mes frères et sœurs.

ملخص

ملخص

تعرض هذه الدراسة تحقيقاً تحليلياً عن سلوكيات الالتواء وما بعد الالتواء للوحات سميكة متدرجة وظيفياً تستريح على أسس مرنة وتتعرض لعدة أنواع من الأحمال: الضغط في المستوي (x, y) ، حرارية وأخرى مركبة ميكانيكية وحرارية. ويفترض من خصائص المواد أن تكون مستقلة عن درجة الحرارة، و متدرجة في اتجاه سماكة اللوحة وفقاً لتوزيع قوة قانون بسيط من حيث حجم كسور المكونات وتستخدم الصياغات على نظرية التشوه القصي ذات أعلى ترتيب للوحة مع الأخذ في الاعتبار عدم استقامة Von Karman، التشوه الهندسي الأولي و أساس مرن من نوع Pasternak. من خلال تطبيق طريقة Galerkin، تم تحديد شكل العلاقات المغلقة لأحمال الالتواء و مسارات التوازن ما بعد الالتواء للوحات دعمت بكل بساطة. ويتم التحليل لإظهار الآثار المادية و الخصائص الهندسية، نوعية الضبط في حدود المستوي (x, y) ، وصلابة الأساس، و التشوه الهندسي الأولي على الالتواء و قدرة التحميل ما بعد الإلتواء للوحات.

الكلمات الدالة: مواد متدرجة وظيفياً، ما بعد الالتواء، نظرية التشوه القصي ذات أعلى ترتيب، أساس مرن، التشوه الهندسي الأولي.

Résumé

Résumé

Le post flambement des plaques épaisses en matériau fonctionnellement graduée (FGM) soumises à des charges de compression dans le plan, thermiques et thermomécaniques est étudié dans ce travail. Il est supposé que la plaque est appuyée sur une fondation élastique de type Pasternak lors de la déformation. Les propriétés non homogènes thermomécaniques sont considérées comme indépendantes de la température, et graduées en douceur par la distribution de loi de puissance à travers l'épaisseur en termes de fractions de volume des constituants. En utilisant la théorie de plaque de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur ainsi que les relations non-linéaires contrainte-déplacement de Von-Karman, Les équations d'équilibre et de compatibilité des plaques FGM imparfaites sont dérivées. La technique de Galerkin est utilisée pour déterminer les charges de flambement et les chemins d'équilibre de post-flambement pour les plaques simplement appuyées. Des exemples numériques sont présentés pour montrer les influences de l'indice de la loi de puissance, la raideur de la fondation élastique et l'imperfection sur la charge critique de flambement et la capacité de chargement de post-flambement des plaques.

Mots-clés: Matériaux fonctionnellement gradués; Post-flambement; La théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur; Fondation élastique; imperfection.

Abstract

Abstract

Postbuckling of thick plates made of functionally graded material (FGM) subjected to in-plane compressive, thermal and thermo-mechanical loads is investigated in this work. It is assumed that the plate is in contact with a Pasternak-type elastic foundation during deformation. Thermo-mechanical non-homogeneous properties are considered to be temperature independent, and graded smoothly by the distribution of power law across the thickness in terms of the volume fractions of constituents. By employing the higher order shear deformation plate theory together the non-linear von-Karman strain-displacement relations, the equilibrium and compatibility equations of imperfect FGM plates are derived. The Galerkin technique is used to determine the buckling loads and postbuckling equilibrium paths for simply supported plates. Numerical examples are presented to show the influences of power law index, foundation stiffness and imperfection on the buckling and postbuckling loading capacity of the plates.

Keywords: Functionally Graded Materials; Postbuckling; Higher order shear deformation theory; Elastic foundation; Imperfection

Table des matières

Table des matières

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	
Introduction.....	5
I.1 Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	5
I.2 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	7
I.3. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)	9
I.3.1 Estimation auto-consistante	10
I.3.2 Le schéma de Mori-Tanaka	10
I.3.3 Le modèle des sphères composites assemblées	11
I.3.4 Le modèle des cylindres composites assemblés.....	11
I.3.5 Les modèles micromécaniques	11
I.4. L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs).....	11
I.4.1 La loi exponentielle	12
I.4.2 La loi de puissance	13
I.4.3 Une fonction sigmoïde	13
Conclusion	14
Chapitre II : Revue bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	
Introduction	15
II.1. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés	15
II.1.1 Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)	16

<i>II.1.2</i>	Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de Déformation de cisaillement (FSDT).....	17
<i>II.1.3</i>	Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation cisaillement (TSDT)	18
II.2.	Des études rapportées sur des plaques FGMs	20
<i>II.2.1</i>	Analyse statique thermo-élastique des plaques FGMs	21
<i>II.2.2</i>	Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs	24
II.3	Influence des défauts initiaux sur le comportement de flambement et post-flambement.....	27
II.4	Flambements locaux et post-flambement des structures	28
II.5	Types d'instabilité	30
	Conclusion	31

Chapitre III : Le modèle et le développement analytique

	Introduction	32
III.1.	Les formulations théoriques	32
<i>III.1.1</i>	Cinématique	32
<i>III.1.2</i>	Les equations constitutive	34
III.2	Analyse de post-flambement mécanique	39
III.3.	Analyse thermique de post-flambement	39
<i>III.3.1</i>	Elévation uniforme de la température	41
<i>III.3.2</i>	Un gradient de température à travers l'épaisseur	41
III.4	Analyse thermomécanique de post flambement	42
	Conclusion	43

Chapitre IV : Les résultats et discussions

	Introduction	44
IV.1	le post flambement des plaques isotropes parfaites et imparfaites	44
IV.2.	L'analyse de flambement et post flambement des plaques FGMs épaisses reposant sur des fondations élastiques	45
<i>IV.2.1</i>	Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous une charge de compression uniaxiale	45

IV.2.2	Effets des conditions aux limites dans le plan sur le post flambement des plaques FGMs	46
IV.2.3	Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous différentes types de charges thermiques	46
IV.2.4	Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous différentes types de charges thermiques	48
IV.2.5	Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous l'élévation uniforme de la température	50
IV.2.6	Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous la compression uniaxiale	50
IV.2.7	Effets du champ de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale	50
IV.2.8	Des Effets interactives de la fondation élastique et le gradient de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale	51
	Conclusion	52
	Conclusion générale	53
	Références bibliographiques	56

Liste des figures

Liste des figures

Chapitre I

Fig.1 Illustration de la hiérarchie des matériaux	6
Fig.2 Exemples des FGMs naturels et autres conçus par l'homme	7
Fig.3 Les champs potentiels de l'application des FGMs	9
Fig.4 Deux phases matérielles avec (a) microstructure squelettique, et (b) microstructure particulière [17]	10
Fig.5 La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque E-FGM	12
Fig.6 La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM	13
Fig.7 La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM.....	14

Chapitre II

Fig.1 Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [4]	16
Fig.2 Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin [4]	18
Fig.3 Illustration de la plaque d'ordre élevé [4]	19
Fig.4 Flambement local d'une poutre en « L »	28
Fig.5 Instabilités locales	29
Fig.6 Types d'instabilité : bifurcation et point limite	30

Chapitre III

Fig.1 La géométrie et le système des coordonnées de la plaque FGM sur la fondation élastique	33
---	----

Chapitre VI

Fig.1 Comparaisons des charges de post flambement-déflexion pour les plaques isotropes	44
Fig.2 Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous une charge de compression uniaxiale (tous les bords sont mobiles).....	45

Fig.3 Effets des conditions aux limites dans le plan sur le post flambement de la plaque FGM sous la compression uniaxiale.....	46
Fig.4 Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous une élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles).....	47
Fig.5 Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous un gradient de température (tous les bords sont immobiles).....	47
Fig.6 Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous une élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles).....	48
Fig.7 Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous un gradient de température (tous les bords sont immobiles).....	48
Fig.8 Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambage de plaques de FG sous une élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles).....	49
Fig.9 Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambage de plaques de FG dans un gradient de température (tous les bords sont immobiles).....	49
Fig.10 Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous la compression uniaxiale (les bords sont immobiles on $y = 0, b$).....	50
Fig.11 Effets du champ de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale (les bords $y=0, b$ sont immobiles).....	51
Fig.12 Des Effets interactives de la fondation élastique et le gradient de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale (les bords $y=0, b$ sont immobiles).....	51

Liste des notations

Liste des notations

a, b : la longueur et largeur de la plaque.

E(z), E_c, E_m : les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal.

h : l'épaisseur de la plaque.

K(z), K_c, K_m : la conductivité thermique du FGM, céramique, métal.

m, n : le nombre des demi-ondes dans les deux directions x et y.

N_i, M_i, S_i, Q_i : les résultantes des contraintes.

F_x, F_y : les forces planes de bords.

T : la température.

u, v, w : les composantes du déplacement.

x, y, z : les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

α(z), α_c, α_m : les coefficients d'expansion thermique du FGM, céramique, métal.

γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} : les déformations de cisaillement.

ε_x, ε_y : les déformations normales.

ΔT_{cr} : le changement dans la température critique de flambement.

ν : le coefficient de Poisson.

σ_x, σ_y : les contraintes normales.

σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes de cisaillement.

Introduction Générale

Introduction Générale

Avec le développement de nouvelles industries et procédés modernes, de nombreuses structures servent dans des environnements thermiques, entraînant la découverte d'une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériaux fonctionnellement gradués (FGMs). Les FGMs ont été initialement conçus comme matériaux de barrière thermique pour des applications structurales en aérospatiale et dans des réacteurs de fusion. Ils sont maintenant mis au point pour un usage général en tant que des composants structurels dans des environnements à température extrêmement élevée. La capacité de prédire la réponse des plaques FGMs et coques lorsqu'ils sont soumis à des charges thermiques et mécaniques est d'un intérêt primordial à l'analyse structurale. En fait, de nombreuses structures sont soumises à des niveaux élevés de charge qui peut en résulter des relations charges/déflexion non linéaires en raison de grandes déformations. Un des problèmes importants qui méritent une attention particulière est l'étude de leur réponse non linéaire pour grande déflexion, le post flambement, et les vibrations non linéaires. Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Lorsque la charge appliquée est augmentée au-delà de la charge de flambement élastique, la réponse de la plaque présente une forme de comportement non-linéaire, soit géométrique ou matériel ou une combinaison de ces deux. Aujourd'hui, les ingénieurs sont bénis avec la disponibilité des ordinateurs de grande puissance numérique à la portée des mains et à la promotion de logiciels sophistiqués. Il est maintenant juste une question de préparer un bon ensemble de données d'entrée qui permettra d'évaluer l'effet des distributions complexes de contraintes résiduelles et des imperfections géométriques dues soit à la pratique de la mouture ou soudage. La procédure itérative évalue automatiquement la résistance ultime des structures. Le post-processeur intégré dans le logiciel le plus avancé fournit aux ingénieurs des informations quasi inépuisable sous forme graphique et / ou sous forme de tableaux. En dépit de la puissance de calcul énorme, un programme d'ordinateur ne peut pas concevoir une structure. Aucun programme informatique n'a été développé pour

concevoir une structure automatiquement. Et on ne s'attend pas à voir dans un avenir proche. Par conséquent, l'entrée des ingénieurs sera nécessaire dans les années nombreuses à venir. C'est une des raisons pourquoi les ingénieurs ont besoin de connaissances avancées du comportement structural.

Uniquement avec l'analyse non linéaire de post flambement, nous pouvons commencer à comprendre la signification physique dans l'environnement de conception de la charge de flambement d'Euler pour un élément structural spécifique. C'est à dire ce qui se passe après que la charge de flambement ait atteinte. Quand une plaque se voile, il y a interaction des déplacements dans le plan et hors du plan, d'où un comportement non linéaire. Le comportement d'une plaque, dans le domaine des grands déplacements, ne peut être déduit qu'à l'aide des équations de compatibilité et des équations non linéaires d'équilibre des plaques. La résistance post-flambement apparaît en particulier sur les plaques qui ont des proportions réduites et qui, jusqu'à une certaine limite, se comportent de manière élastique. Dans ce cas, la charge ultime peut être égale à plusieurs fois la charge critique élastique. Pour des plaques d'élanement faible ou intermédiaire, c'est la plasticité du matériau qui affecte principalement le comportement de la plaque ; en fait plus la plaque est massive, plus l'écoulement plastique aura tendance à précéder le voilement, ce qui donnera lieu à une résistance ultime éventuellement plus faible que la charge critique élastique.

Les processus de mise en œuvre et de fabrication d'une plaque donnent lieu à des imperfections géométriques inévitables et à des contraintes résiduelles. Dans la plupart des cas, les deux ont des effets sur le comportement pré- et post-flambement. Les imperfections géométriques de base sont la non-planéité initiale qui, comme on peut s'y attendre, affecte de manière significative le voilement. En raison du manque de planéité, les déformations de la plaque hors du plan augmentent dès le début du chargement. La grandeur de la non-planéité influe sur la réponse de la plaque par la déformée due à la charge ; cependant, aussi longtemps que cette réponse est élastique, les plaques, quel que soit le niveau de l'imperfection, s'approcheront du comportement post-flambement des plaques parfaitement plates. Non seulement la grandeur, mais aussi la forme de la non-planéité initiale ont une influence sur la réponse de la plaque ; plus le mode de flambement est proche de cette forme, plus le voilement apparaît et se produit doucement. Par ailleurs, toute non-planéité différente du mode de flambement a

tendance à retarder le voilement ; cependant, quand il se produit, il se produit soudainement et donne lieu à un claquement sec. En raison de la nature aléatoire de la répartition de la non-planéité (inconnue au stade du calcul), on suppose d'habitude, par prudence, que l'imperfection est proche du premier mode de voilement de la plaque.

L'effet de la température sur les propriétés des matériaux a été souligné dans l'analyse concernant le comportement de flambement et post flambement thermique des plaques FGMs soumises à une température uniforme et autre non uniforme. L'analyse employait la théorie d'ordre élevé de la déformation de cisaillement et la formulation géométriquement non linéaire de Von Karman. Les deux températures de flambement et post flambement/déflexions ont été nettement surestimées en négligeant la dépendance en température des propriétés des matériaux. En conséquence, cette simplification peut conduire à une conception dangereuse. De toute évidence, cette dernière approche fournit la solution la plus précise.

Les plaques reposantes sur des fondations élastiques ont trouvé des applications importantes dans les problèmes d'ingénierie structurelle. Trottoirs en béton armé d'autoroutes, pistes d'aéroport, des fondations des réservoirs de stockage, piscines, et murs profonds ainsi que des dalles de fondation des bâtiments, sont bien connus des applications directes de ces types de plaques. Les couches sous-jacentes sont modélisées par une fondation élastique de type Winkler. La lacune la plus grave du modèle de la fondation Winkler est de n'avoir aucune interaction entre les ressorts. En d'autres termes, les ressorts de ce modèle sont supposés être indépendants et libres. Le modèle de fondation Winkler est bien amélioré par l'adoption de la fondation Pasternak, un modèle à deux paramètres, dans lequel la rigidité en cisaillement de la fondation est envisagée. Les effets des paramètres élastiques de la fondation ainsi que les conditions aux limites sur la performance de la plaque vis-à-vis le flambement et post flambement ont été élucidés à travers l'analyse, comme on s'y attendait les fondations élastiques ont un effet bénéfique sur ce comportement et ca se voit clairement en jouant sur ses deux paramètres.

Cette étude étend des travaux antérieurs pour étudier les comportements de flambement et post flambement des plaques en matériaux à gradient de propriétés épaisses supportées par des fondations élastiques et soumises à trois types de charges : la compression dans le plan, thermique et thermomécanique. La théorie d'ordre élevé de

la déformation de cisaillement est utilisée pour établir les équations d'équilibre prenant en compte la non linéarité géométrique et l'imperfection géométrique initiale, et l'interaction plaque/fondation est représentée par le model Pasternak. Des expressions des charges de flambement et celles de post flambement/déflexions pour les plaques FGMs simplement appuyées sont obtenues par la méthode de Galerkin. L'analyse est effectuée pour évaluer les effets des propriétés matérielles et géométriques, les conditions aux limites dans le plan, la rigidité de la fondation et l'imperfection géométrique initiale sur le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriété (FGMs).

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à donner une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs), l'histoire de leur développement, applications des ces structures ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives, des différents modèles des plaques pour l'idéalisation mathématique aussi y sont présentés.

Le deuxième chapitre, rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur le comportement de post flambement des plaques à gradient de propriétés (FGMs), suivie par quelques problèmes ainsi les différentes théories des plaques majoritairement employées pour les modéliser.

Dans le troisième chapitre, nous avons développé un modèle analytique du comportement de post flambement mécanique , thermique et thermomécanique de la plaque FGM en assumant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs basées sur la fonction de loi de puissance.

Le chapitre quatre est consacré pour les résultats et le tracé des courbes des études comparatives réalisés et commentaires sur les résultats.

Chapitre I :

Généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Introduction

I.1 Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

I.2 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

I.3. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)

- ✓ Estimation auto-consistante
- ✓ Le schéma de Mori-Tanaka
- ✓ Le modèle des sphères composites assemblées
- ✓ Le modèle des cylindres composites assemblés
- ✓ Les modèles micromécaniques

I.4. L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

- ✓ La loi exponentielle
- ✓ La loi de puissance
- ✓ Une fonction sigmoïde

Conclusion

Introduction

Compte tenu de l'augmentation significative de l'activité de recherche et de publications dans les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) et les structures au cours des dernières années, le présent chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets qui sont les plus pertinents pour les structures FGMs et revoir les publications les plus représentatives qui sont liées à ces sujets. En raison de la croissance extensive des connaissances en FGMs dans les deux dernières décennies, il est prudent de réduire l'examen à un niveau acceptable en se concentrant sur les problèmes des plaques FGMs seulement.

I.1 Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Dans le développement de notre société et de la culture, les matériaux ont joué un rôle essentiel. L'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurelles, etc. La structure de développement d'un matériau moderne est illustrée sur la [Fig. 1](#). Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont des matériaux de pointe dans la famille des composites d'ingénierie, constitués en deux ou plusieurs phases de composition continue et variable [1]. Ces matériaux avancés avec des gradients de la composition, de la structure et/ou des propriétés spécifiques dans une direction préférée et/ou une orientation, sont caractéristiquement supérieurs aux matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la matière, varie en douceur et de façon continue dans des directions préférées dans les FGMs. Les FGMs ont été développés en combinant les matériaux d'ingénierie de pointe sous la forme de particules, de fibres, ou des plaquettes. Dans le processus continué d'améliorer la performance structurelle, les FGMs sont développés pour adapter l'architecture matérielle à l'échelle microscopique et pour optimiser certaines propriétés fonctionnelles des structures. Ces matériaux gagnent des larges applications dans diverses branches de l'ingénierie et de la technologie en vue d'en faire usage approprié dans la meilleure façon que possible. Cela a été possible grâce à la recherche et au développement dans le domaine de la mécanique des FGMs pour les

technologies modernes des composants spéciaux nucléaires, vaisseau spatial, éléments de structure et les revêtements de barrière thermique à haute température, etc.

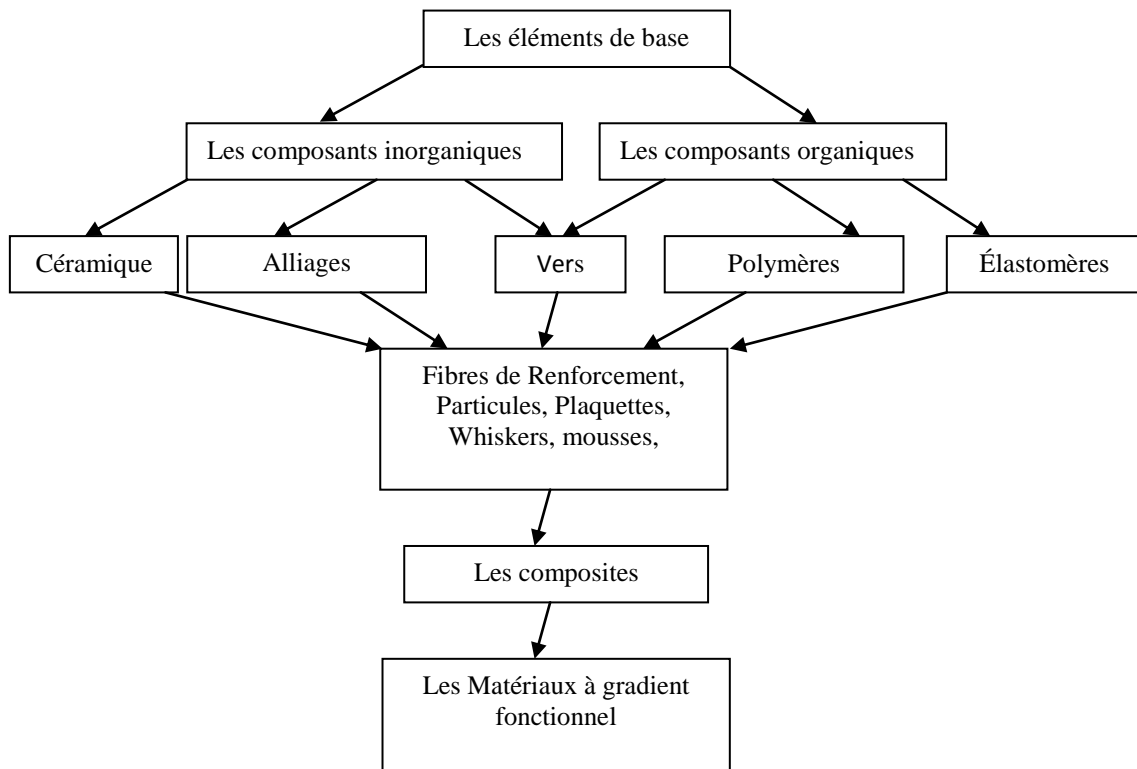


Fig. 1 Illustration de la hiérarchie des matériaux composites

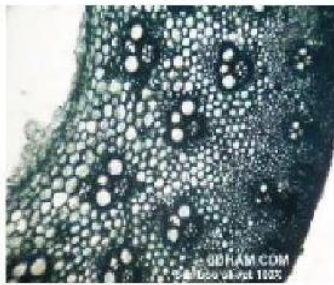
Bien que le concept des FGMs, et notre capacité à les fabriquer, semble être une invention de l'ingénierie de pointe, le concept n'est pas nouveau. Ces sortes de matériaux ont été présentes dans la nature. Quelques exemples de FGMs naturels ont été inclus dans la [Fig. 2](#) pour illustration. Les os ont classification fonctionnelle. Même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. Les constituants des FGMs modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériau isotrope, bien que tous les nombre de configurations chimiquement et spatialement compatibles soient possibles. Ces composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie de magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène, l'acier, etc. et les céramiques structurelles avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.



a. L'os



b. Roquette résiliente



c. Bambou



d. Remplacement des hanches
biocompatible

Fig.2 Exemples des FGMs naturels et autres conçus par l'homme

I.2 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Les FGMs ont un grand potentiel dans les applications où les conditions d'exploitation sont graves, y compris les boucliers thermiques des engins spatiaux, des tubes d'échangeurs de chaleur, les implants biomédicaux, revêtements de plasma dans les réacteurs de fusion, etc. Diverses combinaisons des fonctions normalement incompatibles peuvent être mises en œuvre pour créer de nouveaux matériaux pour l'aéronautique, les usines chimiques, des réacteurs nucléaires, etc. Par exemple, une couche discrète de matériau de céramique est collée sur une structure métallique dans un revêtement de barrière thermique classique pour des applications à haute température. Cependant, la transition abrupte dans les propriétés du matériau à travers l'interface entre des matériaux distincts peut entraîner de fortes contraintes interlaminaires et conduire à des déformations ou fissures plastiques [2]. Ces effets nocifs peuvent être atténués par classement spatiale en douceur des constituants matériels. Dans de tels cas, de fortes concentrations de matière céramique sont placés à des endroits corrosifs, à haute température, tandis que de fortes concentrations de métal sont

placées dans des régions où les propriétés mécaniques doivent être élevées. L'application de ces matériaux avancés a été visualisée lors d'un projet d'une navette spatiale en 1984 dans le laboratoire spatial du Japon et ce afin d'éviter les pics de contraintes au niveau des interfaces des panneaux revêtus de la navette spatiale. La combinaison de matériaux utilisés ici servi le but d'un système de protection thermique capable de supporter une température de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K à travers une section de 10 mm d'épaisseur. Plus tard, ses applications ont été développées pour les éléments des usines chimiques, des générateurs d'énergie solaire, échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires et les systèmes de combustion à haute efficacité. Le concept des FGMs a été appliqué avec succès dans les revêtements de barrière thermique où les exigences sont visées à améliorer la résistance thermique, l'oxydation et à la corrosion. Deux systèmes de matériaux de recherche importants dans la technologie de fabrication des FGMs sont : alumine Al_2O_3 [3] et zircon ZrO_2 [4], des couches de protection en céramique extérieur sur un substrat de base Ni-superalliage 'NiCrAlY'. Par conséquent, les revêtements ont été déposés par diverses techniques métallurgiques. Les FGMs peuvent également trouver des applications dans les techniques de communication et d'information. Des outils abrasifs en métal et la taille de pierre sont d'autres exemples importants où la gradation de la couche de surface a des performances améliorées. Comme une dernière observation concernant Les FGMs, on peut noter que ce concept de matériaux à gradient fonctionnel a démontré que la composition graduelle micro / macro structurelle peut non seulement rejeter les effets indésirables tels que la concentration de contrainte, mais peut aussi générer une fonction unique sans pareille [4]. Le concept des FGMs est applicable à divers domaines, comme illustré sur la Fig. 3.

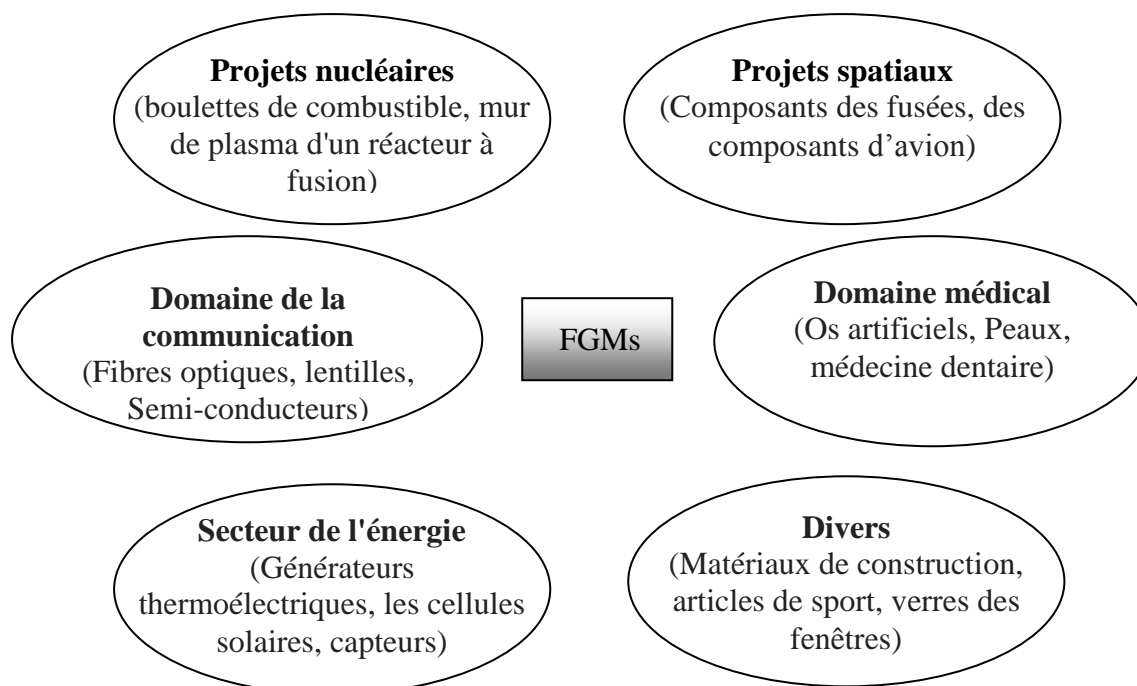


Fig.3 Les champs potentiels de l'application des FGMs

I.3. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)

La fabrication des FGMs peut être considérée par le mélange de deux phases distinctes de matériaux, par exemple, un mélange distinct d'un métal et une céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules peut ne pas être disponible. Ainsi, les propriétés effectives des matériaux FG, module d'élasticité, module de cisaillement, la densité, etc. sont en cours d'évaluation sur la base seulement de la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée. Plusieurs modèles micromécanique ont été développées au cours des années afin de déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes. Les approches analytiques, les méthodes d'éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des FGMs. Les sujets les plus importants de la modélisation des FGMs sont : les déformations élastiques, les contraintes élastiques, déformation plastique et la déformation au fluage à température élevée, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques disponibles dans la littérature pour la modélisation des FGMs sont présentées dans les sections suivantes.

I.3.1 Estimation auto-consistante [5], [6] et [7]

Cette méthode décrit ses estimations par la solution d'un problème élastique dans laquelle une inclusion ellipsoïdale est noyée dans une matrice possédant les propriétés effectives du matériau composite. Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau dont les propriétés effectives sont ceux du composite. Cette méthode ne fait pas de distinction entre la matrice et la phase de renforcement et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans lequel les rôles des phases sont inter-changés. Elle est donc particulièrement adaptée pour la détermination des modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure squelettique interconnecté comme le montre la Fig. 4a. Il s'agit d'une méthode d'analyse rigoureuse applicable à des matériaux composites à deux phases isotropes.

1.3.2 Le schéma de Mori-Tanaka [8] et [9]

Un tel procédé fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée ont une matrice continue bien définie et une phase particulaire discontinue comme illustré sur la Fig. 4b. Cette méthode suppose une petite particule sphérique noyée dans une matrice. La phase de la matrice (désignée par l'indice 1), est supposée être renforcée par des particules sphériques d'une phase particulaire (désignée par l'indice 2). K_1 , G_1 et V_1 représente le module de compressibilité, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase matrice, respectivement, tandis que K_2 , G_2 et V_2 représentent les propriétés matérielles et la fraction volumique correspondant à la phase particulaire. Il convient de noter que $V_1 + V_2 = 1$. La densité de la masse effective à un point peut être donné par la règle de mélange ($\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$).

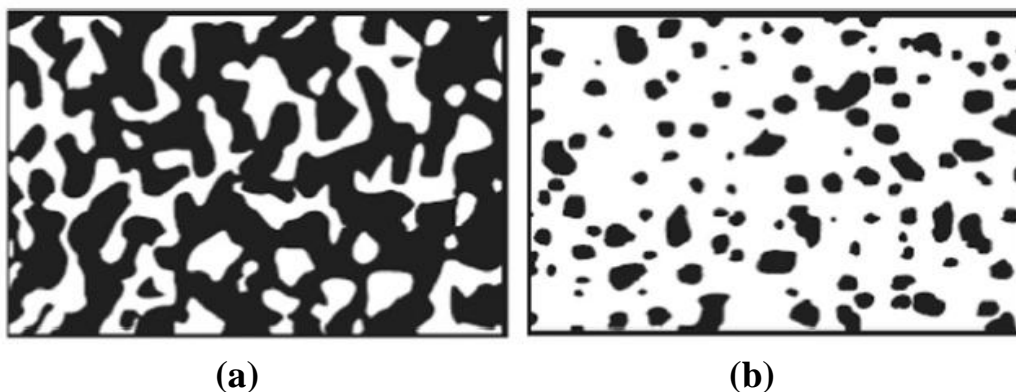


Fig.4 Deux phases matérielles avec (a) microstructure squelettique, et (b) microstructure particulaire [17].

1.3.3 Le modèle des sphères composites assemblées [10] et [11]

Dans ce modèle, les propriétés effectives des matériaux composites isotropes ont été déterminées de façon analytique, qui est basé sur l'hypothèse simplificatrice dont le matériau composite est rempli d'un assemblage fractale de sphères enrobées dans une matrice sphérique concentrique de diamètres différents, tels que ces sphères remplissent complètement le volume du composite.

1.3.4 Le modèle des cylindres composites assemblés [12] et [13]

Ce modèle est utilisé pour les composites orthotropes et nécessite à la fois que la fibre de renfort et la matrice sont isotropes, tandis que les volumes représentatifs élémentaires (RVEs) de la microstructure est transversalement isotrope dans des plans matériels qui sont perpendiculaires à la direction des fibres.

1.3.5 Les modèles micromécaniques [14] et [15]

Ces modèles des volumes représentatifs élémentaires (RVEs) peuvent être construits par des simulations en éléments finis (EF) pour les matériaux composites isotropes ou orthotropes. Les méthodes impliquant les modèles EF tentent de simuler avec précision la microstructure réaliste du RVE, et déterminer la réponse thermomécanique due aux charges appliquées de telle sorte que les propriétés des matériaux effectives peuvent être calculées pour différentes fractions de volume des constituants. C'est peut-être la méthode la plus précise, puisque la microstructure considérée est directement modélisée par des éléments finis en trois dimensions. Malheureusement, un inconvénient de cette méthode est que plusieurs modèles doivent être construits afin de déterminer les propriétés des matériaux pour différentes fractions de volume de la matière constitutive; même si cela peut être allégé avec un logiciel approprié qui permet d'automatiser le processus.

I.4. L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Bien que les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques varient continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides

peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales. Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de variations/gradations sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants.

1.4.1 La loi exponentielle

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [16]. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $P(z)$ à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = A e^{B(z+h/2)} \quad (1)$$

Avec :

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La fig. 5 affiche la variation de la fraction volumique.

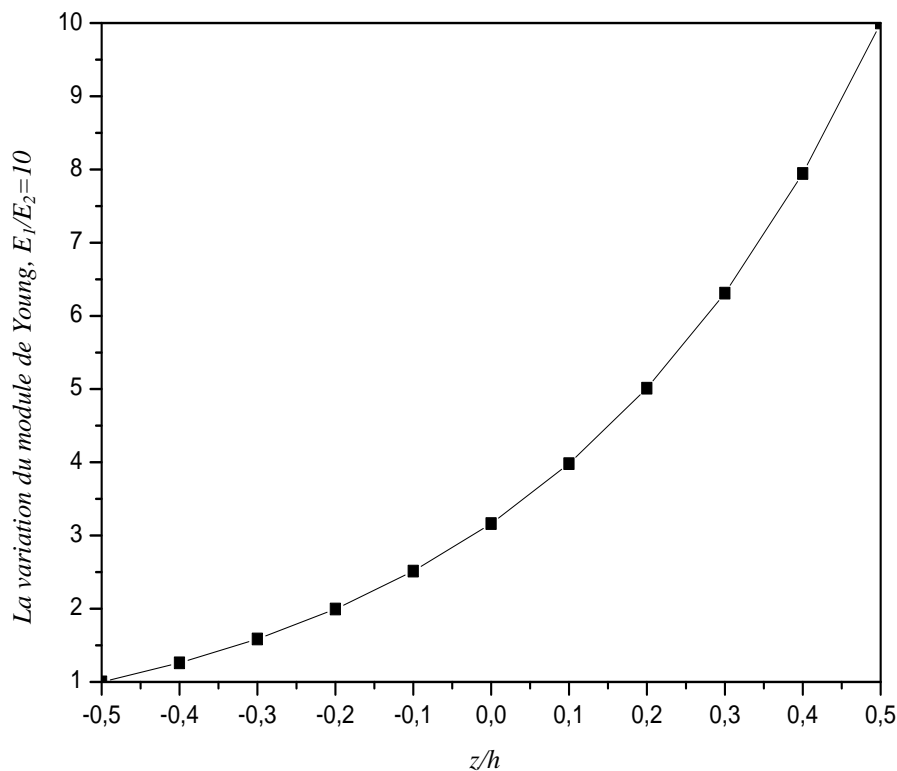


Fig. 5 La variation du module de Young dans le cas d'une plaque E-FGM

1.4.2 La loi de puissance

Ceci est plus fréquent dans l'analyse des contraintes des FGMs [16] est donné par :

$$f(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^N, \quad (2)$$

Où N est un paramètre du matériau qui représente l'ordre du polynôme. La variation de la fraction volumique des phases en termes de N est représentée sur la fig. 6.

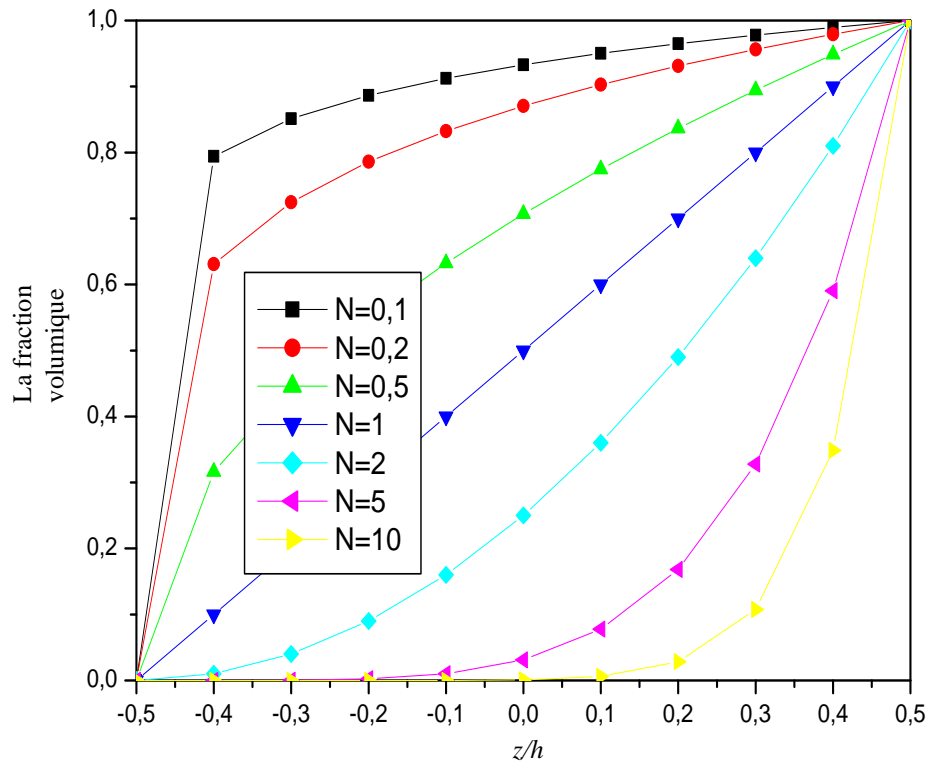


Fig. 6 La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM.

1.4.3 Une fonction sigmoïde

Pour réduire la variation rapide de la matière à proximité de la surface supérieure et inférieure, la distribution de matériaux à l'aide de deux fonctions en loi de puissance a été définie. Cette distribution est appelée la fonction sigmoïde. La fraction volumique du matériau est donc donnée par la forme suivante:

$$\begin{cases} f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h}\right)^N & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ f_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h}\right)^N & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

La fig. 7 affiche la variation de la fonction de fraction volumique pour $N > 1$. Étant donné que cette distribution représente la fonction en loi de puissance dans une demi-épaisseur, les compositions du matériau à gradient fonctionnel varient plus lente que la distribution de la fonction en loi de puissance.

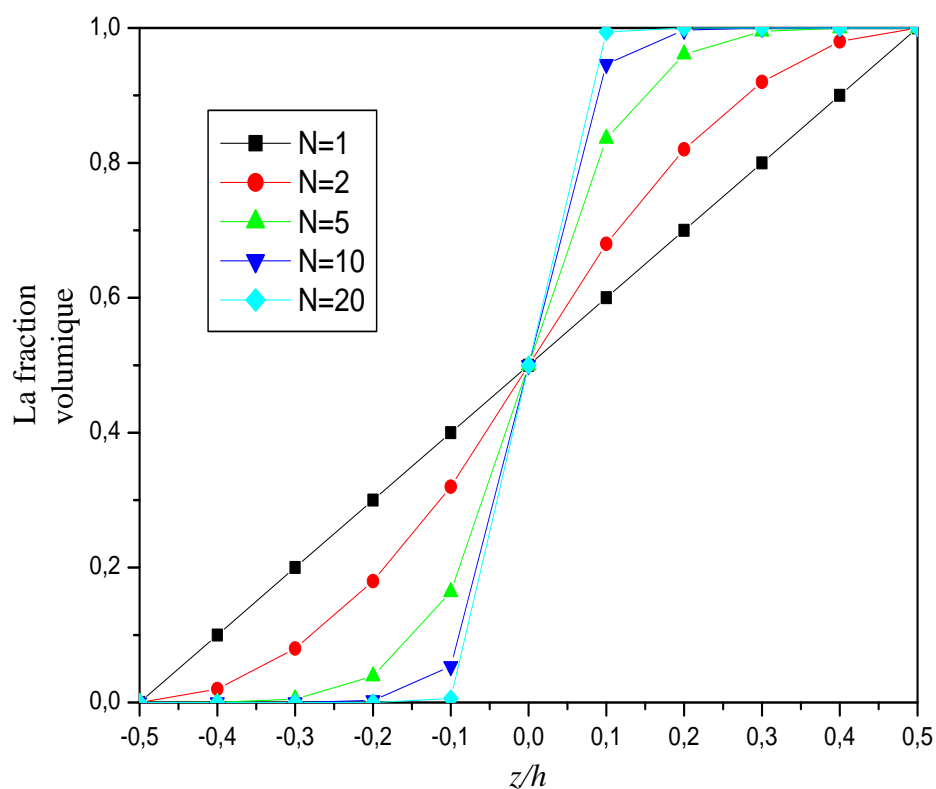


Fig. 7 La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II :

Revue bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Introduction

II.1 Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés.

- ✓ Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)
- ✓ Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT)
- ✓ Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT)

II.2 Des études rapportées sur des plaques FGMs.

- ✓ Analyse statique thermo-élastique des plaques FGMs
- ✓ Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs

II.3 Influence des défauts initiaux sur le comportement de flambement et post-flambement.

II.4 Flambements locaux et post-flambement des structures.

II.5 Types d'instabilité.

Conclusion

Introduction

Dans ce chapitre, un examen complet des différentes théories pour la modélisation et l'analyse des plaques fonctionnellement graduées est présenté. La revue est consacrée à des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des plaques à gradient fonctionnel sous chargement mécanique et thermique. Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la plaque (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel. En outre, un examen approfondi de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité en trois dimensions (3D) et une formulation unifiée est également présentée.

II.1. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés :

Une plaque est un élément de structure avec des dimensions en plan qui sont grandes par rapport à son épaisseur et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion, en plus celle de membrane. Des théories de plaque sont développées en supposant que la forme du champ de déplacement ou le champ de contrainte en tant que combinaison linéaire des fonctions inconnues et la coordonnée dans l'épaisseur exprimée généralement sous la forme :

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^n z^j \varphi_i^j(x, y, t), \quad (1)$$

Où φ_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du déplacement ou de la contrainte, (x, y) sont les coordonnées en plan, z est la coordonnée dans l'épaisseur, t représente le temps et φ_i^j sont des fonctions à déterminer. Le facteur temps ne sera pas considéré ici. Il existe de nombreuses théories de la plaque avec différentes formes de la formule (1) qui cherchent une expression de φ_i^j . Une critique sur les modèles de plaques peut être trouvée dans Ghugal et Shimpi [1], et Tung [2].

Afin d'étudier le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriété, quatre modèles de plaques sont utilisés pour ce matériau sont brièvement présentés : le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT), le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT), le modèle de

plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT) et le modèle de plaque basé sur la théorie sinusoïdale de la déformation de cisaillement (SSDT).

II.1.1 Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)

Le modèle de plaque basé sur la théorie classique de la plaque (CPT) satisfait l'hypothèse de Love-Kirchhoff avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à la surface moyenne avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse de love-Kirchhoff néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion et de la membrane. Une description détaillée des modèles de plaques, y compris le modèle actuel peut être trouvée dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [3], Reddy [4, 5].

Sur la base des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de ce model de la plaque développé dans la forme (4) est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

Où (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ($z = 0$), Fig.1.

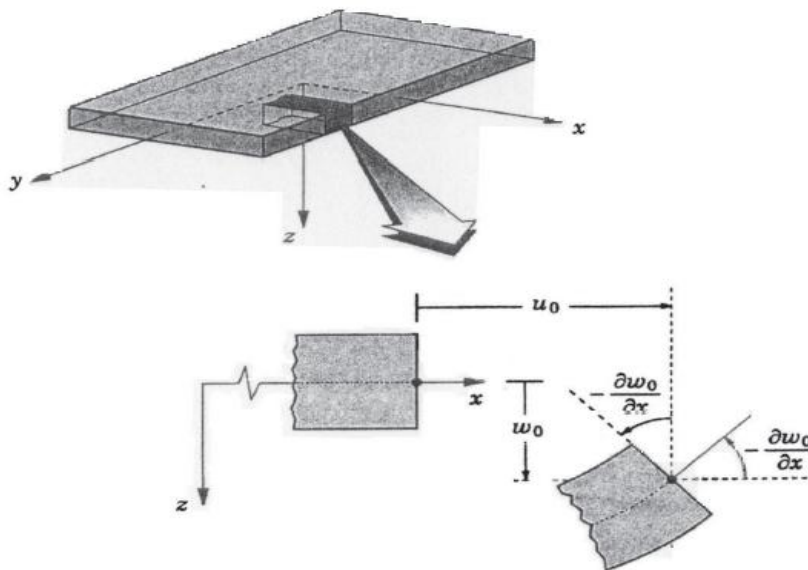


Fig.1 Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [4]

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les plaques épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des plaques fonctionnellement graduées (FGPs) à l'aide du modèle de plaque classique de Love - Kirchhoff ont été étudiées par He et al. [6].

II.1.2 Le modèle de plaque basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT)

Contrairement au modèle classique, ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont assumées constantes dans l'épaisseur de la plaque. Le modèle nécessite donc un facteur de correction pour calculer l'effort de cisaillement transverse. Premières études sur la théorie de premier ordre de la déformation de cisaillement de la plaque (FSDT) peuvent être trouvées dans [7, 8], [9] qui ont conduit au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Les études sur ce modèle peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger [3], Reddy [4], Miara et Podio-Guidugli [10].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la plaque est à l'état de normalité détendue,

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x, \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y, \\w(x, y, z) &= w_0(x, y),\end{aligned}\tag{3}$$

Où (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements dans la surface moyenne et les rotations autour de l'axe y et x , respectivement, Fig.2. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des plaques classique décrite dans la section précédente en remplaçant $\phi_x = -\partial w_0 / \partial x$, $\phi_y = -\partial w_0 / \partial y$. La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique.

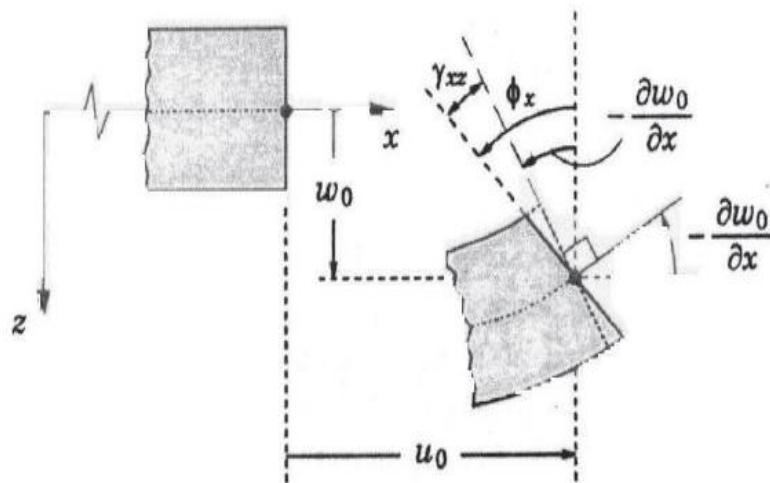


Fig.2 Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin [4]

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse des matériaux à gradient de propriété en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation [11], [12]. Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Pratiquement, une correction de cisaillement transverse du modèle de la plaque homogène a été prise.

En outre, afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des plaques ont été développées. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de la plaque à ordre élevée pour les matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans la section suivante, nous allons rappeler deux modèles de plaques basés sur des théories de la déformation de cisaillement à ordre élevé utilisés pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) : un modèle de la plaque basé sur la théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (TSDT) proposé par Reddy [4, 5] et un modèle de la plaque basées sur la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) étudié par Zenkour [13, 14, 15].

II.1.3 Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT)

Les théories de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevé ont été développées ces dernières années, d'abord pour l'analyse de plusieurs problèmes

isothermes et ensuite déployées pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la plaque. Contrairement à la CPT et FSDT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section. Par conséquent, les effets de la déformation de cisaillement transversal et la déformation normale transversale sont pris en compte. Ces modèles ne nécessitent pas des facteurs de correction. Les références sur ces modèles peuvent être trouvées dans ([16], [17], [18], [19], [8], [20, 21], [4], [22], [13]). Nous présentons ici deux modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement des matériaux à gradient de propriété (FGMs). Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z)\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z)\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

Où (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements de la membrane et les rotations de cisaillement autour de l'axe y et x , ($\varphi_x = \partial w_0 / \partial x + \phi_x$, $\varphi_y = \partial w_0 / \partial y + \phi_y$), Fig.3. $\psi(z)$ est une fonction générale en z caractérisant les théories correspondantes. En effet, le déplacement de la théorie classique (CPT) est obtenue par un agencement $\psi(z) = 0$, tandis que la théorie du premier ordre (FSDT) peut être repris par $\psi(z) = z$.

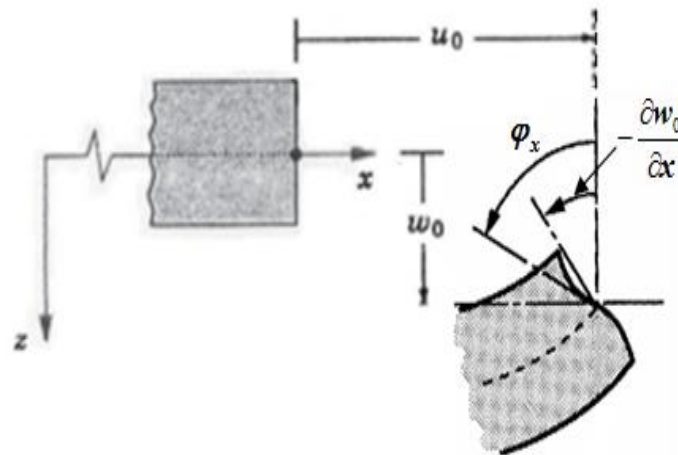


Fig.3 Illustration de la plaque d'ordre élevé [4]

Les déplacements de la théorie des déformations de cisaillement à ordre élevé de Reddy (TSDT) [4, 5] sont obtenus par :

$$\psi(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2). \quad (5)$$

La théorie du troisième ordre de cisaillement (TSDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la plaque, a été proposée par Reddy (voir [4, 5]). Elle ne nécessite pas des facteurs de correction de cisaillement. La théorie du troisième ordre a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs ([23], [24], [25]).

La théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDT) de Zenkour [13, 14], [15] est obtenu par l'hypothèse:

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad (6)$$

Où le champ de déplacement qui en résulte est basé sur celui de la théorie classique en ajoutant le terme $\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_\alpha$ à la composante de déplacement dans le plan u_α .

Ce modèle de plaque a été également utilisé pour étudier le comportement des plaques FGMs par Zenkour [26, 27, 28]. Comme pour la TSDT, pas de facteurs de correction de cisaillement transversal sont utilisés dans cette théorie.

II.2. Des études rapportées sur des plaques FGMs

Pagano [29] et [30], Srinivas Rao et [31] et Srinivas et al. [32] ont développé les solutions exactes des plaques stratifiées simplement appuyées à l'aide de la théorie de l'élasticité 3D. Leurs solutions de référence se sont avérées très utiles pour évaluer l'exactitude des diverses théories approximatives 2D des plaques de différents chercheurs [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39] et [40]. Leurs méthodes sont valables pour les plaques et coques stratifiées, où les propriétés des matériaux sont constantes par morceaux, mais ne s'applique pas à trouver des solutions aux problèmes des plaques avec inhomogénéité continue des propriétés des matériaux tels que les FGMs. Le concept des FGMs a été proposé en 1984 par des spécialistes des matériaux japonais [41]. Les changements continus de la composition, la microstructure, la porosité, etc. de ces matériaux conduisent à des gradients de propriétés telles que la résistance mécanique, conductivité thermique, résistance à la rupture etc. Suresh et Mortensen [42]

a fourni une excellente introduction aux principes fondamentaux des FGMs. Ils ont publié une revue de la littérature très détaillée de la technologie des FGMs. Depuis, de nombreux chercheurs ont tenté diverses méthodes numériques et analytiques pour étudier les réponses mécaniques, thermiques et dynamiques des structures en FGMs. Birman et Byrd [43] ont documenté une revue de la littérature exhaustive de l'évolution de la recherche en FGMs portant sur les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des FGMs. Plusieurs sujets pertinents à la théorie et les applications des FGM sont reflétées dans cet exposé synoptique. Ici la revue de la littérature est axée sur les travaux de recherche dans le domaine des analyses statiques thermo-élastique, vibration et la stabilité des plaques fonctionnellement graduées (FGMs) publiés depuis 1998.

II.2.1 Analyse statique thermo-élastique des plaques FGMs

Un examen de l'état actuel de la technique dans les études analytiques et numériques statiques thermo-élastiques des plaques FGMs est présenté. L'intégration d'un système de protection thermique (céramique) et un support de charge mécanique (métallique) en une seule construction est une caractéristique souhaitable de FGM. Le système en FGM pour une application particulière doit présenter sa capacité à résister à des charges thermiques et mécaniques simultanément.

Le comportement thermo-élastique des plaques rectangulaires en FG (céramique-métal) a été présenté à l'aide d'un élément fini plaques rectangulaires isoparamétriques en quatre nœuds par Praveen et Reddy [44] sur la base de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre premier (FOSDT), y compris les effets non linéaires de Von Karman. Cette formulation prend en compte les déformations de cisaillement transversales, l'inertie de rotation et des rotations modérément grandes de la plaque FGM. La formulation de Praveen et Reddy pour les plaques rectangulaires en FGMs a été étendue par Reddy et al. [45] pour les plaques circulaires et annulaires en FGMs en flexion. Ils ont développé des relations exactes entre les solutions de flexion usant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre premier (FOSDT) et la théorie classique de la plaque (CPT). La formulation adoptée par Praveen et Reddy en 1998 a été étendue par Reddy [46] pour étudier le comportement statique des plaques rectangulaires en FGMs en basant sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT). Mian et Spencer [47] ont présenté un ensemble de solutions exactes des

équations de l'élasticité 3D pour des plaques FGMs isotropes rectangulaires et circulaires. Ils ont dérivé une solution exacte des équations de l'élasticité linéaire 3D pour les plaques en matériaux homogènes. Oatao et Tanigawa [48] ont analysé les problèmes des contraintes thermiques transitoires dans des plaques rectangulaires en FGMs due au flux de chaleur non uniforme. Les mêmes auteurs ont également publié des solutions exactes pour des problèmes de température transitoires dans une bande épaisse simplement appuyée en FGMs [49]. Vel et Batra [50] ont présenté les solutions d'élasticité 3D exactes des problèmes thermomécanique statique des plaques FGMs simplement appuyées rectangulaires minces et épaisses. Les charges thermiques et mécaniques ont été imposées aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque soit individuellement, ou soit simultanément. Vel et Batra [51] ont également présenté les solutions analytiques du problème de conduction thermique transitoire 3D pour une plaque FGM simplement appuyée rectangulaire, basé sur la théorie linéaire. Les températures uniformes sont prescrites sur les bords et soit la température en fonction du temps ou le flux de chaleur est considéré sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque FGM. Pitakthapanaphong et Busso [52] ont étudié la répartition des contraintes et l'effet de gradation dans une plaque à trois couches, composée d'une couche de FGMs prise en sandwich entre des couches de céramique et de métal soumises à une charge thermique uniforme. Les résultats ont été validés en effectuant une comparaison avec les résultats d'éléments finis.

Tous les deux, le comportement non linéaire des plaques en FGMs à la flexion et au flambement a été examiné par Shen et ses collaborateurs. En particulier, la flexion non linéaire des plaques rectangulaires minces en FGMs bloquées le long d'une paire de bords opposés et avec des conditions différentes de l'autre paire de bords a été étudiée par Yang et Shen [53]. Ils ont utilisé la théorie non-linéaire de Von Karman dans cette étude. Une fondation élastique a été incluse dans l'étude. L'analyse a été étendue par les mêmes auteurs [54] pour les plaques à déformation de cisaillement, géométriquement non linéaires soumises à des charges thermomécaniques et dans différentes conditions aux limites à l'aide de TOSDT de Reddy. Autres articles de ce groupe de recherche portant sur divers aspects des réponses thermomécaniques des plaques en FGMs sont inclus en [55]. Shen [56] a également présenté les réponses post-flambement des plaques FGMs simplement appuyées soumises à l'action combinée des charges

mécaniques, électriques et thermiques. Huang et al. [57] ont présenté les solutions d'élasticité 3D exactes des plaques épaisses FGMs reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak et considérée comme une condition à la limite. Les effets de la rigidité de la fondation, les charges, et l'indice de gradation de la matière sur la réponse mécanique des plaques sont étudiés dans le présent article. Le même problème en utilisant la théorie d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement (HOSDT) et la relation générale de Von Karman est présenté par Shen et Wang [58] pour l'analyse non-linéaire de la flexion. Les caractéristiques de flexion non linéaire sont fortement influencées par la rigidité de la fondation, l'élévation de température, la déformation de cisaillement transversale, la nature des conditions aux limites dans le plan et la quantité des charges de compression initiales.

Zhang et Zhou [59] ont analysé les plaques minces FGMs basant sur le concept physique de la surface neutre en utilisant la théorie classique des plaques CPT (en supposant qu'il n'y a pas d'effet de couplage étirement/flexion dans les équations constitutives dans les cas des problèmes petites et grands déformations). Certaines solutions analytiques classiques telles que la flexion, vibrations, le flambement et la flexion non linéaire sont présentés dans ledit article. Les auteurs ont souligné que la théorie de la plaque physique neutre de surface mince a plus de mérites dans l'application de l'ingénierie, car il est plus facile et plus simple que la théorie de la plaque stratifiée classique basée sur la surface moyenne géométrique. Fares et al. [60] ont présenté une théorie 2D des plaques FGMs en utilisant une approche variationnelle mixte. Cette théorie compte un champ de déplacements, dans lequel les déplacements dans le plan varient de façon linéaire à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que le déplacement hors du plan est une fonction du second degré de la coordonnée de l'épaisseur. Ils ont montré l'influence de la contrainte normale transversale à la flexion et à la vibration des plaques FGMs.

Abdelaziz et al. [61] ont étudié la réponse de flexion de la plaque FG sandwich en utilisant la théorie de la plaque raffinée à deux variables (RPT) développée à l'origine par Shimpi [62] pour les plaques isotropes, et a été étendue par Shimpi et Patel [63] pour les plaques orthotropes.

II.2.2 Analyse de vibration et stabilité des plaques FGMs

Les sections précédentes résument quelques-uns des travaux importants dans l'analyse statique thermo-élastique de plaques de FGMs; cette section présentera un aperçu de l'ensemble de la littérature disponible sur la dynamique des plaques FGMs spécifiquement les vibrations et les analyses modales des plaques FGMs.

Cheng et Batra [64] ont étudié le flambement et la vibration d'une plaque polygonale en FGMs à l'état d'équilibre simplement appuyée sur une fondation élastique et soumise à des charges hydrostatiques uniformes dans le plan sur la base de la théorie TSDT de Reddy. La réponse dynamique des plaques rectangulaires FGMs initialement stressés a été étudiée par Yang et Shen [65]. Les propriétés du matériau de la plaque sont supposées être classés dans l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance et régie par la règle classique de mélange. La plaque a été autorisé à se reposer sur une fondation élastique et être soumise à des contraintes dans le plan uni-axiale ou bi-axial, bien que les deux ou aucune de ces caractéristiques doit être inclus. Yang et Shen [66] ont étendu leur précédente analyse aux plaques épaisses de FGMs dans des environnements thermiques. Ils ont développé une théorie générale de la plaque (moins le cas d'une fondation élastique) lorsque la réponse de la plaque peut être semi-analytiquement déterminée sous des charges et des conditions aux limites générales, y compris le cas d'une plaque initialement stressées. Yang et al. [67] ont en outre présenté une grande analyse de vibration des plaques précontraintes en FGMs en basant sur la théorie TSDT de Reddy. Quelques autres publications traitant le même sujet sont Yang et al. [68], et Yang et Huang [69].

Javaheri et Eslami [70], [71] et [72] ont étudié le flambement thermique et mécanique des plaques rectangulaires en FGMs basant sur les théories de plaque classique et d'ordre supérieur. Les équations d'équilibre gouvernantes et de stabilité pour les plaques FGMs sont calculées en utilisant l'approche variationnelle, identiques aux équations des plaques homogènes. Ils ont étudié le comportement de flambement des plaques en FGMs simplement appuyées soumis à des conditions de chargement dans le plan avec une composition linéaire des matériaux constitutifs et des plaques homogènes. L'analyse de flambement de la plaque FGMs reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été faite par Yang et al [73]. En tenant compte que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de base étant comme des variables

aléatoires indépendantes. La plaque a été modélisée dans cette étude par la théorie de déformation de premier ordre (FOST), et la solution du problème a été menée en utilisant la procédure de perturbation du premier ordre pour tenir compte du caractère aléatoire du problème. Le flambement et la vibration libre des panneaux FGMs sandwich en céramique-métal simplement appuyées ont été présentés par Zenkour [74] s'étendant son travail précédent de l'analyse statique sur ces panneaux.

Hoang et Nguyen [75] ont présenté une approche analytique pour étudier la stabilité des plaques FGMs sous des charges dans le plan de compression, thermiques et combinées à l'aide de la théorie classique des plaques (CPT). La non-linéarité géométrique et de l'imperfection géométrique initiale, les deux sont prises en compte de manière appropriée dans cette étude. Les propriétés des matériaux indépendantes de la température sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple en loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants. Les expressions explicites pour les courbes charge post-flambement - déflexion ont été obtenues en résolvant les équations régissant par la procédure de Galerkin. Les effets de l'indice de fraction volumique, la géométrie de la plaque, les conditions aux limites dans le plan, et l'imperfection sur le comportement post-flambement de la plaque ont été étudiés dans le présent article. En outre, les mêmes auteurs, Nguyen Hoang [76], suivant une méthodologie similaire, ont présenté une étude analytique sur le comportement de flambement et post-flambement des plaques FGMs épaisses reposant sur des fondations élastiques et soumises au plan à des charges de compression, thermiques et thermomécaniques. Cette analyse a été menée pour montrer les effets des propriétés matérielles et géométriques, les conditions aux limites dans le plan, la rigidité de la fondation et l'imperfection sur la capacité de chargement des plaques FGMs en flambement et post-flambement. Shen a fait plusieurs autres publications [77], [78], [79] et [80] dans le domaine de la réponse non-linéaire en flexion, l'analyse thermique de post-flambement, la comparaison du comportement de flambement et post-flambement des plaques FGMs avec ou sans surface liée des actionneurs piézoélectriques due à la conduction de la chaleur et sous différentes conditions de chargement électriques utilisant une théorie à ordre élevé HOST.

Le comportement de flambement et post-flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) comme une branche importante des structures des solides est d'intérêt

dans la conception et a attiré l'attention des chercheurs au cours des dernières années Tung et Duc [81] ont développé une solution analytique simple pour prédire le comportement de flambement et post-flambement des plaques FG minces. Duc et Tung [82] ont présenté une étude analytique sur les réponses de plaques FG épaisses en flambement et post-flambement reposantes sur des fondations élastiques et soumises au plan à des charges de compression, charges thermiques et thermomécaniques. Bourada et al. [83] a présenté une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich FG. Bachir Bouiadjra et al. [84] a présenté une théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement des plaques FG. Bachir Bouiadjra et al. [85] ont étudié le comportement de flambement thermique non linéaire des plaques FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale efficace. Ait Amar Meziane et al. [86] ont développé une théorie raffinée efficace et simple pour étudier les réponses au flambement et à la vibration libre des plaques sandwich exponentiellement graduées dans diverses conditions aux limites. Khalfi et al. [87] a présenté une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques FG solaires reposant sur une fondation élastique. Bennai et al. [88] a développé une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement et de déformation normale pour la vibration libre et le flambement des poutres sandwich FG sous différentes conditions aux limites. Ces constituants structurels tels que les plaques appuyées sur une fondation élastique trouvent souvent des applications dans la construction nucléaire, mécanique, aéronautique, et des structures de génie civil (Houari et al, [89]; Bessaim et al, [90]; Hebali et al, [91]; Zidi et al, [92]; Fekrar et al, [93]; Bousahla et al, [94]; Ramu et Mohanty, [95]; Hamidi et al, [96]; Ait Yahia et al., [97]; Mahi et al., [98]). Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs modèles de fondations ont été développés. Le plus simple est le modèle de Winkler ou le modèle à un seul paramètre (Winkler) [99] qui modélise la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux. Ce modèle a été amélioré par Pasternak [100] en prenant en compte un ressort de cisaillement qui simule les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle Winkler. Le modèle Pasternak ou le modèle à deux paramètres est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structurelles de la fondation et sera utilisé ici pour simuler

les interactions entre la plaque et la fondation. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des effets de la fondation élastique pour une meilleure compréhension de la réponse de post-flambement des structures telles que les plaques et les coques.

II.3 Influence des défauts initiaux sur le comportement de flambement et post flambement

Rivello [101] montre sur des poutres que les défauts initiaux n'ont pas d'influence sur la valeur asymptotique de flambement (Fig.5). Par contre, la déflexion initiale due aux différents défauts induit des moments de flexion secondaires et donc une augmentation non linéaire des contraintes dans la structure. Il se peut donc que la rupture ait lieu bien avant le niveau de flambement théorique. La difficulté est alors de savoir si la rupture est due à de la flexion ou à du flambement puisque les deux phénomènes sont couplés. Les défauts initiaux peuvent être de deux natures. Ils peuvent être le résultat d'imperfections dues à des aléas de fabrication, mais peuvent également être le résultat d'un montage d'essai désaxé par exemple. Dans ce dernier cas, des moments locaux sont introduits et conduisent à des défauts géométriques avant chargement. D'un point de vue pratique, un léger excentrement dans le chargement, un montage hyperstatique qui induit des flexions locales ou simplement des défauts de fabrication conduisent au même phénomène et à l'apparition d'une flexion induite au cours du chargement. Industriellement, la meilleure façon de prendre en compte l'effet des défauts initiaux est alors de les représenter. Pour des cas assez simples, des modèles mathématiques existent et peuvent être utilisés. Néanmoins, lorsque la tâche s'avère plus complexe, des modèles numériques sont souvent utiles. En effet, la déflexion initiale introduit de la flexion au cours du chargement, ce qui engendre un comportement non linéaire important.

L'étude de Weingarten et al [102] permet tout de même de montrer que l'influence des défauts initiaux sur le niveau effectif de flambement est d'autant plus importante que les épaisseurs sont faibles. Dans certains cas extrêmes (défauts importants sur de très faibles épaisseurs), la rupture en essais peut avoir lieu à 25% de la charge théorique de flambement.

II.4 Flambements locaux et post-flambement des structures

Jusqu'à présent, le flambement a été abordé sur des structures simples pour lesquelles le flambement général est souvent dimensionnant. Sur des structures plus complexes comme les panneaux raidis composés d'éléments poutres (raidisseurs) et d'éléments plaque (peau), il peut exister plusieurs modes de flambement pour une même structure et pour un chargement donné. Les flambements ne concernant qu'une seule partie de la structure sont appelés flambements locaux. Les flambements locaux sont donc une instabilité partielle d'une structure. Il existe deux types de flambements locaux :

- les flambements locaux conduisant une rupture directe des structures (non admissibles),
- les flambements locaux ne conduisant pas à la rupture directement (admissibles).

Dans le premier cas (flambements non admissibles), la perte de rigidité de la zone flambée devient critique pour l'ensemble de la structure. Elle s'effondre donc car la stabilité ne peut pas être assurée par les zones non flambées. L'exemple Fig.4 permet d'illustrer ce phénomène sur une poutre de type « L ». Sur cet exemple, le flambement local d'une aile de la poutre se traduit quasi instantanément par une rupture en flexion de celle-ci.

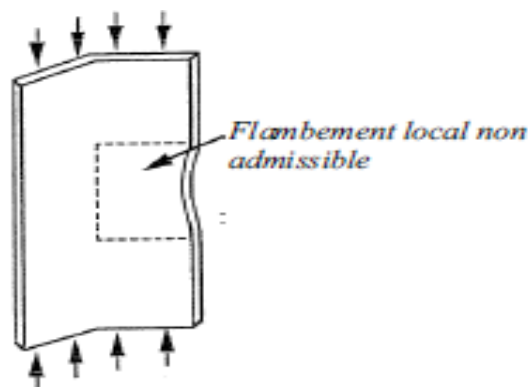


Fig.4 Flambement local d'une poutre en « L »

Les panneaux raidis sont sujets aux flambements locaux non admissibles et il s'agit de modes de rupture nécessitant une attention particulière compte tenu de leur criticité. La Fig.5 résume l'ensemble de ces flambements locaux.

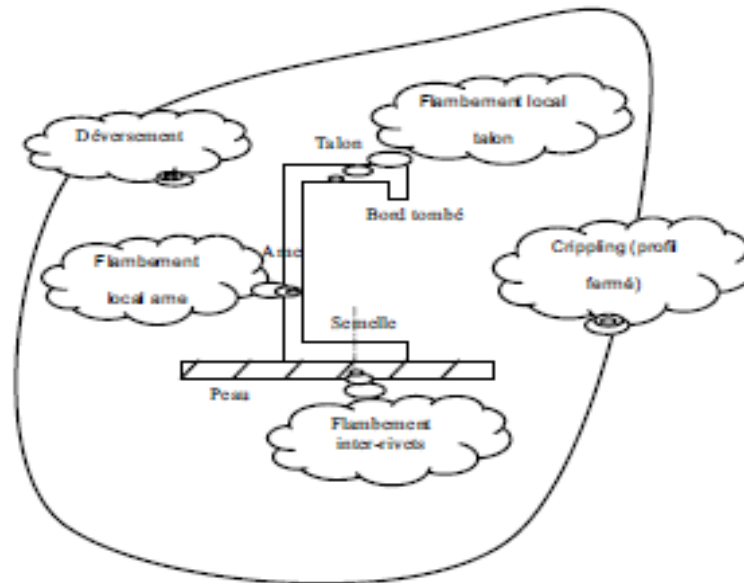


Fig.5 Instabilités locales

Chaque partie du raidisseur (ame, talon, semelle) se comporte comme une plaque simple avec des conditions d'appui qui varient entre libre et encastéré. On trouve ainsi des flambements de plaques simples relatifs à chaque partie du raidisseur (talon, ame, semelle..). En ce qui concerne les flambements locaux admissibles, ils se traduisent par une modification du mode de travail de la structure et l'ensemble continue à supporter les charges appliquées.

Quand une plaque plane est sous l'action de la compression dans son plan moyen, la plaque est déformée, mais reste complètement plate lorsque les forces sont suffisamment petites à moins qu'il y soit une imperfection géométrique initiale. La charge de compression dans le plan qui est juste suffisante pour maintenir la plaque dans une forme légèrement courbée est appelée la charge critique de flambement. Une fois la charge de flambement est dépassée, la relation charge-déflexion présente un caractère stable en raison des forces de membrane qui entrent en jeu. En fait, le mode de flambement va changer au domaine post flambement. Ces changements se produisent lorsque l'énergie stockée dans la plaque est suffisante pour porter la plaque d'une forme déformée à l'autre. Pour obtenir une analyse précise des plaques FGMs dans le domaine post flambement, les changements dans le mode de flambement doit être pris en compte. Dans l'analyse habituelle de post flambement, le mode de flambement de la plaque est supposé rester inchangé. Ce sera l'hypothèse raisonnable dans la portée

immédiate du post flambement, c'est à dire, la charge post flambement supérieure un peu de la charge de flambement.

II.5 Types d'instabilité

Le flambage est un phénomène mécanique traduisant l'instabilité d'une structure. Il apparaît principalement sur des structures élancées et se caractérise par une augmentation importante des déformations de la structure lorsque celle-ci subit un accroissement infinitésimal de son chargement. Le flambage peut se traduire par une perte de rigidité ou par une perte de la capacité portante de la structure, pouvant dans certains cas être couplé à des phénomènes de plasticité. La valeur du chargement nécessaire à l'apparition du phénomène de flambage est appelée charge ou force « critique ».

Deux types différents d'instabilité peuvent se produire, nous distinguons le flambage par bifurcation et flambage par point limite (Fig.6). Lorsque la structure est sollicitée, elle suit en premier lieu un chemin d'équilibre dit « chemin d'équilibre initial » ou « branche fondamentale ». Au passage d'un point de bifurcation, la branche d'équilibre initiale devient instable (branche en pointillés), la structure ne peut plus suivre ce chemin d'équilibre et emprunte alors une branche postcritique (ou bifurquée) qui sera le plus souvent instable (caractéristique d'une coque sous compression axiale), mais qui peut être stable dans certains cas (une plaque rectangulaire sous compression longitudinale par exemple).

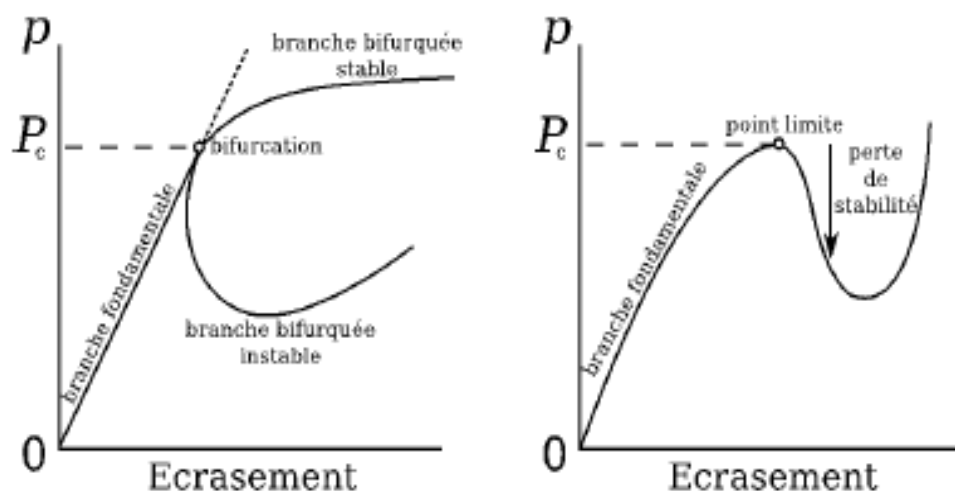


Fig.6 Types d'instabilité : bifurcation et point limite

Le flambage par point limite se caractérise quant à lui par une décroissance de la rigidité globale de la structure jusqu'à l'annulation de cette dernière au point limite. Lorsque ce point limite est suivi par une branche post-critique instable puis stable, le comportement est appelé « snap through » ou « phénomène de claquage », il correspond par exemple au retournement d'une calotte sphérique. Le déclenchement d'une instabilité par point limite peut aussi être observé lorsque l'on a un flambage dans le domaine plastique du matériau.

Le caractère stable ou instable du comportement post-critique est très important pour le dimensionnement des structures. Un comportement instable après bifurcation est bien sûr dangereux et à éviter à tout prix, alors qu'un comportement post-critique stable peut dans certains cas être acceptable. Par effet plusieurs interactions de chargements (pression interne, flexion, compression et/ou cisaillement) peuvent conditionner la valeur critique du chargement global ainsi que le comportement post-critique.

Conclusion

Un examen des différentes investigations menées dans la littérature pour la contrainte, la vibration libre et des analyses de flambement des plaques FGMs ont été présentées dans la présente section. Un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes dans le domaine d'intérêt courant mettant en évidence la littérature la plus pertinente disponible aux ingénieurs de recherche qui étudient les structures en plaques FGMs. L'utilisation des modèles théoriques 2D qui sont maintenant semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D doit être poursuivie dans l'intérêt de coût de calcul et des analyses performants.

Chapitre III :

Le modèle théorique et le développement analytique

Introduction

III.1. Formulations théoriques.

- ✓ Cinématique
- ✓ Les équations Constitutive

III.2 Analyse de post-flambement mécanique.

III.3. Analyse thermique de post-flambement.

- ✓ Élévation uniforme de la température
- ✓ Température non linéaire

III.4 Analyse Thermomécanique de post-flambement.

Conclusion

Introduction

En ce chapitre on va présenter une formulation analytique pour étudier la réponse de flambement et post-flambement des plaques FG épaisses simplement appuyées sur des fondations élastiques de type Pasternak et soumises au plan à des charges de compression, thermiques, et thermomécaniques. La théorie d'ordre élevé de la déformation de cisaillement de Shi [1] est utilisée pour établir les équations de gouvernement prenant en compte la non-linéarité géométrique et l'imperfection géométrique initial. Les expressions analytiques des charges de flambement et les courbes charges-déflexions de post-flambement pour les plaques FG simplement appuyées sont déterminées par la technique de Galerkin. Des exemples numériques sont présentés pour montrer les influences des propriétés géométriques et matérielles, des conditions aux limites dans le plan, la rigidité de la fondation et l'imperfection sur la réponse des plaques FG.

III.1. formulations théoriques

III.1.1 Cinématique

Dans ce travail, la théorie d'ordre élevé de la déformation de cisaillement des plaques de Shi [1] est utilisée. Shi a utilisé la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre améliorée et basée sur une cinématique des déplacements plus rigoureuse et définit comme TSDT pour étudier l'analyse statique des poutres et des plaques isotropes et orthotropes. L'auteur conclut que la nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé proposée fournit plus de précision que les autres théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur, en particulier lorsque le cisaillement transversal joue un rôle très important. En raison que la cinématique de déplacement dans TSDT est dérivée d'une formulation d'élasticité au lieu des hypothèses de déplacements, il est intéressant d'utiliser cette théorie pour étudier le flambement et post-flambement des plaques FG. Le champ de déplacement peut alors être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{1a}$$

Avec

$$\Psi(z) = \frac{5}{4} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \quad (1b)$$

où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements généralisés au plan médian de la plaque dans les directions x , y et z , respectivement; ϕ_x , ϕ_y , Sont les rotations de la pente dans les plans (x, z) et (y, z) , respectivement; et h est l'épaisseur de la plaque.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \Psi(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \Psi'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

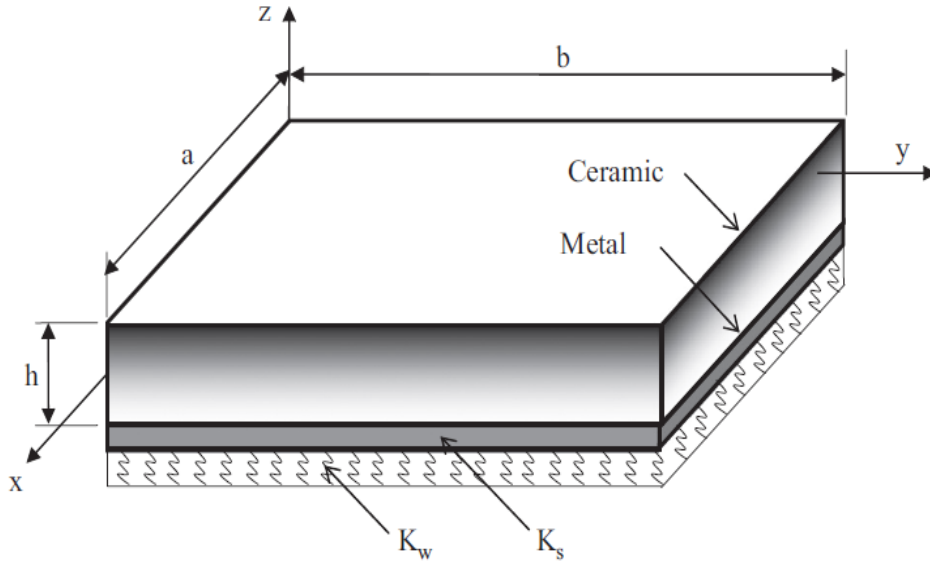


Fig. 1: Système des coordonnées et la géométrie des plaques FG appuyées sur une fondation élastique

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + (w_{0,x})^2 / 2 \\ v_{0,x} + (w_{0,y})^2 / 2 \\ u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x} w_{0,y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

III.1.2 Les equations Constitutive

Considérons une plaque FG en céramique-métal d'une longueur a , largeur b et épaisseur h reposant sur une fondation élastique comme le montre la [fig.1](#). Les propriétés de la plaque (FG) sont supposées varier à travers l'épaisseur de la plaque avec une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des deux matériaux ([2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9])

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (4)$$

Où P_M et P_C sont les propriétés correspondantes du métal et céramique, respectivement, et N est l'indice de la loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro. Dans ce présent travail, nous supposons que les modules d'élasticité, conductivité thermique, et le coefficient de la dilatation thermique, sont décrits par l'équation (4).

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FG peuvent être exprimées comme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Où ΔT est la montée de la température de l'état sans contraintes initiales ou la différence de température entre les deux faces de la plaque FG.

En utilisant le principe de travail virtuel pour minimiser le fonctionnel d'énergie potentielle totale, les résultats dans les expressions des équations d'équilibre non linéaires d'une plaque parfaite appuyée sur une fondation élastique de type Pasternak sont comme suit

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (6a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (6b)$$

$$(M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) + N_x w_{,xx} + 2 N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w = 0 \quad (6c)$$

$$S_{x,x} + S_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (6d)$$

$$S_{xy,x} + S_{y,y} - Q_y = 0 \quad (6e)$$

Où k_w est la rigidité de la fondation de Winkler et k_g est une constante représentant l'effet de l'interaction de cisaillement des éléments verticaux. Les forces et les résultantes du moment (N, Q, S et M) de la plaque FG sont déterminées par

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, \Psi(z)) dz, \quad (i = x, y, xy) \quad (7a)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j \Psi'(z) dz, \quad (i = x, y); \quad (j = xz, yz) \quad (7b)$$

Remplaçons les équations (2) et (5) dans les équations (7) donne les relations constitutives tel que

$$(N_x, M_x, S_x) = \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2, E_3)(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0) + (E_2, E_4, E_5)(k_x + \nu k_y) + (E_3, E_5, E_7)(\eta_x + \nu \eta_y) - (1+\nu)(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)] \quad (8a)$$

$$(N_y, M_y, S_y) = \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2, E_3)(\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0) + (E_2, E_4, E_5)(k_y + \nu k_x) + (E_3, E_5, E_7)(\eta_y + \nu \eta_x) - (1+\nu)(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)] \quad (8b)$$

$$(N_{xy}, M_{xy}, S_{xy}) = \frac{1}{2(1+\nu)} [(E_1, E_2, E_3)\gamma_{xy}^0 + (E_2, E_4, E_5)k_{xy} + (E_3, E_5, E_7)\eta_{xy}] \quad (8c)$$

$$(Q_x, Q_y) = \frac{1}{2(1+\nu)} E_8 (\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0) \quad (8d)$$

Où

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_7) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \Psi, z^2, z\Psi, \Psi^2) E(z) dz, \quad E_8 = \int_{-h/2}^{h/2} (\Psi'(z))^2 E(z) dz \quad (9a)$$

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \Psi) E(z) \alpha(z) \Delta T(z) dz \quad (9b)$$

Les trois dernières équations des équations (6) peuvent être réécrites en deux équations en termes de variables w_0 et $\phi_{x,x} + \phi_{y,y}$ par la substitution des équations (3) et (8) dans les équations. (6c) - (6e). Par la suite, l'élimination de la variable $\phi_{x,x} + \phi_{y,y}$ à partir des deux équations résultantes conduit au système d'équations d'équilibre suivant

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (10a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (10b)$$

$$(D_1 D_3 - D_2^2) \nabla^6 w - D_1 D_4 \nabla^4 w - D_3 \nabla^2 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w) + D_4 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} - k_w w + k_g \nabla^2 w) = 0 \quad (10c)$$

Où

$$D_1 = \frac{E_1 E_4 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}, \quad D_2 = \frac{E_1 E_5 - E_2 E_3}{E_1 (1 - \nu^2)}, \quad D_3 = \frac{E_1 E_7 - E_3^2}{E_1 (1 - \nu^2)}, \quad D_4 = \frac{E_8}{2(1 + \nu)} \quad (11)$$

Pour une plaque FG imparfaite, les équations (10) sont modifiées en forme telle que

$$(D_1 D_3 - D_2^2) \nabla^6 w - D_1 D_4 \nabla^4 w - D_3 \nabla^2 [f_{,yy} (w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy} (w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx} (w_{,yy} + w_{,yy}^*) - k_w w + k_g \nabla^2 w] + D_4 [f_{,yy} (w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy} (w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx} (w_{,yy} + w_{,yy}^*) - k_w w + k_g \nabla^2 w] = 0 \quad (12)$$

Dans laquelle $w_0^*(x, y)$ est une fonction connue qui représente la petite imperfection initiale de la plaque. Notez que les termes $\nabla^6 w_0$ et $\nabla^4 w_0$ sont inchangés parce que ces termes sont obtenus à partir des expressions des moments de flexion M_i et moments d'ordre supérieur S_i et ces moments dépendent pas de la courbure totale mais seulement sur la variation de la courbure de la plaque [10]. Aussi, $f(x, y)$ est fonction de contrainte définie par

$$N_x = f_{,yy}, \quad N_y = f_{,xx}, \quad N_{xy} = -f_{,xy} \quad (13)$$

L'équation de compatibilité géométrique pour une plaque imparfaite est exprimée telle que

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 + \gamma_{xy,xy}^0 = w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} + 2w_{0,xy} w_{0,xy}^* - w_{0,xx} w_{0,yy}^* - w_{0,xy} w_{0,xx}^* \quad (14)$$

A partir des relations constitutives (8) et l'équation (13) On peut écrire

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0) &= \frac{1}{E_1} [(f_{,yy}, f_{,xx}) - \nu (f_{,xx}, f_{,yy}) - E_2 (k_x, k_y) - E_3 (\eta_x, \eta_y) \\ &\quad + \Phi_1 (1, 1)] \\ \gamma_{xy}^0 &= -\frac{1}{E_1} [2(1 + \nu) f_{,xy} + E_2 k_{xy} + E_3 \eta_{xy}] \end{aligned} \quad (15)$$

En substituant les équations (15) dans l'équation (14), l'équation de compatibilité d'une plaque FG imparfaite devient

$$\nabla^4 f - E_1 (w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} + 2w_{0,xy} w_{0,xy}^* - w_{0,xx} w_{0,yy}^* - w_{0,yy} w_{0,xx}^*) = 0 \quad (16)$$

Il est à noter que les équations (12) et (16) sont des équations non linéaires utilisées pour étudier la stabilité des plaques FG épaisses reposantes sur des fondations élastiques soumises à des charges mécaniques, thermiques et thermo-mécaniques. Trois cas des conditions aux limites sont considérés dans ce travail, considérés comme les cas 1, 2 et 3

- Cas 1: Quatre bords de la plaque sont simplement appuyés et librement mobiles (FM). Les conditions aux limites associées sont

$$w = N_{xy} = \varphi_y = M_x = S_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \text{ at } x = 0, a \quad (17a)$$

$$w = N_{xy} = \varphi_x = M_y = S_y = 0, \quad N_y = N_{y0} \text{ at } y = 0, b \quad (17b)$$

- Cas 2: Quatre bords de la plaque sont simplement appuyés et immobiles (IM). Dans ce cas, les conditions aux limites associées sont

$$w = u_0 = \varphi_y = M_x = S_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \text{ at } x = 0, a \quad (18a)$$

$$w = v_0 = \varphi_x = M_y = S_y = 0, \quad N_y = N_{y0} \text{ at } y = 0, b \quad (18b)$$

- Cas 3: Tous les bords sont simplement appuyés. Deux bords peuvent se déplacer librement et soumis à une charge de compression dans la direction x, tandis que les deux bords restants sont déchargés et immobiles. Dans ce cas, les conditions aux limites sont définies comme suit

$$w = N_{xy} = \varphi_y = M_x = S_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \text{ at } x = 0, a \quad (19a)$$

$$w = v_0 = \varphi_x = M_y = S_y = 0, \quad N_y = N_{y0} \text{ at } y = 0, b \quad (19b)$$

Où N_{x0} , N_{y0} sont les charges axiales de compression sur les bords mobiles (c.-à-d le Cas 1 et le premier du cas 3) ou sont les charges fictives de compression sur les bords immobiliers (c.-à-d cas 2 et le second du cas 3).

Les solutions proposées w et f qui respectent les conditions aux limites (17) - (19) sont considérées comme suit ([11]; [12])

$$(w, w^*) = (W, \mu h) \sin(\lambda_m x) \sin(\delta_n y) \quad (20a)$$

$$f = A_1 \cos(2\lambda_m x) + A_2 \cos(2\delta_n y) + A_3 \sin(\lambda_m x) \sin(\delta_n y) + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 \quad (20b)$$

$$\varphi_x = B_1 \cos(\lambda_m x) \sin(\delta_n y), \quad \varphi_y = B_2 \sin(\lambda_m x) \cos(\delta_n y) \quad (20c)$$

Où $\lambda_m = m\pi/a$, $\delta_n = n\pi/b$, m , n sont des nombres impairs, W est l'amplitude de la déflexion et μ est un paramètre de l'imperfection. Les coefficients A_i ($i = 1, 2, 3$) sont déterminés par la substitution des équations (20a, b) dans l'équation (16) tel que

$$A_1 = \frac{E_1 \delta_n^2}{32 \lambda_m^2} W(W + 2\mu h), \quad A_2 = \frac{E_1 \lambda_m^2}{32 \delta_n^2} W(W + 2\mu h), \quad A_3 = 0 \quad (21)$$

En utilisant les équations (3) et (8) dans les équations (6d, e) et en remplaçant les équations (20a, c) dans les équations résultantes, les coefficients B_1 et B_2 sont déterminés comme suit

$$B_1 = \frac{a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} W, \quad B_2 = \frac{a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} W \quad (22)$$

dans laquelle

$$(a_{11}, a_{22}, a_{12}) = D_3 (\lambda_m^2, \delta_n^2, \nu \lambda_m \delta_n) + \frac{1-\nu}{2} D_3 (\lambda_m^2, \delta_n^2, \lambda_m \delta_n) + D_4 (1, 1, 0) \quad (23a)$$

$$(a_{13}, a_{23}) = -D_2 (\lambda_m^3 + \lambda_m \delta_n^2, \delta_n^3 + \delta_n \lambda_m^2) \quad (23b)$$

Ensuite, remplaçant les équations (20a, b) dans l'équation (12) et en employant la méthode de Galerkin dans l'équation résultante donne

$$\begin{aligned} & (-D_1 D_3 - D_2^2) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^3 - D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 - [k_w + k_g (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] [(D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4)] W \\ & - \frac{E_1}{16} (D_3 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4 + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)) \times W (W + \mu h) (W + 2\mu h) \\ & - (D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4) \times (N_{x0} \lambda_m^2 + N_{y0} \delta_n^2) (W + \mu h) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Cette équation sera utilisée pour étudier les réponses de flambement et post-flambement des plaques FG épaisses sous des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

III.2 Analyse de post-flambement mécanique

Une plaque FG simplement appuyée avec tous les bords sont mobiles est considérée et cette plaque est appuyée sur des fondations élastiques et soumise à des charges de compression axiale (F_x, F_y) répartis uniformément sur les bords $x=0, a$ et $y=0, b$, respectivement. Dans ce cas, les résultantes des forces de pré-flambement sont [13]

$$N_{x0} = -F_x h, \quad N_{y0} = -F_y h \quad (25)$$

Et l'équation (24) conduit à

$$F_x = e_1^1 \frac{W}{h(W + \mu h)} + e_2^1 \frac{W}{h} (W + 2\mu h) \quad (26)$$

Où

$$e_1^1 = \frac{(D_1 D_3 - D_2^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)^3 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + [K_w + K_g a^2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] D_1}{(\lambda_m^2 + \beta \delta_n^2)[D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} + \frac{[K_w + K_g a^2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] D_1}{a^4 (\lambda_m^2 + \beta \delta_n^2)} \quad (27a)$$

$$e_2^1 = \frac{E_1}{16(\lambda_m^2 + \beta \delta_n^2)[D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times [D_3 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4 + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)] \quad (27b)$$

Dans laquelle

$$\beta = F_y / F_x, \quad K_w = \frac{k_w a^4}{D_1}, \quad K_g = \frac{k_g a^2}{D_1} \quad (28)$$

Pour une plaque FG parfaite, Equation (26) se réduit à une équation dont la charge de compression de flambement peut être déterminée comme suit $F_{xb} = e_1^1$.

III.3. Analyse thermique de post-flambement

Une plaque FG simplement appuyée avec tous les bords sont immobiliers est supposée ici. La plaque est appuyée également sur une fondation élastique et exposée à des environnements de température ou soumise à travers l'épaisseur à un gradient de température. La condition dans le plan sur l'inamovibilité de tous les bords, soit $u_0 = 0$ à $x=0, a$ et $v_0 = 0$ au $y=0, b$, est donnée dans un sens approché comme ([14]; [15])

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial x} dx dy = 0, \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} dy dx = 0 \quad (29)$$

A partir des équations (3) et (8), on peut déterminer les expressions suivantes dans lesquelles l'équation (13) et de l'imperfection ont été incluses

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{E_1} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) + \frac{E_2}{E_1} w_{,xx} - \frac{E_3}{E_1} \varphi_{x,x} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 - w_{,x} w_{,x}^* + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (30a)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{E_1} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) + \frac{E_2}{E_1} w_{,yy} - \frac{E_3}{E_1} \varphi_{y,y} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 - w_{,y} w_{,y}^* + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (30b)$$

L'introduction des équations (20) dans les équations (30), puis le résultat dans les équations (29) donne

$$N_{x0} = -\frac{\Phi_1}{1-\nu} + \frac{4}{mn\pi^2(1-\nu^2)} \left[E_3 (\lambda_m B_1 + \nu \delta_n B_2) + E_2 (\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2) \right] W + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2) W (W + 2\mu h) \quad (31a)$$

$$N_{y0} = -\frac{\Phi_1}{1-\nu} + \frac{4}{mn\pi^2(1-\nu^2)} \left[E_3 (\nu \lambda_m B_1 + \delta_n B_2) + E_2 (\nu \lambda_m^2 + \delta_n^2) \right] W + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\nu \lambda_m^2 + \delta_n^2) W (W + 2\mu h) \quad (31b)$$

Lorsque la dépendance de déviation des charges des bords fictifs est ignorée, à savoir, les équations. (31) devient

$$N_{x0} = N_{y0} = -\frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (32)$$

En substituant les équations (31) dans l'équation (24), on obtient l'expression du paramètre thermique

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{1-\nu} = & \left[\frac{(D_1 D_3 - D_2^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)}{D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4} + \frac{k_w + k_g (\lambda_m^2 + \delta_n^2)}{(\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \right] \frac{W}{W + \mu h} \\ & + \frac{4}{mn\pi^2(1-\nu^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \times \left[E_3 (\lambda_m^3 B_1 + \nu \lambda_m^2 \delta_n B_2 + \nu \lambda_m \delta_n^2 B_1 + \delta_n^3 B_2) + E_2 (\lambda_m^4 + 2\nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4) \right] W \\ & + \left[\frac{E_1 [D_3 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4 + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)]}{16 [D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4] (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} + \frac{E_1 [(\lambda_m^4 + 2\nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4)]}{8(1-\nu^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \right] W (W + 2\mu h) \end{aligned} \quad (33)$$

III.3.1 Élévation uniforme de la température

La plaque FG est soumise à des environnements de température uniformément élevées de l'état initial libre T_i à la valeur finale T_f , et le changement de température $\Delta T = T_f - T_i$ est supposé être indépendant du variable de l'épaisseur. Le paramètre thermique est obtenu à partir des équations (9b), et la substitution du résultat dans l'équation. (33) donne

$$\Delta T = e_1^2 \frac{W}{W + \mu h} + e_2^2 W + e_3^2 W (W + 2\mu h) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \frac{(1-\nu)}{L [D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times \left[(D_1 D_3 - D_2^2) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) \right] \\ &+ \frac{[K_w + K_g a^2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] (1-\nu) D_1}{a^4 L (\lambda_m^2 + \delta_n^2)}, \\ e_2^2 &= \frac{4}{m n L \pi^2 (1+\nu) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \times \\ &\left[E_3 (\lambda_m^3 B_1 + \nu \lambda_m^2 \delta_n B_2 + \nu \lambda_m \delta_n^2 B_1 + \delta_n^3 B_2) + E_2 (\lambda_m^4 + 2\nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4) \right], \\ e_3^2 &= \frac{E_1 (1-\nu)}{16 L (\lambda_m^2 + \delta_n^2) [D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times [D_3 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4 + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)] \\ &+ \frac{E_1 (\lambda_m^4 + 2\nu \lambda_m^2 \delta_n^2 + \delta_n^4)}{8 L (1+\nu) (\lambda_m^2 + \delta_n^2)} \end{aligned} \quad (35)$$

Dans laquelle

$$L = E_m \alpha_m + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{N+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{2N+1} \quad (36)$$

Prenant $\mu = 0$, l'équation (34) conduit à une équation à partir de laquelle le changement de température de flambement des plaques FG parfaites peut être obtenu sous l'expression $\Delta T_b = e_1^2$.

III.3.2 Température non linéaire

La température de surface riche en métal T_M est maintenue à une valeur de référence par contre la température de surface riche en céramique T_C est augmentée régulièrement à travers le sens de l'épaisseur selon l'équation unidimensionnelle de Fourier

$$\frac{d}{dz} \left[K(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad T(z = -h/2) = T_M, \quad T(z = h/2) = T_C. \quad (37)$$

En utilisant $K(z)$ selon l'équation (4), la solution de l'équation (37) peut être trouvée en termes de séries polynomiales, et les sept premiers termes de cette série donne l'approximation suivante ([16]; [17])

$$T(z) = T_M + \Delta T \frac{r \sum_{j=0}^5 \frac{(-r^N K_{CM} / K_M)^j}{jN+1}}{\sum_{j=0}^5 \frac{(-K_{CM} / K_M)^j}{jN+1}} \quad (38)$$

Où $r = (2z+h)/2h$, dans ce cas de charge thermique, $\Delta T = T_C - T_M$ est définie comme la différence de température entre deux surfaces de la plaque FG.

La substitution de l'équation (38) dans les équations (9b) et en remplaçant le résultat Φ_1 dans l'équation (33) donne une expression fermée sous forme de courbes de température-déflexion qui est similaire à l'équation (34), L est remplacé par H qui est défini comme suit

$$H = \frac{\sum_{j=0}^5 \frac{(-K_{CM} / K_M)^j}{jN+1} \left[\frac{E_M \alpha_M}{jN+2} + \frac{E_M \alpha_{CM} + E_{CM} \alpha_M}{(j+1)N+2} + \frac{E_{CM} \alpha_{CM}}{(j+2)N+2} \right]}{\sum_{j=0}^5 \frac{(-K_{CM} / K_M)^j}{jN+1}} \quad (39)$$

III.4 Analyse Thermomécanique de post-flambement

La plaque FG appuyée sur la fondation élastique est uniformément comprimée par F_x sur les deux bords mobiles et simultanément exposés à des environnements de températures élevées ou soumise à une distribution de température non linéaire. Les deux bords $y=0, b$ sont considérés comme immobiles. Dans ce cas, $N_{x0} = -F_x h$ et la charge de compression fictive sur les bords immobiles est obtenue par le remplacement de la deuxième équation des équations (30) dans la deuxième équation des équations (29)

$$N_{y0} = \nu N_{x0} - \Phi_1 + \frac{4\delta_n}{mn\pi^2} [E_3 B_2 + E_2 \delta_n] W + \frac{E_1 \delta_n^2}{8} W(W + 2\mu h) \quad (40)$$

Ensuite, N_{x0} et N_{y0} sont placées dans l'équation (24) pour donner

$$F_x = e_1^3 \frac{W}{h(W + \mu h)} + e_2^3 \frac{W}{h} + e_3^3 W \frac{(W + 2\mu h)}{h} + \frac{L \delta_n^2 \Delta T}{h(\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)} \quad (41)$$

Où les coefficients e_1^3 ; e_2^3 ; e_3^3 sont définis comme suit

$$e_1^3 = \frac{(D_1 D_3 - D_2^2)(\lambda_m^2 + \delta_n^2)^3 + D_1 D_4 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)^2 + [K_w + K_g a^2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] D_1}{(\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)[D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} + \frac{[K_w + K_g a^2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2)] D_1}{a^4 (\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)}, \quad (42a)$$

$$e_2^3 = \frac{4 \delta_n^3}{mn \pi^2 (\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)} \times [E_3 B_2 + E_2 \delta_n] \quad (42b)$$

$$e_3^3 = \frac{E_1}{16(\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)[D_3 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) + D_4]} \times [D_3 (\lambda_m^4 \delta_n^2 + \lambda_m^2 \delta_n^4 + \lambda_m^6 + \delta_n^6) + D_4 (\lambda_m^4 + \delta_n^4)] + \frac{E_1 \delta_n^4}{8(\lambda_m^2 + \nu \delta_n^2)} \quad (42c)$$

Et L est remplacé par H , dans le cas des plaques FG soumises à l'action combinée de la charge de compression uni-axiale et un gradient de température.

Conclusion

Les équations (26), (34) et (41) sont des expressions explicites de charge-déflexion pour les plaques FGM épaisses reposant sur des fondations élastiques de type Pasternak et soumises à des charges de compression dans le plan, thermiques et thermomécaniques, respectivement. L'application de ces équations pour des plaques FGMs minces et pures, c'est-à-dire ignorant les déformations de cisaillement transversales et les fondations élastiques, donne les résultats correspondants obtenus en utilisant la théorie des plaques classique.

Chapitre IV :

Résultats et discussion

Introduction

IV.1 le post flambement des plaques isotropes parfaites et imparfaites.

IV.2. L'analyse de flambement et post flambement des plaques FGMs épaisses reposant sur des fondations élastiques.

- ✓ Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post-flambement des plaques FGMs sous une charge de compression uniaxiale.
- ✓ Effets des conditions aux limites dans le plan sur le post-flambement des plaques FGMs.
- ✓ Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous différents types de charges thermiques.
- ✓ Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous différents types de charges thermiques.
- ✓ Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous l'élévation uniforme de la température.
- ✓ Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous la compression uni-axiale.
- ✓ Effets du champ de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale.
- ✓ Des Effets interactives de la fondation élastique et le gradient de température sur le post-flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale.

Conclusion

Introduction

Pour évaluer l'influence de l'indice de la loi de puissance, les paramètres géométriques, les paramètres de la fondation et le type du chargement (thermique, mécanique, thermomécanique), une méthode d'analyse est présentée qui prévoit à la fois l'estimation de la charge de flambement ainsi le tracé des sentiers d'équilibre des plaques FGMs appuyées sur des fondations élastiques de type Pasternak. Les effets de différents paramètres sont étudiés à travers les figures.

IV.1 le post flambement des plaques isotropes parfaites et imparfaites

Aux fins de validation, le post-flambement thermique d'une plaque épaisse isotrope carrée simplement appuyée est examiné. La plaque est soumise à un champ uniforme de la température avec tous les bords sont immobiles et ne repose pas sur une fondation élastique. Les courbes du chargement de post-flambement thermique-déflexion pour des plaques isotropes parfaites et imparfaites ($\nu = 0.3$) sont obtenus en utilisant la présente formulation et sont comparées à ceux de Shen [1] sur la Fig 1. En général, une bonne concordance est observée dans cette comparaison. Cependant, pour des valeurs élevées de la charge thermique, des différences significatives entre les résultats de la méthode proposée et la méthode de Shen sont apparues. Ces différences sont dues aux méthodes utilisées.

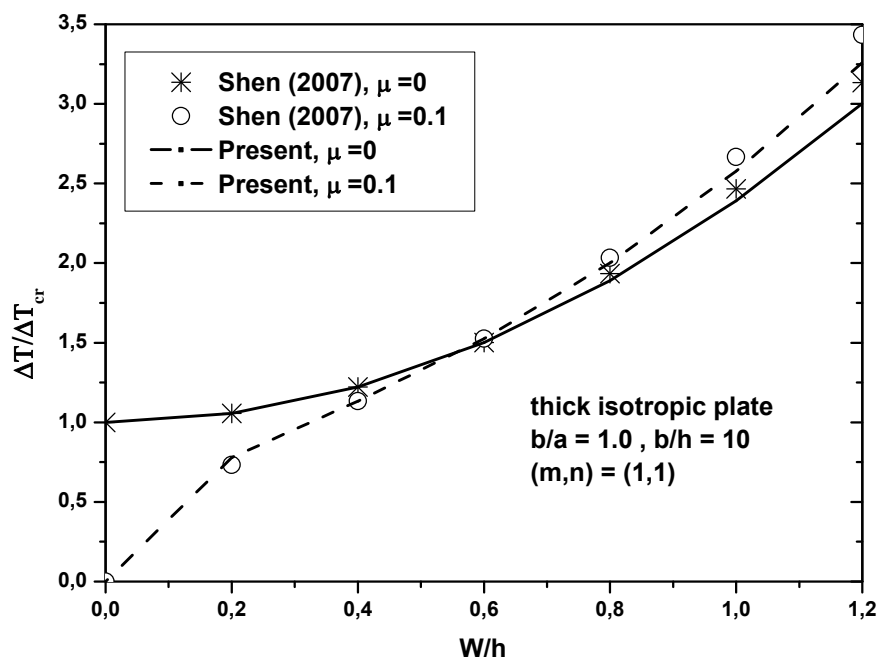


Fig.1: Comparaisons entre les courbes des charges de post flambement-déflexion pour les plaques isotropes.

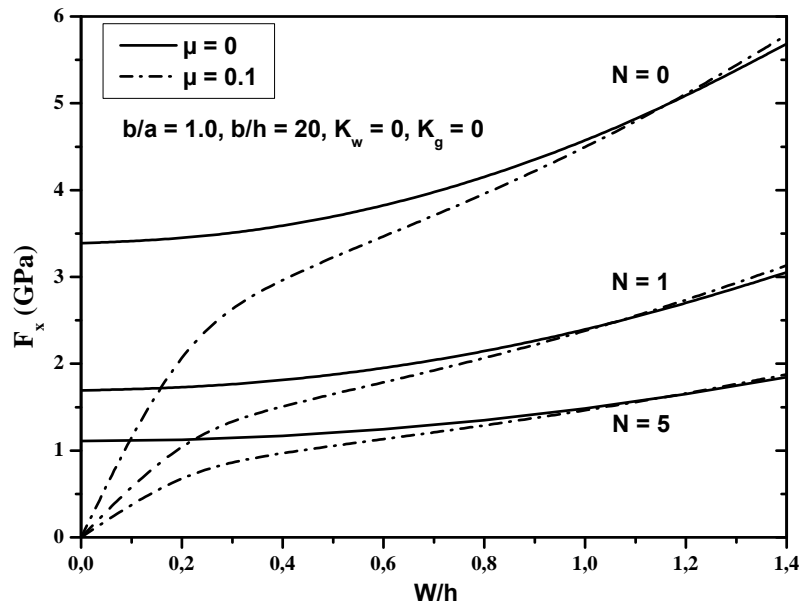


Fig.2: Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous une charge de compression uniaxiale (tous les bords sont mobiles).

IV.2. L'analyse de flambement et post flambement des plaques FGMs épaisses reposant sur des fondations élastiques

Dans ce qui suit, nous considérons une plaque carrée de céramique-métal avec les propriétés suivantes ([2]; [3]; [4]; [5])

- $E_M = 70\text{GPa}, \nu_M = 0.3, \alpha_M = 23 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, K_M = 204\text{W/mK}$
- $E_C = 380\text{GPa}, \nu_C = 0.3, \alpha_C = 7.4 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, K_C = 10.4\text{W/mK}$

Il est à noter que le flambement des plaques parfaites se produit pour $m = n = 1$, et ces valeurs sont des demi-ondes et sont également utilisées pour tracer les sentiers d'équilibre du chargement-déflexion pour les deux plaques parfaites et imparfaites. Dans les graphes, W/h présente la déflexion maximale adimensionnelle et l'interaction plaque FG-fondation élastique est ignorée, sauf indication contraire.

La fig.2 prouve que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance (N) provoque une tendance à la baisse des courbes de post-flambement des plaques FG avec des bords mobiles sous charge de compression uni-axiale. Il peut également être vu que quand on

a varié N de 0 à 1, les deux charges critiques de flambement et la capacité de chargement de post-flambement sont fortement chutées. Cependant, une variation plus lente est remarquée quand N est supérieur à 1.

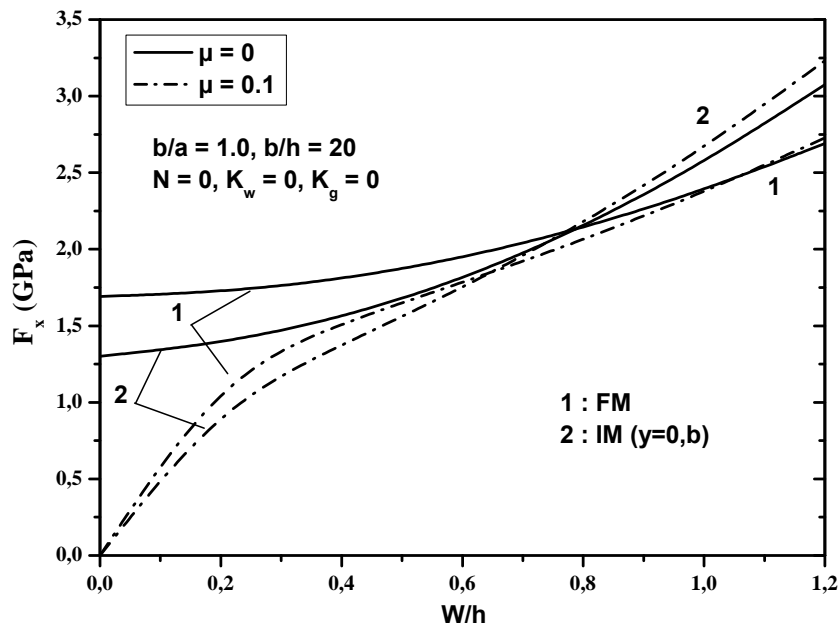


Fig.3: Effets des conditions aux limites dans le plan sur le post flambement de la plaque FGM sous la compression uniaxiale

La fig.3 compare la réponse de post-flambement des plaques FG comprimées sous deux types de conditions aux limites planes. La plaque est considérée comme librement mobile (FM) sur tous les bords (cas 1) et immobile (IM) sur les deux bords déchargés $y=0,b$ (cas 2). Comme on peut le constater, malgré des charges critiques de flambement inférieures, les sentiers d'équilibre de post-flambement pour le Cas 2 deviennent plus élevés que ceux pour le cas 1 dans la région profonde de la réponse de post-flambement.

Les fig. 4 et 5 représentent la variation des courbes des charges de post-flambement thermique-déflexion des plaques FG avec tous les bords sont immobiles et soumises à une montée de température uniforme et à une distribution de température non linéaire, respectivement, avec différentes valeurs de N . On peut voir que, la réduction du pourcentage de la fraction volumique du constituant céramique conduit à une diminution de la capacité de résistance à la température des plaques. En outre, on peut en déduire que, lorsque N varie de 0 à 5, la tendance de variation des courbes

température-déflexion ne sont pas identiques pour les deux cas de chargement thermique.

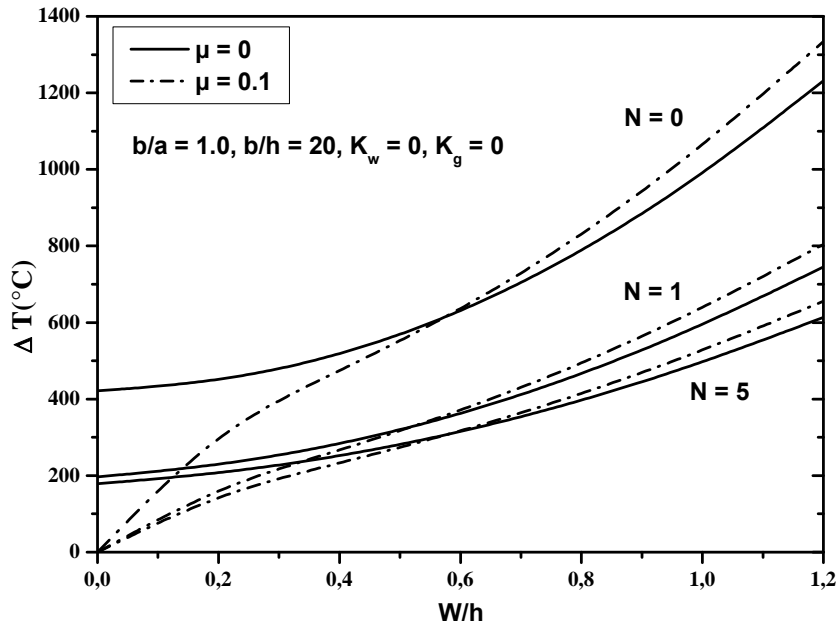


Fig.4: Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous une élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles).

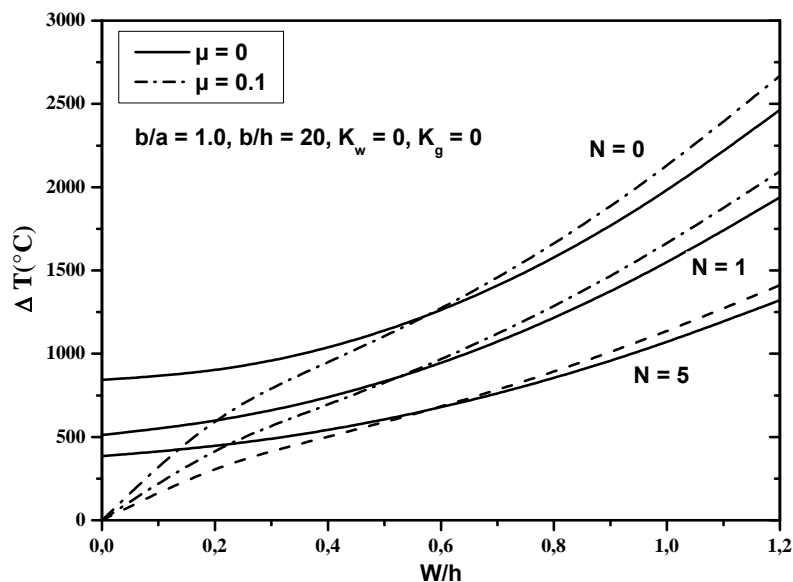


Fig.5: Effets de l'indice de la fraction volumique sur le post flambement des plaques FGMs sous un gradient de température (tous les bords sont immobiles).

Les influences des fondations élastiques sur la réponse post-flambement des plaques FG sous de deux types de charges thermiques sont illustrés sur les Fig. 6 et 7.

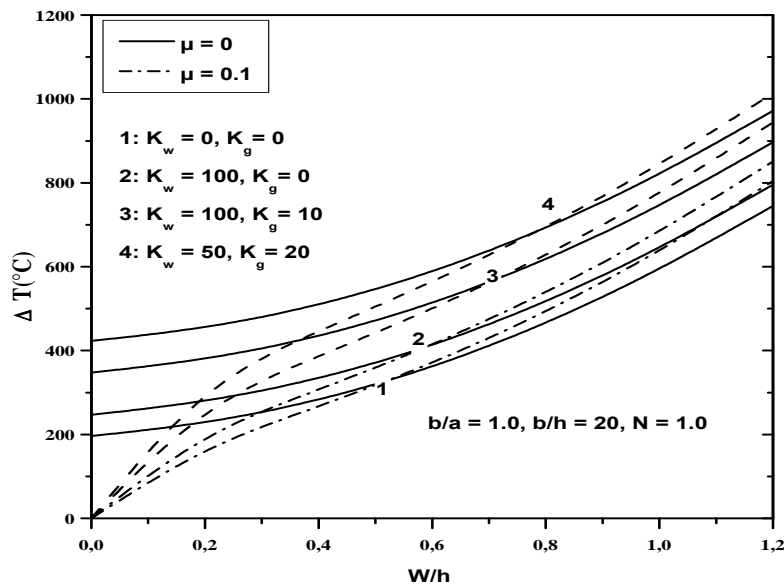


Fig.6: Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous une élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles).

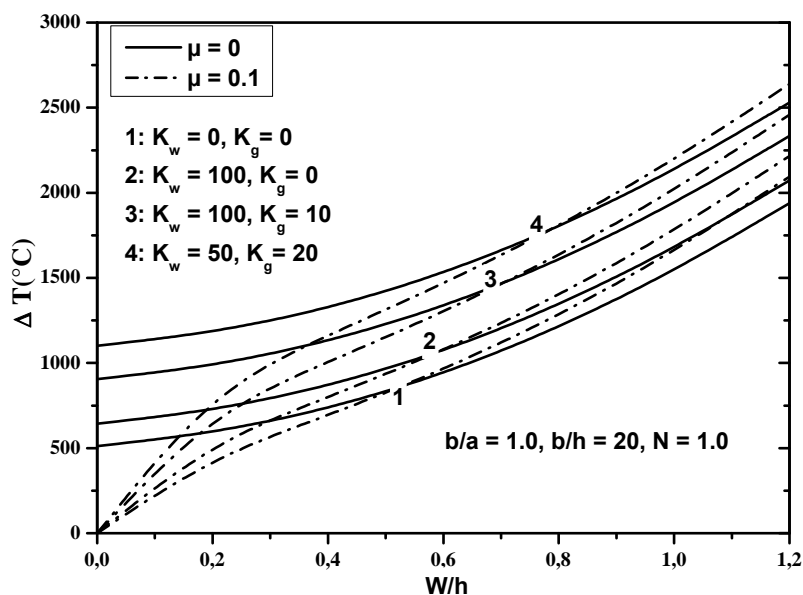


Fig.7: Effets des fondations élastiques sur le post flambement des plaques FGMs sous un gradient de température (tous les bords sont immobiles).

Comme on s'y attendait, les deux charges de flambement et la capacité de support aux charges de post-flambement sont amplifiées en raison de la présence de fondations

élastiques. Ceci est parce que le système devient rigide quand les ressorts sont plus tenaces. En outre, la rigidité de la couche de cisaillement K_g du modèle Pasternak a plus d'effets en comparaison avec le module de fondation K_w du modèle Winkler.

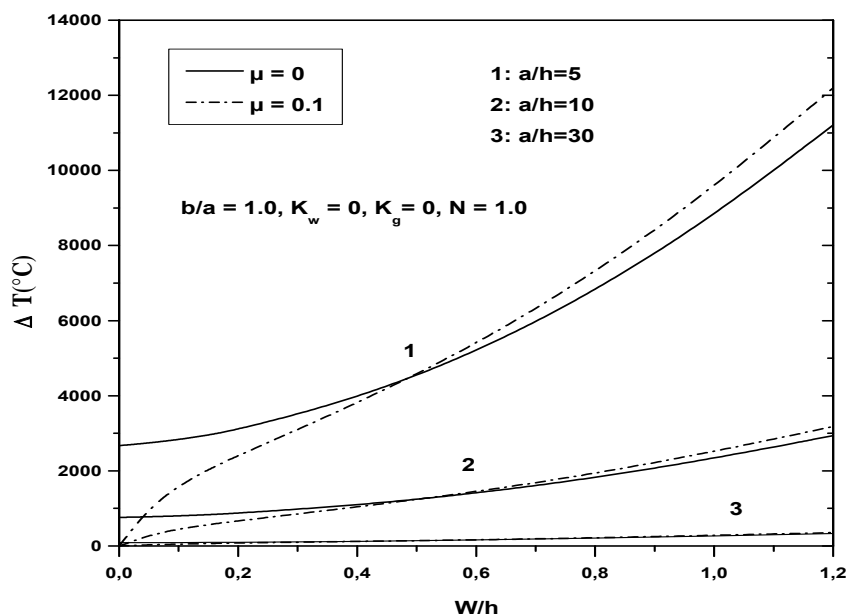


Fig.8: Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous l'élévation uniforme de la température (tous les bords sont immobiles)

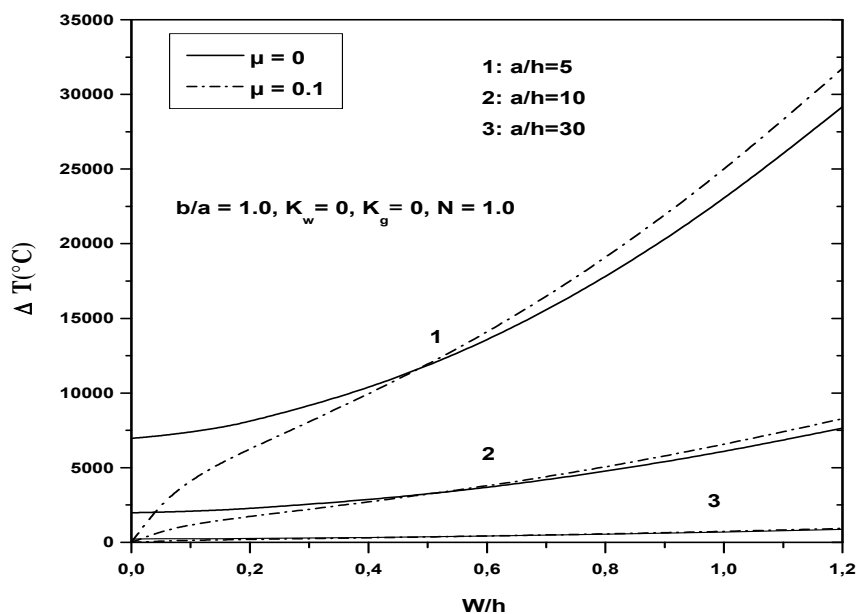


Fig.9: Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous un gradient de température (tous les bords sont immobiles).

Les effets des rapports d'épaisseur (a/h) sur le comportement post-flambement des plaques FG sous deux types de charges thermiques sont représentés dans les [fig. 8 et 9](#).

Il peut être démontré à partir de ces deux figures que l'augmentation du rapport d'épaisseur rend la capacité de résistance à la température des plaques plus basse.

Le comportement thermomécanique de post-flambement des plaques FG avec différentes valeurs des rapports d'épaisseur (a/h) et soumises à une compression uni-axiale est mis en évidence sur la [Fig. 10](#). On peut voir à nouveau que la capacité de chargement mécanique des plaques FG est plus réduite avec l'augmentation des rapports d'épaisseur.

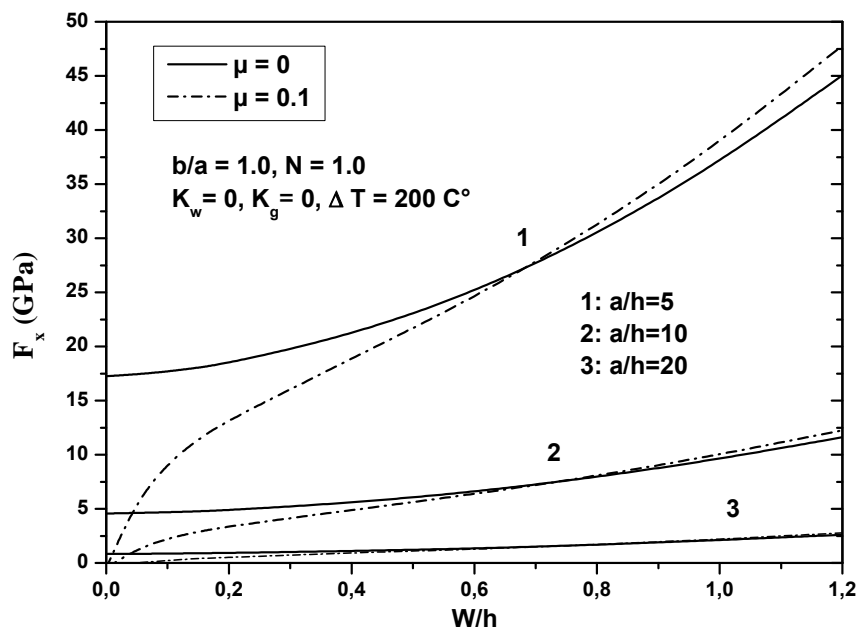


Fig.10: Effets des rapports d'épaisseur sur le post-flambement de plaques de FG sous la compression uni-axiale (les bords sont immobiles on $y = 0, b$).

La réponse thermomécanique de post-flambement des plaques FG exposées au champ de température et soumises à une compression uni-axiale est illustrée sur la [Fig. 11](#).

Comme on le voit, la capacité de support aux charges mécaniques des plaques FG est plus réduite en raison de l'élévation de la charge thermique préexistante.

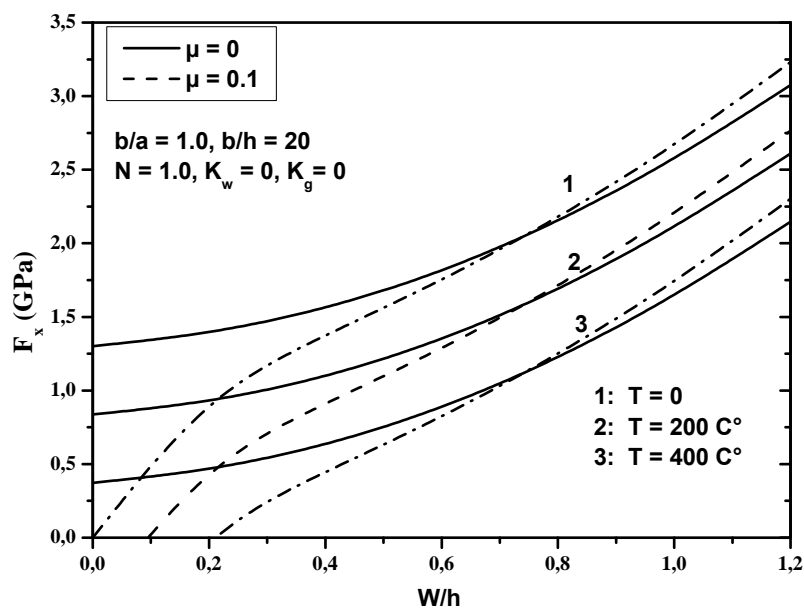


Fig.11: Effets du champ de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale (les bords $y=0, b$ sont immobiles)

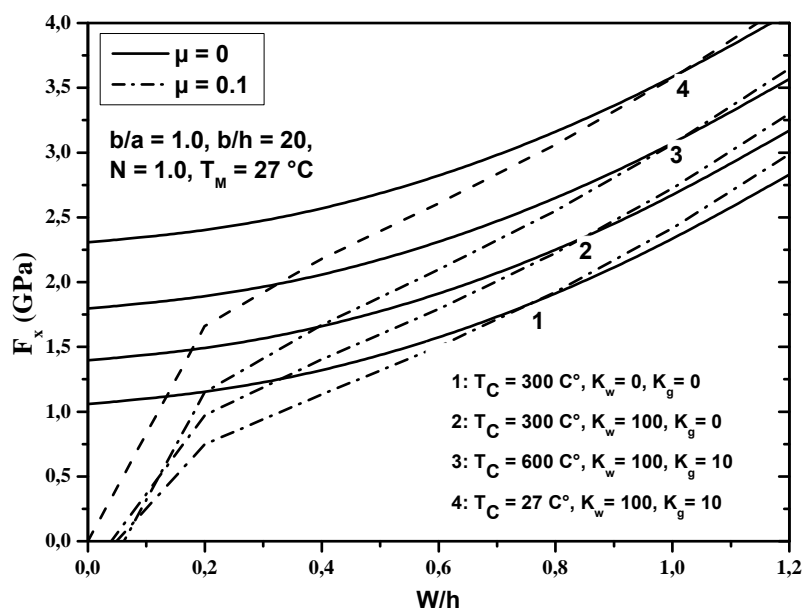


Fig.12: Des Effets interactifs de la fondation élastique et le gradient de température sur le post flambement des plaques FGMs sous la compression uniaxiale (les bords $y=0, b$ sont immobiles).

Enfin, les influences interactives des fondations élastiques et gradient de température sur le post-flambement des plaques FG soumises à des charges de compression uniaxiale sont présentées dans la Fig. 12. Comme on peut le remarquer, en dépit de

l'augmentation de la température de la surface riche en céramique, la fondation élastique de type Pasternak a des effets très bénéfiques sur l'amélioration de la capacité de chargement thermomécanique des plaques FG. Il est également observé que les facteurs constants des ressorts ont un impact significatif sur la stabilité des plaques, en particulier lorsqu'il est inclus.

Conclusion

Dans ce présent chapitre, une formulation analytique est proposée pour étudier les réponses de flambement et de post-flambement mécaniques, thermiques et thermomécaniques des plaques épaisses appuyées sur des fondations élastiques. L'approche développée est basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé de Shi pour déterminer des prévisions précises pour les charges de flambement et la capacité de chargement de post-flambement des plaques épaisses. Les expressions analytiques obtenues des courbes charge-déflexion ont une contribution concrète dans l'analyse et la conception. Les résultats prouvent que les fondations élastiques ont un effet bénéfique sur la stabilité des plaques FG. De plus, il est conclu également que l'indice de loi de puissance, les conditions aux limites, l'imperfection et la température ont une influence significative sur la réponse des plaques.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

La mécanique des structures a pour but de rechercher les meilleures formes et dimensions à donner aux éléments d'une construction, pour lui permettre de résister aux actions qui les sollicitent d'une manière aussi économique que possible. Les structures minces sont pour cela utilisées largement, au vu de leur excellente capacité à supporter et transmettre les sollicitations, couplée à une masse réduite. La plaque est un type de structure mince très employée, et dans de nombreux secteurs. On la retrouve ainsi sous forme de conserve dans l'agro-alimentaire, de fuselage d'avion dans l'aéronautique, de silo de stockage dans le génie civil, de réservoir à carburant dans le spatial... Cependant, la faible épaisseur de ces structures les rend sensibles à des phénomènes d'instabilité structurelle, ou flambage. Une bonne compréhension de ces phénomènes est primordiale afin d'éviter un mauvais dimensionnement, c'est pourquoi le flambage des plaques minces a été largement étudié depuis le début du XXème siècle. Néanmoins, les méthodes de dimensionnement des plaques minces peuvent encore être grandement améliorées, grâce à l'évolution des outils numériques et des méthodes expérimentales permettant de mieux comprendre la phénoménologie du flambage et d'élargir le champ d'exploration.

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures. Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes tangentielles thermoélastiques liées à un chargement

thermique donné en chaque point de la structure, voire même l'influence de la superposition des chargements thermiques et mécaniques.

Une investigation critique est donnée dans la présente thèse, dans quelque type de techniques de fabrication, les applications spécifiques des FGMs. différentes théories adoptée pour la réponse statique de post-flambement des plaques FGMs a été discuté.

Les résultats généraux se résument comme suit :

1. Parmi les différentes théories des plaques comme CLPT, FSDT, TSDT, HSDT, utilisées pour l'analyse des plaques FGM, FSDT et HSDT ont été largement utilisés. Certain modification a également été incorporée dans FSDT et HSDT de temps en temps des recherches pour obtenir des résultats précis dans le domaine et ca dans le temps réel.
2. Dans la plupart des théories 2D seul l'effet de la déformation transversale de cisaillement a été considéré et très moins de théories trouvées dans lesquelles le cisaillement transversal et l'effet de la déformation normale transversale sont considérés. De nombreux chercheurs ont affirmé utiliser de théories 2D à la place de celles 3D pour économiser le temps de calcul et le coût, mais davantage de recherches devraient être effectuées pour rendre les résultats basés sur la théorie 2D avec une proximité étroite avec des résultats basés les théories 3D.
3. La gradation des propriétés des matériaux est une préoccupation importante pour la réponse structurelle et dynamique des plaques FGMs. Vibration, flambement et le comportement de post-flambement est très influencé par le type de chargement, gradation de la propriété matérielle, type de fondation, etc. Il est également conclu que, parmi plusieurs modèles de la micromécanique, le modèle de Voigt est acceptable dans l'analyse des plaques et structures en FGMs et ca pour gagner du temps de calcul et de bons résultats. Des soins appropriés doivent être prises lors de l'adaptation des FGMs pour une application spécifique.
4. Bien que de nombreuses techniques de fabrication des FGMs sont disponibles, d'entre eux la métallurgie des poudres est la technique la plus adoptée maintenant, mais il existe un besoin d'une certaine amélioration dans la techniques pour obtenir des garantis de distribution des propriétés dans toute la structure avec plus de fiabilité et de prévisibilité.

5. Le grand potentiel des FGMs ne réside pas seulement dans le domaine de l'aérospatiale mais aussi largement accepté dans les applications de soins de santé. Les FGMs semblent être très prometteur dans les applications dans le terrain médical comme la dentisterie, os artificiels, etc. Certains chercheurs ont besoin d'explorer davantage dans ce domaine pour en faire une réalisation révolutionnaire pour le bénéfice de la société.

La stabilité des structures élastiques est un sujet d'une importance primordiale pour pratiquer le génie civil. Dans de nombreux cas les critères de stabilité sont directement associés à la capacité porteuse des différents systèmes structuraux. En raison de ca, une quantité considérable de travaux de recherche, à la fois théorique et expérimentale, a été effectuée afin d'obtenir une meilleure compréhension des phénomènes d'instabilité et de leur implication sur la sécurité structurelle. Malgré ces efforts, plusieurs défaillances structurelles se sont produites au cours des trois dernières décennies et ont montré qu'il ya encore des problèmes qui ne sont pas résolues de façon satisfaisante. La principale cause de cette situation provient du degré élevé de complexité de champ étudié. Pour une prédiction précise de la marge de sécurité contre un échec de l'instabilité structurelle l'analyste aura à examiner une variété de paramètres tels que : la géométrie spatiale de la structure, le type de connexion et les supports, le matériau avec les propriétés et leurs distributions, l'amplitude et la distribution de l'imperfection géométrique et mécanique, les caractéristiques de la charge et ainsi de suite. En outre, dans la plupart des cas, l'enquête ne peut pas être limitée à la détermination de la charge critique mais doit couvrir le comportement postcritique de la structure aussi. Au cours de cette thèse, on a tenté de mettre en avant une approche éclairant le comportement critique et postcritique du système structurel.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

Chapitre I

- [1] **Koizumi M.** The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater* 1993;34:3–10.
- [2] **Finot M, Suresh S.** Small and large deformation of thick and thin-film multilayers: effect of layer geometry, plasticity and compositional gradients. *J Mech Phys Solids* 1996;44:683–721.
- [3] **Krell T, Schulz U, Peters M, Kaysser WA.** Graded EB-PVD alumina–zirconia thermal barrier coatings-an experimental approach. *Mater Sci Forum* 1999;311:396–401.
- [4] **Gasik MM.** Functionally graded materials: bulk processing techniques. *Int J Mater Prod Technol* 2010;39(1–2):20–9.
- [5] **Hill R.** A self-consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids* 1965;13:213–22.
- [6] **Hashin Z.** Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. *J Compos Mater* 1968;4:284–300.
- [7] **Bhaskar K, Varadan TK.** Assessment of the self consistent scheme approximation: conductivity of composites. *ASME J Appl Mech* 2001;68(4):660–2.
- [8] **Mori T, Tanaka T.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall* 1973;21:571–4.
- [9] **Benveniste Y.** A new approach to the application of Mori–Tanaka’s theory in composite materials. *Mech Mater* 1987;6:147–57.
- [10] **Hashin Z.** The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME J Appl Mech* 1962;29:143–50.
- [11] **Hashin Z, Shtrikman S.** A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials. *J Mech Phys Solids* 1964;11:127–40.
- [12] **Hashin Z, Rosen BW.** The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *ASME J Appl Mech* 1964;4:223–32.
- [13] **Hashin Z.** Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. *ASME J Appl Mech* 1979;46:543–50.

- [14] **Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V.** Micromechanical models for graded composite materials. *J Mech Phys Solids* 1997;45:1281–302.
- [15] **Caruso JJ, Charnis CC.** Assessment of simplified composite micromechanics using three dimensional finite element analysis. *J Compos Tech Res* 1986;8(3):77–83.
- [16] **Suresh S, Mortensen A.** Fundamentals of functionally graded materials. 1st ed. London: IOM Communications; 1998.
- [17] **Vel SS, Batra RC.** Exact solutions for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J* 2002;40(7):1421–33.

Chapitre II

- [1] **Ghugal, Y. M., Shimpi 2002.** A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *J. Reinf. Plast. Compos.* 21 775-813.
- [2] **Tung, N. V., 2004.** Modélisation globale et local des structures multicouches par éléments finis de plaque. Ph.D. thesi, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [3] **Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959.** Theory of plates and Shells. McGraw-Hill, New York.
- [4] **Reddy, J., 1997.** Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis. CRC Press, Boca Raton.
- [5] **Reddy, J., 1999.** Theory and analysis of Elastic Plates. Taylor Francis, Philadelphia.
- [6] **He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashankera, S., Liew, K. M., 2001.** Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *Int. J. Solids Struct.* 38, 1641-1655.
- [7] **Reissner, E., 1945.** The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* 13, 69-77.
- [8] **Reissner, E., 1975.** On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. *Int. J. Solids Struct.* 11, 569-573.
- [9] **Mindlin, R. D., 1951.** Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31-38.
- [10] **Miara, B., Podio-Guidugli, P., 2006.** Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343, 375-678.
- [11] **Praveen, G. N., Reddy, J. N., 1998.** Nonlinearr transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Int. J. Solids Struct.* 35, 4457-4476.

- [12] **Croce, L. D., Venini, P., 2004.** Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 705-725.
- [13] **Zenkour, A. M., 2003.** Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermomechanical loading. *Compos. Struct.* 65, 367-379.
- [14] **Zenkour, A. M., 2004a.** Bending of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plates theories. *J. Eng. Math.* 50, 75-93.
- [15] **Zenkour, A. M., 2004b.** Thermal effects on the bending reponse of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mech.* 171, 171-187.
- [16] **Hildebrand, F. B., Reissner, E., Thomas, G. B., 1949.** Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. No. 1833.
- [17] **Naghdi, P. M., 1957.** On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math.* 14, 369-380.
- [18] **Liberscu, L., 1967.** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int. J. Solids Struct.* 3, 53-68.
- [19] **Nelson, R. B., Lorch, D. R., 1974.** A refined theory for laminated orthotropic plates. *J. Appl. Mech.* 41, 177-183.
- [20] **Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977a.** A high-order theory of plate deformation, Part I : Homogeneous plates. *J. Appl. Mech.*, 663-668.
- [21] **Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977b.** A high-order theory of plate deformation, Part I : Laminated plates. *J. Appl. Mech.*, 669-676.
- [22] **Kant, T., Swaminathan, K., 2002.** Analytical solution for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on the higher order refined theory. *Compos. Struct.* 56, 329-344.
- [23] **Reddy, J. N., 2000.** Analysis of functionally graded materials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47, 663-684.
- [24] **Cheng, Z. Q., Batra, R. C., 2000b.** Three-dimensional thermoelastic deformations of functionally graded elliptic plates. *J. Sound Vibr.* 31, 97-106.
- [25] **Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, Martins, P. A. L. S., 2004.** Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos. Struct.* 193, 705-725.

- [26] **Zenkour, A. M., 2005a.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 2- buckling and free vibration. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5243-5258.
- [27] **Zenkour, A. M., 2005b.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 1- Deflection and stresses. *Int. J. Solids Struct.* 42. 5224-5242.
- [28] **Zenkour, A. M., 2006.** Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. *Appl. Math. Modelling* 30. 67-84.
- [29] **Pagano NJ.** Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J Compos Mater* 1969;3(3):398–411.
- [30] **Pagano NJ.** Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J Compos Mater* 1970;4(1):20–34.
- [31] **Srinivas S, Rao AK. Bending,** vibration and buckling of simply supported thick orthotropic plates and laminates. *Int J Solids Struct* 1970;6:1463–81.
- [32] **Srinivas S, Joga Rao CV, Rao AK.** An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 1970;12:187–99.
- [33] **Pandya BN, Kant T.** Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations. *Int J Solids Struct* 1988;24(12):1267–86.
- [34] **Pandya BN, Kant T.** Flexure analysis of laminated composites using refined higher-order Co plate bending elements. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1988;66:173–98.
- [35] **Pandya BN, Kant T.** Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model. *Compos Sci Technol* 1988;32:137–55.
- [36] **Kant T, Menon MP.** Estimation of interlaminar stresses in fibre reinforced composite cylindrical shells. *Comput Struct* 1991;38(2):131–47.
- [37] **Kant T, Manjunatha BS.** On accurate estimation of transverse stresses in multilayer laminates. *Comput Struct* 1994;50(3):351–65.
- [38] **Reddy JN.** *Mechanics of laminated composite plates, theory and analysis.* 1st ed. New York: CRC Press; 1997.
- [39] **Kant T, Swaminathan K.** Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories. *J Sound Vib* 2001;241(2):319–27.

- [40] **Kant T, Swaminathan K.** Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Compos Struct* 2002;56:329–44.
- [41] **Koizumi M.** FGM activities in Japan. *Composites Part B* 1997;28:1–4.
- [42] **Suresh, S., Mortensen, A., 1998** Fundamentals of functionally graded materials : Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites. Press, Cambridge.
- [43] **Birman V, Byrd LW.** Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *ASME Appl Mech Rev* 2007;60:195–216.
- [44] **Praveen GN, Reddy JN.** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998;35:4457–71.
- [45] **Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S.** Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur j Mech A/Solids* 1999;18:185–99.
- [46] **Reddy JN.** Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 2000;47:663–84.
- [47] **Mian AM, Spencer AJM.** Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J Mech Phys Solids* 1998;46(12):2283–95.
- [48] **Ootao Y, Tanigawa Y.** Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *J Therm Stresses* 1999;22:35–55.
- [49] **Ootao Y, Tanigawa Y.** Three-dimensional solution for transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to nonuniform heat supply. *Int J Mech Sci* 2005;47:1769–88.
- [50] **Ootao Y, Tanigawa Y, Ishimaru O.** Optimization of material composition of functionally graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *J Therm Stresses* 2000;23:257–71.
- [51] **Vel SS, Batra RC.** Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct* 2003;40:7181–96.
- [52] **Pitakthapanaphong S, Busso EP.** Self-consistent elastoplastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal gradients. *J Mech Phys Solids* 2002;50:695–716.

- [53] **Yang J, Shen H-S.** Non-linear analysis of FGM plates under transverse and inplane loads. *Int J Non-Linear Mech* 2003;38:467–82.
- [54] **Yang J, Shen H-S.** Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites Part B* 2003;34:103–15.
- [55] **Shen H-S.** Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *Int J Mech Sci* 2002;44:561–84.
- [56] **Shen H-S.** Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings. *Int J Solids Struct* 2005;42:6101–21.
- [57] **Huang ZY, Lu CF, Chen WQ.** Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations. *Compos Struct* 2008;85(95):104.
- [58] **Shen H-S, Wang Z-X.** Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations. *Compos Struct* 2010;92:2517–24.
- [59] **Zhang D-G, Zhou Y-H.** A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput Mater Sci* 2008;44:716–20.
- [60] **Fares ME, Elmarghany MKh, Atta D.** An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91:296–305.
- [61] **Abdelaziz HH, Atmane HA, Mechab I, Boumia L, Tounsi A, Abbas ABE.** Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory. *Chin J Aeronaut* 2011;24:434–48.
- [62] **Shimpi RP.** Refined plate theory and its variants. *AIAA J* 2002;40(1):137–46.
- [63] **Shimpi RP, Patel HG.** A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43(22–23):6783–99.
- [64] **Cheng ZQ, Batra RC.** Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J Sound Vib* 2000;229:879–95.
- [65] **Yang J, Shen H-S.** Dynamic response of functionally graded rectangular thin plates. *Compos Struct* 2001;54:497–508.
- [66] **Yang J, Shen H-S.** Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environments. *J Sound Vib* 2002;255(3):579–602.

- [67] **Yang J, Liew KM, Kitipornchai S.** Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory. *Comput Mech* 2004;33:305–15.
- [68] **Yang J, Liew KM, Kitipornchai S.** Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos Sci Technol* 2005;65:1165–75.
- [69] **Yang J, Huang X-L.** Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2007;196:2619–30.
- [70] **Javaheri R, Eslami MR.** Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM J* 2002;82:277–83.
- [71] **Javaheri R, Eslami MR.** Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J* 2002;40(1):162–9.
- [72] **Javaheri R, Eslami MR.** Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *J Therm Stresses* 2003;25:603–25.
- [73] **Yang J, Liew KM, Kitipornchai S.** Stochastic analysis of computationally graded plates with system randomness under static Loading. *Int J Solids Struct* 2006;47:1519–41.
- [74] **Zenkour AM.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* 2005;42:5243–58.
- [75] **Hoang VT, Nguyen DD.** Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Compos Struct* 2010;92:1184–91.
- [76] **Nguyen DD, Hoang VT.** Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct* 2011;93:2874–81.
- [77] **Shen H-S.** Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction. *Composites Part B* 2007;38:201–15.
- [78] **Shen H-S.** Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties. *Int J Mech Sci* 2007;49:466–78.
- [79] **Shen H-S.** A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators. *Compos Struct* 2009;91:375–84.
- [80] **Xian-Kun Xia X-K, Shen H-S.** Nonlinear vibration and dynamic response of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators. *Compos Struct* 2009;90:254–62.

- [81] **Tung, H.V., Duc, N.D. (2010)** “Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Composite Structures*, **92**, 1184–1191.
- [82] **Duc, N.D., Tung, H.V. (2011)** “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, **93**, 2874–2881.
- [83] **Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2015)** “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.
- [84] **Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012)** “Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *Journal of Thermal Stresses*, **35**, 677–694.
- [85] **Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013)** “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 547 – 567.
- [86] **Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014)** “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16**(3), 293–318.
- [87] **Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014)** “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Method.*, **11**(5), 135007.
- [88] **Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015)** “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel and Composite Structures*, **19**(3), 521-546.
- [89] **Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013)** “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, **76**, 467-479.
- [90] **Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013)** “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15**, 671–703.

- [91] **Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014)** “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**(2), 374-383.
- [92] **Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014)** “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24-34.
- [93] **Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014)** “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**(4), 795-810.
- [94] **Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014)** “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Method.*, **11**(6), 1350082.
- [95] **Ramu, I., Mohanty, S.C. (2015)** “Free vibration and dynamic stability of functionally graded material plates on elastic foundation”, *Defence Science Journal*, **65**(3), 245 – 251.
- [96] **Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015)** “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 235-253.
- [97] **Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015)** “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1143-1165.
- [98] **Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015)** “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, **39**(9), 2489-2508.
- [99] **Winkler, E. (1867)** “Die lehre von der elasticitaet und festigkeit”, Prague: Prag Dominicus.
- [100] **Pasternak, P.L. (1954)** “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu I Arkhitecture*, **1**, 1–56.

[101] Rivello, R.M., "Theory and analysis of flight structures" éditions McGraw-Hill, New York, 1969.

[102] Weingarten, V.I, Morgan, E.J, and Seide, P., "Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical Shells under axial Compression", AIAA Journal, 3, (3), 500-505, 1965.

Chapitre III

[1] Shi, G. , "A new simple third-order shear deformation theory of plates", *Int J Solids Struct*, **44**, 4399–4417.

[2] Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B*, **42**(6), 1386-1394.

[3] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **41**, 421–433.

[4] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.

[5] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, **60**, 274-283.

[6] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 409-423.

[7] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.

[8] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **54**(4), 693-710.

- [9] Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18(6)**, 1493 – 1515.
- [10] Samsam Shariat, B.A., Eslami, M.R. (2006), “Thermal buckling of imperfect functionally graded plates”, *Int J Solids Struct*, **43**, 4082–4096.
- [11] Librescu, L., Lin, W. (1997), “Postbuckling and vibration of shear deformable flat and curved panels on a non-linear elastic foundation”, *Int J Non-Lin Mech*, **32(2)**, 211–225.
- [12] Lin, W., Librescu, L. (1998), “Thermomechanical postbuckling of geometrically imperfect shear-deformable flat and curved panels on a nonlinear foundation”, *Int J Eng Sci*, **36(2)**, 189–206.
- [13] Samsam Shariat, B.A., Eslami, M.R. (2007), “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Compos Struct*, **78**, 433–439.
- [14] Tung, H.V., Duc, N.D. (2010), “Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Composite Structures*, **92**, 1184–1191.
- [15] Shen, H-S. (2007), “Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties”, *Int J Mech Sci*, **49**, 466–478.
- [16] Duc, N.D., Tung, H.V. (2011), “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, **93**, 2874–2881.
- [17] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, D.L.A. (2011), “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **25 (9)**, 2195 – 2209.

Chapitre VI

- [1] Shen, H-S. (2007), “Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties”, *Int J Mech Sci*, **49**, 466–478.
- [2] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002b), “Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory”, *J Thermal Stress*, **25**, 603–625.

- [3] **Samsam Shariat, B.A., Eslami, M.R. (2006)**, “Thermal buckling of imperfect functionally graded plates”, *Int J Solids Struct*, **43**, 4082–4096.
- [4] **Lanhe, W. (2004)**, “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”, *Compos Struct*, **64**, 211–218.
- [5] **Duc, N.D., Tung, H.V. (2011)**, “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, **93**, 2874–2881.